



# Détection d'évènements simples à partir de mesures sur courant alternatif

Nabil Amirach

► **To cite this version:**

Nabil Amirach. Détection d'évènements simples à partir de mesures sur courant alternatif. Traitement du signal et de l'image. Université de Toulon 2015. Français. <NNT : 2015TOUL0006>. <tel-01369271>

**HAL Id: tel-01369271**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01369271>**

Submitted on 20 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale : Mer et Sciences (ED 548).  
IM2NP, UMR CNRS 7334, équipe Signaux et Systèmes.

# THÈSE

présentée par :

**Nabil AMIRACH**

soutenue le : 10 Juin 2015

pour obtenir le grade de :  
Docteur en Automatique, Signal, Productique, Robotique

Spécialité : Traitement du Signal

## Détection d'évènements simples à partir de mesures sur courant alternatif

THÈSE dirigée par : **M. Claude JAUFFRET**, Professeur à l'Université de Toulon

### JURY :

**M. Philippe REFREGIER,**

Professeur des Universités, Ecole Centrale  
Marseille, Président du jury

**M. Jean-Yves TOURNERET,**

Professeur des Universités, INP-ENSEEIH  
Toulouse, Rapporteur

**M. Cédric RICHARD,**

Professeur des Universités, Université de Nice  
Sophia-Antipolis, Rapporteur

**M. Claude JAUFFRET,**

Professeur des Universités, Université de  
Toulon, Directeur de Thèse

**M. Bernard XERRI,**

Maître de Conférences, Université de Toulon,  
Co-encadrant de Thèse

**M. Bruno BORLOZ,**

Maître de Conférences, Université de Toulon,  
Co-encadrant de Thèse



*à mes Parents  
à ma sœur et mes frères  
à ma femme Chloé*



# Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit a été effectué à l'Université de Toulon au sein de l'équipe Signaux et Systèmes du laboratoire IM2NP.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur Claude JAUFFRET, professeur à l'Université de Toulon et directeur de thèse, ainsi qu'à Messieurs Bernard XERRI et Bruno BORLOZ, co-encadrants de thèse, avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler dans une ambiance très amicale.

Je remercie vivement Monsieur Jean-Yves TURNERET, professeur à l'INP-ENSEEIH Toulouse, et Monsieur Cédric RICHARD, professeur à l'Université de Nice Sophia-Antipolis, qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également Monsieur Philippe REFREGIER, professeur à l'école Centrale Marseille, qui m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury et d'en être le président.

Je tiens à exprimer mon profond respect et ma grande sympathie à cette équipe si conviviale et pleine de vie. Annie-Claude PEREZ, Claude JAUFFRET, Bernard XERRI, Bruno BORLOZ, Jean BARRERE, Gilles CHABRIEL, autant de noms qui riment avec amitié, joie, travail, convivialité, échange, gentillesse, passion, respect, générosité, rigueur, partage, famille, ... Pour tous les moments passés à vos côtés durant ces quelques années, MERCI.

Je tiens également à remercier tous mes collègues jeunes docteurs, doctorants et stagiaires pour tous les moments partagés. Mention spéciale à mes amis Sonia, Aziz, Abdel, Hamza, Nagache.

Enfin, je terminerai en m'adressant aux membres de ma famille et à mes amis. Je vous remercie tous de votre soutien et de votre présence à mes côtés. Merci d'être comme vous êtes.

J'exprime toute ma gratitude à tous ceux que j'ai cités et à bien d'autres.



# Table des matières

<b>Introduction générale.....</b>	<b>17</b>
Organisation du manuscrit .....	18
<b>Chapitre I Problématique et état de l'art .....</b>	<b>19</b>
Introduction .....	21
I.1 Problématique .....	21
I.1.1 Contexte et objectifs .....	21
I.1.2 Contraintes industrielles.....	23
I.2 État de l'art.....	25
I.2.1 Méthodes basées sur les macro signatures .....	26
I.2.2 Méthodes basées sur les micro signatures .....	30
Conclusion.....	36
<b>Chapitre II Analyse des signaux et stratégie envisagée .....</b>	<b>37</b>
Introduction .....	39
II.1 Analyse des signaux .....	39
II.1.1 Mesures.....	39
II.1.2 Signaux .....	41
II.2 Stratégie envisagée .....	49
II.2.1 Les grandeurs caractéristiques .....	49
II.2.2 Stratégie .....	52
En résumé.....	56
<b>Chapitre III Description des méthodes existantes : estimation et détection .....</b>	<b>57</b>
Introduction .....	59
III.1 L'estimation en traitement du signal .....	59
III.1.1 Principe : .....	59
III.1.2 Estimation paramétrique en situation non-bayésienne : cas non linéaire.....	62
III.1.3 Estimation paramétrique en situation non-bayésienne : cas linéaire.....	73
III.2 La détection en traitement du signal.....	86
III.2.1 CUSUM.....	87
III.2.2 Application numérique .....	90
Conclusion.....	94



<b>Chapitre IV</b>	<b>Proposition d'un nouveau modèle et algorithmes d'estimation et de détection associés</b>	<b>95</b>
	Introduction	97
	IV.1 Modélisation	100
	IV.1.1 Modèle	100
	IV.1.2 Validation du modèle	104
	Synthèse	108
	<b>IV.2 Estimation</b>	<b>109</b>
	IV.2.1 Moindres carrés	109
	IV.2.2 Application numérique	117
	<b>IV.3 Détection</b>	<b>125</b>
	IV.3.1 Estimation de l'instant de transition	125
	IV.3.1 Algorithme	130
	IV.3.2 Application numérique	131
	Conclusion	134
<b>Chapitre V</b>	<b>Identification des charges</b>	<b>135</b>
	Introduction	137
	V.1 Méthodologie	137
	V.1.1 Principe général	138
	V.1.2 Influence du choix des fréquences	140
	V.1.3 Algorithme proposé	155
	V.2 Identification	158
	V.2.1 Cas de signaux simulés	158
	V.2.2 Cas de signaux expérimentaux	170
	V.3 Variantes possibles	174
	V.3.1 Module d'estimation	174
	V.3.2 Etude du phénomène de non-linéarité	182
	V.4 Amélioration : Détection à seuil fixe	186
	V.4.1 Principe	187
	V.4.2 Validation	188
	V.4.3 Application à des mesures réelles	191
	Conclusion	205
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>207</b>

<b>Annexes .....</b>	<b>211</b>
<b>A) Moindres Carrés Non Linéaire .....</b>	<b>213</b>
<b>B) Matrix Pencil .....</b>	<b>221</b>
<b>C) Borne de Cramér-Rao .....</b>	<b>224</b>
<b>D) Approximation du biais de l'estimateur .....</b>	<b>230</b>
<b>E) Modèle fréquentiel .....</b>	<b>234</b>
<b>F) Evolution du critère en fonction du paramètre <math>N_2</math> .....</b>	<b>237</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>238</b>



# Table des figures

Figure I.1 : Principe de mesures de l'approche intrusive .....	22
Figure I.2 : Principe de mesures de l'approche non-intrusive (NILM).....	23
Figure I.3 : Exemple de signaux macroscopiques [4].....	26
Figure I.4 : Nuage de points représentant les variations de la puissance active et réactive d'une même charge [10].....	28
Figure I.5 : Modèles d'appareils à états finis : lampe à trois modes de fonctionnement [3].....	29
Figure I.6 : Trois sections représentant les variations des puissances active, réactive et du 3ième harmonique du courant [10].....	31
Figure I.7 : Mesure du courant traversant des lampes incandescentes [10].....	32
Figure I.8 : Suivi temporel des pôles et résidus [10] .....	33
Figure I.9 : Courant mesuré (pour référence) et estimation de l'amplitude de la tension lors de l'allumage d'un chauffage de 1kW [17].....	34
Figure I.10 : Image temps-fréquence d'un événement ON et OFF [18].....	34
Figure I.11 : a) Bruit de fond présent avant un évènement, b) Ajout de bruit en réponse à un évènement, c) Suppression du bruit de fond et estimation de paramètres caractéristiques [19] .....	35
Figure II.1 : Pince ampèremétrique utilisée en laboratoire .....	40
Figure II.2 : Sonde différentielle utilisée en laboratoire .....	41
Figure II.3 : Montage électrique pour mesure de courant et tension.....	41
Figure II.4 : a) Tension mesurée et b) zoom .....	44
Figure II.5 : a) Amplitude de la TF de la tension mesurée et b) zoom en amplitude .....	44
Figure II.6 : Courant mesuré.....	45
Figure II.7 : Courant consommé par un moteur en fonctionnement.....	45
Figure II.8 : exemple de a) transition courte, b) transition longue.....	46
Figure II.9 : a) Amplitude de la TF du courant avant transition et b) zoom sur l'amplitude.....	48
Figure II.10 : a) Amplitude de la TF du courant après transition et b) zoom sur l'amplitude .....	48
Figure II.11 : cas a) un seul système en fonctionnement, b) deux systèmes en fonctionnement .....	54
Figure II.12 : Avantage de l'admittance .....	55
Figure III.1 : Principe de l'estimation en traitement du signal.....	60
Figure III.2 : Critère des moindres carrés non-linéaire : cas une seule fréquence.....	66
Figure III.3 : Critère des moindres carrés non- linéaire : cas deux fréquences.....	66
Figure III.4 : Illustration de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson : cas $F_{ini} = 50,5\text{Hz}$ .....	68
Figure III.5 : Illustration de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson : cas $F_{ini} = 51\text{Hz}$ .....	68
Figure III.6 : évolution de chacun des termes de $B(\theta_1/X)$ en fonction de $F_0$ et $N$ .....	76

Figure III.7 : BCR lorsqu'on fixe $\sigma = 1$ et $N = 120$ et on fait varier $F_0$ .....	78
Figure III.8 : BCR lorsqu'on fixe $\sigma = 1$ et $F_0 = 50$ et on fait varier $N$ .....	78
Figure III.9 : On fixe $\sigma$ et $N$ et on fait varier $F_0$ .....	79
Figure III.10 : On fixe $\sigma$ et $F_0$ et on fait varier $N$ .....	79
Figure III.11 : Biais et Variance de l'estimateur de $A_0\cos\varphi_0$ VS biais théorique et BCR .....	83
Figure III.12 : Biais et Variance de l'estimateur de $A_0\sin\varphi_0$ VS biais théorique et BCR .....	83
Figure III.13 : Biais et Variance de l'estimateur de $A_0$ VS biais théorique et BCR .....	84
Figure III.14 : Biais et Variance de l'estimateur de $\varphi_0$ VS biais théorique et BCR.....	84
Figure III.15 : Mesures du courant pendant le fonctionnement d'une résistance .....	91
Figure III.16 : Résultat de la détection et évolution des tests statistiques .....	91
Figure III.17 : Mesures du courant pendant le fonctionnement d'un moteur .....	93
Figure III.18 : Résultat de la détection et évolution des tests statistiques .....	93
Figure IV.1 : Signaux de tension et de courant simulés .....	99
Figure IV.2 : Résultats de l'estimation des paramètres de la tension .....	99
Figure IV.3 : Résultats de l'estimation des paramètres du courant .....	99
Figure IV.4 : Différents cas possibles .....	100
Figure IV.5 : Exemple d'une fenêtre d'observation contenant une transition .....	101
Figure IV.6 : Simulation d'un courant contenant deux transitions courtes .....	104
Figure IV.7 : Comparatif entre la TFD du courant dans la fenêtre d'observation et le modèle fréquentiel pour le cas n°1.....	105
Figure IV.8 : Comparatif entre la TFD du courant dans la fenêtre d'observation et le modèle fréquentiel pour le cas n°2.....	106
Figure IV.9 : Comparatif entre la TFD du courant dans la fenêtre d'observation et le modèle fréquentiel pour le cas n°3.....	107
Figure IV.10 : Estimation modèle global fréquence $F_0 = 50\text{Hz}$ .....	117
Figure IV.11 : Estimation modèle global fréquence $F_1 = 150\text{Hz}$ .....	117
Figure IV.12 : Estimation des paramètres associés à l'état 1 et à l'état 2 du nouveau modèle pour $F_0 = 50\text{Hz}$ .....	118
Figure IV.13 : Estimation des paramètres associés à l'état 1 et à l'état 2 du nouveau modèle pour $F_1 = 150\text{Hz}$ .....	118
Figure IV.14 : Courant simulé contenant une transition longue.....	121
Figure IV.15 : Estimation modèle global fréquence $F_0 = 50\text{Hz}$ .....	122
Figure IV.16 : Estimation modèle global fréquence $F_1 = 150\text{Hz}$ .....	122
Figure IV.17 : Estimation des paramètres associés à l'état 1 et à l'état 2 du nouveau modèle pour $F_0 = 50\text{Hz}$ .....	123
Figure IV.18 : Estimation des paramètres associés à l'état 1 et à l'état 2 du nouveau modèle pour $F_1 = 150\text{Hz}$ .....	123
Figure IV.19 : Erreur de prédiction $E_{1f}, \tau_n$ dans le cas stationnaire .....	126
Figure IV.20 : Erreur de prédiction $E_{1f}, \tau_n$ dans le cas transitoire .....	126
Figure IV.21 : Evolution de la norme de l'erreur de prédiction ( $E_{1f}, \tau_n$ ).....	127

<i>Figure IV.22 : Détection cas d'une transition courte</i> .....	131
<i>Figure IV.23 : Détection cas d'une transition longue</i> .....	131
<i>Figure IV.24 : Détection cas d'une transition longue</i> .....	132
<i>Figure V.1 : Biais et variance de l'estimateur de l'amplitude de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (trait plein bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (pointillé rouge)</i> .....	146
<i>Figure V.2 : Biais et variance de l'estimateur de la phase de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (en bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (en rouge)</i> .....	146
<i>Figure V.3 : Biais et variance de l'estimateur de l'amplitude de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (trait plein bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (pointillé rouge)</i> .....	148
<i>Figure V.4 : Biais et variance de l'estimateur de la phase de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (en bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (en rouge)</i> .....	148
<i>Figure V.5 : Evolution de la norme de l'erreur de prédiction (<math>E1f, \tau</math>)</i> .....	151
<i>Figure V.6 : Evolution de la dérivée de <math>E1f, \tau</math></i> .....	153
<i>Figure V.7 : Zoom sur l'évolution de <math>E1f, \tau</math></i> .....	153
<i>Figure V.8 : Résultat de la détection dans le cas d'une charge résistive.</i> .....	159
<i>Figure V.9 : Résultat de la détection dans le cas d'une charge quelconque (début de transition en vert et fin de transition en rouge)</i> .....	161
<i>Figure V.10 : Résultat de la détection dans le cas d'une charge de type moteur (début de transition en vert et fin de transition en rouge)</i> .....	165
<i>Figure V.11 : Evolution du module de l'admittance estimée de <math>F0</math></i> .....	165
<i>Figure V.12 : Résultat de la détection pour un signal regroupant différentes charges électrique</i> .....	168
<i>Figure V.13 : Résultat de la détection pour un signal regroupant différentes charges électrique</i> .....	168
<i>Figure V.14 : Résultat de la détection pour un signal réel</i> .....	170
<i>Figure V.15 : Résultat de la détection pour un signal réel</i> .....	172
<i>Figure V.16 : Evolution de la norme des résidus d'estimation</i> .....	177
<i>Figure V.17 : Résultat de la détection pour un signal réel mesuré aux bornes d'une résistance</i> .....	178
<i>Figure V.18 : Résultat de la détection pour un signal réel</i> .....	180
<i>Figure V.19 : Signal traité et portion de signal sur laquelle on calcul la fonction de cohérence</i> .....	183
<i>Figure V.20 : Résultat du calcul du module de la fonction de cohérence</i> .....	183
<i>Figure V.21 : Résultat du calcul du module de la fonction de cohérence</i> .....	184
<i>Figure V.22 : Evolution de <math>N2</math> lorsque a) le modèle contient toutes les fréquences et b) une fréquence est négligée</i> .....	186
<i>Figure V.23 : Signal simulé</i> .....	188
<i>Figure V.24 : a) évolution de l'estimation de <math>N2</math> à chaque instant, b) résultat de l'écart avec la rampe, c) résultat de la détection</i> .....	189
<i>Figure V.25 : a) évolution de l'estimation de <math>N2</math> à chaque instant, b) résultat de l'écart avec la rampe, c) résultat de la détection</i> .....	190
<i>Figure V.26 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de <math>N2</math> à chaque instant, c) résultat de l'écart avec la rampe</i> .....	191

<i>Figure V.27 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de N2, c) EQM avec la rampe.....</i>	<i>192</i>
<i>Figure V.28 : Résultat de la détection .....</i>	<i>193</i>
<i>Figure V.29 : zoom sur le dernier évènement détecté .....</i>	<i>193</i>
<i>Figure V.30 : Illustration du problème lié à la deuxième transition longue.....</i>	<i>194</i>
<i>Figure V.31 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de N2, c) EQM avec la rampe.....</i>	<i>195</i>
<i>Figure V.32 : Comparatif entre les instants de transition estimés sur la tension (en rouge) et sur le courant (en vert).....</i>	<i>196</i>
<i>Figure V.33 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de N2, c) EQM avec la rampe.....</i>	<i>197</i>
<i>Figure V.34 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de N2, c) EQM avec la rampe.....</i>	<i>198</i>
<i>Figure V.35 : Mesure réelle traitée.....</i>	<i>199</i>
<i>Figure V.36 : Résultat de la détection .....</i>	<i>199</i>
<i>Figure V.37 : Résultat de la détection .....</i>	<i>200</i>
<i>Figure V.38 : Résultat de la détection .....</i>	<i>201</i>
<i>Figure F : Evolution du critère en fonction de N2.....</i>	<i>237</i>

# Liste des tableaux

<i>Table I.1 : Comparatif des deux types d'approches.....</i>	<i>23</i>
<i>Table II.1 : Constitution du vecteur d'informations.....</i>	<i>56</i>
<i>Table III.1 : Récapitulatif des situations d'estimation en fonction des modèles.....</i>	<i>60</i>
<i>Table III.2 : Résultats des estimations pour deux points d'initialisation différents .....</i>	<i>67</i>
<i>Table III.3 : Résultats des estimations sur toutes les fréquences présentes .....</i>	<i>72</i>
<i>Table IV.1 : Résultats de l'estimation des paramètres caractérisant l'état . 2 dans le cas d'une transition courte .....</i>	<i>119</i>
<i>Table IV.2 : Comparatif des instants de transitions vrais et estimés.....</i>	<i>132</i>
<i>Table V.1 : Vecteur d'information dans le cas d'une charge résistive .....</i>	<i>160</i>
<i>Table V.2 : Vecteur d'information dans le cas d'une charge quelconque .....</i>	<i>162</i>
<i>Table V.3 : Vecteur d'information dans le cas d'un moteur .....</i>	<i>164</i>
<i>Table V.4 : Vecteur d'information dans le cas de plusieurs charges différentes .....</i>	<i>169</i>
<i>Table V.5 : Vecteur d'information dans le cas d'un signal réel .....</i>	<i>171</i>
<i>Table V.6 : Vecteur d'information dans le cas d'un signal réel type moteur.....</i>	<i>173</i>
<i>Table V.7 : Vecteur d'information dans le cas d'un signal réel mesuré aux bornes d'une résistance .....</i>	<i>179</i>
<i>Table V.8 : Vecteur d'information dans le cas d'un moteur réel .....</i>	<i>181</i>
<i>Table V.9 : Vecteur d'information après correction du phénomène non-linéaire .....</i>	<i>185</i>
<i>Table V.10 : Vecteur d'information pour les 10 évènements visibles.....</i>	<i>202</i>





# Introduction générale

La nécessité d'économiser de l'énergie est l'un des axes de recherche importants de ces dernières décennies, d'où le besoin de surveiller la consommation d'énergie des processus résidentiels et industriels. Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit s'intéresse plus particulièrement au suivi de la consommation électrique afin de permettre l'économie d'énergie. Cette thèse se déroule dans le cadre d'une bourse région-entreprise avec la région Provence-Alpes-Côte-D'azur (PACA) et la société Qualisteo sous l'intitulé suivant : « Détection d'évènements simples à partir de mesures sur courant alternatif ».

Le but est d'avoir une connaissance précise et fiable d'un réseau électrique donné. L'objectif principal est de décomposer la consommation électrique globale d'un réseau électrique donné afin de fournir une analyse détaillée de l'énergie consommée par usage (groupe d'appareils électriques). Ce problème a fait l'objet de nombreuses études depuis plus de trente ans.

On distingue deux types d'approches. La première, dite intrusive, consiste à placer un capteur par appareil. Cette approche ne correspond pas à nos objectifs car elle est trop onéreuse compte tenu du nombre important de capteurs à installer.

La seconde sera celle retenue compte tenu des contraintes imposées par l'entreprise. Le travail présenté dans ce manuscrit se place ainsi dans le cadre de l'approche non-intrusive communément appelée *non intrusive load monitoring* (NILM). Elle vise à estimer la consommation des charges à partir d'une mesure du courant et de la tension globale relevés au niveau du compteur électrique, sans connaissance *a priori* sur les charges présentes. En effet, le nombre réduit de points de mesures conduit à la mise en place d'algorithmes beaucoup plus complexes. Mais le nombre de capteurs étant faible, cette approche est beaucoup moins coûteuse que l'approche intrusive.

La plupart des méthodes NILM proposées dans la littérature sont divisées en quatre étapes. Tout d'abord, les étapes de détection d'évènements et d'extraction de caractéristiques sont traitées. Ces deux étapes permettent de créer un vecteur d'informations le plus complet possible. Un vecteur d'informations est, comme son nom l'indique, un tableau regroupant toutes les caractéristiques extraites pour chacun des évènements détectés afin de pouvoir les discriminer. Ensuite vient l'étape de classification. Cette étape utilise les informations fournies par les modules précédents (le vecteur d'informations) afin d'associer chaque évènement à l'usage correspondant. Enfin, une dernière étape estime la consommation électrique de chaque usage.

# Organisation du manuscrit

Ce travail se décompose en cinq chapitres :

1. Problématique et état de l'art
2. Analyse des signaux et stratégie envisagée
3. Description des méthodes existantes : estimation et détection
4. Proposition d'un nouveau modèle et algorithme d'estimation et de détection associés
5. Identification des charges
6. Conclusion et perspectives

## Problématique et état de l'art

Le premier chapitre est composé de deux sous-parties. La première présente le contexte, les objectifs et les motivations industrielles, et la deuxième sous-partie fait un état de l'art des études développées sur le sujet.

## Analyse des signaux et stratégie envisagée

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps une analyse détaillée des données d'entrée, c'est-à-dire l'étude de la forme et du contenu des signaux de courant et de tension. Dans un second temps, nous en déduisons les grandeurs jugées discriminantes et qui nous permettent de caractériser les événements et donc d'établir une stratégie de recherche.

## Description des méthodes existantes : estimation et détection

Après avoir exposé la problématique, analysé les signaux et proposé une orientation de recherche, nous allons dans ce chapitre présenter les méthodes d'estimation et de détection déjà existantes.

## Proposition d'un nouveau modèle et algorithme d'estimation et de détection associés

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les méthodes d'estimation et de détection mises en place dans le but de répondre à la problématique posée.

## Identification des charges

Dans le cinquième chapitre, une première partie présente l'algorithme proposé combinant les parties d'estimation et de détection mises en place dans le chapitre précédent. Cet algorithme a pour objectif de détecter les événements qui surviennent sur un réseau électrique donné et, pour chacun de ces événements, construire un vecteur d'informations. Une deuxième partie est ensuite consacrée à l'application de cet algorithme sur différents types de signaux simulés ou réels, et à l'amélioration des algorithmes.

# Chapitre I Problématique et état de l'art



# Introduction

Dans ce premier chapitre, nous décrivons la problématique industrielle considérée et présentons ensuite une synthèse des approches existantes, leurs avantages et leurs limites.

## I.1 Problématique

### I.1.1 Contexte et objectifs

#### **Contexte :**

Le dernier rapport rendu par le groupe intergouvernemental d'experts pour l'étude du climat (GIEC) a confirmé le relèvement de la température moyenne de l'atmosphère terrestre de 1,5 à 6 °C d'ici à la fin du siècle. Ce réchauffement a déjà provoqué des perturbations climatiques ayant des répercussions humaines gravissimes. Celles-ci seront de plus en plus importantes dans l'avenir. Pour limiter celles-ci et assurer le développement durable de nos sociétés, il est maintenant admis qu'il faudra diviser par deux les émissions de gaz à effet de serre à l'échelle de la planète à l'horizon 2050.

La consommation énergétique dans les logements et les bureaux a augmenté de 30 % ces 30 dernières années en France, en raison :

- du fort accroissement du parc,
- de l'augmentation de la surface moyenne occupée,
- d'un confort accru,
- du développement des usages de l'électricité.

Dans le secteur du bâtiment, la consommation moyenne annuelle d'énergie est proche de 400 kWh d'énergie primaire par m<sup>2</sup> chauffé. La contrainte de réduction des émissions de CO<sub>2</sub>, mais également la hausse inéluctable du coût de l'énergie liée à l'épuisement progressif des ressources naturelles, nécessiteront de réduire fortement la consommation énergétique pour l'ensemble des bâtiments en service. C'est en France le plus gros consommateur d'énergie parmi tous les secteurs économiques, avec 43 % de l'énergie finale totale [1] [2].

#### **Objectifs :**

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans ce contexte de souci d'économie d'énergie. Le principal objectif de cette thèse est d'étudier la consommation électrique d'un réseau donné afin de permettre au consommateur de comprendre et d'optimiser sa consommation électrique. Cette thèse trouve tout son sens dès lors que l'on a conscience du contexte actuel dans lequel il faut réduire les dépenses énergétiques et où l'électricité est l'énergie la plus utilisée, environ 42% des consommations totales en France. De plus dans le cas de l'électricité, environ deux tiers de l'énergie est perdue dans le processus de transformation en énergie finale. C'est-à-dire que pour 1kWh d'électricité utilisée au compteur, il aura fallu près de 3kWh d'énergie primaire [1]. En plus des enjeux environnementaux, la problématique est également importante économiquement du point de vue du consommateur. En effet, nous nous sommes tous posés la question un jour : comment se fait-il que ma facture soit si élevée ?

Donc dans le but d'aider le consommateur à comprendre et réduire sa consommation électrique, il faut effectuer et fournir une étude détaillée de son réseau électrique. Pour cela, il

## I.1. Problématique

existe deux types d'approche, qui se différencient par leur degré variable d'intrusion et de matériels nécessaires, par la complexité des algorithmes mis en place ainsi que par leur coût potentiel.

La première approche regroupe les méthodes de surveillance de la consommation électrique basées sur une instrumentation complexe de collecte de données mais des algorithmes simples de traitement de ces données : elle consiste à utiliser un capteur (un point de contrôle) pour chaque appareil d'intérêt (*i.e.* présent sur le réseau à étudier) chacun relié à une centrale de collecte de données. De cette façon, le logiciel n'a plus qu'à compiler les données arrivant des différents capteurs pour fournir la consommation électrique de chaque usage présent sur le réseau (une analyse détaillée et précise du réseau).

Le fait que chacune des charges présentes sur le réseau soit reliée à un capteur permet de fournir une analyse très précise de la consommation par usage. Cependant cette précision est obtenue au prix de nombreux inconvénients. Un réseau électrique, domestique ou industriel, contient un grand nombre d'appareils électriques donc son étude nécessitera un grand nombre de capteurs. Le nombre élevé de capteurs engendre un coût très élevé. Et compte tenu de ce nombre de capteurs à déployer, l'intrusion chez le client ainsi que le temps d'installation sont grands. De plus, l'importance de ces inconvénients croît avec la taille du réseau étudié.

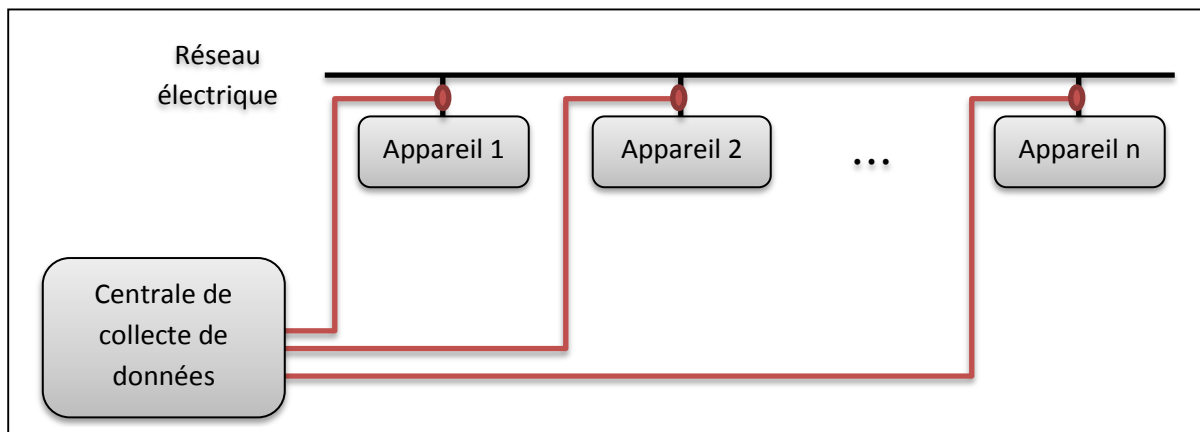


Figure I.1 : Principe de mesures de l'approche intrusive

La deuxième est l'approche non-intrusive (NILM). Contrairement à la précédente, elle a besoin de peu de matériel mais en contrepartie il faut des algorithmes complexes pour le traitement et l'analyse des signaux : elle ne nécessite qu'un seul point de mesure à l'entrée de l'installation (au niveau du compteur d'électricité) et ce sont les algorithmes mathématiques qui s'occupent de décomposer la consommation totale en consommation par usage.

L'avantage principal lié à ce type d'approche réside dans sa simplicité d'installation et son faible coût. En effet, le peu de matériel nécessaire à sa mise en œuvre entraîne une diminution de la durée d'installation ainsi qu'un coût amoindri. De plus comme le seul point de mesure se trouve au niveau du compteur d'électricité, il n'y aura aucune intrusion chez le consommateur (le client). Cependant, ces avantages ont une contrepartie. Il est aisé de comprendre que le fait de simplifier l'installation a, en réalité, déporté la complexité sur la partie algorithmique. Car utiliser moins de capteurs entraîne nécessairement un manque d'information et c'est donc à la partie algorithmique de compenser ce manque. Finalement, cette partie, dont le seul but était de calculer la puissance consommée pour chaque classe d'usage, devra maintenant détecter les événements, les associer aux usages (charges électriques) qui en sont la source puis en déduire la consommation par usage (ou classe d'usage).

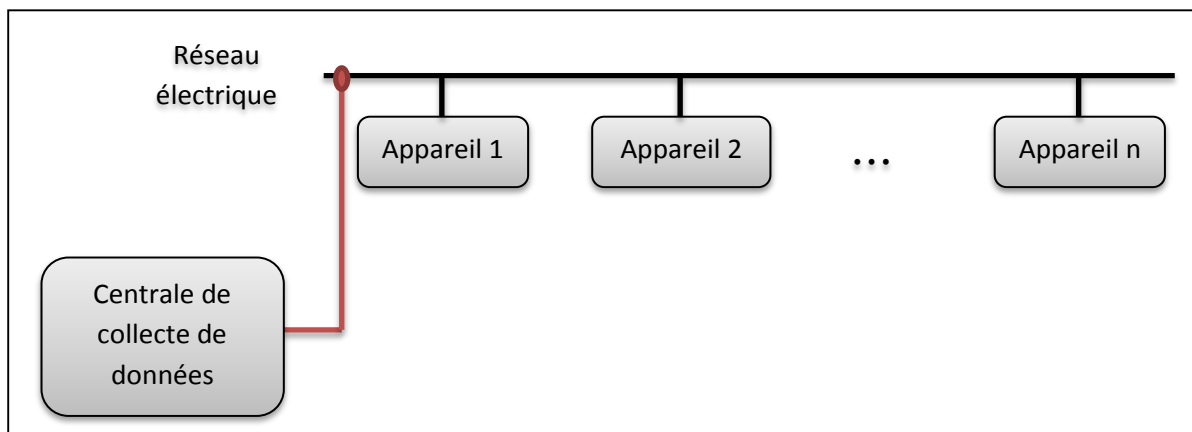


Figure I.2 : Principe de mesures de l’approche non-intrusive (NILM)

Synthèse :

Table I.1 : Comparatif des deux types d’approches

Approche intrusive		Approche non-intrusive	
Avantages	Inconvénients	Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Précis</li> <li>- Simplicité des algorithmes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Intrusion chez le client</li> <li>- Beaucoup de capteur</li> <li>- Temps d’installation grand</li> <li>- Très coûteux</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Aucune intrusion chez le client</li> <li>- Peu de capteur</li> <li>- Temps d’installation court</li> <li>- Peu coûteux</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Précision à améliorer</li> <li>- Complexité algorithmique</li> </ul>

## I.1.2 Contraintes industrielles

Dans le cadre de nos travaux, la ligne conductrice (l’axe de recherche) est définie en fonction de contraintes qui résultent des choix de l’entreprise. Il y a, en réalité, deux contraintes qui sont étroitement liées.

La première est une contrainte commerciale qui stipule que la solution proposée ne doit pas être trop onéreuse. Car, si le produit commercialisé a un coût trop élevé, il ne trouvera pas preneur.

La deuxième contrainte est une contrainte technologique. Cette dernière impose que la solution proposée soit non-intrusive, c’est-à-dire que nous avons uniquement accès au compteur électrique. Nous n’avons donc aucune information sur les usages présents sur le réseau étudié : l’intérieur du réseau électrique est vu comme une boîte noire, c’est-à-dire qu’on ne connaît ni les types d’usage, ni leur nombre.

Compte tenu des contraintes posées dans le cadre de nos recherches sur la surveillance de la consommation électrique, la solution fondée sur l’instrumentation de l’ensemble des appareils n’est pas envisageable. Nous travaillerons donc sur l’approche non-intrusive qui a l’avantage d’engendrer un coût matériel beaucoup plus faible. Elle satisfait donc toutes les contraintes industrielles.



## I.1. Problématique

L'approche non-intrusive se décompose en quatre étapes :

1. la détection d'évènements,
2. l'extraction de caractéristiques,
3. la classification,
4. l'estimation de la consommation par usage.

Voyons en quoi consistent ces différentes étapes.

### Détection d'évènements :

Un évènement est défini par une transition qui survient, sur le courant et/ou la tension, lorsqu'un appareil s'allume (transition ON ou enclenchement) ou s'éteint (transition OFF ou déclenchement).

Cette étape consiste à détecter chaque mise en route ou extinction d'appareil qui survient sur le réseau, c'est-à-dire déterminer les instants de transition.

Nous verrons par la suite que dans le cadre de cette thèse une transition est définie par un début et une fin (*i.e.* une durée). Donc la phase de détection d'évènement consistera à estimer l'instant de début de transition ainsi que la durée de la transition.

### Extraction de caractéristiques :

Une charge électrique qui s'allume ou s'éteint va provoquer un certain nombre de changements sur la tension et sur le courant :

- une variation d'amplitude du courant qui sera liée à la puissance de l'appareil,
- un déphasage du courant par rapport à la tension, (sauf dans le cas d'une résistance pure),
- l'apparition d'harmoniques (dans le cas de systèmes non linéaires).

L'extraction de caractéristiques consiste à estimer les paramètres discriminants, c'est-à-dire les paramètres qui vont nous permettre ensuite d'associer chaque évènement à une charge électrique : ces estimations seront ensuite sauvegardées à des fins d'analyse ultérieure.

### Classification :

Cette étape permettra, en exploitant les informations extraites lors des deux étapes précédentes, de définir des classes d'usage (*i.e.* des appareils ayant le même comportement), voire de regrouper entre eux tous les évènements causés par un même appareil.

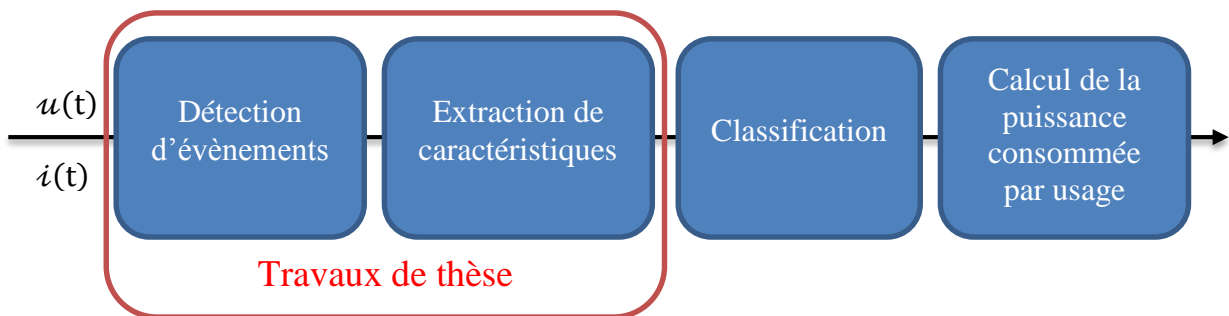
A ce stade, nous savons qu'il y a eu un évènement, nous ne savons pas s'il s'agit d'une transition de type ON ou OFF, et nous ne savons pas non plus quel type d'appareil en est la source. Cependant, nous avons estimé et extrait un certain nombre de paramètres qui vont nous permettre de les associer entre eux. En effet, deux évènements dont les caractéristiques sont sensiblement les mêmes seront associées au même appareil.

### Estimation de la consommation par usage :

Cette dernière étape consiste simplement à faire le bilan des trois précédentes. En effet, compte tenu des informations dont nous disposons, les instants d'apparition des évènements

ainsi que le regroupement des évènements par usage, il nous faut reconstruire le scénario de chaque usage. Ceci constituera l'analyse détaillée du réseau, c'est-à-dire la décomposition de la consommation électrique globale par usage, qui sera fournie au consommateur afin de l'aider à optimiser sa consommation électrique.

Notons toutefois qu'il existe certaines contraintes. La première contrainte est une limitation de la quantité de données à stocker. La conséquence principale liée à cette contrainte est la limitation de la fréquence d'échantillonnage (qui ne peut pas être trop élevée). Or ce choix va influencer la stratégie envisagée. En effet, une fréquence d'échantillonnage trop faible aura pour conséquence, par exemple, l'impossibilité d'étudier la partie transitoire. Notons toutefois que certaines solutions utilisent des fréquences très élevés (plusieurs centaines de kHz voire des MHz).



Dans le cadre de cette thèse, nous nous consacrerons aux étapes de détection d'évènements et d'extraction des caractéristiques permettant de les caractériser. De ce fait, nous ne développerons pas les étapes de classification et d'estimation de la consommation par usage.

## I.2 État de l'art

Les méthodes NILM furent mises en place dans le but de décomposer la consommation électrique globale par usages. Ce sujet de recherche a fait l'objet de nombreux travaux durant les 30 dernières années. Ces études font suite aux travaux pionniers de Georges Hart [3] qui fut le premier à mettre en place des méthodes de désagrégation de la consommation électrique de façon non intrusive.

Ce chapitre fait une synthèse des différentes méthodes mises en place pour l'identification des charges électriques ainsi que des avantages et des inconvénients liés à leur utilisation. Ces méthodes se basent sur le suivi des paramètres tels que la puissance active, la puissance réactive, ou encore la valeur efficace du courant. En fonction de la méthode utilisée, ce sont les variations de ces paramètres, soit en régime permanent soit en régime transitoire, qui permettent la détection et l'identification des charges électriques. Ces paramètres sont appelés "signatures". Chaque usage a une signature électrique qui lui est propre et qui permet de définir son comportement électrique.

Il existe deux grandes classes de signatures électriques : les macro-signatures (ou signatures macroscopiques) et les micro-signatures (ou signatures microscopiques). Nous rappelons ici les définitions données dans [4] et [5].

- on appelle macro-signatures les signatures (paramètres) extraites de mesures basse fréquence, c'est-à-dire des signaux dont la fréquence d'échantillonnage est de l'ordre du Hertz.

- on appelle micro-signatures les signatures (paramètres) extraites de mesures haute fréquence, c'est-à-dire des signaux dont la fréquence d'échantillonnage peut aller, suivant les travaux, du kHz au MHz.

La stratégie et la méthode mises en place dépendent des signatures que l'on souhaite extraire (des paramètres caractéristiques). C'est pourquoi nous allons articuler cet état de l'art par rapport aux caractéristiques utilisées par les auteurs pour distinguer les différents usages. Il existe donc deux approches qui se différencient par la nature des paramètres caractéristiques : celle qui utilise les macro-signatures et celle qui utilise les micro-signatures.

## I.2.1 Méthodes basées sur les macro signatures

Les signatures macroscopiques sont des caractéristiques extraites de signaux mesurés à une fréquence d'échantillonnage faible (de l'ordre de 1Hz). Effectuer des mesures à une cadence de un échantillon par seconde conduit à la perte de la forme d'onde du courant.

Un exemple de signaux mesurés à une telle fréquence est présenté dans la figure ci-dessous (Figure I.3). Cette figure tirée de [4] montre un profil de consommation des ménages à travers les variations de courant et de puissance active sur une période de quelques heures. Elle nous permet effectivement de remarquer que la forme du courant n'est ni sinusoïdale ni même périodique. Les données macroscopiques donnent accès à des signatures permettant de caractériser le comportement (la consommation) global des usages électriques en observant des changements globaux de la consommation dus à des changements d'états des appareils (événements ON/OFF, changement de mode de fonctionnement, etc.).

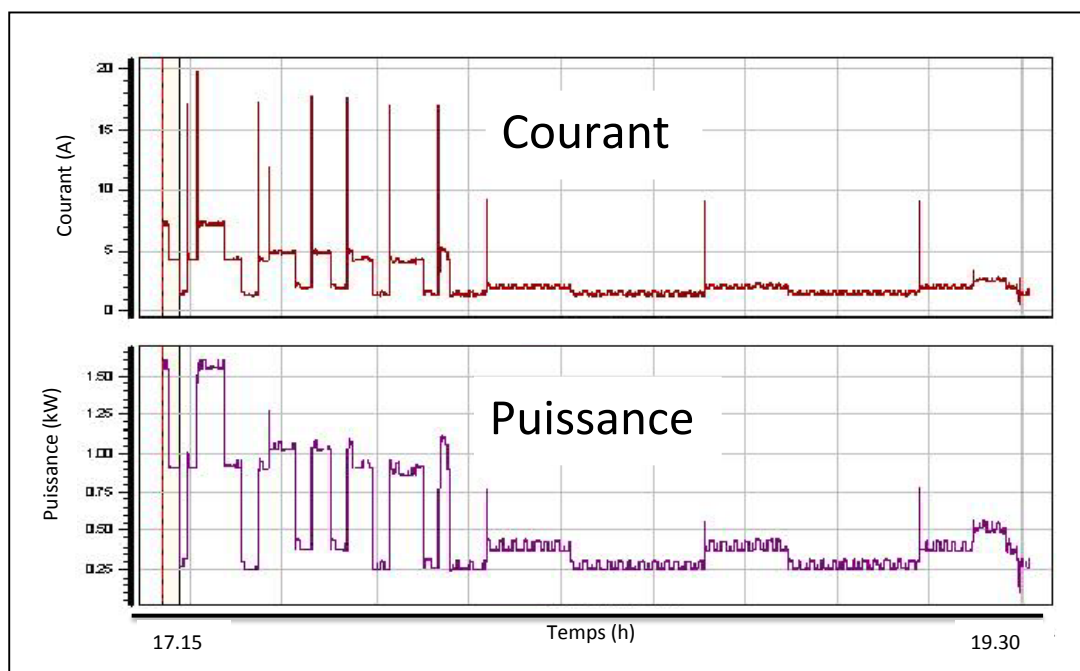


Figure I.3 : Exemple de signaux macroscopiques [4]

A partir de ces signaux, on peut utiliser la valeur des sauts pour identifier les appareils, ou encore essayer d'identifier des cycles de fonctionnement répétés au cours du temps comme le cycle compression/détente d'un réfrigérateur ou encore l'alternance entre régime de régulation et régime de saturation (puissance quasiment constante) d'un convecteur. La

puissance moyenne consommée ainsi que la durée de fonctionnement typique des usages sont les exemples les plus courants de signatures macroscopiques.

Dans les travaux pionniers sur les courbes de charge, ce sont les signatures macroscopiques des usages qui sont exploitées pour la décomposition de la courbe de charge. En effet ces signatures sont plus faciles d'accès puisque des appareils standards (voltmètre, ampèremètre, wattmètre) permettent de réaliser des mesures à ces fréquences.

Notons toutefois que les méthodes basées sur les macro signatures travaillent pour la plupart sur des signaux de puissance tels que la puissance active (P) et la puissance réactive (Q).

## Rappel

La puissance active correspond à la puissance moyenne consommée sur une période. Elle est notée P et est exprimée en watt (W).

Pour un courant  $i(t)$  et une tension  $u(t)$  de période T, son expression est :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt \quad (\text{V.1})$$

En régime alternatif, c'est-à-dire pour une tension et un courant sinusoïdal de la forme :

$$u(t) = U. \sin(\omega t) \quad (\text{V.2})$$

$$i(t) = I. \sin(\omega t - \varphi) \quad (\text{V.3})$$

cette expression devient :

$$P = U. I. \cos(\varphi) \quad (\text{V.4})$$

Quant à la puissance réactive, elle est exprimée en voltampère réactif (VAr) et est donnée par :

$$Q = U. I. \sin(\varphi) \quad (\text{V.5})$$

Son intérêt provient du fait qu'elle permet d'évaluer l'importance des récepteurs inductifs (moteurs, lampes fluorescentes, ...) et des récepteurs capacitifs (condensateurs, ...) dans l'installation.

## Puissances

Le premier à utiliser comme paramètre les variations de la puissance est Georges Hart [3], qui a conçu un appareil dédié à l'identification de charges pour la consommation individuelle [6].

La méthode qu'il a développée consiste à travailler sur deux grandeurs macroscopiques, la puissance active et la puissance réactive, à une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz. L'idée est de déterminer les plages de fonctionnement des charges ou des groupes de charges individuelles en identifiant les instants où la puissance électrique varie brutalement, c'est-à-dire qu'elle passe d'une valeur à peu près constante à une autre (d'un état stable à un autre). Ce saut d'un état stable à un autre est appelé évènement et correspond soit à l'allumage soit à l'extinction d'une charge. Un évènement est caractérisé par le signe et l'amplitude de la variation qu'il engendre en puissance active et réactive. Les évènements détectés ayant les mêmes amplitudes et des signes opposés sont couplés pour établir le cycle de fonctionnement et calculer la consommation d'énergie des différents appareils.

## I.2. Etat de l'art

Voici les différentes étapes de la méthode:

1. L'étape de détection. Cette première étape permet de détecter, en comparant les variations de puissance à un seuil prédéfini<sup>1</sup>, les instants de changement d'état et d'extraire les signatures d'intérêt que sont les variations de puissance active ( $\Delta P$ ) et réactive ( $\Delta Q$ ).
2. Un algorithme regroupe ces variations de puissance  $\Delta P$  et  $\Delta Q$  dans un espace à deux dimensions appelé plan ( $\Delta P, \Delta Q$ ).
3. La représentation des variations de puissances dans le plan ( $\Delta P, \Delta Q$ ) (Figure I.4), permet d'observer pour une même charge deux nuages de points. Ces deux nuages, symétriques par rapport à l'origine, correspondent à la mise en marche et en arrêt. Le regroupement de ces nuages permettra d'identifier les charges du même usage.
4. L'étape de correction permet d'associer les groupes restants en les intégrant à des groupes déjà associés, ou en les associant entre eux.
5. La dernière étape consiste à donner un nom à chaque association de groupe d'événements en utilisant des données d'apprentissage, c'est-à-dire associer les événements ou groupe d'évènements (nuage de points) à un usage ou une classe d'usage. Cette étape permet finalement de déterminer le scénario de fonctionnement et de calculer la consommation individuelle de chaque usage ou classe d'usage.

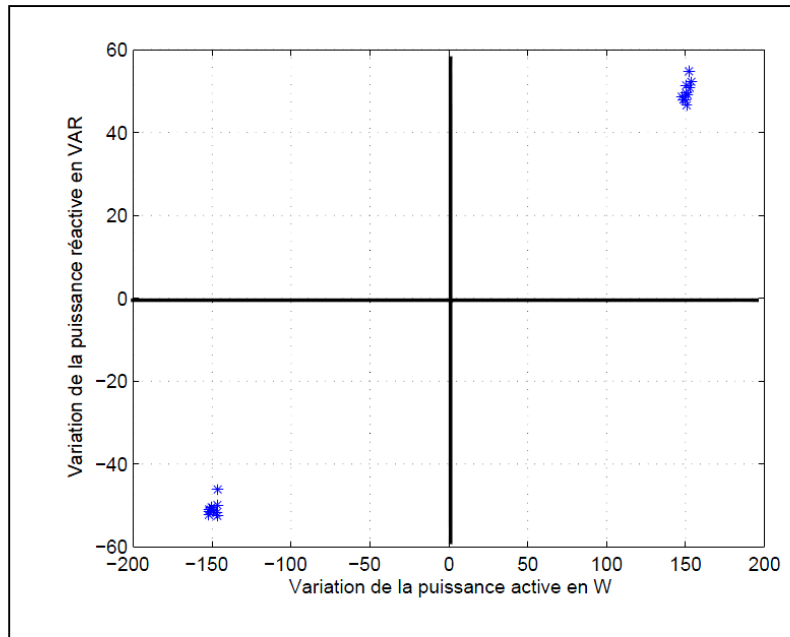


Figure I.4 : Nuage de points représentant les variations de la puissance active et réactive d'une même charge [10]

Tel qu'il est présenté ici, cet algorithme permet essentiellement de caractériser les charges de type ON/OFF, c'est-à-dire les charges telles que les ampoules ou les grilles pain, qui peuvent être, à un instant donné, soit allumées soit éteintes. Cependant Hart [3] va plus loin en modélisant chaque appareil par une machine à états finis (Finite State Machine FSM). Cette modélisation permet de décrire aussi bien les appareils de type ON/OFF que les appareils multi-états. La classe multi-états regroupe les appareils du type lave-linge ou lave-vaisselle, qui présentent différents modes de fonctionnement tels que le lavage, le rinçage, l'essorage etc. durant lesquels la puissance électrique consommée est nettement différente.

---

<sup>1</sup> Le choix du seuil est laissé à l'appréciation d'un expert. Il dépend fortement de l'installation étudiée.

La Figure I.5 montre le cycle de fonctionnement d'une lampe à trois états. Le tracé (a) de la puissance en fonction du temps montre les différents niveaux de puissance consommée dans chacun des modes de fonctionnement : faible, moyen, et élevé. Ce profil de consommation est stocké dans la base de données sous la forme d'une machine à états fini (b).

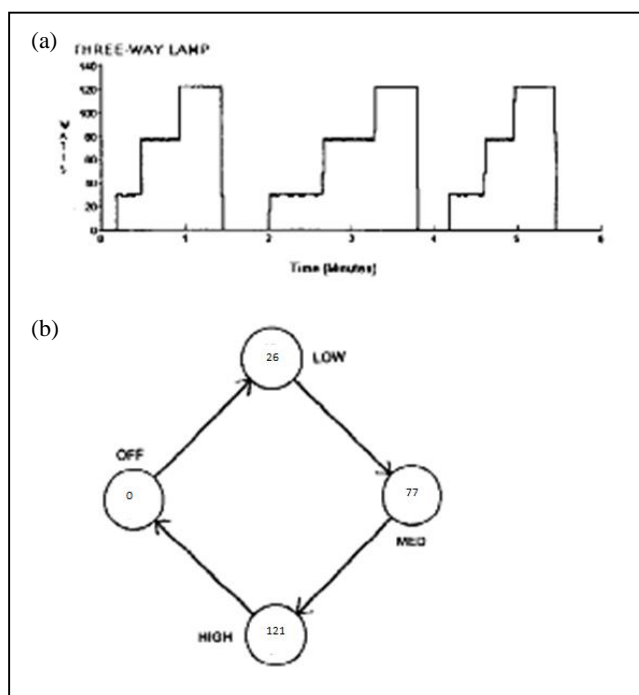


Figure I.5 : Modèles d'appareils à états finis : lampe à trois modes de fonctionnement [3]

Cette approche, également reprise par Cole et Albicki [7], permet une identification d'un certain nombre d'usages en se basant uniquement sur les changements d'états permanents. Cependant il existe un certain nombre de problèmes liés à cette méthode, que Palomera-Arias et Norford [8] ont mis en évidence suite à la mise en application d'une méthode similaire lors de tests effectués dans un restaurant. Ces tests leur permettent d'étudier les performances de leur méthode NILM en comparant l'énergie estimée par usage avec la mesure directe de leur consommation individuelle. Ils mettent en lumière les inconvénients de cette approche basée sur les changements de puissance en régime permanent :

- La difficulté à différencier des appareils de nature différente ayant des consommations en puissances P et Q similaires.
- La possibilité de perdre un état dans le cas de charges à plusieurs états, qui conduit alors à un bilan de cycle différent de zéro.
- La difficulté à identifier les charges dans le cas où leurs mises en marche sont rapprochées dans le temps.
- La difficulté à détecter les appareils à variation continue comme, par exemple, les variateurs de lumière, avec une gamme continue d'états car ils ne génèrent pas de changements majeurs de puissance (pas de changement brusque).

Afin d'améliorer l'identification des usages et de pallier la difficulté à différencier des appareils différents à consommation similaire Liang propose [4] d'utiliser la puissance active (P), la puissance réactive (Q) et la valeur efficace maximale du courant calculée sur un intervalle de 1s comme troisième paramètre caractéristique.

## Synthèse

Concernant les méthodes d'identification de charges utilisant les signatures macroscopiques des usages, il est important de noter qu'il existe des limites inhérentes à ce type de méthodes. En effet, puisque les signaux utilisés sont collectés à de faibles fréquences, le risque que deux usages changent d'état simultanément (au même instant d'échantillonnage) est important. De plus les grandeurs accessibles à ces fréquences sont essentiellement les puissances active et réactive du fondamental. À ces fréquences, ces grandeurs s'avèrent parfois insuffisantes pour distinguer deux usages différents.

De plus, cette méthode ne traite que le régime permanent, car la durée d'un régime transitoire n'excède que rarement 1s qui est du même ordre de grandeur que la période d'échantillonnage.

### I.2.2 Méthodes basées sur les micro signatures

Dans le but de pallier les inconvénients rencontrés en utilisant les méthodes précédentes, les recherches se sont orientées vers les approches micro-signatures, utilisant une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus élevée (du kHz au MHz), afin d'étudier plus en détail le signal. On dispose alors de suffisamment de points par cycle pour utiliser la forme d'onde du courant ou encore des informations telles que la forme du régime transitoire qui survient lors d'un évènement pour caractériser des appareils.

## Courants harmoniques

Tenant compte du fait que de nombreux usages (tels que les ordinateurs, ...) consomment des courants déformés ou non sinusoïdaux et ce en raison de leurs caractéristiques physiques ou la présence d'électronique de puissance, les auteurs de [9] proposent d'utiliser les harmoniques de courant afin de discriminer les usages de natures différentes présentant des caractéristiques similaires dans le plan  $(\Delta P, \Delta Q)$ .

L'idée est donc d'étudier les variations dans le temps du contenu harmonique du courant (jusqu'à la septième harmonique). Pour cela, la fréquence d'échantillonnage est fixée à 8 kHz. Les enveloppes spectrales sont calculées en effectuant une transformée de Fourier à court terme sur le courant mesuré.

La Figure I.6 montre que l'étude des fréquences harmoniques et l'ajout de cette signature fréquentielle à la puissance active et réactive permet effectivement de discriminer certains usages dont la consommation de puissance active et réactive est proche. Cette figure représente l'espace des signatures extraites pour une série d'évènements ON et OFF produits par des ordinateurs et des lampes.

La figure du haut montre que les différentes charges sont pratiquement impossibles à distinguer dans l'espace de signature  $(\Delta P, \Delta Q)$  car leur consommation en puissance active et réactive est très proche. Cependant, les alimentations d'ordinateur consomment des courants harmoniques plus particulièrement des harmoniques de rang 3. Donc en examinant les signatures harmoniques les charges devraient être facilement séparables.

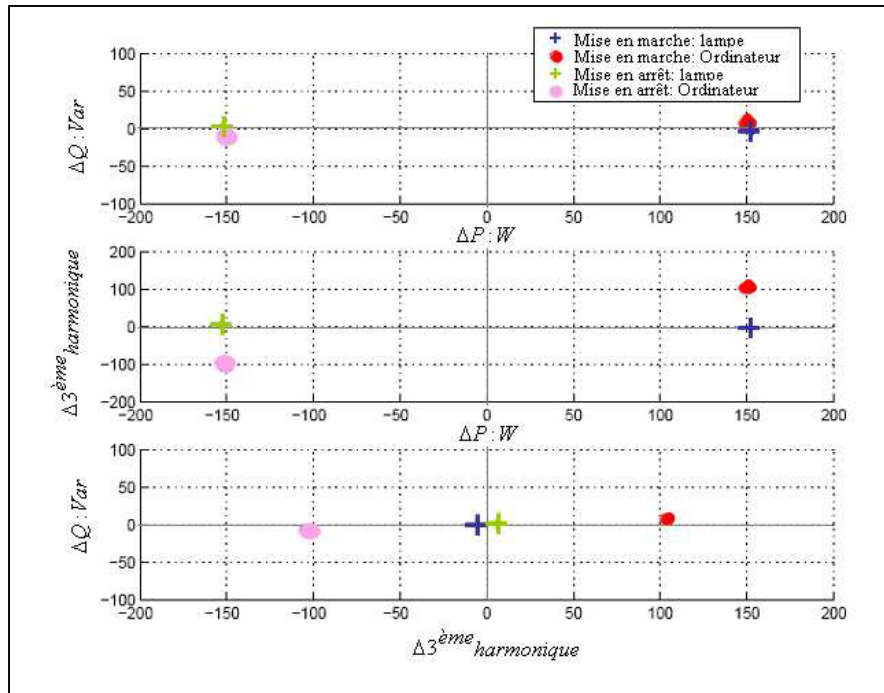


Figure I.6 : Trois sections représentant les variations des puissances active, réactive et du 3<sup>ème</sup> harmonique du courant [10]

Cette figure montre qu'il devient très simple de différencier deux charges dans l'espace de signatures regroupant les variations de puissance active, de puissance réactive et de l'amplitude de la troisième harmonique.

Une approche plus récente s'appuyant uniquement sur le courant mesuré ( $f_e = 1600\text{Hz}$ ) est proposée dans [10]. Cette approche consiste à caractériser les charges en fonctionnement par les caractéristiques liées au régime libre et au régime forcé, autrement dit le régime transitoire et le régime permanent. La méthode d'identification utilisée pour construire la signature des charges électriques est la méthode Matrix Pencil [11] [12] qui traduit la signature transitoire et permanente d'un appareil en un nombre limité de pôles et de résidus. Le nombre de couples pôle-résidus est également à déterminer à l'aide d'un seuillage des valeurs singulières (il correspond aux plus grandes valeurs singulières). Notons que les valeurs des pôles et des résidus sont le résultat de la décomposition du courant sur une base d'exponentielles complexes.

Le principe est d'appliquer la méthode Matrix Pencil sur des fenêtres d'analyse successives de 20 ms débutant sur un passage par zéro de la tension et coïncidant avec les périodes de la tension (soit des fenêtres d'observation contenant 32 échantillons) afin de suivre l'évolution des pôles et des résidus. De ce fait, les variations du nombre de pôles ou des valeurs des résidus ou des valeurs singulières permettent de détecter les événements qui surviennent sur le courant (changements d'état). La phase d'identification consiste ensuite à analyser les variations des valeurs des pôles et résidus aux instants de changement d'état.

Une autre manière de détecter les changements d'état proposée dans [10] serait d'utiliser la méthode des ondelettes [13] (algorithme de Mallat) puis d'appliquer la méthode de Matrix Pencil à partir de ces instants.

Dans le cadre des travaux présentés dans [10], l'auteur choisit d'identifier les charges en utilisant des caractéristiques issues du signal de courant uniquement. De plus, il fait l'hypothèse d'une tension constante oscillant à une fréquence pure de 50Hz. Cette hypothèse



## I.2. Etat de l'art

de travail, bien que théoriquement vraie, est assez restrictive et risque de poser un certain nombre de difficultés. Voyons les problèmes inhérents à ces choix.

La première limitation est le risque de dire qu'une charge est non-linéaire car elle présente des harmoniques alors qu'en réalité c'est une charge parfaitement linéaire. En effet, nous verrons par la suite qu'en réalité la tension peut contenir d'autres fréquences (harmoniques) en plus du 50Hz. De ce fait, le courant traversant une charge linéaire aura le même contenu fréquentiel (le courant ne sera pas une fréquence pure). Or, si nous nous plaçons dans le cadre des travaux de [10], un courant présentant des harmoniques est automatiquement associé à une charge non-linéaire.

Une autre limitation est le risque de mal interpréter les paramètres estimés ou pire le risque d'une fausse détection. Nous verrons au chapitre II qu'en réalité la tension fluctue et que ces variations d'amplitude se retrouvent également sur le courant. Donc en travaillant uniquement sur le courant, les paramètres estimés ne seront pas caractéristiques de la charge en fonctionnement, et dans le pire cas, on pourrait penser que ces variations de courant sont dues à un changement d'état d'une charge électrique (fausse détection). Cette limitation apparaît clairement sur des résultats sur données réelles donnés dans [10]. La Figure I.7 représente la mesure du courant traversant des charges résistives. Le suivi temporel des pôles et résidus normalisés obtenus par la méthode de Matrix Pencil sur douze fenêtres d'analyse successives est donné Figure I.8. Le traitement fournit deux couples pôle-résidu "\*" et "o".

Dans son développement théorique, l'auteur stipule que les pôles et les résidus caractérisant une charge résistive sont des nombres complexes conjugués. Or au regard des résultats obtenus, ce n'est pas le cas. Contrairement à la théorie, on constate sur la Figure I.8 que le couple de pôles et de résidus obtenus présente des parties réelles non-nulles (et non négligeables). Ces erreurs d'estimations (les variations des paramètres estimés) pourraient être dues aux variations de la tension (une conséquence des hypothèses de départ).

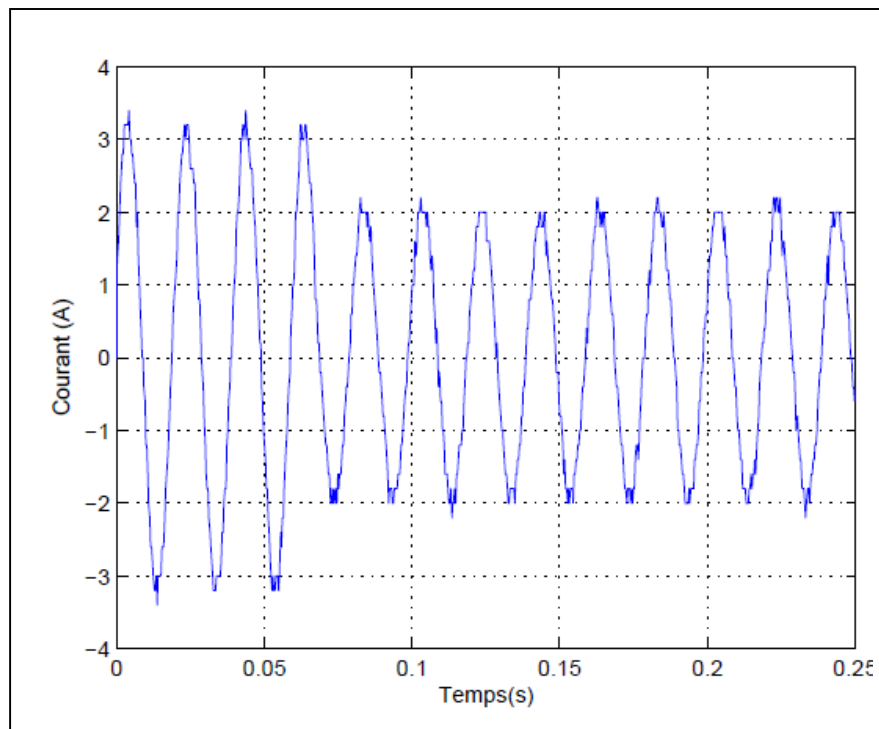


Figure I.7 : Mesure du courant traversant des lampes incandescentes [10]

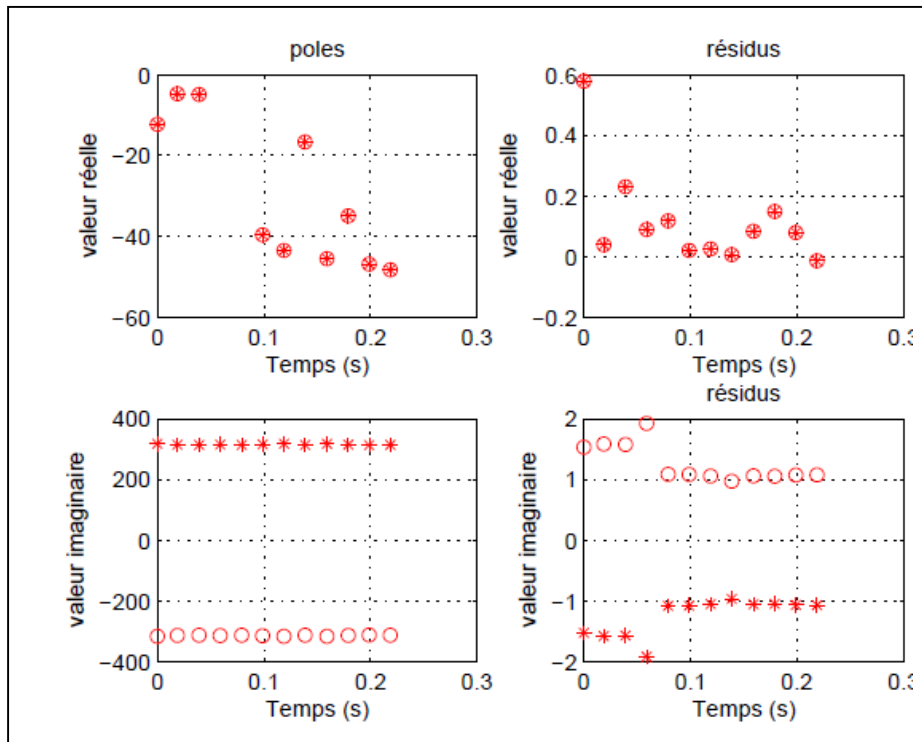


Figure I.8 : Suivi temporel des pôles et résidus [10]

## Caractéristiques transitoires

Dans [14], les auteurs proposent de caractériser la forme de la zone transitoire par la puissance consommée lors de la mise sous tension d'une charge électrique.

Plutôt que de se limiter à l'extraction de quelques caractéristiques du régime transitoire, certains auteurs ont cherché à modéliser entièrement la forme des variations de la puissance active en régime transitoire. Dans [7], les auteurs proposent de modéliser la puissance active en régime transitoire par un changement abrupt, une pente douce suivie du régime permanent constant. Ce modèle de régression, quoique très simple, permet de reconnaître certaines classes d'appareils. Dans [15] et [16], cette modélisation repose sur les sections du signal transitoire qui présentent des variations significatives de la puissance active, appelées *v-sections*. Ces *v-sections* sont dans un premier temps apprises pour chaque classe de transitoire sur une base d'exemples (base de données faisant suite à une phase d'apprentissage). Puis, durant la phase de reconnaissance, l'algorithme cherche à identifier des séquences de *v-sections* dans le signal observé. Pour cela, la position et l'amplitude initiale de chaque *v-sections* sont estimées conjointement à un paramètre de gain d'amplitude qui s'applique à toutes les *v-sections* simultanément. Cette approche a été appliquée avec succès à la surveillance de bâtiments industriels et commerciaux.

Plus récemment dans [5], l'auteur utilise également la signature transitoire des usages en puissance active. L'approche proposée consiste en la mise en place d'un modèle de régression appelé « modèle de régression à transition régulière » développé pour la représentation des signaux transitoires électro-domestiques.

Notons enfin l'approche de [17] qui consiste à appliquer la modélisation précédente en *v-sections* au signal de tension au lieu de la puissance active. En effet, cette approche s'appuie sur le fait que l'enveloppe du signal de tension présente des variations similaires aux variations du courant comme le montre la Figure I.9. L'intérêt de la méthode est de remplacer

## I.2. Etat de l'art

la mesure des signaux de courant et de tension généralement effectuée par la mesure de la tension seule.

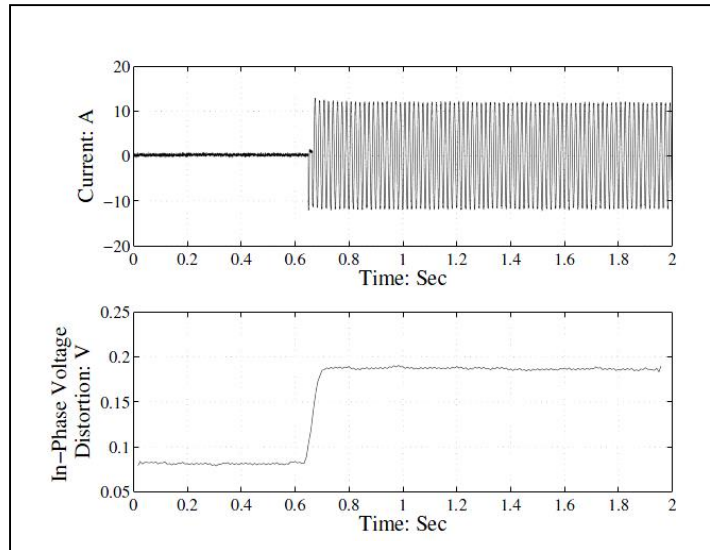


Figure I.9 : Courant mesuré (pour référence) et estimation de l'amplitude de la tension lors de l'allumage d'un chauffage de 1kW [17]

Une autre approche est basée sur le fait que les changements d'état des usages électriques produisent un bruit sur la tension. Une solution originale au problème de la détection et de l'identification des usages électriques, introduite dans [18] puis reprise dans [19], a pour but d'exploiter la signature très haute fréquence (bruit très haute fréquence) qui survient sur la tension lors de la mise en marche ou en arrêt des usages à deux états (des usages de type ON/OFF).

L'analyse temps-fréquence est donnée sur la Figure I.10 (tirée de [18]) qui représente l'évolution des fréquences en fonction du temps lorsque l'on allume et qu'on éteint une ampoule. Sur cette figure il est aisé de visualiser les instants de transition. On remarque en effet que lors d'un changement d'état, un grand nombre de fréquences apparaît durant un court instant sur la plage de fréquence considérée. Ceci est la signature de la charge électrique.

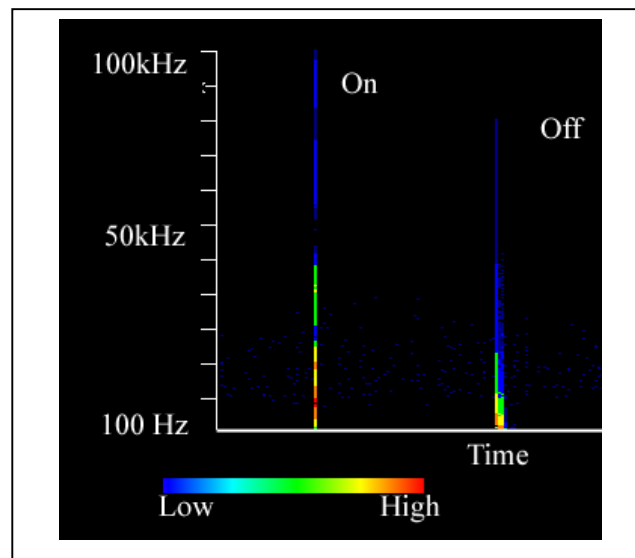


Figure I.10 : Image temps-fréquence d'un événement ON et OFF [18]

L'approche proposée consiste donc à mesurer la tension à une fréquence très élevée (de l'ordre du MHz) et à appliquer une transformée de Fourier sur chaque fenêtre d'observation afin d'obtenir un vecteur de caractéristiques constitué des fréquences ainsi que des amplitudes associées. Le calcul de la distance euclidienne entre deux vecteurs consécutifs permet d'identifier le début et la fin du régime transitoire qui correspondent aux instants où ce vecteur de caractéristiques varie brutalement. Un vecteur de caractéristiques moyen est ensuite calculé sur la durée du régime transitoire. Le vecteur de caractéristiques moyen ainsi obtenu est finalement utilisé par une méthode de classification qui comparera ces signatures à celles déjà apprises (contenues dans la base de données d'apprentissage). Les taux de classification obtenus varient de 85% à 90% sur divers usages dans le secteur résidentiel.

L'algorithme présenté dans [19] est en réalité une extension des travaux présentés dans [18]. Afin d'extraire les paramètres caractéristiques, les auteurs proposent, après avoir détecté un événement et supprimé le bruit déjà présent avant la transition, de modéliser le bruit, causé par la mise en marche ou en arrêt d'un usage, par une fonction gaussienne et d'en extraire l'amplitude, la moyenne et la variance (Figure I.11).

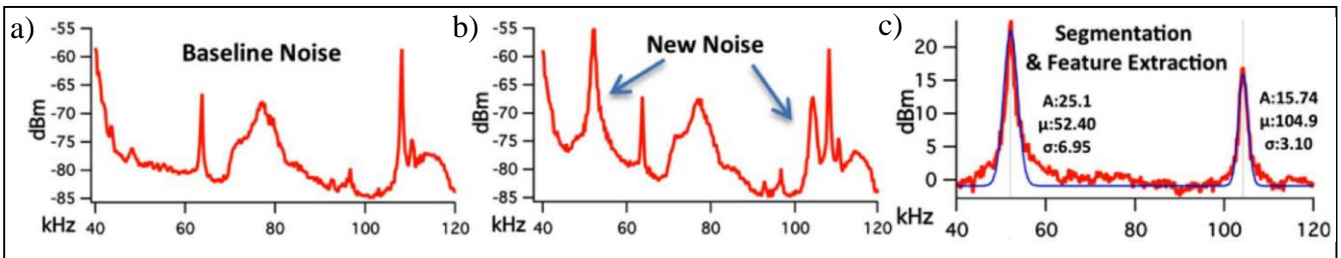


Figure I.11 : a) Bruit de fond présent avant un événement, b) Ajout de bruit en réponse à un événement, c) Suppression du bruit de fond et estimation de paramètres caractéristiques [19]

Cependant les signatures obtenues par une telle approche sont fortement dépendantes de l'appareil appris et de la configuration du réseau électrique, ce qui limite grandement la généralité de la méthode. De plus, étant donné la nécessité d'avoir une fréquence d'échantillonnage très élevée (1MHz) cette approche est incompatible avec nos contraintes.

## Synthèse

Les méthodes utilisant des micro-signatures permettent de lever certaines ambiguïtés de l'analyse macroscopique en permettant l'accès à de nombreuses caractéristiques potentielles liées au régime transitoire. Mais, en ce qui concerne ces méthodes, un nouveau problème est mis en évidence. En se focalisant sur le fait d'extraire des paramètres caractérisant le régime permanent et transitoire du courant, l'information sur la tension a été laissée de côté et inversement. De plus, ces méthodes nécessitent des fréquences d'échantillonnage élevées ce qui implique une acquisition plus coûteuse des signaux et surtout le stockage d'un grand nombre de données (dans le cas d'un traitement *a posteriori*).

# Conclusion

Dans ce chapitre nous avons, dans un premier temps, exposé la problématique liée à la décomposition de la consommation par usage ainsi que les contraintes industrielles auxquelles nous devons faire face. Dans un second temps, nous avons dressé un état de l'art qui nous a permis de faire le point sur les différentes approches existantes. Nous avons vu qu'il existe deux types d'approches.

Le premier type d'approche, macroscopique, permet d'extraire, à partir de signaux de puissance, des caractéristiques essentiellement liées au régime permanent. Un des problèmes majeur lié à cette approche est la confusion qu'il peut y avoir avec des charges différentes à consommation quasi-identique et l'impossibilité de les différencier.

Connaissant les limitations de cette dernière et dans le but d'améliorer la phase d'identification, les travaux se sont orientés vers des approches de type microscopique. Pour ce type d'approche, la caractérisation des usages se fait soit en incluant des caractéristiques harmoniques soit à travers l'étude du régime transitoire.

Toutefois il est à noter que selon le type d'approche, dans la quasi-totalité des travaux présents dans la littérature, les caractéristiques extraites concernent soit le régime permanent soit le régime transitoire. C'est pourquoi dans cette thèse nous allons nous attacher à l'extraction de caractéristiques liées aussi bien au régime transitoire qu'au régime permanent en passant par le développement de méthodes d'analyse microscopiques.

Notons que la méthode développée dans [10] permet d'extraire des caractéristiques à la fois sur le régime permanent et le régime transitoire du courant. Cependant nous avons vu que de cette manière nous perdions l'information concernant la tension. Il nous faudra prendre en compte ces limitations en utilisant des informations provenant des mesures de courant et de tension.

Donc dans le but d'améliorer l'identification des charges électriques, il faudra utiliser les mesures de courant ET de tension afin de caractériser le lien entre ces deux grandeurs. De plus, concernant le courant, les caractéristiques à extraire devront tenir compte des états permanent et transitoire.

# Chapitre II Analyse des signaux et stratégie envisagée



# Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps une analyse détaillée des données d'entrée, c'est-à-dire l'étude des caractéristiques temporelles et fréquentielles des signaux de tension et de courant. Dans un second temps, nous en déduisons les grandeurs discriminantes qui nous permettent de caractériser les événements et donc d'établir une stratégie de recherche.

## II.1 Analyse des signaux

### II.1.1 Mesures

Les signaux de courant et de tension sont mesurés au niveau du tableau électrique, c'est-à-dire de manière non intrusive. Les mesures sont obtenues à l'aide de pinces ampèremétriques et de sondes de tension. Elles sont issues de la numérisation à une fréquence d'échantillonnage de 2 kHz ( $F_e = 2000\text{Hz}$ ) sur des durées qui peuvent être très grandes. Certaines données disponibles peuvent contenir jusqu'à un mois de mesures sur des sites industriels.

Ces signaux sont complexes, dans le sens où il y a une multitude d'événements qui surviennent durant la période de mesure. De plus ils ne sont pas renseignés, c'est-à-dire que nous n'avons aucune information sur les appareils en fonctionnement. La première étape consiste donc à analyser des signaux simples, c'est-à-dire correspondant à un seul appareil en fonctionnement à la fois, afin de les analyser et de déterminer les grandeurs caractéristiques.

C'est pourquoi nous avons procédé à des mesures en laboratoire (sur le site de l'Université de Toulon<sup>2</sup>) afin de constituer une base de données de signaux simples, c'est-à-dire que lors de chaque mesure nous faisons l'acquisition des signaux de courant et de tension pour un seul appareil en fonctionnement. Pour cela, nous avons voulu effectuer ces mesures de la même façon que les systèmes existants. Nous avons donc effectué différents montages électriques (résistance, bobine, condensateur, moteur...) puis utilisé des pinces ampèremétriques Fluke i30 pour mesurer le courant et des sondes de tension *ISSD201* pour mesurer la tension. L'acquisition des données a été faite avec une carte d'acquisition *USB-1608HS-2AO* de chez *measurement computing* (on se place dans les mêmes conditions d'acquisition des données que les signaux traités avec  $F_e = 2\text{ kHz}$ ).

### **Les pinces ampèremétriques :**

Une pince ampèremétrique est un instrument qui permet de mesurer l'intensité d'un courant électrique dans un fil de manière très précise. C'est le moyen le plus simple pour une mesure ponctuelle. La pince ampèremétrique se compose d'une pince à l'intérieur de laquelle on passe le conducteur (fil) traversé par le courant dont on souhaite prendre la mesure de l'intensité. La pince délivre un courant ou une tension directement proportionnel à l'intensité mesurée et il n'est pas nécessaire d'arrêter l'installation pour effectuer une mesure.

Lors de nos expérimentations, nous avons utilisé la pince ampèremétrique i30s AC/DC. Elle permet d'effectuer des mesures précises non-intrusives des courants continus et alternatifs et des formes d'ondes complexes.

---

<sup>2</sup> Merci à M. Patrick Biscaldi de nous avoir prêté le matériel nous permettant d'effectuer ces mesures.



## II.1. Analyse des signaux

L'utilisation de la technologie de l'effet de Hall permet à cette pince de mesurer avec précision des courants entre 5 mA et 30 A avec une résolution de 1 mA sur la gamme des fréquences de courant continu jusqu'à 100 kHz. Cette gamme de fréquence permet de prendre en compte les courants harmoniques présents sur le secteur qui est théoriquement à 50Hz. Ces fonctions font de la pince un outil puissant utilisé pour des mesures de courant.

Pour effectuer la mesure de courant, il faut :

1. activer la sonde en utilisant l'interrupteur marche/arrêt et vérifier que le voyant est allumé,
2. brancher le cordon de sortie à un oscilloscope, multimètre ou un autre appareil de mesure,
3. fixer la mâchoire de la sonde autour du conducteur en assurant un bon contact entre les faces de fermeture des mâchoires,
4. observer et effectuer les mesures comme il y a lieu.



Figure II.1 : Pince ampèremétrique utilisée en laboratoire

## Les sondes différentielles de tension :

Une sonde différentielle comprend deux bornes à relier aux points de mesure entre lesquels on souhaite visualiser la tension et un cordon à connecter à l'une des voies d'entrée de l'oscilloscope (ou la carte d'acquisition). Les sondes différentielles de tension sont souvent atténuatrices : la tension lue après acquisition est plus faible que la tension en entrée de la sonde. En effet, la sonde utilisée (figure II.2) a un coefficient d'atténuation de 1/100, c'est-à-dire que la tension envoyée à la carte d'acquisition est 100 fois plus faible que la vraie tension mesurée.

Utilisation de la sonde différentielle :

1. brancher le cordon secteur sur la prise située sur la face arrière de la sonde,
2. mettre la sonde sous tension à l'aide de l'interrupteur situé sur la face arrière,
3. brancher les cordons BNC à l'oscilloscope (ou autre appareil de mesure : carte d'acquisition),
4. connecter les cordons de mesure sur les douilles d'entrées de la sonde,
5. relier l'autre extrémité des cordons de mesure sur votre système à mesurer,
6. mettre le système à mesurer sous tension et procéder aux mesures.



Figure II.2 : Sonde différentielle utilisée en laboratoire

Comme nous l'avons dit précédemment, nous avons effectué différents montages afin de faire l'acquisition de mesures de signaux simples, dans les mêmes conditions (ou presque) que les systèmes existants. Cela dans le but d'étudier les signaux de courant et tension représentant la consommation électrique d'un appareil sans qu'ils soient perturbés par d'autres appareils. La figure II.3 montre un des différents montages que nous avons fait à l'Université de Toulon en utilisant les appareils cités précédemment.

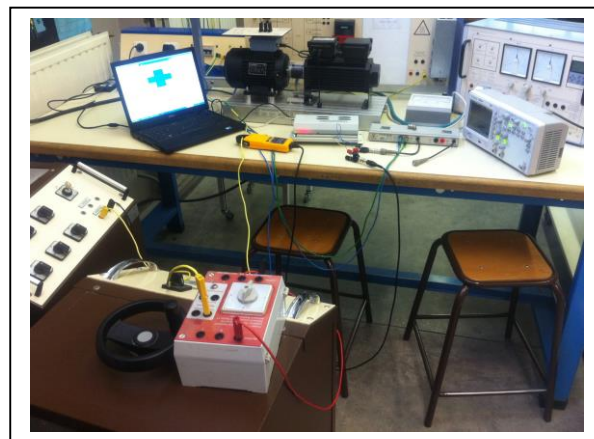


Figure II.3 : Montage électrique pour mesure de courant et tension

## **II.1.2 Signaux**

Comme vu précédemment, dans le but de répondre à la problématique posée, les seules données dont nous disposons sont la tension et le courant mesurés aux bornes du compteur électrique. Le but de cette partie est donc d'analyser ces signaux afin d'en connaître les caractéristiques. Plus précisément nous allons étudier la forme et le contenu de ces signaux.

### Tension :

Nous avons toujours appris, à tort, que théoriquement la tension  $u$  est une sinusoïde pure qui oscille à une fréquence  $F_0 = 50$  Hz et dont l'amplitude  $U_0 = 230$  V et la phase  $\psi_0$  sont parfaitement constantes. Compte tenu de cela le modèle de la tension est donné par l'équation :

$$u(t) = U_0 \cos(2\pi F_0 t + \psi_0) \quad (\text{II.1})$$

Or nous avons pu constater que, dans la réalité, ces affirmations ne sont pas toujours vraies. En effet, l'amplitude  $U_0$  de même que la fréquence  $F_0$  peuvent varier, c'est un phénomène bien connu et quantifié.

La plage de variation nominale de la tension réseau est fixée en général à plus ou moins 10% de la tension, c'est-à-dire que l'amplitude  $U_0$  appartient à l'intervalle  $[0.9 \times U_0, 1.1 \times U_0]$ .

Cependant, il existe trois types de variations de tension pour lesquels l'amplitude dépasse le seuil de la plage nominale. Elles sont caractérisées par deux paramètres, l'amplitude et la durée de la variation, c'est-à-dire la durée pendant laquelle l'amplitude dépasse le seuil minimum ou maximum.

On distingue tout d'abord les variations lentes. Ce type de variation peut représenter un creux de tension, une surtension, ou encore une coupure. Cela correspond à la majorité des variations de tension. En effet, le nombre de creux de tension, par exemple, peut aller de quelques dizaines à un millier sur une année. Ce nombre est de quelques dizaines à plusieurs centaines par an pour les coupures brèves. La durée de ces dépassements n'excède pas 1s. Lorsqu'elles surviennent chez le producteur, ces variations sont créées par des phénomènes aléatoires tels que la foudre ou des court-circuits accidentels. Et côté consommateur, c'est le branchement des moteurs de forte puissance, des transformateurs et des assemblages de condensateurs qui crée ces variations de tension. De plus, lorsqu'un défaut apparaît, tous les clients connectés au même niveau sur le réseau perçoivent les variations de tension.

Ensuite, il y a les variations rapides ou surtensions transitoires. Ces surtensions sont dites transitoires car leur durée n'excède pas 10 ms. Elles peuvent être provoquées par la foudre ou, plus fréquemment, par le fonctionnement de certains équipements électriques (commutation de charges plus ou moins inductives).

On distingue enfin les fluctuations rapides de tension. Ces variations sont généralement causées par la mise en marche de charges variables comme des fours à arc, des imprimantes laser, des micro-ondes ou encore des systèmes d'air conditionné.

Concernant la fréquence, notre fournisseur d'électricité, en l'occurrence EDF, nous informe que dans des conditions normales d'utilisation, la valeur de la fréquence peut varier dans une plage de plus ou moins 1% autour de 50Hz. La fréquence de la tension est donc comprise entre 49.5 Hz et 50.5 Hz.

De plus, bien qu'EDF prétende fournir une tension qui est une sinusoïde pure, en pratique, nous avons pu remarquer que ce n'est pas toujours le cas. L'introduction sur le réseau de charges non-linéaires comme les équipements intégrant de l'électronique de puissance (par exemple les variateurs, les onduleurs, les gradateurs de lumières ou encore les postes de soudure) vont provoquer des perturbations qui sont dites harmoniques. Plus généralement, tous les appareils comportant des redresseurs ou de l'électronique de découpage déforment les courants et créent des fluctuations de tension sur le réseau. Ceci peut venir du réseau client étudié recevant une tension purement sinusoïdale en entrée qui va être polluée par certains équipements électriques. Mais cela peut aussi provenir d'un autre client car comme il a été dit

précédemment, lorsqu'un défaut apparaît, tous les clients connectés au même niveau sur le réseau perçoivent les variations de tension. Donc lorsque la tension a été polluée en amont, la tension en entrée de l'installation étudiée n'est déjà plus une fréquence pure.

Au lieu d'avoir une tension purement sinusoïdale à la fréquence  $F_0$ , nous avons en réalité une superposition de sinusoïdes à des fréquences, appelées harmoniques, qui sont multiples entiers de la fréquence fondamentale  $F_0$ . Le spectre d'amplitude défini par le module de la transformée de Fourier (TF) du signal de tension est donc un spectre de raies (figure II.5).

Ainsi, nous constatons qu'en réalité la tension n'est pas, comme nous pourrions le croire, un signal stationnaire mais un signal dont les paramètres varient dans le temps, et la modélisation générale de la tension devient :

$$u(t) = \sum_{m=0}^{N_s-1} U_m(t) \cos(2\pi F_m(t)t + \psi_m(t)) \quad (\text{II.2})$$

où,  $N_s$  représente le nombre de fréquences harmoniques présentes dans le signal de tension ( $N_s \leq 20$ ). Chaque couple  $\{U_m, \psi_m\}$  représente l'amplitude et la phase associées à la fréquence harmonique notée  $F_m$  avec  $F_m < \frac{F_e}{2}$ .

Il faut néanmoins apporter certaines précisions à ce modèle général car si nous considérons que les amplitudes, les phases ainsi que les fréquences peuvent varier de façon complètement libre alors le modèle (II.2) ne correspondrait pas aux signaux de tension, c'est-à-dire que si entre deux instants elles peuvent prendre n'importe quelle valeur dans tout le domaine de définition alors ce modèle pourrait correspondre à des signaux de natures complètement différentes. Les variations dans le temps des paramètres du modèle sont soumises à certaines contraintes :

- l'amplitude de la tension peut varier de plus ou moins 10% autour de sa valeur théorique. Ces variations d'amplitude étant très lentes, on peut considérer que la tension est stationnaire par morceau ou quasi-stationnaire. De plus, il existe un certain ordonnancement entre la fréquence fondamentale et ses harmoniques : en pratique, les fréquences harmoniques sont beaucoup moins énergétiques que la fréquence fondamentale. Soit,  $U_m \ll U_0$  pour  $m \neq 0$ .
- concernant les fréquences nous avons également vu précédemment que la fréquence fondamentale prend ses valeurs dans l'intervalle [49.5Hz, 50.5Hz]. Précisons cependant que, de la même manière que l'amplitude, la fréquence varie de façon assez lente. Elle ne peut donc pas prendre des valeurs différentes à chaque instant.

La figure II.4 montre la représentation temporelle d'un signal réel de tension mesurée ainsi qu'un zoom nous permettant de nous rendre compte des variations (lentes) d'amplitude de la tension.

La figure II.5 est sa représentation dans le domaine fréquentiel après une TF sur toute la durée du signal. Cette figure contient également un zoom de la représentation fréquentielle qui nous permet d'illustrer nos propos sur le fait qu'il existe des fréquences (harmoniques) autres que la fréquence fondamentale et dont l'amplitude est faible devant celle du fondamental.

Nous constatons que, sur la tension, toutes les harmoniques de rang pair (eg. 100, 200, ...) ont une amplitude nulle (ou quasi-nulle/négligeable) mais qu'il existe certaines harmoniques de rang impair (eg. 50, 150, 250, ...). Ces harmoniques ont une amplitude faible devant celle du fondamental, c'est pourquoi dans de nombreux travaux les auteurs ne travaillent que sur la fréquence fondamentale. Cependant, amplitude faible ne veut pas forcément dire sans intérêt,

## II.1. Analyse des signaux

et donc, nous essaierons d'exploiter malgré tout les informations provenant de ces harmoniques impaires.

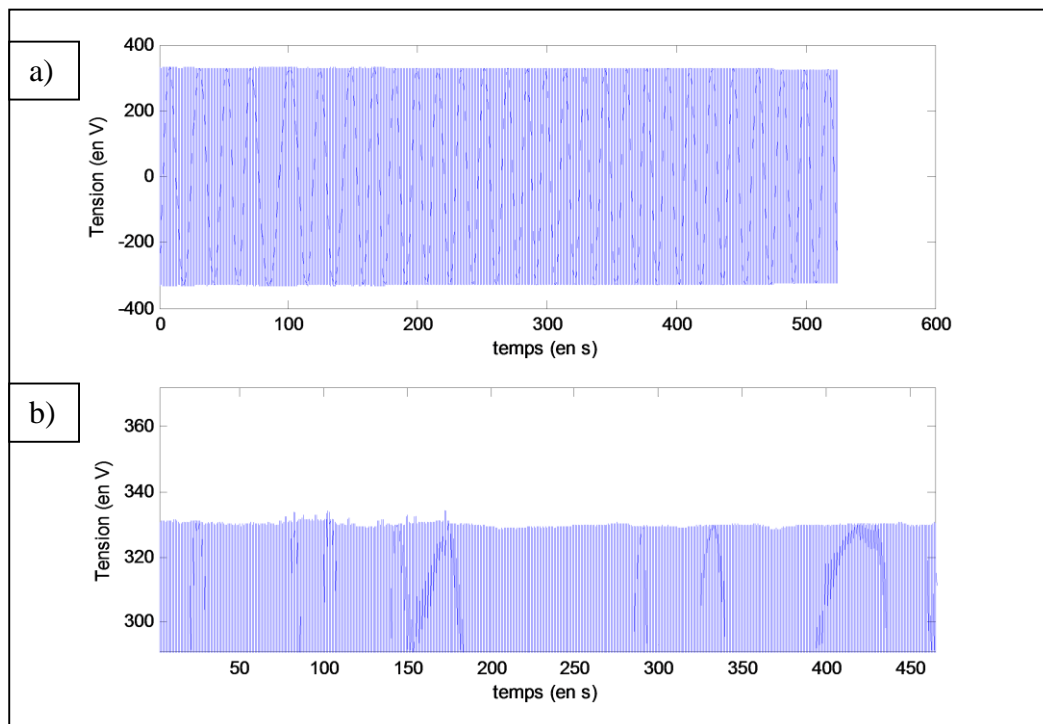


Figure II.4 : a) Tension mesurée et b) zoom

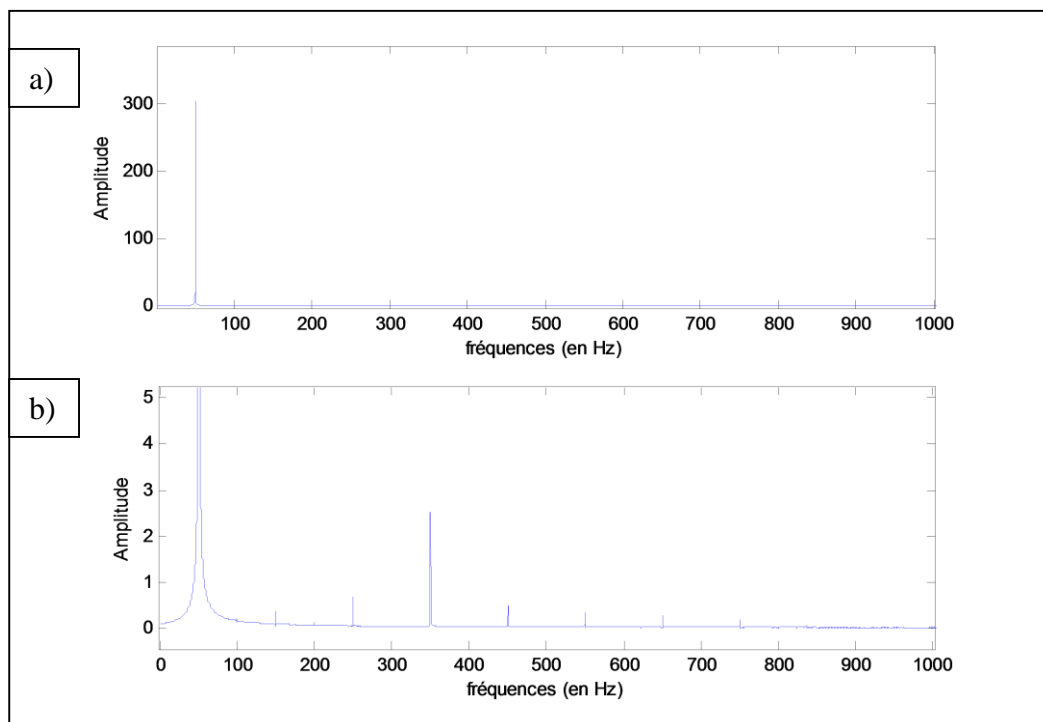


Figure II.5 : a) Amplitude de la TF de la tension mesurée et b) zoom en amplitude

## Courant

On remarque grâce à la figure II.6 que le courant contient des évènements (aussi appelés transitions).

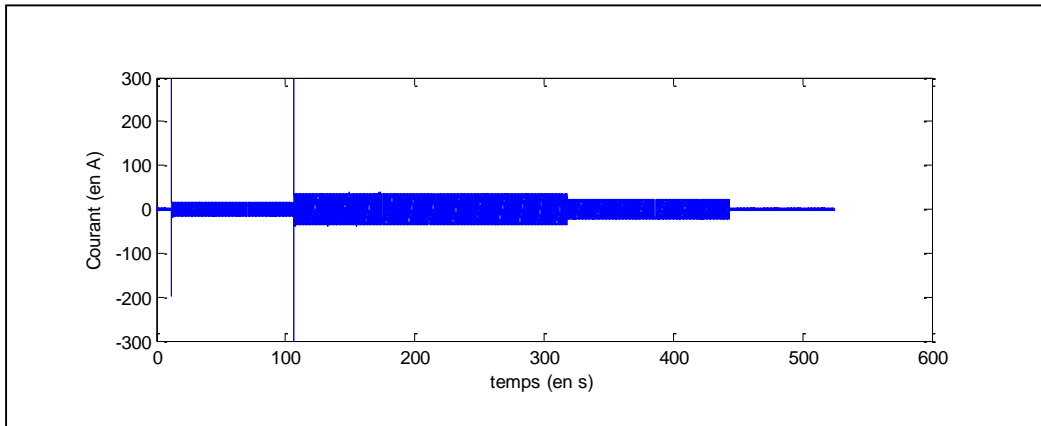


Figure II.6 : Courant mesuré

Si nous n'observons que le courant, un évènement est une variation brutale de courant qui survient lors de l'allumage ou de l'extinction d'un appareil. Le moment où se produit un évènement est appelé instant de transition. Il détermine l'instant de mise en marche ou mise en arrêt d'un appareil. Le courant consommé par un appareil (une charge) en fonctionnement peut être défini par un état transitoire et un état permanent. En effet, une charge linéaire est un récepteur constitué de dipôles électriques linéaires, elle est simplement caractérisée par son module et sa phase. En régime sinusoïdal, elle est définie par une impédance complexe. En excitant cette impédance par une tension sinusoïdale  $u$ , le courant  $i$  parcourant cette charge est alors solution d'une équation différentielle. Cette solution est composée d'un terme stationnaire relatif à la solution particulière, également appelée régime forcé, et d'un terme transitoire relatif à la solution sans second membre, appelée régime libre.

La figure II.7 montre les différents états de fonctionnement d'un moteur.

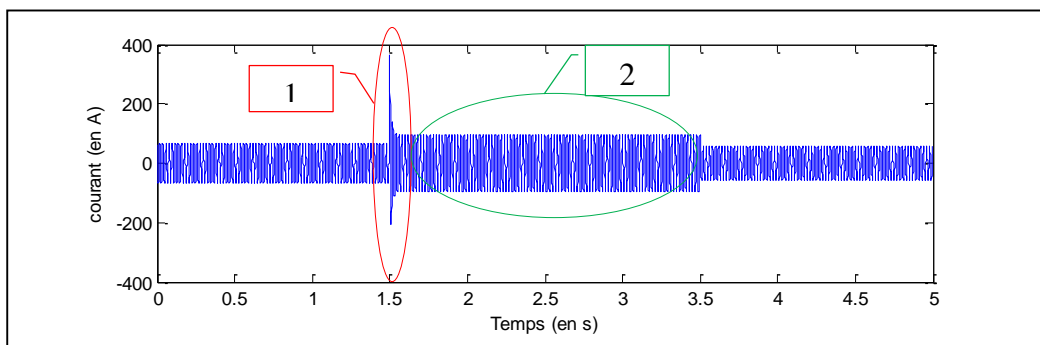


Figure II.7 : Courant consommé par un moteur en fonctionnement

Sur la figure II.7, la partie 1 représente l'état transitoire, et l'état permanent est représenté par la partie 2. L'état permanent correspond à la consommation électrique de l'appareil en fonctionnement normal et dure jusqu'à ce que l'appareil soit à nouveau perturbé (changement de mode de fonctionnement ou arrêt de l'appareil). L'état transitoire, lui, se produit uniquement à l'allumage de l'appareil. Comme nous pouvons le voir sur la figure II.4, il existe différents types de transitions (états transitoires de formes différentes). En effet, la

## II.1. Analyse des signaux

forme et la durée de cet état transitoire sont différentes selon la nature de la charge qui s'allume.

Nous définissons donc les deux types de transitions qui peuvent être rencontrées : les transitions courtes (ou instantanées) et les transitions longues.

Les transitions courtes sont caractérisées par une consommation de courant constante dès le démarrage de la charge. La durée de ce type de transition est d'environ 1 ms.

Les transitions longues, elles, se caractérisent par une consommation de courant qui évolue pendant quelques dizaines ou centaines de ms jusqu'à atteindre un état permanent. Parmi les transitions longues, la forme la plus courante est caractérisée par un fort appel de courant au démarrage, qui décroît jusqu'à atteindre l'état permanent.

Typiquement on rencontre les transitions courtes lors de l'allumage d'une charge résistive. Tandis que les longues transitions seront dues à l'allumage d'un moteur ou d'une pompe. La figure II.8 montre une transition courte provoquée par une résistance et une transition longue due à la mise en route d'un moteur.

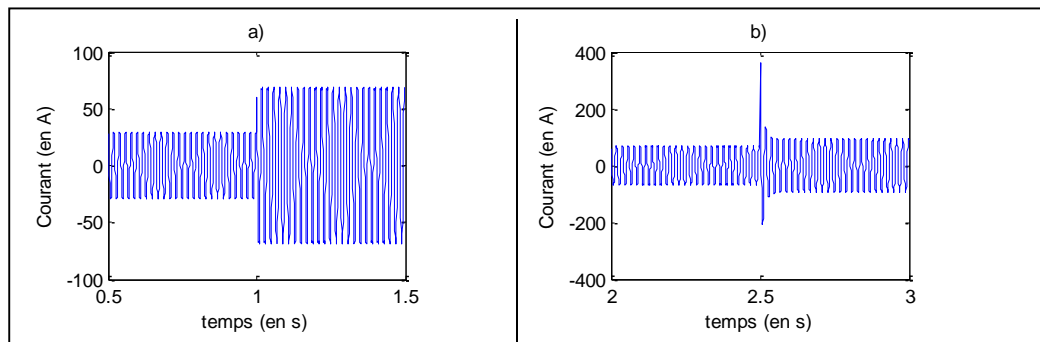


Figure II.8 : exemple de a) transition courte, b) transition longue

Ces deux types de transitions sont celles que nous rencontrons le plus souvent. Cependant parmi les transitions longues, il en existe avec des formes autres que celle illustrée sur la figure II.8.b comme par exemple les appareils régulés/asservis. En effet, la transition provoquée par la mise en route d'un tel appareil sera une transition longue car elle aura une durée de plusieurs dizaines ou centaines de millisecondes. Cependant, ce type de transitions ne présente pas de forte consommation de courant mais un courant qui augmente (pas brutalement) jusqu'à atteindre son régime permanent.

Le courant mesuré est composé d'une succession d'évènements que nous appelons transitions. Et, dans le temps, un certain nombre de systèmes électriques vont se mettre en route puis s'éteindre. Nous nous trouvons donc en présence de signaux dont l'amplitude évolue dans le temps. En ce qui concerne le courant, l'amplitude n'est pas la seule grandeur qui évolue. En effet, les évènements qui surviennent sur le courant sont créés par tout type d'appareils et ces derniers introduisent, pour la plupart, des déphasages. Prenons, par exemple, le cas des charges capacitatives et inductives qui, contrairement aux charges résistives qui sont parcourues par un courant qui est en phase avec la tension d'excitation, sont parcourues par un courant qui aura été déphasé de plus ou moins 90 degrés par rapport à la tension. S'ajoute à cela le fait que de nombreux appareils comportent des charges non linéaires qui vont déformer le courant et introduire des courants harmoniques (cf. figure II.9). Le courant appelé par ce type d'appareils est alors simplement périodique de fréquence fondamentale  $F_0$  puisque la tension est elle-même périodique.

L'amplitude et la phase du courant peuvent varier en fonction de la charge qui s'allume ou qui s'éteint. Cependant, de même que pour la tension, ces variations ne sont pas quelconques : le

courant étant quasi-stationnaire pendant un régime permanent, l'amplitude et la phase ne varient quasiment pas alors que pendant une phase transitoire le courant varie fortement.

Ainsi, l'analyse du signal de courant nous conduit à une modélisation générale de la même forme que celle de la tension mais avec des contraintes différentes sur les paramètres :

$$i(t) = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} I_m(t) \cos(2\pi F_m(t)t + \varphi_m(t)) \quad (\text{II.3})$$

où,  $N_{s'}$  représente le nombre de fréquences harmoniques présentes dans le signal de courant, et le couple  $\{I_m, \varphi_m\}$  représente l'amplitude et la phase associées à la fréquence harmonique  $F_m$ .

Il n'y a aucune raison de considérer  $N_{s'}$  égal à  $N_s$  car des fréquences qui ne seraient pas présentes sur la tension peuvent apparaître sur le courant. Ceci pourrait être dû à des charges non linéaires par exemple. Par exemple, comme nous pouvons le constater sur la figure II.9, le spectre du courant contient la fréquence 100Hz (harmonique de rang 2) alors qu'elle n'existe pas sur le spectre de la tension correspondante (figure II.5).

De la même manière que pour la tension, la valeur de la fréquence fondamentale  $F_0$  peut varier lentement dans l'intervalle [49.5Hz, 50.5Hz] et les fréquences harmoniques sont beaucoup moins énergétiques que la fréquence fondamentale. Soit,  $I_m \ll I_0$  pour  $m \neq 0$ . En effet, grâce à la figure II.9 il est aisé de constater qu'il y a environ un facteur cinquante entre l'amplitude de la fréquence fondamentale et celle de l'harmonique la plus énergétique.

Cependant, concernant l'amplitude complexe (amplitude et phase) associée à chaque fréquence, il existe deux types de variations : en régime permanent, l'amplitude peut varier lentement comme pour la tension. Et lors d'une transition, cette dernière subit une variation brutale, c'est-à-dire qu'elle peut être complètement différente entre deux instants. En effet, nous pouvons voir ce changement d'amplitude, soit dans le domaine temporel à la figure II.6, soit dans le domaine fréquentiel aux figures II.9 et II.10. La figure II.9 montre le spectre d'amplitude du courant lors du régime permanent avant une transition. Et la figure II.10 montre le spectre d'amplitude du courant lors du régime permanent qui suit cette même transition.

En toute rigueur, étant donné que tous les événements surviennent sur le courant, nous serions tentés de dire que l'étude seule de ce dernier devrait convenir. Or en pratique, cela ne suffira pas car nous avons vu précédemment que la tension variait. Une tension qui varie va avoir une incidence sur le courant et cette variation du courant pourrait être interprétée comme un événement ou un changement de fonctionnement d'une charge alors qu'en réalité elle proviendrait de la tension. De plus, un autre problème est mis en évidence par l'étude seule du courant. Certaines charges électriques introduisent des déphasages entre le courant et la tension. Cette information est donc susceptible de nous aider dans la caractérisation des charges présentes sur le réseau. Or en effectuant un suivi des paramètres du courant seul, il nous serait impossible d'obtenir des informations sur le déphasage courant-tension.

**Remarque :** Entre 0 et  $\frac{F_e}{2} = 1000\text{Hz}$  il y a la fréquence fondamentale  $F_0$  ainsi que 19 harmoniques possibles, soit au maximum 20 fréquences d'intérêt :  $N_{s'} = 20$ .



## II.1. Analyse des signaux

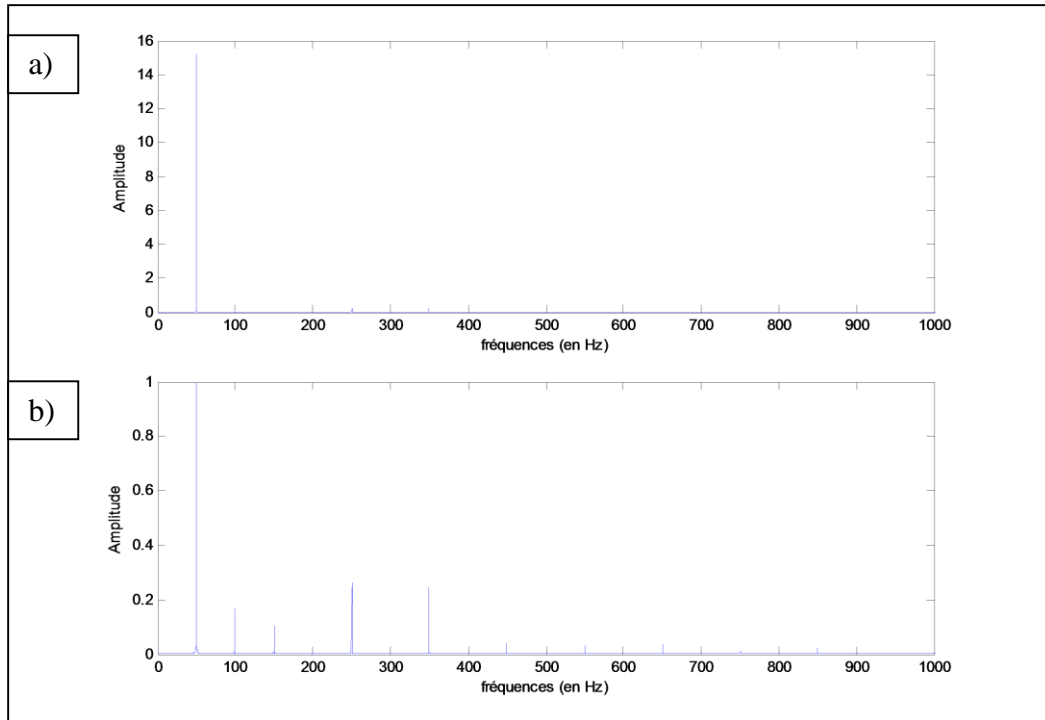


Figure II.9 : a) Amplitude de la TF du courant avant transition et b) zoom sur l'amplitude

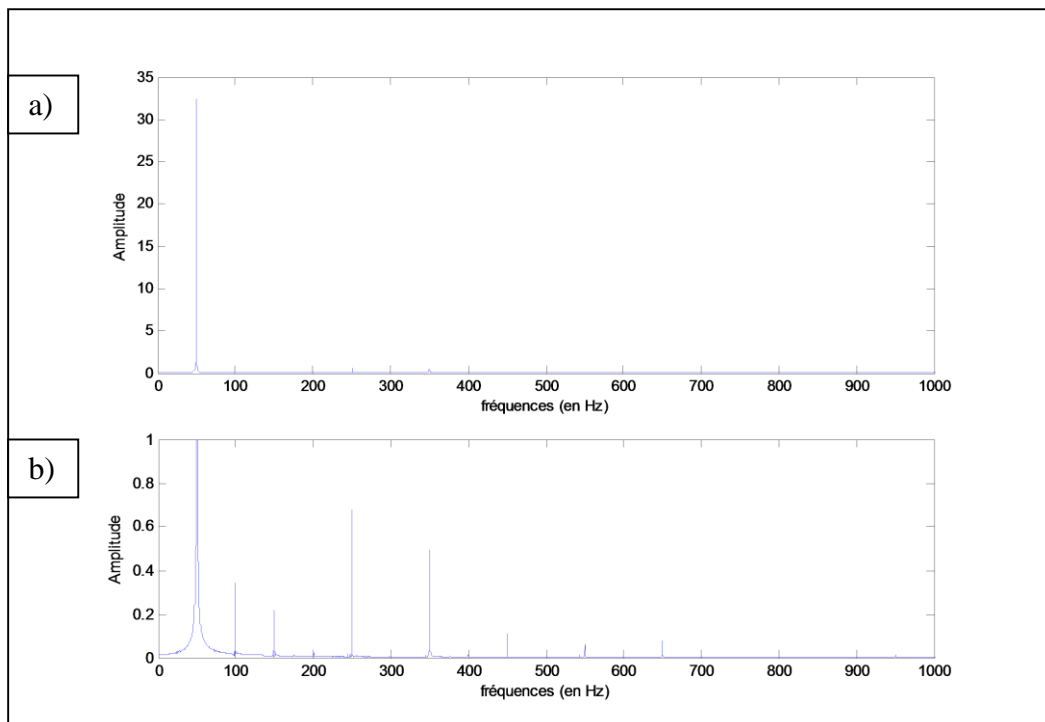


Figure II.10 : a) Amplitude de la TF du courant après transition et b) zoom sur l'amplitude

## II.2 Stratégie envisagée

### II.2.1 Les grandeurs caractéristiques

Lors de l'analyse des signaux, nous avons vu qu'il existe de nombreuses grandeurs, aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel, qui peuvent être extraites. Parmi elles, certaines vont nous servir à caractériser les événements qui surviennent sur le réseau électrique étudié. Ces grandeurs sont dites caractéristiques ou discriminantes, et représentent la signature des appareils.

Afin de pouvoir répondre à la problématique posée, il nous faut, dans un premier temps, identifier ces grandeurs caractéristiques. C'est pourquoi, dans cette partie nous présentons les grandeurs qui pour nous seront caractéristiques, et expliquons pourquoi selon nous elles sont discriminantes.

Ces grandeurs seront stockées dans ce que nous appellerons le vecteur d'informations, un tableau regroupant les informations discriminantes, c'est-à-dire les grandeurs qui vont nous permettre de reconnaître les événements qui ont été causés par une même charge et également d'associer chaque événement (ou groupe d'événements) à une charge électrique (ou type de charge). A chaque événement est donc associé un vecteur d'informations. Ce tableau peut contenir tout type de caractéristiques aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel.

#### **Domaine temporel :**

La première grandeur que doit contenir le vecteur d'informations est, bien évidemment, l'instant de transition, c'est-à-dire la date (l'instant) à laquelle est survenu l'événement. Cette grandeur est très importante, si ce n'est la plus importante, pour répondre à la problématique posée car ne perdons pas de vue que le but final est de fournir une estimation de la consommation électrique de chaque classe d'appareil. Donc si les instants de transition sont estimés de façon peu précise ou pire si un événement n'est pas détecté, nous risquons de fournir des estimations de la consommation par usage qui ne correspondent pas à ce qui s'est réellement produit sur le réseau car pour estimer la consommation d'un appareil il suffit de connaître le scénario qu'il a suivi, c'est-à-dire savoir quand il était en fonctionnement et quand il ne l'était pas.

Il serait intéressant de mettre un paramètre dans le vecteur d'information qui nous indiquerait le sens de la transition, c'est-à-dire une transition ON ou OFF. L'intérêt est de créer deux classes, la classe des événements ON et la classe des événements OFF, afin d'aider à la classification. Une manière simple d'obtenir cette information est de regarder si l'amplitude estimée de la fréquence fondamentale du courant ou de la puissance, après la transition, est plus faible ou plus élevée que ce qu'elle était avant la transition.

Ensuite, nous avons vu dans la partie II.1.2 que lorsqu'une charge s'allume sur le réseau elle provoque une transition qui peut être, suivant la nature ou le type d'appareil, de forme différente. Les transitions courtes ou longues sont définies et se différencient par leur durée et leur forme. Donc à chaque fois que nous détecterons une transition, il serait bon de connaître sa durée ainsi que sa forme. Ceci permettra de savoir si l'événement détecté a été provoqué par la mise en route d'un appareil résistif ou d'un moteur.

Les grandeurs temporelles que nous allons considérer comme caractéristiques de chaque événement sont donc :

## II.2. Stratégie envisagée

- l'instant de transition,
- sens de la transition (ON ou OFF),
- la durée de transition,
- la forme des transitions.

Dans un premier temps, ces caractéristiques vont être extraites du signal de courant car c'est là qu'elles sont le plus « visibles ». Le changement d'état (mise en route, arrêt...) d'un appareil électrique va certes créer une perturbation sur la tension (variation d'amplitude) mais elle sera beaucoup plus difficile à percevoir et à extraire sur la tension que sur le courant. En effet, nous avons vu plus tôt qu'un événement qui survient sur le réseau crée un changement d'amplitude brusque (une transition) sur le courant. Et il en va de même pour les autres grandeurs telles que la durée et la forme de la transition, qui seront beaucoup plus visibles sur le courant.

### Domaine fréquentiel :

La valeur de la fréquence fondamentale n'est pas une grandeur caractéristique discriminante car elle ne dépend pas de l'appareil en fonctionnement mais du fournisseur d'électricité et des perturbations qui surviennent sur le réseau de distribution. Par contre l'évolution de son amplitude complexe est une grandeur caractéristique car elle nous permet de quantifier la transition. L'amplitude complexe de la fréquence fondamentale  $F_0$  du courant  $i$ , par exemple, est donnée par :

$$R_i(F_0, t) = A_{i,0}(t)e^{j\cdot\varphi_{i,0}(t)} \quad (\text{II.4})$$

où :  $A_{i,0}(t)$  et  $\varphi_{i,0}(t)$  sont, respectivement, l'amplitude et la phase de cette fréquence sur le courant.

Or les signaux de courant et de tension contiennent des fréquences harmoniques dues à la nature des appareils connectés au réseau. Ils ne proviennent pas de l'alimentation mais du réseau client : les centrales électriques générant des tensions sinusoïdales, les courants harmoniques sont dus à la présence d'une charge électrique non linéaire dans un réseau électrique. On dit qu'une charge est non linéaire quand, soumise à une tension purement sinusoïdale (typiquement à 50Hz), le courant en sortie contient la fréquence fondamentale 50Hz plus d'autres fréquences (harmoniques).

Quand les charges sont linéaires, il est habituel d'utiliser l'impédance, grandeur qui lie le courant et la tension. Cette impédance évolue dans le temps chaque fois qu'un événement survient sur le réseau. Il serait donc intéressant de suivre son évolution dans le temps. L'impédance complexe  $z$  calculée pour la fréquence harmonique  $F_m$  est donnée par le rapport des amplitudes complexes de la tension  $u$  et du courant  $i$  :

$$z(F_m, t) = \frac{R_u(F_m, t)}{R_i(F_m, t)} = \frac{U_m(t)e^{j\cdot\psi_m(t)}}{I_m(t)e^{j\cdot\varphi_m(t)}} \quad (\text{II.5})$$

Cette écriture pourrait poser problème dans certains cas : par exemple si aucun des appareils présents sur le réseau n'est en fonctionnement, alors les fréquences ont une amplitude nulle ce qui entraîne des divisions par zéro. Afin d'éviter ce problème, nous remplacerons le suivi de l'impédance par celui de l'admittance, notée  $h$ , qui est son inverse. On a donc :

$$h(F_m, t) = \frac{R_i(F_m, t)}{R_u(F_m, t)} = \frac{I_m(t)e^{j\cdot\varphi_m(t)}}{U_m(t)e^{j\cdot\psi_m(t)}} = |h(F_m, t)|e^{j\cdot\arg(h(F_m, t))} \quad (\text{II.6})$$

où :

$$|h(F_m, t)| = \frac{I_m(t)}{U_m(t)} \text{ et } \arg(h(F_m, t)) = \varphi_m(t) - \psi_m(t) \quad (\text{II.7})$$

Le module de l'admittance, noté  $|h(F_m, t)|$ , représente le rapport des amplitudes du courant et de la tension. Et son argument (ou phase), noté  $\arg(h(F_m, t))$ , représente le décalage de phase (déphasage) entre le courant et la tension.

Dans le cas de systèmes non linéaires il peut également y avoir des problèmes concernant les admittances, sauf sous certaines considérations : lors du fonctionnement d'une charge non linéaire il peut exister sur le courant des fréquences harmoniques qui n'existent pas sur la tension. Dans ce cas-là, compte tenu de la définition de l'admittance donnée par l'équation II.6, il est impossible de la calculer pour ces fréquences. C'est pourquoi nous effectuons le suivi des admittances associées uniquement aux fréquences présentes sur la tension. Cela ne nous empêche pas de répertorier, dans chaque état permanent, les fréquences supplémentaires présentes sur le courant. Ceci pourrait constituer une aide supplémentaire à la discrimination des charges et donc à la classification.

Il est à noter que l'impédance et l'admittance d'une charge électrique données par les équations (II.5) à (II.7) sont définies dans le cas de systèmes linéaires. Cependant, précisons que par abus de langage, nous utiliserons les mêmes définitions et dénominations, pour les fréquences communes au courant et à la tension, dans le cas de systèmes non linéaires.

De plus, on remarque qu'il y a des harmoniques de courant et de tension qui ont une amplitude très faible devant l'amplitude de la fréquence fondamentale ou même devant d'autres harmoniques. Les fréquences présentant une amplitude trop faible ne seront donc pas des paramètres caractéristiques et seront négligées.

En résumé, les informations utiles dans le domaine fréquentiel sont :

- le nombre de fréquences harmoniques présentes sur le signal de tension,
- le numéro de ces fréquences harmoniques (les fréquences harmoniques  $F_m$  normalisées par la fréquence fondamentale  $F_0$ ), donné par :  $m + 1 = \frac{F_m}{F_0}$ ,
- l'admittance  $h$  associée à chaque fréquence suivie (appelées fréquences d'intérêt),
- numéro et amplitude complexe des fréquences présentes sur le courant et pas sur la tension.

## Synthèse :

Dans l'optique de caractériser chacun des événements détectés, nous stockons des informations sur le régime transitoire ainsi que sur le régime permanent. Le vecteur d'information est donc construit de la manière suivante :

- instants de transition,
- sens des transition (ON ou OFF),
- durée des transitions,
- forme des transitions,
- le nombre de fréquences harmoniques présentes sur le signal de tension,
- le numéro de ces fréquences harmoniques,
- l'admittance  $h$  (module et argument) associée à chaque fréquence étudiée/suivie,
- numéro et amplitude complexe des fréquences présentes sur le courant et pas sur la tension.

## II.2.2 Stratégie

Après avoir énuméré et défini les grandeurs d'intérêts (caractéristiques), nous allons voir comment les extraire.

- Nous allons devoir détecter les événements qui surviennent sur le réseau. Pour cela il faut tout d'abord passer par une étape d'estimation. En effet, l'étape de détection d'événements est en réalité une étape d'estimation et détection.
- Ensuite vient l'étape d'extraction des caractéristiques. Cette étape consiste à construire le vecteur d'informations à partir de tous les paramètres estimés.

Notre stratégie est la suivante :

- Suivi au cours du temps des paramètres d'intérêts (amplitude complexe associée à chaque fréquence harmonique) en mettant en place une méthode d'estimation. Cette méthode nous fournira une estimation de tous les paramètres à chaque instant. La détection peut se faire sur le courant ou sur l'admittance.
- Mettre en place une méthode de détection nous permettant de détecter les événements à partir du suivi et des variations des paramètres estimés.

Pour cela, nous effectuerons un traitement par fenêtre glissante. Ce traitement consiste à estimer les paramètres d'intérêt sur un segment de signal de  $N$  échantillons (la fenêtre d'observation) que nous répétons dans le temps en se décalant chaque fois d'un échantillon temporel. Nous choisirons une fenêtre d'observation de longueur  $N = 1000$  points ce qui, compte tenu de la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 2000\text{Hz}$ , correspond à une durée de 0.5 secondes. Mais aussi, puisque  $F_0 = 50\text{ Hz}$  cela correspond en théorie à un nombre entier de périodes

La durée d'observation  $T = 0.5$  seconde est choisie suffisamment petite pour pouvoir considérer que pendant un état permanent le signal contenu dans la fenêtre d'observation est stationnaire, c'est-à-dire que l'on suppose que chaque fréquence présente ainsi que les amplitudes complexes qui leurs sont associées sont constantes dans la fenêtre d'observation. Ainsi, le modèle de la tension et du courant dans la fenêtre d'observation est donné par les équations (II.8) et (II.9).

$$u_k = u(t_k) = \sum_{m=0}^{N_s-1} U_m \cos(2\pi F_m t_k + \psi_m) \quad (\text{II.8})$$

et :

$$i_k = i(t_k) = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} I_m \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m) \quad (\text{II.9})$$

où :

$$t_k = (k - 1)\Delta t \quad \forall k = 1 \dots N \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{1}{F_e} = 0.5\text{ms} \quad (\text{II.10})$$

Ce traitement nous permet donc de récolter des estimations de paramètres fréquentiels en fonction du temps. Ainsi nous pourrions détecter les changements d'état grâce aux variations des paramètres estimés. Tant que nous sommes sur un régime permanent, le spectre ne change pas. Cependant ce spectre est différent d'un état à un autre, c'est-à-dire avant et après mise en route ou arrêt d'un système électrique comme nous pouvons le voir sur les figures II.9 et II.10. Lorsqu'il se produit un événement, l'amplitude du courant subit un changement brutal

(figure II.6). Il en va de même pour les fréquences étudiées : en suivant l'évolution du spectre de Fourier on constate que l'amplitude complexe des fréquences change en fonction de l'impédance de l'appareil qui s'allume ou s'éteint.

Cependant le fait de suivre l'évolution des paramètres à l'aide d'une fenêtre glissante engendre un problème au niveau de la phase estimée des amplitudes complexes. En effet, plaçons-nous dans le cas de l'estimation des paramètres fréquentiels d'un courant mono-fréquentiel en régime permanent (c'est-à-dire contenant seulement la fréquence fondamentale). Le modèle de courant est donné par l'équation suivante :

$$i(t) = I_0 \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) \quad (\text{II.11})$$

Si l'amplitude et la phase à l'instant  $t_1$  (*i.e.* pour  $[t_1, t_1 + T]$ ) sont :

$$I_0(t_1) = I_0 \text{ et } \varphi_0(t_1) = \varphi_0$$

Alors à l'instant  $t_2 = t_1 + \Delta t$  (*i.e.* pour  $[t_1 + \Delta t, t_1 + \Delta t + T]$ ), ces grandeurs sont :

$$I_0(t_2) = I_0(t_1) = I_0 \text{ et } \varphi_0(t_2) = \varphi_0 + 2\pi F_0 \cdot \Delta t$$

Et plus généralement, à l'instant  $t_k$ , elles sont :

$$I_0(t_k) = I_0(t_1) = I_0 \text{ et } \varphi_0(t_k) = \varphi_0 + 2\pi F_0 \cdot (k - 1)\Delta t$$

Nous avons donc une estimation de la phase relative à la fenêtre d'observation, c'est-à-dire qu'il y a un décalage de la phase estimée du courant qui évolue dans le temps. Ceci s'explique par le fait que lorsque le traitement est appliqué à une fenêtre d'analyse dont l'instant de début est  $t_k$ , ce n'est pas le signal de départ  $i(t)$  qui est analysé mais ce signal décalé dans le temps  $i(t + t_k)$ .

Connaissant le terme correspondant au décalage de phase dû au glissement de la fenêtre d'observation, nous aurions pu le soustraire tout simplement. Or, ce terme dépend des fréquences et nous avons vu précédemment qu'en pratique les fréquences ne sont pas parfaitement connues ; nous ne pouvons donc pas corriger correctement les estimations des phases. Afin d'éliminer complètement ce phénomène, nous allons utiliser les admittances. En effet, nous avons vu que l'admittance associée à la  $m$ -ième fréquence est donnée par son module  $\frac{I_m}{U_m}$  et sa phase  $\varphi_m - \psi_m$ .

Ainsi, dans le cas mono-fréquentiel :

$$\begin{aligned} \varphi_0(t_k) - \psi_0(t_k) &= \varphi_0(t_0) + 2\pi F_0 \cdot (k - 1)\Delta t - \psi_0(t_0) - 2\pi F_0 \cdot (k - 1)\Delta t \\ &= \varphi_0(t_0) - \psi_0(t_0) \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition, nous remarquons qu'en choisissant de faire une analyse sur l'admittance, on s'affranchit du phénomène de décalage de phase.

Un autre avantage concernant le suivi des admittances est le suivant : dans la littérature, de nombreuses études traitant de la décomposition par usage de la consommation électrique utilisent les signaux de puissances. L'une des raisons est liée au théorème de Boucherot qui permet, en régime sinusoïdal de tension et de courant, de calculer la puissance totale consommée par une installation électrique comportant plusieurs dipôles électriques de facteur de puissance divers, ainsi que l'intensité totale.

## II.2. Stratégie envisagée

**Théorème** — Si un circuit contient  $n$  composants absorbant chacun une puissance active  $P_i$  et une puissance réactive  $Q_i$  alors les puissances totales du circuit vérifient :

$$P_T = \sum_{i=1}^n P_i ; \quad Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i .$$

L'utilisation des admittances nous permet de travailler sur les signaux bruts de courant et de tension tout en ayant une analogie avec ce théorème de superposition. En effet, de même que pour les puissances, les admittances s'ajoutent lorsqu'un appareil s'allume. Les schémas suivants (figure II.11) nous permettent d'illustrer nos propos.

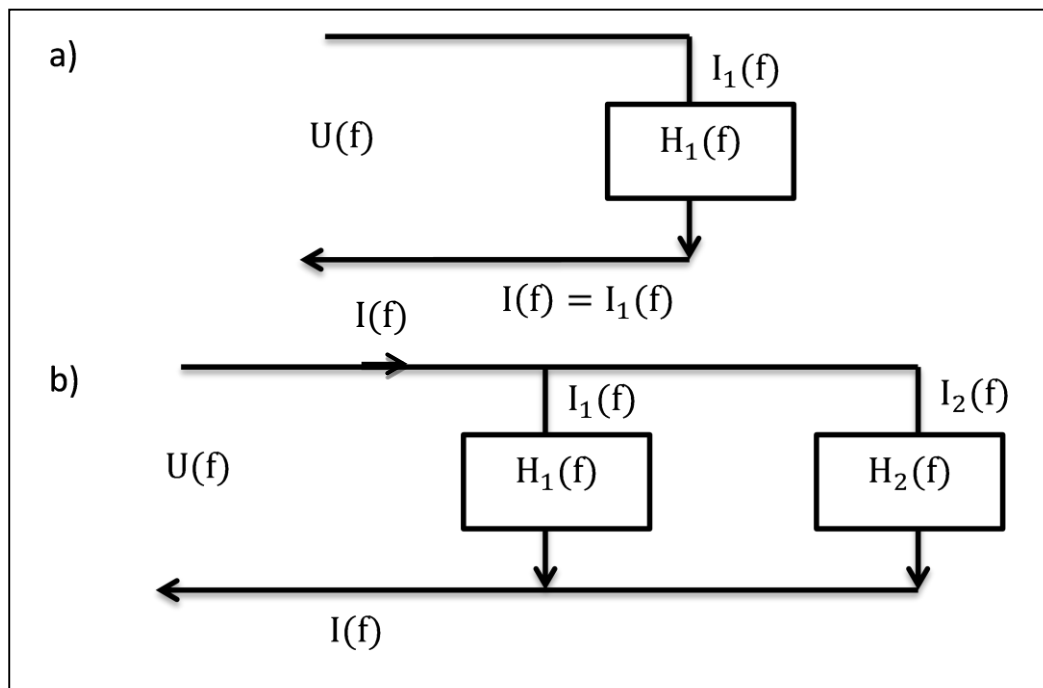


Figure II.11 : cas a) un seul système en fonctionnement, b) deux systèmes en fonctionnement

$U(f)$ ,  $I(f)$ , et  $H(f)$  représentent respectivement la transformée de Fourier de  $u(t)$ ,  $i(t)$ , et  $h(t)$ . Ces figures nous permettent clairement de constater que dans le cas d'un seul système présent sur le réseau, l'admittance est donnée par :

$$H(f) = \frac{I(f)}{U(f)} = \frac{I_1(f)}{U(f)} = H_1(f)$$

L'admittance du réseau est égale à l'admittance du système en fonctionnement. Tandis que dans le cas où il y a deux systèmes en fonctionnement (nécessairement disposés en dérivation ou parallèle), on a :

$$H(f) = \frac{I(f)}{U(f)} = \frac{I_1(f) + I_2(f)}{U(f)} = H_1(f) + H_2(f) .$$

Soit, l'admittance totale  $H$  du réseau représente la somme des admittances des deux systèmes en fonctionnement. Nous pouvons donc généraliser cela par le théorème suivant qui permet de calculer l'admittance totale d'une installation électrique comportant plusieurs dipôles électriques.

**Théorème** — Si un circuit contient  $n$  composants d'admittance respective  $H_i$  alors l'admittance totale  $H$  du circuit vérifie :

$$H(f) = \sum_{i=1}^n H_i(f) \quad (\text{II.12})$$

Ainsi, l'utilisation des admittances nous procure le même avantage que le théorème de Boucherot. De plus cela nous évite de travailler sur les signaux de puissance dans lesquels on ne fait pas la distinction entre les différentes fréquences. En effet, le calcul de puissance donne une valeur globale qui ne tient pas compte de la structure (harmonique ou pas) des signaux. Les admittances sont calculées pour chaque fréquence, c'est-à-dire que si un appareil ne modifie pas de la même manière chacune des fréquences présentes, nous pourrions le voir tandis qu'avec une étude sur les puissances cela serait impossible.

L'utilisation des admittances comme paramètre d'intérêt présente un autre avantage. Nous avons vu précédemment que la tension ainsi que le courant pouvaient varier pendant un état permanent. Ces deux grandeurs sont liées par l'admittance (ou l'impédance), elles vont donc varier de la même manière. Comme l'admittance est obtenue en faisant le rapport entre les amplitudes complexes associées aux fréquences présentes sur la tension et sur le courant, ces variations vont se compenser. L'admittance est donc plus stable que le courant ou la tension seule. La figure II.12 permet d'illustrer cet avantage. Cette figure montre une portion de signal de tension, de courant ainsi que le module de l'admittance estimée pour la fréquence 50 Hz. Nous constatons aisément, malgré les variations de tension et de courant, que le module de l'admittance estimée ne présente aucune variation.

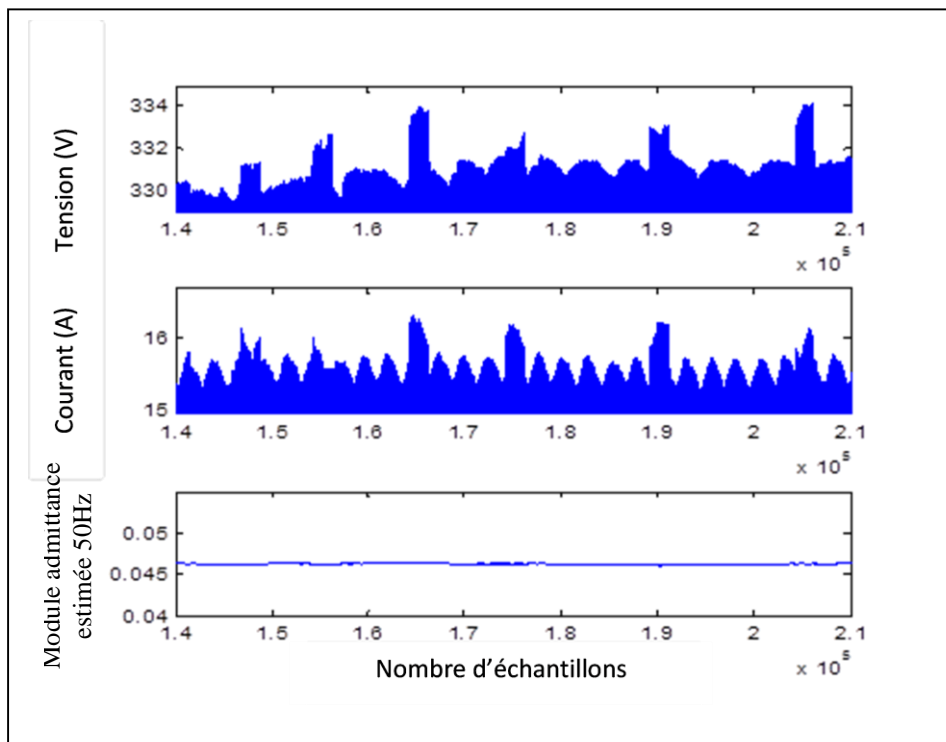


Figure II.12 : Avantage de l'admittance



## En résumé

Durant ce chapitre, nous avons analysé les signaux que nous avons à disposition (courant et tension). Cette analyse nous a permis de constater un certain nombre de choses :

- La fréquence des oscillations des signaux de tension et de courant n'est pas parfaitement égale à 50Hz. En réalité elle est comprise entre 49.5Hz et 50.5Hz,
- La tension (et donc le courant) n'est pas une sinusoïde pure. Son spectre peut contenir d'autres fréquences (harmoniques),
- L'amplitude de la tension peut varier et le courant peut varier en conséquence,
- En présence de systèmes non-linéaires, le courant peut contenir des fréquences qui n'existent pas sur la tension,
- les amplitudes complexes associées aux fréquences présentes sur la tension et sur le courant peuvent varier (même pendant un état permanent),

Suite à cela, nous avons mis en place une stratégie qui consiste à suivre au cours du temps les paramètres d'intérêts, c'est-à-dire les admittances associées aux fréquences présentes sur la tension et sur le courant et, le cas échéant, les amplitudes complexes associées aux fréquences présentes uniquement sur le courant.

Pour ce faire, nous effectuerons un traitement par fenêtre glissante qui consiste à estimer les paramètres d'intérêt sur un morceau de signal puis de répéter l'opération après s'être décalé d'un échantillon temporel.

La fréquence d'échantillonnage étant fixée à 2000Hz, nous choisirons tout au long de la thèse une fenêtre d'observation de longueur  $N = 1000$  échantillons. Cela correspond à une durée de 0.5 secondes.

Ce suivi au cours du temps nous permettra de détecter les événements qui surviennent sur le réseau étudié. Et pour chaque événement détecté nous stockons les paramètres d'intérêt dans ce que nous appelons le vecteur d'information (Table II.1).

Table II.1 : Constitution du vecteur d'informations

Instant de transition	}	Régime transitoire
Sens de la transition (ON ou OFF)		
Durée de transition		
Forme de la transition		
Nombre de fréquences harmoniques présentes sur le signal de tension	}	Régime permanent
Numéro de ces fréquences harmoniques		
Admittance $h$ associée à chaque fréquence d'intérêt		
Numéro et amplitude complexe des fréquences présentes sur le courant et pas sur la tension		

# Chapitre III Description des méthodes existantes : estimation et détection



## Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons identifié les caractéristiques d'intérêt. Nous avons ensuite établi une stratégie qui consiste à estimer ces paramètres au cours du temps afin de détecter et caractériser les événements qui surviennent sur le réseau étudié. Nous allons donc voir maintenant les méthodes existantes de traitement du signal qui vont nous permettre de réaliser ces étapes, compte tenu des hypothèses de travail émises jusqu'à présent.

La première partie de ce chapitre présente les méthodes d'estimation en traitement du signal. La seconde est consacrée aux méthodes de détection.

### III.1 L'estimation en traitement du signal

Cette partie, qui se compose de trois sous parties, traite le problème de l'estimation en traitement du signal.

Tout d'abord, nous présentons le principe général de l'estimation ainsi que les différentes situations possibles en fonction du modèle choisi.

Ensuite, étant donné la nature déterministe du modèle nous nous orientons vers les méthodes d'estimation paramétrique. Nous développons ce type de méthode pour deux cas distincts en fonction des hypothèses de départ.

C'est pourquoi dans un premier temps nous traitons le cas où tous les paramètres du modèle, tels que les fréquences, les amplitudes et les phases, sont inconnus. Nous nous trouvons donc dans le cas non linéaire.

Ensuite, comme nous l'avons vu précédemment la fréquence fondamentale est comprise dans une plage bien définie. De plus, cette dernière varie lentement (sur une longue durée). Nous allons donc restreindre le problème en considérant que les fréquences sont connues. De ce fait, nous nous retrouvons dans un cas linéaire d'estimation paramétrique.

#### III.1.1 Principe :

Partant de mesures (observations) corrompues par du bruit, l'estimation paramétrique en traitement du signal a pour objet d'accéder à des paramètres d'intérêt. Ces paramètres sont des grandeurs telles qu'une fréquence, une direction d'arrivée, une phase, la puissance d'un bruit, le nombre de cibles... La théorie de l'estimation offre un cadre formel pour résoudre ce type de problème. Plus particulièrement, dans le cas de l'estimation paramétrique, l'utilisateur établit un modèle d'observation basé sur des connaissances *a priori* du processus physique et dépendant de paramètres d'intérêts. Puis, grâce à un estimateur mis en place sur la base de ce modèle, ces paramètres sont estimés à l'aide des mesures disponibles. La règle d'estimation obtenue se doit de répondre à de nombreuses contraintes opérationnelles que sont, entre autres, la précision et la complexité numérique.

### III.1 L'estimation en traitement du signal

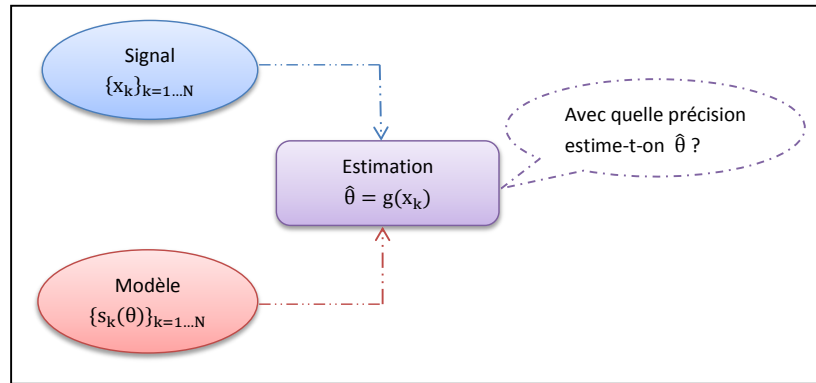


Figure III.1 : Principe de l'estimation en traitement du signal

Voici la démarche utilisée en traitement du signal face à un problème d'estimation.

On suppose disposer d'un vecteur de mesures  $x = [x_1 \ \cdots \ x_N]^T$  qui est une réalisation d'un vecteur aléatoire  $X = [X_1 \ \cdots \ X_N]^T$ , où  $x_k$  est une mesure corrompue par du bruit :

$$x_k = g_k(s_k(\theta), \varepsilon_k(\theta))$$

où,  $g_k$  est une fonctionnelle déterministe connue.  $\theta$  représente un ensemble de scalaires inconnus, c'est-à-dire un vecteur contenant les paramètres à estimer  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ . Concernant ce paramètre, deux modélisations sont possibles :

1.  $\theta$  est un paramètre déterministe inconnu : nous sommes en situation non-bayésienne,
2.  $\theta$  est la réalisation d'un vecteur aléatoire, de loi connue *a priori* : nous sommes en situation bayésienne.

$s_k(\theta)$  représente la partie signal, également appelé signal utile, c'est-à-dire ce qui nous intéresse. Il y a aussi deux modélisations possibles de  $s_k(\theta)$  :

1.  $s_k(\theta)$  est un signal déterministe connu pour tout  $\theta \in \Theta$  connu,
2.  $s_k(\theta)$  est la réalisation d'un vecteur aléatoire  $S_k(\theta)$  de loi connue pour tout  $\theta \in \Theta$  connu.

Et  $\varepsilon_k(\theta)$  représente la partie bruit (les perturbations), c'est la réalisation d'un vecteur aléatoire  $\xi_k(\theta)$  de loi connue  $\forall \theta \in \Theta$  connu.

Comme nous venons de le voir, en traitement du signal il existe différentes approches possibles (bayésienne et non-bayésienne). Le choix entre ces approches dépend de la physique, des informations *a priori*, et des hypothèses de départ.

Table III.1 : Récapitulatif des situations d'estimation en fonction des modèles

	Situation non-bayésienne $\theta$ déterministe inconnu	Situation bayésienne $\theta$ réalisation d'un vecteur aléatoire $\Theta$
$s_k(\theta)$ est déterministe	$X_k = g_k(s_k(\theta), \xi_k(\theta))$	$X_k = g_k(s_k(\theta), \xi_k(\theta))$
$s_k(\theta)$ est réalisation de $S_k(\theta)$	$X_k = g_k(S_k(\theta), \xi_k(\theta))$	$X_k = g_k(S_k(\theta), \xi_k(\theta))$

Dans le cadre de nos travaux, nous disposons des mesures du courant et de la tension dont les modèles sont donnés par les équations (II.8) et (II.9) :

$$u_k = \sum_{m=0}^{N_s-1} U_m \cos(2\pi F_m t_k + \psi_m)$$

et

$$i_k = \sum_{m=0}^{N_s-1} I_m \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m)$$

où, les couples de paramètres  $\{U_m, \psi_m\}$  et  $\{I_m, \varphi_m\}$  représentent l'amplitude et la phase (à estimer) associée à la fréquence  $f_m$  présente, respectivement, sur la tension et le courant. Ici, chaque fréquence  $F_m$  est supposée connue.

Soit le modèle du signal contenu dans la fenêtre d'observation :

$$x_k = s_k(\theta) + \varepsilon_k \quad (\text{III.1})$$

avec :

$$s_k(\theta) = \sum_{m=0}^{N_s-1} A_m \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m) \quad (\text{III.2})$$

où  $\varepsilon$  est un bruit qui suit une loi de probabilité gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ .  $t_k = (k-1)\Delta t$  est le temps discrétisé pour  $k = 1 \dots N$ ,  $N_s$  est le nombre de fréquences  $F_m$  présentes dans le signal avec  $0 \leq F_m < \frac{F_e}{2}$ .

Nous définissons les vecteurs contenant, les fréquences  $F = [F_0 \dots F_{N_s-1}]^T$ , les amplitudes  $A = [A_0 \dots A_{N_s-1}]^T$ , et les phases  $\varphi = [\varphi_0 \dots \varphi_{N_s-1}]^T$ .

Comme nous l'avons vu précédemment (chapitre II), les amplitudes, les phases, ainsi que les fréquences ne sont pas parfaitement connues. Donc le vecteur  $\theta$  des paramètres à estimer est défini comme suit :

$$\theta = \begin{bmatrix} A \\ \varphi \\ F \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

où,  $\dim(\theta) = (3N_s \times 1)$ .

La modélisation du signal dans la fenêtre d'observation nous fournit les hypothèses de travail suivantes :

- $s_k(\theta)$  est déterministe,
- $\theta$  est un vecteur déterministe inconnu.

Nous sommes donc en situation non-bayésienne. C'est pourquoi dans cette partie nous développons les méthodes classiquement utilisées en traitement du signal dans le cadre de l'estimation paramétrique en situation non-bayésienne. Et nous les appliquerons à des signaux de courant et de tension.

Notons que dans notre situation le rapport signal sur bruit (RSB) est favorable. Le bruit est à peine perceptible, à l'œil.

## **III.1.2 Estimation paramétrique en situation non-bayésienne : cas non linéaire**

Tel qu'il est défini plus haut, le modèle utilisé est non linéaire car nous nous trouvons dans le cas où les fréquences, les amplitudes et les phases sont inconnues. Il nous faudra donc utiliser une méthode d'estimation adaptée au cas non linéaire.

Il existe dans la littérature de nombreuses méthodes permettant d'estimer les fréquences, amplitudes et phases d'un modèle construit par une somme de sinusoides. Nous ne les développerons pas toutes ici<sup>3</sup>. Dans un premier temps, nous présentons la méthode des moindres carrés non linéaire. Compte tenu de notre modèle, notre choix s'est naturellement porté sur cette méthode. Dans un second temps, nous présenterons la méthode Matrix Pencil qui est également une méthode d'estimation paramétrique, rencontrée lors de l'état de l'art [10], qui fait partie des méthodes haute résolution.

### **A) Moindres Carrés Non Linéaire**

#### **Définition :**

La technique des Moindres Carrés consiste à rechercher le paramètre  $\theta$  qui minimise le critère :

$$C(\theta) = \|x - s(\theta)\|^2 \quad (\text{III.4})$$

L'estimé  $\hat{\theta}$  des MC est par définition :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{Argmin}}(\|x - s(\theta)\|^2) \quad (\text{III.5})$$

#### **Théorie :**

Commençons tout d'abord par réécrire le modèle donnée par l'équation (III.2) sous forme matricielle :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_s-1} [A_m \cdot \cos(\varphi_m) \cdot \cos(\omega_m \cdot t_k) - A_m \cdot \sin(\varphi_m) \cdot \sin(\omega_m \cdot t_k)] \quad (\text{III.6})$$

où  $\omega_m = 2\pi F_m$  est la fréquence angulaire.

Sous forme matricielle, le modèle devient :

$$x = s + \varepsilon = M(\theta_2) \cdot \theta_1 + \varepsilon \quad (\text{III.7})$$

où :

$$M(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \cdot t_1) & -\sin(\omega_0 \cdot t_1) & \dots & \cos(\omega_{N_s-1} \cdot t_1) & -\sin(\omega_{N_s-1} \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(\omega_0 \cdot t_N) & -\sin(\omega_0 \cdot t_N) & \dots & \cos(\omega_{N_s-1} \cdot t_N) & -\sin(\omega_{N_s-1} \cdot t_N) \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

et :

---

<sup>3</sup> Pour plus d'information sur les différentes méthodes existantes le lecteur est invité à lire les ouvrages [20] [28] [29] [30] [31].

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} A_0 \cos(\varphi_0) \\ A_0 \sin(\varphi_0) \\ \vdots \\ A_{N_s-1} \cos(\varphi_{N_s-1}) \\ A_{N_s-1} \sin(\varphi_{N_s-1}) \end{bmatrix}, \theta_2 = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{N_s-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

avec  $\dim(\theta_1) = (d \times 1)$ ,  $\dim(\theta_2) = (N_s \times 1)$ ,  $\dim(M(\theta_2)) = (N \times d)$  et  $d = 2N_s$ .

Afin d'estimer les paramètres inconnus, nous allons chercher  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui minimisent le critère quadratique suivant (critère des moindres carrés) :

$$C(\theta_1, \theta_2) = [x - M(\theta_2) \cdot \theta_1]^T [x - M(\theta_2) \cdot \theta_1]. \quad (\text{III.10})$$

Etant donné l'expression non linéaire du modèle, nous ne pouvons pas minimiser le critère par rapport à  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en même temps. C'est pourquoi, nous effectuerons cette minimisation en deux étapes : en voici le principe (le développement théorique de ces étapes est détaillé en annexe A).

Tout d'abord, nous minimisons le critère par rapport à  $\theta_1$ . Pour cela, nous cherchons  $\theta_1$  qui annule le gradient de  $C(\theta_1, \theta_2)$  à  $\theta_2$  fixé.

$$\nabla_{\theta_1} C(\theta_1, \theta_2) = 0 \text{ pour } \theta_1 = \hat{\theta}_1.$$

Ensuite, nous obtenons une expression de l'estimé de  $\theta_1$  au sens des moindres carrés :

$$\hat{\theta}_1 = [M(\theta_2)^T M(\theta_2)]^{-1} \cdot M(\theta_2)^T \cdot x. \quad (\text{III.11})$$

Cette expression est bien évidemment fonction de  $\theta_2$ . Nous réinjectons  $\hat{\theta}_1 = f(\theta_2)$  dans l'expression du critère :

$$C(\hat{\theta}_1, \theta_2) = x^T [I - M(\theta_2) \cdot [M(\theta_2)^T M(\theta_2)]^{-1} \cdot M(\theta_2)^T] x. \quad (\text{III.12})$$

A ce moment-là, le critère ne dépend plus que de  $\theta_2$  et on peut le noter  $C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)$ . Il nous suffit maintenant de minimiser, de la même manière que précédemment, le critère par rapport à  $\theta_2$ .

$$\nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) = 0 \text{ pour } \theta_2 = \hat{\theta}_2.$$

Pour finir, après avoir obtenu l'estimé  $\hat{\theta}_2$ , on le réinjecte dans  $\hat{\theta}_1$ . En procédant de cette façon, nous avons bien minimisé le critère  $C(\theta_1, \theta_2)$  par rapport à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Finalement, nous obtenons le couple d'estimés  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  pour lequel le critère  $C(\theta_1, \theta_2)$  est minimum.

Notons toutefois que, comme dans la majorité des problèmes d'estimation dans le cas non linéaire, il est impossible d'obtenir une expression analytique de l'estimé de  $\theta_2$  au sens des moindres carrés ( $\hat{\theta}_2$ ). La recherche du minimum de  $C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)$  (i.e. de  $\hat{\theta}_2$ ) se fera donc en utilisant un algorithme (Gauss-Newton, ou Newton-Raphson si l'on parvient à exprimer le Hessien).

**Remarque :** Ici, le fait de minimiser le critère en deux étapes est tout aussi optimal (au sens des moindres carrés) que de le minimiser globalement. Ceci est uniquement dû au fait que  $\hat{\theta}_1$  s'exprime comme une fonction de  $\theta_2$  ( $\hat{\theta}_1 = f(\theta_2)$ ).

**Remarque :** Il existe des méthodes des moindres carrés non-linéaires récentes telles que la méthode proposée dans [20].



### III.1 L'estimation en traitement du signal

On obtient finalement :

$$\hat{\theta}_1 = [M(\hat{\theta}_2)^T M(\hat{\theta}_2)]^{-1} \cdot M(\hat{\theta}_2)^T \cdot x$$

avec :

$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \cos(\hat{\varphi}_0) \\ \hat{A}_0 \sin(\hat{\varphi}_0) \\ \vdots \\ \hat{A}_{N_s-1} \cos(\hat{\varphi}_{N_s-1}) \\ \hat{A}_{N_s-1} \sin(\hat{\varphi}_{N_s-1}) \end{bmatrix} \text{ et } \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_0 \\ \hat{\omega}_1 \\ \vdots \\ \hat{\omega}_{N_s-1} \end{bmatrix}$$

Les amplitudes et les phases estimées sont alors obtenues de la manière suivante :

$$\hat{A}_{i-1} = \sqrt{(\hat{\theta}_{2i-1})^2 + (\hat{\theta}_{2i})^2} \quad (\text{III.13})$$

$$\hat{\varphi}_{i-1} = \text{atan}\left(\frac{\hat{\theta}_{2i}}{\hat{\theta}_{2i-1}}\right) \quad (\text{III.14})$$

pour  $i = 1 \dots N_s$ .

Finalement, on a :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix}$$

où :

$$\hat{A} = [\hat{A}_0 \dots \hat{A}_{N_s-1}]^T, \hat{\varphi} = [\hat{\varphi}_0 \dots \hat{\varphi}_{N_s-1}]^T \text{ et } \hat{\omega} = [\hat{\omega}_0 \dots \hat{\omega}_{N_s-1}]^T$$

### Avantages et inconvénients :

Le premier avantage de la méthode proposée est dans sa vitesse de convergence. En effet, le calcul exact du Hessien (cf. Annexes A) nous permet d'utiliser l'algorithme de Newton-Raphson qui présente une bonne vitesse de convergence. Cependant la nécessité de calculer le Hessien entraîne un temps de calcul assez long, d'autant plus que dans notre cas le nombre de paramètres à estimer peut être grand. Afin de diminuer le temps de calcul, nous pouvons utiliser l'algorithme Gauss-Newton dans lequel on approxime le Hessien en utilisant uniquement le gradient.

Un autre avantage, engendré par le fait que les estimateurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  soient liés, est la diminution du nombre de paramètres à estimer lors de l'utilisation de la procédure numérique. En effet, dans [20] l'auteur utilise l'algorithme de Gauss-Newton pour estimer tous les paramètres inconnus qui sont au nombre de  $3N_s$ . Tandis que dans notre cas la procédure numérique est utilisée uniquement pour estimer les fréquences ( $\theta_2$ ). Le nombre de paramètres à estimer ainsi que la dimension des matrices est donc trois fois plus faible.

Cependant l'utilisation des méthodes numérique nécessite de prendre quelques précautions. En effet, la convergence dépend fortement du point d'initialisation. Un problème majeur rencontré lors de l'utilisation d'algorithmes itératifs de minimisation est la présence de minima locaux dans la fonction à optimiser. Les figures ci-dessous, qui montrent la forme du critère donné par l'équation (III.10) pour deux cas différents, corroborent l'affirmation précédente.

La figure III.2 représente le critère donné par l'équation (III.10), autour de son minimum, dans le cas d'un signal contenant une seule fréquence  $F_0 = 50$  Hz, avec  $A_0 = 1$  et  $\varphi_0 = 90^\circ$ . La courbe contenue dans la figure III.2 est obtenue en traçant le critère des moindres carrés non linéaire en faisant varier la fréquence de 30 à 70Hz par pas de 0.1Hz.

La figure III.3 nous permet de voir comment se comporte le critère en présence de plusieurs fréquences. Pour cela, on calcule le critère (III.10) dans le cas d'un signal contenant deux fréquences  $F_0 = 50$ Hz et  $F_1 = 150$  Hz, avec comme paramètres  $A_0 = 1$  et  $A_1 = 0.5$  puis  $\varphi_0 = 90^\circ$  et  $\varphi_1 = 45^\circ$ . La courbe contenue dans la figure III.3 est donc obtenue en traçant le critère des moindres carrés non linéaire en faisant varier la première fréquence (respectivement la deuxième) du modèle de 30 à 70Hz (respectivement de 130 à 170Hz) par pas de 0.1Hz.

Grâce à ces deux figures, nous pouvons immédiatement constater que le critère est minimum lorsque le modèle est construit en utilisant les bonnes fréquences.

Malheureusement, nous remarquons également l'existence de minima locaux autour du minimum global. Ceci pourrait être problématique dans le sens où si le point d'initialisation se trouve proche d'un de ces minimums locaux, l'algorithme pourrait ne pas converger vers le minimum global.

Donc pour que ces méthodes nous permettent effectivement de minimiser le critère donné par l'équation (III.12) de manière précise, il faut que le point d'initialisation se trouve dans la « cuvette » (ou « bassin d'attraction »), c'est-à-dire suffisamment proche de la vraie valeur. Donc cette méthode est pertinente lorsqu'on a des informations *a priori* sur les fréquences, et dangereuse sinon.

### III.1 L'estimation en traitement du signal

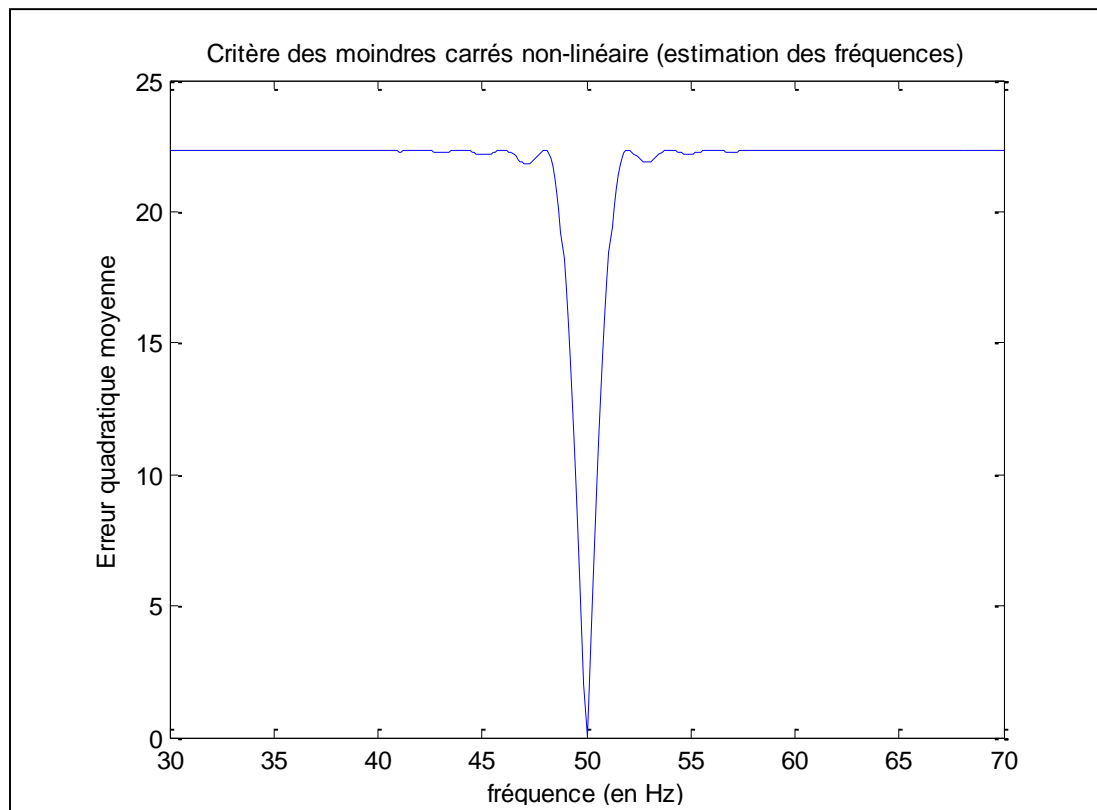


Figure III.2 : Critère des moindres carrés non-linéaire : cas une seule fréquence

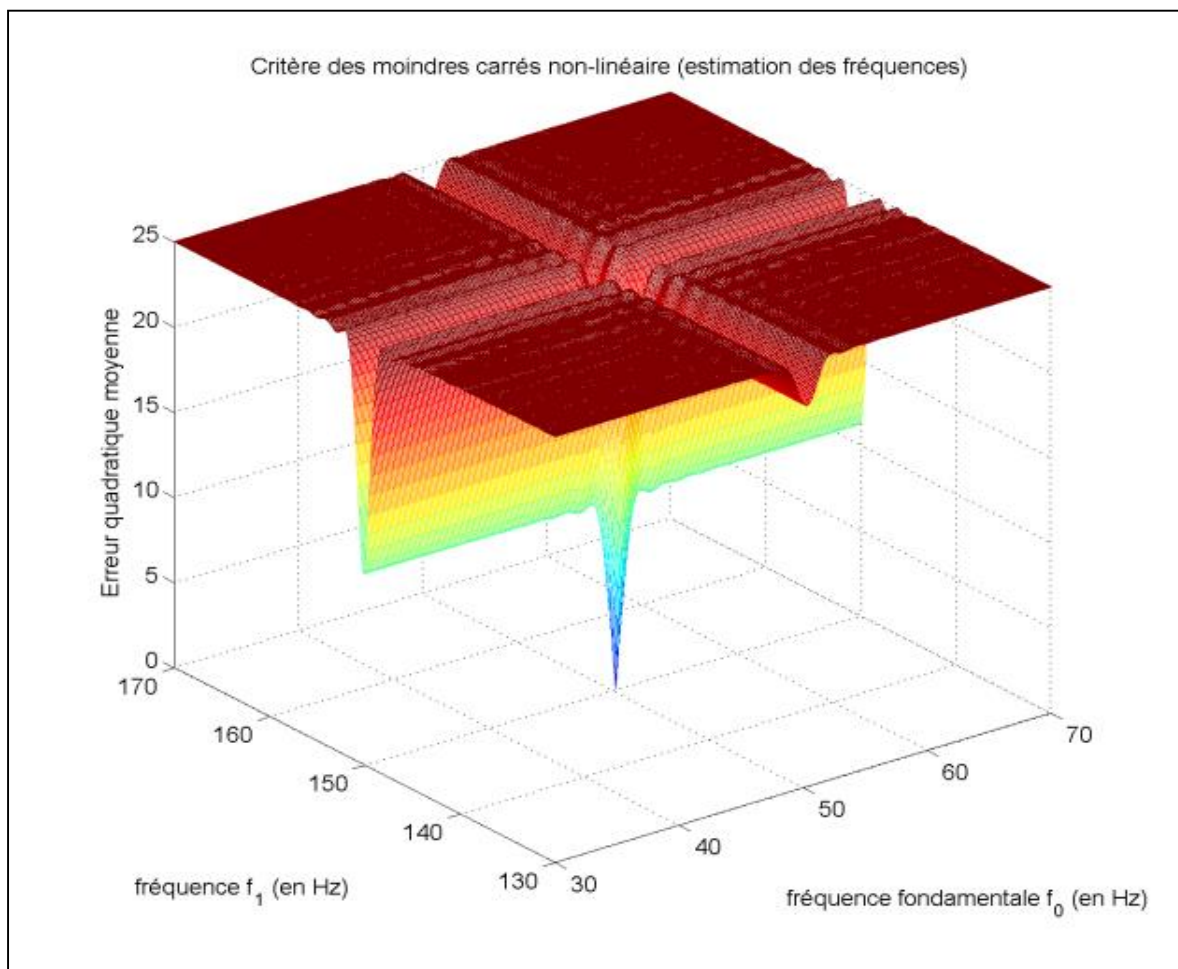


Figure III.3 : Critère des moindres carrés non-linéaire : cas deux fréquences

## Application numérique

Ici nous appliquons la méthode des moindres carrés non-linéaire, sur un signal constitué d'une seule fréquence. Afin d'estimer les paramètres du modèle (fréquence, amplitude et phase), nous avons vu qu'il fallait dans un premier temps utiliser un algorithme d'optimisation permettant d'estimer la fréquence et ensuite vient l'estimation de l'amplitude et de la phase. Or nous avons également vu précédemment que l'algorithme d'optimisation, ici Newton-Raphson, nécessitait d'être initialisé.

Nous travaillons ici sur le signal simulé pour tracer la courbe de la figure III.2, soit :

$$F_0 = 50, \quad A_0 = 1, \quad \varphi_0 = 90$$

Nous allons maintenant utiliser la méthode en choisissant deux points d'initialisation différents afin de voir comment converge l'algorithme. Cela nous permettra, sur un exemple simple ( $N_s = 1$ ), l'importance de l'initialisation et son influence sur le résultat de l'estimation.

Dans un premier temps on initialise avec  $F_{ini} = 50,5$  Hz. Dans un second temps on initialise avec  $F_{ini} = 51$  Hz. La table III.2 montre les résultats obtenus dans les deux cas ainsi que les vrais paramètres.

Table III.2 : Résultats des estimations pour deux points d'initialisation différents

Paramètres	Valeurs simulées	Valeurs estimées $F_{ini} = 50,5$	Valeurs estimées $F_{ini} = 51$
Fréquence $F_0$ (en Hz)	50	50	52.8533
Amplitude $A_0$	1	1	0.2118
Phase $\varphi_0$ (en °)	90	90	13.2298

La différence de point d'initialisation a de fortes conséquences sur le résultat des estimations. En effet, dans un cas l'algorithme converge vers le minimum global et donc les estimations sont excellentes tandis que dans l'autre cas les paramètres estimés sont très différents des paramètres simulés. Notons toutefois que dans le deuxième cas la fréquence estimée, bien qu'elle soit erronée, n'est pas prise au hasard. Cette fréquence correspond en réalité à un minimum local.

La figure III.4 montre l'évolution de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson dans le cas où le point d'initialisation est :  $F_{ini} = 50,5$  Hz.

La figure III.5 montre l'évolution de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson dans le cas où le point d'initialisation est :  $F_{ini} = 51$  Hz.

Ces figures nous permettent d'illustrer le problème de l'existence d'extrema locaux et de comprendre la raison de l'erreur commise lors de l'estimation. Cela confirme les conclusions du paragraphe précédent.

### III.1 L'estimation en traitement du signal

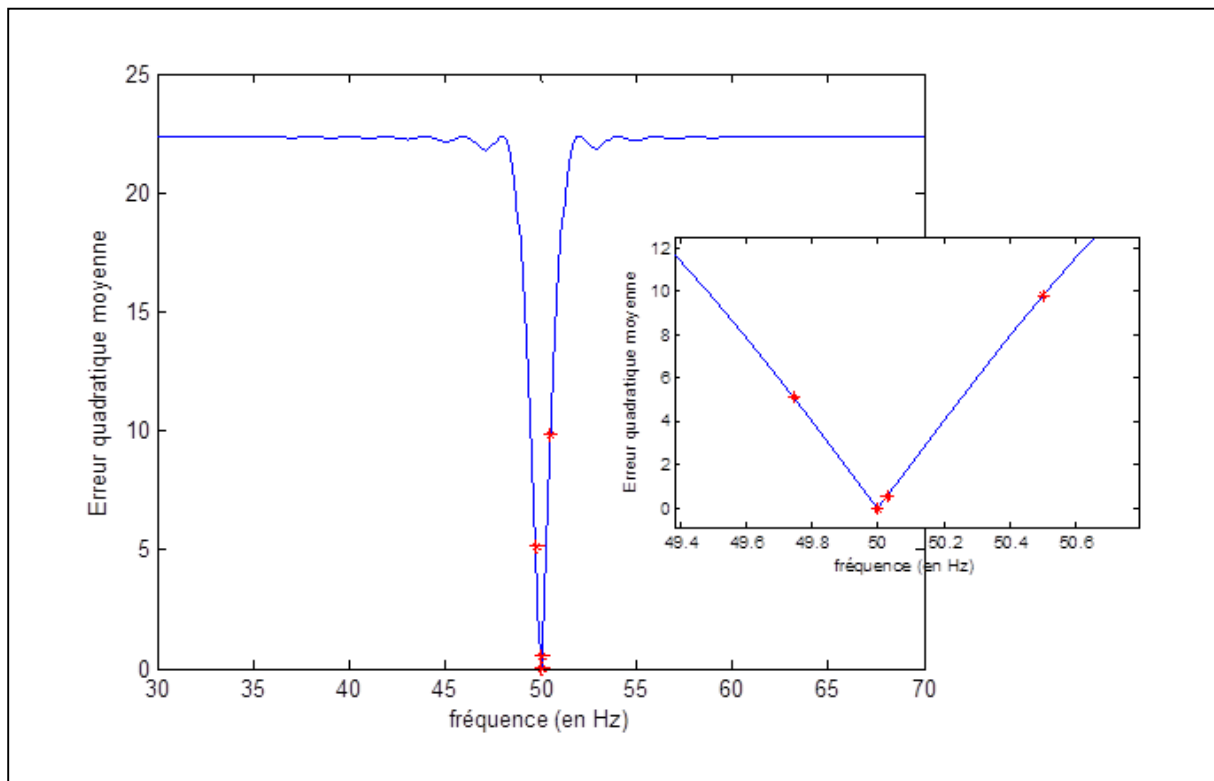


Figure III.4 : Illustration de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson : cas  $F_{ini} = 50,5\text{Hz}$

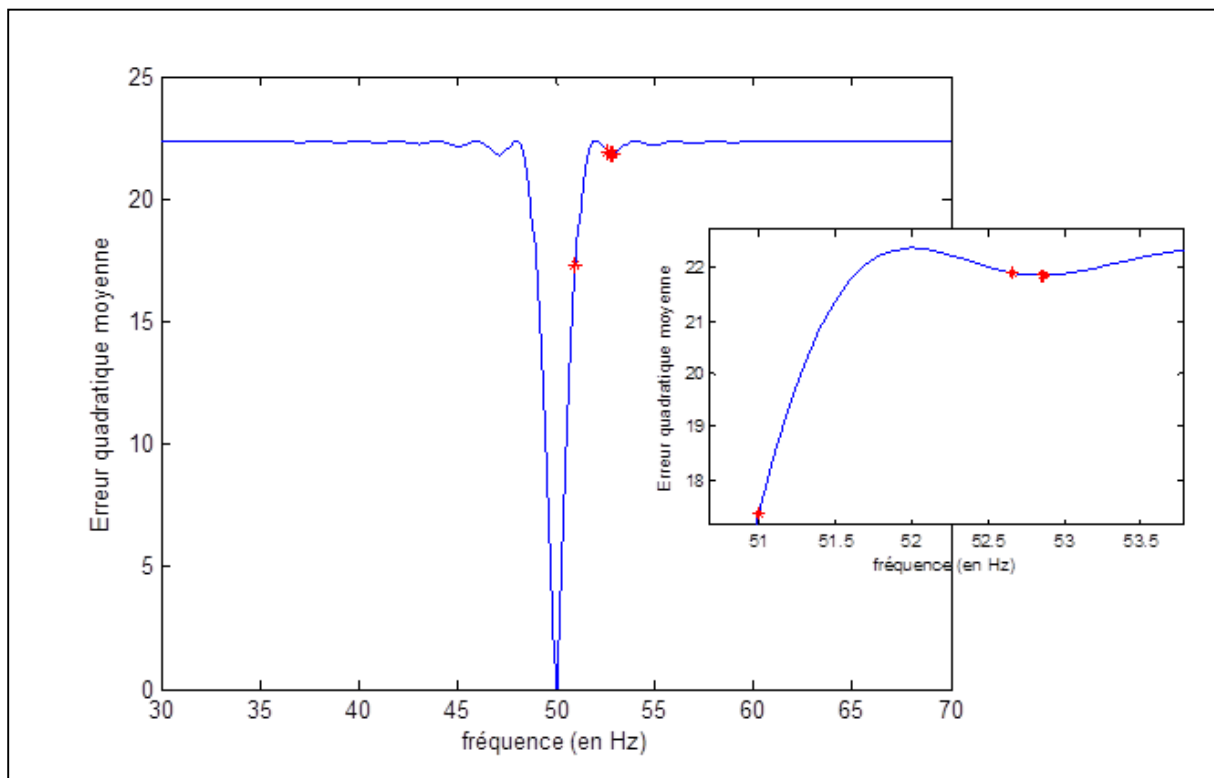


Figure III.5 : Illustration de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson : cas  $F_{ini} = 51\text{Hz}$

## B) Matrix Pencil

La méthode de Matrix Pencil fait partie des méthodes dites « haute résolution » fondées sur des techniques de prédiction linéaire développées par Prony [21]. C'est une des méthodes haute résolution les plus efficaces parce qu'elle conjugue les idées de méthodes qui l'ont précédée, telle que la méthode Prony [21] et la méthode de Tufts-Kumaresan [22] [23] [24].

Dans cette partie du manuscrit, nous présentons rapidement la méthode Matrix Pencil [11] [12]. Le développement théorique de la méthode est détaillé en annexe (cf. Annexe B).

C'est une méthode paramétrique permettant d'estimer les paramètres d'un modèle défini par une somme d'exponentielles complexes (somme de sinusoides amorties).

On modélise l'observation par la relation suivante :

$$x_k = \sum_{i=0}^{N_s-1} a_i e^{j\varphi_i} \cdot \exp((\alpha_i + j\omega_i)t_k) + \varepsilon_k$$

avec  $t_k = k\Delta t$  et :

$$s_k = \sum_{i=0}^{N_s-1} R_i \cdot z_i^k = \text{signal d'intérêt}$$

$$R_i = a_i e^{j\varphi_i} = \text{Résidus (ou amplitudes complexe)}$$

$$z_i = \exp(p_i \cdot \Delta t) = \exp((\alpha_i + j\omega_i)\Delta t) = \text{Pôles}$$

où les  $a_i$  et  $\varphi_i$  représentent les amplitudes et les phases à estimer, et les  $\alpha_i > 0$  et les  $\omega_i$  représentent respectivement le facteur d'atténuation et les fréquences angulaires.

Le but est d'estimer le nombre  $N_s$  d'exponentielles (de sinusoides) dont on a besoin pour caractériser le signal ainsi que les pôles et les résidus (*i.e.*  $\alpha_i$ ,  $\omega_i$ ,  $a_i$  et  $\varphi_i$ ).

Dans la méthode de Matrix Pencil, on trouve les solutions par la recherche des valeurs propres d'une matrice. Elle utilise une décomposition en valeurs singulières (SVD) de cette matrice afin de séparer en deux sous-espaces, le sous espace signal représentant le signal d'intérêt et le sous-espace bruit représentant le bruit de mesure. La SVD introduite par Kumaresan permet également d'améliorer le rapport signal sur bruit et donc d'augmenter la robustesse de la méthode face au bruit.

Cette méthode représente une amélioration en termes de variance des estimateurs par rapport à Tufts-Kumaresan [24]. Elle utilise les mêmes principes de décomposition en valeurs singulières et d'approximation de la matrice de données mais elle introduit une redondance supplémentaire, en s'appuyant sur les propriétés d'un "polynôme" de matrice (Matrix Pencil) défini à l'aide de deux matrices de données décalées.

Les pôles ( $z_i$ ) sont estimés en résolvant un problème aux valeurs propres de la matrice  $\mathbf{X}_1^+ \cdot \mathbf{X}_2$ , où :

$$\mathbf{X}_1^+ = (\mathbf{X}_1^H \cdot \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^H$$

avec :

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x(1) & \cdots & x(L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L}$$

### III.1 L'estimation en traitement du signal

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x(2) & \cdots & x(L+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L+1) & \cdots & x(N) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L}$$

La matrice  $\mathbf{X}_2$  est simplement une "décalée" d'un échantillon de la matrice  $\mathbf{X}_1$ . Le paramètre pencil  $L$  qui fixe les dimensions des matrices, est l'analogue d'un degré de polynôme ou d'un ordre de prédiction. Le nombre de composantes est systématiquement surestimé par le nombre  $L$  (avec  $\frac{N}{3} < L < \frac{2N}{3}$ ).

Si le signal est non bruité, la matrice  $\mathbf{X}_1^+ \cdot \mathbf{X}_2$  admet  $N_s$  valeurs propres non nulles et  $L - N_s$  valeurs propres nulles (ici les valeurs propres non-nulles représentent une estimation des pôles). En revanche, en présence de bruit, en général, toutes les valeurs propres sont non nulles.

Pour améliorer les performances de la méthode, on utilise la projection du signal sur l'espace "signal" déjà utilisée pour la méthode Tufts-Kumaresan : on remplace la matrice  $\mathbf{X}_1^+ \cdot \mathbf{X}_2$  par une approximation de rang inférieur, idéalement  $N_s$ .

Après avoir calculé les  $\hat{z}_i$ , on obtient les  $\hat{R}_i$  en résolvant, au sens des moindres carrés, le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{N-1} & \cdots & \hat{z}_{N_s}^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{N_s} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \hat{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{R}$$

Donc :

$$\hat{\mathbf{R}} = [\hat{\mathbf{Z}}^T \hat{\mathbf{Z}}]^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^T \mathbf{x}$$

Finalement l'estimation des paramètres d'intérêt est donnée par :

$$p_i = \frac{\ln(z_i)}{\Delta t} = \ln(z_i) \cdot F_e$$

et :

$$\alpha_i = \text{Re}(p_i), \omega_i = \text{Im}(p_i), a_i = |R_i| \text{ et } \varphi_i = \arg(R_i)$$

où,  $\text{Re}(\cdot)$  et  $\text{Im}(\cdot)$  représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire, et  $\text{abs}(\cdot)$  et  $\arg(\cdot)$  représentent respectivement la valeur absolue et l'argument.

**Remarque :** Notons que si les pôles sont connus, l'estimation des résidus  $R_i$  (i.e. les amplitudes et les phases) peut se mettre sous la forme d'un problème des moindres carrés dans le cas linéaire.  $N_s$  peut être estimé en utilisant une décomposition en valeurs singulières (SVD). Donc l'avantage de la méthode Matrix Pencil réside dans l'estimation des pôles (i.e. des fréquences et du facteur d'atténuation).

### Avantages et inconvénients :

La méthode Matrix Pencil présente de nombreux avantages. Tout d'abord en termes de temps de calcul, cette méthode est assez rapide. Contrairement à la méthode des moindres carrés non linéaire, cette méthode est une méthode directe. Et le fait de ne pas utiliser d'algorithme d'optimisation augmente sensiblement sa rapidité de calcul.

En revanche, un des problèmes majeurs de cette méthode réside dans l'impossibilité d'utiliser d'éventuelles informations *a priori*. La seule information que nous pourrions utiliser est le nombre de fréquences que l'on souhaite étudier (fréquences d'intérêt). Or cela pourrait s'avérer être plus néfaste encore que si nous n'avions pas d'information. En effet, plaçons-nous par exemple dans le cadre de signaux électriques.

Imaginons un signal de tension contenant deux fréquences d'intérêt  $F_0$  et  $F_1$ , d'amplitudes respectives 12 et 2. Et imaginons que, comme nous avons pu le constater lors du chapitre II, il existe des non linéarités faisant en sorte que le signal de courant contienne non plus deux mais trois fréquences  $F_0$ ,  $F_1$  et  $F_2$  avec comme amplitudes respectives 12, 2 et 5.

Nous souhaitons étudier l'admittance  $h$  associée à chaque fréquence d'intérêt  $F_0$  et  $F_1$ . Nous allons donc utiliser la méthode Matrix Pencil en stipulant que nous souhaitons étudier deux fréquences (car on ne peut stipuler que l'on souhaite étudier  $F_0$  et  $F_1$ ). Pour la tension, les fréquences ainsi que les paramètres qui leur sont associés seront parfaitement estimés. En revanche, pour le courant, ce sont les deux fréquences les plus puissantes qui seront estimées, c'est-à-dire  $F_0$  et  $F_2$ .

Ce problème est lié au fait que l'on ne puisse pas apporter d'information *a priori*, hormis le nombre de fréquences d'intérêt. Cela peut donc entraîner de très grosses erreurs car si nous voulons estimer deux fréquences parmi d'autres ainsi que les paramètres qui leurs sont associés, la méthode Matrix Pencil nous renverra automatiquement les deux plus puissantes.

Donc compte tenu de ce phénomène, cette méthode ne peut être utilisée dans certaines applications. De plus dans notre cas, il nous a été demandé de proposer des méthodes autres que Matrix Pencil (brevet).



## Application numérique

Appliquons la méthode Matrix Pencil sur un signal constitué de plusieurs fréquences. Afin d'estimer les paramètres du modèle (fréquence, amplitude et phase), la méthode se décompose en deux étapes : une première étape, au travers de l'estimation des pôles, fournit une estimation des fréquences et une deuxième étape fournit l'estimation des amplitudes et des phases, au travers de l'estimation des résidus au sens des moindres carrés.

Nous travaillons ici sur le signal simulé suivant :

$$s_k = A_0 \cos(2\pi F_0 t_k + \varphi_0) + A_1 \cos(2\pi F_1 t_k + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi F_2 t_k + \varphi_2)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.27 \\ 150.56 \\ 233.56 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nous allons maintenant utiliser la méthode dans le cas de signaux non bruités. Nous considérons que  $F_0$ ,  $F_1$  et  $F_2$  sont les fréquences d'intérêt. La table III.3 montre les résultats obtenus avec la méthode Matrix Pencil.

Table III.3 : Résultats des estimations sur toutes les fréquences présentes

Paramètres	Valeurs simulées	Valeurs estimées
Fréquence F (en Hz)	50.27	50.27
	150.56	150.56
	233.56	233.56
Amplitude A	12	12
	2	2
	5	5
Phase $\varphi$ (en °)	60	60
	36	36
	0	0

Suite à ces résultats, nous remarquons que la méthode Matrix Pencil permet d'estimer parfaitement les paramètres d'intérêts et ce sans *a priori* (pas d'initialisation, pas d'information *a priori*). De plus, cette méthode a l'avantage d'être très rapide en termes de temps de calcul. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'elle n'utilise pas d'algorithme d'optimisation : c'est une méthode directe. S'ajoute à cela l'utilisation de la décomposition en valeurs singulières (SVD) qui, en plus d'améliorer la robustesse face au bruit, permet de réduire la dimension des matrices et donc de réduire le temps de calcul.

### III.1.3 Estimation paramétrique en situation non-bayésienne : cas linéaire

Dans cette partie, nous considérons le cas où les fréquences sont supposées connues. Nous traitons donc le problème de l'estimation des paramètres d'intérêt (amplitudes et phases) dans le cas linéaire. En ce qui concerne les deux méthodes précédentes, si on considère les fréquences connues elles se ramènent toutes les deux à un problème d'estimation de l'amplitude et de la phase par la méthode des moindres carrés classique.

## Moindres Carrés (MC)

### Théorie :

En considérant les fréquences connues, le modèle développé dans la partie précédente donné par l'équation (III.7) devient un modèle linéaire :

$$x = s(\theta) + \varepsilon = M \cdot \theta_1 + \varepsilon \quad (\text{III.15})$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \cdot t_1) & -\sin(\omega_0 \cdot t_1) & \dots & \cos(\omega_{N_s-1} \cdot t_1) & -\sin(\omega_{N_s-1} \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(\omega_0 \cdot t_N) & -\sin(\omega_0 \cdot t_N) & \dots & \cos(\omega_{N_s-1} \cdot t_N) & -\sin(\omega_{N_s-1} \cdot t_N) \end{bmatrix}$$

et :

$$\theta_1 = [A_0 \cos(\varphi_0) \quad A_0 \sin(\varphi_0) \quad \dots \quad A_{N_s-1} \cos(\varphi_{N_s-1}) \quad A_{N_s-1} \sin(\varphi_{N_s-1})]^T$$

avec,  $\dim(M) = (N \times d)$ ,  $\dim(\theta_1) = (d \times 1)$ .

L'estimé de  $\theta_1$  au sens des moindres carrés est donné par l'expression suivante (cf. annexe A ou équation III.11) :

$$\hat{\theta}_1 = [M^T M]^{-1} M^T x. \quad (\text{III.16})$$

Les amplitudes et les phases sont estimées par les équations (III.13) et (III.14).

Finalement, nous obtenons l'estimé  $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix}$  où :

$$\hat{A} = [\hat{A}_0 \dots \hat{A}_{N_s-1}]^T, \text{ et } \hat{\varphi} = [\hat{\varphi}_0 \dots \hat{\varphi}_{N_s-1}]^T.$$

**Remarque :** L'estimé des moindres carrés est identique à l'estimé du maximum de vraisemblance (i.e. optimal au sens du maximum de vraisemblance) lorsque l'échantillon est gaussien et que  $\theta_1$  n'impacte que l'espérance mathématique des mesures  $x$  (i.e.  $X \sim G(\mu(\theta_1), R)$ ).

## Performances de l'estimateur des moindres carrés (cas linéaire)

La précision de l'estimation restant l'élément déterminant, il convient d'évaluer les performances de l'estimateur en termes de précision. Pour cela il est possible d'établir, à partir uniquement du modèle d'observation, des bornes minimales d'estimation [26]. Ces bornes minimales indiquent les performances ultimes atteignables auxquelles les performances de l'estimateur seront comparées.

### Les deux premiers moments

Les deux premiers moments d'un estimateur, c'est-à-dire son biais et sa variance, témoignent de la qualité de cet estimateur en terme de précision.

Le biais de l'estimateur :

$$\hat{\theta}_1 = [M^T M]^{-1} M^T X$$

est donné par :

$$\begin{aligned} E\{\hat{\theta}_1\} - \theta_1 &= E\{(M^T M)^{-1} M^T X\} - \theta_1 \\ &= E\{(M^T M)^{-1} M^T (M \theta_1 + \xi)\} - \theta_1 \\ &= (M^T M)^{-1} M^T E\{\xi\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

L'estimateur  $\hat{\theta}_1$  est donc sans biais.

De même on calcule la matrice de covariance de l'estimateur :

$$\text{Cov}\{\hat{\theta}_1\} = (M^T M)^{-1} M^T \text{Cov}\{\xi\} M (M^T M)^{-1} = \sigma^2 (M^T M)^{-1}. \quad (\text{III.18})$$

### La borne de Cramér-Rao

*Définition :*

L'intérêt de la Borne de Cramér-Rao (BCR) est de donner un minorant infranchissable à la matrice de covariance de tout estimateur. Plus la matrice de covariance de l'estimateur est proche de la borne, plus il sera considéré comme étant performant. Un estimateur sans biais qui atteint la borne, c'est-à-dire dont la matrice de covariance est égale à la borne de Cramér-Rao est dit efficace.

La BCR de tout estimateur  $\hat{\theta}$  est définie comme suit :

$$B(\theta/X) = \nabla_{\theta} E_{\theta}\{\hat{\theta}\} \cdot F^{-1}(\theta/X) \cdot \nabla_{\theta}^T E_{\theta}\{\hat{\theta}\} \quad (\text{III.19})$$

où  $F(\theta/X)$  est la matrice d'information de Fisher (MIF ou FIM) définie par :

$$F(\theta/X) = E_{\theta}\{\nabla_{\theta} \ln[L(\theta/X)] \cdot \nabla_{\theta}^T \ln[L(\theta/X)]\} \quad (\text{III.20})$$

et  $L(\theta/X)$  représente la loi de  $X$  conditionné par  $\theta$ .

Si l'estimateur  $\hat{\theta}$  est sans biais, c'est-à-dire si  $E_{\theta}\{\hat{\theta}\} = \theta$ , alors  $\nabla_{\theta} E_{\theta}\{\hat{\theta}\} = I$  et la BCR devient :

$$B(\theta/X) = F^{-1}(\theta/X) \quad (\text{III.21})$$

*Application au modèle :*

Reprenons le modèle défini précédemment par :

$$x = M \cdot \theta_1 + \varepsilon \quad (\text{III.22})$$

où,  $\varepsilon$  un bruit gaussien centré de variance  $\sigma^2$  qui est réalisation de  $\xi \sim G(0, R = \sigma^2 I)$ .

La borne de Cramer-Rao des estimateurs sans biais de  $\theta_1$  est (cf. annexe C) :

$$B(\theta_1/X) = F^{-1}(\theta_1/X) = \sigma^2 (M^T M)^{-1} \quad (\text{III.23})$$

pour :

$$\theta_1 = [A_0 \cos(\varphi_0) \quad A_0 \sin(\varphi_0) \quad \cdots \quad A_{N_s-1} \cos(\varphi_{N_s-1}) \quad A_{N_s-1} \sin(\varphi_{N_s-1})]^T$$

L'estimateur de  $\theta_1$  est donc un estimateur efficace car sa matrice de covariance, donnée par l'équation (III.20), est égale à la BCR.

Calcul analytique de  $B(\theta_1/X)$  dans un cas particulier :

Calculons maintenant l'expression analytique de cette borne (III.23) pour le cas où le signal d'intérêt contient une seule fréquence  $F_0$ .

Partant du modèle défini par :

$$s(\theta) = A_0 \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) = M \cdot \theta_1$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \cdot t_1) & -\sin(\omega_0 \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\omega_0 \cdot t_N) & -\sin(\omega_0 \cdot t_N) \end{bmatrix} \text{ et } \theta_1 = \begin{bmatrix} A_0 \cos(\varphi_0) \\ A_0 \sin(\varphi_0) \end{bmatrix}$$

on a :

$$B(\theta_1/X) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(\omega_0 t_k) & -\sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k) \sin(\omega_0 t_k) \\ -\sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k) \sin(\omega_0 t_k) & \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(\omega_0 t_k) \end{bmatrix}^{-1}$$

L'expression de la BCR dans le cas général est donnée par l'équation (III.33). Les calculs permettant d'aboutir à cette expression sont détaillés en annexes (cf. annexe C).

$$B(\theta_1/X) = \frac{2\sigma^2}{(N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} N - \text{Re}(Z) & \text{Im}(Z) \\ \text{Im}(Z) & N + \text{Re}(Z) \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

avec :

$$Z = \frac{1 - e^{2i\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2i\omega_0 \Delta t}} = e^{i\omega_0(N-1)\Delta t} \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

### III.1 L'estimation en traitement du signal

D'après l'expression de la BCR donnée par l'équation (III.33), on constate qu'elle est fonction des trois paramètres suivants :

- la puissance (variance) du bruit  $\sigma^2$ ,
- la taille de la fenêtre d'observation  $N$ ,
- la fréquence du signal  $F_0$ .

Notons que la BCR ne dépend pas des paramètres à estimer (*i.e.* de  $\theta_1$ ).

Afin de visualiser le comportement (l'évolution) de la BCR en fonction des paramètres, nous la calculons pour une variance de bruit donnée.

La figure III.6 représente l'évolution de la borne de Cramer-Rao, donnée en (III.33), en fonction de la fréquence du signal d'intérêt et de la taille de la fenêtre d'observation.

Pour cela, nous avons fixé la variance du bruit puis fait varier la fréquence et la taille de la fenêtre d'observation. Voici les paramètres utilisés :

$$\sigma = 1, F_0 = 40, 40.01, \dots, 60\text{Hz}, \text{ et } N = 100, 101, \dots, 300 \text{ échantillons}$$

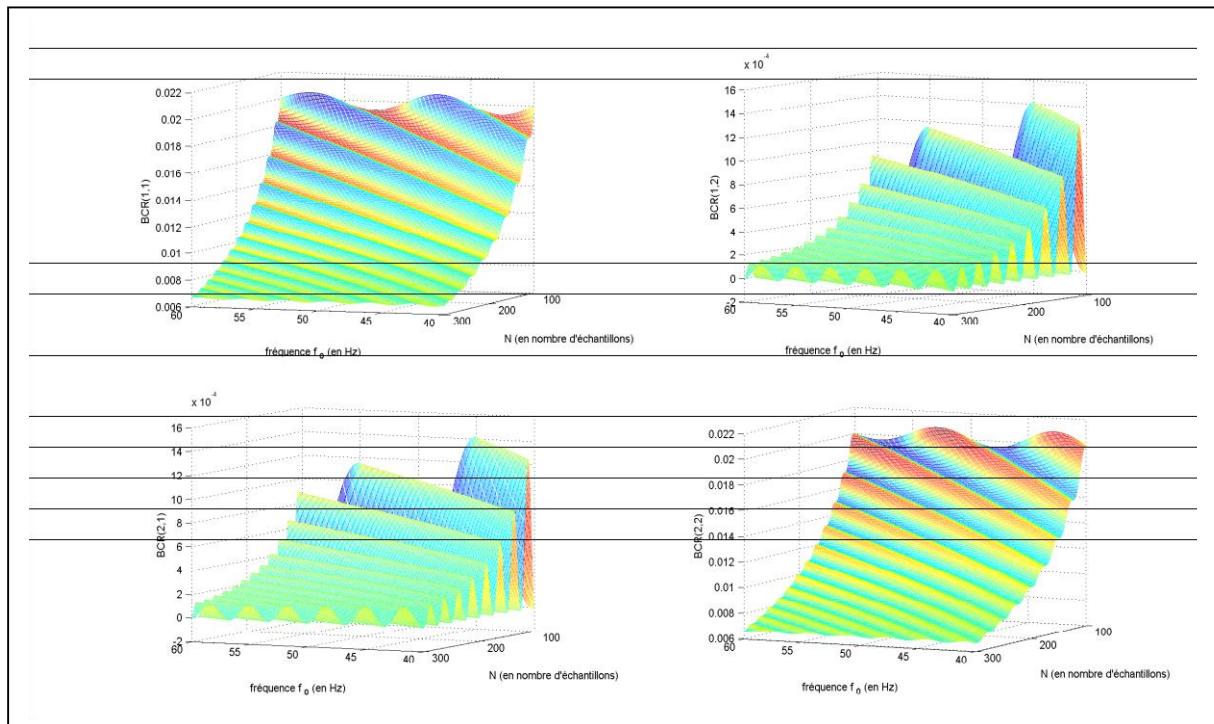


Figure III.6 : évolution de chacun des termes de  $B(\theta_1/X)$  en fonction de  $F_0$  et  $N$

Cette figure nous permet de voir l'évolution de chacun des termes de la BCR en fonction de la taille de la fenêtre et la fréquence. Grâce à cette figure, nous remarquons que pour une fréquence donnée, plus la fenêtre d'observation est grande plus la BCR est petite. Tandis que pour une taille de fenêtre donnée, la borne varie « sinusoidalement » en fonction de la fréquence et que l'amplitude de ces variations est constante quelle que soit la fréquence.

Notons tout de même que lorsque la taille de la fenêtre d'observation est égale à un nombre entier de périodes, c'est-à-dire lorsque  $F_0 = \ell \times \Delta f$  avec  $\ell \in \mathbb{N}$ , cela implique :

$$\sin(\omega_0 N \Delta t) = \sin(2\pi F_0 N \Delta t) = \sin\left(2\pi \ell \frac{F_c}{N} N \Delta t\right) = \sin(2\pi \ell) = 0$$

soit :

$$Z = 0$$

Et donc, la borne de Cramer-Rao devient :

$$B(\theta_1/X) = \frac{2\sigma^2}{N} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

**Remarque :**

*En analysant les équations (III.24) et (III.25), ainsi que la figure III.6, on remarque que lorsque la fenêtre d'observation contient un nombre entier de périodes (cas idéal) :*

- *La BCR ne dépend plus que de la variance du bruit et de la taille de la fenêtre d'observation. Elle est donc indépendante de la fréquence. Elle évolue en  $\sigma^2$  lorsque  $N$  est fixé et en  $\frac{1}{N}$  pour un  $\sigma$  donné quelle que soit la fréquence  $F_0$ .*
- *Pour une variance de bruit et une taille de fenêtre donnée, la BCR est une matrice diagonale constante quelle que soit  $F_0$ .*
- *C'est une matrice diagonale, ce qui implique que les paramètres estimés par un estimateur efficace sont décorrélés.*
- *La BCR est identique pour les deux composantes de  $\theta_1$ .*

*Tandis que lorsque la fenêtre d'observation ne contient pas un nombre entier de périodes :*

- *La BCR dépend de la variance du bruit, notée  $\sigma^2$ , la taille de la fenêtre d'observation, notée  $N$ , et la fréquence du signal, notée  $F_0$ .*
- *Pour  $N$  et  $\sigma$  fixés, la borne évolue en fonction de la fréquence.*
- *La BCR n'est pas une matrice diagonale. Le fait que les termes extra-diagonaux soient non-nuls traduit une corrélation entre les paramètres estimés (les deux composantes du vecteur  $\theta_1$ ).*
- *De plus, la BCR est constituée de termes fluctuant dont l'existence implique que la BCR n'évolue pas linéairement en  $\frac{1}{N}$  mais qu'elle varie de manière « sinusoïdale » autour de la BCR du cas idéal.*

Afin d'illustrer nos propos, nous reprenons l'exemple de la figure III.6 et traçons la BCR dans les deux cas cités précédemment en fixant deux paramètres et en faisant varier le troisième.

La figure III.7 représente donc chaque composante de la matrice  $B(\theta_1/X)$  dans les deux cas précédents, que nous appellerons respectivement le cas général et le cas idéal, pour :

$$\sigma = 1, N = 120, \text{ et } F_0 = 40, 40.01, \dots, 60$$

Et la figure III.8 représente la même chose pour :

$$\sigma = 1, F_0 = 50, \text{ et } N = 100, 101, \dots, 300$$

### III.1 L'estimation en traitement du signal

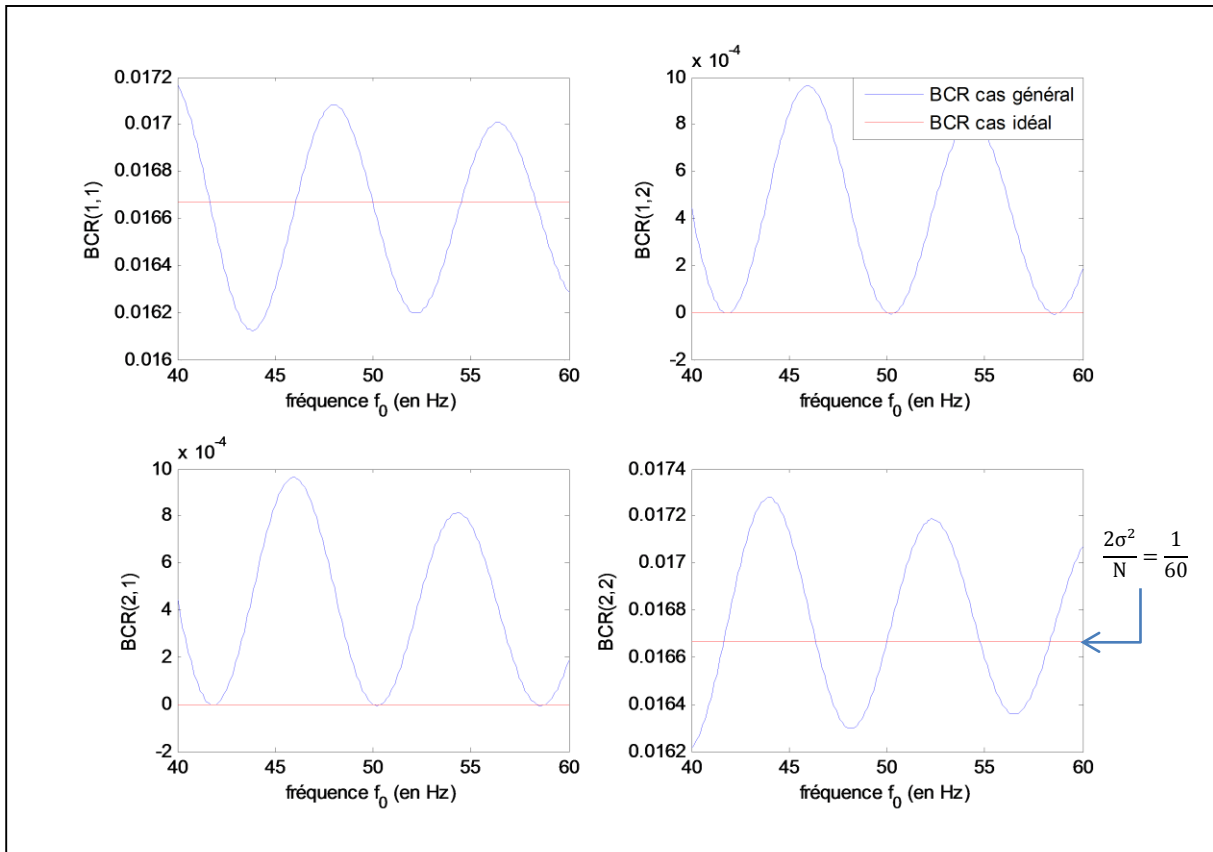


Figure III.7 : BCR lorsqu'on fixe  $\sigma = 1$  et  $N = 120$  et on fait varier  $F_0$

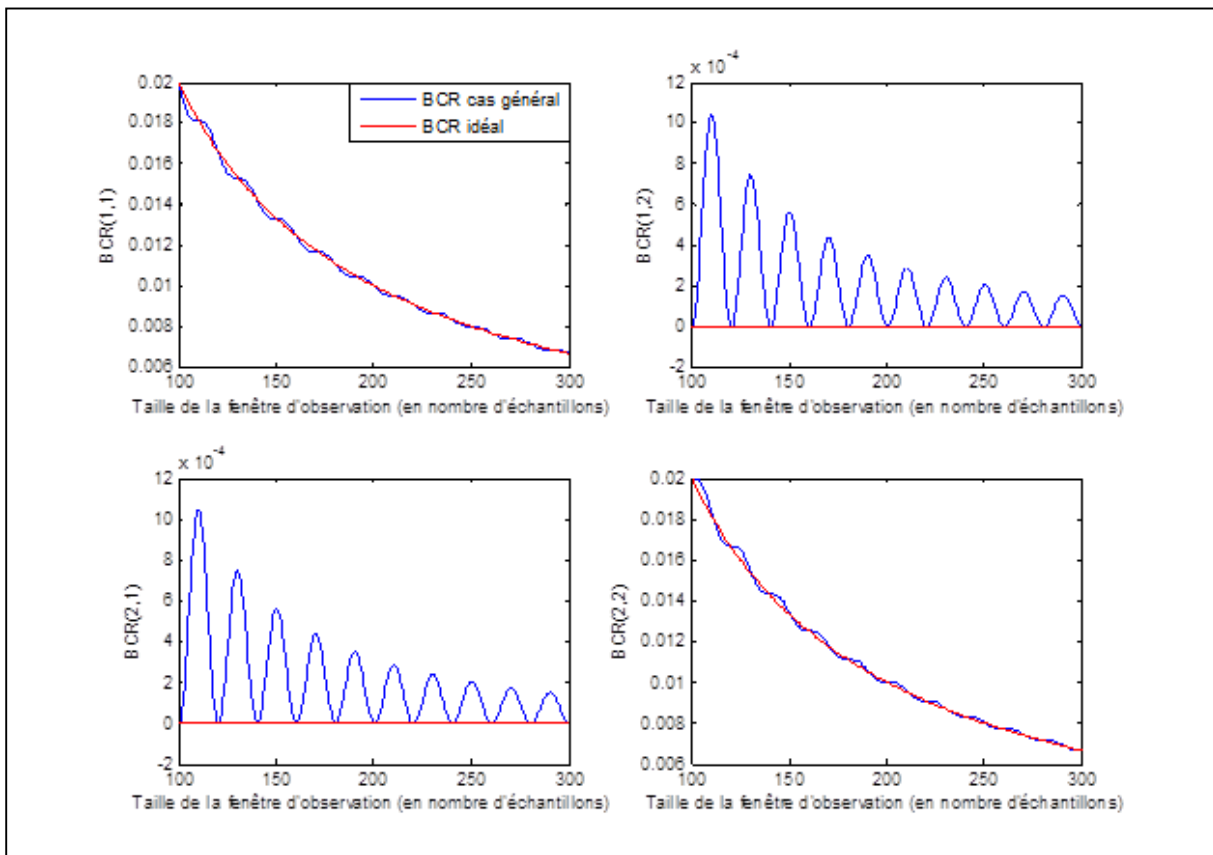


Figure III.8 : BCR lorsqu'on fixe  $\sigma = 1$  et  $F_0 = 50$  et on fait varier  $N$

Nous nous plaçons maintenant dans les mêmes conditions que dans la suite du manuscrit, c'est-à-dire avec une fenêtre d'observation qui est de l'ordre de 1000 points ( $N=900 \dots 1100$ ).

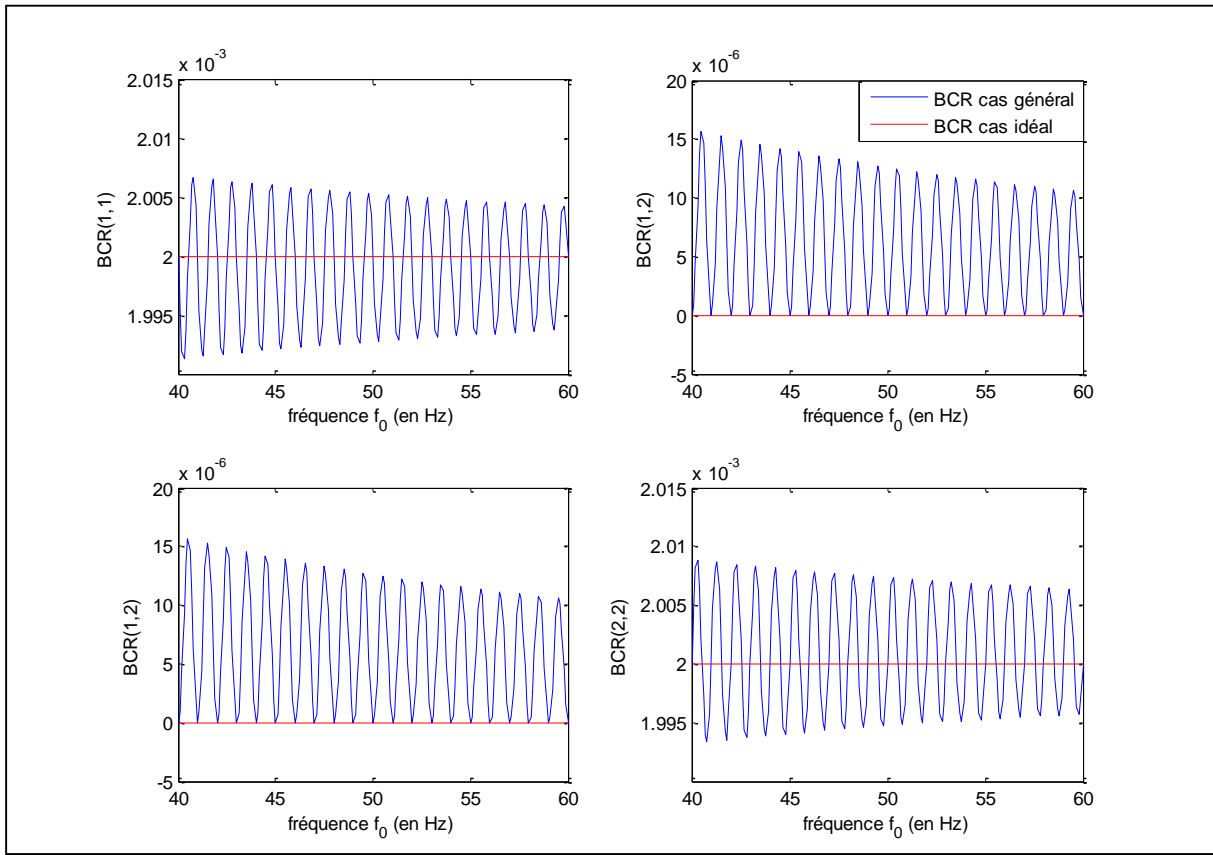


Figure III.9 : On fixe  $\sigma$  et  $N$  et on fait varier  $F_0$

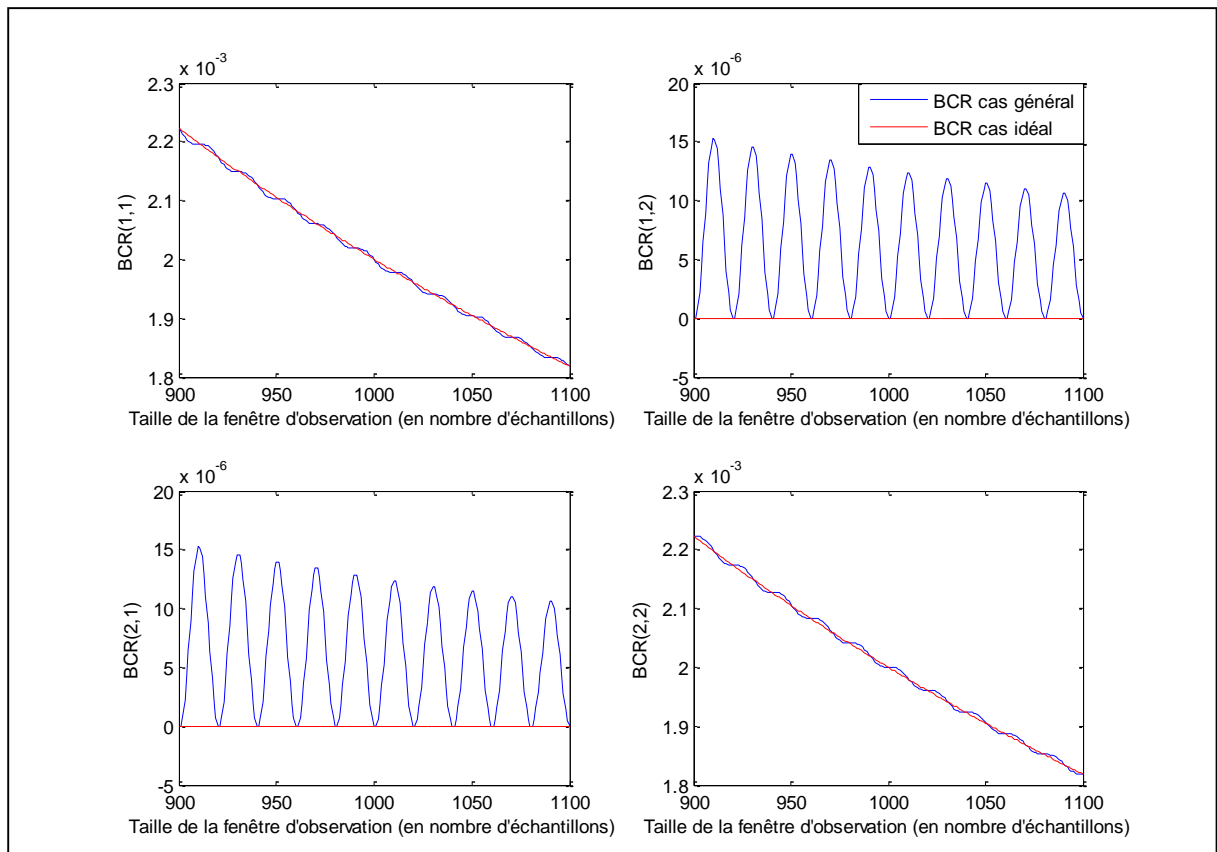


Figure III.10 : On fixe  $\sigma$  et  $F_0$  et on fait varier  $N$



### III.1 L'estimation en traitement du signal

**Remarque :** Le résultat obtenu pour la  $BCR(1,1)$  et  $BCR(2,2)$  (i.e. variance optimale de l'estimateur respectivement de  $A_0 \cos(\varphi_0)$  et  $A_0 \sin(\varphi_0)$ ), figure III.7, est assez surprenant car il montre que : lorsque la taille de la fenêtre n'est pas un nombre entier de périodes, la variance optimale sur  $A_0 \cos(\varphi_0)$  et  $A_0 \sin(\varphi_0)$  ( $BCR$ ) peut être plus petite que dans le cas « idéal ». En effet, ici nous avons choisi une fenêtre contenant 1000 échantillons, ce qui correspond à un nombre entier de périodes pour une fréquence de 50Hz. Or on constate que la  $BCR(1,1)$  est plus petite pour la fréquence 44Hz environ, pour laquelle une fenêtre de 1000 échantillons ne correspond pas à un nombre entier de périodes. Cependant, d'un autre côté nous remarquons également que pour cette même fréquence, la  $BCR(2,2)$  est plus grande que pour la fréquence 50Hz.

#### Calcul analytique de $B(\theta/X)$ dans un cas particulier :

Notons toutefois que dans notre cas, les paramètres d'intérêt sont les amplitudes et les phases, soit :

$$\theta = [A_0 \quad \varphi_0 \quad \cdots \quad A_{N_s-1} \quad \varphi_{N_s-1}]^T$$

Il nous faut donc calculer la  $BCR$  pour l'estimateur de  $\theta$ . Pour cela, nous calculons le gradient de  $X$  par rapport à  $\theta$ .

En reprenant le cas où le signal d'intérêt ne contient qu'une seule fréquence  $F_0$ , nous obtenons l'expression de la  $BCR$  dans le cas général qui est donnée par (cf. annexeC) :

$$B(\theta/X) = \frac{2\sigma^2}{(A_0)^2 \cdot (N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} (A_0)^2 \cdot (N - \text{Re}(Z)) & A_0 \text{Im}(Z) \\ A_0 \text{Im}(Z) & N + \text{Re}(Z) \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

avec maintenant :

$$Z = e^{2i\varphi_0} \frac{1 - e^{2i\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2i\omega_0 \Delta t}} = e^{i(\omega_0(N-1)\Delta t + 2\varphi_0)} \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}.$$

Notons également que si la taille de la fenêtre d'observation est égale à un nombre entier de périodes, alors la  $BCR$  devient :

$$B(\theta/X) = \frac{2\sigma^2}{N} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(A_0)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

**Remarque :** à la différence du cas où les paramètres à estimer sont  $A_0 \cos(\varphi_0)$  et  $A_0 \sin(\varphi_0)$ , nous remarquons que :

- La  $BCR$  dépend à la fois de  $\sigma$ ,  $N$  et  $F_0$ , mais aussi de  $A_0$  et de  $\varphi_0$ .
- On remarque également que lorsque la fenêtre d'observation contient un nombre entier de périodes, la  $BCR$  ne dépend plus que de  $\sigma$ ,  $N$  et  $A_0$ .
- Dans le cas « idéal », si  $A_0$  est plus grand que 1 la  $BCR$  de la phase est plus petite que la  $BCR$  de l'amplitude et inversement.

Ici, nous avons calculé  $B(\theta/X)$  qui représente la borne de Cramer-Rao des estimateurs sans biais. Cependant, on ne sait pas si notre estimateur est biaisé ou non.

Afin de savoir si l'estimateur de  $A_0$  et  $\varphi_0$  est biaisé il nous faut calculer les performances de l'estimateur, en l'occurrence le biais.

En se plaçant, comme précédemment, dans le cas où le signal d'intérêt ne contient qu'une seule fréquence  $F_0$ , on remarque grâce aux équations (III.13) et (III.14) que l'estimé  $\hat{\theta}$  est obtenu en appliquant une transformation non linéaire de l'estimé  $\hat{\theta}_1$ , soit :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(\hat{\theta}_1) \\ \rho(\hat{\theta}_1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

où :

$$\xi(\hat{\theta}_1) = \sqrt{(\hat{\theta}_{1,1})^2 + (\hat{\theta}_{1,2})^2} \quad (\text{III.29})$$

$$\rho(\hat{\theta}_1) = \text{atan}\left(\frac{\hat{\theta}_{1,2}}{\hat{\theta}_{1,1}}\right). \quad (\text{III.30})$$

On montre en annexe D que, quelle que soit  $\psi$  une fonction non linéaire monodimensionnelle, l'espérance mathématique approchée de  $\hat{\theta} = \psi(\hat{\theta}_1)$  est donné par :

$$E\{\hat{\theta}\} \simeq \psi(\theta_1) + b(\hat{\theta}_1) \frac{\partial \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{1}{2} b(\hat{\theta}_1) \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} b(\hat{\theta}_1) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \text{Cov}(\hat{\theta}_1) \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \right\}$$

où  $b(\hat{\theta}_1)$  représente le biais de l'estimateur  $\hat{\theta}_1$ .

Dans notre cas, nous avons montré que l'estimateur de  $\hat{\theta}_1$  est sans biais et que sa matrice de variance-covariance est égale à  $\sigma^2 (M^T M)^{-1}$ . Soit :

$$b(\hat{\theta}_1) = 0 \text{ et } \text{COV}(\hat{\theta}_1) = \frac{2\sigma^2}{(N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} N - \text{Re}(Z) & \text{Im}(Z) \\ \text{Im}(Z) & N + \text{Re}(Z) \end{bmatrix}.$$

Donc la valeur approchée de  $E\{\hat{\theta}\}$  devient :

$$E\{\hat{\theta}\} = E\{\psi(\hat{\theta}_1)\} \simeq \psi(\theta_1) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \text{COV}(\hat{\theta}_1) \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \right\}. \quad (\text{III.31})$$

Finalement, nous avons montré que l'expression approchée du biais sur l'estimé  $\hat{A}_0$  dans le cas général est :

$$b\{\hat{A}_0\} = \frac{\sigma^2}{A_0(N^2 - |Z|^2)} \{N + \text{Re}(Z) \cos(2\varphi_0) - \text{Im}(Z) \sin(2\varphi_0)\}.$$

De même que l'expression approchée du biais sur l'estimé  $\hat{\varphi}_0$  est donnée par :

$$b\{\hat{\varphi}_0\} = \frac{-2\sigma^2}{(A_0)^2(N^2 - |Z|^2)} \{\text{Im}(Z) \cos(2\varphi_0) + \text{Re}(Z) \sin(2\varphi_0)\}$$

avec :

$$Z = e^{i\omega_0(N-1)\Delta t} \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

### III.1 L'estimation en traitement du signal

Et si  $N$  est un nombre entier de périodes, le biais devient :

$$b\{\hat{A}_0\} = \frac{\sigma^2}{A_0 N} \text{ et } b\{\hat{\varphi}_0\} = 0.$$

Après avoir calculé le biais de l'estimateur  $\hat{\Theta}$ , on constate qu'il n'est pas nul. Cet estimateur est donc un estimateur biaisé.

**Remarque :** *Il faut garder à l'esprit que les expressions de  $b\{\hat{A}_0\}$  et  $b\{\hat{\varphi}_0\}$  sont des approximations du biais théorique de l'estimateur  $\hat{\Theta}$ .*

## Application numérique

Performances de l'estimateur de  $\theta_1$  pour :

$$A_0 = 12, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}, F_0 = 50 \text{ et } N = 1000 \text{ (Cas « idéal »)}$$

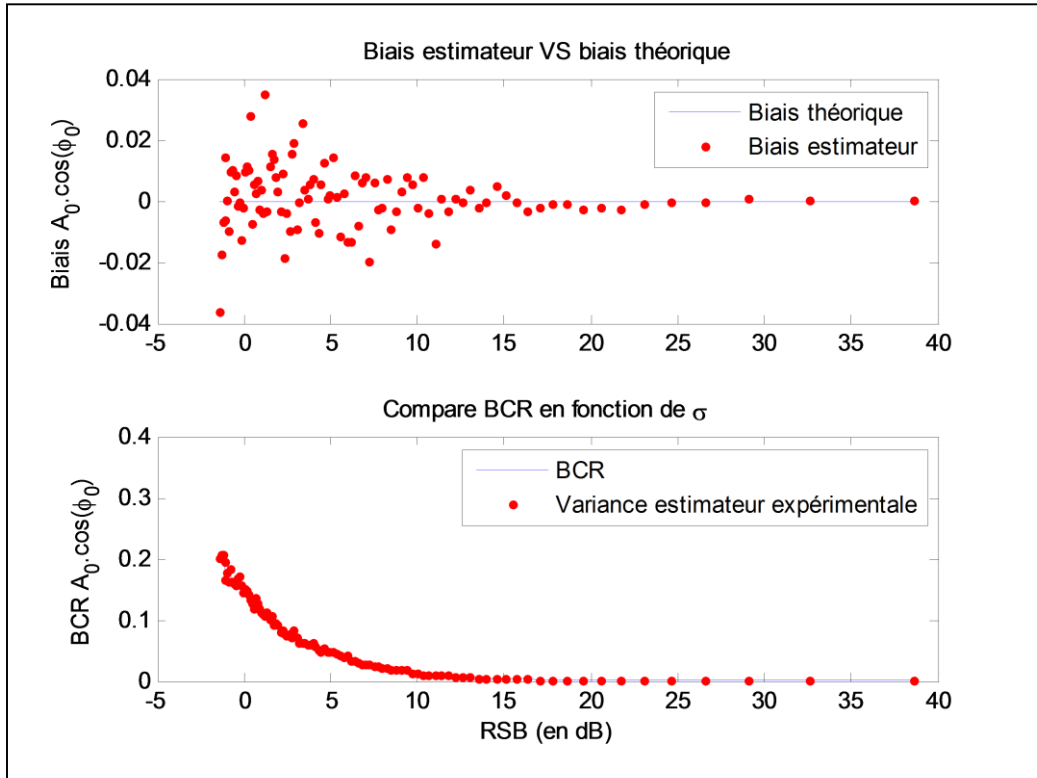


Figure III.11 : Biais et Variance de l'estimateur de  $A_0 \cos(\varphi_0)$  VS biais théorique et BCR

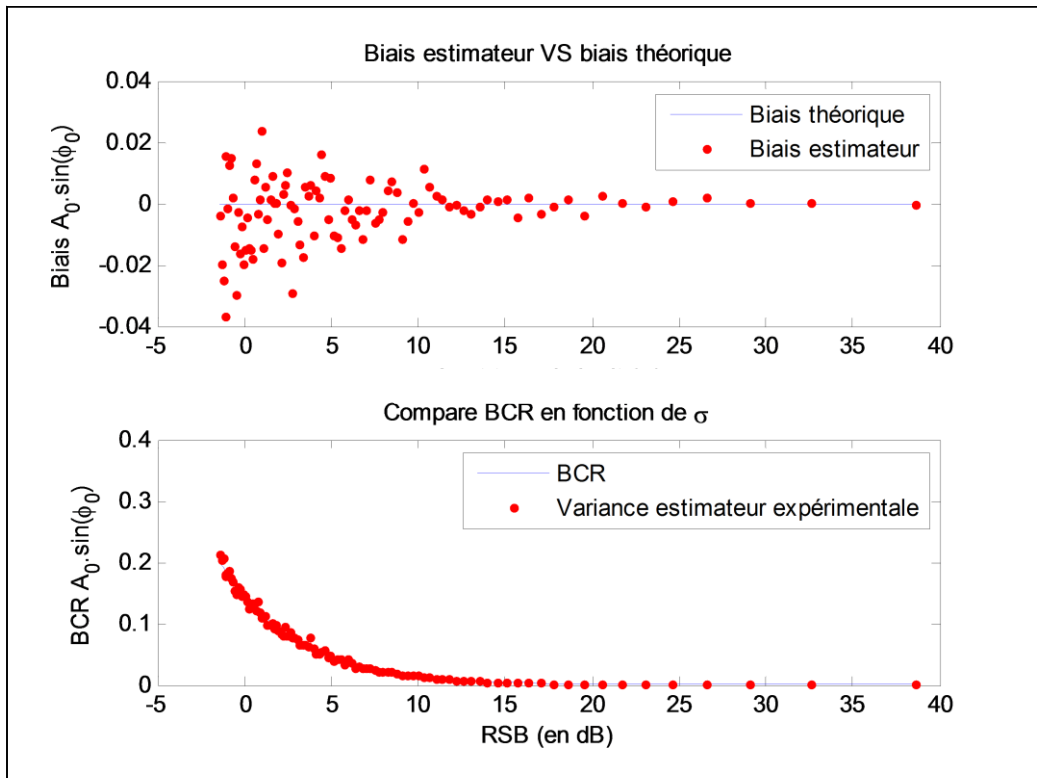


Figure III.12 : Biais et Variance de l'estimateur de  $A_0 \sin(\varphi_0)$  VS biais théorique et BCR

### III.1 L'estimation en traitement du signal

Performances de l'estimateur de  $\theta$ .

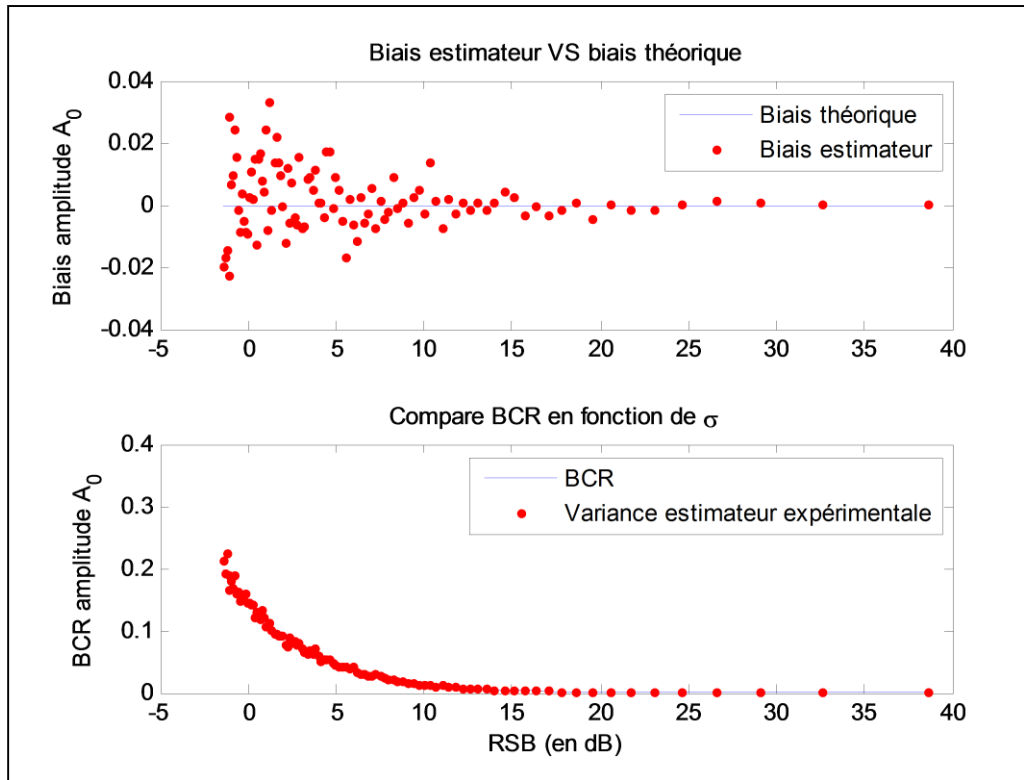


Figure III.13 : Biais et Variance de l'estimateur de  $A_0$  VS biais théorique et BCR

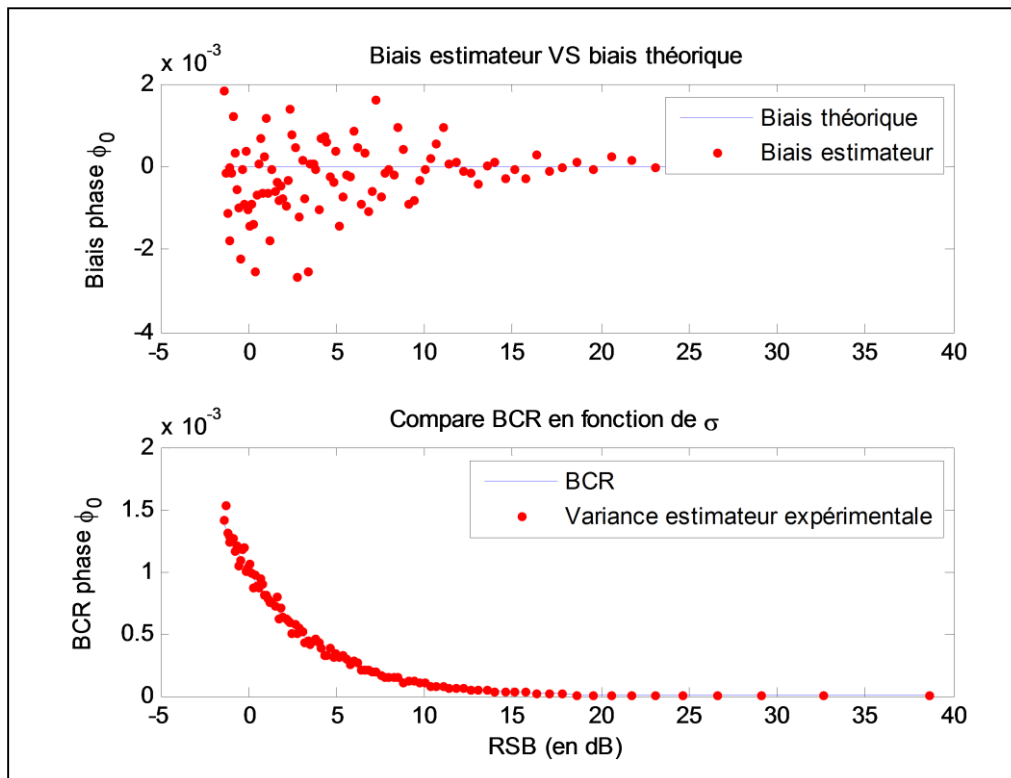


Figure III.14 : Biais et Variance de l'estimateur de  $\phi_0$  VS biais théorique et BCR

Les figures III.11 et III.12, corroborent les résultats théoriques car on remarque effectivement que l'estimateur de  $\theta_1$  est sans biais et qu'il atteint la borne. Notons toutefois qu'il peut exister un biais lorsque le rapport signal à bruit (RSB) devient faible (trop défavorable).

En ce qui concerne l'estimateur de  $\theta$  qui théoriquement est biaisé, nous remarquons grâce aux figures III.13 et III.14 que le biais est négligeable, sauf pour des RSB faibles, et qu'il atteint également la borne.

En comparant les résultats obtenus pour les deux estimateurs, on remarque que l'estimateur de  $A_0 \cos(\varphi_0)$  et  $A_0 \sin(\varphi_0)$  présente les mêmes performances. Et l'estimateur de l'amplitude a des performances similaires à l'estimateur de  $A_0 \cos(\varphi_0)$  mais que l'estimateur de la phase présente de bien meilleures performances.

## III.2 La détection en traitement du signal

Le problème le plus simple relevant de la théorie de la décision est le problème qui consiste à devoir choisir entre plusieurs hypothèses (notées  $H_i$ ) qui permettent chacune d'expliquer ou d'interpréter des données observées : il s'agit donc de décider à partir d'un ensemble d'observations collectées, quelle est l'hypothèse qui est vraie, ou qui semble vraie.

Sous chacune des hypothèses, les données collectées sont supposées de nature aléatoire. Les observations ont une fonction de densité de probabilité notée fdp (cas continu) ou une loi de probabilité (cas discret) qui dépend de l'hypothèse  $H_i$  qui est réalisée. Chaque fonction de densité (fdp) ou chaque loi de probabilité est totalement (hypothèses simples) ou partiellement (hypothèses composées) connue sous chacune des hypothèses possibles  $H_i$ . A chaque hypothèse est donc associée une fdp ou une loi de probabilité sur l'espace de mesure.

Considérons un système de communication par exemple : l'émetteur envoie une suite de symboles représentés chacun par un signal de forme particulière (l'opération de modulation qui réalise la correspondance entre un symbole et une forme déterminée de signal). Le récepteur doit donc détecter si un symbole a été émis et sélectionner ce symbole parmi un alphabet de symboles possibles. La séquence de ces symboles constitue un message. Ce dernier se propage dans un canal de transmission (ligne électrique, fibre optique, atmosphère, ...) imparfait, et subit des modifications ou des altérations lors de sa propagation. Ces modifications sont le plus souvent dues à la nature dispersive et fluctuante du milieu dans lequel se propage le signal, à des atténuations, voire plus simplement à des effets d'interférences en présence de signaux parasites (d'autres émetteurs utilisent le même canal de transmission). Le signal capté par le récepteur est donc différent du signal émis et les fluctuations subies par ce dernier sont de nature aléatoire. Il se peut par ailleurs que l'appareil de réception lui-même introduise un bruit parasite non négligeable. La tâche du détecteur est donc de retrouver le symbole émis à partir d'observations "noyées" dans un bruit, ou de prendre toute autre décision sur la nature du signal observé, en faisant un minimum d'erreurs de décision par exemple. L'objectif de la théorie de la détection est d'étudier comment de telles erreurs peuvent être rendues aussi rares ou aussi peu coûteuses que possible.

Notons que quel que soit le type de signal auquel on s'intéresse, de nature déterministe ou bien de nature aléatoire, la présence de bruit au niveau du récepteur ne peut être prise en compte que dans le cadre d'une approche probabiliste. Le signal à l'entrée du récepteur sera donc un processus stochastique ne pouvant être décrit qu'à l'aide de sa fonction de densité de probabilité. La forme de cette fdp résume l'ensemble des connaissances disponibles sur la nature physique des perturbations ou du signal lui-même. Dans cette partie nous nous intéresserons au problème de décision binaire, le récepteur ayant à choisir entre deux hypothèses notées  $H_0$  et  $H_1$ .

## III.2.1 CUSUM

Nous décrivons ici la méthode des sommes cumulées, appelée algorithme CUSUM. Cet algorithme utilisé dans [25] a pour but de détecter des changements d'état dans la série de donnée, en l'occurrence des changements de moyenne. Pour cela, on considère une séquence de variable aléatoires indépendantes  $z_k$  dont la densité de probabilité, notée  $L(\theta|z)$ , dépend d'un paramètre scalaire  $\theta$ .

Avant l'instant de changement d'état, le paramètre  $\theta$  est égal à  $\theta_0$ , et après cet instant il est égal à  $\theta_1 \neq \theta_0$ . Notons que le paramètre  $\theta_0$  avant le changement d'état est supposé connu. Le problème consiste donc à détecter l'instant de changement de paramètre, c'est-à-dire l'instant où le paramètre  $\theta$  passe de la valeur  $\theta_0$  à  $\theta_1$ .

### **Principe :**

Le principe de la méthode Cusum est de sommer les écarts entre des valeurs observées et une valeur attendue sur une durée de référence (moyenne de référence).

Une alarme statistique est générée si cette somme dépasse la valeur seuil. A chaque fois que l'algorithme détecte un saut (somme cumulée > seuil  $\equiv$  changement de valeur moyenne), la somme est remise à zéro et la nouvelle moyenne devient la moyenne de référence.

### **Théorie :**

Nous disposons de  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$  qui sont les échantillons du signal représentant soit l'enveloppe du courant ou la puissance active. Il apparaît sur ces signaux des sauts de valeur moyenne lors de la mise en route ou l'extinction d'un usage.

Si nous supposons que  $z$  suit une loi de probabilité gaussienne, alors :

$$L(\theta|z) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left[-\frac{(z_k-\theta)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

### Hypothèses :

- Sous l'hypothèse  $H_0 : \theta_0 = \mu_0$
- Sous l'hypothèse  $H_1 : \theta_1 = \mu_1$

A ces hypothèses, on associe les règles de décision suivantes :

- $d_0$  : Il n'y a pas eu de changement de la valeur moyenne  $\Rightarrow \theta = \theta_0$
- $d_1$  : Il y a eu un changement de la valeur moyenne  $\Rightarrow \theta = \theta_1$

Nous définissons ici le rapport de vraisemblance et nous le comparons au seuil de détection. Si ce rapport est supérieur au seuil de détection nous prenons la décision  $d_1$ . Dans le cas contraire nous prenons la décision  $d_0$ .

Le développement qui suit va nous permettre de mettre en place des tests statistiques :

$$\Lambda(z) = \frac{L(\theta_1|z)}{L(\theta_0|z)} \underset{d_0}{\overset{d_1}{\geq}} \eta = \text{seuil de détection}$$



### III.2 La détection en traitement du signal

$$\begin{aligned}
 & \frac{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left[-\frac{(z_k-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]} d_1}{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left[-\frac{(z_k-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right]} d_0} \geq \eta \\
 & \prod_{k=1}^N e^{\left[-\frac{(z_k-\mu_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{(z_k-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right]} \geq \eta \frac{d_1}{d_0} \\
 & e^{\left[\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N [(z_k-\mu_0)^2 - (z_k-\mu_1)^2]\right]} \geq \eta \frac{d_1}{d_0} \\
 & \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N [z_k^2 - 2\mu_0 z_k + \mu_0^2 - z_k^2 + 2\mu_1 z_k - \mu_1^2] \geq \ln(\eta) = \eta' \frac{d_1}{d_0} \\
 & \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N [2z_k(\mu_1 - \mu_0) + \mu_0^2 - \mu_1^2] \geq \eta' \frac{d_1}{d_0} \\
 & \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \left[ z_k - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right] \geq \eta' \frac{d_1}{d_0}
 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant face à deux possibilités. En effet, ici, nous pouvons définir un saut de la valeur moyenne qui sera soit positif, soit négatif.

1<sup>er</sup> Cas : Pour ce cas, nous considérons un saut positif,

$$\mu_1 = \mu_0 + v \quad \text{et} \quad v = \mu_1 - \mu_0 = \text{valeur du saut} > 0$$

L'inégalité précédente devient :

$$\sum_{k=1}^N \left[ z_k - \mu_0 - \frac{v}{2} \right] \geq \frac{d_1}{d_0} \frac{\sigma^2}{v} \eta' = \eta''$$

2<sup>ème</sup> Cas : Maintenant, considérons un saut négatif,

$$\mu_1 = \mu_0 - v \quad \text{et} \quad v = \mu_0 - \mu_1 = \text{valeur du saut} > 0$$

L'inégalité précédente devient,

$$\sum_{k=1}^N \left[ z_k - \mu_0 + \frac{v}{2} \right] \geq \frac{d_0}{d_1} \frac{\sigma^2}{v} \eta'$$

Finalement, on a :

$$\sum_{k=1}^N \left[ -z_k + \mu_0 - \frac{v}{2} \right] \geq \eta'' \frac{d_1}{d_0}$$

L'algorithme CUSUM utilise des sommes cumulées. L'intérêt de remplacer des sommes classiques par des sommes cumulées est de pouvoir comparer une somme au seuil de détection à chaque instant.

D'où, les règles de décisions suivantes :

$$\text{Détection de saut positif} \Rightarrow g_k^+ = g_{k-1}^+ + z_k - \mu_0 - \frac{v}{2} \frac{d_1}{d_0} \geq \eta''$$

$$\text{Détection de saut négatif} \Rightarrow g_k^- = g_{k-1}^- - z_k + \mu_0 - \frac{v}{2} \frac{d_1}{d_0} \geq \eta''$$

A chaque fois que la somme cumulée  $g_k^+$  (respectivement  $g_k^-$ ) dépasse le seuil de détection, on les réinitialise ( $g_k^+ = 0$  et  $g_k^- = 0$ ) et la nouvelle moyenne devient la moyenne de référence ( $\mu_1$  devient le nouveau  $\mu_0$  ;  $\mu_0 = \mu_1$ ).

### **III.2.2 Application numérique**

Précédemment, nous avons vu le développement théorique de l'algorithme CUSUM qui est une méthode dont le but est de détecter les changements de valeur moyenne dans une série de données.

Dans notre cas, cela pourrait nous permettre de détecter les instants de transition, c'est-à-dire l'allumage ou l'extinction d'un usage.

Cette partie a donc pour but de tester cette méthode sur des signaux électriques réels, mesurés aux bornes d'usages de natures différentes, afin de vérifier si elle nous permet effectivement de détecter les changements de moyenne et donc d'estimer les instants de transitions malgré les transitions différentes (courtes et longues).

#### **Application n°1 :**

Le premier exemple consiste à appliquer l'algorithme CUSUM sur un signal représentant l'enveloppe du courant consommé par une résistance. Voyons si cette méthode permet dans un premier temps de détecter l'allumage et l'extinction d'une résistance.

La figure III.15 représente le courant consommé avant, pendant, et après le fonctionnement d'une résistance.

La figure III.16 représente le résultat de la détection, c'est-à-dire les instants de changement de valeur moyenne fournis par l'algorithme CUSUM lorsque nous l'appliquons sur l'enveloppe du signal contenu dans la figure III.15 (en vert est représenté une détection de saut positif et en magenta un saut négatif). Les figures III.16.b et III.16.c montrent, quant à elles, l'évolution des tests statistiques mis en place.

Les résultats obtenus, contenu dans la figure III.16, nous montrent que cette méthode nous permet de détecter les instants de transition. De plus, elle nous permet de faire la différence entre la mise en fonctionnement (front montant) et la mise en arrêt (front descendant) de la résistance.

Notons toutefois l'importance du choix des seuils  $v$  et  $\eta''$ , où  $v$  représente le seuil minimum que l'on souhaite détecter et  $\eta''$  le seuil de détection sur le test statistique, c'est-à-dire la valeur de  $g_k^+$  ou  $g_k^-$  au-dessus de laquelle on considère qu'il s'est produit un évènement.

Si la valeur choisie pour  $v$  est trop faible l'algorithme risque de déclencher très souvent même lorsqu'il n'y a pas d'évènement, c'est ce que nous appelons des fausses alarmes. Et inversement si cette valeur est trop élevée, tous les sauts en dessous de cette valeur ne seront pas détectés, dans ce cas-là on parle de non détection.

De même pour le seuil de détection  $\eta''$  : s'il est trop faible, la probabilité pour que l'algorithme détecte à tort un saut va être assez élevée et si il est trop élevé on risque de ne pas détecter les évènements ou alors de détecter des évènements tardivement, c'est-à-dire un certain temps après la vraie date à laquelle l'évènement s'est produit.

On remarque sur le zoom représenté sur la figure III.16 que l'instant détecté se trouve en plein milieu de la transition. Ceci est dû au choix du seuil. Cela implique donc qu'en fonction de la valeur du seuil, l'instant de détection qui est l'instant de transition estimé, peut se trouver au début, au milieu ou même bien après l'instant d'apparition de l'évènement.

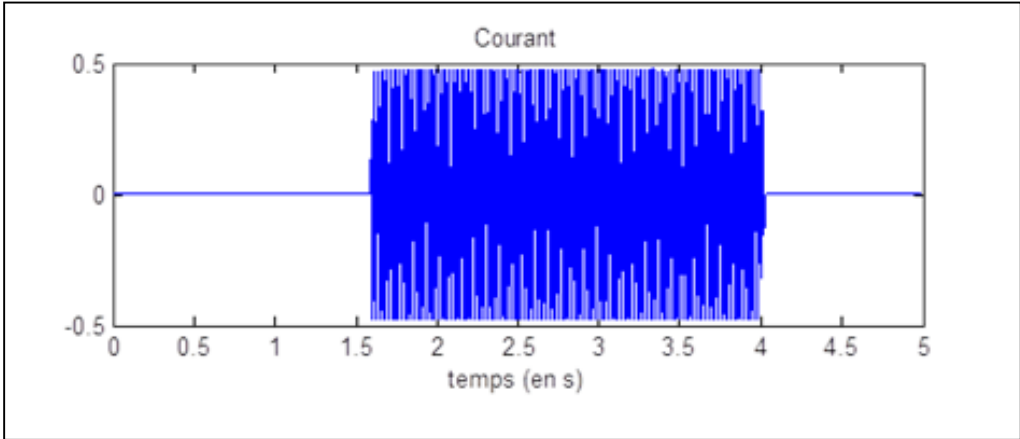


Figure III.15 : Mesures du courant pendant le fonctionnement d'une résistance

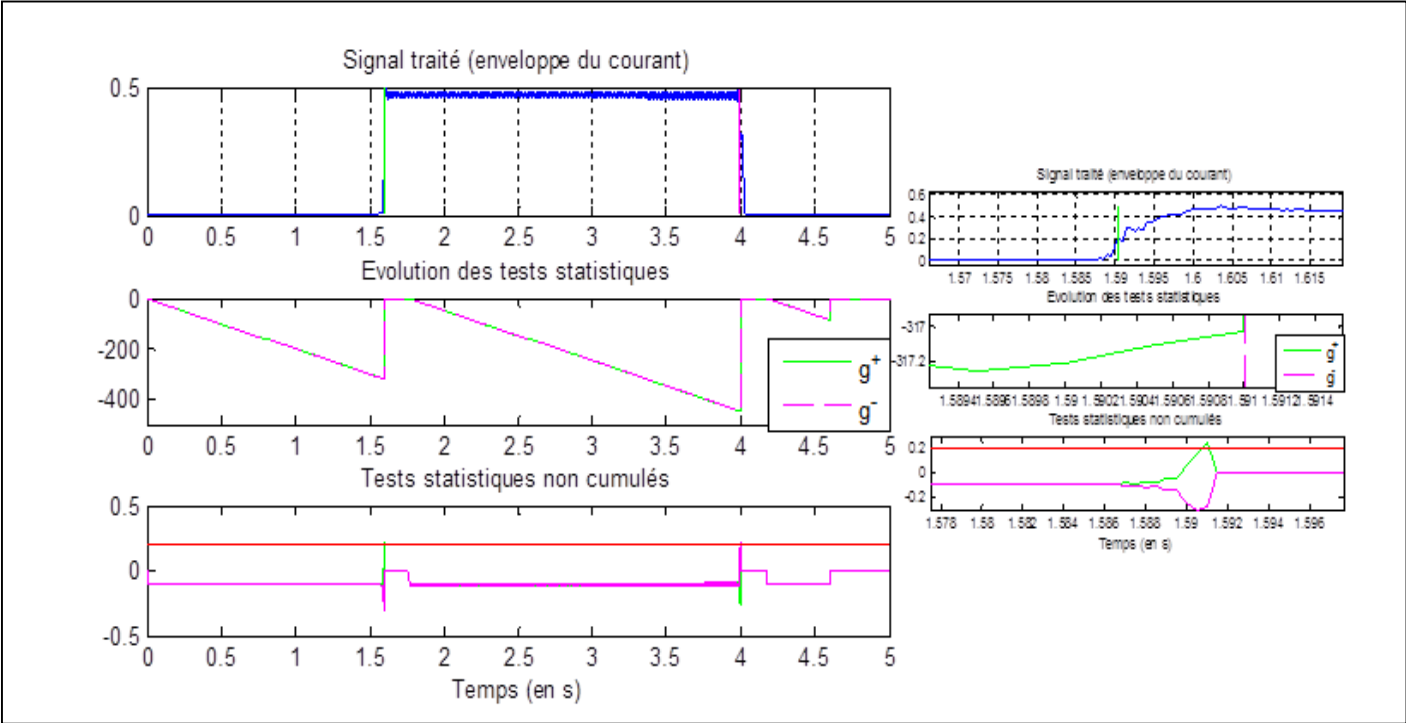


Figure III.16 : Résultat de la détection et évolution des tests statistiques

### **Application n°2 :**

Pour cet exemple, nous appliquons l'algorithme CUSUM sur un signal représentant l'enveloppe du courant consommé par un moteur. Contrairement à la résistance qui a des transitions courtes (instantanées), le moteur présente une transition longue au démarrage et une transition courte à l'extinction. Voyons donc si l'algorithme CUSUM permet de détecter l'allumage et l'extinction de ce moteur.

La figure III.17 représente un courant mesuré. Sur ce courant il y a quatre évènements : deux sauts positifs et deux sauts négatifs correspondant à la mise en route et en arrêt de deux moteurs différents.

La figure III.18 représente le résultat de la détection lorsque nous appliquons l'algorithme CUSUM sur l'enveloppe du signal contenu dans la figure III.17.

Les résultats obtenus, montrent cette fois encore que, lorsque les seuils sont bien choisis, la méthode CUSUM nous permet de détecter les instants de transition et de faire la différence entre un front montant et un front descendant (saut positif et saut négatif).

En ce qui concerne les résultats obtenus ici, les remarques à propos du choix de la valeur des seuils restent valables. De plus cet exemple nous permet de constater une nouvelle limitation de cet algorithme. Dans le chapitre II dans lequel nous avons exposés la stratégie envisagée, il est stipulé, pour chaque évènement, que parmi les paramètres caractéristiques contenus dans le vecteur d'information devait figurer l'instant de transition ainsi que la durée de la transition. Or, nous constatons sur cet exemple que cet algorithme ne nous permet en aucun cas d'estimer la durée de la transition.

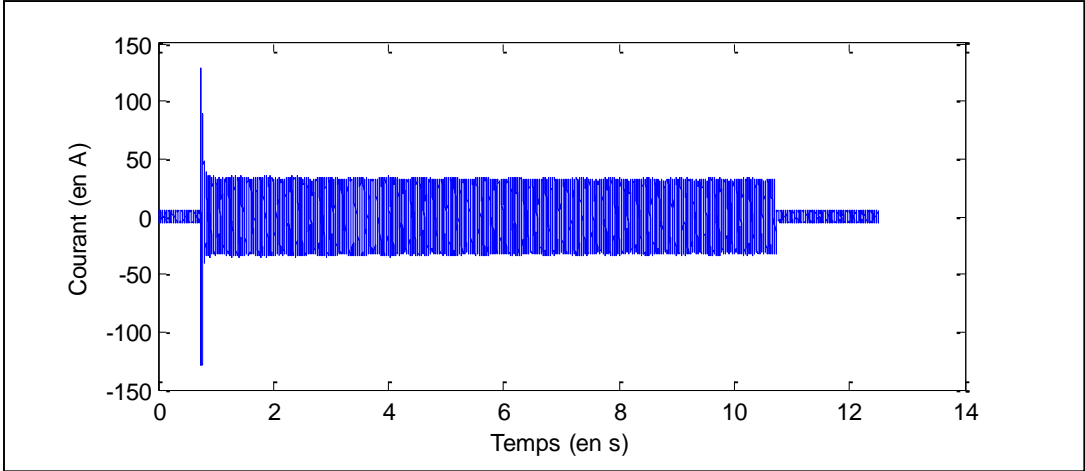


Figure III.17 : Mesures du courant pendant le fonctionnement d'un moteur

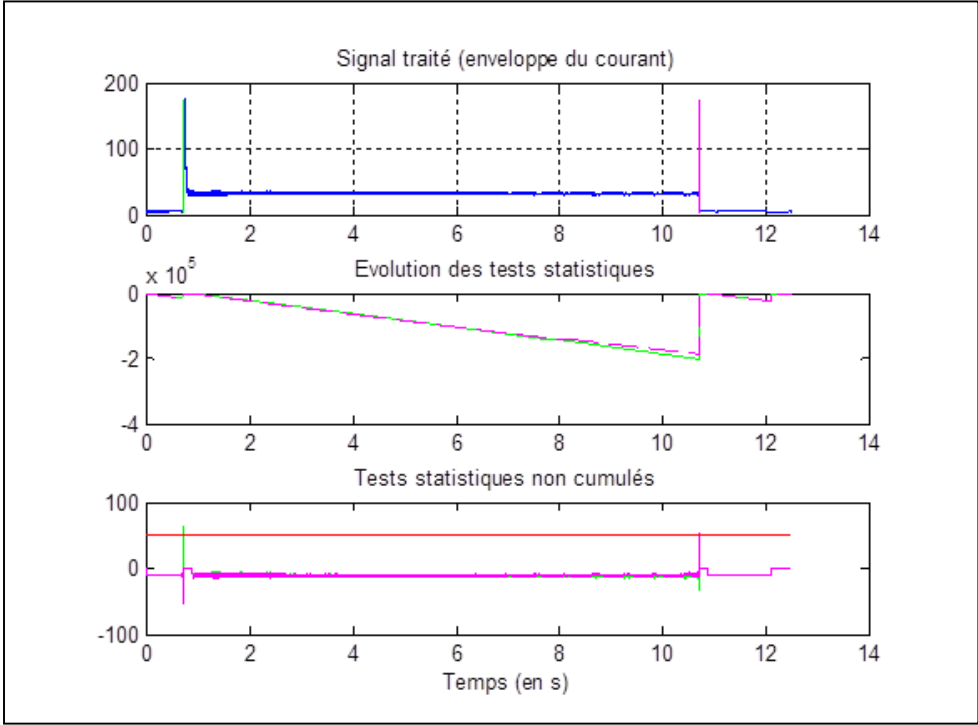


Figure III.18 : Résultat de la détection et évolution des tests statistiques

# Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté des méthodes d'estimation paramétrique pour deux cas de figures.

Dans un premier temps, nous avons vu des méthodes d'estimation adaptées au cas non linéaire, c'est-à-dire des méthodes permettant d'estimer les paramètres tels que les amplitudes, les phases et les fréquences d'un modèle composé d'une somme de sinusoides. Dans ce contexte, nous avons présenté puis étudié la méthode des moindres carrés non linéaire ainsi que la méthode Matrix Pencil. Nous avons pu remarquer un certain nombre d'avantages et d'inconvénients liés à l'utilisation de chacune de ces méthodes. Le choix de la méthode d'estimation dépend donc du problème que l'on souhaite résoudre, ainsi que des éventuelles informations *a priori*. (Parmi ces deux méthodes, c'est la méthode des moindres carrés non linéaire qui serait le plus adapté à notre problème).

En second lieu, nous nous sommes intéressés à l'estimation paramétrique dans le cas où les fréquences sont connues. Nous nous sommes donc naturellement penchés sur la méthode des moindres carrés dans le cas linéaire car sous hypothèse gaussienne l'estimateur des moindres carrés est sans biais et efficace. Les performances annoncées ici sont calculées pour cet estimateur qui nous renvoie un estimé de  $A_0 \cos(\varphi_0)$  et  $A_0 \sin(\varphi_0)$  alors que les paramètres qui nous intéressent sont les amplitudes et les phases. Nous avons donc été amenés à étudier l'estimateur de  $A_0$  et  $\varphi_0$ . Cela nous a permis de constater que contrairement au précédent, l'estimateur de  $A_0$  et  $\varphi_0$  est biaisé. Cependant, nous avons constaté que sous certaines conditions, ce biais devient négligeable voire nul.

Notons que dans notre étude nous travaillons sur les mesures de tension et de courant et nous avons constaté que de nombreux événements (transitions) étaient présents, notamment sur le courant mesuré (cf. chapitre II). Or ce modèle correspond à un état permanent, il ne tient pas compte d'une éventuelle transition dans la fenêtre d'observation, il ne correspond pas complètement aux signaux traités.

Dans la deuxième partie qui traite du problème de la détection, nous avons étudié la méthode des sommes cumulées (CUSUM) qui permet de détecter un changement de valeur moyenne dans une série de données : à chaque pas de temps, le test statistique est comparé à un seuil noté  $\eta''$  et une alarme est déclenchée lorsque la statistique de test dépasse le seuil.

En pratique, le choix de ce seuil est très important car en choisissant un seuil trop bas, nous nous exposons à un grand nombre de fausses alarmes alors qu'un seuil trop élevé entraîne dans le meilleur des cas un retard à la détection et dans le pire, une non détection.

De plus nous avons pu constater, au travers de deux exemples d'application, que cet algorithme présente un certain nombre de limitations. L'une de ces limitation est qu'en fonction de la valeur du seuil, l'instant de transition estimé peut se trouver au début, au milieu ou même bien après l'instant d'apparition de l'évènement. Une autre limitation, et pas des moindres, est que l'algorithme CUSUM ne nous permet pas d'estimer la durée de la transition.

Chapitre IV Proposition  
d'un nouveau modèle et  
algorithmes d'estimation et  
de détection associés





## Introduction

Dans le chapitre précédent, traitant de l'estimation paramétrique et de la détection, nous avons étudié et détaillé la méthode des moindres carrés en utilisant le modèle suivant :

$$s_k(\theta) = \sum_{m=0}^{N_s-1} A_m \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m)$$

qui est classiquement utilisé pour modéliser la tension et le courant mesurés.

Notons toutefois que ce modèle présente quelques limitations. Tout d'abord, nous pouvons constater qu'il n'est pas tout à fait adapté aux signaux traités, notamment au courant. En effet, en utilisant cette modélisation on considère que tous les paramètres du signal étudié sont constants, ce qui correspond à un état permanent : il peut donc être utilisé pour modéliser le signal de tension.

Cependant, dans cette étude nous travaillerons sur la tension et sur le courant et nous avons constaté (chapitre II) que de nombreux événements (transitions) étaient présents sur le courant mesuré. De ce fait le courant se compose de phases stationnaires et de phases transitoires. Donc en effectuant un traitement dans le temps (c'est-à-dire en faisant glisser la fenêtre d'observation dans le temps) le courant contenu dans la fenêtre d'observation est soit en régime permanent, soit en régime transitoire.

Lors des régimes permanents, la modélisation proposée est correcte. Mais lors des régimes transitoires, nous pouvons craindre que les paramètres estimés ne correspondent ni au signal précédant la transition, ni à celui suivant la transition. En fait, les paramètres estimés seront représentatifs d'un signal « moyen » composé de la somme du signal précédent la transition et de quelques échantillons du signal suivant la transition.

Afin de vérifier cela, nous allons mettre en application cette méthode en nous plaçant dans des conditions réelles, c'est-à-dire en effectuant une estimation dans le temps des paramètres de la tension et du courant.

Pour cela, nous simulons, sur une durée de 10 secondes, un signal de tension, contenant deux fréquences ( $N_s = 2$ ), tel que :

$$u_k = \sum_{m=0}^{N_s-1} U_m \cos(2\pi F_m t_k + \psi_m)$$

avec :  $F = [50, 150]$ ,  $U = [230, 1]$  et  $\psi = [0^\circ, 45^\circ]$  et  $F_e = 2000$  Hz.

Ainsi que le courant consommé par les résistances  $r_1 = 10\Omega$ ,  $r_2 = 3\Omega$  et  $r_3 = 5\Omega$  tels que :

$$i_k = \frac{u_k}{r_1} \text{ pour } k \in [1, 2000] \cup [16001, N = 20000]$$

$$i_k = u_k \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \text{ pour } k \in [2001, 6000] \cup [12001, 16000]$$

$$i_k = u_k \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \text{ pour } k \in [6001, 12000]$$

Plus précisément, cela signifie que la résistance  $r_1$  est en fonctionnement durant toute la mesure, la résistance  $r_2$  est en fonctionnement de 1s à 8s et la résistance  $r_3$  de 3s à 6 s.

Les signaux simulés sont représentés dans la figure IV.1.

## Introduction

Les figures IV.2 et IV.3 représentent le résultat de l'estimation au cours du temps de l'amplitude et de la phase des fréquences  $F_0$  et  $F_1$  pour la tension et le courant respectivement.

Grâce à ces figures, nous pouvons faire un certain nombre de remarques liées à l'utilisation de ce modèle global.

Tout d'abord, les résultats de la figure IV.2 nous permettent effectivement de confirmer que le modèle correspond bien au signal de tension. Le résultat de l'estimation est stable durant toute la durée du signal et on peut voir que les valeurs des amplitudes et des phases estimées correspondent parfaitement à la simulation, avec :

$$\hat{U} \cong [230, 1] \text{ et } \hat{\psi} \cong [0^\circ, 45^\circ]$$

Le modèle utilisé est donc représentatif d'un état permanent (stationnaire). Cette remarque nous permet de comprendre les résultats de la figure IV.3. Sur cette figure, nous pouvons voir que les paramètres estimés sont stables à certains endroits et qu'ils évoluent dans d'autres. En fait, les paramètres estimés sont stables lorsque le courant contenu dans fenêtre d'observation correspond à un régime permanent et ils évoluent lorsqu'il y a une transition dans la fenêtre d'observation. Prenons l'exemple de la première transition : ceci s'explique par le fait que la portion de signal avant la transition représente le courant consommé par la première résistance  $r_1$ , et après la transition, le courant consommé par les deux charges en parallèle  $r_1$  et  $r_2$ . C'est donc la concaténation de ces deux signaux, c'est-à-dire la présence d'une transition dans la fenêtre, dont on ne tient pas compte dans le modèle, qui entraîne de tels résultats.

Cela entraîne également un problème lié à l'étape de détection d'évènements. En effet, imaginons que ces paramètres soient utilisés pour détecter les évènements qui surviennent sur le réseau : le fait que ces derniers évoluent dans la partie transitoire implique que nous ne pouvons pas avoir une estimation précise de l'instant de transition car l'estimation de cet instant de transition sera comprise entre le début et la fin de cette zone où les paramètres varient, c'est-à-dire dans une plage de temps égale à la durée de la fenêtre d'observation. De plus ce phénomène rend impossible l'estimation de la durée des transitions.

Toutes ces limitations sont dues à la modélisation choisie qui considère un signal stationnaire. Donc, avant tout, il nous faudra choisir un modèle qui tienne compte de tous ces phénomènes.

Ce chapitre se décompose donc en trois parties :

- Une première partie dans laquelle nous proposons une nouvelle modélisation adaptée aux signaux traités, et plus particulièrement aux courants mesurés, c'est-à-dire qui tienne compte de la présence ou non d'une transition dans la fenêtre d'observation.

- Dans la deuxième partie, nous présentons des méthodes d'estimation sur la base de cette nouvelle modélisation, soit une méthode permettant d'estimer les paramètres de ce nouveau modèle.

- Et la troisième et dernière partie de ce chapitre consiste à proposer une manière de détecter les évènements à partir du modèle et de la méthode d'estimation mis en place.

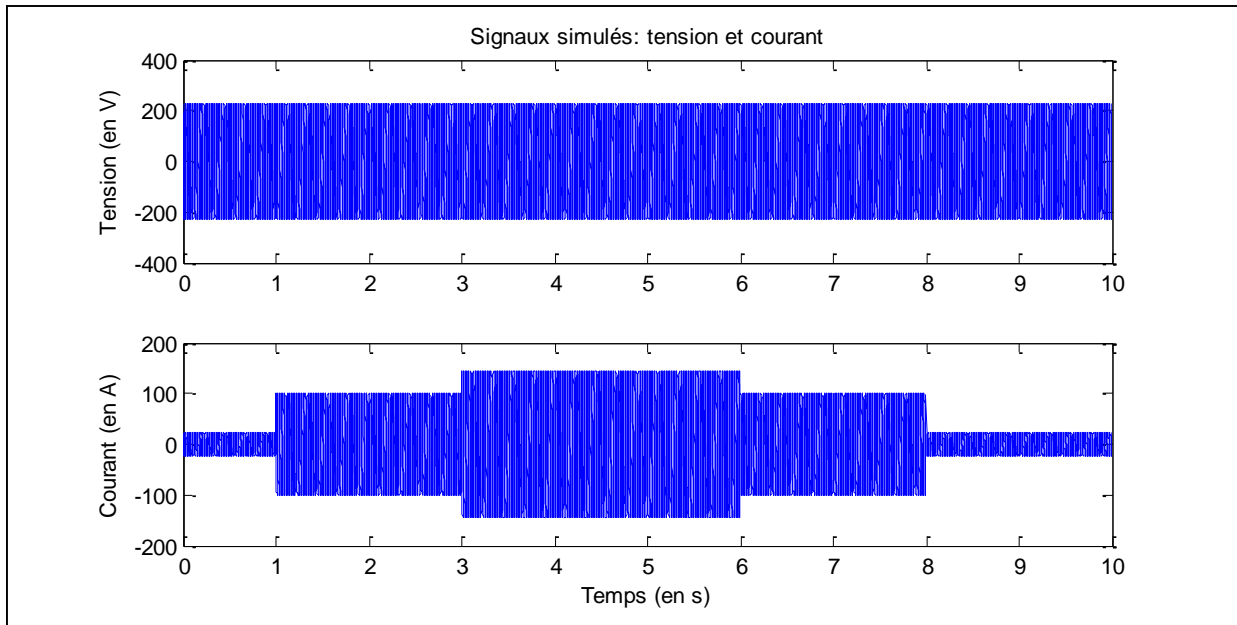


Figure IV.1 : Signaux de tension et de courant simulés

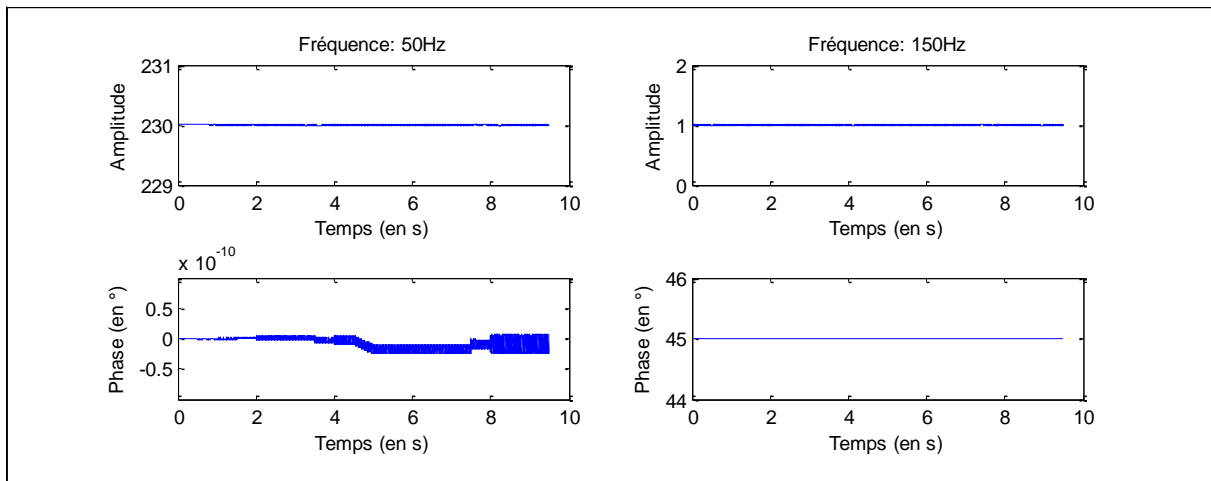


Figure IV.2 : Résultats de l'estimation des paramètres de la tension

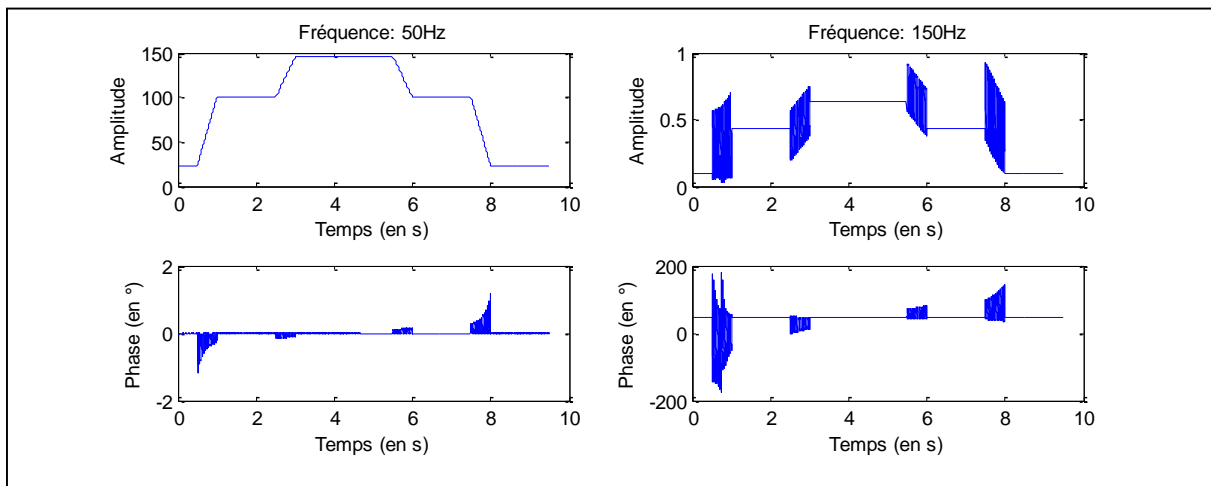


Figure IV.3 : Résultats de l'estimation des paramètres du courant

# IV.1 Modélisation

Dans cette partie, nous exposons le choix de notre modèle et la démarche qui est suivie.

Comme dit dans l'introduction, le modèle choisi doit permettre de localiser et de caractériser au mieux les régimes permanents et transitoires. Car en faisant glisser la fenêtre d'observation, nous pouvons rencontrer un certain nombre de cas dont il faut tenir compte pour le choix du modèle.

## IV.1.1 Modèle

Avant de se lancer dans la définition du nouveau modèle, il nous faut analyser les différents cas que l'on peut rencontrer lors du traitement.

La figure suivante illustre les 5 cas en questions.

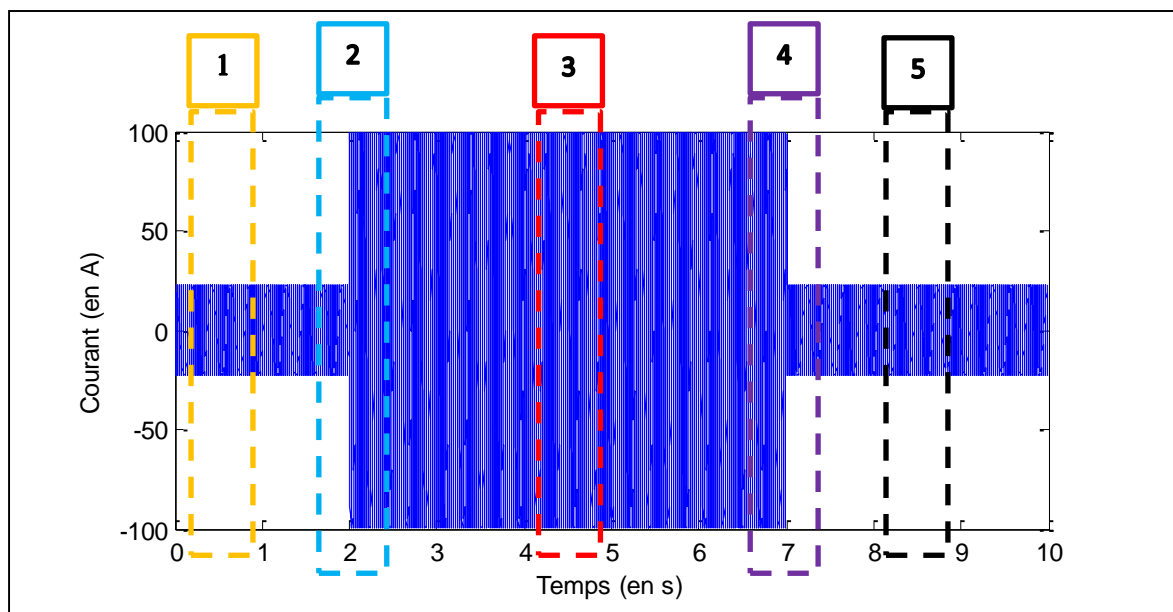


Figure IV.4 : Différents cas possibles

Voyons maintenant comment nous pouvons interpréter ces différents cas (comment se comporte le courant dans la fenêtre d'observation dans les différents cas illustrés ici).

1. Cette portion de signal représente le cas où il n'y a pas de transition dans la fenêtre d'observation. Nous observons le régime permanent d'un système.
2. Ici, le cas où il y a une transition « positive » dans la fenêtre d'observation. Dans cet exemple, la partie avant la transition représente le courant consommé par la première charge, et après la transition, le courant consommé par les deux charges en parallèle.
3. Dans ce cas, il n'y a pas de transition. Nous observons le régime permanent d'un système global. Ce système global est en fait la somme du courant consommé par les deux charges.
4. Dans cette zone nous observons une transition « négative ». Ceci signifie qu'une charge s'est éteinte. Ici nous pouvons voir, avant la transition, le courant consommé par les deux résistances. Et après la transition, il ne reste plus que le courant consommé par une résistance.
5. Cette zone est sans transition : nous observons le régime permanent d'un système.

A l'aide de ces différents cas, nous constatons que le modèle doit tenir compte de l'existence ou non d'une transition dans la fenêtre d'observation. Le modèle s'écrit donc comme la somme de deux états stationnaires, lorsqu'on a une transition. Et il s'écrit comme un état stationnaire lorsqu'il n'y a pas de transition.

La figure IV.5 montre un exemple de fenêtre d'observation contenant une transition. Cet exemple va nous aider à choisir un modèle.

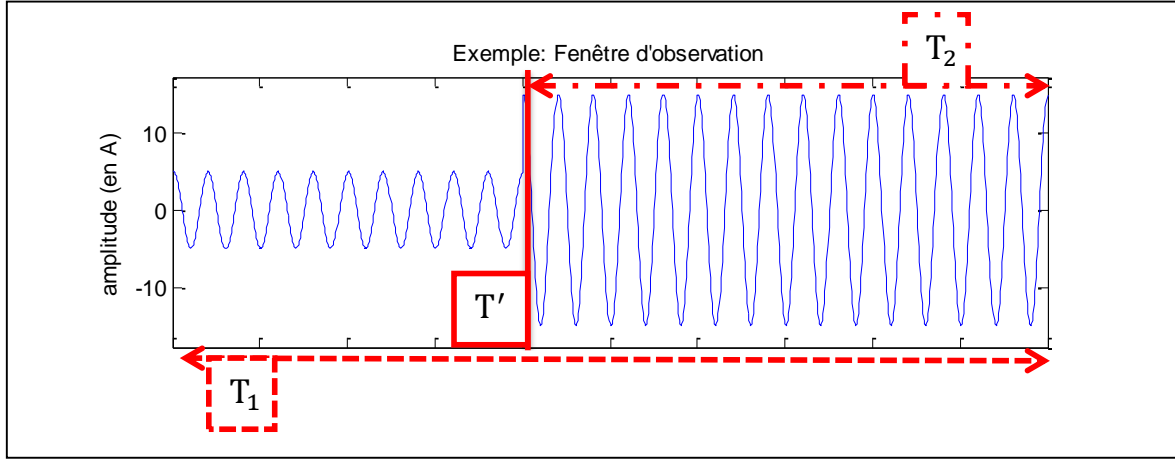


Figure IV.5 : Exemple d'une fenêtre d'observation contenant une transition

Ici,  $T_1$  représente la durée de la fenêtre d'observation,  $T'$  représente l'instant de transition, et  $T_2$  représente la durée de la portion de signal qui débute à l'instant de transition.

Nous avons vu précédemment que le modèle défini par une somme de cosinus était représentatif d'un état stationnaire. Et que le courant contenu dans la fenêtre d'observation, dans le cas d'une transition, est défini par un état stationnaire avant la transition (état .<sup>1</sup>) :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \quad \forall t_k < T'$$

et par la somme de deux états stationnaires après la transition (état .<sup>1</sup> et état .<sup>2</sup>) :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} \{A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) + A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2)\} \quad \forall t_k \geq T'$$

Donc, le modèle temporel du signal contenu dans la fenêtre d'observation est donné par :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k) + \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_2}(t_k - T')$$

où :

$A^1$  = amplitude du signal avant transition

$\varphi^1$  = phase à l'origine du signal avant transition

$A^2$  = amplitude du signal qui s'ajoute au premier

$\varphi^2$  = phase à l'origine du signal qui s'ajoute au premier

$\Pi_{T_2}(t - T')$  = fonction porte de longueur  $T_2$  débutant en  $T'$

## IV.1 Modélisation

où  $A^1 = [A_0^1 \cdots A_{N_{s'}-1}^1]^T$  et  $\varphi^1 = [\varphi_0^1 \cdots \varphi_{N_{s'}-1}^1]^T$  représentent les amplitudes et phases caractérisant le courant avant la transition,  $A^2 = [A_0^2 \cdots A_{N_{s'}-1}^2]^T$  et  $\varphi^2 = [\varphi_0^2 \cdots \varphi_{N_{s'}-1}^2]^T$  représentent les amplitudes et phases caractérisant le courant qui vient s'ajouter au précédent, autrement dit le courant consommé par la charge à l'origine de la transition (l'évènement).

$\Pi_{T_2}(t - T')$  représente la fonction porte de longueur  $T_2$  débutant en  $T'$  ( $T_1 = T' + T_2$ ).

Or nous travaillons avec des signaux échantillonnés, c'est-à-dire que nous associons un nombre d'échantillons à une durée et un numéro d'échantillon à une date.

Nous définissons donc  $N_1$  comme étant le nombre d'échantillons dans la fenêtre d'observation (ou longueur de la fenêtre d'observation),  $N'$  comme le numéro de l'échantillon correspondant à l'instant de transition, et  $N_2 = N_1 - N' + 1$  la longueur de la portion de signal débutant à l'instant de transition, avec :

$$T_1 = N_1 \cdot \Delta t, T' = (N' - 1) \cdot \Delta t, T_2 = N_2 \cdot \Delta t$$

**Remarque :** Compte tenu de la petite valeur de  $\Delta t$ , nous considérons que  $T_2$  est un multiple de  $\Delta t$ , plus précisément  $T_2 = N_2 \cdot \Delta t$ .

Nous avons donc mis en place un modèle temporel qui tient compte de l'existence éventuelle d'une transition dans la fenêtre d'observation. Voyons donc comment il se comporte pour chacun des cas énumérés précédemment :

1. Il n'y a pas de transition. La fenêtre d'observation se trouve avant la transition. L'instant de transition est donc en dehors de cette fenêtre, c'est-à-dire :

$$T_2 = 0$$

Nous sommes donc en présence d'un état stationnaire, soit :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k)$$

2. Nous sommes en présence d'une transition positive, c'est-à-dire un front montant. Dans ce cas, nous avons, avant l'instant de transition  $T'$ , un seul état stationnaire. Et après cet instant, une somme de deux états d'amplitudes et de phases différentes. Soit :

$$0 < T' < T_1 \text{ et } 0 < T_2 = T_1 - T' < T_1$$

Et donc :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k) + \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_2}(t_k - T')$$

Ce modèle nous permettra d'estimer les paramètres associés au système qui a été mis en route au moment de la transition.

3. Nous avons passé le front montant, donc l'instant de transition se trouve avant le début de la fenêtre d'observation. Ce qui signifie que nous sommes en présence de la somme des deux signaux. Donc on pose :

$$T' = 0 \text{ et } T_2 = T_1$$

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k) + \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_1}(t_k)$$

Maintenant, le deuxième état stationnaire est contenu dans toute la fenêtre d'observation. On peut donc se replacer dans le cas d'un régime permanent où l'on considère la somme de ces deux états comme étant un état stationnaire global et on attend de rencontrer une autre transition. On a donc :

$$T' = T_1 \text{ et } T_2 = 0$$

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k)$$

4. La fenêtre d'observation contient une transition négative (front descendant). Avant la transition, on a un système global qui est en réalité une somme de systèmes connus. Et après la transition un de ces systèmes s'éteint. On obtient donc :

$$0 < T' < T_1 \text{ et } 0 < T_2 = T_1 - T' < T_1$$

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k) + \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_2}(t_k - T')$$

Ici, le fait de soustraire un cosinus peut se traduire de différentes manières : soit par l'ajout de cosinus d'amplitude négative, soit par l'ajout de cosinus d'amplitude positive et déphasé de  $180^\circ$  ( $\varphi^2 \rightarrow \varphi^2 + 180^\circ$ ).

5. Nous avons passé l'instant de transition. On effectue la même démarche que pour le cas n°3.

Ceci nous a permis de constater que, théoriquement, ce modèle devrait répondre à nos attentes car il s'adapte parfaitement à tous les cas de figures. En effet, nous avons pu remarquer qu'il pouvait correspondre aussi bien au cas où la fenêtre d'observation contient une transition ( $0 < T_2 < T_1$ ) qu'au cas où elle n'en contient pas ( $T_2 = 0$  ou  $T_2 = T_1$ ).

**Remarque :** le modèle mis en place est parfaitement adapté aux transitions courtes (instantanées).

Nous disposons maintenant d'une modélisation des signaux dans le domaine temporel. Nous pouvons (et souhaitons) également l'exprimer dans le domaine fréquentiel.

Nous pouvons donc l'obtenir en effectuant une transformée de Fourier discrète (TFD) de  $s(t_k)$  (pour le passage au modèle fréquentiel se référer à l'annexe E), soit :

$$S(f_k) = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{A_m^1}{2} e^{j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k - F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_k - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k - F_m)(T_1 - \Delta t)} \\ & + \frac{A_m^1}{2} e^{-j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k + F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_k + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k + F_m)(T_1 - \Delta t)} \\ & + \frac{A_m^2}{2} e^{j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k - F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_k - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k - F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} \\ & + \frac{A_m^2}{2} e^{-j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k + F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_k + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k + F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.1})$$

**Remarque :** par construction, ce modèle (temporel ou fréquentiel) suppose qu'il ne peut y avoir, au maximum, qu'une seule transition dans la fenêtre d'observation. Cela n'est pas gênant puisque cette hypothèse a été avérée sur le terrain (expérimentalement).



## IV.1 Modélisation

Le tout n'est pas de choisir un modèle susceptible de correspondre aux signaux étudiés. A présent, il faut valider ce modèle en utilisant des données parfaitement connues : nous allons donc effectuer des simulations.

### IV.1.2 Validation du modèle

Cette partie a pour but de vérifier, sur des signaux parfaitement connus, la validité du modèle mis en place précédemment.

Pour cela, nous simulons un courant, avec deux fréquences, contenant une transition. Ensuite, nous calculons la TFD de différentes portions de ce signal (à des instants différents), correspondant aux cas avec ou sans transition, puis nous les comparons au modèle fréquentiel mis en place.

Pour le cas de la transition courte, nous simulons un courant, sur une durée de 5 secondes, dans lequel il y a deux transitions traduisant la mise en route et en arrêt d'une charge électrique. La charge en question s'allume à 1 seconde et s'éteint à 4 secondes.

Cette simulation consiste en un courant  $i_k^1$  présent sur toute la durée du signal et un autre courant  $i_k^2$  qui vient s'ajouter au précédent entre 1s et 4s. Donc nous construisons  $i_k^1$  et  $i_k^2$  tel que :

$$i_k^1 = I_0^1 \cos(2\pi F_0 t_k + \varphi_0^1) + I_1^1 \cos(2\pi F_1 t_k + \varphi_1^1)$$

$$i_k^2 = I_0^2 \cos(2\pi F_0 t_k + \varphi_0^2) + I_1^2 \cos(2\pi F_1 t_k + \varphi_1^2)$$

avec,  $t_k = (k - 1) \cdot \Delta t \quad \forall k = 1, \dots, 10000$ ,  $F_0 = 50\text{Hz}$  et  $F_1 = 150\text{Hz}$  puis :

$$I^1 = [35, 4], \quad \varphi^1 = [45^\circ, 60^\circ]$$

$$I^2 = [22, 2], \quad \varphi^2 = [30^\circ, -36^\circ]$$

Donc le courant contenant les transitions est obtenu de la manière suivante :

$$i_k = i_k^1 \quad \forall k \in [1, \dots, 2000] \cup [8001, \dots, 10000]$$

$$i_k = i_k^1 + i_k^2 \quad \forall k \in [2001, \dots, 8000]$$

La figure ci-dessous présente le courant simulé.

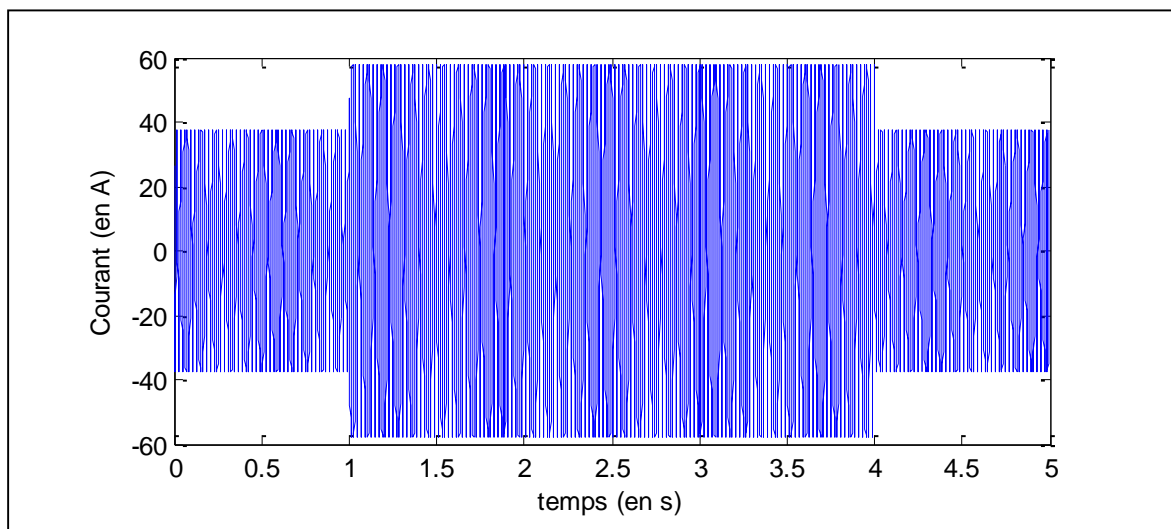


Figure IV.6 : Simulation d'un courant contenant deux transitions courtes

Dans le but de valider le modèle mis en place, nous effectuerons cette comparaison dans les trois cas que nous sommes susceptibles de rencontrer :

- 1 Le cas avant une transition, c'est-à-dire lorsque nous observons le régime permanent d'un système.
- 2 Le cas où il y a une transition dans la fenêtre d'observation. Dans ce cas, la partie avant la transition représente le courant  $i^1$ , et après la transition, la somme des deux courant  $i^1$  et  $i^2$ .
- 3 Le cas après une transition. Nous observons le régime permanent d'un système global. Ce système global est en fait la somme des deux courant  $i^1$  et  $i^2$ .

Nous utiliserons l'erreur quadratique moyenne entre le spectre du signal et le modèle afin de quantifier la validité de ce dernier.

Les figures ci-dessous présentent le résultat du comparatif entre la TFD du courant dans la fenêtre d'observation et le modèle fréquentiel donné par l'équation (IV.1). Pour cela chaque figure qui suit contiendra :

- le courant contenu dans la fenêtre d'observation,
- la TFD du courant (en bleu) et modèle fréquentiel que nous avons mis en place (en rouge),
- et la différence des deux, c'est-à-dire la différence entre la vraie TFD et le modèle.

La figure IV.7 représente les résultats obtenus pour le premier cas.

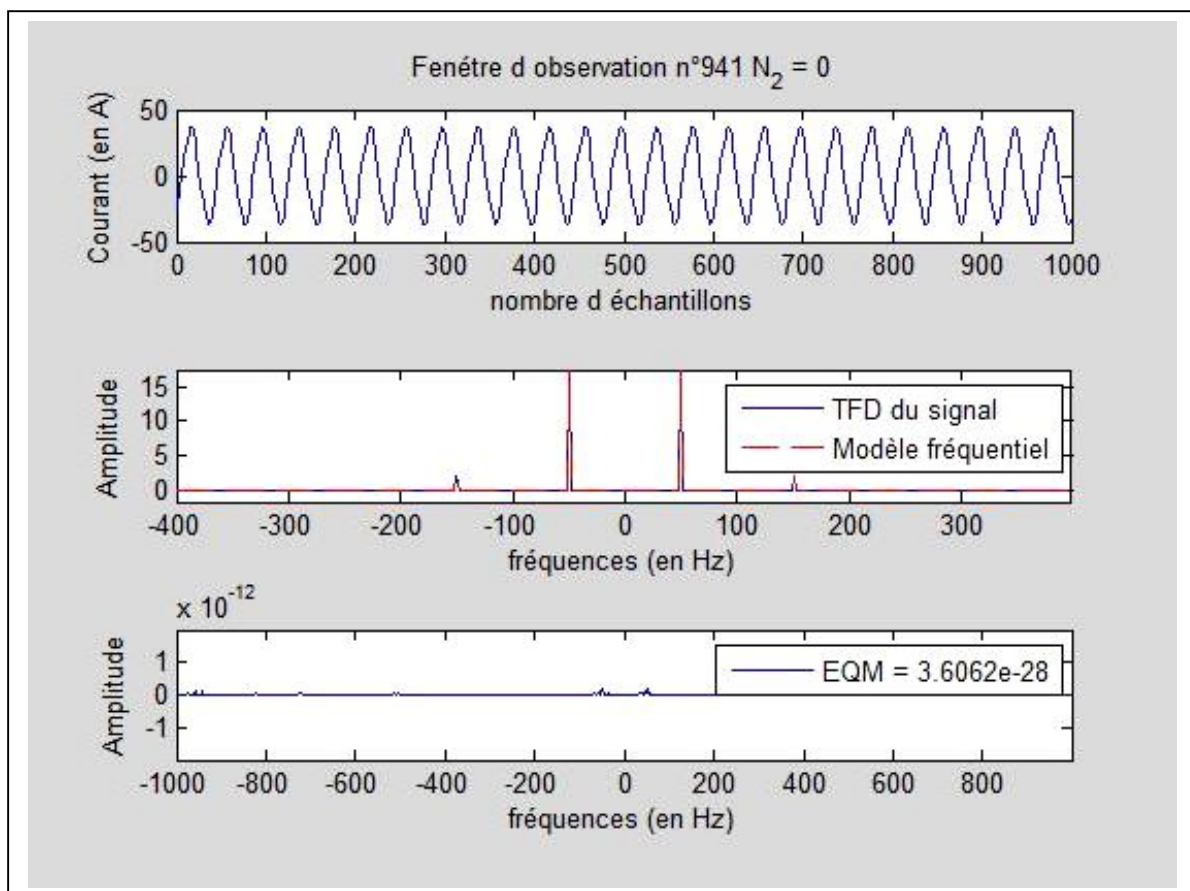


Figure IV.7 : Comparatif entre la TFD du courant dans la fenêtre d'observation et le modèle fréquentiel pour le cas n°1

## IV.1 Modélisation

La figure IV.8 représente les résultats obtenus pour le second cas, c'est-à-dire le comparatif entre la vraie TFD et le modèle en présence d'une transition dans la fenêtre d'observation.

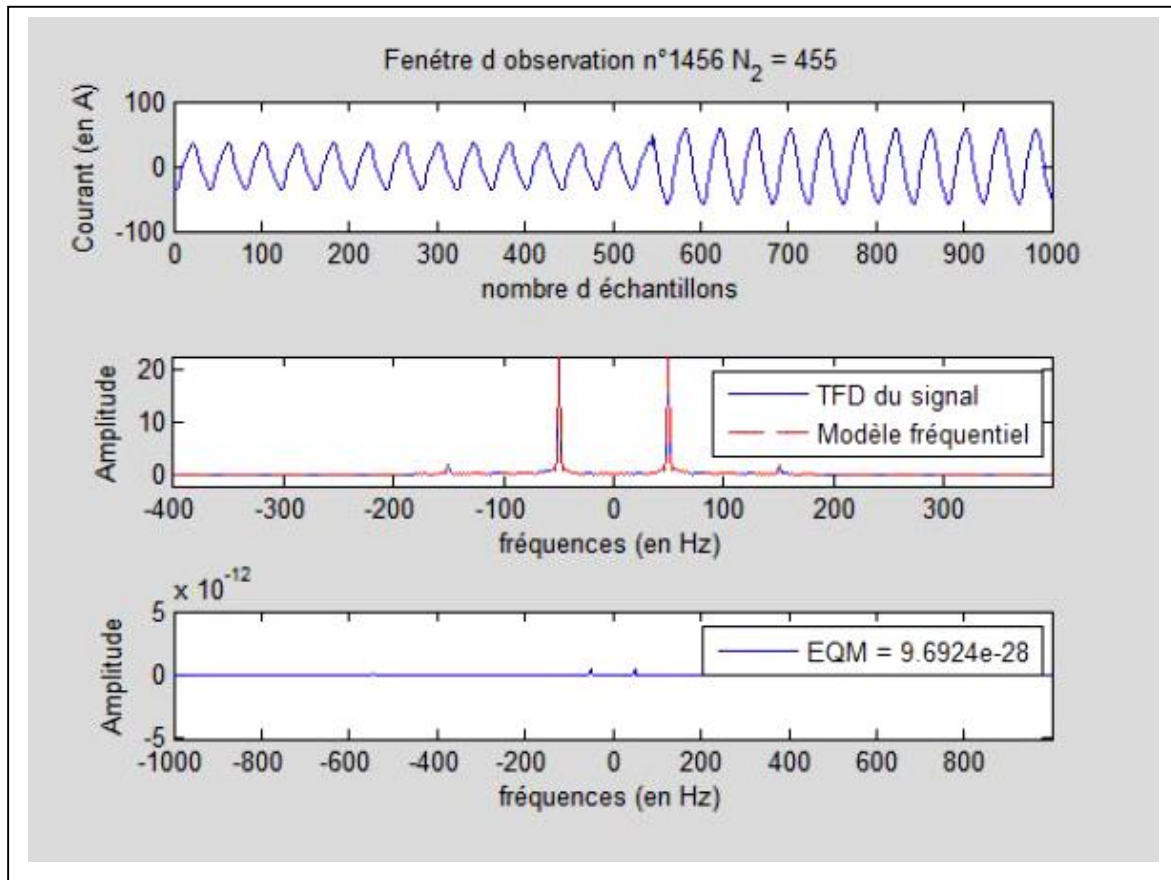


Figure IV.8 : Comparatif entre la TFD du courant dans la fenêtre d'observation et le modèle fréquentiel pour le cas n°2

Et enfin, la figure IV.9 illustre les résultats obtenus pour le comparatif entre la vraie TFD et le modèle après avoir passé la transition.

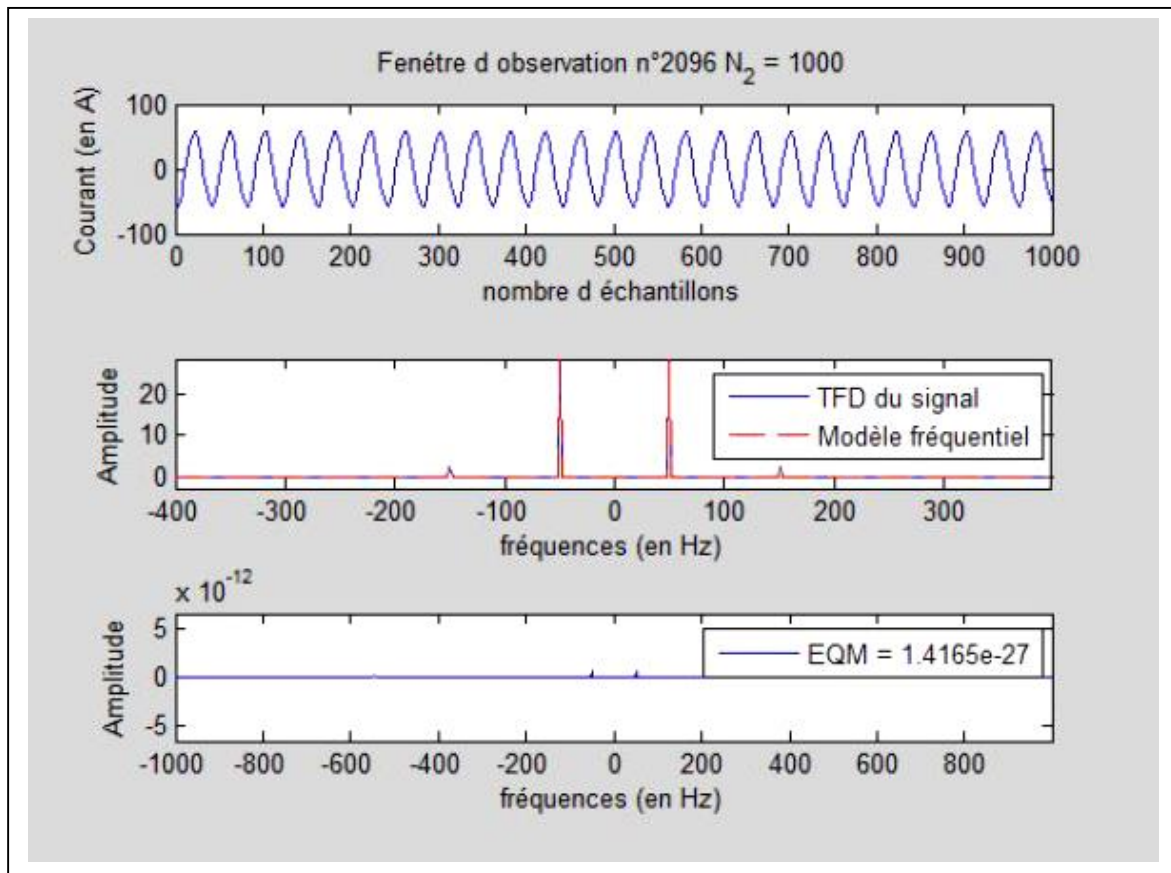


Figure IV.9 : Comparatif entre la TFD du courant dans la fenêtre d'observation et le modèle fréquentiel pour le cas n°3

Grâce aux figures IV.7, IV.8 et IV.9, nous constatons que le module de la TFD du signal contenu dans la fenêtre d'observation et le module du modèle choisi se confondent à  $10^{-27}$  près.

Notons également que dans ces trois cas, c'est-à-dire avec ou sans transition dans la fenêtre d'observation, l'erreur quadratique moyenne entre la vraie TFD et le modèle fréquentiel est de l'ordre de  $10^{-27}$ .

Ceci nous permet donc d'affirmer que notre modèle est valide. Nous avons donc mis en place un modèle adapté aux signaux traités, c'est-à-dire qu'il correspond au signal contenu dans la fenêtre d'observation même si ce dernier contient une transition.

## Synthèse

Dans cette partie, nous avons mis en place un modèle adapté aux signaux étudiés et qui tient compte de la présence ou non d'une transition dans la fenêtre d'observation.

Ce modèle a été exprimé dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel.

Nous rappelons les deux modèles.

Modélisation temporelle :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k) + \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_2}(t_k - T')$$

Modélisation fréquentielle :

$$S(f_k) = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} \left\{ \frac{A_m^1}{2} e^{j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k - F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_k - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k - F_m)(T_1 - \Delta t)} \right. \\ \left. + \frac{A_m^1}{2} e^{-j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k + F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_k + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k + F_m)(T_1 - \Delta t)} \right. \\ \left. + \frac{A_m^2}{2} e^{j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k - F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_k - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k - F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} \right. \\ \left. + \frac{A_m^2}{2} e^{-j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k + F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_k + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k + F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} \right\}$$

Afin de valider ce modèle nous l'avons comparé à la TFD du signal, avec et sans transition. Il en ressort que ce modèle est parfaitement valable dans le cas d'une transition courte avec une erreur quadratique moyenne de l'ordre de  $10^{-28}$ .

Notons enfin que l'utilisation de ce modèle suppose qu'il ne peut y avoir, au plus, qu'une seule transition dans la fenêtre d'analyse.

Ce modèle devrait nous permettre d'estimer distinctement les paramètres d'amplitudes et de phases associés à l'état <sup>1</sup> et ceux correspondant à l'état <sup>2</sup>. De plus le modèle s'exprime en fonction de  $T_2$ , ce qui nous permettra également d'estimer l'instant de transition. Cela nous permettra donc de caractériser l'état stationnaire précédent la transition ainsi que l'état stationnaire qui s'est ajouté au précédent, suite par exemple à la mise en route d'une charge électrique.

Finalement, ce deuxième état caractérise la charge électrique qui est la cause de l'évènement survenu à l'instant  $T'$ .

## IV.2 Estimation

Le modèle ayant changé, nous devons maintenant développer une méthode d'estimation adaptée à ce modèle sans oublier les objectifs à atteindre.

### IV.2.1 Moindres carrés

Cette partie a pour but de développer une méthode permettant d'estimer les paramètres du modèle défini précédemment dans le cas où il y a une transition dans la fenêtre d'observation.

Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle dépend maintenant :

- des paramètres amplitudes et phases  $\{A^1, \varphi^1\}$  caractérisant l'état stationnaire qui précède la transition (état .<sup>1</sup>),
- des amplitudes et phases  $\{A^2, \varphi^2\}$  qui caractérisent le signal correspondant au courant consommé par la charge qui a provoqué la transition (état .<sup>2</sup>),
- de la longueur  $N_2$  de la portion de signal correspondant à l'état .<sup>2</sup>.

### Modèle fréquentiel

Ici, nous appliquons la méthode des moindres carrés au modèle proposé dans le domaine fréquentiel.

Le courant étant composé de zones stables et de zones transitoires, le modèle dépendra de la zone étudiée et donc l'estimation ne sera pas effectuée de la même manière.

Nous développons la méthode d'estimation au sens des moindres carrés pour le cas où il y a une transition dans la fenêtre d'observation, et nous verrons que pour les zones stables la méthode d'estimation est un cas particulier de cette dernière.

Reprenons l'expression de la modélisation, définie précédemment, du signal contenu dans la fenêtre d'observation dans le cas où il y a une transition :

$$S(f_k) = S_k = \sum_{m=0}^{N_s'-1} \left\{ \frac{A_m^1}{2} e^{j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k - F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_k - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k - F_m)(T_1 - \Delta t)} \right. \\ \left. + \frac{A_m^1}{2} e^{-j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k + F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_k + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k + F_m)(T_1 - \Delta t)} \right. \\ \left. + \frac{A_m^2}{2} e^{j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k - F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_k - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k - F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} \right. \\ \left. + \frac{A_m^2}{2} e^{-j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_k + F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_k + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_k + F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} \right\}$$

où  $f_k = -\frac{F_e}{2} + (k - 1)\Delta f$ ,  $\forall k = 1, \dots, N_1$  et  $\Delta f = \frac{F_e}{N_1} = \frac{1}{N_1 \Delta t}$ .

## IV.2 Estimation

Afin de simplifier les écritures, on pose :

$$\mathcal{F}(N, f) = \frac{\sin(N \cdot \pi f \Delta t)}{\sin(\pi f \Delta t)} \cdot e^{-j\pi f(2N_1-1-N)\Delta t}$$

et le modèle devient :

$$S(f_k) = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} \left\{ \frac{A_m^1}{2} e^{j\varphi_m^1} \cdot \mathcal{F}(N_1, f_k - F_m) + \frac{A_m^1}{2} e^{-j\varphi_m^1} \mathcal{F}(N_1, f_k + F_m) \right. \\ \left. + \frac{A_m^2}{2} e^{j\varphi_m^2} \cdot \mathcal{F}(N_2, f_k - F_m) + \frac{A_m^2}{2} e^{-j\varphi_m^2} \cdot \mathcal{F}(N_2, f_k + F_m) \right\}$$

Ainsi sous forme matricielle, le modèle est donné par :

$$S = W(N_1, N_2) \cdot \theta$$

où :

$$W(N_1, N_2) = [M(N_1) \ M(N_2)] \text{ et } \theta = \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$M(N) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{F}(N, f_1 - F_0) & \dots & \mathcal{F}(N, f_{N_1} - F_0) \\ \mathcal{F}(N, f_1 + F_0) & \dots & \mathcal{F}(N, f_{N_1} + F_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{F}(N, f_1 - F_{N_{s'}-1}) & \dots & \mathcal{F}(N, f_{N_1} - F_{N_{s'}-1}) \\ \mathcal{F}(N, f_1 + F_{N_{s'}-1}) & \dots & \mathcal{F}(N, f_{N_1} + F_{N_{s'}-1}) \end{bmatrix}^H$$

$$\theta^1 = \left[ A_0^1 e^{j\varphi_0^1} \quad A_0^1 e^{-j\varphi_0^1} \quad \dots \quad A_{N_{s'}-1}^1 e^{j\varphi_{N_{s'}-1}^1} \quad A_{N_{s'}-1}^1 e^{-j\varphi_{N_{s'}-1}^1} \right]^H$$

$$\theta^2 = \left[ A_0^2 e^{j\varphi_0^2} \quad A_0^2 e^{-j\varphi_0^2} \quad \dots \quad A_{N_{s'}-1}^2 e^{j\varphi_{N_{s'}-1}^2} \quad A_{N_{s'}-1}^2 e^{-j\varphi_{N_{s'}-1}^2} \right]^H$$

$\cdot^H$  est l'opérateur de conjugué transposé et  $\dim(\theta^1) = \dim(\theta^2) = d \times 1$ ,  $\dim(M) = N_1 \times d$ .

Dans le but d'estimer les paramètres de ce modèle, nous procéderons à la minimisation du critère des moindres carrés défini par :

$$C(N_2, A^1, \varphi^1, A^2, \varphi^2) = \|X - S\|^2 = \|X - W(N_1, N_2) \cdot \theta\|^2,$$

où  $X$  représente la TFD du signal mesuré  $x$ .

Comme nous pouvons le constater, le modèle dépend non seulement des paramètres d'amplitudes et de phases mais également du paramètre  $N_2$ .

Ce modèle n'est pas linéaire en fonction des paramètres inconnus  $\begin{bmatrix} \theta \\ N_2 \end{bmatrix}$ . En revanche, il est linéaire en  $\theta$  si  $N_2$  est fixé. Donc afin d'estimer tous les paramètres d'intérêt, nous procédons à la minimisation du critère en deux étapes.

Ce qui rend possible cette minimisation en deux étapes est l'information *a priori* que nous avons sur la valeur de  $N_2$ . En effet, nous savons que  $N_2$  prend ses valeurs entre 0 et la longueur de la fenêtre d'analyse, soit :  $0 \leq N_2 \leq N_1$ .

La première étape consiste donc à estimer  $\theta$  en considérant  $N_2$  fixé, et ce pour chacune des valeurs que peut prendre  $N_2$ .

Le critère devient :

$$C_{N_2}(\theta) = \|X - W(N_1, N_2) \cdot \theta\|^2$$

Avec ce critère, on se ramène à un problème linéaire en  $\theta$ .

Nous obtenons donc l'estimation de  $\theta$  pour chaque valeur de  $N_2$  :

$$\hat{\theta}(N_2) = \left( W(N_1, N_2)^H W(N_1, N_2) \right)^{-1} W(N_1, N_2)^H X$$

Pour la seconde étape, il suffit de chercher l'estimé  $\hat{\theta}$  correspondant à la valeur de  $N_2$ , notée  $\hat{N}_2$ , qui minimise le critère suivant :

$$C(N_2) = \|X - W(N_1, N_2) \cdot \hat{\theta}(N_2)\|^2$$

A la suite de ces deux étapes, nous obtenons les estimés  $\hat{N}_2$  et  $\hat{\theta}$  de manière optimale au sens des moindres carrés. Pour finir, le calcul du module et de l'argument de  $\hat{\theta}$  nous fournit les amplitudes et les phases estimées  $\{\hat{A}^1, \hat{\varphi}^1\}$  et  $\{\hat{A}^2, \hat{\varphi}^2\}$ .

**Remarque :** nous avons étudié le cas où  $T_2$  n'est pas un multiple de  $\Delta t$ . Dans ce cas, les méthodes à gradient peuvent être mises en œuvre. Cependant elles se sont avérées inopérantes. Dans l'annexe F nous avons tracé l'évolution du critère en fonction de  $N_2$ . Nous constatons alors la présence de minima locaux.

**Remarque :** cette méthode est optimale si la transition correspond au modèle choisi, c'est-à-dire dans le cas d'une transition courte.

La méthode présentée ici permet d'estimer tous les paramètres du modèle lorsqu'il y a une transition dans la fenêtre d'observation. Or, en pratique nous effectuons un traitement dans le temps (par fenêtre glissante) du courant qui contient des zones transitoires mais aussi des zones stationnaires.

Dans le cas de ces zones stationnaires, l'estimation des paramètres devient beaucoup plus simple (on retrouve la méthode du chapitre III.1.3). En effet, comme il n'y a pas de transition, seul l'état que nous avons appelé état <sup>1</sup> est présent dans la fenêtre d'observation et de ce fait :  $N_2 = 0$ ,  $W(N_1, N_2)$  est remplacé par  $M(N_1)$  et  $\theta$  devient  $\theta^1$ .

Soit le modèle dans le cas stationnaire :

$$S = M(N_1) \cdot \theta^1$$

et les paramètres estimés sont obtenus en calculant le module et l'argument de  $\hat{\theta}^1$  qui est donné par :

$$\hat{\theta}^1 = \left( M(N_1)^H M(N_1) \right)^{-1} M(N_1)^H X.$$

Il faudra donc jongler entre l'estimation dans le cas stationnaire et l'estimation dans le cas transitoire.



## IV.2 Estimation

Notons toutefois que, dans le cas transitoire, la méthode proposée est optimale uniquement pour une transition courte, c'est-à-dire lorsque la transition correspond au modèle choisi. Dans le cas contraire, le modèle choisi ne correspond plus au signal, et rien ne certifie que l'estimation des paramètres  $\{N_2, A^1, \varphi^1, A^2, \varphi^2\}$  soit représentative des deux états stationnaires.

Cependant, effectuer un traitement dans le temps implique que nous ayons déjà estimé les paramètres  $\{A^1, \varphi^1\}$  caractérisant l'état précédant la transition avant de rencontrer le cas transitoire. Donc lorsque la transition apparaît, nous avons une information *a priori* sur la valeur du couple  $\{A^1, \varphi^1\}$  (sa valeur estimée).

Sachant cela, nous proposons une alternative qui permettra de tenir compte des paramètres caractérisant l'état <sup>.1</sup>.

Pour commencer, réécrivons le modèle :

$$S = S^1 + S^2 = M(N_1) \cdot \theta^1 + M(N_2) \cdot \theta^2$$

Cette solution consiste à utiliser l'estimé  $\{\hat{A}^1, \hat{\varphi}^1\}$  afin de reconstruire le signal  $\hat{S}^1$  et le soustraire au signal. De ce fait, le modèle devient :

$$S - \hat{S}^1 = M(N_2) \cdot \theta^2 + (S^1 - \hat{S}^1)$$

Donc dans le cas sans transition,  $S^2$  n'existe pas et cette erreur correspond à l'erreur d'estimation. Et dans le cas transitoire, cela signifie que l'information contenue dans le résidu est due au signal  $S^2$ .

Maintenant, le signal n'est plus seulement perturbé par le bruit de mesure mais également par l'erreur d'estimation  $(S^1 - \hat{S}^1)$ .

Néanmoins ceci permet à nos estimations de garder un sens physique car de cette manière  $\{\hat{A}^1, \hat{\varphi}^1\}$  et  $\{\hat{A}^2, \hat{\varphi}^2\}$  représentent, respectivement, l'état précédent la transition (l'état <sup>.1</sup>) et l'état qui s'est ajouté (l'état <sup>.2</sup>).

Donc sans transition, les paramètres estimés sont donnés par :

$$\hat{\theta}^1 = \left( M(N_1)^H M(N_1) \right)^{-1} M(N_1)^H X$$

Et dans le cas transitoire, les estimés sont obtenus en utilisant les deux étapes décrites précédemment avec maintenant :

$$\hat{\theta}^2 = \left( M(\hat{N}_2)^H M(\hat{N}_2) \right)^{-1} M(\hat{N}_2)^H (X - \hat{S}^1)$$

Grâce à cette alternative, seule l'estimation des paramètres  $\{A^2, \varphi^2\}$  est affectée par la forme de la transition. Cela n'est pas dérangeant dans le sens où à chaque fois que cette transition apparaîtra, c'est-à-dire chaque fois que l'appareil qui en est la source s'allume, les paramètres estimés  $\{\hat{A}^2, \hat{\varphi}^2\}$  évolueront de la même manière. Donc les paramètres  $\{\hat{A}^2, \hat{\varphi}^2\}$  peuvent encore être considérés comme étant caractéristiques de la charge.

De plus cette approche présente certains avantages, en particulier au niveau du temps de calcul. En effet, les estimations sont maintenant obtenues en utilisant la matrice  $M$  au lieu de la matrice  $W$ , qui a un nombre de colonnes deux fois plus grand, ce qui permet de réduire la complexité des calculs.

Enfin, le fait d'avoir des informations *a priori* sur les fréquences d'intérêt nous donne la possibilité de réduire, de manière significative, le temps de calcul. Pour cela il suffit de travailler sur des plages de fréquences autour de ces fréquences d'intérêt. Au lieu de travailler sur toutes les fréquences  $f_k = -\frac{F_e}{2} + (k-1)\Delta f$  pour  $k$  variant de 1 à  $N_1$ , c'est-à-dire avec une matrice  $M$  qui compte  $N_1$  lignes, on peut travailler sur un nombre limité de fréquences, soit avec une matrice  $M$  de dimension beaucoup plus petite.

**Remarque :** pour pouvoir estimer correctement  $\hat{\theta}^2$ , le nombre d'équations doit être au moins égal au nombre de paramètres inconnus, ce qui signifie que  $N_2 \geq d$

**Remarque** il faut noter que dans le cas du modèle temporel, c'est-à-dire pour :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k) + \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_2}(t_k - T')$$

l'algorithme est strictement le même. En effet, il suffit simplement de remplacer  $X$  par  $x$  et poser :

$$M(N_1) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi F_0 t_1) & -\sin(2\pi F_0 t_1) & \dots & \cos(2\pi F_{N_{s'}-1} t_1) & -\sin(2\pi F_{N_{s'}-1} t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi F_0 t_{N_1}) & -\sin(2\pi F_0 t_{N_1}) & \dots & \cos(2\pi F_{N_{s'}-1} t_{N_1}) & -\sin(2\pi F_{N_{s'}-1} t_{N_1}) \end{bmatrix}$$

$$M(N_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cos(2\pi F_0 T') & -\sin(2\pi F_0 T') & \dots & \cos(2\pi F_{N_{s'}-1} T') & -\sin(2\pi F_{N_{s'}-1} T') \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi F_0 t_{N_1}) & -\sin(2\pi F_0 t_{N_1}) & \dots & \cos(2\pi F_{N_{s'}-1} t_{N_1}) & -\sin(2\pi F_{N_{s'}-1} t_{N_1}) \end{bmatrix}$$

$$\theta^1 = \begin{bmatrix} A_0^1 \cos(\varphi_0^1) \\ A_0^1 \sin(\varphi_0^1) \\ \vdots \\ A_{N_{s'}-1}^1 \cos(\varphi_{N_{s'}-1}^1) \\ A_{N_{s'}-1}^1 \sin(\varphi_{N_{s'}-1}^1) \end{bmatrix} \text{ et } \theta^2 = \begin{bmatrix} A_0^2 \cos(\varphi_0^2) \\ A_0^2 \sin(\varphi_0^2) \\ \vdots \\ A_{N_{s'}-1}^2 \cos(\varphi_{N_{s'}-1}^2) \\ A_{N_{s'}-1}^2 \sin(\varphi_{N_{s'}-1}^2) \end{bmatrix}$$

Cependant, nous avons choisi de présenter cette méthode dans le cas du modèle fréquentiel car ce dernier nous permet de diminuer le temps de calcul, en travaillant sur un nombre limité de fréquences tout en gardant la même finesse d'analyse contrairement au cas temporel où il nous est impossible de diminuer la dimension des matrices utilisées.

## IV.2 Estimation

Nous avons mis en place un modèle adapté aux signaux traités, c'est-à-dire qui tient compte de la présence ou non d'une transition dans la fenêtre d'observation ainsi qu'une méthode permettant d'estimer les paramètres de ce modèle. Cependant, gardons à l'esprit que les paramètres que nous considérons d'intérêt sont les admittances définies comme le rapport du courant sur la tension.

A ce stade il nous suffit donc d'effectuer l'estimation, séparément, des paramètres  $\theta_u$  et  $\theta_i$  associés, respectivement, à la tension  $y$  et au courant  $x$ , tels que :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_u = \left( M(N_1)^H M(N_1) \right)^{-1} M(N_1)^H Y \\ \hat{\theta}_i = \left( M(N_1)^H M(N_1) \right)^{-1} M(N_1)^H X \end{cases} \text{ où } \begin{cases} Y = \text{TFD}[y] = M \cdot \theta_u + \varepsilon_u \\ X = \text{TFD}[x] = M \cdot \theta_i + \varepsilon_i \end{cases}$$

puis de calculer le rapport terme à terme des estimés  $\hat{\theta}_u$  et  $\hat{\theta}_i$  afin d'en déduire les admittances estimées.

Ainsi, pour une fréquence donnée, le module de l'admittance correspond au rapport de l'amplitude estimée du courant sur celle de la tension et l'argument (la phase) correspond à la différence entre l'estimation de la phase sur le courant et sur la tension.

Cependant une question vient à l'esprit quant au fait d'obtenir une estimation de l'admittance par le rapport de deux grandeurs estimées : cette façon d'estimer l'admittance est-elle optimale ? Autrement dit : ne vaudrait-il pas mieux estimer directement l'admittance au sens des moindres carrés ?

## Estimation du rapport ou rapport des estimés ?

Dans cette partie, nous développons une méthode permettant d'obtenir une estimation des admittances, de manière directe et optimale au sens des moindres carrés. Ceci nous permettra de savoir si l'estimation des admittances à partir des estimations indépendantes sur le courant et la tension est optimale.

Commençons par écrire le modèle de la tension  $u$  et du courant  $i$ , en régime permanent :

$$\text{DFT}[u] = \mathcal{U} = M. \theta_u$$

$$\text{DFT}[i] = \mathcal{J} = M. \theta_i$$

où  $M = M(N_1)$ .

En reprenant la définition de l'admittance donnée par l'équation (II.6), nous en déduisons que les paramètres  $\theta_i$  et  $\theta_u$  sont liés par la matrice diagonale  $H$  contenant les admittances telles que :

$$\theta_i = H. \theta_u$$

où :

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_d \end{bmatrix}$$

$$\theta_i = [\theta_{i,1} \quad \dots \quad \theta_{i,d}]^T, \theta_u = [\theta_{u,1} \quad \dots \quad \theta_{u,d}]^T$$

avec :

$$h_{2p-1} = \frac{\theta_{i,2p-1}}{\theta_{u,2p-1}} \text{ et } h_{2p} = h_{2p-1}^* \text{ pour } p = 1, 2, \dots, \frac{d}{2}$$

et  $\dim(H) = (d \times d)$ .

Cette relation peut également s'écrire :

$$\theta_i = \Theta_u. h$$

où :

$$h = [h_1 \quad \dots \quad h_d]^T$$

$$\Theta_u = \begin{bmatrix} \theta_{u,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_{u,d} \end{bmatrix}$$

avec  $\dim(\Theta_u) = d \times d$  et  $\dim(h) = d \times 1$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire le système d'équations modélisant les observations de la manière suivante :

$$\begin{cases} X = M. H. \theta_u + \varepsilon_i \\ Y = M. \theta_u + \varepsilon_u \end{cases}$$

Ce système d'équations peut se mettre sous la forme suivante :

$$Z = D(H). \theta_u + \varepsilon$$

## IV.2 Estimation

avec :

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, D(H) = \begin{bmatrix} M \cdot H \\ M \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \varepsilon_u \end{bmatrix}.$$

Les paramètres à estimer sont donc  $\theta_u$  et H (ou h). Pour cela, nous minimisons le critère suivant :

$$C(\theta_u, H) = \|Z - D(H) \cdot \theta_u\|^2 = C(\theta_u, h)$$

où, puisque  $H\theta_u = \Theta_u h$  :

$$\begin{aligned} C(\theta_u, H) &= Z^T Z - 2[X^T M H \theta_u + Y^T M \theta_u] + \theta_u^T H^T M^T M H \theta_u + \theta_u^T M^T M \theta_u \\ C(\theta_u, h) &= Z^T Z - 2[X^T M \Theta_u h + Y^T M \theta_u] + h^T \Theta_u^T M^T M \Theta_u \cdot h + \theta_u^T M^T M \theta_u. \end{aligned}$$

Le calcul du gradient de  $C(\theta_u, H)$  par rapport à  $\theta_u$  et h est donné par :

$$\begin{cases} \nabla_{\theta_u} C(\theta_u, H) = -2[H^T M^T X + M^T Y] + 2[H^T M^T M H + M^T M] \theta_u \\ \nabla_h C(\theta_u, h) = -2\theta_u^T M^T X + 2\theta_u^T M^T M \Theta_u h. \end{cases}$$

De plus on sait que :

$$\begin{cases} \nabla_{\theta_u} C(\theta_u, H) = 0 \\ \nabla_h C(\theta_u, h) = 0 \end{cases} \text{ pour } \theta_u = \hat{\theta}_u \text{ et } h = \hat{h} \text{ (ou } H = \hat{H}\text{)}.$$

Finalement, l'estimation des paramètres au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_u = (M^T M)^{-1} M^T Y \\ \hat{h} = \hat{\Theta}_u^{-1} (M^T M)^{-1} M^T X. \end{cases}$$

Notons qu'en utilisant la méthode développée précédemment, nous avons vu que l'estimation séparée des paramètres associés à la tension et au courant sont :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_u = (M^T M)^{-1} M^T Y \\ \hat{\theta}_i = (M^T M)^{-1} M^T X. \end{cases}$$

et que les admittances estimées sont obtenues en effectuant le rapport terme à terme des estimés  $\hat{\theta}_u$  et  $\hat{\theta}_i$ , soit :

$$\hat{h} = \hat{\Theta}_u^{-1} \hat{\theta}_i$$

Cette expression est parfaitement identique à l'expression de l'estimation directe de  $\hat{h}$ , qui est optimale au sens des moindres carrés. Le fait que ces deux approches fournissent les mêmes résultats prouve donc que l'estimation précédente est également optimale au sens des moindres carrés.

## IV.2.2 Application numérique

### Cas n°1 : Transition courte

Pour cet exemple, nous reprenons la simulation définie dans la partie IV.1.2. Le signal traité est composé de deux évènements correspondant à des transitions courtes.

Cette application nous permet, d'une part de valider la méthode d'estimation proposée. Elle nous permet également d'illustrer que le fait de tenir compte de l'existence d'une transition dans la fenêtre d'observation nous procure un avantage certain en terme de caractérisation des évènements.

Les figures IV.10 et IV.11 contiennent les résultats de l'estimation, respectivement, pour la fréquence 50Hz et 150Hz en utilisant le modèle (III.2). Nous les comparerons aux résultats, donnés dans les figures IV.12 et IV.13, obtenus en utilisant la méthode d'estimation développée dans le cadre de la nouvelle modélisation.

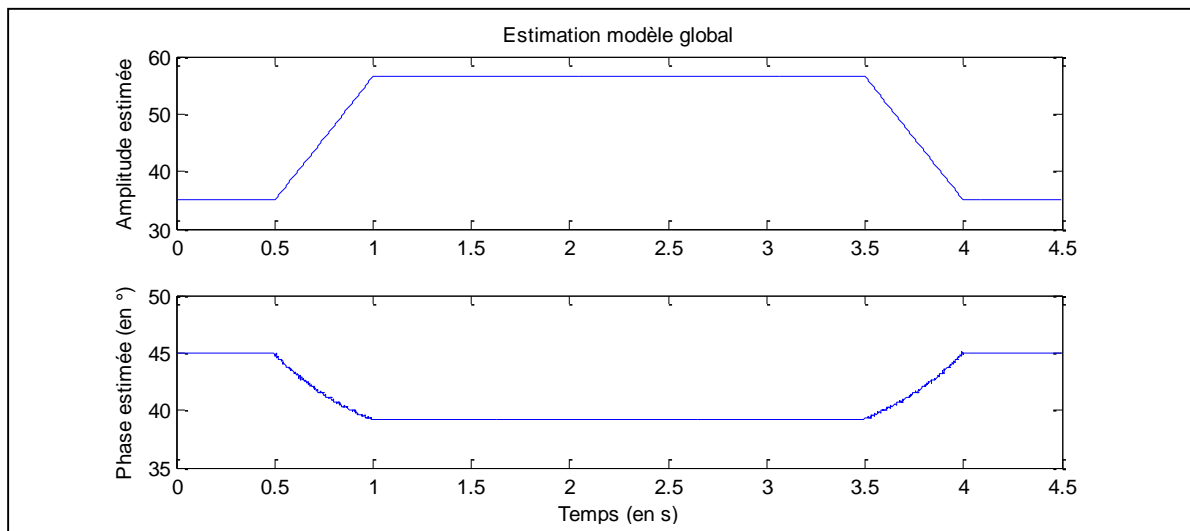


Figure IV.10 : Estimation modèle global fréquence  $F_0 = 50\text{Hz}$

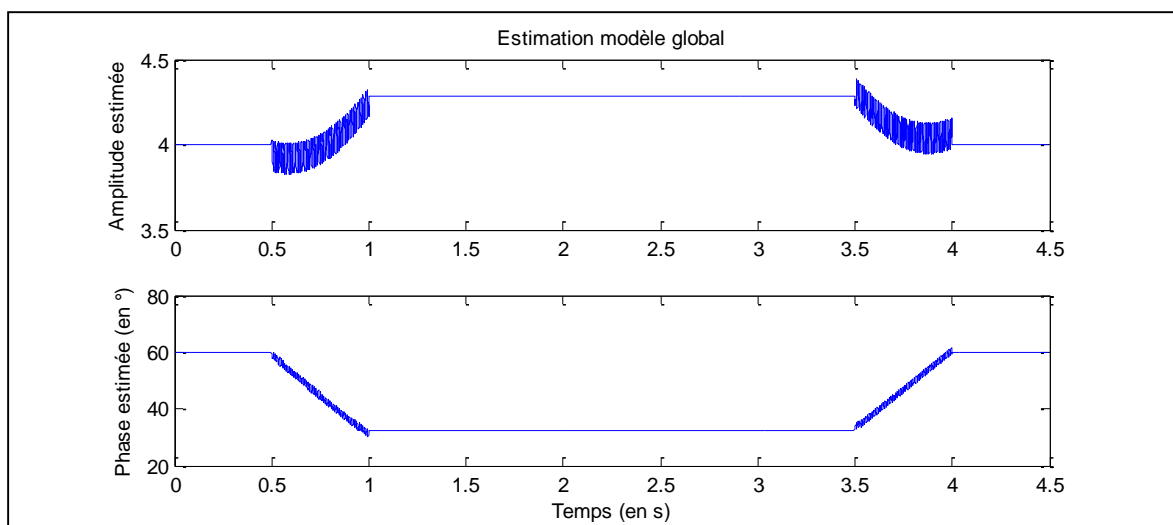
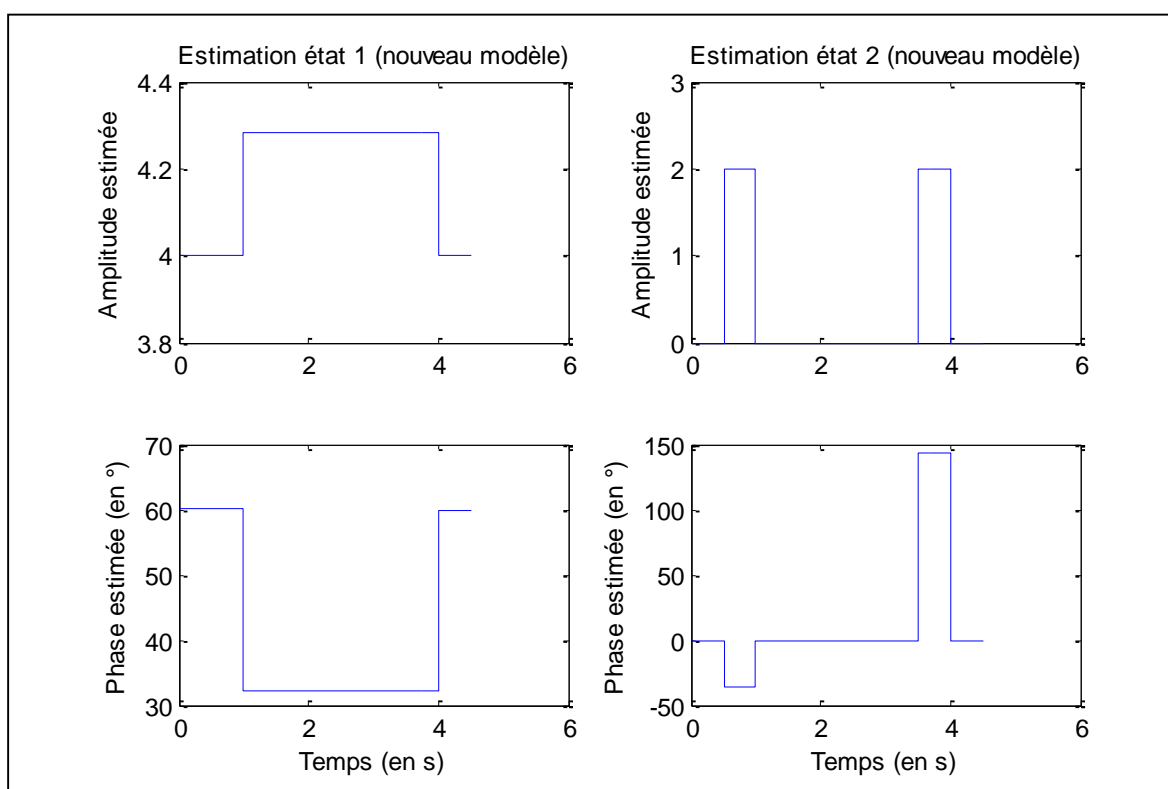
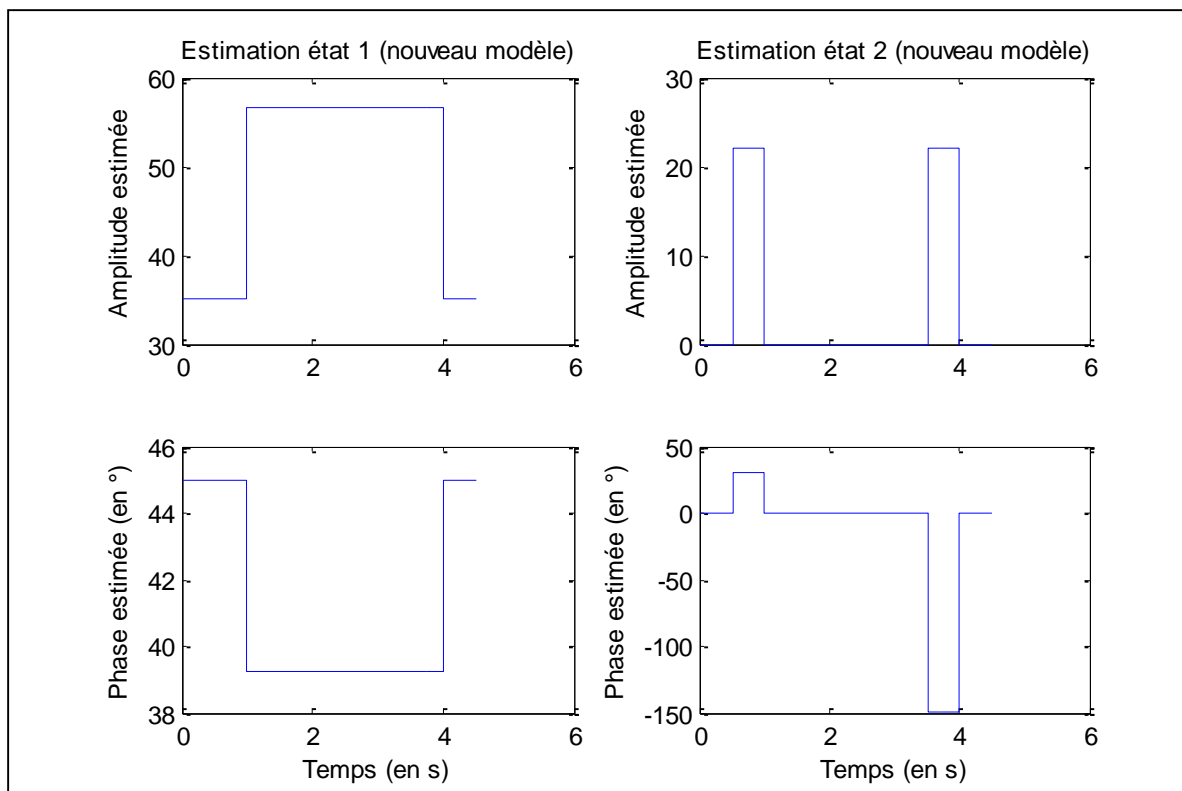


Figure IV.11 : Estimation modèle global fréquence  $F_1 = 150\text{Hz}$

## IV.2 Estimation



**Remarque :** *pour cette simulation, la partie détection n'ayant pas encore été abordée, nous avons programmé en dur les instants de transition, c'est-à-dire les zones où l'estimation doit se faire dans le cas stationnaire et dans le cas transitoire.*

Les résultats obtenus nous permettent de constater que la méthode d'estimation est parfaitement adaptée aux cas avec et sans transition.

Le tableau IV.1 regroupe les résultats obtenus en appliquant la méthode d'estimation proposée.

Table IV.1 : Résultats de l'estimation des paramètres caractérisant l'état <sup>2</sup> dans le cas d'une transition courte

		Paramètres estimés	
		Transition 1	Transition 2
$F_0 = 50\text{Hz}$	Module	22	22
	Phase (en °)	30	-150 = 30 - 180
$F_1 = 150\text{Hz}$	Module	2	2
	Phase (en °)	-36	144 = 180 - 36

Souvenons-nous que les paramètres utilisés pour simuler le courant à l'état <sup>2</sup> sont :

$$I^2 = [22, 2], \quad \varphi^2 = [30^\circ, -36^\circ].$$

Nous pouvons donc constater que pour la première transition, les amplitudes et les phases sont parfaitement estimées (identiques aux vrais paramètres). Et en ce qui concerne la deuxième transition, nous remarquons que les amplitudes estimées correspondent bien aux valeurs simulées mais que les phases sont différentes.

Ceci est tout à fait normal compte tenu du modèle choisi. La transition numéro 1 étant une transition positive, cela ne pose aucun problème. Alors que la transition numéro 2 est une transition négative, ce qui signifie que nous soustrayons un état stationnaire à l'état existant. Le modèle choisi étant défini par une somme de deux états, soustraire un état correspond à ajouter ce même état déphasé de 180 degrés ( $\varphi^2 = \varphi^2 \pm 180$ ), soit :

$$-150 = 30 - 180 \text{ et } 144 = -36 + 180.$$

Ceci explique donc les résultats obtenus pour la seconde transition. La méthode d'estimation mise en place nous permet donc d'estimer les paramètres dans le cas stationnaire ainsi que dans le cas transitoire.

De tels résultats montrent qu'en comparant les estimations obtenues pour les deux transitions, nous sommes capables de les associer à la même charge électrique et d'affirmer que la première transition correspond à la mise en route de cette charge et que la deuxième correspond à sa mise en arrêt.

De plus le fait de tenir compte, lors de l'estimation, de l'existence d'une transition dans la fenêtre d'observation nous permet d'estimer directement les paramètres associés à l'état <sup>2</sup>. En effet, alors que l'estimation de l'état global nous oblige à attendre la fin de la phase transitoire (retrouver un état stationnaire) avant de faire la différence des amplitudes complexes estimées dans les deux états (état <sup>1</sup> avant et après la transition) afin d'obtenir une estimation des paramètres associés à l'état <sup>2</sup>, la méthode proposée ici nous permet de caractériser l'état <sup>2</sup>.



## IV.2 Estimation

dès lors que nous avons détecté un évènement (à partir du moment où la transition apparaît dans la fenêtre d'observation). De ce fait, il n'y a plus ces variations lors de l'état transitoire.

Sur les figures IV.12 et IV.13 représentant l'évolution des paramètres estimés de l'état  $.^2$ , nous constatons qu'ils sont parfaitement estimés.

Or, comme nous l'avons fait remarquer précédemment, pour pouvoir estimer correctement  $\hat{\theta}^2$ , le nombre d'équations doit être au moins égal au nombre de paramètres inconnus, ce qui signifie qu'il faut que la condition  $N_2 \geq d$  soit vérifiée.

Nous avons donc mis en place un test qui assure que le nombre d'équations soit suffisamment grand pour pouvoir estimer correctement les paramètres d'intérêt. Pour cela nous utilisons un intervalle de garde, notée  $\gamma$ , qui vérifie  $\gamma > d$ .

Le test suivant est effectué à la fin de la routine d'estimation des paramètres associés à l'état  $.^2$  : si  $\hat{N}_2 \leq \gamma$  alors les estimations ne sont pas retenues, l'algorithme renvoie des valeurs nulles pour  $\{\hat{N}_2, \hat{A}^2, \hat{\varphi}^2\}$ , et si  $\hat{N}_2 > \gamma$  alors nous considérons que les paramètres ont correctement été estimés.

## Cas n°2 : Transition longue

Nous avons vu, lors de l'analyse des signaux (cf. chapitre II), que durant le traitement nous pourrions être amenés à rencontrer des transitions de natures différentes. Nous avons distingué deux types de transitions : les transitions courtes et les transitions longues.

Cet exemple consiste donc à étudier le comportement de la méthode d'estimation proposée, dans le cas d'une transition longue.

Pour cela, nous reprenons la simulation précédente mais en modifiant la forme de la première transition (correspondant au démarrage d'un moteur par exemple). Le courant simulé est représenté dans la figure IV.14.

Lors de l'estimation nous avons, de la même manière que pour l'exemple précédent, effectué à la main le basculement entre l'estimation dans le cas stationnaire et l'estimation dans le cas transitoire.

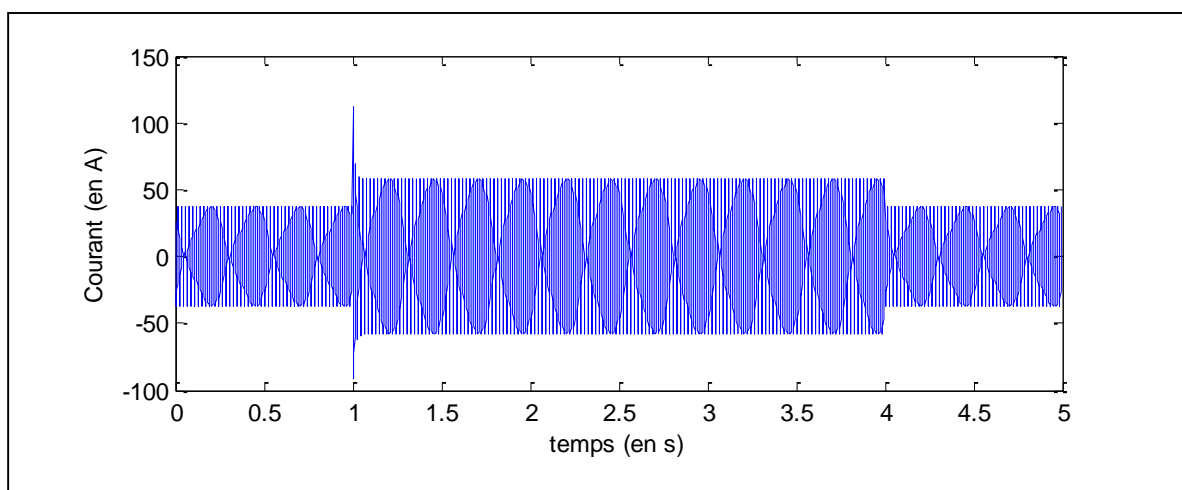


Figure IV.14 : Courant simulé contenant une transition longue

## IV.2 Estimation

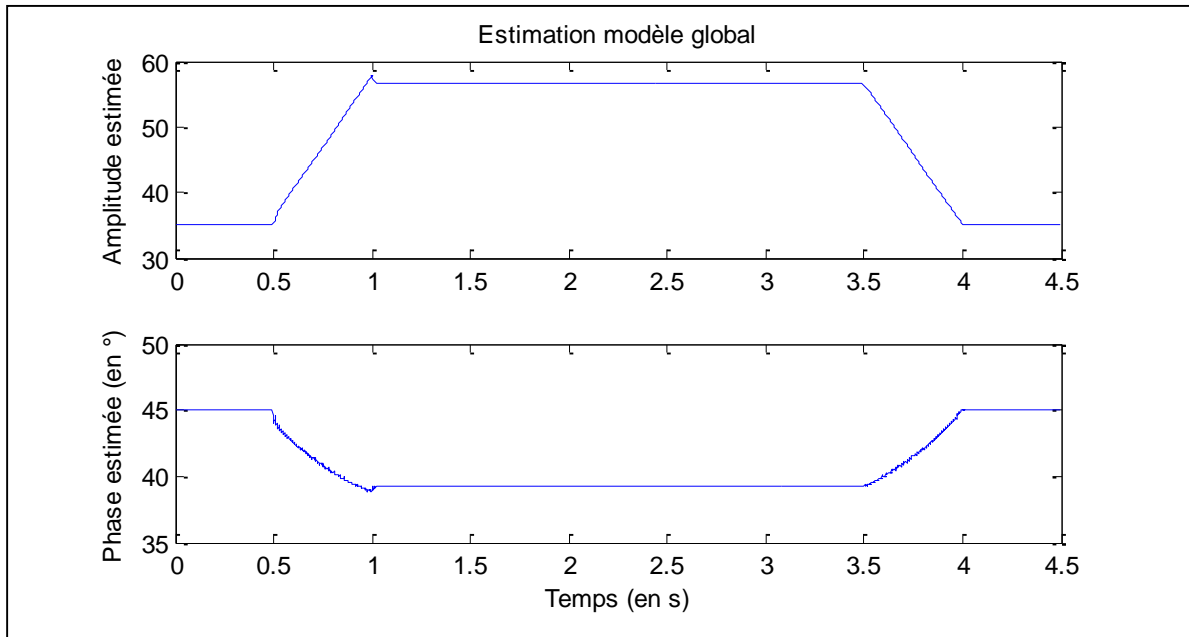


Figure IV.15 : Estimation modèle global fréquence  $F_0 = 50\text{Hz}$

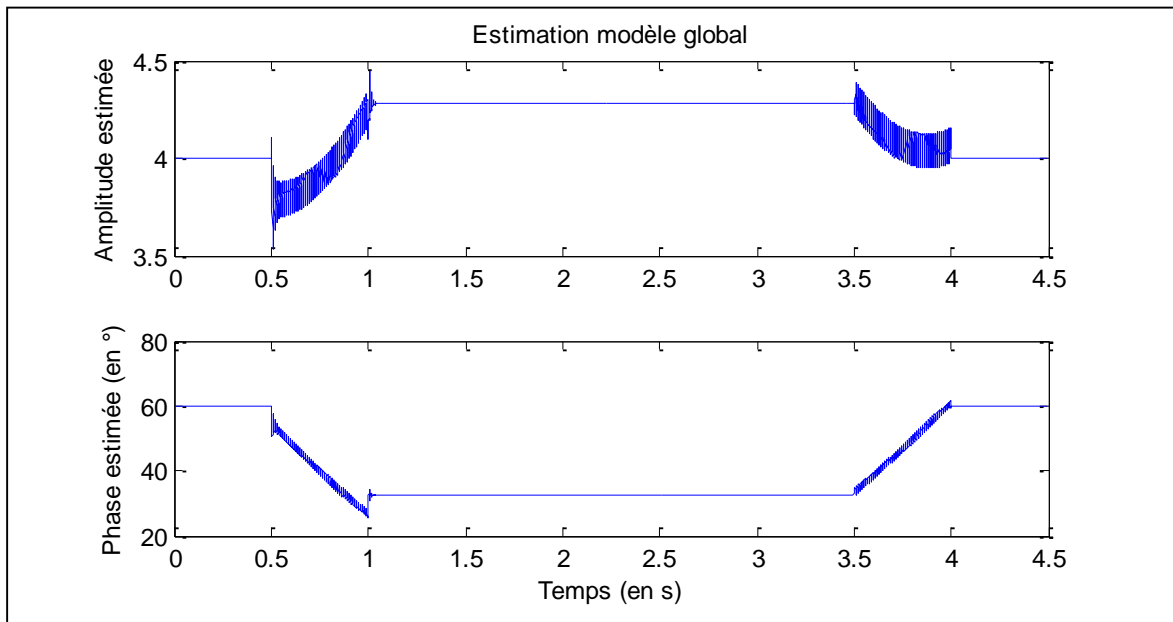


Figure IV.16 : Estimation modèle global fréquence  $F_1 = 150\text{Hz}$

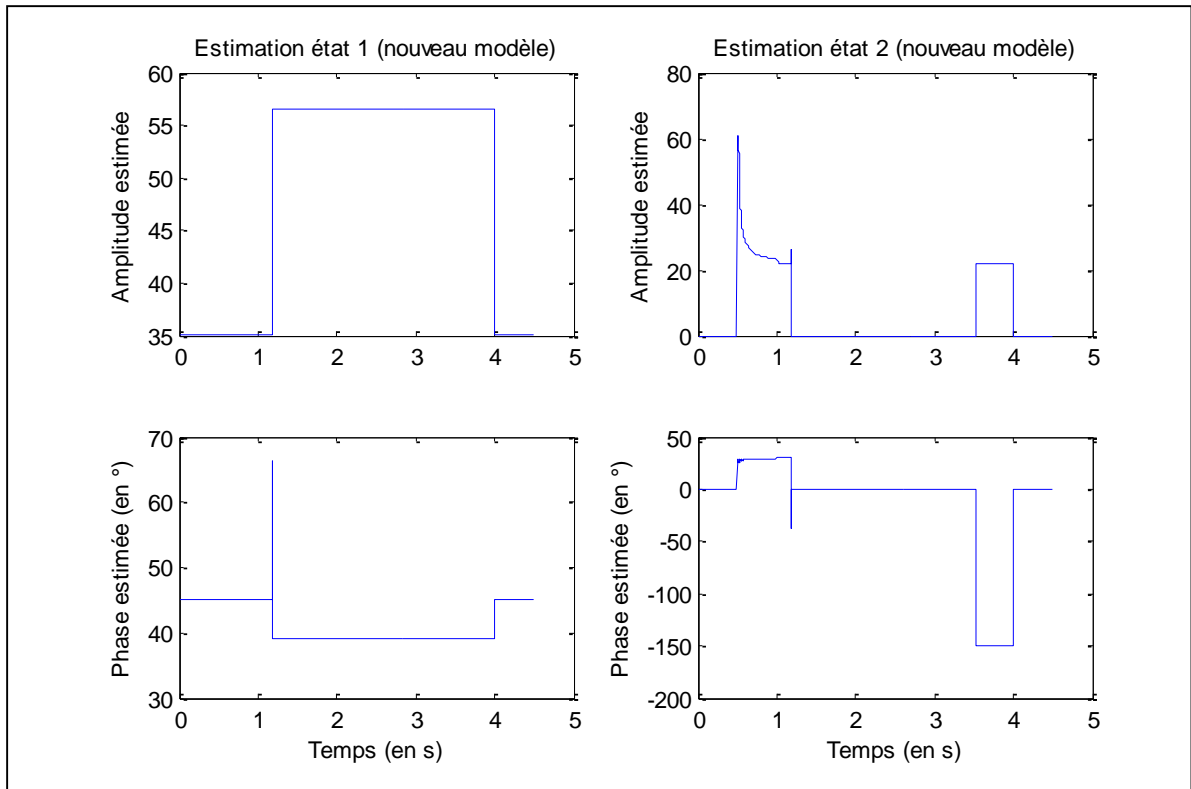


Figure IV.17 : Estimation des paramètres associés à l'état 1 et à l'état 2 du nouveau modèle pour  $F_0 = 50\text{Hz}$

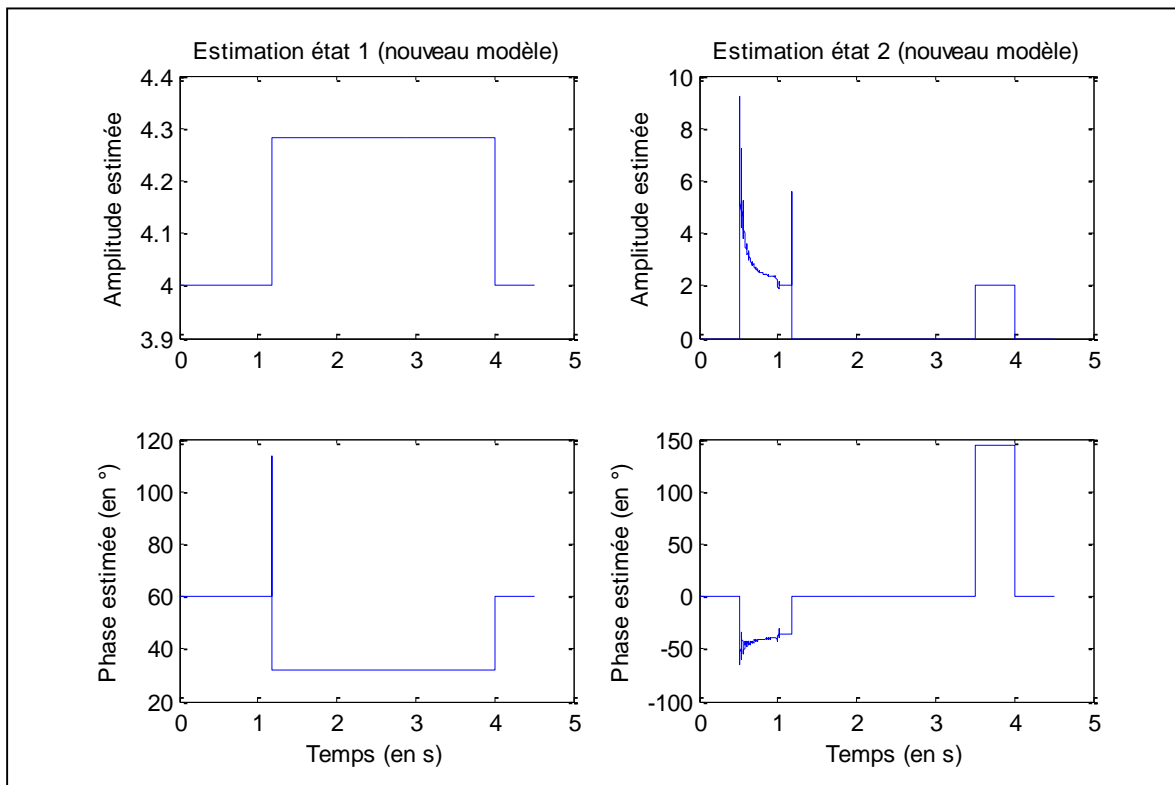


Figure IV.18 : Estimation des paramètres associés à l'état 1 et à l'état 2 du nouveau modèle pour  $F_1 = 150\text{Hz}$

## IV.2 Estimation

Avec les résultats obtenus, dans le cas d'une transition longue, nous constatons que la méthode proposée permet d'estimer les paramètres du modèle bien que ce dernier ne corresponde pas parfaitement à l'observation.

Sur les figures IV.17 et IV.18 nous remarquons que les estimations des paramètres caractérisant l'état  $.^1$  sont identiques aux résultats obtenus dans l'exemple précédent, ce qui signifie que la nature de la transition n'a aucune influence sur la caractérisation de l'état  $.^1$ . En effet, ce sont les paramètres correspondant à l'état  $.^2$  qui évoluent lors de la première transition. Ceci correspond parfaitement à la simulation car c'est l'apparition de l'état  $.^2$  qui produit une transition de cette nature. L'évolution des paramètres estimés nous fournit donc une information supplémentaire, concernant la nature de la transition, qui pourrait nous permettre de discriminer différentes charges électriques. Ceci pourrait constituer une aide à la classification (problème non traité dans ce travail de thèse).

Concernant l'état  $.^2$ , nous constatons que pour la première transition, l'amplitude est forte au démarrage et qu'elle décroît jusqu'à atteindre le régime permanent, ce qui correspond bien à la forme de la transition simulée. Notons cependant, au regard de la figure IV.14, que l'amplitude estimée ne correspond pas parfaitement aux valeurs simulées. Ce phénomène provient de la modélisation choisie qui voit une transition comme l'ajout d'un état stationnaire. Cela implique que, quel que soit le signal contenu dans la fenêtre d'observation, l'algorithme va estimer les paramètres de l'état stationnaire qui se rapproche le plus du signal (c'est-à-dire qui minimise l'EQM). Ceci importe peu car la forme des variations des paramètres estimés dépend de la forme de la transition, autrement dit de la charge. Donc les paramètres estimés évolueront de la même manière chaque fois que cette même charge électrique s'allumera. La forme des variations des paramètres estimés peut donc être utilisée pour caractériser la charge électrique.

Cette nouvelle approche nous procure donc un avantage certain par rapport à la méthode globale qui occulte complètement la forme de la transition comme nous pouvons le constater sur les figures IV.15 et IV.16.

**Remarque :** *Le but de ces exemples d'application est surtout de montrer que la méthode développée est capable d'estimer correctement les paramètres du modèle dans les cas stationnaire et transitoire. Sur ces simulations, la tension étant parfaitement stationnaire, l'intérêt de montrer les résultats des admittances estimées est réduit. Notons toutefois que lors du chapitre suivant, qui traite de l'identification des charges, nous présentons l'algorithme final et donc les résultats sont donnés en utilisant les admittances.*

## IV.3 Détection

Le modèle mis en place est adapté aux observations, notamment aux cas avec ou sans transition dans la fenêtre d'observation. Ensuite nous avons développé différentes méthodes permettant d'estimer les paramètres de ce modèle dans le cas stationnaire ainsi que le cas transitoire. Donc à ce stade, nous savons suivre l'évolution dans le temps des paramètres d'intérêt. Nous allons voir maintenant la partie finale, c'est-à-dire l'étape de détection d'évènements.

### IV.3.1 Estimation de l'instant de transition

Nous avons vu que l'estimation des admittances pouvait être obtenue en effectuant le rapport des estimations des paramètres sur la tension et le courant. De plus nous savons que les évènements surviennent sur le signal de courant uniquement. Nous allons donc développer un algorithme permettant de détecter les évènements qui surviennent sur le courant afin d'estimer l'instant de transition.

L'algorithme consiste à faire glisser la fenêtre d'observation dans le temps ( $\tau =$  temps absolu). On définit l'instant  $\tau_n$  comme étant la date de début de la fenêtre d'observation numéro  $n$  avec :  $\tau_n = (n - 1)\Delta t, \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Lors de l'initialisation, c'est-à-dire à l'instant  $\tau_1 = 0$ , on suppose que la fenêtre d'observation ne contient pas de transition. Cette étape consiste donc à estimer les paramètres  $\{\hat{A}_i^1, \hat{\varphi}_i^1\}_{\tau_1}$  caractérisant l'état  $.^1$  dans la première fenêtre d'observation.

À l'instant  $\tau_n$ , on reconstruit le signal (à l'état  $.^1$ ) en utilisant une estimation des paramètres d'intérêt à l'instant  $\tau_{d^1}$  telle que :  $\{\hat{A}_i^1, \hat{\varphi}_i^1\}_{\tau_{d^1}} = \{\hat{A}_i^1, \hat{\varphi}_i^1\}_{\tau_{n-1}}$  sur un état stationnaire, et sur un état transitoire,  $\{\hat{A}_i^1, \hat{\varphi}_i^1\}_{\tau_{d^1}}$  est la dernière estimation de  $\{\hat{A}_i^1, \hat{\varphi}_i^1\}$  avant la transition.

Ainsi, nous obtenons la prédiction de la TFD du signal, correspondant à ce que serait l'état  $.^1$  estimé à l'instant  $\tau_n$ , que nous noterons :  $\hat{J}^1(f, \tau_n | \tau_{d^1})$ .

Nous calculons ensuite l'erreur entre la TFD du signal mesuré  $x$ , contenu dans la fenêtre d'observation, et la prédiction de la TFD du signal. Ainsi, nous obtenons l'erreur de prédiction, notée  $E_1$ , telle que :

$$E_1(f, \tau_n) = X(f, \tau_n) - \hat{J}^1(f, \tau_n | \tau_{d^1})$$

Tant qu'il n'y a pas de transition, cette erreur devrait être petite. En effet, nous avons vu précédemment que dans le cas sans transition, le spectre du courant à l'état  $.^2$ , notée  $J^2$ , n'existe pas et que donc cette erreur correspond à l'erreur d'estimation seule. Et dans le cas transitoire, l'information contenue dans le résidu est due au signal  $J^2$ .

Ceci est confirmé par les figures IV.19 et IV.20 qui montrent l'erreur de prédiction (en vert) dans les cas cités précédemment, c'est-à-dire :

- l'erreur de prédiction  $E_1(f, \tau_n)$  lorsque la fenêtre d'observation ne contient pas de transition.
- l'erreur de prédiction  $E_1(f, \tau_n)$  lorsqu'il existe une transition dans la fenêtre d'observation.

On remarque clairement que dans le cas stationnaire, l'erreur de prédiction est très faible. Tandis que dans le cas transitoire, on voit apparaître le spectre du courant à l'état  $.^2$ .

### IV.3 Détection

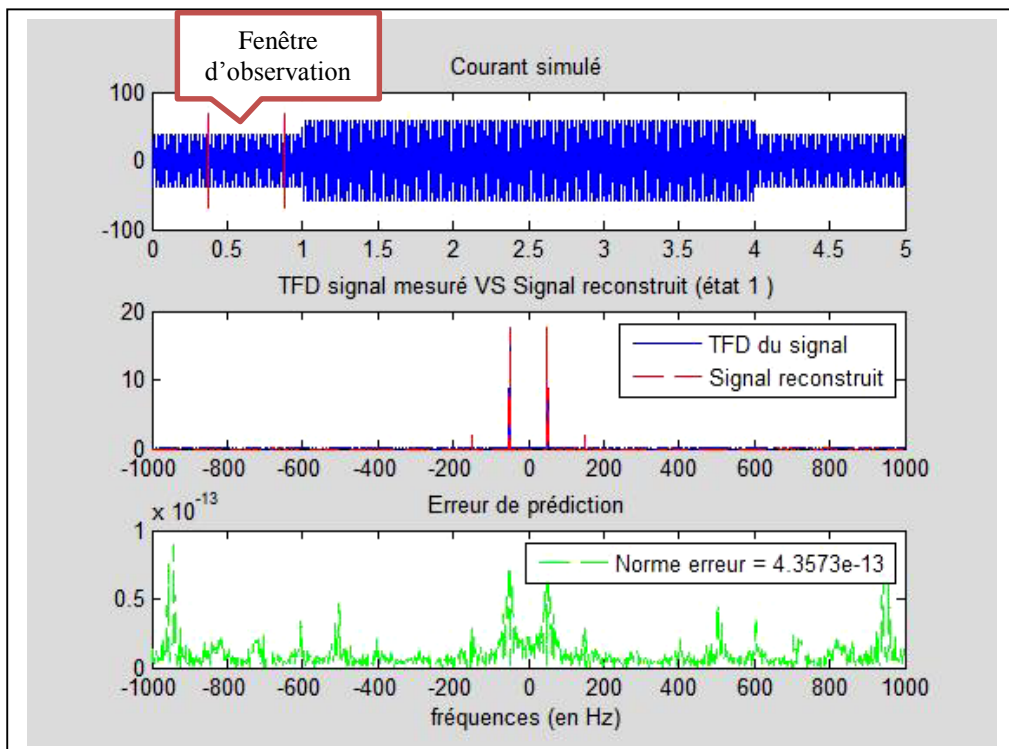


Figure IV.19 : Erreur de prédiction  $E_1(f, \tau_n)$  dans le cas stationnaire

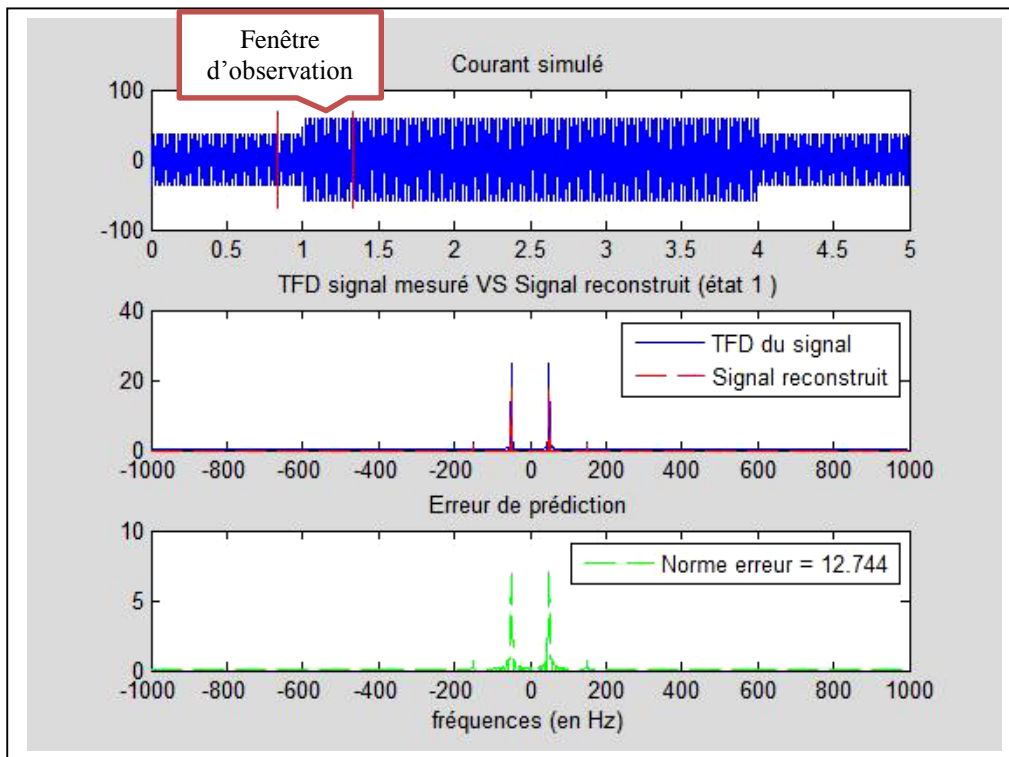


Figure IV.20 : Erreur de prédiction  $E_1(f, \tau_n)$  dans le cas transitoire

L'erreur de prédiction est faible, tant qu'il n'y a pas de transition. En d'autres termes, tant qu'aucune charge électrique, présente sur le réseau, ne change d'état l'erreur de prédiction correspond à l'erreur d'estimation. Elle augmente en présence d'une transition, c'est-à-dire lorsqu'une charge électrique s'allume ou s'éteint. Donc, si  $E_1$  augmente de manière significative, nous pouvons conjecturer un changement d'état. Ainsi, cette erreur contient le courant consommé par le système qui a été mis en marche ou arrêté (l'état .<sup>2</sup>).

La figure IV.21 montre l'évolution de la norme de cette erreur. Comme nous pouvons le voir, elle est très faible sur les états stationnaires et augmente sur les états transitoires. Elle pourrait donc nous permettre de détecter l'apparition d'un évènement et localiser les instants de transitions.

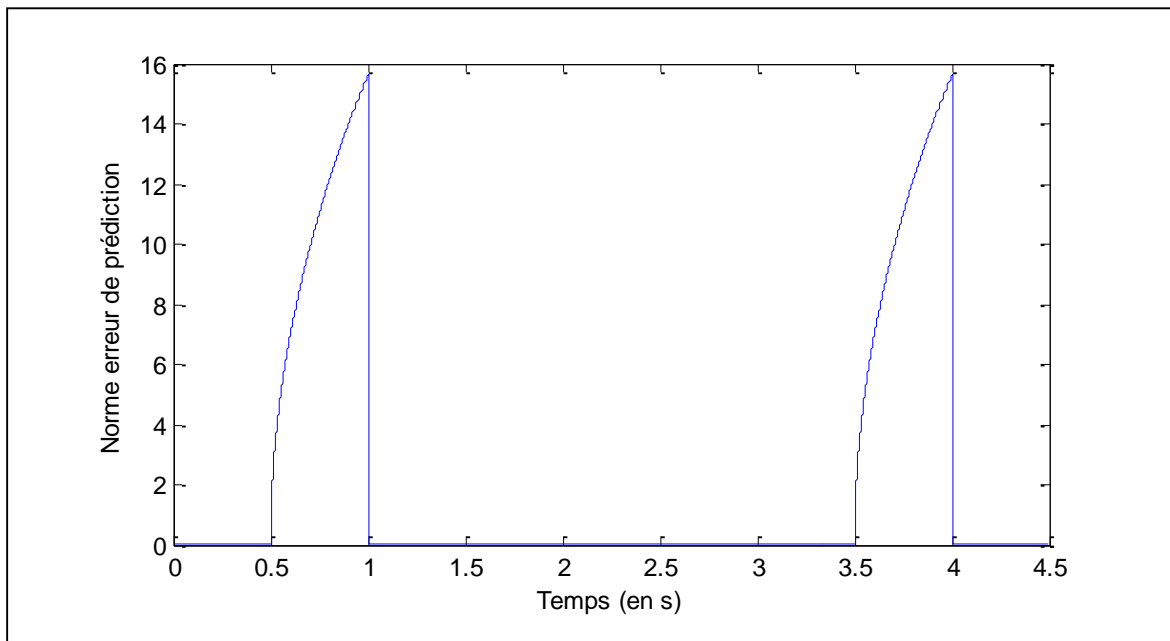


Figure IV.21 : Evolution de la norme de l'erreur de prédiction ( $\|E_1(f, \tau_n)\|$ )

C'est pourquoi, afin de détecter les transitions, nous allons comparer la norme de l'erreur de prédiction à un seuil de détection noté  $\lambda$ . Ce seuil sera choisi par un expert, qui le fixe en fonction par exemple du bruit de mesure (ou bruit de capteur). Dans le chapitre suivant nous aborderons l'étude du seuil de manière plus précise.

Soit le test suivant :

$$\|E_1(f, \tau_n)\| = \frac{1}{N_1} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_1} |E_1(f_k, \tau_n)|^2} \underset{D_{1,0}}{\overset{D_{1,1}}{\geq}} \lambda$$

où  $D_{1,0}$  et  $D_{1,1}$  sont les règles de décision suivantes :

- $D_{1,0}$  : aucun évènement n'est détecté, et nous passons à la fenêtre suivante :  $n \rightarrow n + 1$  ( $\tau_n \rightarrow \tau_{n+1}$ ).
- $D_{1,1}$  : une transition est détectée dans la fenêtre d'observation, c'est-à-dire que l'instant de transition est compris entre l'instant  $\tau_n$  et  $\tau_n + T_1$ .



### IV.3 Détection

Ensuite, afin d'avoir une meilleure précision sur l'instant de transition, nous basculons sur l'estimation des paramètres correspondant à l'état  $.^2$ . Ainsi nous obtenons les estimés  $\{\hat{N}_2, \hat{A}_i^2, \hat{\Phi}_i^2\}$ .

Finalement, l'instant de transition estimé de l'évènement numéro  $i$ , notée  $\hat{\tau}'_i$ , est donnée par :

$$\hat{\tau}'_i = \tau_n + T_1 - \hat{T}_2 = \tau_n + \hat{T}'$$

Ensuite, lorsque l'état  $.^2$  est entièrement contenu dans la fenêtre d'observation ( $\hat{N}_2 = N_1$ ) nous avons atteint un nouvel état stationnaire composé, à la fois, de l'état  $.^1$  et de l'état  $.^2$ . Nous basculons donc sur l'estimation des paramètres  $\{\hat{A}_i^1, \hat{\Phi}_i^1\}_{\tau_n}$  puis nous réitérons la procédure de détection.

La méthode de détection telle qu'elle est présentée ici nous permet effectivement de déterminer l'instant de transition. Notons toutefois que cette affirmation est vraie uniquement pour des transitions correspondant au modèle choisi, soit pour des transitions courtes. Mais elle n'est plus vraie dans le cas de transitions longues.

En reprenant les résultats obtenus dans la partie IV.2.2 nous remarquons que, dans le cas d'une transition courte, l'estimation de  $N_2$  est obtenue de manière précise et correspond parfaitement à la longueur de l'état  $.^2$ . Ceci est confirmé par le fait que  $\hat{N}_2$  évolue linéairement dans le temps, c'est-à-dire qu'à chaque fois que la fenêtre d'observation se déplace d'un échantillon, on a bien  $\hat{N}_2 = \hat{N}_2 + 1$ . De plus lorsque la condition  $\hat{N}_2 = N_1$  est vérifiée le signal contenu dans la fenêtre d'observation correspond bien à un état stationnaire.

Par contre, dans le cas d'une transition longue, cette condition indique que l'état  $.^2$  est contenu dans la fenêtre d'observation mais cela n'implique pas que le signal contenu dans la fenêtre d'observation soit un état stationnaire. Ceci s'explique par le fait que le modèle choisi suppose que l'état  $.^2$  est un état stationnaire. De ce fait lorsque ce n'est pas le cas, l'algorithme d'estimation fournit une estimation, non pas des bons paramètres mais, des paramètres correspondant à l'état stationnaire se rapprochant le plus du signal (qui minimise l'EQM). Les paramètres étant mal estimés, l'erreur de prédiction redeviendra supérieure au seuil de détection. De ce fait, alors qu'il n'y a plus de transition l'algorithme croira en détecter une et cela entrainera de nombreuses fausses alarmes.

Pour pallier ce problème, il nous faut donc modifier l'algorithme de détection afin qu'il s'adapte aux transitions longues. Cette amélioration consiste à introduire un test qui permettra de vérifier que les paramètres caractérisant l'état  $.^2$  soient bien estimés et stables, autrement dit ce test permettra de s'assurer que l'état  $.^2$  est bien un état stationnaire.

Plus précisément, cette modification porte sur la décision  $D_{1,1}$  :

Lorsque la règle de décision  $D_{1,1}$  est validée, on calcule une seconde erreur de prédiction, notée  $E_2$ , correspondant à l'écart entre l'erreur  $E_1$ , qui contient l'état  $.^2$ , et la prédiction de la TFD du signal  $\hat{J}^2(f, \tau_n | \tau_{d^2})$  construit à partir de  $\{\hat{N}_2, \hat{A}_x^2, \hat{\Phi}_x^2\}_{\tau_{d^2}}$ .

$$E_2(f, \tau_n) = E_1(f, \tau_n) - \hat{J}^2(f, \tau_n | \tau_{d^2})$$

Lorsque l'état  $.^2$  correspond à un état stationnaire, (les paramètres  $\{N_2, A_x^2, \varphi_x^2\}$  sont bien estimés) et cette erreur est petite. Nous comparons donc la norme de  $E_2$  à un seuil de détection  $\lambda'$  :

$$\|E_2(f, \tau_n)\| \underset{D_{2,0}}{\overset{D_{2,1}}{\geq}} \lambda'$$

où  $D_{2,0}$  et  $D_{2,1}$  sont les règles de décisions suivantes :

- $D_{2,1}$  : si l'erreur est supérieure au seuil, nous effectuons l'estimation des paramètres  $\{N_2, A_x^2, \varphi_x^2\}$  puis nous passons à la fenêtre suivante :  $n \rightarrow n + 1$ .
- $D_{2,0}$  : sinon, cela signifie que les estimations sont correctes. Ainsi, il nous faut savoir si le signal correspondant à l'état  $.^2$  est entièrement contenu dans la fenêtre d'observation (*i.e.*  $\hat{N}_2 = N_1$ ).

Pour cela, nous définissons le critère de détection comme suit :

$$D_{2,0} \text{ et } \hat{N}_2 = N_1$$

La validation de ce critère signifie que nous avons atteint un nouvel état stationnaire. Et également que le début de la fenêtre d'observation  $\tau_n$  correspond à l'instant de transition numéro  $i$ , soit :

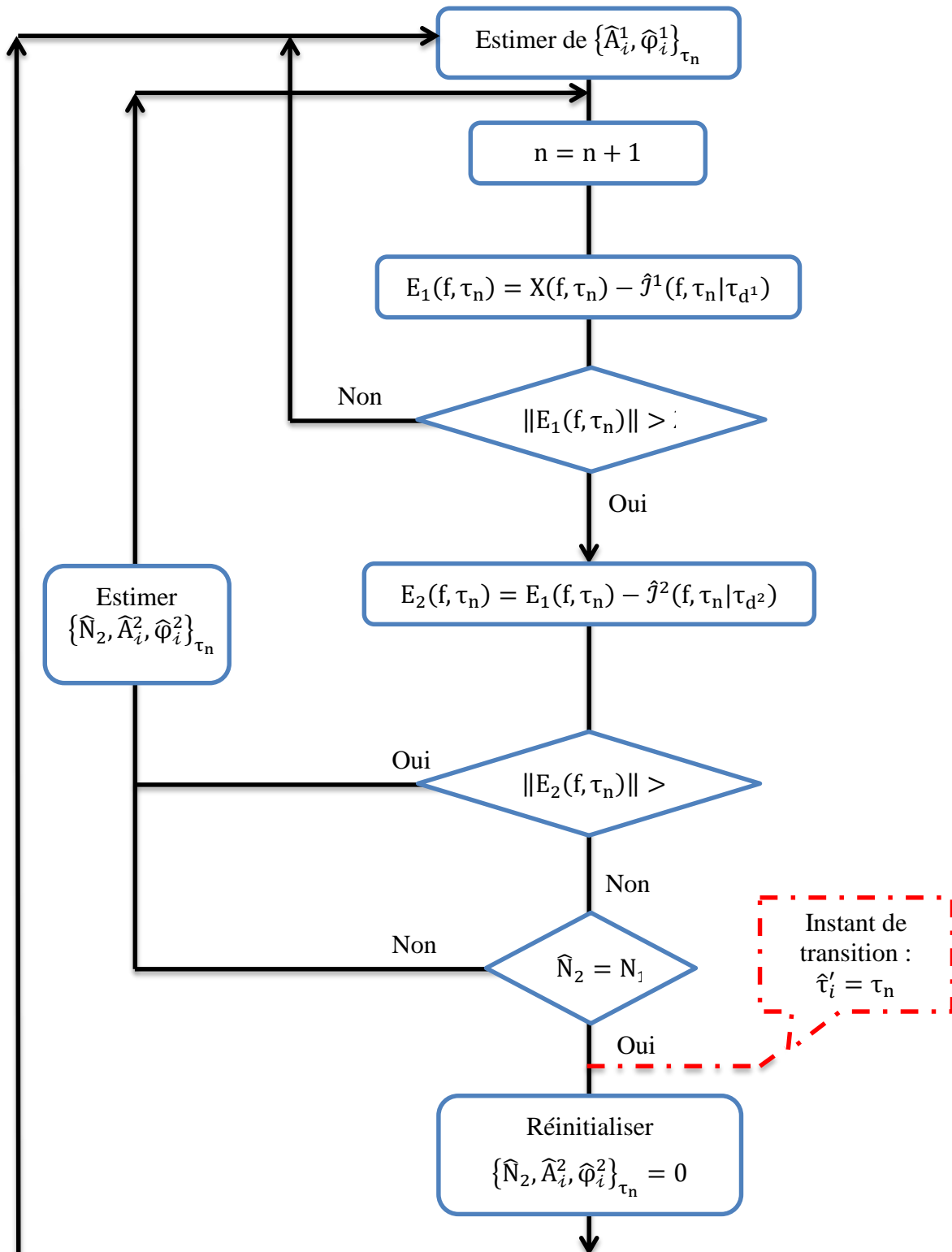
$$\tau'_i = \tau_n$$

A cet instant, on stocke l'instant de transition  $\tau'_i$  puis nous basculons sur l'estimation des paramètres  $\{\hat{A}_i^1, \hat{\varphi}_i^1\}_{\tau_n}$  avant de réitérer la procédure de détection.

### IV.3.1 Algorithme

Voici l'architecture de l'algorithme de détection que nous avons mis en place afin d'estimer l'instant de transition numéro  $i$ , notée  $\tau'_i$ .

Lors de l'initialisation, on suppose qu'il n'y a pas de transition dans la fenêtre d'observation. Cette étape consiste donc à poser  $\{\hat{N}_2, \hat{A}_i^2, \hat{\varphi}_i^2\}_{\tau_1} = 0$  et estimer les paramètres du signal contenu dans la fenêtre d'observation  $\{\hat{A}_i^1, \hat{\varphi}_i^1\}_{\tau_1}$ . Ensuite le traitement dans le temps est donné par le schéma ci-dessous.



### IV.3.2 Application numérique

Appliquons l'algorithme de détection aux signaux simulés de la partie IV.2.2. Ainsi, nous verrons la capacité qu'a notre algorithme à détecter les évènements et estimer les instants de transition. De plus, cela nous permet de voir comment il se comporte en fonction de la nature des transitions.

Les figures IV.22 et IV.23 illustrent le signal simulé (en bleu) ainsi que le résultat de la détection, c'est-à-dire l'instant de transition estimé (en vert), respectivement, dans le cas d'une transition courte et d'une transition longue.

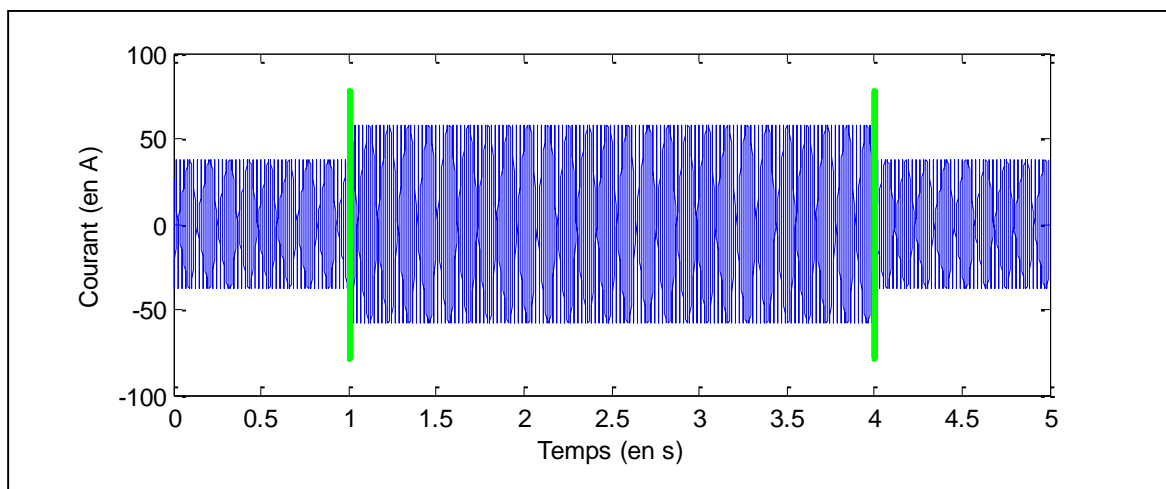


Figure IV.22 : Détection cas d'une transition courte

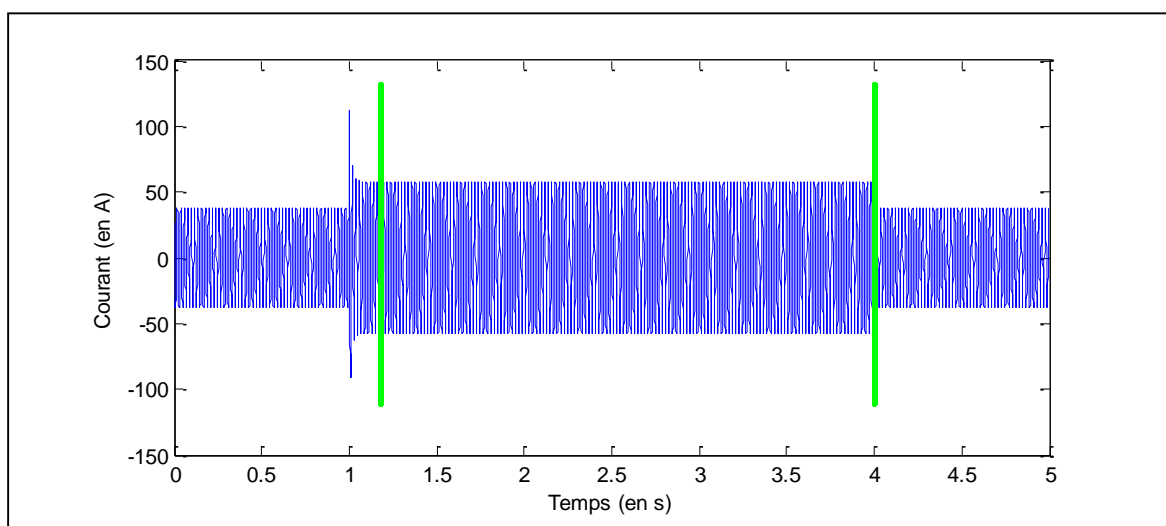


Figure IV.23 : Détection cas d'une transition longue

### IV.3 Détection

Rappelons que par construction de ces simulations, les vrais instants de transition sont identiques dans les deux cas.

Le tableau suivant regroupe les vrais instants de transitions définis lors de la construction des signaux ainsi que les instants de transition estimés par l'algorithme de détection (pour une meilleure comparaison les instants sont donnés en numéro d'échantillon).

Table IV.2 : Comparatif des instants de transitions vrais et estimés

	Transition 1	Transition 2
Instants de transition vrais	$N' = 2001$	$N' = 8001$
Instants de transition estimés (Transition courte)	$\hat{N}' = 2001$	$\hat{N}' = 8001$
Instants de transition estimés (Transition longue)	$\hat{N}' = 2358$	$\hat{N}' = 8001$

Au vu des figures IV.22 et IV.23 ainsi que du tableau IV.2, nous constatons que tous les instants de transition correspondant à une transition courte sont parfaitement estimés (au point près) et que celui correspondant à la transition longue présente un décalage. En fait dans le cas de la transition longue, l'instant de transition estimé correspond à la fin du régime transitoire car l'algorithme de détection cherche l'instant d'apparition d'un nouvel état permanent comme nous le montre la figure IV.24. En effet, il apparaît clairement qu'à partir de l'instant estimé ( $\hat{N}' = 2358 \Leftrightarrow \hat{t}' = 1.179s$ ), le courant a atteint son état permanent.

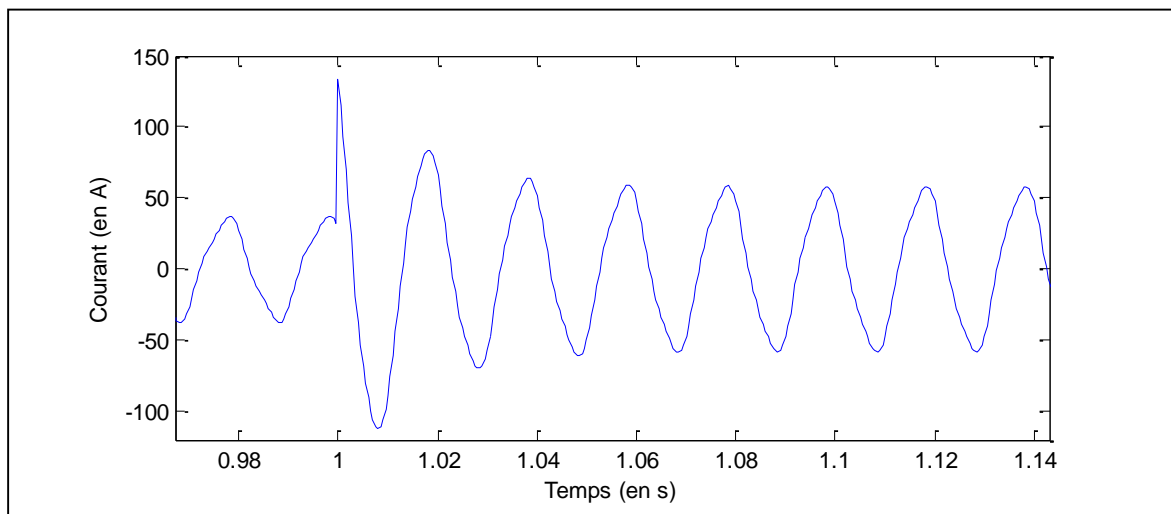


Figure IV.24 : Détection cas d'une transition longue

Afin d'expliquer ce phénomène, rappelons le critère de détection :

$$\|E_2(f, \tau_n)\| < \lambda' \quad \text{et} \quad \hat{N}_2 = N_1$$

Le test  $\hat{N}_2 = N_1$  impose que l'état  $.^2$  soit entièrement contenu dans la fenêtre d'observation et le test  $\|E_2(f, \tau_n)\| < \lambda$  impose que les paramètres associés à l'état  $.^2$  soient bien estimés.

La combinaison de ces deux tests signifie donc que l'instant de transition estimé correspond au début de la fenêtre d'observation contenant un état  $.^2$  stationnaire.

En réalité l'instant de transition renvoyé par l'algorithme de détection présenté ici correspond à la fin de la transition. Dans le cas des transitions courtes ceci n'est pas un problème car l'instant de début et l'instant de fin de transition se confondent.

# Conclusion

Dans ce chapitre nous avons, dans un premier temps, proposé et validé une nouvelle modélisation permettant de tenir compte de l'existence d'une transition dans la fenêtre d'observation (adaptée aux signaux traités). La validation consistait à comparer (calculer l'erreur entre) la TFD du signal observé et le modèle. Ceci nous a permis de constater qu'en présence ou non d'une transition dans la fenêtre d'observation, l'erreur quadratique moyenne entre la vraie TFD et le modèle fréquentiel est de l'ordre de  $10^{-28}$ .

Ensuite, le modèle ayant changé, nous avons développé une méthode permettant d'estimer les paramètres de ce modèle, au sens des moindres carrés, pour les cas avec et sans transition. La mise en application de cette dernière nous a permis de voir que cette méthode était capable d'estimer les amplitudes complexes associées aux fréquences présentes ainsi que l'emplacement de la transition dans la fenêtre. De plus, après avoir testé cette méthode pour des transitions de natures différentes nous avons conclu que quelle que soit la transition la méthode d'estimation proposée dans ce chapitre permettait de caractériser l'état <sup>2</sup>, autrement dit elle permet de caractériser l'appareil qui est la source de la transition. En effet, nous avons pu constater que malgré le fait que l'évolution du signal dans la partie transitoire ne corresponde pas au modèle, les paramètres estimés sont, quant à eux, caractéristiques de cette transition.

Et enfin, à partir de ces avancées, nous avons fini par proposer un algorithme permettant de détecter les événements qui surviennent sur le courant et d'estimer avec précision l'instant de transition. Notons que suite à la mise en application, nous avons pu remarquer qu'en réalité l'algorithme mis en place n'estime pas vraiment l'instant de transition. En fait, cet algorithme estime l'instant d'apparition d'un nouvel état stationnaire ce qui correspond en fait à l'instant de fin de transition. Comme, dans le cas d'une transition courte, l'instant de début et de fin de transition sont les mêmes cela ne pose aucun problème. Cependant, ce n'est pas le cas pour une transition longue.

Finalement, nous sommes capables d'estimer les paramètres d'intérêt (amplitude complexe associée aux fréquences étudiées) sur la tension ainsi que sur le courant, que ce soit en régime permanent ou transitoire. Nous sommes également capables de détecter les événements qui surviennent sur le courant et de déterminer (d'estimer) l'instant de fin de transition. Cependant, dans l'état actuel des choses les méthodes proposées ne nous permettent pas de déterminer l'instant de début de transition et donc la durée de transition.

# Chapitre V Identification des charges





## Introduction

Compte tenu des méthodes développées précédemment, il est maintenant possible d'obtenir une estimation, optimale au sens des moindres carrés, des paramètres inconnus, que ce soit pour un état stationnaire ou transitoire. Nous sommes également capables de détecter les événements qui surviennent sur le réseau (sur le courant) et d'avoir une estimation de l'instant de fin de transition. Donc, dans ce chapitre, nous présentons un algorithme dont le but est de détecter les événements qui surviennent sur le signal de courant et d'en extraire les caractéristiques d'intérêt, qui sont l'instant et la durée des transitions et les admittances associées à chacune de ces fréquences caractérisant la charge qui a causé la transition.

La première partie de ce chapitre consiste à proposer un algorithme nous permettant, à partir du traitement des mesures de tension et de courant, d'atteindre les objectifs fixés. Cet algorithme est créé à partir des méthodes développées précédemment : c'est le résultat des travaux que nous avons exposés jusqu'à présent dans ce manuscrit.

Dans la seconde partie, nous appliquons cet algorithme afin de traiter des signaux de natures différentes, aussi bien des signaux simulés que des signaux réels.

### V.1 Méthodologie

Dans cette partie du chapitre, nous présentons l'algorithme mis en place afin de répondre à la problématique de départ qui consiste à décomposer la consommation d'un réseau électrique.

Pour cela, il nous faut détecter les événements qui surviennent. Et pour chaque événement détecté nous souhaitons extraire un vecteur d'information constitué de :

- l'instant de transition,
- sens de la transition (ON ou OFF),
- durée de transition,
- forme de la transition,
- nombre de fréquences harmoniques présentes sur le signal de tension,
- numéro de ces fréquences harmoniques,
- admittance  $h$  associée à chaque fréquence d'intérêt,
- numéro et amplitude complexe des fréquences présentes sur le courant et pas sur la tension.

Pour ce faire, nous disposons :

- de la tension mesurée,
- du courant mesuré,
- d'une méthode d'estimation adaptée aux cas avec et sans transition dans la fenêtre d'observation,
- d'une méthode de détection qui nous permet de détecter les événements et d'estimer avec précision l'instant de fin de transition.

## **V.1.1 Principe général**

Dans cette partie, nous proposons une première version (l'idée générale) de l'algorithme qui nous permettra de répondre à la problématique de départ.

A partir des signaux de tension et de courant, il nous faut extraire les admittances (définies par le rapport des amplitudes complexes des fréquences d'intérêt de la tension et du courant). Pour cela, nous avons prouvé lors du chapitre précédent qu'il était possible d'obtenir une estimation, optimale au sens des moindres carrés, de ces paramètres en effectuant le rapport des amplitudes complexes estimées séparément sur la tension et sur le courant.

Le fait de traiter séparément la tension et le courant est intéressant, notamment pour l'étape de détection d'évènements car, sachant que les évènements surviennent essentiellement sur le courant, le traitement sur la tension sera différent de celui sur le courant.

Nous considérons que la tension ne présente pas de transition<sup>4</sup>, il nous suffit donc d'estimer les paramètres  $\hat{\theta}_u$  associés aux fréquences d'intérêt en utilisant la méthode d'estimation (développée dans le chapitre précédent) dans le cas stationnaire, tel que :

$$\hat{\theta}_u = (M^H M)^{-1} M^H Y$$

où  $M = M(N_1)$ ,  $Y = \text{TFD}[y] = M \cdot \theta_u + \varepsilon_u$  et  $f = [f_1 \dots f_{N_1}]$ . On obtient finalement,  $\{\hat{A}_u^1, \hat{\varphi}_u^1\}_{\tau_n} \forall n = 1, 2, \dots$

En ce qui concerne le courant, le traitement est plus complexe car il faut détecter les évènements et estimer les paramètres dans les états stationnaire et transitoire. En pratique, cela consiste à appliquer l'algorithme de détection présenté dans la partie IV.3.1.

De ce fait, nous sommes capables de détecter les évènements qui surviennent, d'estimer l'instant de fin de transition, et d'estimer les admittances associés aux fréquences d'intérêt, que ce soit sur des états stationnaires ou transitoires.

Il nous reste maintenant à déterminer la durée de transition. A cette fin, il nous faut également estimer l'instant de début de transition. Pour cela, nous proposons la procédure suivante : une fois l'instant de fin de transition  $\tau_1'$  estimé (traitement aller ou forward), nous utilisons le même algorithme de détection en sens rétrograde (traitement retour ou backward). De ce fait, l'instant détecté correspond à l'instant de début de transition, notée  $\tau_1''$ . Cette procédure nous permet d'estimer les instants de début et de fin de transition avec la même précision. Ainsi, l'estimation de la durée de transition  $d_i$  est donnée par :

$$\hat{d}_i = \hat{\tau}_1' - \hat{\tau}_1'' .$$

Lors de l'analyse des signaux (chapitre II), nous avons noté qu'il existait, sur la tension, des fréquences harmoniques. C'est pourquoi au début du traitement, nous sélectionnons ce que nous appelons les fréquences d'intérêt. Notons que parmi toutes les fréquences harmoniques, certaines ont une amplitude qui est très faible devant les autres. Nous considérerons que ces dernières pourraient facilement être perturbées par les autres fréquences présentes et par conséquent ne pas être représentatives du système en fonctionnement. C'est pourquoi, pour les fréquences d'intérêt que nous noterons  $F^c$ , nous choisirons les fréquences les plus puissantes parmi  $F$ .

---

<sup>4</sup> Notons cependant que, contrairement à nous, dans [18] et [19] les auteurs proposent de détecter les évènements à partir de la tension.

Enfin, pour chaque fenêtre d'observation, nous avons les paramètres estimés  $\{\widehat{A}_u, \widehat{\varphi}_u\}_{\tau_n}$  pour la tension et  $\{\widehat{A}_i^1, \widehat{\varphi}_i^1, \widehat{A}_i^2, \widehat{\varphi}_i^2\}_{\tau_n}$  pour le courant, à partir desquels nous pouvons en déduire les admittances.

L'admittance  $h_i^2$  caractérisant la charge qui sous-tend l'événement numéro  $i$  peut être obtenue en utilisant  $\{\widehat{A}_i^2, \widehat{\varphi}_i^2\}_{\tau_i'}$  ou alors en calculant la différence entre l'admittance après la transition (admittance de l'ensemble du système dans le nouvel état d'équilibre,  $h(\tau_i')$ ) et avant la transition (admittance de l'ensemble du système dans l'état d'équilibre précédent,  $h(\tau_i'')$ ). Notons toutefois que par souci de précision (afin d'améliorer l'estimation de  $h_i^2$ ) nous pouvons moyenniser sur une certaine durée les admittances avant et après la transition avant d'en faire la différence.

Notons que les paramètres estimés entre l'instant  $\tau_i''$  et l'instant  $\tau_i'$  peuvent être utilisés pour caractériser l'état transitoire de la charge qui crée l'événement. En effet, durant le régime transitoire, les paramètres estimés  $\{\widehat{A}_i^2, \widehat{\varphi}_i^2\}_{\tau_i'' \rightarrow \tau_i'}$  varient en fonction de la forme de la transition. Il est important de noter que la forme de  $\{\widehat{A}_i^2\}_{\tau_i'' \rightarrow \tau_i'}$  n'est pas représentative de la charge elle-même. Les paramètres sont obtenus relativement au modèle choisi donc la forme de l'évolution des paramètres estimés dépend à la fois du modèle et de la charge. C'est pourquoi, les paramètres estimés évolueront suivant la même forme pour chaque transition causée par une charge donnée.

Par conséquent, il est possible d'utiliser les paramètres estimés  $\{\widehat{A}_i^2\}_{\tau_i'' \rightarrow \tau_i'}$  pour caractériser l'activation ou la désactivation des charges.

Finalement, pour chaque événement cet algorithme fournit l'instant de transition estimé, la durée de la transition, la forme de  $\{\widehat{A}_i^2\}_{\tau_i'' \rightarrow \tau_i'}$ , ainsi que l'admittance de la charge provoquant l'événement pour chaque fréquence d'intérêt.

## **V.1.2 Influence du choix des fréquences**

Précédemment, nous avons décidé de sélectionner les fréquences les plus puissantes et d'estimer leurs paramètres. Ainsi, parmi les  $N_{s_{max}}$  fréquences possibles nous en négligeons certaines. Or, bien qu'elles aient une puissance faible elles sont tout de même présentes. Dans cette partie nous répondons à une question qui se pose naturellement : quelles sont les conséquences de ces choix sur les performances des estimations ainsi que sur la qualité de la détection ?

### **Concernant l'estimation**

Tout d'abord nous allons étudier l'influence du choix des fréquences sur les performances de l'estimateur des moindres carrés.

#### **Problème**

Pour cela, nous calculons les deux premiers moments de l'estimateur lorsque nous sélectionnons les  $N_{s_{max}}$  fréquences présentes. Ensuite, ces performances seront comparées au cas où nous sélectionnons uniquement les  $N_s$  fréquences les plus puissantes.

*Cas n°1 : Toutes les fréquences ( $N_s = N_{s_{max}}$ )*

Calculons les performances de l'estimateur des moindres carrés lorsque nous choisissons d'estimer les paramètres associés à toutes les fréquences, c'est-à-dire lorsque  $N_s = N_{s_{max}}$ .

En utilisant le modèle fréquentiel défini dans le chapitre précédent, la TFD du signal observé,  $X$  ou  $Y$  que nous notons  $\tilde{S}$ , est donnée par :

$$\tilde{S}(f_k) = \sum_{m=1}^{N_s} g_m^c(f_k) + \varepsilon_k$$

avec :

$$g_m^c(f_k) = \frac{A_m}{2} e^{j\varphi_m} \mathcal{F}(N_1, f_k - F_m^c) + \frac{A_m}{2} e^{-j\varphi_m} \mathcal{F}(N_1, f_k + F_m^c)$$

où  $\mathcal{F}$  est défini dans la partie IV.2 et  $\varepsilon$  représente le bruit de mesure de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ .

Sous forme matricielle, le modèle devient :

$$\tilde{S} = M \cdot \theta + \varepsilon$$

Et la minimisation du critère suivant :

$$C(\theta) = \|\tilde{S} - M \cdot \theta\|^2,$$

nous fournit l'estimation de  $\theta$  au sens des moindres carrés et l'estimateur associé :

$$\hat{\theta} = (M^H M)^{-1} M^H \tilde{S}.$$

Les performances de cet estimateur sont donc :

$$\text{Biais}\{\hat{\theta}\} = E\{\hat{\theta}\} - \theta = 0$$

$$\text{Cov}\{\hat{\theta}\} = \sigma^2 (M^H M)^{-1}$$

Dans le cas où toutes les fréquences sont choisies comme étant des fréquences d'intérêt, l'estimateur des moindres carrés est sans biais et de variance  $\sigma^2(\mathbf{M}^H\mathbf{M})^{-1}$ .

*Cas n°2 : Fréquences les plus puissantes ( $N_s < N_{smax}$ )*

Etudions à présent les performances de l'estimateur des moindres carrés lorsque nous choisissons d'estimer les paramètres associés uniquement aux fréquences les plus puissantes, c'est-à-dire lorsque  $N_s < N_{smax}$ .

Dans ce cas, l'expression de la TFD  $\tilde{S}$  du signal observé est donnée par :

$$\tilde{S}(f_k) = \sum_{m=1}^{N_s} \mathcal{G}_m^c(f_k) + \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_k) + \varepsilon_k,$$

avec :

$$\mathcal{G}_\ell^p(f_k) = \frac{A_\ell^p}{2} e^{j\varphi_\ell^p} \cdot \mathcal{F}(N_1, f_k - F_\ell^p) + \frac{A_\ell^p}{2} e^{-j\varphi_\ell^p} \cdot \mathcal{F}(N_1, f_k + F_\ell^p)$$

$$N_s < N_{smax}$$

$$N_p = N_{smax} - N_s$$

$$\mathbf{F}^c = [F_0^c, F_1^c, \dots, F_{N_s-1}^c]^T; \quad \mathbf{F}^p = [F_0^p, F_1^p, \dots, F_{N_p-1}^p]^T$$

$$\mathbf{A}^c = [A_0^c, A_1^c, \dots, A_{N_s-1}^c]^T; \quad \mathbf{A}^p = [A_1^p, A_2^p, \dots, A_{N_p-1}^p]^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}^c = [\varphi_0^c, \varphi_1^c, \dots, \varphi_{N_s-1}^c]^T; \quad \boldsymbol{\varphi}^p = [\varphi_0^p, \varphi_1^p, \dots, \varphi_{N_p-1}^p]^T$$

où  $\mathbf{F}^c$  désigne les  $N_s$  fréquences d'intérêt, et  $\mathbf{A}^c$  et  $\boldsymbol{\varphi}^c$  sont les paramètres de ces fréquences.  $\mathbf{F}^p$  représente les  $N_p$  fréquences négligées, différentes de  $\mathbf{F}^c$ , et  $\mathbf{A}^p$  et  $\boldsymbol{\varphi}^p$  sont les paramètres qui leur sont associés.

Les fréquences négligées sont désormais considérées comme celles d'un bruit déterministe.

Ainsi, le modèle devient:

$$\tilde{S}(f_k) = S(f_k) + \varepsilon_g,$$

où :

$$S(f_k) = \sum_{m=1}^{N_f} \mathcal{G}_m^c(f_k),$$

et :

$$\varepsilon_g = \varepsilon + \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_k).$$

Le bruit global  $\varepsilon_g$  est donc la somme d'un bruit aléatoire  $\varepsilon$  et d'un bruit déterministe dû aux fréquences négligées.

## V.1 Méthodologie

En réécrivant  $\tilde{\mathbf{S}}$  sous forme matricielle, on a :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{M}^c \cdot \theta^c + \varepsilon_g$$

où  $\mathbf{M}^c$  est la sous-matrice de  $\mathbf{M}$  correspondant aux fréquences sélectionnées ( $\mathbf{M}^c \subset \mathbf{M}$ ) et

$$\varepsilon_g = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_1) \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_{N_1}) \end{bmatrix} + \varepsilon = \mathbf{P} + \varepsilon$$

L'estimation de  $\theta^c$  au sens des moindres carrés nous fournit l'estimateur suivant :

$$\hat{\theta}^c = (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} \tilde{\mathbf{S}}$$

Comme précédemment, nous étudions les performances de cet estimateur en calculant ses deux premiers moments.

$$\begin{aligned} \text{Biais}\{\hat{\theta}^c\} &= \mathbb{E}\{\hat{\theta}^c\} - \theta^c = \mathbb{E}\left\{(\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} (\mathbf{M}^c \cdot \theta^c + \varepsilon_g)\right\} - \theta^c \\ &= \theta^c + (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} \mathbb{E}\{\varepsilon_g\} - \theta^c = (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} \mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{\hat{\theta}^c\} &= (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} \text{Cov}\{\varepsilon_g\} \mathbf{M}^c (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \\ &= (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} \text{Cov}\{\varepsilon\} \mathbf{M}^c (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \\ &+ (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} \text{Cov}\{\mathbf{P}\} \mathbf{M}^c (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \end{aligned}$$

Nous remarquons que le fait de négliger des fréquences introduit un biais sur l'estimation des paramètres associés aux fréquences choisies.

Ce biais est donné par:

$$\text{Biais}\{\hat{\theta}^c\} = (\mathbf{M}^{cH} \mathbf{M}^c)^{-1} \mathbf{M}^{cH} \mathbf{P}$$

où :

$$\mathbf{M}^{cH} \mathbf{P} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \mathcal{F}(N_1, f_k - F_0^c) \cdot \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_k) \right\} \\ \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \mathcal{F}(N_1, f_k + F_0^c) \cdot \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_k) \right\} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \mathcal{F}(N_1, f_k - F_{N_s-1}^c) \cdot \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_k) \right\} \\ \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \mathcal{F}(N_1, f_k + F_{N_s-1}^c) \cdot \sum_{\ell=1}^{N_p} \mathcal{G}_\ell^p(f_k) \right\} \end{bmatrix}$$

Notons toutefois qu'il existe des cas pour lesquels (sous certaines conditions) le vecteur  $M^{cHP}$  est nul, ce qui implique que le biais est nul.

*Cas idéal :*

L'expression du vecteur  $M^{cHP}$  utilise la fonction  $\mathcal{F}(N_1, f)$  qui est définie par :

$$\mathcal{F}(N_1, f) = \begin{cases} N_1 & \text{si } f = 0 \\ 0 & \text{si } f \neq 0 \end{cases}$$

De plus, les fréquences choisies étant différentes des fréquences négligées, on a :

$$F^c \cup F^p = F \text{ et } F^c \cap F^p = \emptyset.$$

Sachant cela, on en déduit qu'à chaque fois que  $\mathcal{F}(N_1, f_k - F_m^c)$  n'est pas nulle, cela implique que  $\mathcal{F}(N_1, f_k - F_\ell^p)$  ainsi que  $\mathcal{G}_\ell^p$  sont nulle. De même, lorsque  $\mathcal{F}(N_1, f_k - F_\ell^p)$  n'est pas nulle, la fonction  $\mathcal{F}(N_1, f_k - F_m^c)$  est nulle. Dans les deux cas, cela implique que le biais est nul.

Soit :

$$f_k = \pm F_m^c \Rightarrow \begin{matrix} \mathcal{F}(N_1, f_k \mp F_m^c) \neq 0 \\ f_k \neq F_\ell^p \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{F}(N_1, f_k - F_\ell^p) = 0 \Rightarrow \mathcal{G}_\ell^p(f_k) = 0 \Rightarrow \text{Biais}\{\hat{\Theta}^c\} = 0,$$

et :

$$f_k = \pm F_\ell^p \Rightarrow \begin{matrix} \mathcal{F}(N_1, f_k \mp F_\ell^p) \neq 0 \\ f_k \neq F_m^c \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{F}(N_1, f_k - F_m^c) = 0 \Rightarrow \text{Biais}\{\hat{\Theta}^c\} = 0.$$

Finalement, la condition pour que le biais soit nul est que les fréquences  $F_m^c$  ou  $F_\ell^p$  appartiennent au vecteur  $f$ , c'est-à-dire que les fréquences choisies ainsi que les fréquences négligées doivent correspondre à un nombre entier de  $\Delta f$ .

Notons que par construction, le vecteur  $f$  ainsi que le pas  $\Delta f$  dépendent de la taille de la fenêtre d'observation ( $N_1$ ). Or, en pratique nous choisissons uniquement la taille de la fenêtre d'observation. Un moyen que nous avons pour obtenir la condition nécessaire à l'annulation du biais est de choisir une fenêtre d'analyse dont la dimension correspond à un nombre entier de périodes, soit :

$$N_1 = p \frac{F_e}{F_0^c} \text{ avec } p \in \mathbb{N}$$

En effet, cela implique que :

$$F_0^c = p \frac{F_e}{N_1} = p \cdot \Delta f$$

De plus, les hypothèses de travail stipulent que les fréquences  $F$  sont des harmoniques, soit  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  :

$$F_m^c = m F_0^c = mp \Delta f$$

Donc, si  $N_1$  correspond à un nombre entier de périodes,  $F_m^c$  s'écrit comme un nombre entier de  $\Delta f$  ce qui signifie que la condition pour que le biais soit nul est vérifiée.

Finalement, nous pouvons dire que le biais introduit par les fréquences négligées est nul uniquement si nous choisissons une fenêtre d'observation dont la longueur est égale à un nombre entier de périodes.



## V.1 Méthodologie

Dans le cadre des signaux traités la fréquence fondamentale est supposée être égale à 50Hz. Afin d'avoir une fenêtre d'observation correspondant à un nombre entier de périodes, nous avons choisi  $N_1 = 1000$  points. En effet :

$$N_1 = p \cdot \frac{F_e}{F_0^c} \Leftrightarrow 1000 = p \cdot \frac{2000}{50} \Leftrightarrow p = 25$$

$p$  est bien un nombre entier et :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(N_1, f_k - F_0^c) &= \frac{\sin(N_1 \cdot \pi(f_k - F_0^c)\Delta t)}{\sin(\pi(f_k - F_0^c)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(k-p)N_1\Delta f\Delta t} \\ &= \frac{\sin(N_1 \cdot \pi(k-1-p)\Delta f\Delta t)}{\sin(\pi(k-1-p)\Delta f\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(k-p)N_1\Delta f\Delta t} \\ &= \frac{\sin(\pi(k-1-p))}{\sin\left(\frac{\pi(k-1-p)}{N_1}\right)} \cdot e^{-j\pi(k-p)N_1\Delta f\Delta t} = \begin{cases} N_1 & \text{si } k-1 = 25 \\ 0 & \text{si } k-1 \neq 25 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fenêtre d'observation nous permet donc de faire en sorte que le biais introduit par les fréquences négligées soit nul lorsque  $F_0^c = 50\text{Hz}$ . Or, n'oublions pas qu'en réalité la fréquence peut varier entre 49.5 et 50.5Hz, ce qui nous amène à étudier ces cas dans le paragraphe suivant.

*Autres cas :*

Les autres cas correspondent aux cas où les fréquences ne sont plus des nombres entiers de  $\Delta f$ . En effet, la fréquence d'échantillonnage et de la taille de la fenêtre d'analyse étant fixées, lorsque la fréquence varie, il y a de fortes chances pour que la condition précédente ne soit plus vérifiée.

Dans ce cas, on a :

$$F_0^c = (p + \Delta p) \cdot \Delta f \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < \Delta p < 1$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(N_1, f_k - F_0^c) &= \frac{\sin(N_1 \cdot \pi(f_k - F_0^c)\Delta t)}{\sin(\pi(f_k - F_0^c)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(k-p)N_1\Delta f\Delta t} \\ &= \frac{\sin(N_1 \cdot \pi(k-1-(p+\Delta p))\Delta f\Delta t)}{\sin(\pi(k-1-(p+\Delta p))\Delta f\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(k-p)N_1\Delta f\Delta t} \\ &= \frac{\sin(\pi(k-1-(p+\Delta p)))}{\sin\left(\frac{\pi(k-1-(p+\Delta p))}{N_1}\right)} \cdot e^{-j\pi(k-p)N_1\Delta f\Delta t} \neq 0. \end{aligned}$$

Cela implique que les relations précédentes deviennent :

$$f_k \neq \pm F_m^c \Rightarrow f_k \neq F_\ell^p \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{F}(N_1, f_k \mp F_m^c) &\neq 0 \\ \mathcal{F}(N_1, f_k - F_\ell^p) &\neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{Biais}\{\hat{\Theta}^c\} \neq 0,$$

et :

$$f_k \neq F_\ell^p \Rightarrow f_k \neq \pm F_m^c \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{F}(N_1, f_k \mp F_\ell^p) &\neq 0 \\ \mathcal{F}(N_1, f_k - F_m^c) &\neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{Biais}\{\hat{\Theta}^c\} \neq 0.$$

Ainsi, lorsque la taille de la fenêtre d'observation ne correspond pas à un nombre entier de périodes, le biais introduit par les fréquences négligées n'est pas nul.

**Illustration : cas  $N_s = N_{s_{\max}}$  vs. cas  $N_s < N_{s_{\max}}$**

Dans le but de vérifier ce qui vient d'être dit, nous allons comparer les performances de l'estimateur dans le cas où l'on ne néglige aucune fréquence  $N_s = N_{s_{\max}}$  et dans le cas où l'on néglige certaines fréquences  $N_s < N_{s_{\max}}$ .

Etudions les performances en se plaçant dans les vraies conditions d'application, avec une fenêtre d'analyse de 1000 échantillons. D'après le producteur d'électricité, la fréquence fondamentale  $F_0$  peut varier dans l'intervalle  $[49.5, 50.5]$ Hz. Nous allons donc, pour chaque valeur que peut prendre  $F_0$ , estimer les paramètres d'intérêt et calculer le biais et la variance de l'estimateur. Nous pourrions alors quantifier le biais introduit par les fréquences négligées et aussi vérifier si la condition « biais nul si la longueur de la fenêtre d'observation est un nombre entier de périodes » est vraie.

Pour cela, nous simulons un signal échantillonné à la fréquence  $F_e = 2000$  Hz, contenant quatre fréquences  $F_0, F_1, F_2,$  et  $F_3$ , d'amplitudes  $A = [100, 1, 1, 1]$  et les phases  $\varphi = [90, 60, 36, 45]^\circ$  avec :  $F_1 = 3 \times F_0, F_2 = 7 \times F_0, F_3 = 9 \times F_0$ . Le signal est perturbé par un bruit aléatoire et le rapport signal sur bruit (RSB) est d'environ 50 dB. Pour cet exemple, nous avons choisi un RSB favorable car cela correspond à la réalité.

**Remarque :** *Le calcul du RSB prend en compte toutes les fréquences.*

*Première situation :*

Dans un premier temps, nous estimons les paramètres associés à toutes les fréquences présentes dans le signal, soit  $F^c = [F_0, F_1, F_2, F_3]$ .

Dans un second temps, nous estimons uniquement les paramètres associés à la fréquence la plus puissante, soit  $F^c = [F_0]$ . Ce choix est guidé par la réalité car en pratique les fréquences négligées sont au minimum cent fois moins puissantes que la fréquence fondamentale.

Nous retrouvons le résultat de l'estimation, dans les deux cas précités, sur les figures V.1 et V.2.

La figure V.1 montre le biais et la variance de l'estimateur de l'amplitude associée à la fréquence  $F_0$  pour le premier cas (trait plein bleu) et le second (pointillés rouge).

La figure V.2 montre le biais et la variance de l'estimateur de la phase associée à la fréquence  $F_0$  pour le premier cas (trait plein bleu) et le second (pointillés rouge).

Nous constatons que lorsque toutes les fréquences présentes sont choisies comme fréquences d'intérêt, le biais est faible quel que soit  $F_0$ . Ces résultats corroborent la théorie dans le sens où nous remarquons qu'il n'y a aucune contrainte sur la dimension de la fenêtre d'observation pour que l'estimateur soit sans biais.

Concernant le cas où les fréquences de faible puissance sont négligées, nous remarquons qu'il existe effectivement un biais sur l'estimation des paramètres (amplitude et phase) associés à la fréquence d'intérêt. Cet exemple confirme également que le biais est nul lorsque la fenêtre d'observation contient un nombre entier de périodes.

## V.1 Méthodologie

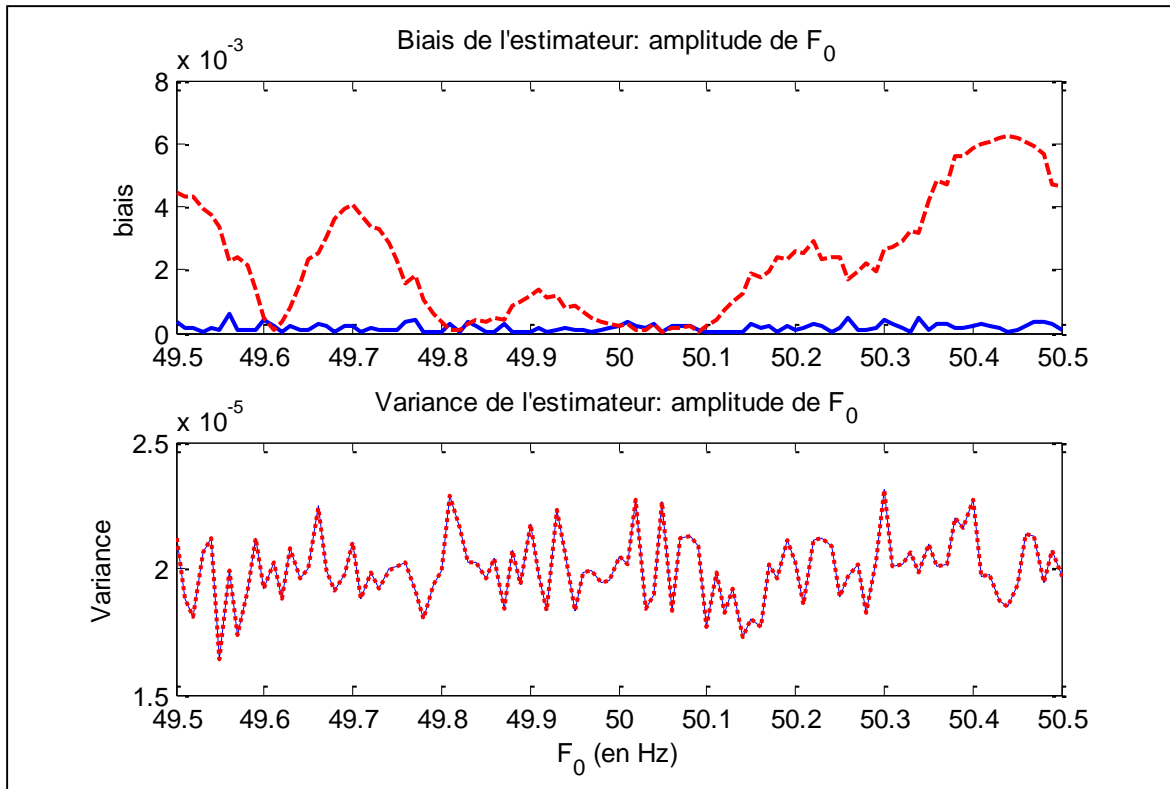


Figure V.1 : Biais et variance de l'estimateur de l'amplitude de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (trait plein bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (pointillé rouge)

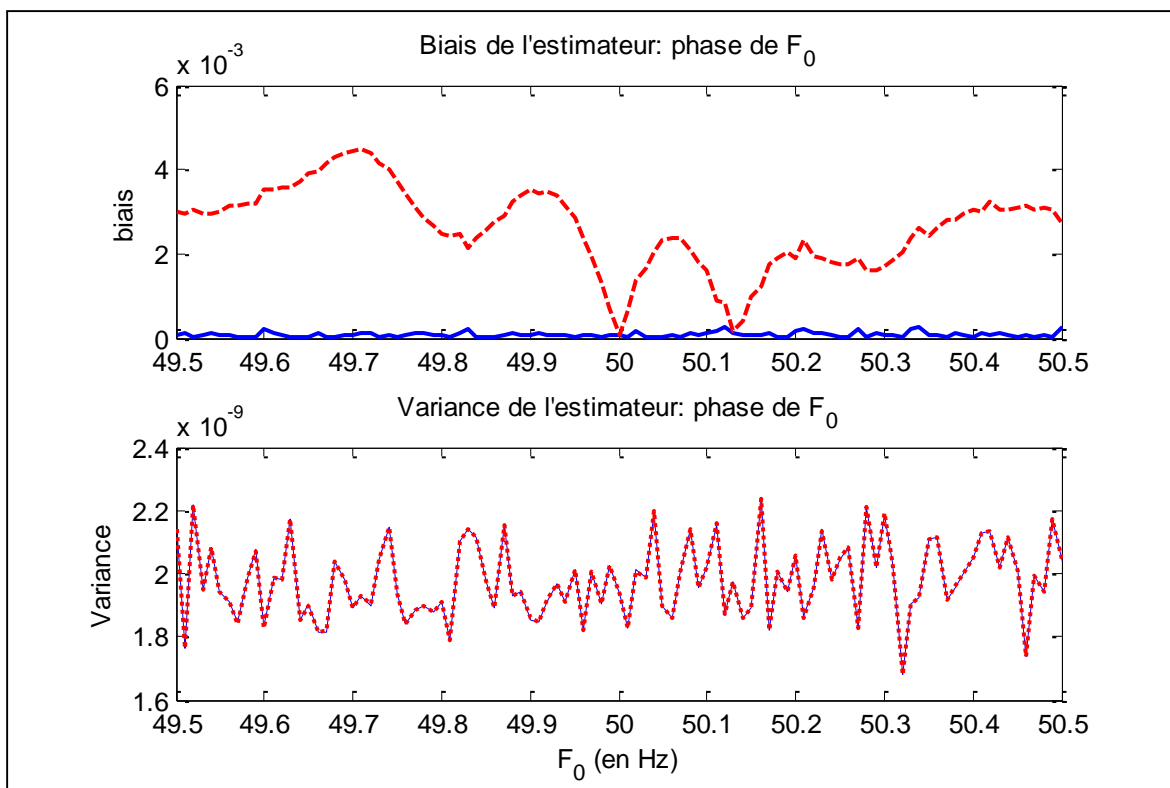


Figure V.2 : Biais et variance de l'estimateur de la phase de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (en bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (en rouge)

Dans cet exemple, le biais est compris entre 0 et  $6.10^{-3}$  ce qui est tout de même très faible, voire négligeable, devant la valeur de la fréquence d'intérêt. Notons que ceci n'est pas vrai quelle que soit la fréquence d'intérêt. En effet, ici, compte tenu des faibles amplitudes des fréquences négligées le biais est négligeable. Ceci est souvent vrai pour la fréquence fondamentale car son amplitude est très grande devant les autres mais ce n'est pas le cas pour les autres fréquences que nous aurions éventuellement choisies.

Sur les figures V.1 et V.2 nous remarquons que les courbes représentant la variance de l'estimateur se superposent. Ces figures nous permettent donc de vérifier que le fait de négliger des fréquences n'avait aucune influence sur la variance de l'estimateur.

Cet exemple nous a permis de confirmer que le fait de négliger certaines fréquences introduisait un biais sur l'estimation des paramètres d'intérêt mais que la variance de l'estimateur n'est pas modifiée. De plus, cela nous a permis de valider le fait que lorsque la longueur de la fenêtre d'observation correspond à un nombre entier de périodes, il n'y a plus de biais.

Dans l'exemple présenté ci-dessus, nous avons supposé que les fréquences négligées étaient d'amplitudes faibles devant les amplitudes des fréquences d'intérêt. Or, durant le traitement dans le temps, l'ordre des amplitudes des fréquences peut changer, notamment à cause des phénomènes de non linéarités. En effet, certains systèmes présents sur les réseaux électriques peuvent introduire des non linéarités (cf. chapitre II). Ces phénomènes se traduisent de différentes manières, par :

- la modification des fréquences existantes avec des poids différents.
- l'apparition de nouvelles fréquences, c'est-à-dire des fréquences qui jusqu'alors avaient une amplitude quasi-nulle et qui maintenant ont une amplitude non négligeable.

Ces phénomènes pourraient impliquer que des fréquences négligées deviennent « sélectionnables », c'est-à-dire que leur amplitude devienne du même ordre de grandeur que les fréquences sélectionnées. Dans ce cas, les fréquences négligées introduisent un biais bien plus grand que ce à quoi nous nous attendons.

### *Seconde situation :*

Afin d'illustrer notre propos, reprenons la simulation précédente en modifiant les amplitudes des fréquences négligées de manière à reproduire ces phénomènes de non linéarités. Maintenant, il apparaît, à cause d'un phénomène quelconque, que l'amplitude d'une des fréquences passe de 1 à 10, soit :  $A = [100, 1, 10, 1]$ . Or elle fait partie des fréquences négligées, donc on continue de la négliger.

Les figures V.3 et V.4 montrent le biais et la variance de l'estimateur de l'amplitude et de la phase associée à la fréquence  $F_0$  avec les deux mêmes scénarios que précédemment.

Le biais s'annule lorsque la fenêtre d'observation contient un nombre entier de périodes. Cependant, on remarque également que suite à ces phénomènes de non linéarité, le biais introduit par les fréquences négligées est bien plus grand qu'auparavant. En revanche, cela n'a, toujours, aucune influence sur la variance.

## V.1 Méthodologie

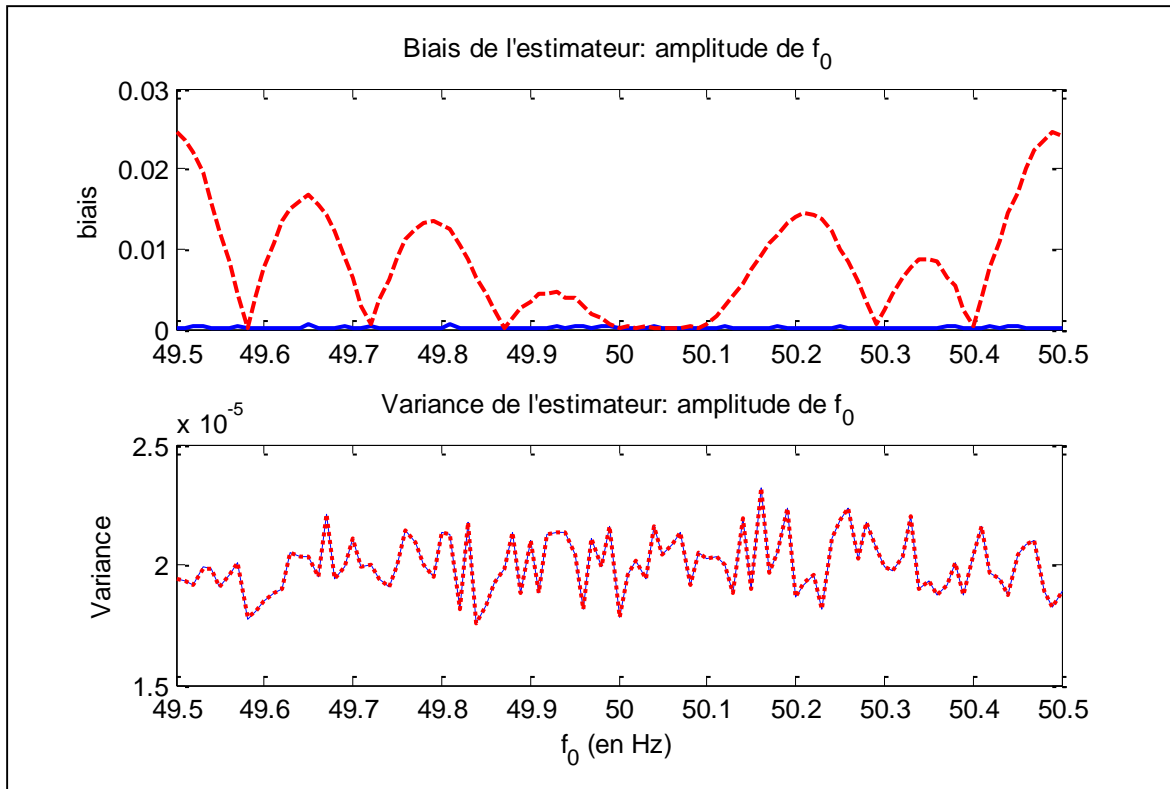


Figure V.3 : Biais et variance de l'estimateur de l'amplitude de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (trait plein bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (pointillé rouge)

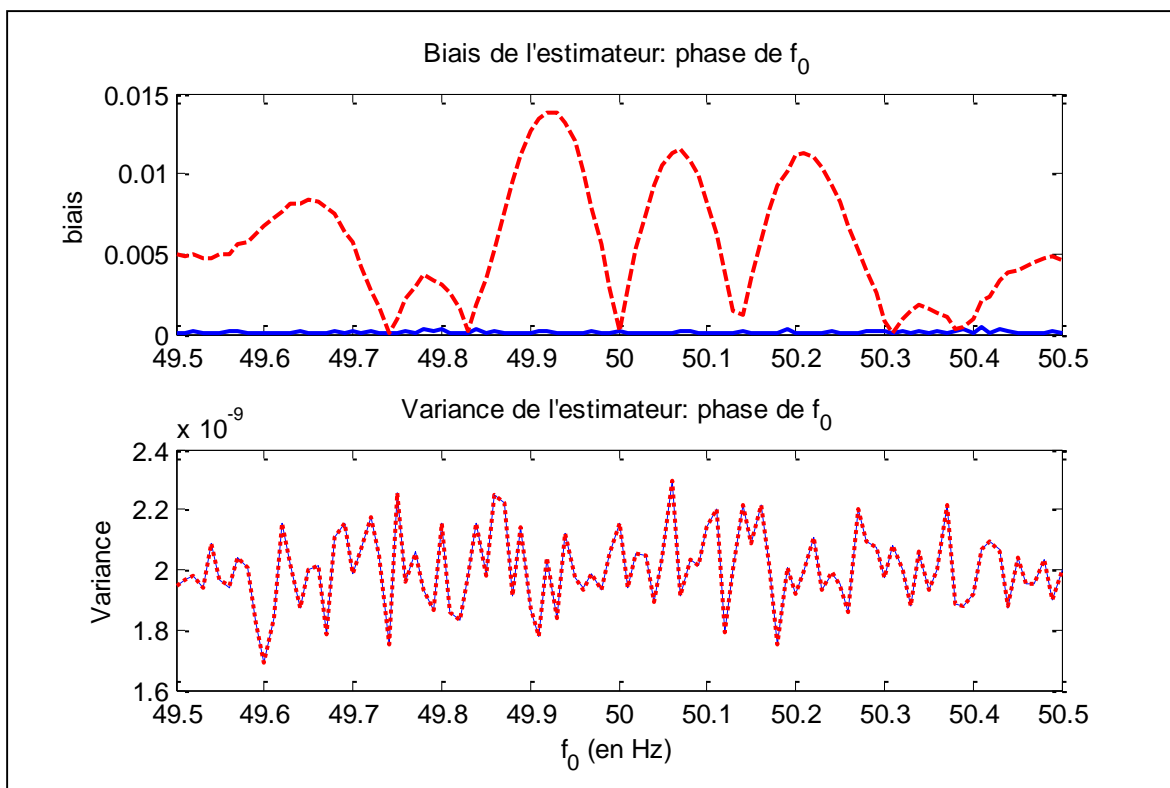


Figure V.4 : Biais et variance de l'estimateur de la phase de la première fréquence d'intérêt lorsque toutes les fréquences sont choisies (en bleu) et lorsque nous choisissons uniquement la première fréquence (en rouge)

En réalité, suite à la succession d'évènements qui se produisent sur le courant, ce biais va évoluer de manière significative. Ceci peut avoir un effet néfaste, dans le sens où, les paramètres estimés pour deux évènements causés par la même charge électrique et ayant lieu à des instants différents pourraient être très différents. Ceci pourrait entraîner des difficultés à la classification car les paramètres extraits ne nous permettraient plus de caractériser la charge électrique. Cela signifie que plus le biais évolue et moins les paramètres caractéristiques sont discriminants.

Exemple : Dans la réalité, on étudie un réseau électrique sur lequel sont branchés de nombreux appareils. Imaginons, par exemple, que l'on souhaite étudier la consommation électrique d'un local dans lequel il y a de l'éclairage, du chauffage, des ordinateurs, des moteurs, des chambres froides, etc.... Durant le traitement, tous ces appareils seront mis en fonctionnement et en arrêt.

Tout d'abord, nous sélectionnons les fréquences d'intérêt, lors de l'initialisation. Le premier évènement que l'on détecte est l'allumage d'un chauffage ; on construit le vecteur d'information lié à cet évènement et qui va être caractéristique du chauffage. Notons qu'il existe un léger biais lié aux fréquences négligées. Le traitement continue et à un moment donné, tous les appareils présents dans le local sont en fonctionnement. Le chauffage s'éteint ; s'en suit l'étape d'extraction du vecteur d'information lié à cet évènement. Or, à cet instant, la puissance consommée par l'installation est nettement plus grande qu'au moment où le chauffage s'est mis en route. Ceci implique, naturellement, que la puissance des fréquences négligées ainsi que le biais qu'elles introduisent a également augmentée. Les paramètres estimés étant plus biaisés qu'auparavant, le vecteur d'informations ne correspond plus au vecteur construit lors de l'allumage du chauffage. Cette différence ne nous permettra pas d'associer ces deux évènements à un même appareil, en l'occurrence le chauffage. La variabilité du vecteur d'information contribue à diminuer sa capacité à discriminer les évènements. Cette situation illustre bien le fait que l'évolution du biais va de pair avec la diminution du pouvoir discriminant des paramètres caractéristiques.

### Solution

Afin de contrer ce phénomène, il faut, d'une manière ou d'une autre, tenir compte de ces fréquences négligées dont l'amplitude devient grande.

Une première idée serait d'effectuer l'estimation des paramètres associés à toutes les fréquences existantes. En effet, nous avons prouvé, dans cette partie, que lorsque  $F^c = F$  l'estimateur des moindres carrés est sans biais. Certes, ceci permet d'obtenir des estimations non biaisées, mais elle nécessite un temps de calcul beaucoup plus important.

Une autre idée serait de ré-effectuer une sélection des fréquences à la suite de chaque transition rencontrée. Nous avons pu voir grâce aux figures V.1 et V.2 que le biais est assez faible malgré le fait que certaines fréquences aient été négligées, tandis que sur les figures V.3 et V.4 le biais est plus important. Le cas le plus problématique nous concernant est le second, c'est-à-dire lorsque, compte tenu de certains phénomènes, certaines fréquences qui ont été négligées lors de l'initialisation deviennent non négligeables. Ainsi, effectuer une sélection des fréquences d'intérêt après chaque transition permettra de tenir compte de ces nouvelles fréquences (fréquences qui deviennent sélectionnables). Cela permettrait de minimiser, ou du moins garder stable, le biais sur l'estimation.

## Concernant la détection

Etudions à présent l'influence du choix des fréquences sur l'étape de détection.

### Problème

Comme remarqué précédemment, le choix des fréquences d'intérêt  $F^c$  implique que les fréquences négligées  $F^p$  se comportent comme un bruit déterministe. Ainsi, l'erreur de prédiction  $E_1$  qui jusqu'à présent, sur les états stationnaires, correspondait à l'erreur d'estimation, contiendra maintenant le résidu de l'estimation auquel vient s'ajouter ce bruit déterministe. Cela implique qu'à la norme de l'erreur, qui auparavant était proche de zéro (cf. figure IV.22), s'ajoutent celles des erreurs liées à toutes les fréquences négligées. Et, dans le pire des cas, ces résidus augmentent avec le nombre d'appareils en fonctionnement.

Rappelons que  $E_1$  représente l'erreur de prédiction, c'est-à-dire l'écart entre la TFD  $\tilde{S}$  du signal observé et la TFD prédite  $\hat{S}^1$  du signal à partir de l'estimation faite à l'instant précédent, soit :

$$E_1(f_k, \tau_n) = \tilde{S}(f_k, \tau_n) - \hat{S}^1(f_k, \tau_n | \tau_{n-1}).$$

Voyons comment évolue  $E_1$  en fonction des fréquences choisies :

- si toutes les fréquences sont considérées comme étant d'intérêt on a  $N_s = N_{s_{max}}$ , ce qui signifie que :

$$\tilde{S}(f_k, \tau_n) = S^1(f_k) + \varepsilon_k = \sum_{m=1}^{N_s} \varphi_m^c(f_k) + \varepsilon_k,$$

et donc :

$$E_1(f_k, \tau_n) = \{S^1(f_k) - \hat{S}^1(f_k, \tau_n | \tau_{n-1})\} + \varepsilon_k \cong \varepsilon_k.$$

Nous constatons que dans ce cas, l'erreur  $E_1$  se compose du bruit de mesure (aléatoire) et du résidu de l'estimation. La puissance du bruit n'étant pas supposée évoluer dans le temps, l'erreur  $E_1$  est à peu près la même sur chaque état stationnaire.

- si seulement certaines fréquences sont sélectionnées, on a  $N_s < N_{s_{max}}$  et  $N_p \neq 0$ , soit :

$$\tilde{S}(f_k, \tau_n) = S^1(f_k) + \sum_{\ell=1}^{N_p} \varphi_{\ell}^p(f_k) + \varepsilon_k,$$

d'où :

$$E_1(f_k, \tau_n) = \{S^1(f_k) - \hat{S}^1(f_k, \tau_n | \tau_{n-1})\} + \sum_{\ell=1}^{N_p} \varphi_{\ell}^p(f_k) + \varepsilon_k.$$

Cette fois, l'erreur  $E_1$  se compose du bruit de mesure (aléatoire), du résidu de l'estimation et d'un bruit déterministe introduit par les fréquences négligées. Sachant que d'un état à un autre les amplitudes associées aux  $N_p$  fréquences négligées évoluent, cela a une influence directe sur l'évolution de  $E_1$ . De ce fait, lorsque les amplitudes augmentent,  $E_1$  augmente également. De plus, notons que ces évolutions sont d'autant plus fortes en présence de phénomènes de non linéarité car l'amplitude des fréquences négligées, supposée faible, peut devenir grande.

Donc, théoriquement, si l'on choisit d'estimer les paramètres associés à toutes les fréquences présentes, l'erreur de prédiction  $E_1$  est à peu près la même et sa norme est proche de zéro, sur chaque état stationnaire. Par conséquent, il est possible d'avoir un seuil fixe.

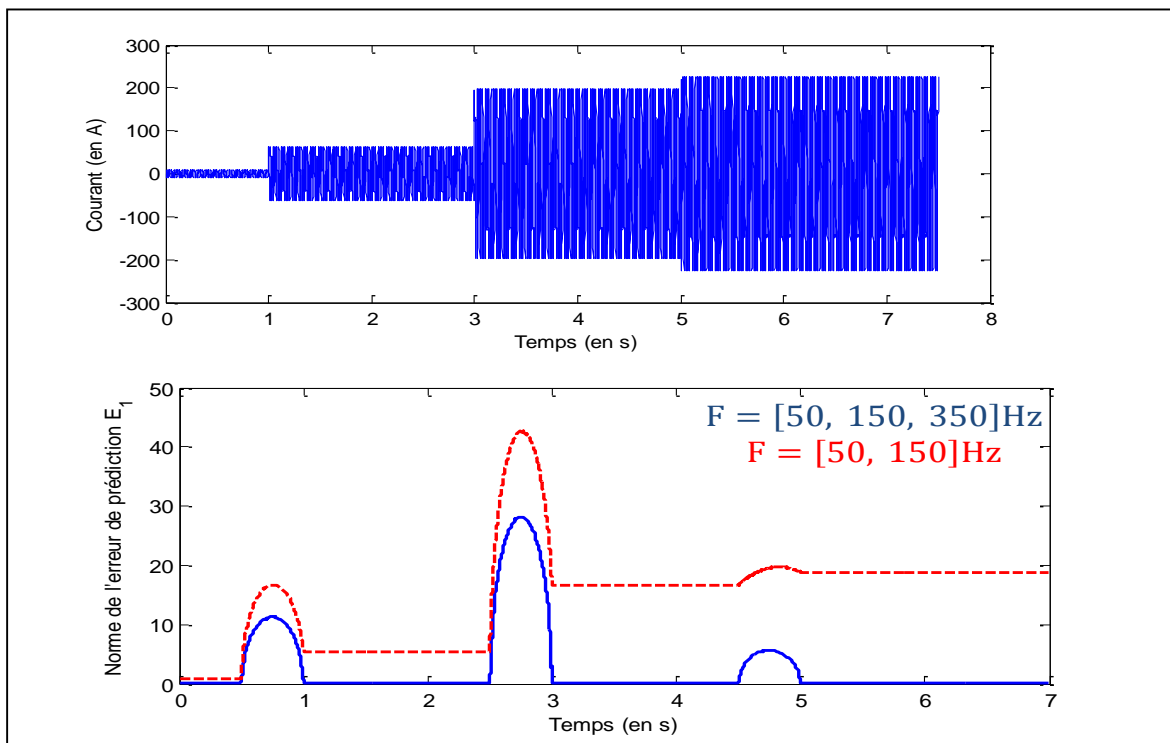
Mais, si l'on sélectionne uniquement les fréquences les plus puissantes,  $E_1$  dépend de toutes les fréquences négligées. Cela implique que  $E_1$  (et donc  $\|E_1\|$ ) peut être très différent d'un état à un autre. Cette évolution rend impossible l'utilisation d'un seuil fixe sous peine de déclencher des fausses alarmes. Le fait de choisir certaines fréquences nous contraint à l'utilisation d'un seuil variable.

La figure V.5 illustre ce phénomène. Elle représente l'évolution de  $\|E_1(f, \tau)\|$  pour les deux cas cités : on estime les paramètres associés à toutes les fréquences présentes (trait plein bleu) ou seulement les fréquences les plus puissantes (pointillés rouge). Pour cela, nous simulons un signal de tension tel que :

$$F = [50, 150, 350]\text{Hz}, A_u = [230, 18, 32]\text{V} \text{ et } \varphi_u = [0^\circ, 60^\circ, 36^\circ].$$

Ensuite, nous simulons un courant tel que : une première résistance  $r_1 = 30 \Omega$  est en fonctionnement durant toute la durée du signal. A partir de 1s, une résistance  $r_2 = 5 \Omega$  s'allume, à 3s une résistance  $r_3 = 2 \Omega$  s'allume et enfin à 5s une résistance  $r_4 = 10 \Omega$  s'allume.

La courbe bleue représente le cas où  $F^c = F$  et la courbe rouge représente le cas où  $F^c = [50, 150]\text{Hz}$ .



On voit immédiatement que l'amplitude des résidus, dans les zones stationnaires, est beaucoup plus faible dans le premier cas (trait plein) que dans le deuxième (pointillé). Ainsi, la figure V.5 confirme que, lorsque certaines fréquences sont négligées, plus le nombre de charges en fonctionnement est grand plus la norme des résidus augmente. Ceci pourrait nous contraindre à utiliser un seuil adaptatif.



**Remarque :** nous n'avons pas représenté l'évolution de  $\|E_2(f, \tau)\|$  car elle évolue de la même manière que  $\|E_1(f, \tau)\|$ .

Notons que l'algorithme de détection développé dans le chapitre IV considère un seuil fixe. De plus, compte tenu des caractéristiques que l'on souhaite extraire, l'utilisation d'un seuil adaptatif est problématique. Prenons par exemple la durée de la transition qui est obtenue à partir de l'estimation de l'instant de début et l'instant de fin de transition. Les instants de transition sont estimés à partir du moment où l'algorithme de détection considère avoir atteint un nouvel état permanent, c'est-à-dire lorsque la norme de l'erreur est en dessous du seuil choisi. Il est donc évident que si le seuil change, les instants de transitions ne suivent plus le même critère. Par suite, les durées des transitions estimées correspondant à deux événements induits par une même charge électrique, risquent d'être différentes, ce qui implique que la durée de transition ne permet plus de caractériser la charge. C'est pourquoi, dans notre cas, l'utilisation d'un seuil adaptatif est à proscrire.

### Solution

En conclusion, nous sommes contraints, malgré l'influence néfaste des fréquences négligées, de modifier l'algorithme de détection de manière à garder un seuil fixe.

Une solution évidente serait d'effectuer l'estimation des paramètres associés à toutes les fréquences existantes (*i.e.*  $F^c = F$ .) pour ensuite ne garder que les paramètres associés aux fréquences qui nous intéressent. Cette solution permet de garder un seuil constant mais elle entraîne une augmentation importante du temps de calcul.

Le problème est le suivant : le fait de négliger certaines fréquences permet un temps de calcul plus rapide, mais nécessite un seuil de détection variable alors que le fait de choisir toutes les fréquences augmente le temps de calcul, mais permet un seuil de détection fixe. Ces deux propositions ne conviennent pas.

Une autre alternative permettant de garder un seuil fixe serait de modifier le critère de détection, plus précisément d'appliquer un seuil non plus sur  $\|E_1(f, \tau)\|$  mais sur une fonction de  $\|E_1(f, \tau)\|$  qui serait nulle, ou presque, sauf pour les zones transitoires. Au vu de l'évolution de la norme de l'erreur  $E_1(f, \tau)$  (cf. figure V.5), nous remarquons qu'elle est constante durant les états stationnaires et qu'elle varie uniquement lors des états transitoires. L'idée serait donc de comparer la dérivée de  $\|E_1(f, \tau)\|$  au seuil de détection car théoriquement elle devrait être nulle (ou presque) partout sauf dans les zones où il y a une transition.

Afin de vérifier cette théorie, nous représentons dans la figure V.6 l'évolution de la dérivée de  $\|E_1(f, \tau)\|$ .

Cette figure nous permet de remarquer que malheureusement la dérivée ne se comporte pas comme nous l'attendions. Elle est effectivement nulle durant les phases stationnaires cependant durant les phases transitoires, bien qu'elle ne doive pas, elle s'annule souvent.

La figure V.7, montre un zoom de l'évolution de la norme de l'erreur de prédiction. Et comme nous pouvons le voir, en présence d'une transition,  $\|E_1(f, \tau)\|$  augmente par paliers, ce qui explique que la dérivée s'annule régulièrement.

Par conséquent, compte tenu de la forme de  $\|E_1(f, \tau)\|$  quand il y a une transition, cette solution ne peut être envisagée.

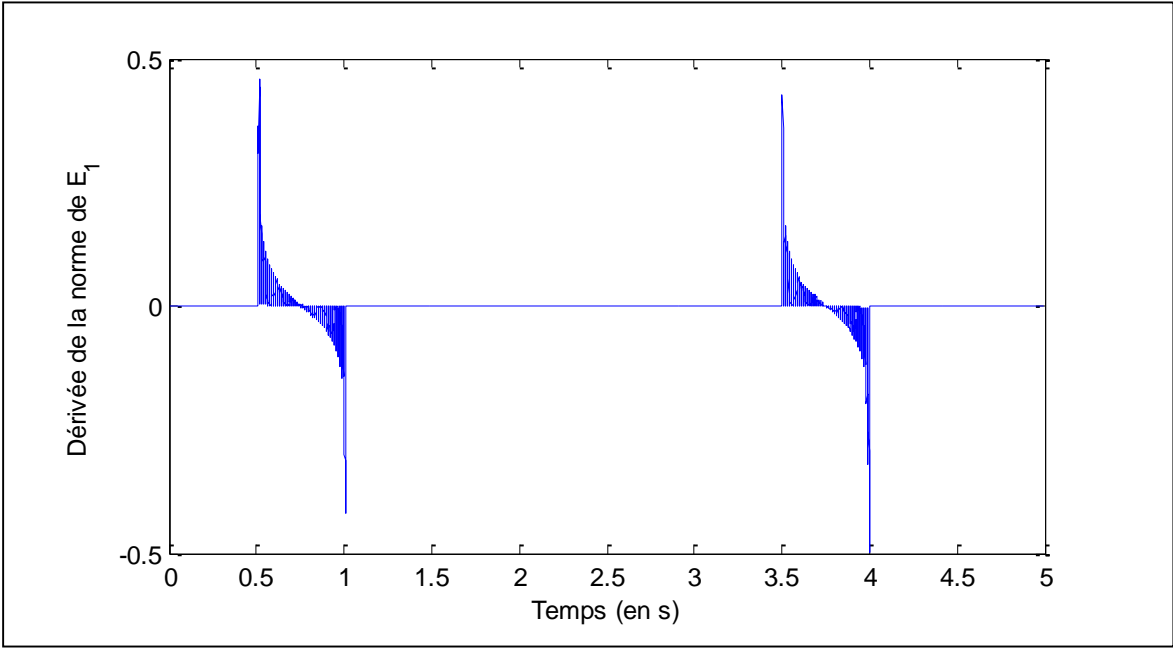


Figure V.6 : Evolution de la dérivée de  $\|E_1(f, \tau)\|$

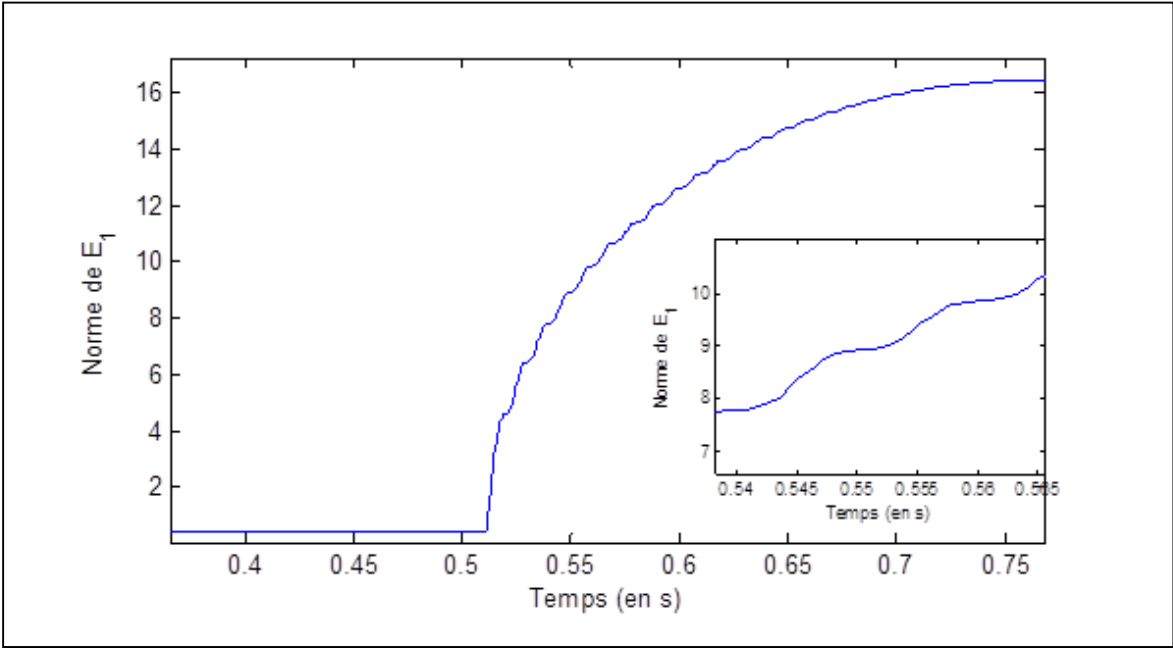


Figure V.7 : Zoom sur l'évolution de  $\|E_1(f, \tau)\|$

Compte tenu des inconvénients des solutions précédentes, nous proposons l'alternative suivante : on fixe un seuil et dès lors qu'une transition est détectée on effectue une sélection des fréquences. Cela nous permettra de tenir compte des fréquences qui deviendraient éventuellement sélectionnables. Ainsi, cette solution nous permet de garder un seuil constant sans pour autant augmenter de manière significative le temps de calcul.

## Synthèse

Dans cette partie, nous avons étudié l'influence du choix des fréquences d'intérêt sur la qualité de l'estimation des paramètres d'intérêt ainsi que sur la qualité de la détection.

Tout d'abord, nous avons vu que le fait de choisir certaines fréquences et pas d'autres faisait apparaître un biais sur l'estimation. Ce biais est d'autant plus grand que la puissance des fréquences négligées est grande.

Concernant la détection, le fait que les fréquences négligées se retrouvent dans les résidus nous oblige à choisir un seuil variable. Or, cette option présente le risque de rendre non discriminant les paramètres d'intérêt.

Etant donnée l'influence néfaste engendrée par le choix des fréquences d'intérêt, tant sur l'estimation que sur la détection, il nous fallait tenir compte de ces fréquences négligées.

Nous proposons un certain nombre d'alternatives à ce problème dont deux sont envisageables.

La première consiste à constamment effectuer l'estimation des paramètres associés à toutes les fréquences présentes pour ensuite ne garder que les paramètres associés aux fréquences qui nous intéressent. Cette solution nous permet effectivement d'avoir des estimations non biaisées et également d'utiliser un seuil constant. Cependant elle entraîne une augmentation importante du temps de calcul ainsi qu'un nombre très important de données non pertinentes à stocker.

Finalement, nous avons abouti à la solution qui, dans notre cas d'étude, est la mieux adaptée à nos contraintes et nos objectifs. Elle consiste à sélectionner les fréquences d'intérêt lors de l'initialisation et ensuite, à effectuer une sélection des fréquences d'intérêt à chaque transition détectée. Ceci permet de minimiser le biais sur l'estimation ainsi que l'erreur de prédiction. Ainsi, cette solution permet d'avoir des estimations précises et de garder un seuil constant sans pour autant augmenter de manière significative le temps de calcul.

### **V.1.3 Algorithme proposé**

Nous reprenons ici l'idée générale de l'algorithme final mais en tenant compte, cette fois, de certaines hypothèses sur les signaux traités et des conclusions faites lors de l'analyse de l'influence du choix des fréquences d'intérêt.

Tout d'abord, l'étape de sélection des fréquences d'intérêt sera effectuée, non seulement lors de l'initialisation, mais également à chaque transition détectée. Ceci nous permet de minimiser l'influence néfaste, constatée dans la partie précédente, des fréquences négligées. Ainsi, cette mise à jour des fréquences les plus puissantes nous permet d'avoir des estimations précises et de garder un seuil constant sans pour autant augmenter de manière significative le temps de calcul. Pour cela, nous utiliserons un drapeau (flag) binaire, initialisé à 0. La valeur 0, par défaut, est prise tant que nous sommes sur un état stationnaire ; cela signifie que si une transition est détectée il faut effectuer la sélection des fréquences d'intérêt. A contrario, la valeur 1 est prise lorsque nous sommes sur un état transitoire, et donc qu'il ne faut pas, ou plus, effectuer la sélection des fréquences. En fait, si le flag vaut 0 lorsque la première règle de décision ( $\|E_1(f, \tau_n)\| > \lambda$ ) est validée, cela signifie que c'est la première fois que nous rencontrons cette transition ; à cet instant, on effectue la sélection (la mise à jour) des fréquences d'intérêt et fixe la valeur du flag à 1. Lorsque le flag vaut 1, durant toute la phase transitoire, nous n'effectuons plus la sélection des fréquences. Puis à la fin de la transition c'est-à-dire lorsque le critère de détection est validé, on réinitialise la valeur du flag à 0.

Concernant le temps de calcul, il est aisé de constater que l'algorithme présenté en V.1.1 est très couteux. Notons toutefois qu'il est nécessaire de l'utiliser dans cette version dans le cas général, c'est-à-dire lorsque nous considérons que les signaux étudiés ne sont pas parfaitement stationnaires. Nous comprenons donc que la rapidité de calcul de cet algorithme peut être grandement améliorée en fonction des hypothèses de départ. En effet, dans la majorité des cas la tension est supposée stationnaire, de même que le courant en dehors des états transitoires (en régime permanent). Sous ces hypothèses, nous remarquons que de nombreux calculs deviennent inutiles, notamment en ce qui concerne les estimations. En effet, en ce qui concerne la tension par exemple, nous remarquons que pour chaque fenêtre d'observation l'algorithme effectue l'estimation des paramètres  $\{A_u, \varphi_u\}$  alors que l'hypothèse de stationnarité implique que les valeurs de  $\{A_u, \varphi_u\}$  sont identiques quelle que soit la fenêtre d'observation<sup>5</sup>. De ce fait, il suffirait d'estimer une seule fois ces paramètres, lors de l'initialisation puis de simplement incrémenter la phase. Le constat est identique en ce qui concerne le courant. La seule différence réside dans le fait que le courant contient des transitions, et que par conséquent l'initialisation seule n'est pas suffisante. Pour les états stationnaires, on effectue l'estimation des paramètres  $\{A_i^1, \varphi_i^1\}$  une seule fois au début de chaque état, c'est-à-dire lors de l'initialisation puis à chaque fin de transition (à chaque nouvel état stationnaire). De même pour les phases transitoires, l'estimation des paramètres  $\{N_2, A_i^2, \varphi_i^2\}$  s'effectue uniquement à l'instant où la transition est détectée, ensuite il suffit de conserver les estimations de  $\{A_i^2, \varphi_i^2\}$  et d'incrémenter  $N_2$  d'un point. Notons que cela sera suffisant si l'état  $.^2$  est un état stationnaire, c'est-à-dire dans le cas d'une transition courte. Cependant, dans le cas d'une transition longue, l'état n'étant pas stationnaire durant la phase transitoire l'algorithme estimera simplement les paramètres  $\{N_2, A_i^2, \varphi_i^2\}$ .

---

<sup>5</sup> N'oublions pas cependant que  $\varphi_u$  évolue en fonction de l'emplacement de la fenêtre d'observation, telle que :  $\{\varphi_u\}_{\tau_n} = \{\varphi_u\}_{\tau_{n-1}} + 2\pi \frac{F_0}{F_e}$ .

## V.1 Méthodologie

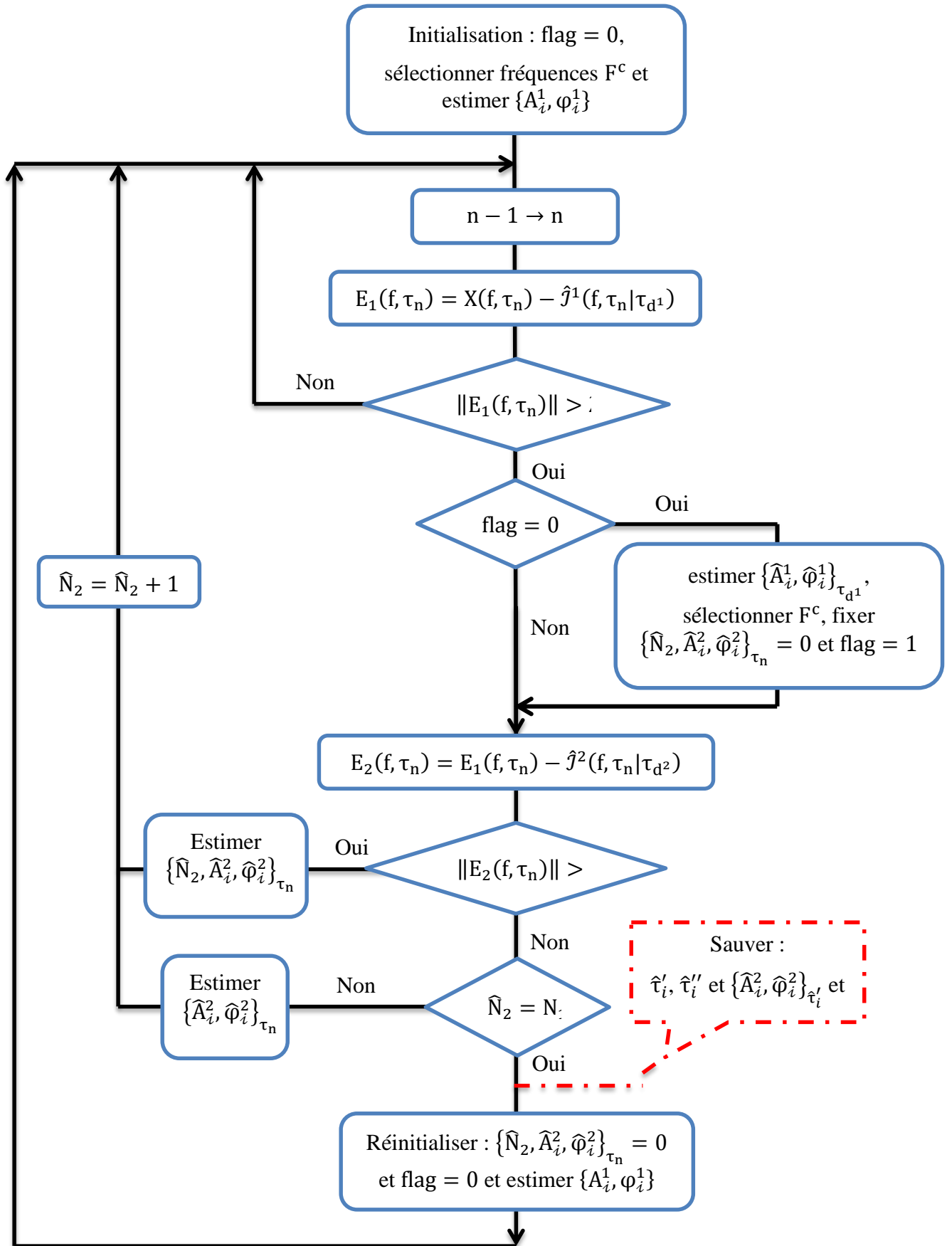
Finalement, il est aisé de constater que le fait de tenir compte des hypothèses de stationnarité permet de réduire grandement le nombre d'estimations et donc d'avoir un algorithme beaucoup moins coûteux en temps de calcul.

Synthèse :

Deux stratégies possibles :

- 1) on effectue constamment l'estimation de  $\{A_u, \varphi_u\}$  et  $\{A_i^1, \varphi_i^1\}$  dans les zones stationnaires (stables) et  $\{A_i^2, \varphi_i^2\}$  dans les zones transitoires,
- 2) on effectue l'estimation de  $\{A_u, \varphi_u\}$  et  $\{A_i^1, \varphi_i^1\}$  uniquement au début des zones stationnaires et juste avant les transitions détectées et on estime  $\{A_i^2, \varphi_i^2\}$  uniquement au début des zones transitoires.

Le schéma ci-dessous représente donc la version finale de l'architecture de l'algorithme proposé.



## V.2 Identification

Dans cette partie, nous appliquons l'algorithme présenté précédemment afin de vérifier qu'il permette effectivement de détecter les événements qui surviennent et, par la même occasion, d'extraire les paramètres caractéristiques qui constituent le vecteur d'information. De plus, cette mise en application nous permettra de voir si les paramètres que nous avons considérés comme caractéristiques nous permettent bien de discriminer les événements et les charges qui les sous-tendent.

Pour cela, nous allons dans un premier temps valider cet algorithme sur des signaux simulés et nous traiterons ensuite des signaux issus de mesures réelles.

Pour montrer le pouvoir discriminant des caractéristiques extraites, nous proposons une « méthode de classification » simple dans laquelle les informations de chaque transition sont comparées.

Le principe est le suivant : si deux transitions présentent, pour chacune des fréquences d'intérêt, des admittances avec le même module et des phases décalées d'environ  $\pm 180^\circ$ , elles correspondent à la mise en marche et à l'arrêt d'une même charge électrique.

### V.2.1 Cas de signaux simulés

La mise en application sur des signaux simulés, de la méthode développée, nous permet de vérifier la véracité des informations extraites. Les informations étant parfaitement connues, nous pouvons directement constater si notre algorithme renvoie des informations cohérentes ou non.

Pour cela, nous utiliserons la même tension pour les exemples suivant. Soit la tension  $u(t_k)$  contenant 3 fréquences ( $N_s = 3$ ) telle que :

$$u_k = \sum_{m=0}^{N_s-1} U_m \cos(2\pi F_m^c \tau_k + \psi_m)$$

où,  $\tau_k = (k - 1) \cdot \Delta\tau \forall k = 1, 2, \dots$  avec  $\Delta\tau = \frac{1}{F_e} = 0.0005$  s,  $F_e = 2000$ Hz et :

$$F^c = [50, 150, 350]\text{Hz}, U = [230, 18, 32]\text{V} \text{ et } \psi = [0, 60, 36]^\circ$$

Nous effectuons le traitement sur des fenêtres d'observation d'une durée de 0.5 s soit :

$$N_1 = 1000.$$

### V.2.1.1 Charge résistive

La première application traite du cas d'une charge résistive. Pour cela, nous simulons un courant, sur une durée de 7.5 secondes, dans lequel apparaissent deux événements traduisant la mise en route et en arrêt d'une charge électrique. La charge en question s'allume et s'éteint aux dates respectives 2 et 6 s. Le but ici étant de vérifier la capacité qu'a l'algorithme proposé à détecter les événements et à fournir des paramètres permettant de discriminer les événements.

Le courant consommé par la résistance  $r_1$  de  $10\Omega$  est donnée par :

$$i_k = \frac{u_k}{r_1}$$

soit :

$$I = [23, 1.8, 3.2]A, \quad \varphi = \psi = [0, 60, 36]^\circ$$

d'où, les admittances associés aux fréquences d'intérêt  $F^c$  :

$$|h| = [0.1, 0.1, 0.1], \quad \arg(h) = [0, 0, 0]^\circ$$

**Remarque :** *l'argument de l'admittance représente le déphasage entre le courant et la tension. Une résistance n'introduit pas de déphasage, c'est pourquoi  $\arg(h) = 0$  quel que soit la fréquence.*

La figure V.8 représente le courant simulé avec le résultat de la détection ainsi qu'une vue agrandie de la première transition permettant de visualiser l'instant de début (en vert) et l'instant de fin de transition (en rouge).

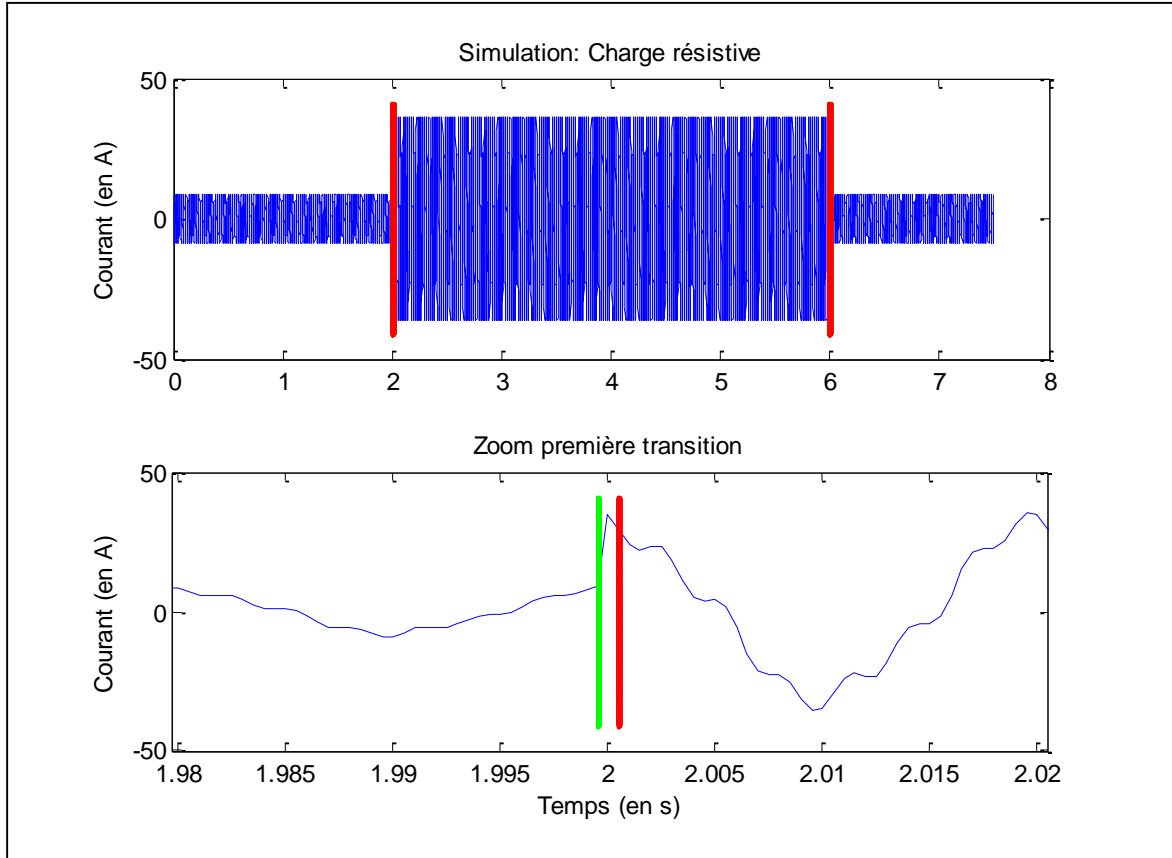


Figure V.8 : Résultat de la détection dans le cas d'une charge résistive.



## V.2 Identification

La table V.1 regroupe les informations caractéristiques pour chacun des évènements détectés.

Table V.1 : Vecteur d'information dans le cas d'une charge résistive

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		1.9995	5.9995
Durée de transition (en ms)		1	1
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.1	0.1
	Argument (en °)	0	180
Admittance $F_1^c = 150\text{Hz}$	Module	0.1	0.1
	Argument (en °)	0	180
Admittance $F_2^c = 350\text{Hz}$	Module	0.1	0.1
	Argument (en °)	0	180

Pour chacun des évènements détectés, l'admittance associée à chaque fréquence d'intérêt est identique. De plus, sur la première transition, on remarque que le courant et la tension sont en phase (déphasage nul). Nous pouvons donc dire que cet évènement est apparu suite à la mise en route d'une résistance. La seconde transition présente également les mêmes admittances quelle que soit la fréquence. Et, pour chaque fréquence, on remarque qu'elle présente le même module et que les phases sont décalées de  $180^\circ$  par rapport à la première transition. Cela signifie donc que le second évènement correspond à la mise en arrêt de la résistance qui a causé la première transition. C'est donc une résistance qui s'est allumée à 2s et qui s'est éteinte à 6s.

Notons que dans ce cas, l'inverse du module de l'admittance, égale à 0.1, nous fournit la valeur de la résistance qui est donc de  $10\Omega$ .

Les informations fournies par l'algorithme nous permettent de retrouver parfaitement le scénario de la simulation, à savoir qu'il y a deux évènements causés par une résistance de  $10\Omega$  qui est mise en marche à 2s et qui arrête de fonctionner à 6s.

### V.2.1.2 Charge quelconque

Nous traitons ici le cas d'une charge quelconque. Le terme charge quelconque signifie simplement qu'elle présente une admittance différente pour chaque fréquences, contrairement à la résistance.

De même que précédemment, nous simulons un courant, sur une durée de 7.5 secondes, sur lequel se produisent deux évènements, à 2 et 6 secondes, induis par la mise en route et en arrêt d'une charge électrique.

Le courant consommé par cette charge est simulé comme suit :

$$i_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} I_m \cos(2\pi F_m^c \tau_k + \varphi_m),$$

où  $N_{s'} = 3$  et :

$$I = [46, 6, 16]A, \quad \varphi = [90, 30, 60]^\circ.$$

Les admittances associées aux fréquences d'intérêt  $F^c$  sont données par :

$$|h| = [0.2, 0.3333, 0.5], \quad \arg(h) = [90, -30, 24]^\circ$$

La figure V.9 montre le courant simulé ainsi que le résultat de la détection (estimation des instants de transitions).

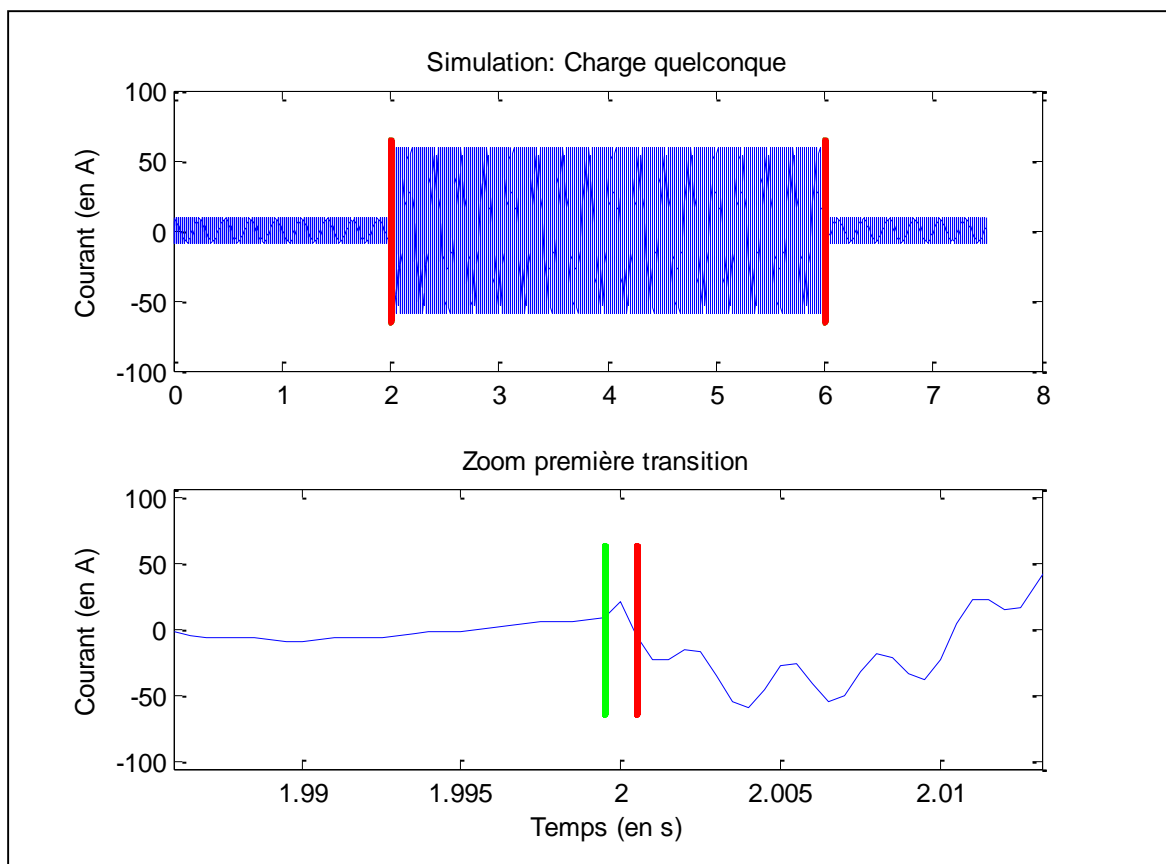


Figure V.9 : Résultat de la détection dans le cas d'une charge quelconque (début de transition en vert et fin de transition en rouge)

## V.2 Identification

Le tableau V.2 regroupe les informations caractéristiques pour chacun des évènements détectés.

Table V.2 : Vecteur d'information dans le cas d'une charge quelconque

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		1.9995	5.9995
Durée de transition (en ms)		1	1
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.2	0.2
	Argument (en °)	90	-90
Admittance $F_1^c = 150\text{Hz}$	Module	0.3333	0.3333
	Argument (en °)	-30	150
Admittance $F_2^c = 350\text{Hz}$	Module	0.5	0.5
	Argument (en °)	24	-156

L'algorithme a détecté deux évènements, le premier ayant lieu à environ 2s et le second à 6s, soit :  $\hat{\tau}_1'' = 1.9995$  et  $\hat{\tau}_2'' = 5.9995$ .

Ces deux évènements ont une durée de 1ms, ce qui signifie une transition courte. Ensuite, en comparant les deux vecteurs d'informations fournis par l'algorithme nous constatons que, pour toutes les fréquences d'intérêts, on a :

$$|\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_1'')| = |\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_2'')| \text{ et } \arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_2'')) = \arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_1'')) \pm 180^\circ$$

on peut donc les attribuer à une même charge électrique.

Les deux évènements détectés correspondent à la mise en route et à l'extinction d'une charge électrique. Elle est caractérisée par une transition courte et par ses admittances estimées.

Notons cependant que ces informations ne nous permettent pas de savoir si cette dernière s'est allumée à l'instant  $\hat{\tau}_1''$  et s'est éteinte à l'instant  $\hat{\tau}_2''$ , ou si c'est l'inverse qui s'est produit. Pour cela, il suffirait d'effectuer la différence entre le module de l'admittance associée à la fréquence 50 Hz qui suit l'évènement et celle qui précède.

### V.2.1.3 Cas d'une charge de type moteur

Les deux exemples précédents ont permis de constater que l'algorithme proposé était capable de détecter les évènements présents et de fournir des estimations précises des paramètres caractéristiques. Notons toutefois que dans ces deux exemples, les évènements introduits par le fonctionnement des charges simulées sont caractérisés par des transitions courtes. Voyons maintenant les résultats obtenus dans le cas d'un moteur, dont le courant au démarrage est caractérisé par une transition longue.

**Remarque :** *rappelons que le modèle choisi n'est pas adapté aux transitions longues mais aux transitions courtes.*

Pour cela, nous simulons un courant, sur une durée de 7.5 secondes, sur lequel se produisent deux évènements, à 2 et 6 secondes, induis par la mise en route et en arrêt d'un moteur.

Le courant consommé par un moteur au démarrage se caractérise par un fort appel de courant suivi d'une régulation jusqu'à atteindre le régime permanent. Le courant en régime permanent est défini par :

$$i_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} I_m \cos(2\pi F_m^c \tau_k + \varphi_m),$$

où  $N_{s'} = 3$  et :

$$I = [30, 2, 5]A, \quad \varphi = [-90, 45, 0]^\circ.$$

Les admittances associées aux fréquences d'intérêt  $F^c$  sont données par :

$$|h| = [0.1304, 0.1111, 0.1563], \quad \arg(h) = [-90, -15, -36]^\circ$$

La mise en œuvre de l'algorithme sur un tel signal nous fournit les résultats contenus dans la figure V.10 et la table V.3.

La figure V.10 montre le courant simulé ainsi que les instants de transitions estimés. La table V.3 montre quant à elle les informations extraites pour chacun des évènements détectés.

Concernant les admittances estimées, nous constatons que leur module est identique pour les deux évènements détectés, et ce quelle que soit la fréquence. De plus, les arguments sont déphasés de plus ou moins  $180^\circ$ , soit :

$$|\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_1'')| = |\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_2'')| \text{ et } \arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_2'')) = \arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_1'')) \pm 180^\circ.$$

Cela signifie que ces deux évènements ont été provoqués par la même charge électrique ; ils correspondent, respectivement, à sa mise en route et en arrêt.

Ensuite, au regard de la durée de transition estimée, nous pouvons voir que la première transition à une durée de 113.5 ms ce qui signifie qu'une charge présentant une phase transitoire (transition longue) s'est allumée. La deuxième transition est une transition courte (durée de 1 ms).

Finalement, les résultats fournis par notre algorithme nous permettent de dire qu'une charge s'est allumée à l'instant  $\hat{\tau}_1''$  et s'est éteinte à l'instant  $\hat{\tau}_2''$  et que cette dernière présente une phase transitoire à l'allumage. La figure V.11 montre l'évolution de  $|\hat{h}|$  dans cette zone transitoire (forme de la transition).

## V.2 Identification

Cet exemple fait clairement apparaître l'intérêt d'estimer la durée de transition et son utilité pour la caractérisation des événements. En effet, cela nous permettra de faire la distinction entre les différents types de transitions (courtes et longues) et également de reconnaître la mise en route de la mise en arrêt. Une transition longue correspond, en effet, nécessairement à la mise en marche d'une charge électrique.

Table V.3 : Vecteur d'information dans le cas d'un moteur

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		1.9995	5.9995
Durée de transition (en ms)		113.5	1
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.1304	0.1304
	Argument (en °)	-90	90
Admittance $F_1^c = 150\text{Hz}$	Module	0.1111	0.1111
	Argument (en °)	-15	165
Admittance $F_2^c = 350\text{Hz}$	Module	0.1563	0.1563
	Argument (en °)	-36	144

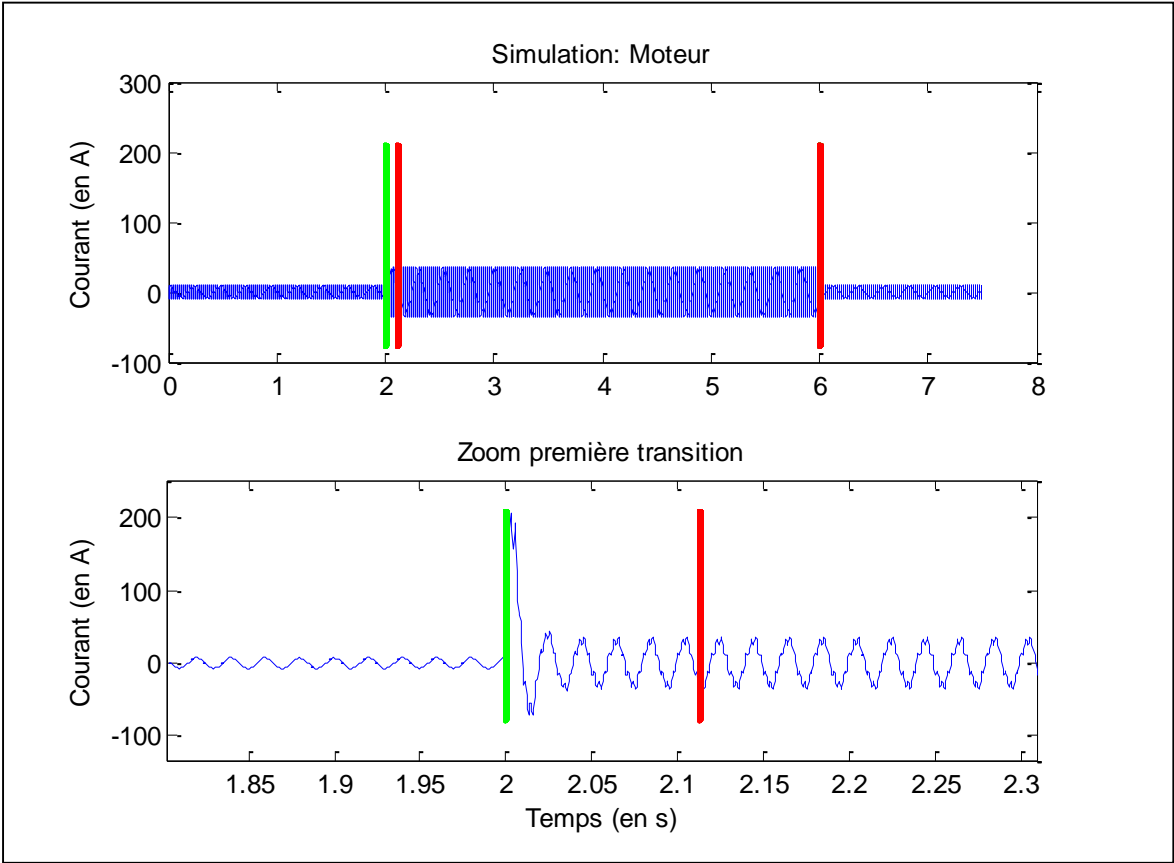


Figure V.10 : Résultat de la détection dans le cas d'une charge de type moteur (début de transition en vert et fin de transition en rouge).

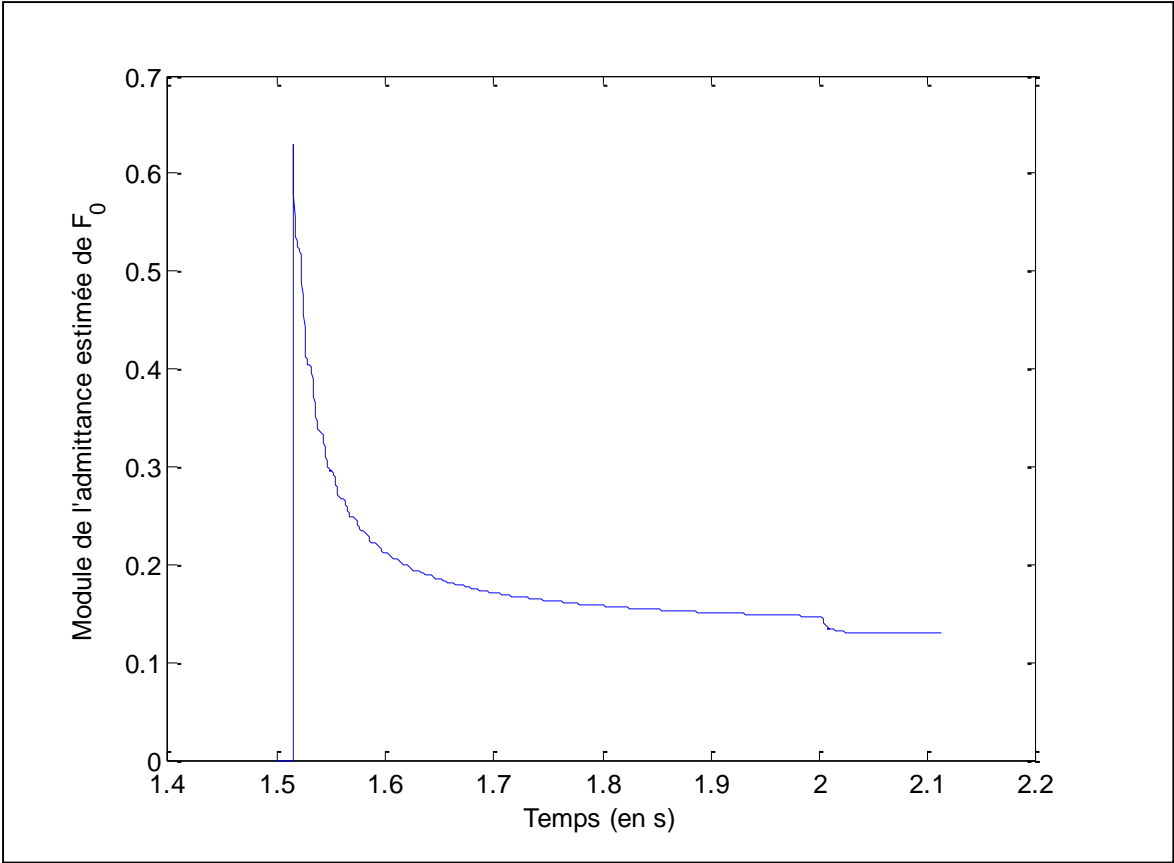


Figure V.11 : Evolution du module de l'admittance estimée de  $F_0$

### V.2.1.4 Mélange des trois charges

L'étude sur signaux simulés menée jusqu'à présent nous a permis de voir que l'algorithme proposé permet de détecter les évènements et de reconnaître deux évènements provoqués par une même charge électrique. Les résultats fournis nous permettent également de savoir quel évènement correspond à la mise en route et quel évènement correspond à l'arrêt. Cependant, les signaux étudiés faisaient apparaître des évènements liés à une seule charge électrique.

Voyons maintenant si les résultats fournis nous permettent d'associer des évènements entre eux dans le cas d'un signal plus complexe. Pour cela nous traitons, ici, un signal simulé représentant un courant sur lequel apparaissent des évènements liés à des charges électriques de natures différentes. Ce signal contient les trois charges étudiées précédemment, soit : une résistance, une charge quelconque et un « moteur ».

Sur une durée de 15 secondes, il se produit six évènements correspondant à la mise en route et à l'arrêt de chacune des charges. Le moteur est en fonctionnement entre 1s et 10s, la résistance entre 3s et 12.5s et la charge quelconque entre 5s et 8s.

Voici le scénario dans l'ordre d'apparition des évènements :

- 1) Mise en route du moteur à 1s
- 2) Mise en route de la résistance à 3s
- 3) Mise en route de la charge quelconque à 5s
- 4) Arrêt de la charge quelconque à 8s
- 5) Arrêt du moteur à 10s
- 6) Arrêt de la résistance à 12.5s

Nous rappelons les admittances des différentes charges présentes.

- Pour la résistance :

$$|h| = [0.1, 0.1, 0.1], \quad \arg(h) = [0, 0, 0]^\circ$$

- Pour la charge quelconque :

$$|h| = [0.2, 0.3333, 0.5], \quad \arg(h) = [90, -30, 24]^\circ$$

- Pour le moteur :

$$|h| = [0.1304, 0.1111, 0.1563], \quad \arg(h) = [-90, -15, -36]^\circ$$

Le résultat du traitement est donné dans les figures V.12, V.13 ainsi que dans la table V.4. La figure V.12 représente le signal étudié ainsi que les instants de début et de fin de transition estimés. La figure V.13 montre l'évolution du module de l'admittance estimée de  $F_0$  dans la zone transitoire. Et la table V.4 contient les paramètres estimés formant le vecteur d'information.

Dans un premier temps, nous constatons, uniquement en regardant la figure V.12, que tous les évènements ont été détectés et que les instants de transition sont bien estimés.

Ensuite, afin d'être plus précis, voyons si les résultats contenus dans la table V.4 confirment cette première impression. Les instants de transitions estimés sont :

$$\hat{\tau}_1'' = 1s, \hat{\tau}_2'' = 3s, \hat{\tau}_3'' = 5s, \hat{\tau}_4'' = 8s, \hat{\tau}_5'' = 10s, \hat{\tau}_6'' = 12.5s$$

Nous pouvons déjà constater que notre algorithme a détecté les six évènements présents, et de surcroît aux bons instants. Maintenant, voyons si les résultats fournis nous permettent d'une part de déterminer que ces évènements sont induits par des charges différentes et d'autre part d'associer ces évènements entre eux.

Dans la table V.4 nous notons que, hormis la première transition dont la durée est estimée à 113.5ms, tous les évènements détectés ont une durée de 1ms. Ce résultat nous informe donc que la première transition est une transition longue tandis que toutes les autres sont courtes. En combinant cette information à la figure V.13, nous pouvons connaître la forme de la transition longue. En effet, ici nous constatons que, la forme de l'évènement correspondant à la transition longue est définie par un fort appel de courant suivi d'une décroissance jusqu'à atteindre un état d'équilibre. Cette forme correspond à la mise en route d'une charge électrique de type moteur ou pompe.

Voyons maintenant ce que nous apportent les informations concernant le régime permanent contenues dans la table V.4 (les admittances).

En comparant le module des admittances estimées, nous en déduisons que les évènements 1 et 5 ont été provoqués par la même charge électrique. De même, nous déduisons que les évènements 2 et 6 sont liés à une autre charge, puis que nous devons les évènements 3 et 4 à une troisième charge électrique.

Ayant regroupé les évènements entre eux, il reste à voir ce que nous apporte l'information sur les phases. En comparant les arguments estimés, pour les évènements liés à la même charge, nous constatons que les admittances estimées associées aux évènements numéro 5, 4 et 6 sont déphasées de  $\pm 180^\circ$ , respectivement, par rapport aux évènements 1, 2 et 3. Cela peut signifier, que les évènements 1, 2 et 3 sont apparus suite à la mise en route de trois différentes charges électriques et les 5, 4 et 6 correspondent à leur arrêt, ou inversement. Comme il a été dit précédemment, il suffit d'avoir une information supplémentaire telle que le comparatif entre la puissance consommée sur le 50 Hz avant et après la transition.

Finalement, notre algorithme a détecté 6 évènements induits par 3 différentes charges électriques. En combinant toutes les informations fournies, nous pouvons déterminer un scénario et ainsi décomposer la consommation par usage.

Le scénario est le suivant : Une première charge est en fonctionnement de 1 à 10 s. Une seconde démarre à 3s puis s'éteint à 12.5 s et la troisième charge fonctionne s'allume à 5 s et s'arrête à 8 s.

Bien que l'algorithme proposé n'ait pas pour vocation de déterminer la nature des charges électrique qui sous-tendent les évènements détectés, nous pouvons tout de même voir que la seconde charge est une résistance (car les admittances estimés sont identique pour toutes les fréquences d'intérêt et que le courant et la tension sont en phases). Ensuite, étant donné la durée et la forme de la première transition, nous pouvons supposer que la première charge est un moteur (ou une pompe) mais on ne peut l'affirmer.



## V.2 Identification

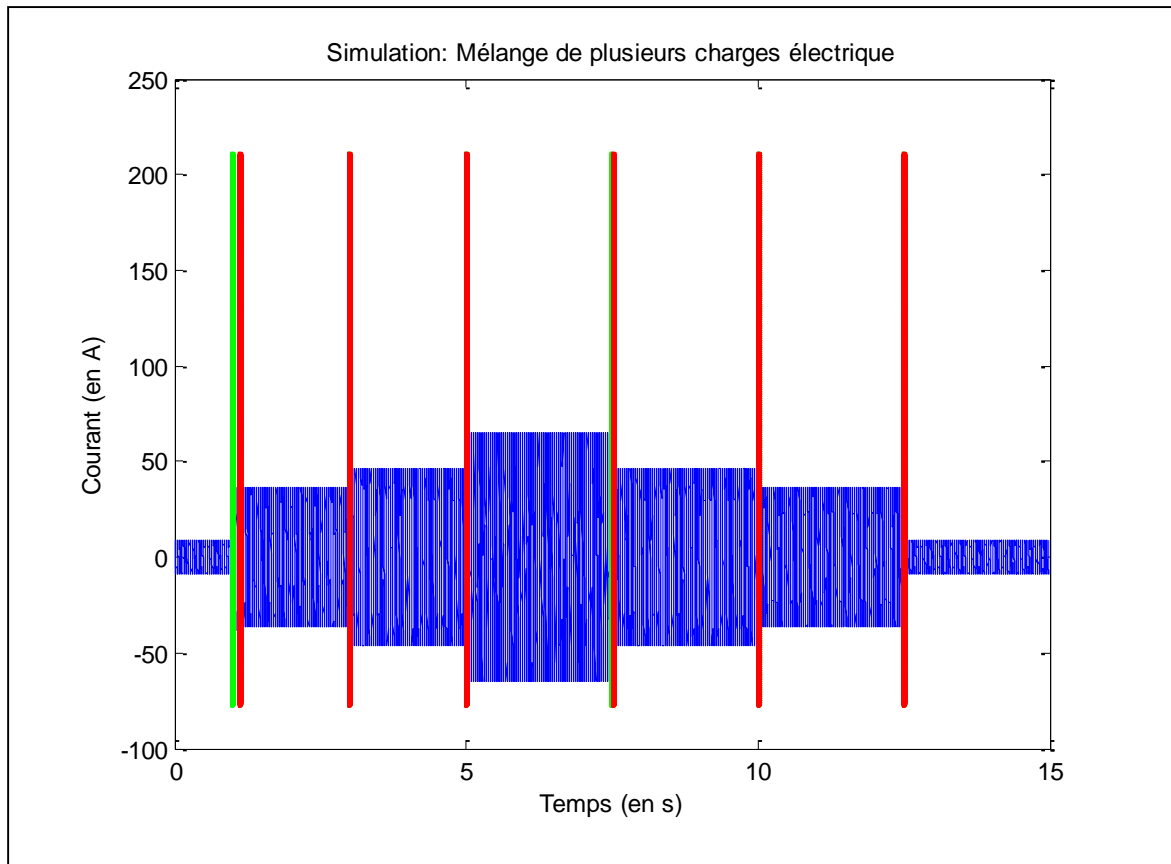


Figure V.12 : Résultat de la détection pour un signal regroupant différentes charges électrique

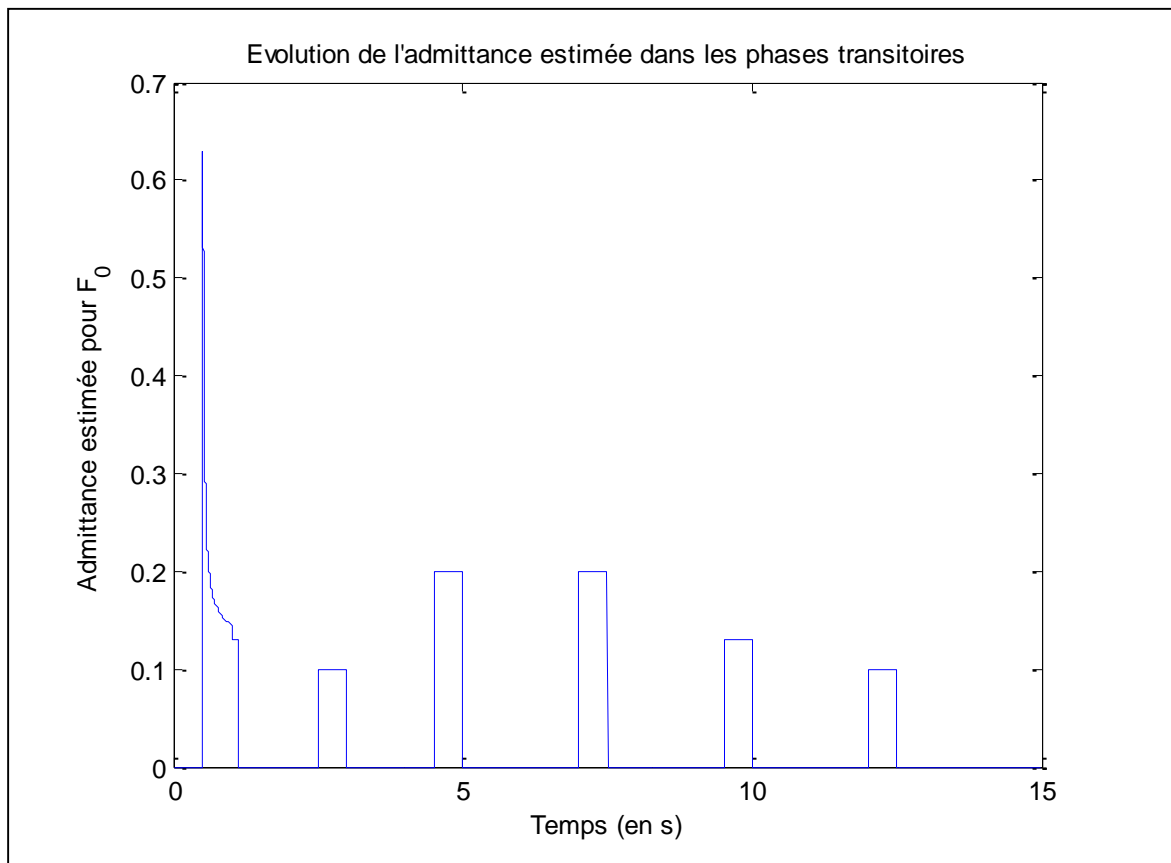


Figure V.13 : Résultat de la détection pour un signal regroupant différentes charges électrique

Table V.4 : Vecteur d'information dans le cas de plusieurs charges différentes

		Transition					
		1	2	3	4	5	6
Début de transition (en s)		0.9995	2.9995	4.9995	7.9995	9.9995	12.4995
Durée de transition (en ms)		113.5	1	1	1	1	1
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.1304	0.1	0.2	0.2	0.1304	0.1
	Argument (en °)	-90	0	90	-90	90	180
Admittance $F_1^c = 150\text{Hz}$	Module	0.1111	0.1	0.3333	0.3333	0.1111	0.1
	Argument (en °)	-15	0	-30	150	165	180
Admittance $F_2^c = 350\text{Hz}$	Module	0.1563	0.1	0.5	0.5	0.1563	0.1
	Argument (en °)	-36	0	24	-156	144	180

Cet exemple permet de voir que les informations fournies par notre algorithme permettent de :

- Connaître les instants où se sont produits les évènements,
- Associer entre eux les évènements induits par la même charge électrique,
- Distinguer la mise en route de l'arrêt (en comparant la puissance avant et après un évènement).

Finalement, cet algorithme permet de décomposer la consommation électrique globale. Cependant pour le moment il n'est pas capable de connaître la nature exacte des charges électriques.

## V.2.2 Cas de signaux expérimentaux

Après avoir appliqué l'algorithme sur des signaux simulés, nous avons pu constater la pertinence des informations extraites. Les simulations nous ont donc permis de valider la méthode. Nous passons maintenant au traitement de signaux issus de mesures réelles.

### Cas n°1

Nous traitons ici le cas d'un signal réel mesuré aux bornes d'une résistance. Ce signal résulte d'une expérience faite à l'Université de Toulon.

Les résultats de la figure V.14 et du tableau V.5 nous montrent que l'algorithme a détecté les deux évènements présents.

Les fréquences d'intérêt (fréquences harmoniques les plus puissantes parmi celles présentes dans le spectre du signal) sont les suivantes :

$$F^c = [50, 150, 250, 350, 550, 650] \text{ Hz}$$

Nous remarquons que la seconde transition présente une durée estimée de 5 ms, ceci est peut être due à l'interrupteur utilisé. Cependant cette durée ne correspond en aucun cas à une transition longue. L'estimation de la durée de ces évènements correspond à des transitions courtes.

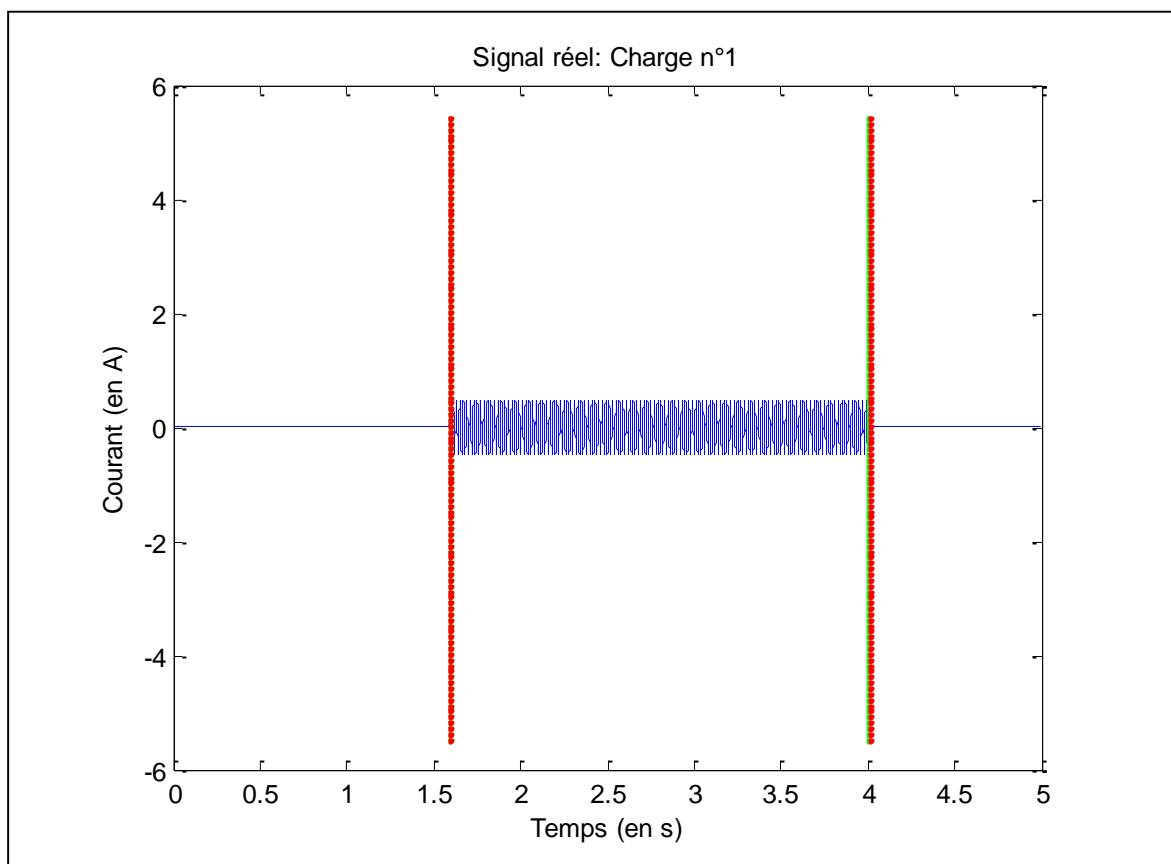


Figure V.14 : Résultat de la détection pour un signal réel

Table V.5 : Vecteur d'information dans le cas d'un signal réel

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		1.5905	4.009
Durée de transition (en ms)		1	5
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.2476	0.2476
	Argument (en °)	-0.25	179.75
Admittance $F_1^c = 150\text{Hz}$	Module	0.3824	0.3864
	Argument (en °)	47.92	-132.82
Admittance $F_2^c = 250\text{Hz}$	Module	0.2640	0.2646
	Argument (en °)	3.63	-175.92
Admittance $F_3^c = 350\text{Hz}$	Module	0.2487	0.2486
	Argument (en °)	-0.84	179.17
Admittance $F_4^c = 550\text{Hz}$	Module	0.2451	0.2450
	Argument (en °)	-1.80	177.98
Admittance $F_5^c = 650\text{Hz}$	Module	0.2417	0.2399
	Argument (en °)	-0.94	178.02

Le module des admittances estimées est le même pour chaque transition et les arguments ont un écart d'environ  $\pm 180$  degrés. Cela nous permet déjà de lier ces événements à la même charge.

Concernant le premier événement, l'amplitude de l'admittance associée à chacune des fréquences est quasiment la même et le courant est en phase avec la tension quel que soit la fréquence sauf pour la fréquence 150 Hz. Nous pouvons supposer que cet écart est dû à un phénomène non linéaire (cf. V.3.2).

Hormis cette différence sur la fréquence 150 Hz, les résultats correspondent au fonctionnement d'une résistance.

Finalement, nous déduisons de ces résultats que la charge en fonctionnement est une résistance d'environ  $4 \Omega$  qui s'allume et s'éteint aux instants 1.5905 et 4.009 s.

## Cas n°2

Le signal étudié ici représente le courant mesuré sur une phase d'un moteur triphasé.

La figure V.15 montre que les deux évènements ont bien été détectés. Nous pouvons voir sur le tableau V.6 que le vecteur d'information extrait pour chaque évènement contient deux fréquences, d'où :

$$F^c = [50, 250] \text{ Hz}$$

Dans ce même tableau, nous constatons que le premier évènement produit une transition longue d'une durée de 99.5 ms, et que le second produit une transition courte avec une durée de 1 ms.

Nous constatons également que ces deux évènements sont provoqués par la même charge électrique car l'admittance estimée présente le même module et des arguments déphasés de  $\pm 180^\circ$ .

Les résultats fournis nous permettent de conclure en disant que c'est une charge de type moteur qui est la cause de ces deux évènements. Nous pouvons aller plus loin en affirmant que la première transition correspond à sa mise en route et la seconde à sa mise en arrêt. Nous pouvons affirmer ceci car les transitions longues apparaissent uniquement lors de la mise en route d'une telle charge.

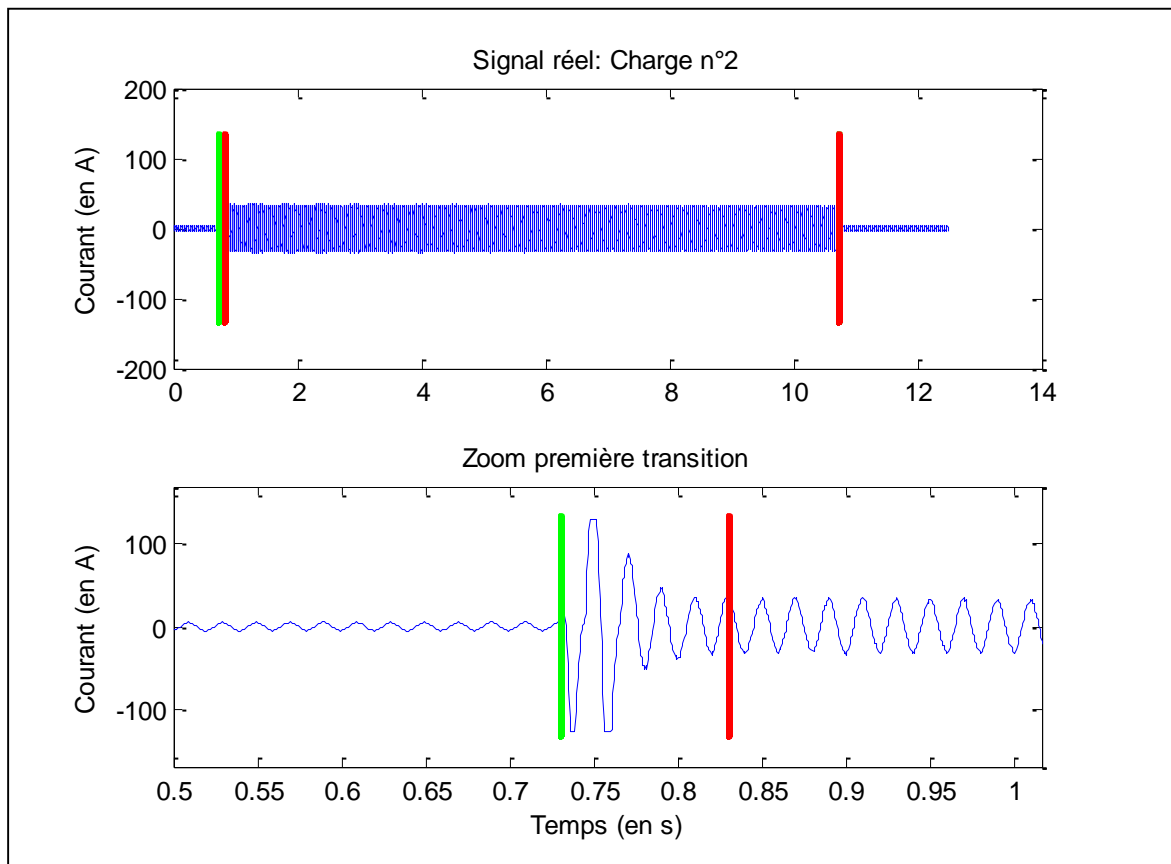


Figure V.15 : Résultat de la détection pour un signal réel

Table V.6 : Vecteur d'information dans le cas d'un signal réel type moteur

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		0.7305	10.722
Durée de transition (en ms)		99.5	1
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.0824	0.0824
	Argument (en °)	-44	130
Admittance $F_1^c = 250\text{Hz}$	Module	0.1901	0.1926
	Argument (en °)	-84.63	93.29

## V.3 Variantes possibles

Dans cette partie, nous présentons quelques variantes possibles concernant les différents modules de l'algorithme présenté plus haut en fonction des attentes de l'utilisateur. En effet, le choix de l'utilisation d'un module plutôt qu'un autre est laissé à l'appréciation d'un expert. Cette partie n'a pas pour objectif de définir LA meilleure méthode à utiliser mais plutôt de présenter un panel d'outils qui, en fonction du cahier des charges (ou des besoins de l'utilisateur), pourront être utiles ou non.

### V.3.1 Module d'estimation

Dans le manuscrit, nous avons fait le choix de travailler avec le modèle fréquentiel car ce dernier présente un avantage certain par rapport au modèle temporel permettant ainsi de réduire la dimension des matrices lors de l'utilisation de la méthode des moindres carrés.

Cependant, nous pouvons envisager d'utiliser le filtre de Kalman afin d'estimer les paramètres du modèle temporel global (*i.e.* modèle sans transition). Il s'agit alors d'un traitement qui prend en compte toutes les fréquences présentes dans le spectre du signal.

Son utilisation permet de s'affranchir de la fenêtre d'observation en traitant un échantillon à la fois. En effet, le filtre de Kalman consiste à estimer l'état (les paramètres) en chaque instant  $\tau_k$  à l'aide des observations jusqu'à cet instant.

### Filtre de Kalman

En considérant le modèle d'état classique suivant :

$$\theta_k = F_k \cdot \theta_{k-1} \text{ (Equation d'état)}$$

$$\tilde{s}_k = H_k \cdot \theta_k + \varepsilon_k \text{ (Equation de mesure)}$$

Voyons l'expression du modèle d'état à partir du modèle choisi (équivalent à l'équation de mesures).

Soit l'observation  $\tilde{s}_k$ , telle que :

$$\tilde{s}_k = s_k + \varepsilon_k$$

où le modèle  $s_k$  est donné par :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m \cos(2\pi F_m \tau_k + \varphi_m) \quad (\text{V.1})$$

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} \{A_m \cos(\varphi_m) \cos(2\pi F_m \tau_k) - A_m \sin(\varphi_m) \sin(2\pi F_m \tau_k)\}$$

$$s_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi F_0 \tau_k) & -\sin(2\pi F_0 \tau_k) & \cdots & \cos(2\pi F_{N_{s'}-1} \tau_k) & -\sin(2\pi F_{N_{s'}-1} \tau_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \cos(\varphi_0) \\ A_0 \sin(\varphi_0) \\ \vdots \\ A_{N_{s'}-1} \cos(\varphi_{N_{s'}-1}) \\ A_{N_{s'}-1} \sin(\varphi_{N_{s'}-1}) \end{bmatrix}$$

D'où l'équation de mesure :

$$\tilde{s}_k = H_k \cdot \theta_k + \varepsilon_k$$

avec :

$$H_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi F_0 \tau_k) & -\sin(2\pi F_0 \tau_k) & \cdots & \cos(2\pi F_{N_s'-1} \tau_k) & -\sin(2\pi F_{N_s'-1} \tau_k) \end{bmatrix}$$

$$\theta_k = \begin{bmatrix} A_0 \cos(\varphi_0) \\ A_0^1 \sin(\varphi_0) \\ \vdots \\ A_{N_s'-1} \cos(\varphi_{N_s'-1}) \\ A_{N_s'-1} \sin(\varphi_{N_s'-1}) \end{bmatrix}$$

où  $\tilde{s}_k$  représente la mesure à l'instant  $k$ , et  $\theta_k$  est le paramètre à estimer (état du système) et  $H_k$  est la matrice qui relie l'état  $\theta_k$  à la mesure  $\tilde{s}_k$ .

Comme nous pouvons le constater, l'état  $\theta_k$  est constant (indépendant du temps), on a donc :

$$\theta_k = \theta_{k-1}$$

et d'après l'équation d'état, la matrice  $F_k$  qui relie l'état précédent  $k - 1$  à l'état actuel  $k$  est donné par :

$$F_k = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'algorithme de Kalman réalise l'estimation en deux étapes :

- 1) la prédiction, qui consiste à produire une estimation de l'état courant sachant l'état estimé de l'instant précédent. Pour cela, on calcule les deux termes suivants :

$$\hat{\theta}_{k \setminus k-1} = F_k \cdot \hat{\theta}_{k-1 \setminus k-1} \quad (V.2)$$

$$P_{k \setminus k-1} = F_k \cdot P_{k-1 \setminus k-1} \cdot F_k^T \quad (V.3)$$

- 2) la correction (ou filtrage), qui consiste à utiliser les observations de l'instant courant pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise. Ici, on calcule les trois termes suivants :

$$K_k = P_{k \setminus k-1} \cdot H_k [H_k \cdot P_{k \setminus k-1} \cdot H_k^T + R_k]^{-1} \quad (V.4)$$

$$\hat{\theta}_{k \setminus k} = \hat{\theta}_{k \setminus k-1} + K_k (\tilde{s}_k - H_k \cdot \hat{\theta}_{k \setminus k-1}) \quad (V.5)$$

$$P_{k \setminus k} = P_{k \setminus k-1} - K_k H_k \cdot P_{k \setminus k-1} \cdot \quad (V.6)$$

Ici,  $\hat{\theta}_{k \setminus k}$  représente l'estimation de l'état à l'instant  $k$  et  $P_{k \setminus k}$  la matrice de variance-covariance de l'erreur (*i.e.* une mesure de la précision de l'état estimé).

Le filtre nécessite d'être initialisé. N'ayant aucune information *a priori* sur l'état initial, l'algorithme est initialisé comme suit :

$$\theta_{0 \setminus 0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{0 \setminus 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$



### V.3 Variantes possibles

L'intégration du filtre de Kalman dans notre algorithme est assez simple. La première façon de faire serait simplement de remplacer la méthode des moindres carrés par le filtre de Kalman et de travailler non plus sur une fenêtre d'observation de longueur  $N_1$  mais un échantillon après l'autre.

Nous proposons également une autre façon de faire, basée sur le même principe que l'algorithme proposé plus tôt, mais avec quelques modifications. Cette variante travaille sur le modèle global défini par l'équation (V.1) (*i.e.* on ne considère qu'un seul état).

Ici, nous modifions l'algorithme de Kalman, où l'équation (V.6) devient :

$$P_{k|k} = \alpha \cdot (P_{k|k-1} - K_k H_k \cdot P_{k|k-1}) \quad (V.7)$$

Nous avons introduit un facteur d'oubli noté  $\alpha$ . Ce paramètre permet de forcer le filtre à tenir moins compte des mesures passées, en surestimant volontairement la matrice de variance-covariance des erreurs (par exemple en choisissant  $\alpha = 1.1$ ). De ce fait, dès lors que l'on rencontre une transition, l'algorithme de Kalman produit une mauvaise estimation et l'erreur d'estimation devient grande (cf. figure V.16). Ceci nous permettra de détecter un événement dès le premier échantillon.

Donc, la procédure est la suivante :

- De même que précédemment, le traitement sur la tension consiste simplement à estimer les paramètres du modèle.
- Pour le courant, que ce soit en Forward ou en Backward, lors d'un régime permanent nous estimons les paramètres  $\{A, \varphi\}$  et calculons l'erreur d'estimation, notée  $E$ . Notons qu'ici ce n'est plus une erreur de prédiction mais bien l'erreur entre l'estimation et la mesure au même instant (le carré de l'innovation), telle que :

$$E = (\tilde{s}_k - H_k \cdot \hat{\theta}_{k|k})^2 .$$

Lorsque cette erreur grandit de manière significative et dépasse le seuil de détection, cela signifie que nous rencontrons une transition. Cet instant correspond donc à l'instant de transition estimé ( $\tau'_i = \tau_k$ ). Puis on continue l'estimation des paramètres.

Finalement, cet algorithme nous fournit un encadrement des zones transitoires et stationnaires car il a estimé les instants de début et de fin de transition. Afin d'extraire les paramètres caractéristique de l'état <sup>2</sup>, il nous suffit d'effectuer la moyenne des admittances estimées sur chacun des états permanents. Enfin, la différence entre 2 états permanents consécutifs nous fournit une estimation des paramètres caractérisant l'état <sup>2</sup> pour chaque événement détecté.

Précisons toutefois que l'utilisation de cette approche présente les mêmes inconvénients que précédemment, notamment en ce qui concerne l'influence du choix des fréquences d'intérêt (*i.e.* les fréquences dont on estime les paramètres). En effet, de la même manière que précédemment le fait de négliger des fréquences introduit un bruit déterministe qui fait apparaître un biais sur les estimations ainsi qu'une augmentation des résidus.

La figure V.16 montre l'évolution de la norme des résidus de l'estimation lorsque nous choisissons toutes les fréquences ( $F^c = F$ ) et lorsque nous choisissons d'estimer seulement les paramètres associés à la fréquence la plus puissante (respectivement en trait plein bleu et pointillés rouge).

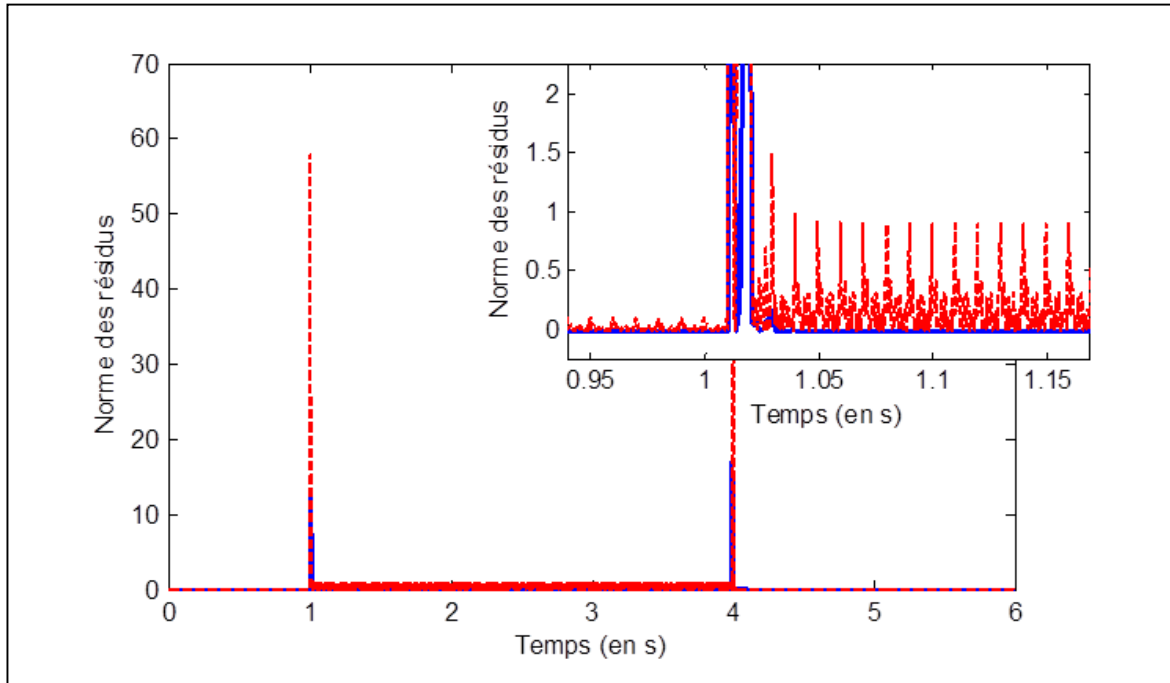


Figure V.16 : Evolution de la norme des résidus d'estimation

Sur cette figure, il est aisé de constater que l'amplitude des résidus est beaucoup plus faible dans le premier cas (en trait plein) que dans le deuxième (pointillé). Nous retrouvons donc le problème de l'augmentation des résidus induit par le fait de négliger certaines fréquences.

Notons qu'ici, la principale différence par rapport à la méthode proposée précédemment réside dans l'utilisation du modèle temporel. Cela implique que l'on ne peut plus utiliser l'astuce, consistant à sélectionner des plages de fréquences autour des fréquences d'intérêt sur lesquelles on calcule la TFD, permettant d'alléger les calculs (en réduisant la dimension des matrices).

## Exemple d'application

Nous présentons ici quelques exemples d'application. Cela nous permet de voir si les résultats fournis avec cette méthode sont en accord avec ceux obtenus dans la partie V.2 avec l'algorithme proposé.

Nous reprenons donc les deux signaux expérimentaux traités précédemment (cf. V.2.2).

### Résistance

Nous reprenons ici le cas du signal réel mesuré aux bornes d'une résistance.

Les résultats de la figure V.17 et du tableau V.7 nous montrent que l'algorithme a détecté les deux évènements présents.

Les fréquences d'intérêt sont les suivantes :

$$F^c = [50, 150, 250, 350, 550, 650] \text{ Hz}$$

Nous remarquons, de même que précédemment, que la seconde transition présente une durée estimée de 22 ms, ceci est peut être due à l'interrupteur utilisé.

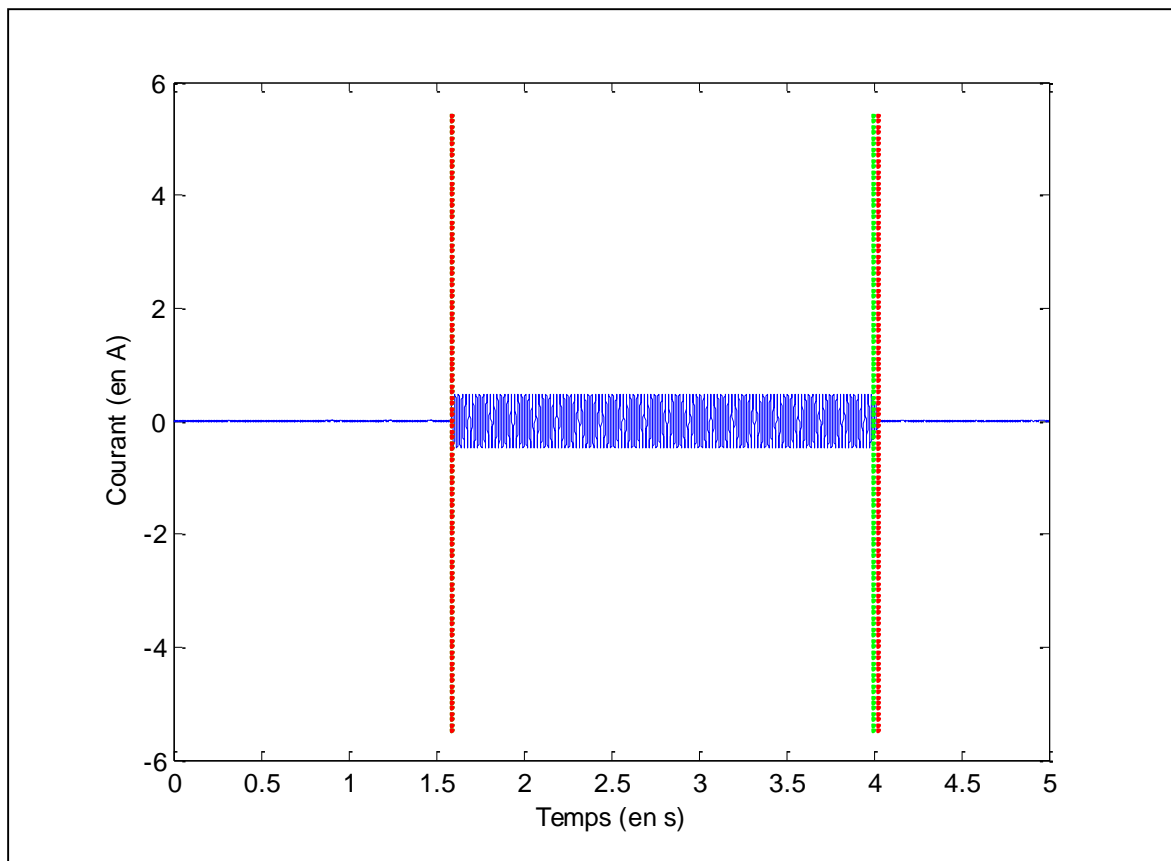


Figure V.17 : Résultat de la détection pour un signal réel mesuré aux bornes d'une résistance

Table V.7 : Vecteur d'information dans le cas d'un signal réel mesuré aux bornes d'une résistance

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		1.59	3.9985
Durée de transition (en ms)		1	22
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.2476	0.2476
	Argument (en °)	-0.25	179.75
Admittance $F_1^c = 150\text{Hz}$	Module	0.3851	0.3893
	Argument (en °)	48.12	-132.58
Admittance $F_2^c = 250\text{Hz}$	Module	0.2636	0.2647
	Argument (en °)	3.69	-175.80
Admittance $F_3^c = 350\text{Hz}$	Module	0.2484	0.2485
	Argument (en °)	-0.85	179.17
Admittance $F_4^c = 550\text{Hz}$	Module	0.2448	0.2450
	Argument (en °)	-1.76	177.98
Admittance $F_5^c = 650\text{Hz}$	Module	0.2419	0.2395
	Argument (en °)	-0.91	178.23

Les résultats nous montrent deux transitions. Au vu du tableau V.7, nous pouvons dire que la charge en fonctionnement est une résistance d'environ  $4 \Omega$  mise en route à 1.59 s et qui s'arrête à 3.9985 s.

Les résultats fournis sont quasiment identiques à ceux obtenus avec l'algorithme utilisant la méthode des moindres carrés.

Nous remarquons un petit écart entre les instants et la durée des transitions estimés par rapport au tableau V.5. Ces petits écarts sont tout à fait compréhensibles dès lors que l'on a conscience que les deux algorithmes utilisent des critères de détection différents. Cependant, nous remarquons également que les admittances estimées sont très proches des estimations obtenues précédemment.

## Moteur

Le signal étudié ici représente le courant mesuré sur l'une des phases d'un moteur triphasé.

La figure V.18 montre le courant traité ainsi que le résultat de la détection d'évènements.

Nous pouvons voir sur le tableau V.8 que le vecteur d'information extrait pour chaque évènement contient les fréquences :

$$F^c = [50, 250] \text{ Hz}$$

Dans ce tableau, nous constatons que le premier évènement produit une transition longue d'une durée de 99 ms, et que le second produit une transition courte avec une durée de 1.5 ms.

L'admittance estimée présente le même module et des arguments déphasés de  $\pm 180^\circ$ , nous en déduisons que ces deux évènements sont provoqués par la même charge électrique.

Les résultats fournis nous permettent de conclure en disant que c'est une charge de type moteur qui est la cause de ces deux évènements. La première transition correspond à sa mise en route et la seconde à sa mise en arrêt. Nous pouvons affirmer ceci car les transitions longues apparaissent uniquement lors de la mise en route d'une telle charge.

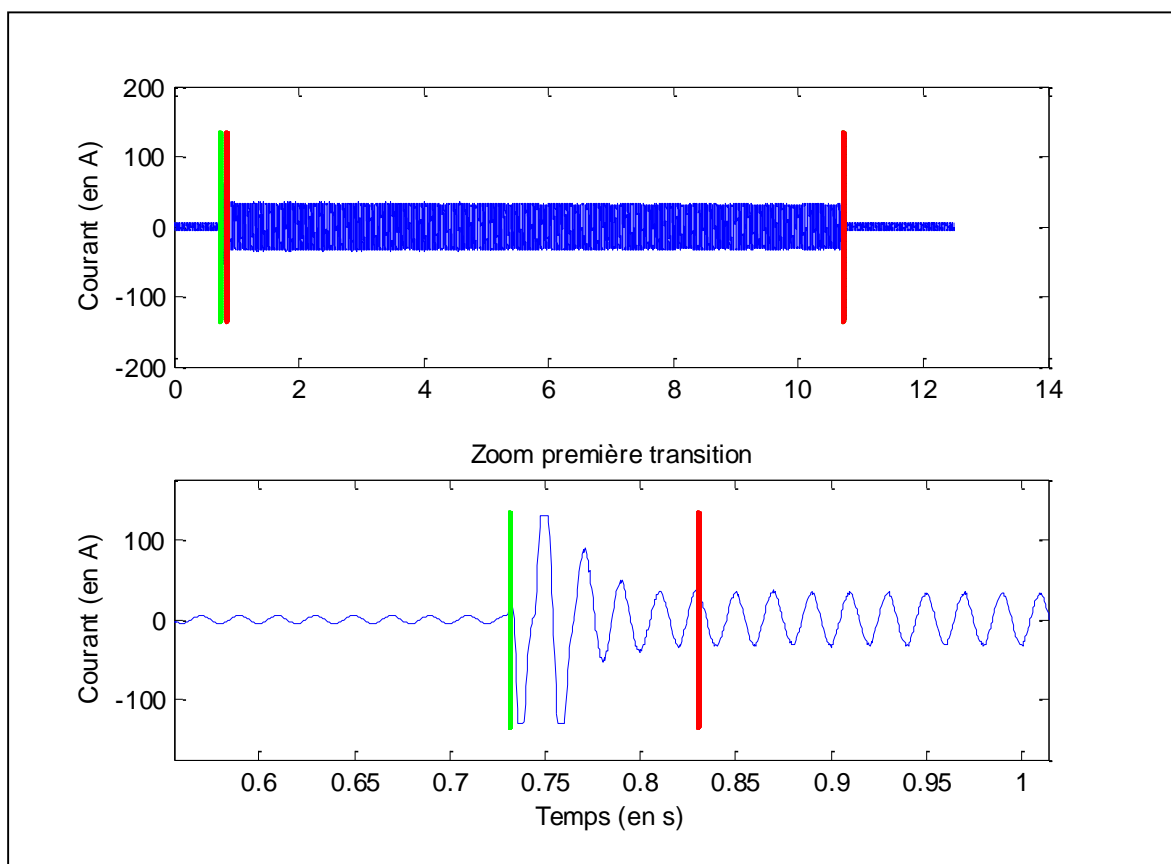


Figure V.18 : Résultat de la détection pour un signal réel

Table V.8 : Vecteur d'information dans le cas d'un moteur réel

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		0.731	10.723
Durée de transition (en ms)		99	1.5
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.0824	0.0825
	Argument (en °)	-45.69	134.24
Admittance $F_1^c = 250\text{Hz}$	Module	0.1948	0.1956
	Argument (en °)	-84.60	93.35

Comme pour l'exemple précédent, nous constatons que les résultats fournis par cette approche sont quasiment identiques à ceux obtenus avec l'algorithme utilisant la méthode des moindres carrés.

## Synthèse

Dans cette partie, nous proposons d'estimer les paramètres d'intérêt en utilisant le filtrage de Kalman. Nous avons repris les deux signaux expérimentaux traités dans la partie V.2 afin de pouvoir comparer les algorithmes.

Au vu des résultats obtenus, nous constatons que les admittances estimées sont quasiment identiques à celles obtenues avec la méthode proposée précédemment.

Cependant, nous remarquons que les instants ainsi que la durée des transitions estimés ne sont pas exactement les mêmes que précédemment. Ceci vient du fait que ces deux algorithmes n'utilisent pas le même critère de détection. En effet, ici l'algorithme considère avoir détecté un évènement dès lors que l'erreur devient supérieure au seuil, tandis que le critère de détection utilisé dans la partie V.2 consiste à tester si l'erreur est supérieure au seuil prédéfini et à vérifier que le nouvel état permanent est atteint ( $N_2 = N_1$ ).

Le critère de détection de l'algorithme présenté ici (Kalman) est moins précis car il peut déclencher en retard tandis que l'autre critère s'assure d'avoir atteint un nouvel état stationnaire.

## V.3.2 Etude du phénomène de non-linéarité

Ici, nous reprenons le signal traité dans le premier cas de la partie V.2.2 correspondant à une mesure réelle du courant aux bornes d'une résistance.

Lors de la mise en application, sur ce signal, de l'algorithme proposé, nous avons, contre toute attente, constaté que les admittances caractérisant cette charge n'étaient pas les mêmes pour toutes les fréquences d'intérêt. Il est apparu une différence sur la fréquence 150 Hz. Nous avons donc supposé que cela était dû à la présence de non-linéarités.

Afin de confirmer nos propos, nous allons utiliser la fonction de cohérence car elle permet d'exprimer à chaque fréquence la quantité de relation linéaire entre deux signaux  $x$  et  $y$ , en l'occurrence le courant et la tension mesurés, dont les transformées de Fourier sont notées  $X$  et  $Y$ .

La fonction de cohérence est une fonction complexe définie comme étant la densité inter spectrale de puissance normalisée par le produit des densités spectrales de puissance (DSP), soit :

$$\gamma_{XY}(f) = \frac{\mathcal{S}_{XY}(f)}{\sqrt{\mathcal{S}_{XX}(f)\mathcal{S}_{YY}(f)}} \quad \forall f \in \left[0, \frac{F_e}{2}\right]$$

avec :

$$\mathcal{S}_{XY}(f) = E\{X(f)Y^*(f)\}$$

$$\mathcal{S}_{XX}(f) = E\{X(f)X^*(f)\}$$

$$\mathcal{S}_{YY}(f) = E\{Y(f)Y^*(f)\}$$

Dans cette partie, nous travaillons sur le module au carré de la fonction de cohérence :

$$|\gamma_{XY}(f)|^2 = \frac{|\mathcal{S}_{XY}(f)|^2}{\mathcal{S}_{XX}(f)\mathcal{S}_{YY}(f)} \quad \forall f \in \left[0, \frac{F_e}{2}\right]$$

qui est compris entre 0 et 1. Une valeur égale à 1, traduit l'existence d'un lien linéaire entre  $X$  et  $Y$ . A contrario, une valeur nulle signifie que ce lien linéaire n'existe pas du tout.

**Remarque :** le module de la fonction de cohérence  $\frac{|\mathcal{S}_{XY}(f)|^2}{\mathcal{S}_{XX}(f)\mathcal{S}_{YY}(f)}$  a un sens seulement si les processus  $x$  et  $y$  sont stationnaires et mutuellement stationnaires.

Nous calculons maintenant la grandeur  $|\gamma_{XY}(f)|^2$  pour la tension et le courant mesurés aux bornes de la « résistance ».

La figure V.19 montre le courant mesuré ainsi que la portion de signal sur laquelle nous avons calculé la fonction de cohérence. Et la figure V.20 représente le module de la fonction de cohérence entre le courant et la tension.

Sur la figure V.20 il est aisé de constater qu'il existe effectivement un phénomène de non-linéarité entre le courant et la tension sur la fréquence 150 Hz. En effet, nous constatons que le module de la fonction de cohérence est égal à 1 pour toutes les fréquences mis à part pour la fréquence 150 Hz pour laquelle la valeur est d'environ 0.85

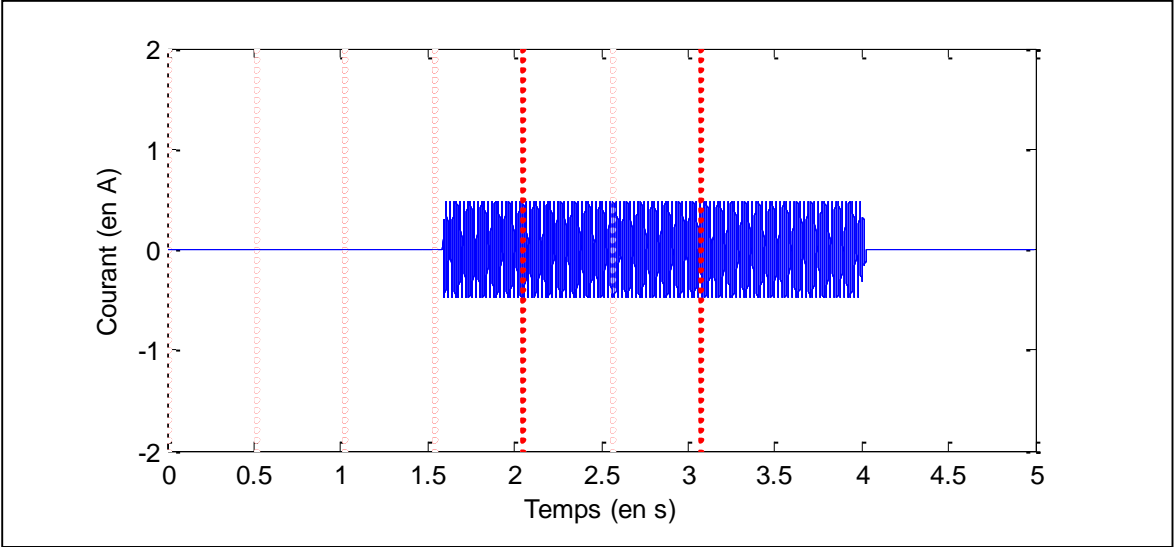


Figure V.19 : Signal traité et portion de signal sur laquelle on calcul la fonction de cohérence

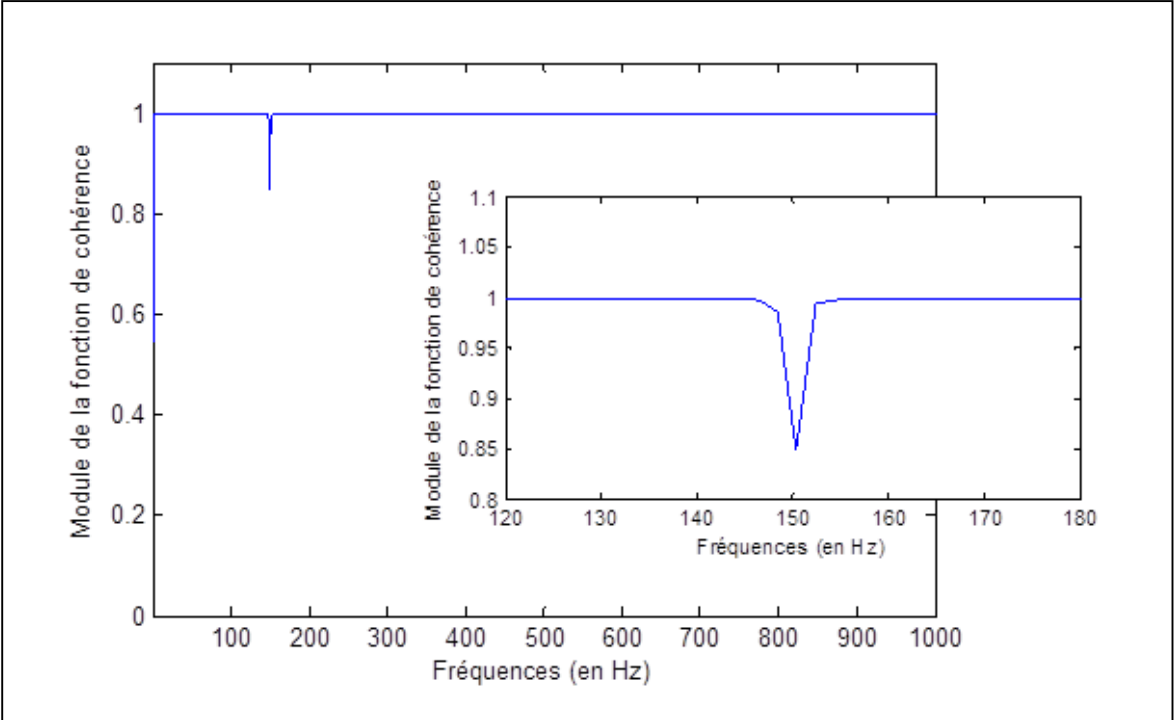


Figure V.20 : Résultat du calcul du module de la fonction de cohérence



### V.3 Variantes possibles

Essayons maintenant de compenser ou corriger ce phénomène. Pour cela, nous faisons l'hypothèse d'une non-linéarité d'ordre 3 que nous allons soustraire au signal. De ce fait, le courant traité, noté  $x$ , devient :

$$x - \beta x^3$$

Nous allons donc calculer la fonction de cohérence entre ce courant, auquel nous avons supprimé la partie non-linéaire, et la tension. Pour cet exemple, la valeur du paramètre  $\beta$  a été déterminée de manière empirique, soit  $\beta = 0.065$ . La figure V.21 représente le module de la fonction de cohérence après correction, calculée sur la même portion de signal que précédemment.

Cette figure nous permet de constater que le résultat de la correction est positif. En effet, nous remarquons une augmentation de la valeur du module de la fonction de cohérence pour la fréquence 150 Hz. Le fait que cette valeur se rapproche de la valeur maximale 1, suite à la correction effectuée, traduit une amélioration du lien linéaire entre le courant et la tension sur la fréquence 150 Hz. Ceci est en accord avec l'existence, sur ce signal, d'une non-linéarité d'ordre 3.

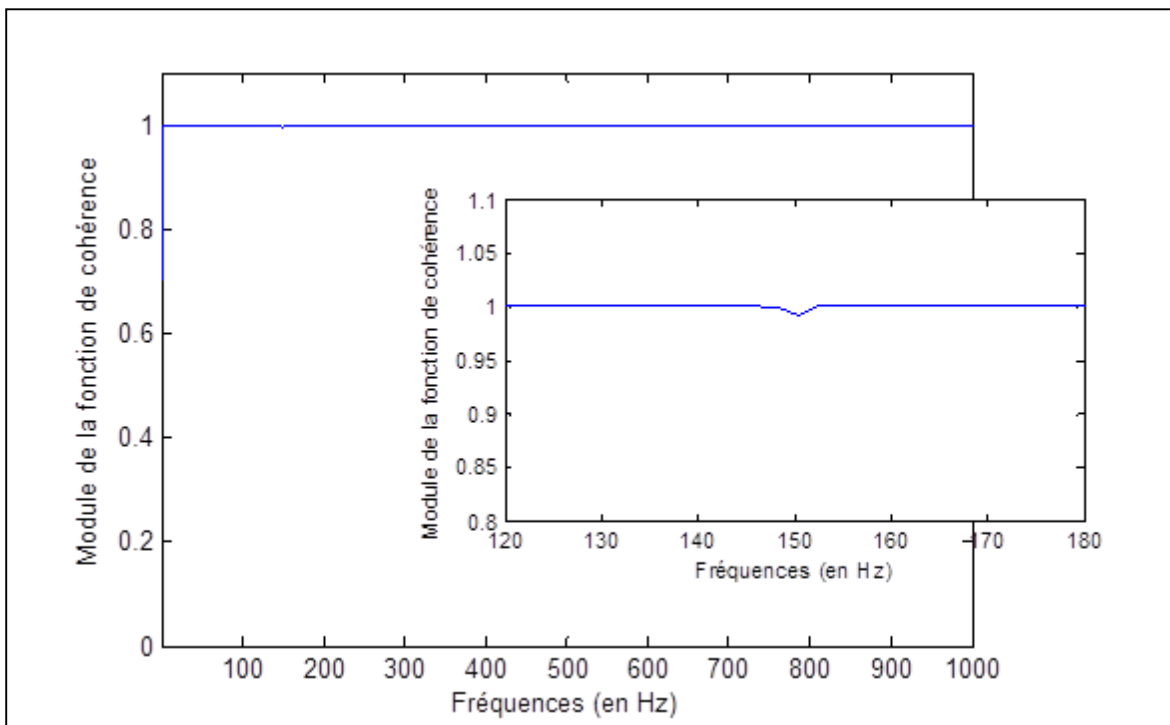


Figure V.21 : Résultat du calcul du module de la fonction de cohérence

Maintenant, nous nous posons la question suivante : l'écart constaté, entre les admittances estimées de la fréquence 150 Hz et les autres fréquences d'intérêt, lors du traitement de ce même signal (cf. V.2.2) est-il une conséquence directe de ce phénomène ?

Afin de répondre à cette question, voyons maintenant si cette correction améliore les résultats des admittances estimées. Pour cela, nous appliquons l'algorithme proposé, sur la tension mesurée et le courant « corrigé ». Le vecteur d'information est donné dans le tableau V.9.

Table V.9 : Vecteur d'information après correction du phénomène non-linéaire

		Transition 1	Transition 2
Début de transition (en s)		1.59	3.9985
Durée de transition (en ms)		1	5
Admittance $F_0^c = 50\text{Hz}$	Module	0.2449	0.2449
	Argument (en °)	-0.25	179.75
Admittance $F_1^c = 150\text{Hz}$	Module	0.2992	0.3056
	Argument (en °)	2.5038	-177.56
Admittance $F_2^c = 250\text{Hz}$	Module	0.2453	0.2463
	Argument (en °)	3.14	-176.32
Admittance $F_3^c = 350\text{Hz}$	Module	0.2428	0.2428
	Argument (en °)	-0.80	179.23
Admittance $F_4^c = 550\text{Hz}$	Module	0.2406	0.2408
	Argument (en °)	-1.58	178.15
Admittance $F_5^c = 650\text{Hz}$	Module	0.2404	0.2380
	Argument (en °)	-1.72	177.42

La première chose que nous pouvons déduire du tableau V.9 est que, les admittances associées aux fréquences d'intérêt sont mieux estimées et qu'elles correspondent plus aux résultats attendus suite à un traitement sur des signaux issus de mesures aux bornes d'une résistance. En effet, nous pouvons voir que le module de chacune des admittances estimées est quasiment identique. De même que l'estimation du module de l'admittance sur la fréquence 150 Hz est nettement plus proche de la vraie valeur ; cette dernière est passée d'environ 0.4 avant correction à 0.3 après correction.

De plus, nous retrouvons ici le fait que le courant et la tension sont en phase quelle que soit la fréquence. Souvenons-nous qu'avant correction, l'argument de l'admittance de la fréquence 150 Hz était :  $\arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_1'')) = 47.92^\circ$  et  $\arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_2'')) = 132.82^\circ$ , contre  $\arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_1'')) = 2.5038^\circ$  et  $\arg(\hat{h}(F^c, \hat{\tau}_2'')) = -177.56^\circ$  après correction.

Nous pouvons finalement constaté que les résultats fournis ici correspondent plus au fonctionnement d'une résistance.

## V.4 Amélioration : Détection à seuil fixe

Jusqu'à présent, le module de détection consistait à comparer l'erreur de prédiction  $E_1$  à un seuil prédéfini (de même pour  $E_2$ ). Le calcul de ce seuil n'a pas été présenté dans le manuscrit, cependant nous avons vu que la valeur de ce dernier dépend, entre autres, des fréquences négligées. L'intérêt d'utiliser les erreurs de prédiction réside aussi dans le fait qu'elles nous permettent de vérifier la précision de nos estimations.

Précédemment nous avons mis en place un modèle conditionné par le paramètre  $N_2$  permettant de tenir compte de la présence d'une transition dans la fenêtre. Nous nous sommes aperçus, en développant la méthode d'estimation, que l'estimation du paramètre  $\theta$  au sens des moindres carrés dépend de  $N_2$ . Nous pouvons donc réécrire le critère uniquement en fonction du paramètre  $N_2$ , soit :

$$C(N_2) = \|X - W(N_1, N_2) \cdot \hat{\theta}(N_2)\|^2 = \|X - W(N_1, N_2) \cdot (W(N_1, N_2)^H W(N_1, N_2))^{-1} W(N_1, N_2)^H X\|^2.$$

La figure V.22 montre l'évolution du paramètre  $N_2$  estimé avant, pendant et après la présence d'une transition dans la fenêtre d'observation. Pour le cas a), nous choisissons un modèle contenant toutes les fréquences présentes dans le signal traité et pour le cas b), une fréquence est négligée.

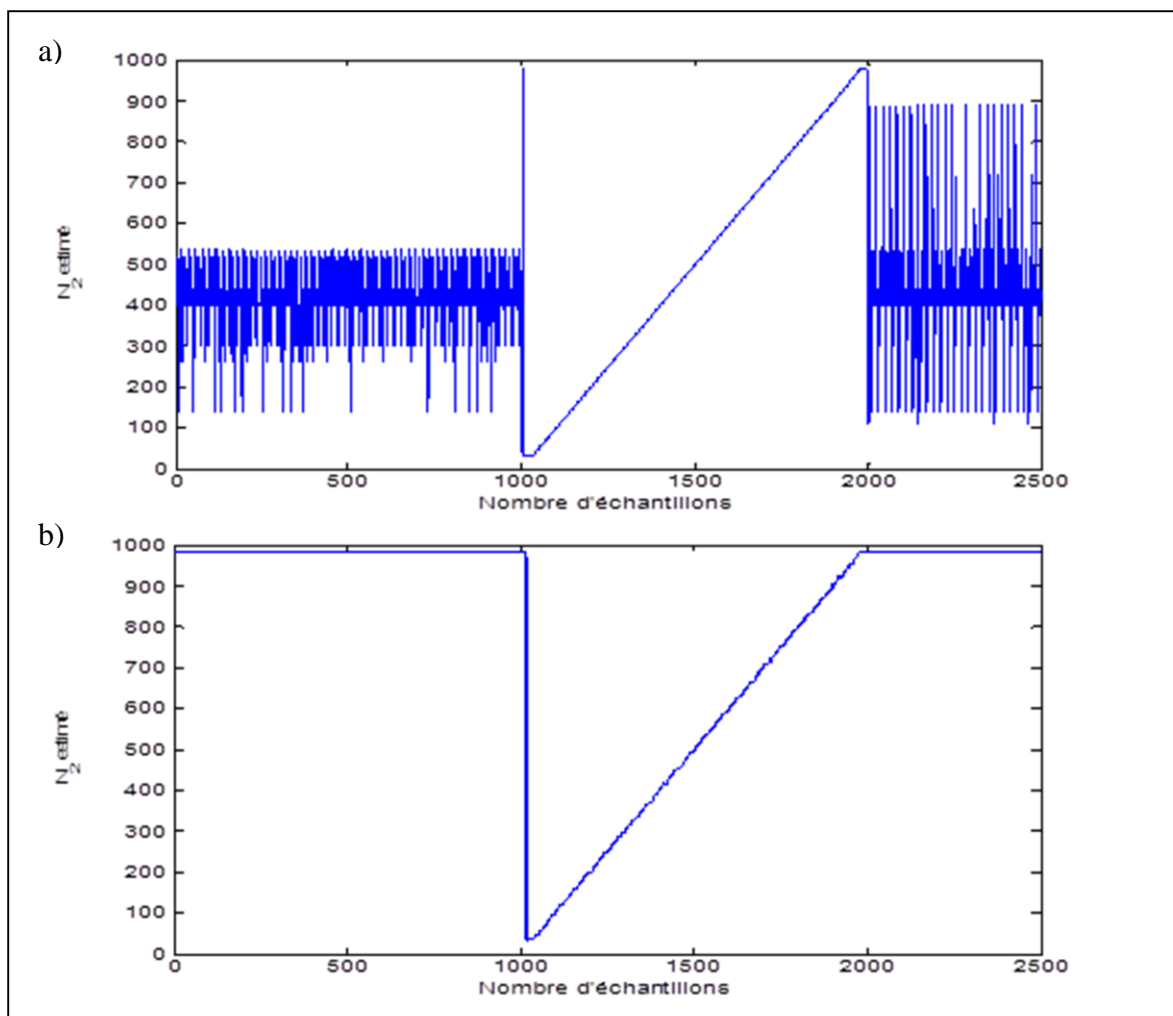


Figure V.22 : Evolution de  $\hat{N}_2$  lorsque a) le modèle contient toutes les fréquences et b) une fréquence est négligée

Nous constatons grâce à la figure V.22 que l'estimation de ce paramètre  $N_2$  évolue linéairement uniquement dans les zones transitoires. En effet, comme deux fenêtres d'analyse consécutives sont décalées d'un échantillon, cela implique que la portion de signal sur laquelle se superposent les états  $.^1$  et  $.^2$  contient un échantillon de plus, c'est pourquoi  $N_2$  évolue linéairement.

Sachant cela, nous proposons d'utiliser l'estimation de  $N_2$  pour effectuer la détection d'évènements. De ce fait, on s'affranchit du seuil de détection sur l'erreur de prédiction qui dépend de nombreux paramètres. En effet, étant donné que dans les zones transitoires le paramètre  $N_2$  évolue de manière linéaire, il suffira de comparer ses estimations à la forme attendue, en l'occurrence une rampe de pente unité.

Nous proposons donc une méthode de détection basée sur l'estimation de ce paramètre  $N_2$ .

### V.4.1 Principe

La procédure consiste donc à effectuer, à chaque instant  $\tau_n$ , l'estimation du paramètre  $N_2$  en minimisant le critère suivant :

$$C(N_2) = \left\| X - W(N_1, N_2). \left( W(N_1, N_2)^H W(N_1, N_2) \right)^{-1} W(N_1, N_2)^H X \right\|^2.$$

Ensuite, à partir des estimations de  $N_2$ , il nous faut déterminer les endroits sur lesquels  $N_2$  évolue comme une rampe. Pour cela, nous calculons l'écart par rapport à une rampe, c'est-à-dire la norme de l'erreur entre plusieurs estimations consécutives de  $N_2$  et une rampe théorique. Précédemment nous avons constaté que le seuil pouvait varier, tandis que l'écart par rapport à la rampe devrait être proche de zéro lorsque l'évolution des estimations de  $N_2$  coïncide avec cette dernière. Donc, un évènement est détecté lorsque cette erreur est proche de zéro.

De cette manière l'erreur dépend uniquement de la qualité de la rampe. L'erreur étant maintenant indépendante des variations d'amplitudes (de la charge), cela nous offre la possibilité d'utiliser un seuil fixe.

L'idée serait finalement d'utiliser cet algorithme uniquement pour détecter les évènements. Ensuite, l'extraction de caractéristiques est réalisée par l'algorithme proposé dans la partie V.1.

**Remarque :**  $\hat{N}_2$  devrait démarrer à 0 et évoluer linéairement jusqu'à  $N_1$  mais en pratique nous choisissons un intervalle de garde, afin d'éviter des problèmes d'inversibilité de matrices.

**Remarque :** une image de ce critère en fonction du ce paramètre  $N_2$  est donnée dans l'annexe F.

## V.4.2 Validation

Afin de valider l'approche proposée, nous présentons un exemple de traitement sur un signal simulé. Pour ce traitement, nous choisissons des fenêtres d'observations de 1000 échantillons.

Pour cela, nous simulons un signal contenant les fréquences 50, 150 et 250 Hz, d'amplitudes 5,  $5 \cdot 10^{-3}$  et 1 et de phases nulles. Nous simulons deux événements dont les amplitudes sont  $A = [0.25, 5 \cdot 10^{-3}, 0.1]$  et les phases  $\varphi = [60, 90, 0]^\circ$ . Et deux autres, encore plus faibles, d'amplitudes  $A = [0, 5 \cdot 10^{-3}, 0.04]$  et de phases  $\varphi = [45, 30, 15]^\circ$ .

Nous avons ici des événements provoquant des variations d'amplitudes faibles, voire très faibles.

La figure V.23 montre le courant simulé.

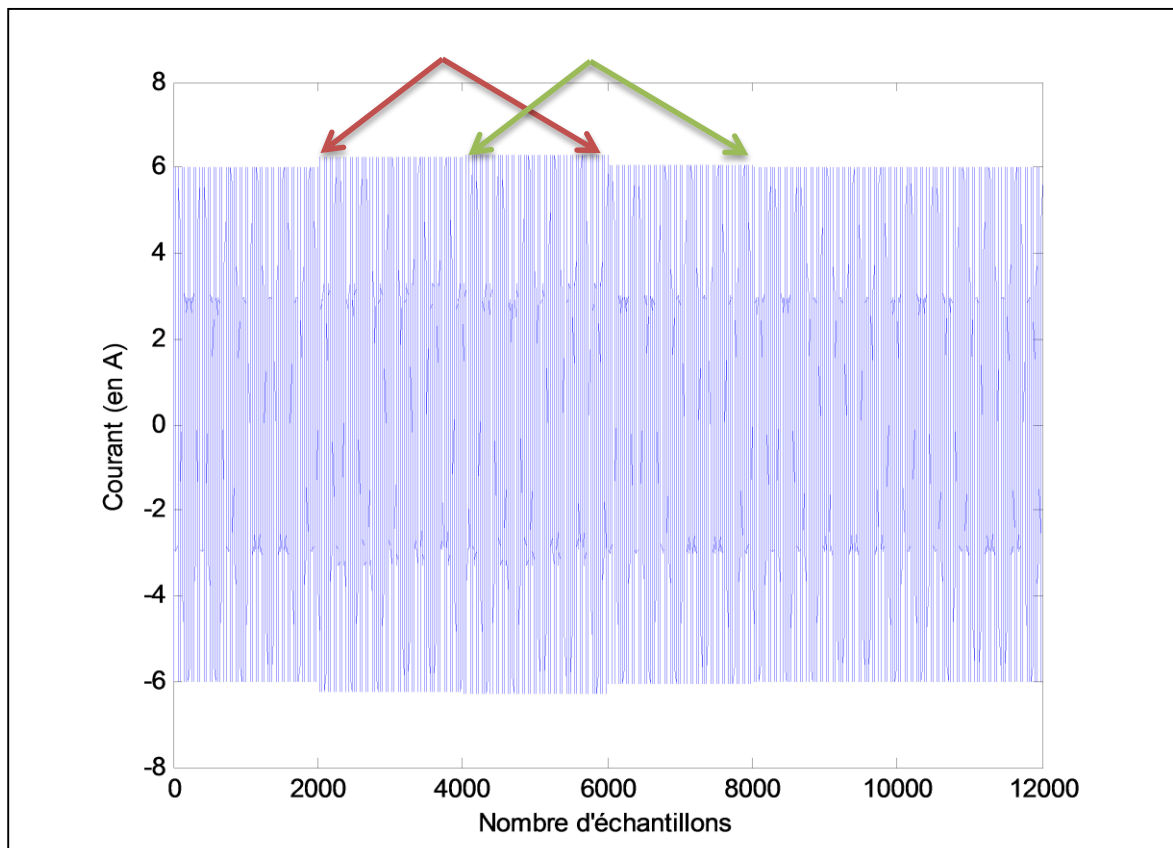


Figure V.23 : Signal simulé

## Cas n°1

Nous appliquons maintenant la méthode proposée sur cette simulation en choisissant un modèle contenant toutes les fréquences.

La figure V.24 montre le résultat du traitement. Cette dernière représente en a) le résultat de l'estimation du paramètre  $N_2$ , où nous voyons apparaître 4 rampes correspondant aux 4 zones transitoires. La figure b) montre l'erreur entre les estimations de  $N_2$  et la rampe. Cette dernière présente 4 minimums proches de 0. Nous constatons donc que cette erreur est indépendante des variations d'amplitude du signal. En appliquant un seuil, on peut facilement détecter les 4 événements. La figure c) montre le résultat de la détection.

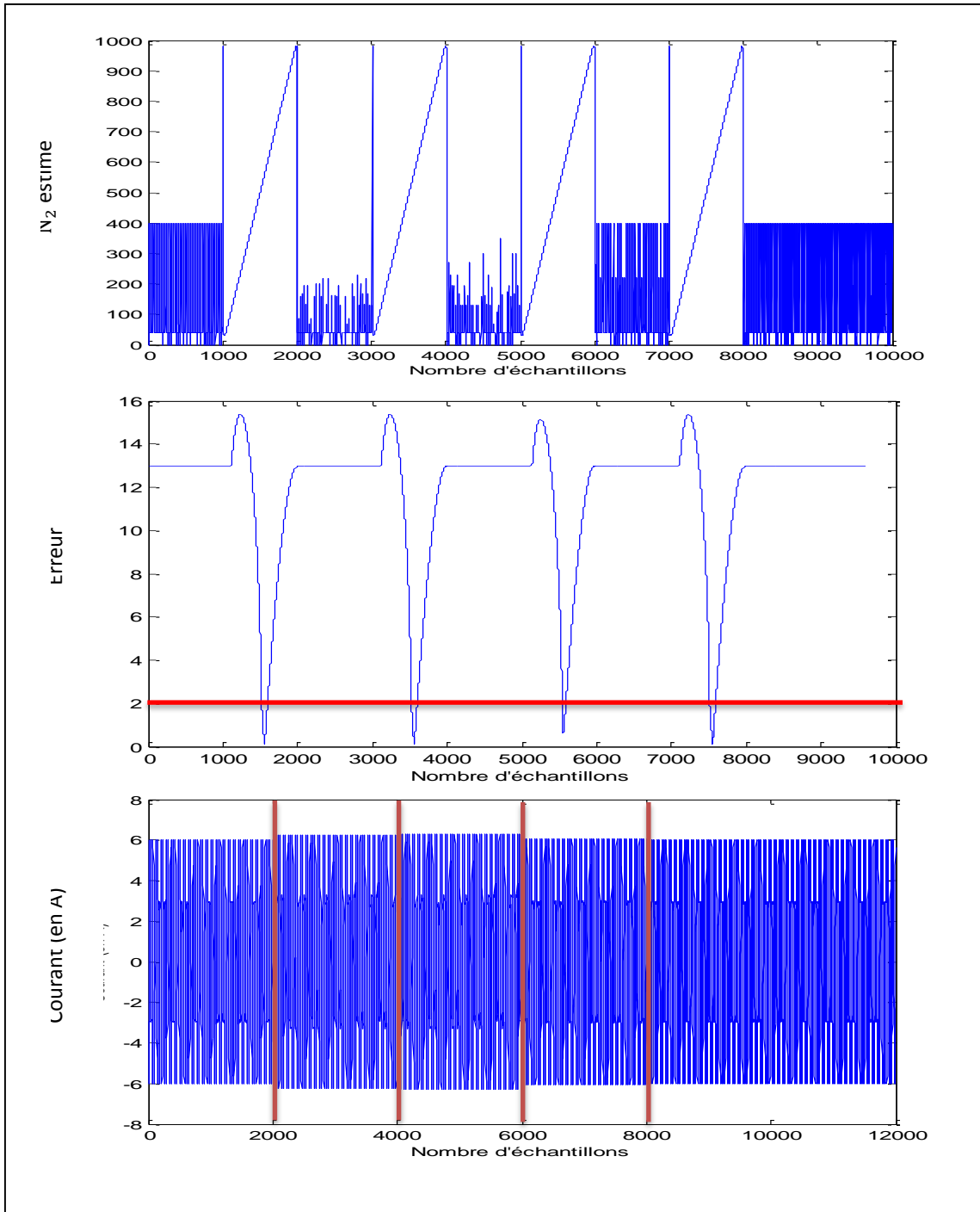


Figure V.24 : a) évolution de l'estimation de  $N_2$  à chaque instant, b) résultat de l'écart avec la rampe, c) résultat de la détection

## Cas n°2

Nous reprenons ici l'exemple précédent mais cette fois en négligeant la fréquence 250 Hz. La figure V.25 montre le résultat du traitement. Cette dernière représente en a) le résultat de l'estimation du paramètre  $N_2$ , la figure b) montre l'erreur entre les estimations de  $N_2$  et la rampe théorique. Et la figure c) montre le résultat de la détection.

Au regard des estimations de  $N_2$ , nous retrouvons encore 4 rampes correspondant aux 4 événements présents. Néanmoins, nous constatons que 2 d'entre elles sont dégradées. Ces dernières correspondent aux variations d'amplitude les plus faibles. Ensuite sur l'erreur par rapport à la rampe, nous remarquons que le niveau de l'erreur a augmenté pour les 2 rampes qui se sont dégradées. Cependant, nous pouvons encore une fois placer un seuil qui nous permettra facilement de détecter les 4 événements. Notons que le seuil est cette fois plus élevé que précédemment. Ceci montre en effet que l'erreur dépend de la qualité de la rampe.

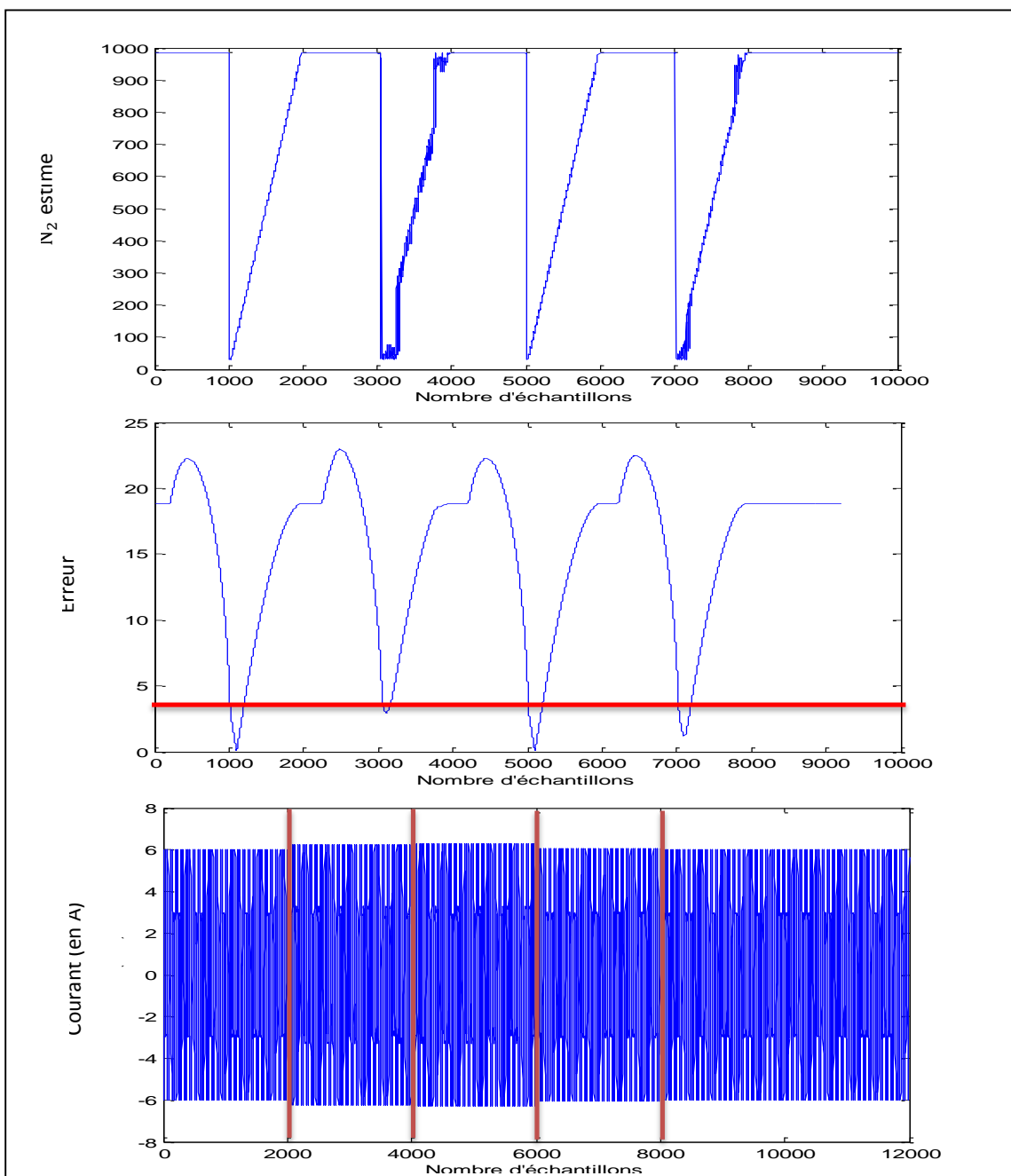


Figure V.25 : a) évolution de l'estimation de  $N_2$  à chaque instant, b) résultat de l'écart avec la rampe, c) résultat de la détection

### V.4.3 Application à des mesures réelles

#### Exemple n°1

Nous présentons ici un exemple sur des mesures réelles. Pour ce traitement, nous choisissons des fenêtres d'observations de 503 échantillons et un modèle composé uniquement de la fréquence fondamentale 50 Hz. La figure V.26 montre le résultat du traitement.

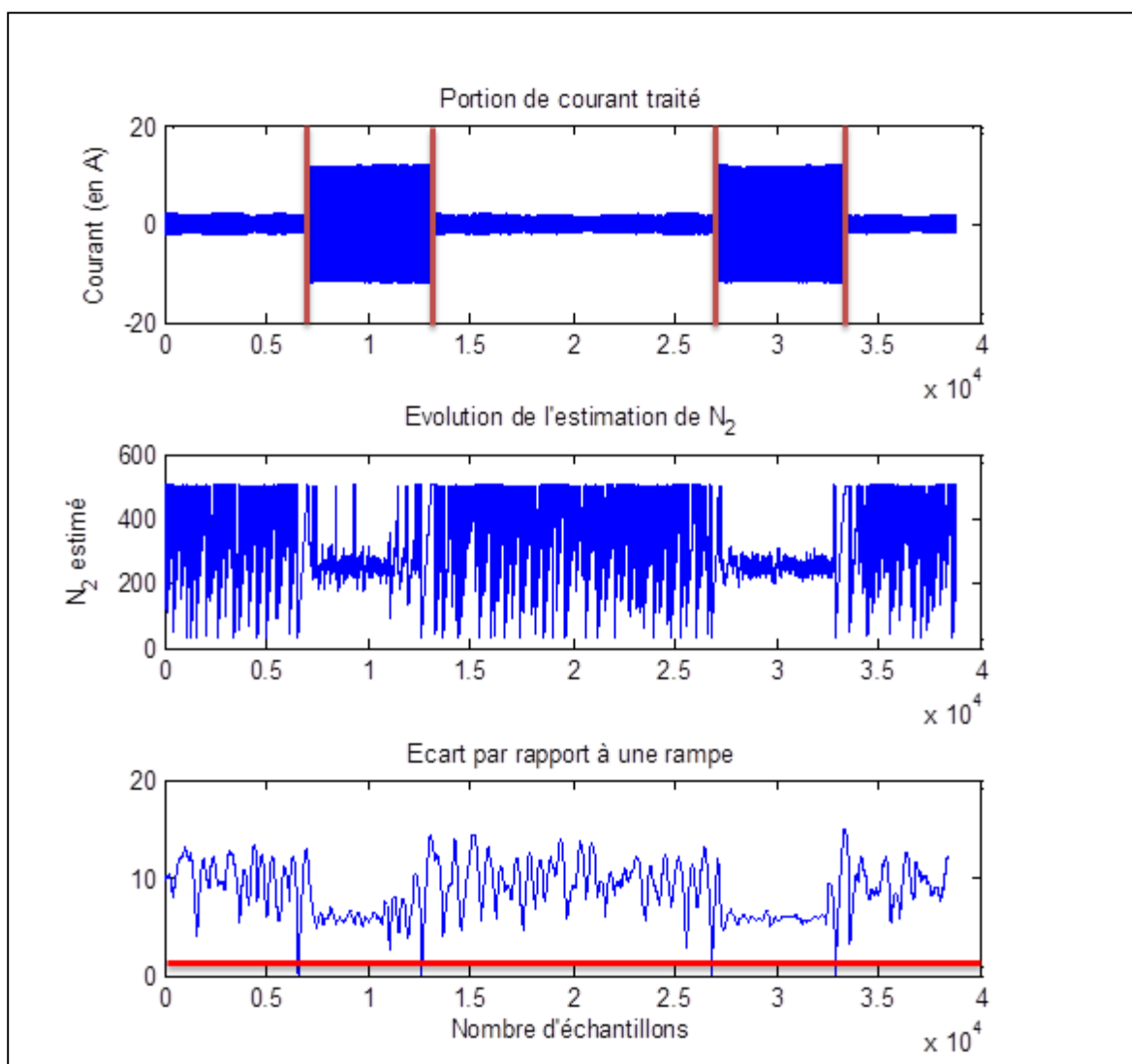


Figure V.26 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de N<sub>2</sub> à chaque instant, c) résultat de l'écart avec la rampe

Sur cette figure on constate que seuiller l'erreur, afin de conserver uniquement ce qui se trouve en dessous, nous permet de détecter les 4 événements présents.

Ce premier exemple nous permet de constater que la méthode proposée ici permet effectivement de détecter les événements qui surviennent sur le courant.



## Exemple n°2

Prenons un autre exemple de traitement sur des mesures réelles.

### Cas n°1

De la même manière que précédemment, nous choisissons un modèle composé uniquement de la fréquence fondamentale 50 Hz.

#### Sur le courant

La figure V.27 montre le résultat du traitement sur le courant.

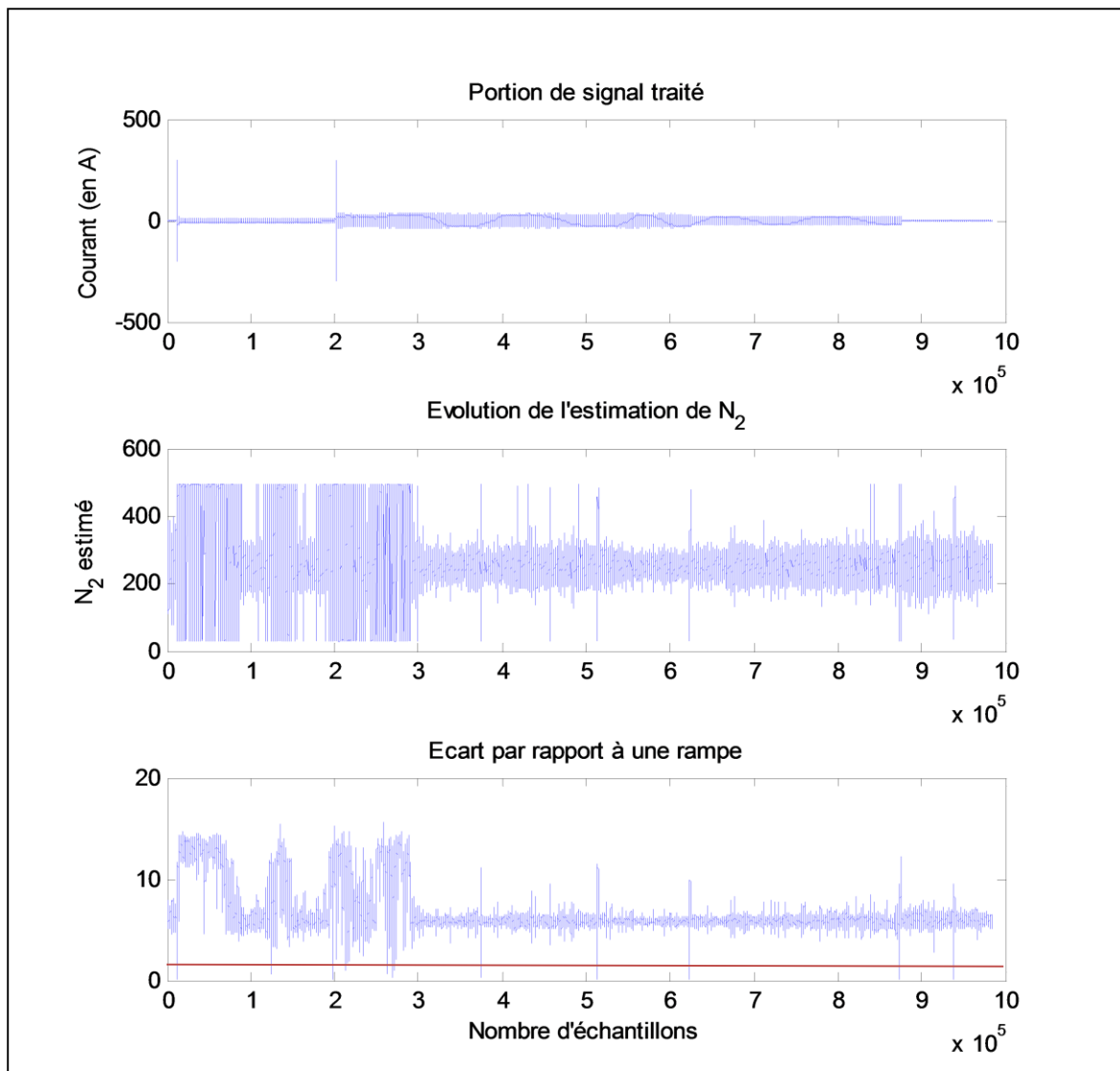


Figure V.27 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de  $N_2$ , c) EQM avec la rampe

Nous pouvons constater sur cette figure que l'erreur entre les  $N_2$  estimés et la rampe atteint des petites valeurs, même à des endroits où *a priori* il n'y a pas d'évènement.

Ceci est confirmé par la figure V.28 qui montre les événements détectés suite au seuillage de cette erreur.

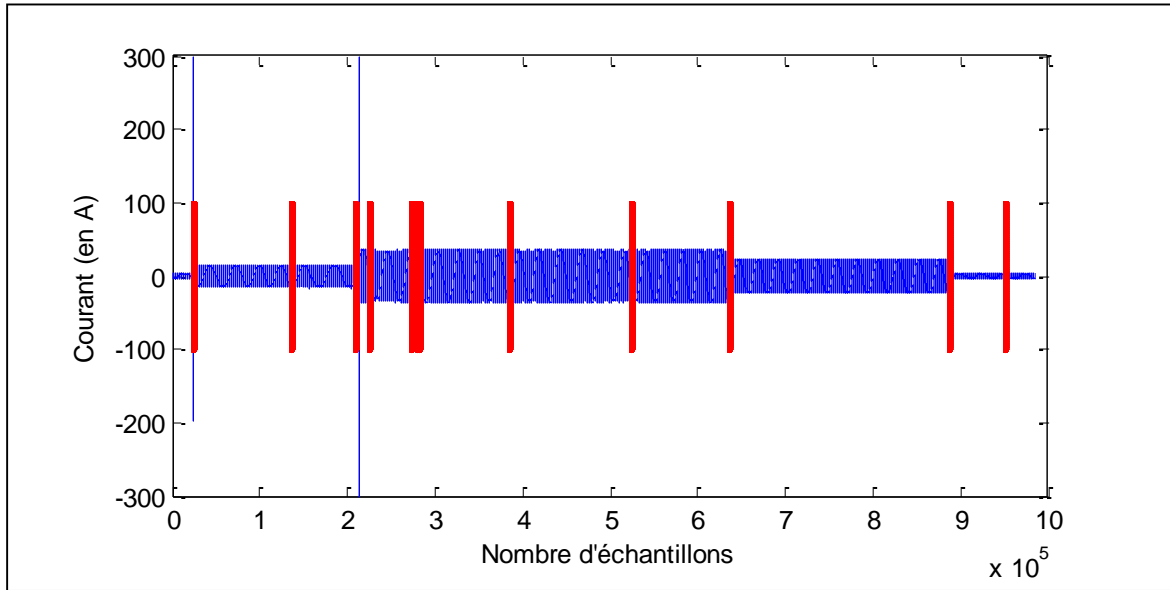


Figure V.28 : Résultat de la détection

Nous serions tentés de dire que ce sont des fausses alarmes mais en réalité, pour notre algorithme, ce sont vraiment des événements. La méthode mise en place consiste à détecter tout changement par rapport à un état actuel. Et en regardant le courant de plus près, c'est-à-dire aux instants où *a priori* il n'y a pas d'événements, nous constatons qu'il y a effectivement une modification qui se produit sur le courant. La figure V.29 montre le courant autour du dernier instant de transition estimé. Cette figure confirme effectivement qu'il existe un changement, même s'il est de faible amplitude.

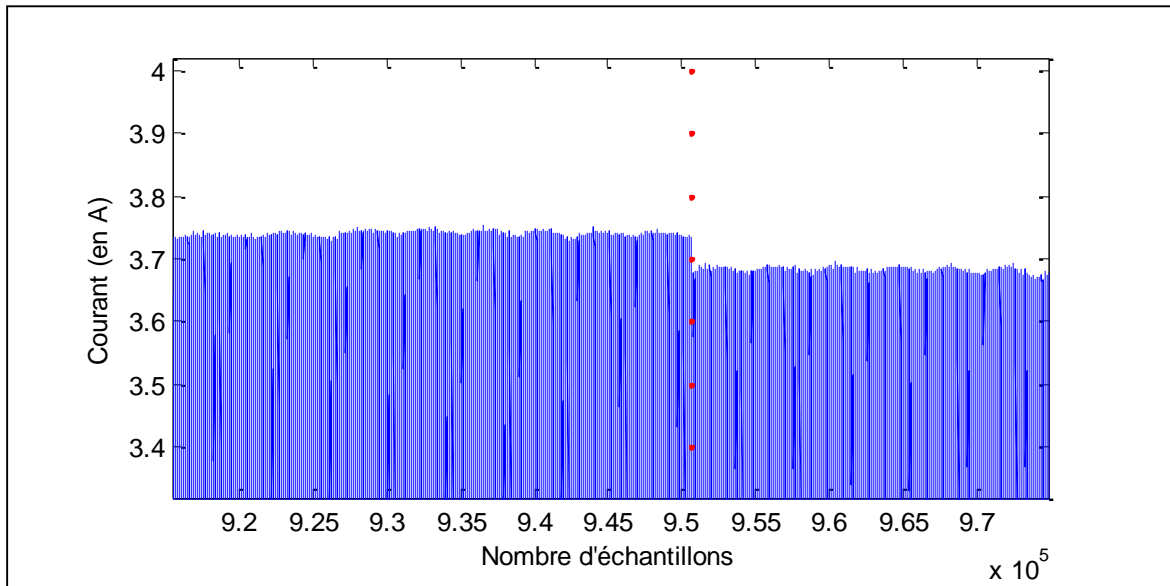


Figure V.29 : zoom sur le dernier événement détecté

#### V.4 Amélioration : Détection à seuil fixe

**Remarque :** Nous constatons cependant que le démarrage du deuxième moteur n'a pas été détecté. Précisons toutefois que cela n'est absolument pas lié à la méthode proposée mais à la mesure elle-même. En effet, comme nous pouvons le voir sur la figure V.30 le courant est en saturation durant cette transition, cette saturation engendre une cassure dans l'évolution de  $\hat{N}_2$  et par conséquent une erreur avec la rampe qui passe au-dessus du seuil.

Si la mesure ne présentait pas ces saturations, la méthode proposée aurait détecté cet évènement de la même manière qu'elle a détecté le premier démarrage. C'est donc un problème lié au matériel de mesure.

Notons toutefois que l'erreur entre les  $\hat{N}_2$  et la rampe est proche du seuil. Mais en l'augmentant légèrement, cet évènement peut être détecté. Ceci illustre bien le fait que le seuil est choisi uniquement en fonction de la qualité de la rampe que l'utilisateur se fixe.

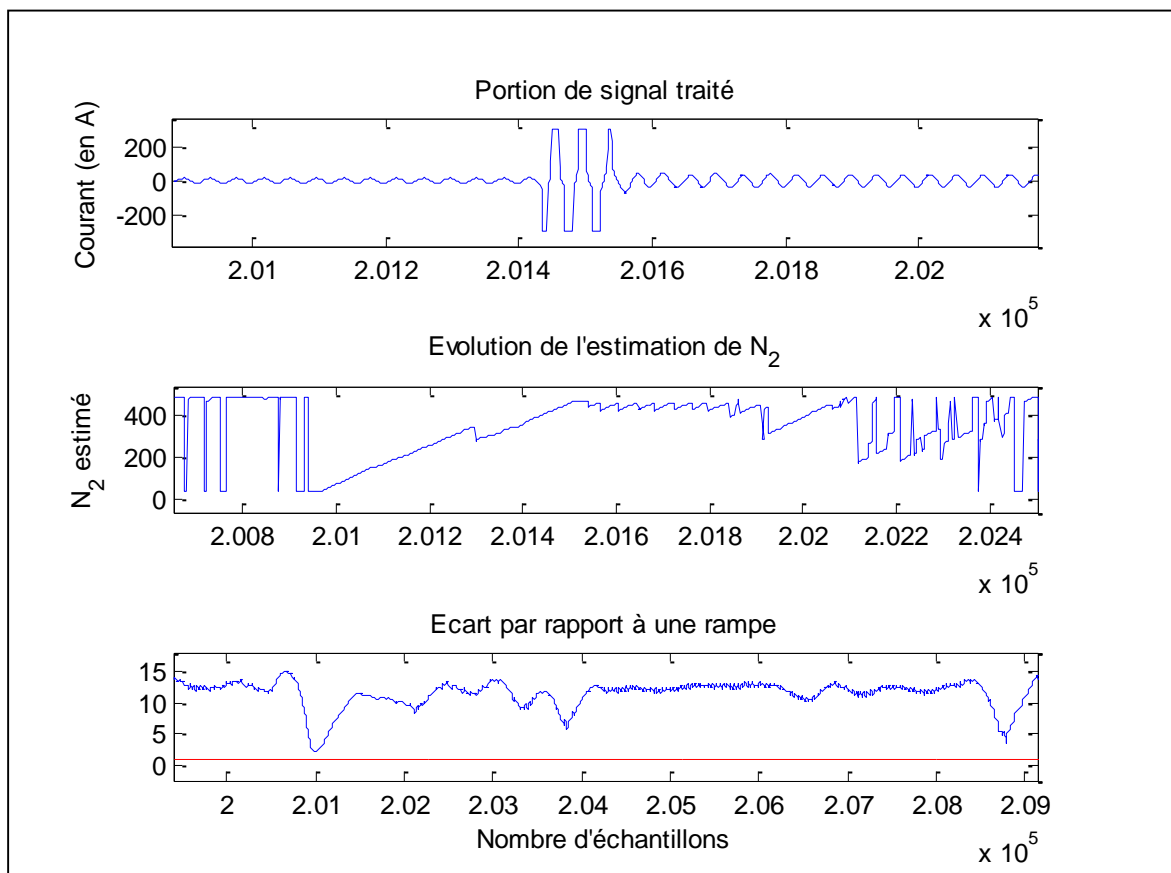


Figure V.30 : Illustration du problème lié à la deuxième transition longue

Finalement, nous avons pu constater que cette approche est assez fine et précise car elle permet de détecter des variations de faible amplitude. Notons que l'utilisateur (ou l'expert) pourra ensuite déterminer les transitions qu'il souhaite conserver ou non.

Nous avons vu dans l'état de l'art que certains auteurs effectuaient la détection d'évènements uniquement à partir de la mesure de tension. Pour cela, ces derniers se basent sur le fait que lorsqu'un évènement se produit sur le courant il crée une variation de tension. Cependant souvenons-nous que ce type d'approche nécessite une fréquence d'échantillonnage très élevée. Nous avons vu ici que la méthode proposée permet de détecter des évènements bien qu'ils soient de faible amplitude. Il serait donc intéressant de voir si elle est capable de détecter des évènements à partir de la mesure de tension. Le cas échéant, elle aurait l'avantage de ne pas imposer une fréquence d'échantillonnage trop élevée.

*Sur la tension*

Nous proposons ici d'appliquer la même méthode que précédemment mais cette fois ce sera sur la mesure de tension.

Pour cela, nous reprenons l'exemple précédent. Le résultat est représenté dans la figure V.31.

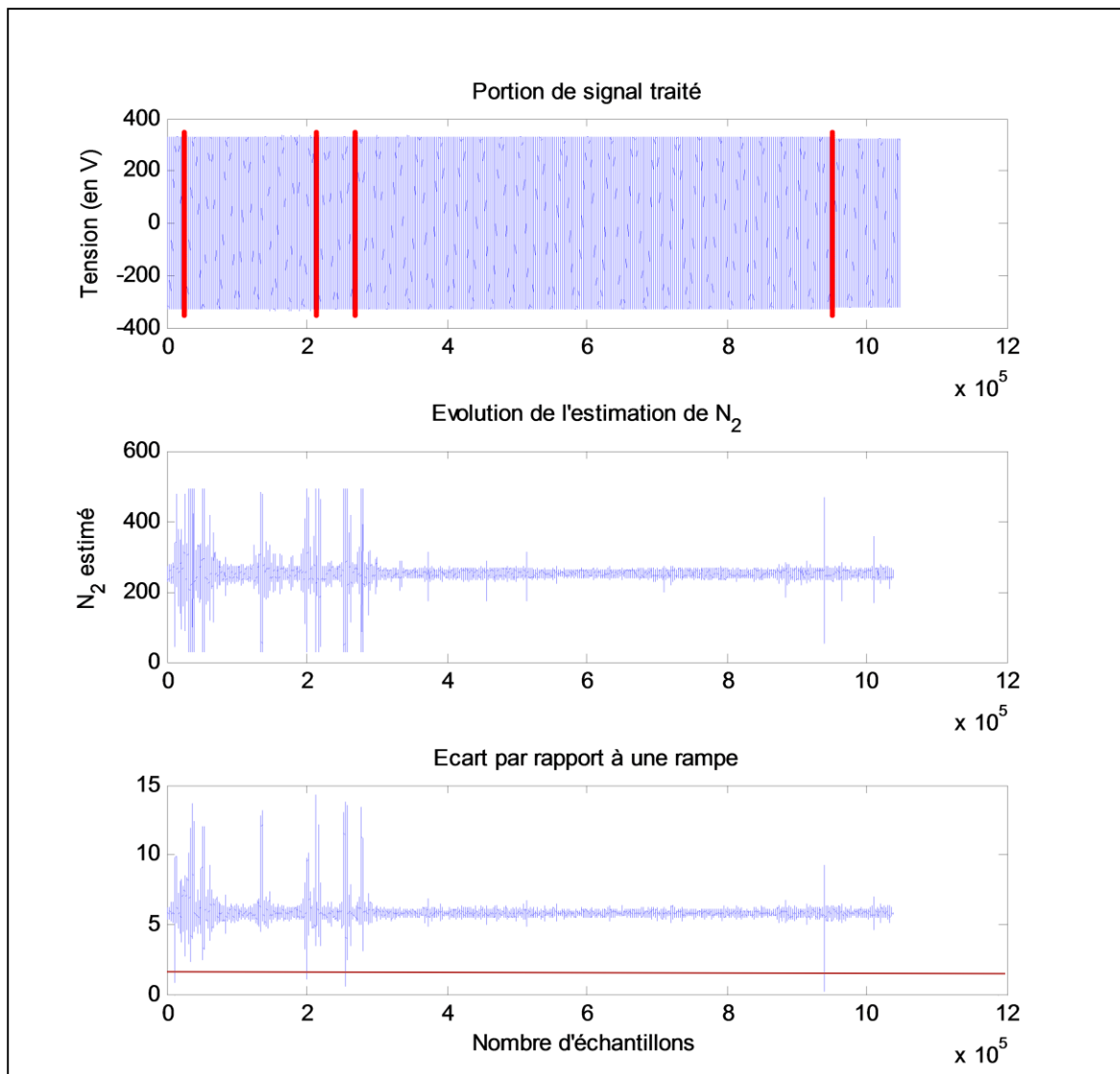


Figure V.31 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de  $N_2$ , c) EQM avec la rampe

Ces résultats nous montrent tout d'abord que le traitement sur la tension permet de détecter 4 évènements contre 12 sur le courant. Cependant cette figure ne nous permet pas de savoir si les variations de tension qui ont été détectées correspondent à des évènements qui se sont également produits sur le courant. Ces variations de tension pourraient provenir d'un autre client car comme il a été dit précédemment tous les clients connectés au même niveau sur le réseau perçoivent les variations de tension.

Afin de vérifier la pertinence des évènements détectés, nous proposons de comparer les transitions détectées ici avec celles détectées précédemment, c'est-à-dire les résultats obtenus en traitant le courant.

#### V.4 Amélioration : Détection à seuil fixe

La figure V.32 montre le courant mesuré ainsi que les instants de transition estimés sur la tension (en rouge) et sur le courant (en vert).

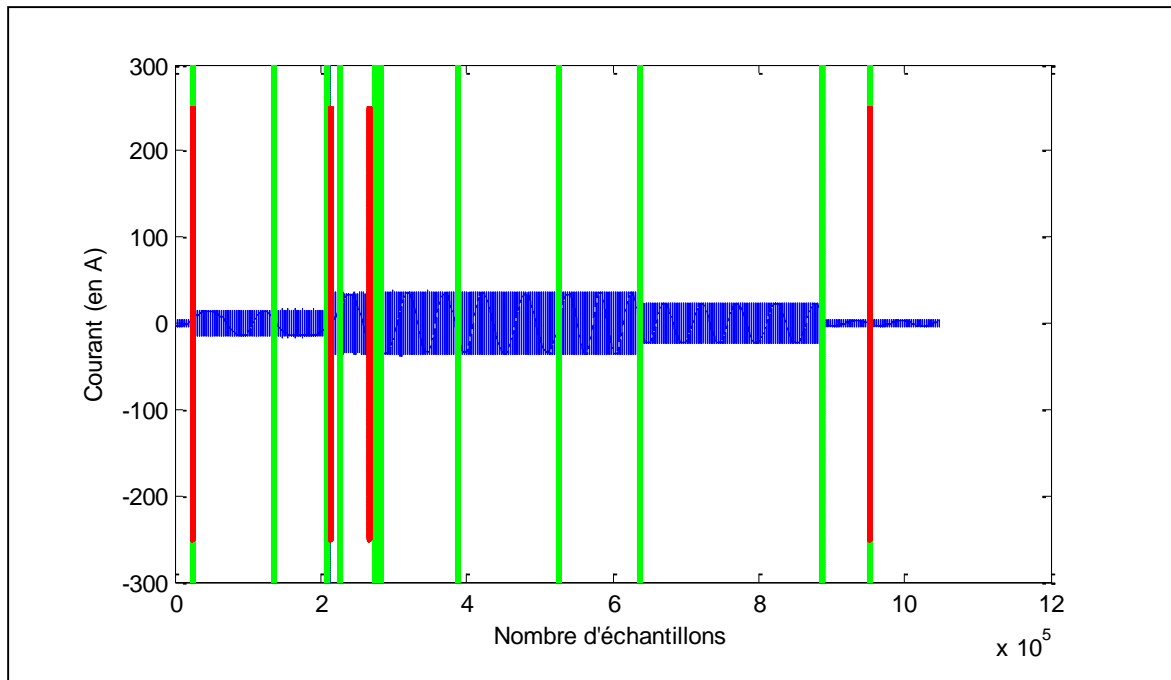


Figure V.32 : Comparatif entre les instants de transition estimés sur la tension (en rouge) et sur le courant (en vert)

Cette figure nous permet de constater que certaines transitions se retrouvent sur le courant et sur la tension contrairement à d'autres.

Nous pouvons noter que le traitement sur la tension n'a pas permis de détecter les deux fronts descendants (autour  $6.2$  et  $9 \times 10^5$ ). Cependant nous constatons également que la deuxième transition longue, qui n'avait pas été détectée sur le courant, a bien été détectée suite au traitement sur la tension.

La mise en œuvre de la méthode sur la tension nous permet de voir qu'elle offre la possibilité de détecter des événements à partir de la mesure de tension uniquement. Néanmoins, au vu de ces résultats, nous sommes incapables d'affirmer que les variations détectées correspondent à de vraies transitions ou qu'au contraire elles sont introduites par un autre réseau.

Notons qu'il pourrait être intéressant de détecter les phénomènes qui sont à la fois sur le courant et la tension. En effet, si l'on considère qu'une variation détectée uniquement sur la tension ou le courant n'est pas un événement et que c'est le lien entre ces deux grandeurs qui nous intéresse, ceci peut s'avérer judicieux.

*Sur le rapport courant/tension*

Ici nous nous intéressons au cas où l'utilisateur souhaite voir ce qui se passe simultanément sur le courant et la tension. C'est pourquoi nous appliquons la méthode de détection sur le rapport des TFD. Ceci devrait nous permettre de détecter uniquement les événements qui seraient communs au courant et à la tension. La figure V.33 montre les résultats obtenus en traitant le rapport courant/tension.

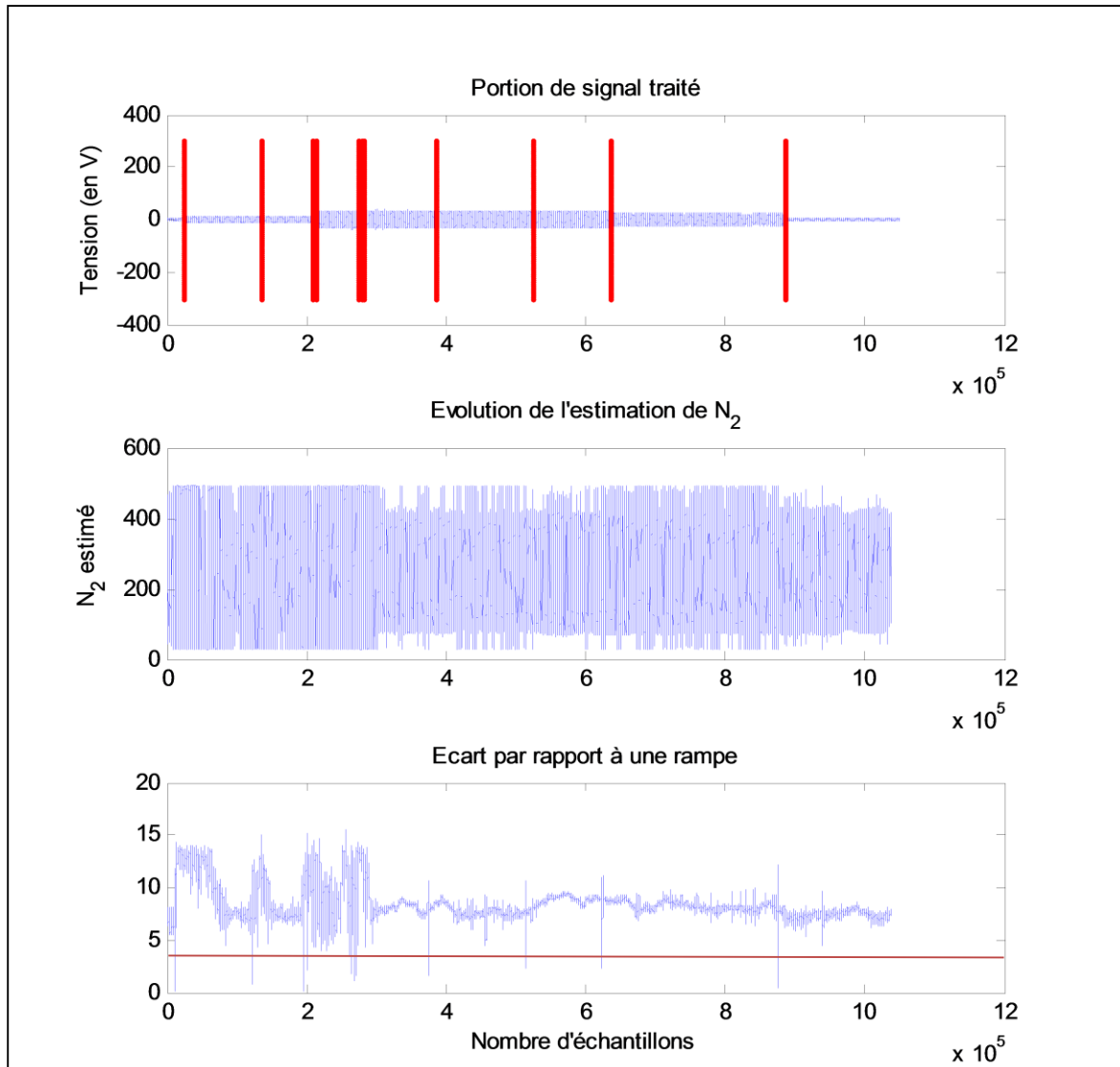


Figure V.33 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de  $N_2$ , c) EQM avec la rampe

Cette fois, la figure V.33 nous montre que l'algorithme a détecté 12 événements. Nous remarquons toutefois que les événements détectés ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux détectés sur le courant. En effet, nous constatons que la seconde transition longue a bien été détectée, ce qui n'a pas été le cas sur le courant seul. De plus, le traitement sur le courant seul et la tension seule avait détecté un événement autour de l'échantillon numéro  $9.5 \times 10^5$ , or nous constatons qu'ici il n'a pas été détecté.

Nous pouvons tout de même constater que les 4 événements que nous percevons à l'œil ont parfaitement été détectés.

## Cas n°2

Jusqu'ici, nous avons appliqué notre méthode avec un modèle composé uniquement de la fréquence fondamentale (nous avons choisi de détecter les changements sur le 50Hz). Cependant compte tenu de notre modèle, nous avons également la possibilité de choisir d'autres fréquences. La figure V.34 montre les résultats fournis par la méthode proposée lorsque l'on choisit un modèle composé des fréquences 50, 150 et 250 Hz.

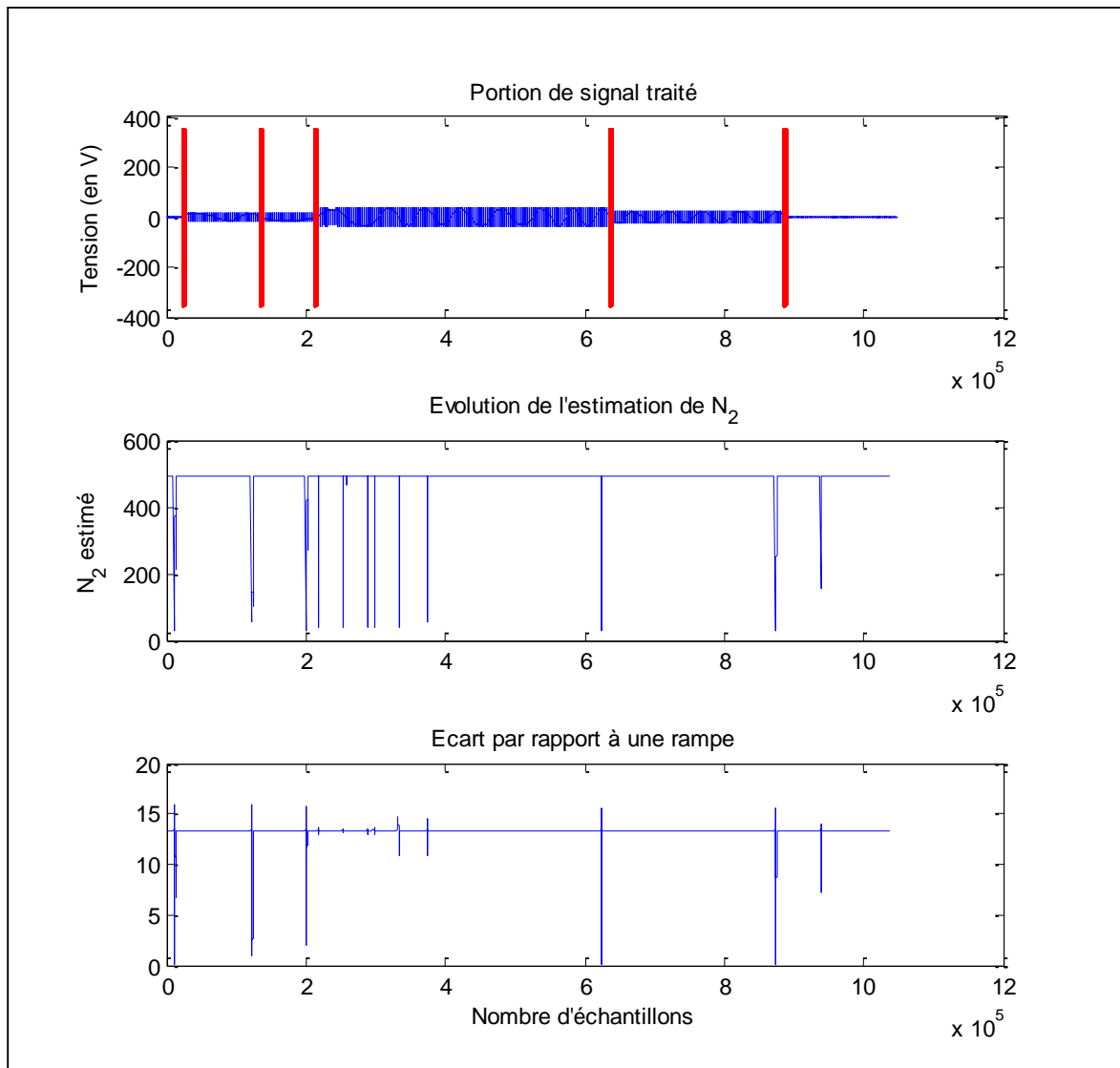


Figure V.34 : a) portion de signal traité, b) évolution de l'estimation de  $N_2$ , c) EQM avec la rampe

En comparant les résultats de la figure V.34 à ceux de la figure V.27, nous constatons que l'évolution des  $\hat{N}_2$  est beaucoup plus lisse. Le fait qu'elle soit constante sur les états stationnaires et qu'elle varie dans les zones transitoires correspond plus à ce à quoi nous nous attendions. Ceci s'explique par le fait qu'ici nous utilisons un modèle plus complet alors que jusqu'à présent nous faisons coller un modèle contenant une fréquence pure à un signal qui en contient un certain nombre. Nous constatons que l'algorithme détecte moins d'événements mais que les 4 événements que nous pouvons voir « à l'œil » ont parfaitement été détectés (approche plus sélective).

### Exemple n°3

Nous confrontons maintenant la méthode proposée à un signal réel plus complexe contenant *a priori* 10 évènements visible « à l'œil ». La figure V.35 montre le courant traité.

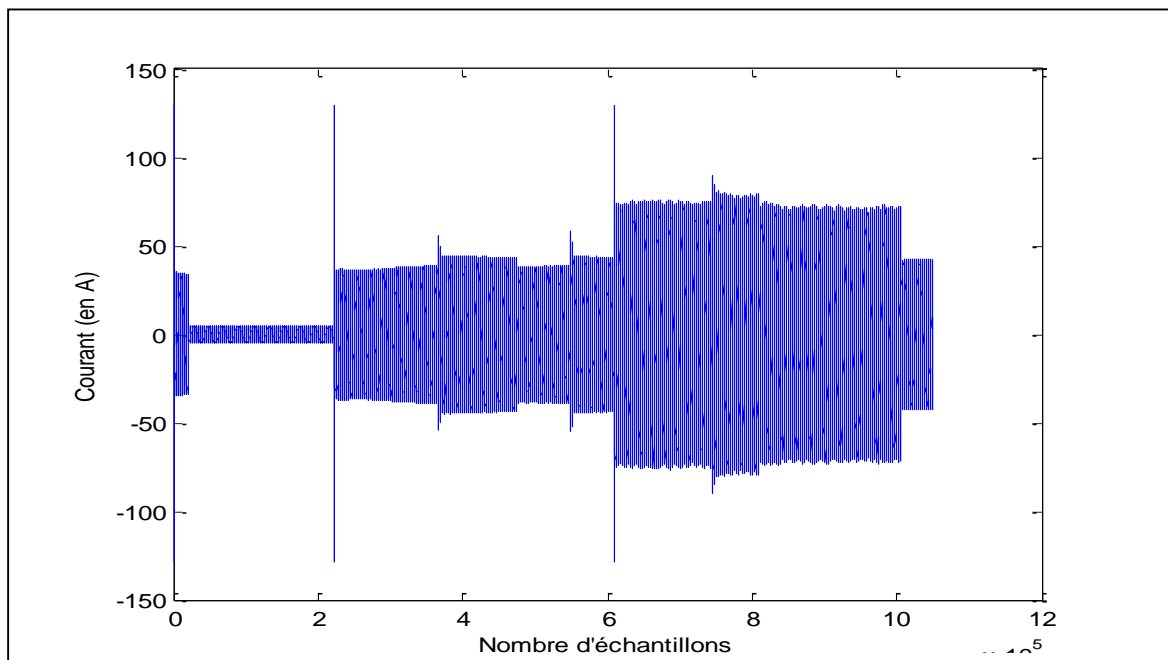


Figure V.35 : Mesure réelle traitée

### Cas n°1

Tout d'abord nous effectuons le traitement sur le courant en prenant un modèle contenant uniquement la fréquence 50Hz. La figure V.36 montre le résultat de la détection. Sur cette dernière nous constatons que l'algorithme a détecté 14 évènements.

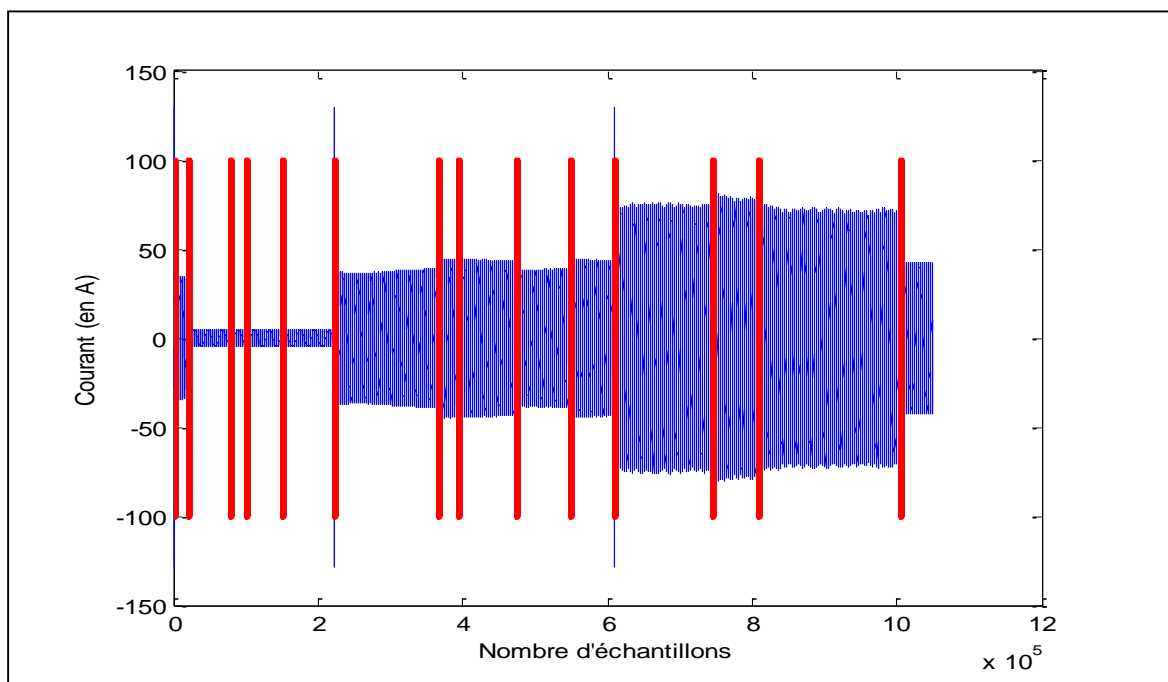


Figure V.36 : Résultat de la détection



## Cas n°2

Cette fois, nous choisissons un modèle composé des fréquences 50, 150 et 250 Hz.

### *Sur le courant*

La figure V.37 montre le résultat de la détection sur le courant.

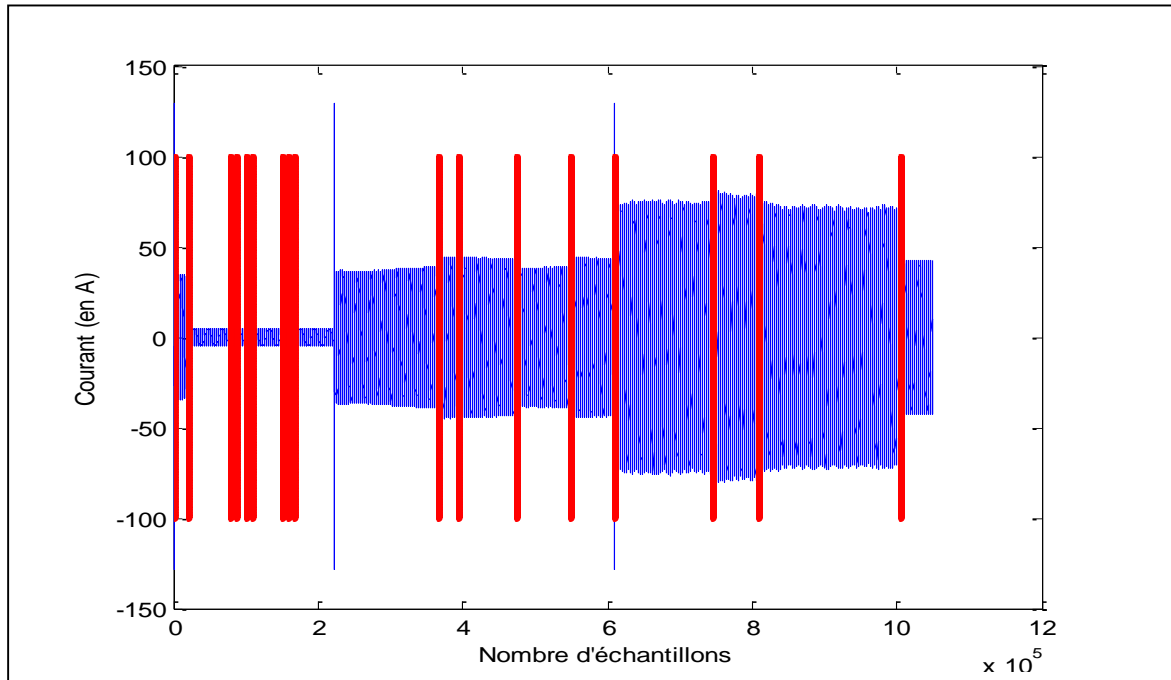


Figure V.37 : Résultat de la détection

Cette fois, l'algorithme a détecté 18 évènements contre 14 précédemment. Ceci est lié au modèle qui est plus complet. En effet plus il est complet plus il est capable de détecter les variations de faible amplitudes.

*Sur le rapport courant/tension*

Nous appliquons maintenant la méthode proposée sur le rapport des TFD du courant et de la tension afin de se focaliser sur les phénomènes que se produisent simultanément sur ces deux grandeurs. La figure V.38 montre le résultat de la détection en traitant le rapport courant/tension

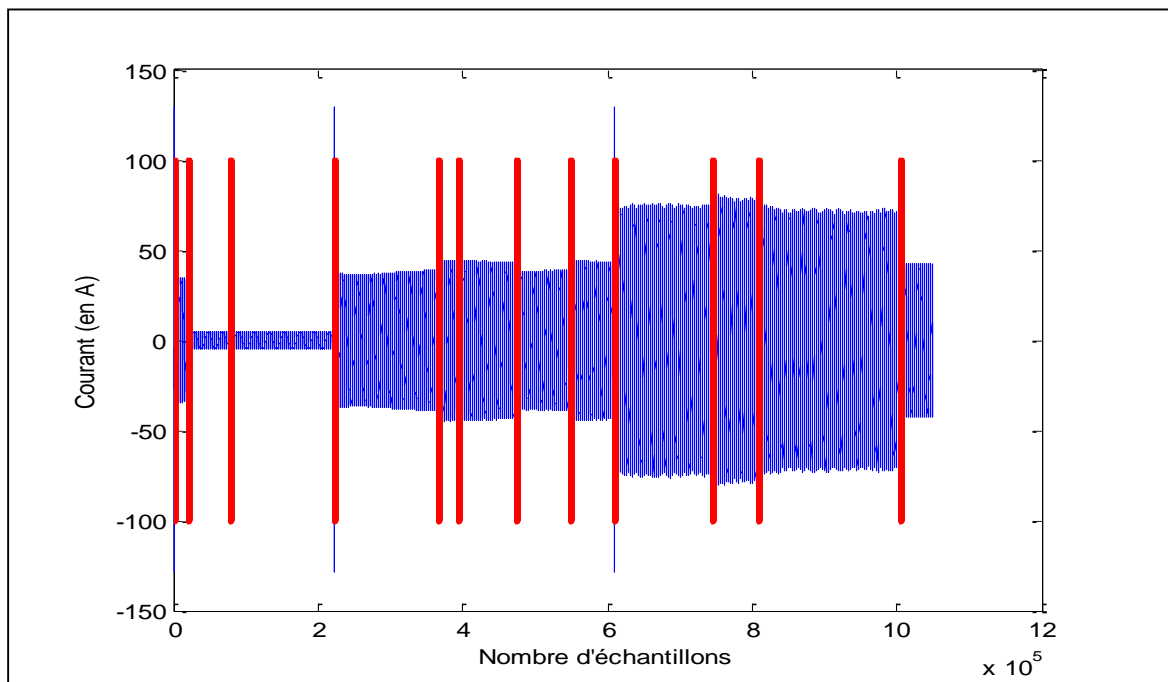


Figure V.38 : Résultat de la détection

Cette fois, l’algorithme a détecté 12 évènements. Contrairement au cas précédent, ici l’algorithme a détecté les évènements qui sont communs au courant et à la tension.

Cette méthode peut ensuite être intégrée à l’algorithme proposé. Elle pourrait être utilisée pour détecter les évènements et ensuite il suffirait d’utiliser l’algorithme d’extraction de caractéristique, tel qu’il a été proposé en V.1, uniquement dans les zones où un évènement a été détecté.

Cette manière de procéder offre l’avantage d’utiliser une méthode de détection dont le seuil ne dépend que de la qualité de la rampe attendue (indépendant de la charge ou des variations d’amplitude) et de plus il permet de diminuer grandement le temps de calcul.

#### V.4 Amélioration : Détection à seuil fixe

Le tableau V.10 regroupe le résultat de l'extraction de caractéristiques effectuée autour des 10 événements visibles à l'œil.

Table V.10 : Vecteur d'information pour les 10 événements visibles

		1	2	3	4	5
<b>Début de transition (en s)</b>		0.7305	10.722	111.0405	183.242	237.496
<b>Durée de transition (en ms)</b>		59	1	62	925.5	2
<b>Admittance <math>F_0^c = 50\text{Hz}</math></b>	<b>Module</b>	0.0848	0.0803	0.0907	0.0157	0.0164
	<b>Argument (en °)</b>	-44.24	132.91	-43.09	-2.52	119.02
<b>Admittance <math>F_1^c = 150\text{Hz}</math></b>	<b>Module</b>	0.2102	0.2193	0.1938	0.0764	0.0769
	<b>Argument (en °)</b>	-57.93	87.50	-109.17	-13.99	132.77
<b>Admittance <math>F_2^c = 250\text{Hz}</math></b>	<b>Module</b>	0.1972	0.1935	0.2093	0.0148	0.0318
	<b>Argument (en °)</b>	-83.14	93.57	-87.96	4.39	164.65
		6	7	8	9	10
<b>Début de transition (en s)</b>		274.973	304.521	372.7085	404.4325	502.4365
<b>Durée de transition (en ms)</b>		774	61	570	1	1
<b>Admittance <math>F_0^c = 50\text{Hz}</math></b>	<b>Module</b>	0.0151	0.0941	0.0151	0.0154	0.0870
	<b>Argument (en °)</b>	-2.45	-39.07	-1.09	118.62	137.42
<b>Admittance <math>F_1^c = 150\text{Hz}</math></b>	<b>Module</b>	0.0176	0.1819	0.0237	0.2327	0.3980
	<b>Argument (en °)</b>	6.91	-77.49	11.42	-2.71	128.65
<b>Admittance <math>F_2^c = 250\text{Hz}</math></b>	<b>Module</b>	0.0134	0.2052	0.0166	0.0254	0.1936
	<b>Argument (en °)</b>	7.28	-82.76	2.87	153.56	97.91

Ces résultats nous montrent par exemple que les événements 1 et 2 peuvent être associés à la mise en route et en arrêt d'une même charge électrique présentant une transition longue de 59 ms au démarrage. Cette affirmation découle du fait qu'en comparant les deux événements nous constatons que les modules des admittances sont proches et les arguments déphasés d'environ 180 degrés pour chacune des fréquences.

Ensuite, nous remarquons que les événements 3 et 7 présentent des caractéristiques similaires à la première transition. En effet, ces trois événements ont une durée d'environ 60 ms et des modules et des arguments qui sont très proches. Nous supposons donc que ces trois événements correspondent à la mise en route de charges de même nature.

De la même manière, nous pouvons voir que le dixième événement présente les mêmes caractéristiques que le second. Nous en déduisons qu'ils correspondent à la mise en arrêt de charges électriques de même nature. Donc l'événement numéro 10 correspond à la mise en arrêt d'une charge électrique qui a démarré à la troisième ou bien à la septième transition.

Les événements 4 et 5 peuvent également être associés à la même charge. De plus nous remarquons que les événements 4, 6 et 8 correspondent à la mise en route de charges de même nature. Notons que la différence de durée de transition est induite par la variation de la valeur du seuil.

## Synthèse

La méthode proposée ici permet de détecter les évènements et d'estimer les instants d'apparition de ces derniers. Elle n'a pas pour vocation la caractérisation ou la classification de ces évènements.

Elle consiste à estimer le paramètre  $N_2$ , à chaque instant  $\tau_n$ , en minimisant un critère quadratique au sens des moindres carrés.

D'après la définition du modèle, nous avons une idée de la manière dont  $\hat{N}_2$  évolue ; il devrait être constant dans les zones stationnaires et évoluer linéairement dans les états transitoires.

Sachant que  $\hat{N}_2$  évolue linéairement uniquement en présence d'une phase transitoire, l'algorithme considère qu'il y a un évènement si l'écart entre les  $\hat{N}_2$  et une rampe est suffisamment petit.

La mise en œuvre sur des mesures réelles nous a permis de constater un certain nombre de choses.

Concernant le cas où l'on a choisi de modéliser la mesure par la fréquence fondamentale seulement : ce dernier nous a tout d'abord montré que cette méthode est effectivement capable de détecter les évènements qui surviennent sur le courant.

Ensuite, nous avons traité le cas d'un courant contenant *a priori* 4 évènements (2 transitions longues et 2 courtes). Suite au traitement de ce signal, 12 évènements ont été détectés. Et nous avons pu voir qu'en réalité ces détections sont bel et bien des variations de courant.

Le même traitement a permis de montrer que la méthode proposée permet de détecter des évènements à partir uniquement de la mesure de tension et cela avec la même fréquence d'échantillonnage. Cependant, il faut garder à l'esprit que les variations de tension peuvent provenir d'un autre réseau client.

Nous avons également appliqué cette méthode sur le rapport de la TFD du courant sur celle de la tension (admittance), ceci dans l'optique d'être plus sélectif et de ne conserver (détecter) que les évènements communs à ces deux signaux.

Finalement, nous avons complété le modèle en choisissant la fréquence fondamentale et deux autres fréquences harmoniques. Le résultat nous a permis de mieux comprendre le fonctionnement de notre algorithme ainsi que du choix du modèle à utiliser. En effet, nous constatons qu'avec un modèle plus complet l'évolution du paramètre estimé  $\hat{N}_2$  correspond parfaitement à ce à quoi nous nous attendions lors de la mise en place de cette méthode.

En fait, comme nous l'avons vu lors de l'étude de l'influence du choix des fréquences (cf. V.1.2) le fait de ne choisir que la fréquence fondamentale implique que les variations liées à toutes les autres fréquences vont se retrouver sur l'estimation du 50 Hz. C'est pourquoi, plus le modèle est complet (plus on choisit de fréquences) plus on verra les évènements de faible amplitude.

Donc un traitement sur la tension en utilisant un modèle contenant d'autres fréquences en plus du 50 Hz (plus complet) ne permettrait pas de détecter les variations.

Le choix entre ces différentes propositions est donc laissé à l'utilisateur en fonction de ses besoins et plus précisément en fonction de ce qu'il souhaite détecter.

#### V.4 Amélioration : Détection à seuil fixe

Notons toutefois que cette méthode présente de nombreux avantages :

Tout d'abord, nous avons la possibilité de calculer la TFD du signal sur des plages de fréquences autour des fréquences d'intérêt et non pas sur les 503 fréquences. Cela permet d'effectuer la minimisation du critère plus rapidement.

Un autre avantage lié à cette méthode concerne le choix du seuil de détection. En effet, le seuil est indépendant des signaux traités : il dépend uniquement de la qualité de la rampe recherchée.

# Conclusion

La problématique de départ consistait en la détection des événements qui surviennent sur le réseau étudié ainsi qu'en l'extraction du vecteur d'information les caractérisant.

Ce chapitre avait donc pour but de proposer un algorithme permettant de répondre à la problématique de départ, à l'aide des méthodes développées aux chapitres précédents. Dans la première partie, nous avons mis en place la version complète de l'algorithme en utilisant les méthodes développées aux chapitres précédents. La méthode d'identification utilisée pour construire la signature des charges électriques est la méthode des moindres carrés, associée à une nouvelle modélisation des mesures. De ce fait, l'algorithme proposé traduit l'information transitoire et permanente de ces charges en un nombre limité de paramètres.

Dans la seconde partie, nous l'avons mis en œuvre ; d'abord sur des signaux simulés et ensuite sur des données réelles. Ceci dans le but de vérifier la pertinence des résultats fournis.

La phase de tests sur signaux simulés nous a permis de vérifier la validité de l'algorithme proposé et de constater que les instants ainsi que les durées de transitions étaient estimés de manière assez précise et que les paramètres d'intérêt nous permettaient de reconnaître des événements causés par la même charge et donc de les associer entre eux. En effet, nous avons vu que deux événements dont les admittances estimées présentent le même module ainsi que des arguments déphasés de  $180^\circ$  sont causés par la même charge électrique, et plus précisément, ces deux événements correspondent à l'allumage et l'extinction de celle-ci.

Les instants de transitions nous permettent de localiser les événements. Et la durée des transitions nous permet de discriminer les transitions courtes des transitions longues, de même qu'elle nous permet de discriminer les transitions longues associées à différentes charges car au démarrage ces dernières ont des phases transitoires avec des durées qui peuvent être différentes.

L'algorithme proposé n'a pas pour but de reconnaître parfaitement la nature de la charge en fonctionnement, néanmoins il a l'avantage de départager les événements en deux classes : les charges à transitions courtes et celles à transitions longues.

Un autre avantage de cet algorithme est que les étapes de détection et d'extraction du vecteur d'information se basent toutes les deux sur la méthode d'estimation des moindres carrés, développée lors du chapitre IV. Cela permet de s'affranchir de l'utilisation d'une méthode de détection de changement de valeur moyenne, type CUSUM.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous proposons quelques variantes possibles concernant le module d'estimation et de détection qui peuvent éventuellement être utiles en fonction des besoins de l'utilisateur. Nous avons proposé une implémentation possible de notre algorithme en utilisant le filtrage de Kalman au lieu de l'estimation au sens des moindres carrés. La sous-partie traitant du module de détection fut imaginée dans le cas où l'utilisateur souhaite simplement détecter les événements et éventuellement déterminer les instants de transition. Un début d'étude des phénomènes de non-linéarité est également proposé dans cette partie. Cela nous a permis, principalement, de confirmer leur existence sur des mesures réelles et également de voir qu'il était possible de les « corriger » au cas par cas, cependant.

Ces différentes variantes montrent que l'utilisation des méthodes développées dans le manuscrit ne se limite pas uniquement à l'algorithme proposé mais qu'au contraire elle peut être très variée.



# Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit portent sur l'analyse du courant et de la tension à l'entrée d'une installation électrique. L'objectif étant la mise en place d'une approche permettant de réaliser les étapes de détection d'évènements et d'extraction de caractéristiques, qui s'inscrivent dans le cadre de la décomposition par usage de la courbe de charge générale, connu sous l'acronyme NILM (Non-Intrusive Load Monitoring). Dans ce but, nous avons développé un algorithme innovant, basé sur une nouvelle modélisation du courant. Ce travail a été réalisé le cadre d'une thèse région-entreprise en collaboration avec la région Provence-Alpes-Côte-D'azur (PACA), le laboratoire IM2NP et la société Qualisteo.

Dans un premier chapitre nous avons exposé la problématique liée à décomposition de la consommation par usage ainsi que les contraintes industrielles auxquelles nous devons faire face avant de dresser un état de l'art qui nous a permis de faire le point sur les différentes approches existantes.

Nous avons vu qu'il existe deux types d'approches. Le premier type d'approche, macroscopique, permet d'extraire, à partir de signaux de puissance, des caractéristiques essentiellement liées au régime permanent. Un des problèmes majeurs lié à cette approche est la confusion qu'il peut y avoir avec des charges différentes à consommation quasi-identique et l'impossibilité à les différencier. Connaissant les limitations de cette dernière et dans le but d'améliorer la phase d'identification, les travaux se sont orientés vers des approches de type microscopique. Pour ce type d'approche, la caractérisation des usages se fait soit en incluant des caractéristiques harmoniques soit à travers l'étude du régime transitoire.

Toutefois il est à noter que selon le type d'approche, dans la quasi-totalité des travaux présents dans la littérature, les caractéristiques extraites concernent soit le régime permanent soit le régime transitoire. Et les seuls travaux traitant des caractéristiques à la fois sur le régime permanent et le régime transitoire, le font seulement sur le courant. Cela entraîne une perte de l'information concernant la tension. Ce chapitre nous a permis de comprendre que pour améliorer l'identification des charges électrique il faut utiliser les mesures de courant ET de tension afin de caractériser le lien entre ces deux grandeurs. De plus, concernant le courant, les caractéristiques à extraire devront tenir compte des états permanent et transitoire.

Le second chapitre traite de l'analyse des signaux à disposition (courant et tension) et du choix de la stratégie. L'analyse du courant et de la tension nous a permis de constater que :

- la fréquence des oscillations des signaux de tension et de courant n'est pas parfaitement égale à 50Hz. En réalité elle est comprise entre 49.5Hz et 50.5Hz,
- la tension (et le courant) n'est pas une sinusoïde pure. Son spectre peut contenir d'autres fréquences (harmoniques),
- en présence de systèmes non linéaire, le courant peut contenir des fréquences qui n'existent pas sur la tension,
- les amplitudes complexes associées aux fréquences présentes sur la tension et sur le courant peuvent varier (même pendant un état permanent).

Suite à cela, nous avons décidé de traiter les signaux au cours du temps, ce qui nous permettra de détecter les évènements qui surviennent, et d'associer à chacun d'eux un vecteur d'information contenant les paramètres caractéristiques tels que :



## Conclusion et perspectives

- l'instant de transition,
- le sens de la transition,
- la durée de transition,
- la forme de la transition,
- le nombre de fréquences harmoniques présentes,
- le numéro des harmoniques,
- l'admittance associée à chacune de ces fréquences,
- numéro et amplitude complexe des fréquences présentent uniquement sur le courant.

Les paramètres caractéristiques ayant été choisis, il faut les estimer. Le troisième chapitre consiste à étudier les méthodes d'estimation et de détection classiquement utilisées en traitement du signal afin de voir si elles peuvent nous fournir les paramètres caractéristiques (contenus dans le vecteur d'information).

L'analyse des signaux a montré que les fréquences n'étaient pas parfaitement connues. C'est pourquoi dans un premier temps, nous avons étudié des méthodes d'estimation dites non linéaires, c'est-à-dire des méthodes permettant d'estimer les paramètres tels que les amplitudes, les phases et les fréquences d'un modèle composé d'une somme de sinusoides. Dans ce contexte, nous avons présenté puis étudié la méthode des moindres carrés non linéaire ainsi que la méthode Matrix Pencil. Nous avons pu remarquer un certain nombre d'avantages et d'inconvénients liés à l'utilisation de chacune de ces méthodes. Le choix de la méthode d'estimation dépend donc du problème que l'on souhaite résoudre, ainsi que des éventuelles informations *a priori*. Parmi ces deux méthodes, c'est la méthode des moindres carrés non linéaire qui serait la plus adaptée à notre problème.

En second lieu, nous nous sommes intéressés à l'estimation paramétrique dans le cas où les fréquences sont connues. Nous nous sommes donc naturellement orientés vers la méthode des moindres carrés dans le cas linéaire qui, sous hypothèse gaussienne, est optimale au sens du Maximum de Vraisemblance. En étudiant cette méthode, nous avons pu constater que l'estimateur des moindres carrés est sans biais et efficace. Les performances annoncées ici sont calculées pour cet estimateur qui nous renvoie une estimation de  $A_0 \cos(\varphi_0)$  et  $A_0 \sin(\varphi_0)$  alors que les paramètres qui nous intéressent sont les amplitudes et les phases. Nous avons donc été amenés à étudier l'estimateur de  $A_0$  et  $\varphi_0$ . Puis nous avons constaté que contrairement au précédent, ce dernier est biaisé. Cependant, nous avons constaté que sous certaines conditions, ce biais devient négligeable voire nul.

Dans la deuxième partie qui traite du problème de la détection, nous avons étudié la méthode des sommes cumulées (CUSUM) qui permet de détecter un changement de valeur moyenne dans une série de données : à chaque pas de temps, le test statistique est comparé à un seuil et une alarme est déclenchée lorsque la statistique de test dépasse le seuil. En pratique, le choix de ce seuil est très important car en choisissant un seuil trop bas, nous nous exposons à un grand nombre de fausses alarmes alors qu'un seuil trop élevé entraîne dans le meilleur des cas un retard à la détection et dans le pire, une non détection.

De plus nous avons pu constater, au travers de deux exemples d'application, que cet algorithme présente un certain nombre de limitations. L'une de ces limitations est qu'en fonction de la valeur du seuil, l'instant de transition estimé peut se trouver au début, au milieu ou même bien après l'instant d'apparition de l'évènement. Une autre limitation, et pas des moindres, est que l'algorithme CUSUM ne nous permet pas d'estimer la durée de la transition.

## Conclusion et perspectives

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les méthodes qui nous permettent effectivement de construire notre vecteur d'information. Les méthodes classiques combinées au modèle classique ne permettent pas de tenir compte de la phase transitoire, c'est-à-dire d'un événement dans la fenêtre d'observation. C'est pourquoi la première chose est de mettre en place une modélisation du signal contenu dans la fenêtre d'observation qui soit adaptée aussi bien au cas où il y a une transition qu'au cas où il n'y en a pas.

Le modèle ayant changé, nous avons développé une méthode permettant d'estimer les paramètres de ce modèle, au sens des moindres carrés, pour les cas avec et sans transition. Après avoir testé cette méthode pour des transitions de natures différentes, nous avons pu constater que quelle que soit la transition elle permet de caractériser l'état <sup>2</sup>, autrement dit elle permet de caractériser l'appareil qui est la source de la transition. En effet, bien que l'évolution du signal dans la partie transitoire ne corresponde pas au modèle, les paramètres estimés sont, quant à eux, caractéristiques de cette transition.

Et enfin, à partir de ces avancées, nous avons fini par proposer un algorithme permettant de détecter les événements qui surviennent sur le courant et d'estimer avec précision l'instant de transition. Notons que suite à la mise en œuvre, nous avons pu remarquer qu'en réalité cet algorithme estime l'instant d'apparition d'un nouvel état stationnaire ce qui correspond en fait à l'instant de fin de transition. Comme, dans le cas d'une transition courte, l'instant de début et de fin de transition sont les mêmes cela ne pose aucun problème. Cependant, ce n'est pas le cas pour une transition longue.

Finalement, nous sommes capables d'estimer les paramètres d'intérêt (amplitude complexe associées aux fréquences étudiées) sur la tension ainsi que sur le courant, que ce soit en régime permanent ou transitoire. Nous sommes également capables de détecter les événements qui surviennent sur le courant et de déterminer l'instant de fin de transition. Cependant, dans l'état actuel des choses les méthodes proposées ne nous permettent pas de déterminer l'instant de début de transition de même que la durée de transition.

Le cinquième et dernier chapitre avait pour but de proposer un algorithme permettant de répondre à la problématique de départ, à l'aide des méthodes développées aux chapitres précédents. Dans la première partie, nous avons mis en place la version complète de l'algorithme en utilisant les méthodes développées aux chapitres précédents. La méthode d'identification utilisée pour construire la signature des charges électrique est la méthode des moindres carrés, associée à une nouvelle modélisation des mesures. De ce fait, l'algorithme proposé traduit l'information transitoire et stationnaire de ces charges en un nombre limité de paramètres (vecteur d'information).

Une phase de tests sur signaux simulés nous a permis de vérifier la validité de l'algorithme proposé et de constater que les instants ainsi que les durées de transitions étaient estimés de manières précises et que les paramètres d'intérêt nous permettaient de reconnaître des événements causés par la même charge et donc de les associer entre eux. En effet, nous avons vu que deux événements dont les admittances estimées présentent le même module ainsi que des arguments déphasés de  $180^\circ$  sont causés par la même charge électrique, et plus précisément, ces deux événements correspondent à l'allumage et l'extinction de celle-ci.

Les instants de transitions nous permettent de localiser les événements. Et la durée des transitions nous permet de discriminer les transitions courtes des transitions longues, de même qu'elle nous permet de discriminer les transitions longues associées à différentes charges car au démarrage ces dernières ont des phases transitoires avec des durées qui peuvent être différentes.

## Conclusion et perspectives

L'algorithme résultant des travaux effectués durant cette thèse permet de détecter les événements qui surviennent sur le courant et de construire un vecteur d'information contenant des paramètres caractérisant le régime stationnaire et le régime transitoire. Ce vecteur d'information permet ensuite d'associer entre eux tous les événements liés à la même charge électrique.

Il serait intéressant de voir si les paramètres que nous considérons comme caractéristiques permettent de déterminer la nature des charges électriques présentes sur le réseau. En effet, lors des exemples d'applications, nous avons pu voir que les paramètres extraits nous permettaient de reconnaître, par exemple, une charge résistive en fonctionnement car on sait que le courant et la tension sont en phase et que l'admittance est identique quelle que soit la fréquence.

Notons que la méthode proposée n'a pas été optimisée au niveau algorithmique car l'objectif principal était de vérifier la faisabilité des algorithmes. En effet, la méthode des moindres carrés est utilisée sur chaque fenêtre d'observation sans tenir compte de la précédente. Or, nous pouvons voir que deux fenêtres d'analyse consécutives contiennent quasiment les mêmes échantillons ; seul le dernier point change. L'utilisation d'une méthode récursive permettrait sans aucun doute de gagner en temps de calcul.

De plus, afin de caractériser l'état transitoire, nous avons proposé d'utiliser l'évolution de l'admittance estimée durant toute la phase transitoire. Cela fait un certain nombre de paramètres à conserver. L'utilisation d'un modèle polynomial permettrait de réduire la quantité de données à stocker pour caractériser l'état transitoire. Etant donné que l'algorithme fournit un encadrement assez précis des zones transitoires, ceci pourrait être fait *a posteriori*. Nous pouvons imaginer, par exemple, modéliser et effectuer une régression polynomiale uniquement dans les zones définies par les instants de transitions estimées.

Il serait également très intéressant de travailler en étroite collaboration avec un expert, qui a plus de connaissance que nous au niveau pratique, et qui pourra nous guider sur le choix de la méthode la mieux adaptée.

# Annexes



# A) Moindres Carrés Non Linéaire

## A.1 Principe

Rappelons tout d'abord que le modèle, sous forme matricielle, est donné par :

$$x = M(\theta_2) \cdot \theta_1 + \varepsilon \quad (\text{A.1})$$

où :

$$M(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \cdot t_1) & -\sin(\omega_0 \cdot t_1) & \dots & \cos(\omega_{N_s-1} \cdot t_1) & -\sin(\omega_{N_s-1} \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(\omega_0 \cdot t_N) & -\sin(\omega_0 \cdot t_N) & \dots & \cos(\omega_{N_s-1} \cdot t_N) & -\sin(\omega_{N_s-1} \cdot t_N) \end{bmatrix}$$

et :

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} A_0 \cos(\varphi_0) \\ A_0 \sin(\varphi_0) \\ \vdots \\ A_{N_s-1} \cos(\varphi_{N_s-1}) \\ A_{N_s-1} \sin(\varphi_{N_s-1}) \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{N_s-1} \end{bmatrix}$$

avec  $\dim(\theta_1) = (d \times 1)$ ,  $\dim(\theta_2) = (N_s \times 1)$ ,  $\dim(M(\theta_2)) = (N \times d)$  et  $d = 2N_s$ .

Afin d'estimer les paramètres inconnus, nous allons chercher  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui minimisent le critère quadratique suivant (critère des moindres carrés) :

$$C(\theta_1, \theta_2) = [x - M(\theta_2) \cdot \theta_1]^T [x - M(\theta_2) \cdot \theta_1] \quad (\text{A.2})$$

Etant donnée l'expression non linéaire du modèle, nous effectuons cette minimisation en deux étapes.

Après avoir vu le principe de la minimisation du critère (cf. Chapitre III), voyons maintenant les calculs détaillés de ces deux étapes.

### Etape n°1 :

On cherche  $\theta_1$  qui minimise  $C(\theta_1, \theta_2)$  pour  $\theta_2$  fixé, au sens des moindres carrés. Pour cela, on calcule le gradient du critère :

$$\nabla_{\theta_1} C(\theta_1, \theta_2) = \left( \frac{\partial C(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_{1,i}} \right)_{i=1 \dots d} = M(\theta_2)^T [x - M(\theta_2) \cdot \theta_1]$$

$$\nabla_{\theta_1} C(\theta_1, \theta_2) = 0 \text{ pour } \theta_1 = \hat{\theta}_1$$

De cette façon on obtient l'estimé de  $\theta_1$  au sens des moindres carrés, donné par l'expression suivante :

$$\hat{\theta}_1 = [M(\theta_2)^T M(\theta_2)]^{-1} \cdot M(\theta_2)^T \cdot x \quad (\text{A.3})$$

On remarque que  $\hat{\theta}_1$  dépend de  $\theta_2$ . Nous allons donc réinjecter l'expression obtenue dans le critère. Donc  $C(\theta_1, \theta_2)$  devient :

$$C(\hat{\theta}_1, \theta_2) = [x - M(\theta_2) \cdot \hat{\theta}_1]^T [x - M(\theta_2) \cdot \hat{\theta}_1] \quad (\text{A.4})$$

$$C(\hat{\theta}_1, \theta_2) = x^T [I - M(\theta_2) \cdot [M(\theta_2)^T M(\theta_2)]^{-1} \cdot M(\theta_2)^T] x \quad (\text{A.5})$$

On constate que  $C(\theta_1, \theta_2)$  ne dépend plus que de  $\theta_2$ . On peut donc le noter  $C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)$ .

Par la suite, afin de simplifier les écritures (par souci de lisibilité), la matrice  $M(\theta_2)$  sera notée  $M$ .

## Etape n°2 :

Maintenant, nous allons chercher  $\theta_2$  qui minimise  $C(\theta_2)$  donné par l'équation (A.5).

Pour cela, nous procédons de la même manière que précédemment. Soit :

$$\nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) = -x^T \left[ \frac{\partial M}{\partial \theta_{2,i}} \cdot [M^T M]^{-1} \cdot M^T + M \cdot \frac{\partial [M^T M]^{-1}}{\partial \theta_{2,i}} \cdot M^T + M \cdot [M^T M]^{-1} \cdot \frac{\partial M^T}{\partial \theta_{2,i}} \right] x$$

En utilisant les propositions suivantes (démontrées dans les parties A.2 et A.3) :

*proposition 1*

$$\frac{\partial M}{\partial \theta_{2,i}} = T M P_i$$

*proposition 2*

$$\frac{\partial M^T M}{\partial \theta_{2,i}} = P_i^T M^T T M + M^T T M P_i$$

*proposition 3*

$$\frac{\partial [M^T M]^{-1}}{\partial \theta_{2,i}} = -[M^T M]^{-1} \frac{\partial M^T M}{\partial \theta_{2,i}} [M^T M]^{-1}$$

où :

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & & \dots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ & & 1 & \ddots \\ 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2i-1 \\ \leftarrow 2i \end{matrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_N \end{bmatrix}$$

avec  $\dim(T) = (N \times N)$ ,  $\dim(P_i) = (d \times d)$ ,

le gradient du critère devient :

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) = & -x^T \left[ T M P_i \cdot [M^T M]^{-1} \cdot M^T \right. \\ & - M \cdot [M^T M]^{-1} (P_i^T M^T T M + M^T T M P_i) [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ & \left. + M \cdot [M^T M]^{-1} \cdot P_i^T M^T T \right] x \end{aligned}$$

L'expression de  $\nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)$  peut être simplifiée. En effet, on sait que quelle que soit la matrice  $Z$  de dimension  $(N \times N)$ ,  $x^T Z x$  est un scalaire. Donc :

$$x^T Z x = x^T Z^T x$$

Par suite, l'expression du gradient par rapport à  $\theta_2$  devient :

$$\nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) = 2 \cdot x^T \left[ M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T - T M P_i \cdot [M^T M]^{-1} \cdot M^T \right] x$$

On constate que, comme dans la majorité des problèmes d'estimation dans le cas non linéaire, il est impossible d'obtenir une formule analytique de l'estimé de  $\theta_2$  au sens des moindres carrés (de  $\hat{\theta}_2$ ).

Le problème qu'il reste à résoudre est la recherche du minimum de  $C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)$ .

Pour cela, nous allons créer une suite  $(\theta_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\hat{\theta}_2$ . Cela passe par un algorithme (une procédure numérique).

Tout d'abord, réécrivons le critère à l'aide du développement de Taylor :

$$C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) = C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0) + (\theta_2 - \theta_2^0)^T \cdot \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0) + \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_2^0)^T \cdot \mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0) \cdot (\theta_2 - \theta_2^0) + \text{reste}$$

où,  $\theta_2^0$  est le point d'initialisation au voisinage de  $\theta_2$  et l'expression du Hessien du critère noté  $\mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0) &= \left( \frac{\partial^2 C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0)}{\partial \theta_{2,i} \partial \theta_{2,j}} \right)_{\substack{i=1 \dots d \\ j=1 \dots d}} = \\ &= 2 \cdot x^T [ \text{TMP}_j [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad - M \cdot [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T M [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad - M \cdot [M^T M]^{-1} M^T \text{TMP}_j [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T P_j^T M^T T^2 M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T^2 M P_j [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad - M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad - M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} M^T \text{TMP}_j [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T - T^2 M P_j P_i [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad + \text{TMP}_i \cdot [M^T M]^{-1} (P_j^T M^T T M + M^T \text{TMP}_j) [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad - \text{TMP}_i \cdot [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T ] x \end{aligned}$$

**Remarque :** le calcul détaillé est présenté dans la partie A.4.

Ensuite, on sait que pour minimiser  $C(\theta_2)$  il est nécessaire, s'il est dérivable, d'annuler son gradient, donc il vient :

$$\nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0) + \mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0) \cdot (\theta_2 - \theta_2^0) = 0 \text{ en } \theta_2 = \theta_2^1$$

Soit :

$$\theta_2^1 = \theta_2^0 - [\mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0)]^{-1} \cdot \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^0)$$

De la même façon pour l'itération suivante, on a :

$$\theta_2^2 = \theta_2^1 - [\mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^1)]^{-1} \cdot \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^1)$$

Soit, de manière générale :

$$\theta_2^n = \theta_2^{n-1} - [\mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^{n-1})]^{-1} \cdot \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^{n-1})$$

où,  $\theta_2^n$  représente le paramètre estimé à la  $n^{\text{ième}}$  itération.

Cette procédure numérique est appelée « algorithme de Newton-Raphson ».



## Annexe A) Moindres Carrés Non Linéaire

Nous considérons que l'algorithme a convergé lorsque le critère d'arrêt est respecté :

$$\sum_{i=1}^N |\Delta\theta_{2,i}^n| < \lambda$$

où  $\lambda$  est un seuil fixé et :

$$\Delta\theta_2^n \triangleq \theta_2^n - \theta_2^{n-1} = -[\mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^{n-1})]^{-1} \cdot \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2^{n-1})$$

Si la condition d'arrêt est vérifiée pour l'itération numéro  $n$ , l'algorithme a convergé vers  $\hat{\theta}_2$ . On a donc

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2^n$$

Après avoir obtenu un estimé de  $\theta_2$ , on le réinjecte dans l'expression de  $\hat{\theta}_1$ . On obtient finalement :

$$\hat{\theta}_1 = [M(\hat{\theta}_2)^T M(\hat{\theta}_2)]^{-1} \cdot M(\hat{\theta}_2)^T \cdot x$$

avec :

$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \cos(\hat{\varphi}_0) \\ \hat{A}_0 \sin(\hat{\varphi}_0) \\ \vdots \\ \hat{A}_{N_s-1} \cos(\hat{\varphi}_{N_s-1}) \\ \hat{A}_{N_s-1} \sin(\hat{\varphi}_{N_s-1}) \end{bmatrix} \text{ et } \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_0 \\ \hat{\omega}_1 \\ \vdots \\ \hat{\omega}_{N_s-1} \end{bmatrix}$$

Les amplitudes et les phases estimées sont donc obtenues de la manière suivante :

$$\hat{A}_{i-1} = \sqrt{(\hat{\theta}_{2i-1})^2 + (\hat{\theta}_{2i})^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{\varphi}_{i-1} = \text{atan}\left(\frac{\hat{\theta}_{2i}}{\hat{\theta}_{2i-1}}\right) \quad (\text{A.7})$$

pour  $i = 1 \dots N_s$ .

Finalement, on a :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix}$$

où :

$$\hat{A} = [\hat{A}_0 \dots \hat{A}_{N_s-1}]^T, \hat{\varphi} = [\hat{\varphi}_0 \dots \hat{\varphi}_{N_s-1}]^T \text{ et } \hat{\omega} = [\hat{\omega}_0 \dots \hat{\omega}_{N_s-1}]^T$$

## A.2 Démonstration de la proposition 1

Dans cette partie du manuscrit, nous allons développer le calcul de la dérivée de la matrice  $M(\theta_2)$  (notée  $M$ ) définie dans le chapitre III par :

$$M(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2,1} \cdot t_1) & -\sin(\theta_{2,1} \cdot t_1) & \dots & \cos(\theta_{2,d} \cdot t_1) & -\sin(\theta_{2,d} \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(\theta_{2,1} \cdot t_N) & -\sin(\theta_{2,1} \cdot t_N) & \dots & \cos(\theta_{2,d} \cdot t_N) & -\sin(\theta_{2,d} \cdot t_N) \end{bmatrix}$$

La dérivée  $\dot{M}$  de  $M$  est :

$$\dot{M}(\theta_2) \triangleq \frac{\partial M}{\partial \theta_{2,i}}$$

Ce qui signifie que l'on dérive la matrice  $M$  par rapport à tous les éléments de  $\theta_2$ . Afin d'avoir une expression globale de la dérivée, nous allons la calculer pour le premier et le dernier élément du vecteur  $\theta_2$ .

Calcul de  $\frac{\partial M}{\partial \theta_{2,1}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \theta_{2,1}} &= \begin{bmatrix} -t_1 \cdot \sin(\theta_{2,1} \cdot t_1) & -t_1 \cdot \cos(\theta_{2,1} \cdot t_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -t_N \cdot \sin(\theta_{2,1} \cdot t_N) & -t_N \cdot \cos(\theta_{2,1} \cdot t_N) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_N \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2,1} \cdot t_1) & -\sin(\theta_{2,1} \cdot t_1) & \dots & \cos(\theta_{2,d} \cdot t_1) & -\sin(\theta_{2,d} \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(\theta_{2,1} \cdot t_N) & -\sin(\theta_{2,1} \cdot t_N) & \dots & \cos(\theta_{2,d} \cdot t_N) & -\sin(\theta_{2,d} \cdot t_N) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix} = TM(\theta_2)P_1 \end{aligned}$$

Calcul de  $\frac{\partial M}{\partial \theta_{2,d}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \theta_{2,d}} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -t_1 \cdot \sin(\theta_{2,d} \cdot t_1) & -t_1 \cdot \cos(\theta_{2,d} \cdot t_1) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -t_N \cdot \sin(\theta_{2,d} \cdot t_N) & -t_N \cdot \cos(\theta_{2,d} \cdot t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_N \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2,1} \cdot t_1) & -\sin(\theta_{2,1} \cdot t_1) & \dots & \cos(\theta_{2,d} \cdot t_1) & -\sin(\theta_{2,d} \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(\theta_{2,1} \cdot t_N) & -\sin(\theta_{2,1} \cdot t_N) & \dots & \cos(\theta_{2,d} \cdot t_N) & -\sin(\theta_{2,d} \cdot t_N) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{TM}(\theta_2)P_d \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire que :

$$\frac{\partial M}{\partial \theta_{2,i}} = \text{TMP}_i$$

### **A.3 Démonstration de la proposition 2**

Il est maintenant aisé de calculer  $\frac{\partial M^T M}{\partial \theta_{2,i}}$  car il s'exprime en fonction de la précédente  $\frac{\partial M}{\partial \theta_{2,i}}$ .

Donc:

$$\frac{\partial M^T M}{\partial \theta_{2,i}} = \dot{M}^T M + M^T \dot{M} = P_i^T M^T T M + M^T T M P_i$$

## A.4 Calcul du Gradient et du Hessian:

Nous détaillons ici le calcul du gradient et du Hessian du critère des moindres carrés, défini par l'équation (A.5).

Tout d'abord, nous calculons le gradient  $\nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)$  donné par :

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) &\triangleq \left( \frac{\partial C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)}{\partial \theta_{2,i}} \right)_{i=1\dots d} \\ &= -x^T \dot{M}(\theta_2) \cdot [M(\theta_2)^T M(\theta_2)]^{-1} \cdot M(\theta_2)^T x \\ &\quad - x^T M(\theta_2) \cdot [M(\theta_2)^T M(\theta_2)]^{-1} \cdot \dot{M}(\theta_2)^T x \\ &\quad + x^T M(\theta_2) \cdot \frac{\partial [M(\theta_2)^T M(\theta_2)]^{-1}}{\partial \theta_{2,i}} M(\theta_2)^T x \\ &= 2 \cdot x^T \left[ M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T - T M P_i \cdot [M^T M]^{-1} \cdot M^T \right] x \end{aligned}$$

Et le Hessian  $\mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)$  est défini comme suit :

$$\mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) \triangleq \left( \frac{\partial^2 C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)}{\partial \theta_{2,i} \partial \theta_{2,j}} \right)_{\substack{i=1\dots d \\ j=1\dots d}} = \left( \frac{\partial \nabla_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2)}{\partial \theta_{2,j}} \right)_{j=1\dots d}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) &= 2 \cdot x^T \left[ \dot{M} \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \right. \\ &\quad - M \cdot [M^T M]^{-1} \frac{\partial M(\theta_2)^T M(\theta_2)}{\partial \theta_{2,j}} [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T \dot{M}^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T \dot{M} [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad - M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \frac{\partial M(\theta_2)^T M(\theta_2)}{\partial \theta_{2,j}} [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot \dot{M}^T - T \dot{M} P_i \cdot [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\ &\quad \left. + T M P_i \cdot [M^T M]^{-1} \frac{\partial M(\theta_2)^T M(\theta_2)}{\partial \theta_{2,j}} [M^T M]^{-1} \cdot M^T - T M P_i \cdot [M^T M]^{-1} \cdot \dot{M}^T \right] x \end{aligned}$$

Annexe A) Moindres Carrés Non Linéaire

Soit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\theta_2} C_{\hat{\theta}_1}(\theta_2) = & 2 \cdot x^T [ \text{TMP}_j [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & - M \cdot [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T M [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & - M \cdot [M^T M]^{-1} M^T \text{TMP}_j [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T P_j^T M^T T^2 M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T^2 M P_j [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & - M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T M [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & - M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} M^T \text{TMP}_j [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & + M \cdot [M^T M]^{-1} P_i^T M^T T M [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T - T^2 M P_j P_i [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & + \text{TMP}_i \cdot [M^T M]^{-1} (P_j^T M^T T M + M^T \text{TMP}_j) [M^T M]^{-1} \cdot M^T \\
 & - \text{TMP}_i \cdot [M^T M]^{-1} P_j^T M^T T ]_x
 \end{aligned}$$

On obtient finalement l'expression exacte du Hessien.

## B) Matrix Pencil

La méthode Matrix Pencil est une méthode paramétrique permettant d'estimer les paramètres d'un modèle défini par une somme d'exponentielles complexes (somme de sinusoides amorties).

On modélise l'observation par la relation suivante :

$$x_k = \sum_{i=1}^{N_s} a_i e^{j\varphi_i} \cdot \exp((\alpha_i + j\omega_i)t_k) + \varepsilon_k$$

avec :

$$s_k = \sum_{i=1}^{N_s} R_i \cdot z_i^k = \text{signal d'intérêt}$$

$$R_i = a_i e^{j\varphi_i} = \text{résidus (ou amplitudes complexe)}$$

$$z_i = \exp(p_i \cdot \Delta t) = \exp((\alpha_i + j\omega_i)\Delta t) = \text{pôles}$$

où les  $a_i$  et  $\varphi_i$  représentent les amplitudes et les phases à estimer, et les  $\alpha_i$  et les  $\omega_i$  représentent respectivement le facteur d'atténuation et les fréquences angulaires.

Le but est d'estimer le nombre  $N_s$  d'exponentielles (de sinusoides) dont on a besoin pour caractériser le signal ainsi que les pôles et les résidus (i.e.  $\alpha_i$ ,  $\omega_i$ ,  $a_i$  et  $\varphi_i$ ).

- 1) La première étape consiste à estimer les  $z_i$  en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé de la matrice suivante :

$$(\mathbf{X}_2 - z_i \cdot \mathbf{X}_1) \cdot \mathbf{q}_i = 0$$

avec :

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x(1) & \cdots & x(L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L}$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x(2) & \cdots & x(L+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L+1) & \cdots & x(N) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L}$$

### Preuve de 1)

On réécrit les matrices  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  comme suit

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Z}_2$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{Z}_2$$

où :

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(N-L-1)} & \cdots & z_{N_s}^{(N-L-1)} \end{bmatrix}_{(N-L) \times N_s}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & z_1^{(L-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & z_{N_s}^{(L-1)} \end{bmatrix}_{N_s \times L}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_{N_s})$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_{N_s})$$

On obtient donc :

$$\mathbf{X}_2 - z \mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{Z}_2 - z \cdot \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{R} \cdot [\mathbf{Z}_0 - z \cdot \mathbf{I}] \cdot \mathbf{Z}_2$$

En général, la matrice  $\mathbf{X}_2 - z \mathbf{X}_1$  est de rang  $N_s$ .

Or si  $z = z_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N_s$ , la ligne numéro  $i$  de la matrice  $[\mathbf{Z}_0 - z \cdot \mathbf{I}]$  sera nulle, et son rang sera donc  $M-1$ . Donc les paramètres  $z_i$  peuvent être trouvés en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé des matrices  $\mathbf{X}_2$  et  $\mathbf{X}_1$ .

On peut même se ramener à un simple problème aux valeurs propres,

$$\mathbf{X}_1^+ \cdot \mathbf{X}_2 - z \cdot \mathbf{I}$$

où :

$$\mathbf{X}_1^+ = (\mathbf{X}_1^H \cdot \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^H$$

Nous allons appliquer une décomposition en valeurs singulières afin que la méthode soit robuste au bruit.

Pour ce faire, nous construisons la matrice  $\mathbf{Y}$  :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(1) & \cdots & x(L+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-L) & \cdots & x(N) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)} = [\mathbf{X}(:,1) \ \mathbf{X}_2] = [\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}(:,L+1)]$$

Ensuite, on applique une décomposition en valeurs singulières (SVD) sur cette matrice  $\mathbf{X}$ , on obtient donc :

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^H,$$

où :  $\mathbf{U}$  est une matrice orthogonale de dimensions  $(N-L) \times (N-L)$ ,  $\mathbf{V}$  est une matrice orthogonale de dimensions  $(L+1) \times (L+1)$  et  $\mathbf{S}$  est une matrice réelle de dimensions  $(N-L) \times (L+1)$  où seuls les termes de la première diagonale sont non nuls (les valeurs singulières).

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}_{N-L}$$

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}_{L+1}$$

- 2) La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{X}$  nous permet de réécrire  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  comme suit :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_1^H$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_2^H$$

On obtient  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  en enlevant, respectivement, la dernière et la première ligne de  $\mathbf{V}$ .

**Preuve de 2)**

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}(:, L+1)] = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^H \\ \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{X}(:, L+1) \cdot \mathbf{V}(L+1, :) &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \\ \mathbf{X}_1 &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_1^H - \mathbf{X}(:, L+1) \cdot \mathbf{V}(L+1, :). \mathbf{V}_1^H\end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{V}$  étant unitaire,  $\mathbf{V}(L+1, :). \mathbf{V}_1^H = 0$

On obtient finalement :  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_1^H$  (Ceci clôt la preuve).

La démonstration est équivalente pour  $\mathbf{X}_2$

Maintenant, on sélectionne les  $N_s$  plus grandes valeurs singulières car elles sont considérées comme caractéristiques de l'espace signal tandis que les valeurs singulières plus faibles sont considérées comme étant liées au bruit. La difficulté, ici, est de trouver un seuil qui va nous permettre de sélectionner uniquement les valeurs singulières liées au signal d'intérêt.

Une fois que l'on connaît le nombre  $N_s$ , on tronque les matrices  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$ .

On a donc :  $\mathbf{U}_{N_s}$  qui est de dimensions  $(N-L) \times M$ ,  $\mathbf{V}_{1M}$  qui est de dimensions  $(L+1) \times N_s$ ,  $\mathbf{V}_{2M}$  qui est de dimensions  $(L+1) \times N_s$  et  $\mathbf{S}_{N_s}$  qui est de dimensions  $N_s \times N_s$ .

Finalement,

$$\mathbf{X}_2 - z \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{U}_{N_s} \cdot \mathbf{S}_{N_s} \cdot \mathbf{V}_{2N_s}^H - z \cdot \mathbf{U}_{N_s} \cdot \mathbf{S}_{N_s} \cdot \mathbf{V}_{1N_s}^H = \mathbf{U}_{N_s} \cdot \mathbf{S}_{N_s} [\mathbf{V}_{2N_s}^H - z \cdot \mathbf{V}_{1N_s}^H]$$

Donc les  $z_i$  sont obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{V}_{2N_s}^H - z \cdot \mathbf{V}_{1N_s}^H = (\mathbf{V}_{1N_s}^H)^+ \cdot \mathbf{V}_{2N_s}^H - z \cdot \mathbf{I}$$

Les  $z_i$  sont donc les valeurs propres de la matrice  $(\mathbf{V}_{1N_s}^H)^+ \cdot \mathbf{V}_{2N_s}^H$ .

Après avoir calculé les  $z_i$ , on obtient les  $R_i$  en résolvant, au sens des moindres carrés, le système linéaire suivant:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{N-1} & \cdots & \hat{z}_{N_s}^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{N_s} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \hat{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{R}$$

Donc :

$$\hat{\mathbf{R}} = [\hat{\mathbf{Z}}^T \hat{\mathbf{Z}}]^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^T \mathbf{x}$$



## C) Borne de Cramér-Rao

Dans cette partie, nous présentons le calcul détaillé de la borne de Cramer-Rao (BCR) des estimateurs sans biais,

$$B(\theta/X) = F^{-1}(\theta/X)$$

Reprenons le modèle utilisé :

$$x = s(\theta) + \varepsilon \quad (C.1)$$

où,  $s(\theta)$  est le modèle choisi et  $\varepsilon$  un bruit gaussien centré de variance  $\sigma^2$  est réalisation de  $\xi \sim G(0, R = \sigma^2 I)$ .

Etant donnée la définition de  $F(\theta/X)$ , nous allons tout d'abord calculer le terme  $\nabla_{\theta} \ln[L(\theta/X)]$  sachant que  $x$  est une réalisation de  $X$  dont la loi conditionnée par  $\theta$  est:

$$L(\theta/X) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi R)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} [x - s(\theta)]^T R^{-1} [x - s(\theta)]\right) \quad (C.2)$$

Le logarithme de cette loi est :

$$\begin{aligned} \ln[L(\theta/X)] &= -\frac{1}{2} \ln(\det(2\pi R)) \\ &\quad - \frac{1}{2} [x - s(\theta)]^T R^{-1} [x - s(\theta)] \end{aligned} \quad (C.3)$$

Soit :

$$\nabla_{\theta} \ln[L(\theta/X)] = \nabla_{\theta} s(\theta) \cdot R^{-1} [x - s(\theta)] \quad (C.4)$$

Ensuite :

$$\nabla_{\theta} \ln[L(\theta/X)] \cdot \nabla_{\theta}^T \ln[L(\theta/X)] = \nabla_{\theta} s(\theta) \cdot R^{-1} [x - s(\theta)] [x - s(\theta)]^T R^{-1} \nabla_{\theta}^T s(\theta)$$

Donc l'expression de la MIF devient :

$$F(\theta/X) = \nabla_{\theta} s(\theta) \cdot R^{-1} E_{\theta} \{ [x - s(\theta)] [x - s(\theta)]^T \} R^{-1} \nabla_{\theta}^T s(\theta) \quad (C.5)$$

Or par définition on a :

$$E_{\theta} \{ [x - s(\theta)] [x - s(\theta)]^T \} = R \quad (C.6)$$

C'est pourquoi on obtient finalement :

$$F(\theta/X) = \nabla_{\theta} s(\theta) \cdot R^{-1} \cdot \nabla_{\theta}^T s(\theta) \quad (C.7)$$

Annexe C) Borne de Cramér-Rao

Dans le cas d'un signal mono-fréquentiel de la forme :

$$s(\theta) = A_0 \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0)$$

il y a deux scénarios possibles :

1) BCR lorsque  $\theta_1$  est le paramètre d'intérêt (à estimer), c'est-à-dire lorsque :

$$s(\theta) = M \cdot \theta_1$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \cdot t_1) & -\sin(\omega_0 \cdot t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\omega_0 \cdot t_N) & -\sin(\omega_0 \cdot t_N) \end{bmatrix} \text{ et } \theta_1 = \begin{bmatrix} A_0 \cos(\varphi_0) \\ A_0 \sin(\varphi_0) \end{bmatrix}$$

Donc :

$$F(\theta_1/X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \nabla_{\theta_1} M \theta_1 \nabla_{\theta_1}^T M \theta_1 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot M^T M \quad (\text{C.8})$$

2) BCR lorsque  $\theta$  est le paramètre d'intérêt (à estimer), c'est-à-dire lorsque :

$$s(\theta) = A_0 \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0)$$

avec :

$$\theta = \begin{bmatrix} A_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$$

Donc, cette fois :

$$F(\theta/X) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) \\ -A_0 \sin(\omega_0 t_k + \varphi_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) \\ -A_0 \sin(\omega_0 t_k + \varphi_0) \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.9})$$

$$\underline{\text{Cas 1}} : \boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \cos(\varphi_0) \\ \mathbf{A}_0 \sin(\varphi_0) \end{bmatrix}$$

Ici, nous calculons la borne pour le premier cas (estimation de  $\theta_1$ ). Soit :

$$F(\theta_1/X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \nabla_{\theta_1} M \theta_1 \nabla_{\theta_1}^T M \theta_1 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot M^T M$$

La BCR est donnée par :

$$B(\theta_1/X) = \sigma^2 [M^T M]^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(\omega_0 t_k) & - \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k) \sin(\omega_0 t_k) \\ - \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k) \sin(\omega_0 t_k) & \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(\omega_0 t_k) \end{bmatrix}^{-1}$$

Nous allons décomposer le calcul en différentes étapes. Dans un premier temps, nous exprimerons la matrice d'information de Fisher avant de calculer, dans un second temps, son inverse.

## Calcul de $F(\theta_1/X)$

Tout d'abord, exprimons chacun des termes de la matrice  $M^T M$ .

Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(\omega_0 t_k) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (1 + \cos(2\omega_0 t_k)) = \frac{1}{2} \left( N + \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\omega_0 t_k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( N + \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}\{e^{2j\omega_0 k\Delta t}\} \right) = \frac{1}{2} \left( N + \operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} e^{2j\omega_0 k\Delta t} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( N + \operatorname{Re}\left\{ \frac{1 - e^{2j\omega_0 N\Delta t}}{1 - e^{2j\omega_0 \Delta t}} \right\} \right) \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(\omega_0 t_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \cos(2\omega_0 k\Delta t)) = \frac{1}{2} \left( N - \operatorname{Re}\left\{ \frac{1 - e^{2j\omega_0 N\Delta t}}{1 - e^{2j\omega_0 \Delta t}} \right\} \right)$$

Et enfin, les termes extra-diagonaux :

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k) \sin(\omega_0 t_k) &= - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\omega_0 t_k) = - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Im}\{e^{2j\omega_0 k\Delta t}\} \\ &= - \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left\{ \frac{1 - e^{2j\omega_0 N\Delta t}}{1 - e^{2j\omega_0 \Delta t}} \right\} \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons l'expression de la MIF :

$$F(\theta_1/X) = \frac{1}{2\sigma^2} \begin{bmatrix} N + \operatorname{Re}\{Z\} & -\operatorname{Im}\{Z\} \\ -\operatorname{Im}\{Z\} & N - \operatorname{Re}\{Z\} \end{bmatrix}$$

avec :

$$Z = \frac{1 - e^{2i\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2i\omega_0 \Delta t}}$$

## Calcul de $B(\theta_1/X)$

Nous calculons maintenant la BCR en inversant la MIF. Soit :

$$B(\theta_1/X) = \frac{1}{\det\{F(\frac{\theta_1}{X})\}} \cdot \frac{1}{2\sigma^2} \begin{bmatrix} N - \operatorname{Re}(Z) & \operatorname{Im}(Z) \\ \operatorname{Im}(Z) & N + \operatorname{Re}(Z) \end{bmatrix}$$

On calcule le déterminant de la MIF :

$$\det\{F(\theta_1/X)\} = \frac{1}{4\sigma^4} \{(N - \operatorname{Re}(Z))(N + \operatorname{Re}(Z)) - \operatorname{Im}^2(Z)\} = \frac{1}{4\sigma^4} \{N^2 - |Z|^2\}$$

Et on obtient finalement l'expression de la BCR dans le cas général pour  $\theta_1 = \begin{bmatrix} A_0 \cos(\varphi_0) \\ A_0 \sin(\varphi_0) \end{bmatrix}$  :

$$B(\theta_1/X) = \frac{2\sigma^2}{(N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} N - \operatorname{Re}(Z) & \operatorname{Im}(Z) \\ \operatorname{Im}(Z) & N + \operatorname{Re}(Z) \end{bmatrix}$$

avec :

$$Z = \frac{1 - e^{2i\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2i\omega_0 \Delta t}} = e^{i\omega_0(N-1)\Delta t} \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

et :

$$\operatorname{Re}(Z) = \cos(\omega_0(N-1)\Delta t) \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \sin(\omega_0(N-1)\Delta t) \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

$$|Z|^2 = \frac{\sin^2(\omega_0 N \Delta t)}{\sin^2(\omega_0 \Delta t)}$$

## Cas 2 : $\theta = \begin{bmatrix} A_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}$

Ici, nous calculons la borne pour le second cas. Soit :

$$F(\theta/X) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) \\ -A_0 \sin(\omega_0 t_k + \varphi_0) \end{bmatrix} [\cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) \quad -A_0 \sin(\omega_0 t_k + \varphi_0)]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(\omega_0 t_k + \varphi_0) & -A_0 \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) \sin(\omega_0 t_k + \varphi_0) \\ -A_0 \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) \sin(\omega_0 t_k + \varphi_0) & A_0^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(\omega_0 t_k + \varphi_0) \end{bmatrix}$$

Nous allons procéder de la même manière que précédemment, c'est-à-dire en deux étapes.

### Calcul de $F(\theta/X)$

Le calcul de chacun des termes de la MIF est, à peu de chose près, assez similaire au cas précédent.

Soit :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(\omega_0 t_k + \varphi_0) = \frac{1}{2} \left( N + \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\omega_0 t_k + 2\varphi_0) \right) = \frac{1}{2} \left( N + \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}\{e^{2j(\omega_0 k \Delta t + \varphi_0)}\} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( N + \operatorname{Re}\left\{ e^{2j\varphi_0} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2j\omega_0 k \Delta t} \right\} \right) = \frac{1}{2} \left( N + \operatorname{Re}\left\{ e^{2j\varphi_0} \frac{1 - e^{2j\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2j\omega_0 \Delta t}} \right\} \right)$$

de même :

$$A_0^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(\omega_0 t_k + \varphi_0) = \frac{A_0^2}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \cos(2\omega_0 k \Delta t + 2\varphi_0))$$

$$= \frac{A_0^2}{2} \left( N - \operatorname{Re}\left\{ e^{2j\varphi_0} \frac{1 - e^{2j\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2j\omega_0 \Delta t}} \right\} \right)$$

et :

$$-A_0 \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t_k + \varphi_0) \sin(\omega_0 t_k + \varphi_0) = -\frac{A_0}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\omega_0 t_k + 2\varphi_0)$$

$$= -\frac{A_0}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Im}\{e^{2j(\omega_0 k \Delta t + \varphi_0)}\} = -\frac{A_0}{2} \operatorname{Im}\left\{ e^{2j\varphi_0} \frac{1 - e^{2j\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2j\omega_0 \Delta t}} \right\}$$

Finalement, nous obtenons l'expression de la MIF :

$$F(\theta/X) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \begin{bmatrix} N + \operatorname{Re}(Z) & -A_0 \operatorname{Im}(Z) \\ -A_0 \operatorname{Im}(Z) & (A_0)^2 \cdot (N - \operatorname{Re}(Z)) \end{bmatrix}$$

avec :

$$Z = e^{2i\varphi_0} \frac{1 - e^{2i\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2i\omega_0 \Delta t}}$$

## Calcul de $B(\theta/X)$

Nous calculons maintenant la BCR en inversant la MIF. Soit :

$$B(\theta/X) = \frac{1}{\det\{F(\theta/X)\}} \cdot \frac{1}{2\sigma^2} \begin{bmatrix} (A_0)^2 \cdot (N - \operatorname{Re}(Z)) & A_0 \operatorname{Im}(Z) \\ A_0 \operatorname{Im}(Z) & N + \operatorname{Re}\{Z\} \end{bmatrix}$$

On calcule le déterminant de la MIF :

$$\det\{F(\theta/X)\} = \frac{A_0^2}{4\sigma^4} \{(N - \operatorname{Re}\{Z\})(N + \operatorname{Re}\{Z\}) - \operatorname{Im}^2\{Z\}\} = \frac{A_0^2}{4\sigma^4} \{N^2 - |Z|^2\}$$

L'expression de la BCR dans le cas général, lorsque  $\theta$  est le paramètre d'intérêt, est donnée par :

$$B(\theta/X) = \frac{2\sigma^2}{(A_0)^2 \cdot (N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} (A_0)^2 \cdot (N - \operatorname{Re}(Z)) & A_0 \operatorname{Im}(Z) \\ A_0 \operatorname{Im}(Z) & N + \operatorname{Re}(Z) \end{bmatrix}$$

avec maintenant :

$$Z = e^{2i\varphi_0} \frac{1 - e^{2i\omega_0 N \Delta t}}{1 - e^{2i\omega_0 \Delta t}} = e^{i(\omega_0(N-1)\Delta t + 2\varphi_0)} \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

et :

$$\operatorname{Re}(Z) = \cos(\omega_0(N-1)\Delta t + 2\varphi_0) \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \sin(\omega_0(N-1)\Delta t + 2\varphi_0) \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

$$|Z|^2 = \frac{\sin^2(\omega_0 N \Delta t)}{\sin^2(\omega_0 \Delta t)}$$

## D) Approximation du biais de l'estimateur

Dans cette partie, nous calculons le biais théorique, ou du moins une valeur approchée, de l'estimateur de l'amplitude  $A_0$  et de la phase  $\varphi_0$  dans le cas où le signal d'intérêt ne contient qu'une seule fréquence  $F_0$ .

En effet, grâce aux équations (III.13) et (III.14) nous avons pu remarquer que l'estimé  $\hat{\theta}$  est obtenu en appliquant une transformation non linéaire de l'estimé  $\hat{\theta}_1$ , soit :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(\hat{\theta}_1) \\ \rho(\hat{\theta}_1) \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

où :

$$\xi(\hat{\theta}_1) = \sqrt{(\hat{\theta}_{1,1})^2 + (\hat{\theta}_{1,2})^2} \quad (\text{D.2})$$

$$\rho(\hat{\theta}_1) = \text{atan}\left(\frac{\hat{\theta}_{1,2}}{\hat{\theta}_{1,1}}\right) \quad (\text{D.3})$$

### Calcul de l'espérance mathématique approchée de $\hat{\Theta} = \Psi(\hat{\Theta}_1)$ :

Dans un premier temps, nous calculons l'espérance mathématique approchée d'un estimateur  $\hat{\theta}$  dans le cas général où il est obtenu à partir d'une transformation d'un autre estimateur  $\hat{\theta}_1$  par une fonction non linéaire monodimensionnelle  $\psi$  ( $\hat{\theta} = \psi(\hat{\theta}_1)$ ).

Soit  $\hat{\theta}_1$  un estimateur de  $\theta_1$ , avec :

$$E\{\hat{\theta}_1\} = \theta_1 + b(\hat{\theta}_1)$$

où  $b(\hat{\theta}_1)$  représente le biais de l'estimateur  $\hat{\theta}_1$ .

Et soit  $\hat{\theta}$  un estimateur de  $\theta$  tel que :

$$\hat{\theta} \triangleq \psi(\hat{\theta}_1)$$

On peut approcher  $\hat{\theta}$  par un développement limité (à l'ordre 2) de  $\psi(\hat{\theta}_1)$  autour de  $\theta_1$ .

Soit :

$$\hat{\theta} \simeq \psi(\theta_1) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^T \frac{\partial \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{1}{2} (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^T \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} (\hat{\theta}_1 - \theta_1)$$

En prenant l'espérance mathématique, on a :

$$E\{\hat{\theta}\} \simeq \psi(\theta_1) + b(\hat{\theta}_1) \frac{\partial \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{1}{2} E\left\{ (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^T \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} (\hat{\theta}_1 - \theta_1) \right\}$$

Annexe D) Approximation du biais de l'estimateur

Calculons le dernier terme de  $E\{\widehat{\Theta}\}$  :

$$\begin{aligned}
 & E\left\{(\widehat{\Theta}_1 - \theta_1)^T \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} (\widehat{\Theta}_1 - \theta_1)\right\} \\
 &= E\left\{(\widehat{\Theta}_1 - E\{\widehat{\Theta}_1\} + E\{\widehat{\Theta}_1\} - \theta_1)^T \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} (\widehat{\Theta}_1 - E\{\widehat{\Theta}_1\} + E\{\widehat{\Theta}_1\} - \theta_1)\right\} \\
 &= E\left\{(\widehat{\Theta}_1 - E\{\widehat{\Theta}_1\} + b(\widehat{\Theta}_1))^T \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} (\widehat{\Theta}_1 - E\{\widehat{\Theta}_1\} + b(\widehat{\Theta}_1))\right\} \\
 &= \text{tr}\left\{\text{COV}(\widehat{\Theta}_1) \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2}\right\} + b(\widehat{\Theta}_1)^T \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} b(\widehat{\Theta}_1)
 \end{aligned}$$

Finalement, on a montré que, quelle que soit  $\psi$  une fonction non linéaire monodimensionnelle, l'espérance mathématique approchée de  $\widehat{\theta} = \psi(\widehat{\theta}_1)$  est donné par :

$$E\{\widehat{\theta}\} \simeq \psi(\theta_1) + b(\widehat{\theta}_1) \frac{\partial \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{1}{2} b(\widehat{\theta}_1)^T \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} b(\widehat{\theta}_1) + \frac{1}{2} \text{tr}\left\{\text{COV}(\widehat{\theta}_1) \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2}\right\}$$

Maintenant, nous appliquons cela au calcul du biais de l'estimateur des moindres carrés  $\widehat{\Theta}$  obtenu à partir d'une transformation non-linéaire de l'estimateur  $\widehat{\Theta}_1$ .

Dans notre cas, nous avons montré que l'estimateur de  $\widehat{\Theta}_1$  est sans biais et que sa matrice de variance-covariance est égale à  $\sigma^2 (M^T M)^{-1}$ .

Soit :

$$b(\widehat{\Theta}_1) = 0 \text{ et } \text{Cov}(\widehat{\Theta}_1) = \frac{2\sigma^2}{(N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} N - \text{Re}(Z) & \text{Im}(Z) \\ \text{Im}(Z) & N + \text{Re}(Z) \end{bmatrix}$$

Donc la valeur approchée de  $E\{\widehat{\Theta}\}$  devient :

$$E\{\widehat{\Theta}\} = E\{\psi(\widehat{\Theta}_1)\} \simeq \psi(\theta_1) + \frac{1}{2} \text{tr}\left\{\text{COV}(\widehat{\Theta}_1) \frac{\partial^2 \psi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2}\right\} \quad (\text{D.4})$$

Comme nous pouvons le voir sur les équations (D.2) et (D.3), les fonctions utilisées pour obtenir  $\widehat{A}_0$  et  $\widehat{\varphi}_0$  sont différentes. C'est pourquoi nous calculons séparément le biais sur l'amplitude  $\widehat{A}_0$  et sur la phase  $\widehat{\varphi}_0$ .



## **Calcul du biais sur l'estimateur de $A_0$ :**

Tout d'abord, calculons le biais sur l'estimation de  $A_0$ . Dans le cas de l'amplitude, l'équation (D.4) devient :

$$E\{\widehat{A}_0\} = E\{\xi(\widehat{\Theta}_1)\} \approx \xi(\theta_1) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \text{COV}(\widehat{\Theta}_1) \frac{\partial^2 \xi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \right\}$$

avec :

$$\xi(\theta_1) = \sqrt{(\theta_{1,1})^2 + (\theta_{1,2})^2} = A_0$$

Afin de calculer le biais sur  $\widehat{A}_0$  dont l'expression approchée est donnée par

$$b\{\widehat{A}_0\} = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \text{COV}(\widehat{\Theta}_1) \frac{\partial^2 \xi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \right\},$$

nous calculons dans un premier temps le terme  $\frac{\partial^2 \xi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2}$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} &= \frac{1}{\left( \sqrt{(\theta_{1,1})^2 + (\theta_{1,2})^2} \right)^3} \begin{bmatrix} (\theta_{1,2})^2 & -\theta_{1,1} \cdot \theta_{1,2} \\ -\theta_{1,1} \cdot \theta_{1,2} & (\theta_{1,1})^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{A_0} \begin{bmatrix} \sin^2(\varphi_0) & -\cos(\varphi_0) \sin(\varphi_0) \\ -\cos(\varphi_0) \sin(\varphi_0) & \cos^2(\varphi_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$b\{\widehat{A}_0\} = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{2\sigma^2}{A_0(N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} N - \text{Re}(Z) & \text{Im}(Z) \\ \text{Im}(Z) & N + \text{Re}(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin^2(\varphi_0) & -\cos(\varphi_0) \sin(\varphi_0) \\ -\cos(\varphi_0) \sin(\varphi_0) & \cos^2(\varphi_0) \end{bmatrix} \right\}$$

Finalement, l'expression générale du biais sur l'estimé  $\widehat{A}_0$  est :

$$b\{\widehat{A}_0\} = \frac{\sigma^2}{A_0(N^2 - |Z|^2)} \{N + \text{Re}(Z) \cos(2\varphi_0) - \text{Im}(Z) \sin(2\varphi_0)\}$$

avec :

$$Z = e^{i\omega_0(N-1)\Delta t} \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

## **Calcul du biais sur l'estimateur de $\varphi_0$ :**

Dans le cas de la phase  $\varphi_0$ , l'équation (D.4) devient :

$$E\{\widehat{\varphi}_0\} = E\{\rho(\widehat{\theta}_1)\} \simeq \rho(\theta_1) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \text{Cov}(\widehat{\theta}_1) \frac{\partial^2 \rho(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \right\} \quad (\text{D.5})$$

avec :

$$\rho(\theta_1) = \text{atan} \left( \frac{\theta_{1,2}}{\theta_{1,1}} \right) = \varphi_0$$

Comme précédemment, on a :

$$\frac{\partial^2 \xi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} = \frac{1}{((\theta_{1,1})^2 + (\theta_{1,2})^2)^2} \begin{bmatrix} 2\theta_{1,1} \cdot \theta_{1,2} & (\theta_{1,2})^2 - (\theta_{1,1})^2 \\ (\theta_{1,2})^2 - (\theta_{1,1})^2 & -2\theta_{1,1} \cdot \theta_{1,2} \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 \xi(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} = \frac{1}{(A_0)^2} \begin{bmatrix} \sin(2\varphi_0) & -\cos(2\varphi_0) \\ -\cos(2\varphi_0) & -\sin(2\varphi_0) \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} b\{\widehat{\varphi}_0\} &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \text{Cov}(\widehat{\theta}_1) \frac{\partial^2 \rho(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{2\sigma^2}{(A_0)^2(N^2 - |Z|^2)} \begin{bmatrix} N - \text{Re}(Z) & \text{Im}(Z) \\ \text{Im}(Z) & N + \text{Re}(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(2\varphi_0) & -\cos(2\varphi_0) \\ -\cos(2\varphi_0) & -\sin(2\varphi_0) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Finalement, l'expression générale du biais sur l'estimé  $\widehat{\varphi}_0$  est :

$$b\{\widehat{\varphi}_0\} = \frac{-2\sigma^2}{(A_0)^2(N^2 - |Z|^2)} \{ \text{Im}(Z) \cos(2\varphi_0) + \text{Re}(Z) \sin(2\varphi_0) \}$$

avec :

$$Z = e^{i\omega_0(N-1)\Delta t} \frac{\sin(\omega_0 N \Delta t)}{\sin(\omega_0 \Delta t)}$$

## E) Modèle fréquentiel

Ici, nous développons le calcul permettant de passer du modèle temporel au modèle fréquentiel donnée par l'équation IV.1.

Soit, le modèle temporel :

$$s_k = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot \Pi_{T_1}(t_k) + \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_2}(t_k - T')$$

Dont la TFD est définie par :

$$S_l = \text{TFD}[s_k] = \sum_{k=0}^{N_1-1} s_k \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t}$$

Soit :

$$S_l = \sum_{k=0}^{N_1-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} [A_m^1 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) + A_m^2 \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot \Pi_{T_2}(t_k - T')] \right\} \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t}$$

$$S_l = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} \left\{ A_m^1 \sum_{k=0}^{N_1-1} \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t} + A_m^2 \sum_{k=N'-1}^{N_1-1} \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t} \right\}$$

On pose :

$$S_l = \sum_{m=0}^{N_{s'}-1} \{A_m^1 \alpha_1 + A_m^2 \alpha_2\}$$

avec :

$$\alpha_1 = \sum_{k=0}^{N_1-1} \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^1) \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t}$$

$$\alpha_2 = \sum_{k=N'-1}^{N_1-1} \cos(2\pi F_m t_k + \varphi_m^2) \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t}$$

Annexe E) Modèle fréquentiel

1) On calcul  $\alpha_1$

$$\alpha_1 = \sum_{k=0}^{N_1-1} \cos(2\pi F_m k \Delta t + \varphi_m^1) \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t}$$

D'après les formules d'Euler, on a :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \{e^{2i\pi F_m k \Delta t + i\varphi_m^1} + e^{-2i\pi F_m k \Delta t - i\varphi_m^1}\} \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t}$$

Ou encore :

$$\alpha_1 = \frac{e^{i\varphi_m^1}}{2} \sum_{k=0}^{N_1-1} e^{-2i\pi(f_1 - F_m)k \Delta t} + \frac{e^{-i\varphi_m^1}}{2} \sum_{k=0}^{N_1-1} e^{-2i\pi(f_1 + F_m)k \Delta t}$$

Soit :

$$\alpha_1 = \frac{e^{i\varphi_m^1}}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2i\pi(f_1 - F_m)N_1 \Delta t}}{1 - e^{-2i\pi(f_1 - F_m)\Delta t}} + \frac{e^{-i\varphi_m^1}}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2i\pi(f_1 + F_m)N_1 \Delta t}}{1 - e^{-2i\pi(f_1 + F_m)\Delta t}}$$

**Remarque :**  $\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1-z^N}{1-z}$  et si de plus  $z = e^{2ix}$ , alors

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1 - e^{-2iNx}}{1 - e^{-2ix}} = \frac{e^{iNx} - e^{-iNx}}{e^{ix} - e^{-ix}} \frac{e^{-iNx}}{e^{-ix}} = \frac{\sin(Nx)}{\sin(x)} e^{-i(N-1)x}$$

Donc :

$$\alpha_1 = \frac{e^{i\varphi_m^1}}{2} \cdot \frac{\sin(N_1 \pi (f_1 - F_m) \Delta t)}{\sin(\pi (f_1 - F_m) \Delta t)} e^{-i\pi (f_1 - F_m) (N_1 - 1) \Delta t} + \frac{e^{-i\varphi_m^1}}{2} \cdot \frac{\sin(N_1 \pi (f_1 + F_m) \Delta t)}{\sin(\pi (f_1 + F_m) \Delta t)} e^{-i\pi (f_1 + F_m) (N_1 - 1) \Delta t}$$

2) On calcul  $\alpha_2$

$$\alpha_2 = \sum_{k=N'-1}^{N_1-1} \cos(2\pi F_m k \Delta t + \varphi_m^2) \cdot e^{-2i\pi f_1 k \Delta t}$$

En posant  $n = k - N' + 1$ , on obtient :

$$\alpha_2 = \sum_{n=0}^{N_2-1} \cos(2\pi F_m (n + N' - 1) \Delta t + \varphi_m^2) \cdot e^{-2i\pi f_1 (n + N' - 1) \Delta t}$$

D'après les formules d'Euler, on a :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_2-1} \{e^{2i\pi F_m (n + N' - 1) \Delta t + i\varphi_m^2} + e^{-2i\pi F_m (n + N' - 1) \Delta t - i\varphi_m^2}\} \cdot e^{-2i\pi f_1 (n + N' - 1) \Delta t}$$

D'où :

$$\alpha_2 = \frac{e^{i\varphi_m^2}}{2} e^{-2i\pi(f_1 - F_m)(N' - 1)\Delta t} \sum_{n=0}^{N_2 - 1} e^{-2i\pi(f_1 - F_m)n\Delta t} + \frac{e^{-i\varphi_m^2}}{2} e^{-2i\pi(f_1 + F_m)(N' - 1)\Delta t} \sum_{n=0}^{N_2 - 1} e^{-2i\pi(f_1 + F_m)n\Delta t}$$

Soit :

$$\alpha_2 = \frac{e^{i\varphi_m^2}}{2} e^{-2i\pi(f_1 - F_m)(N' - 1)\Delta t} \frac{1 - e^{-2i\pi(f_1 - F_m)N_2\Delta t}}{1 - e^{-2i\pi(f_1 - F_m)\Delta t}} + \frac{e^{-i\varphi_m^2}}{2} e^{-2i\pi(f_1 + F_m)(N' - 1)\Delta t} \frac{1 - e^{-2i\pi(f_1 + F_m)N_2\Delta t}}{1 - e^{-2i\pi(f_1 + F_m)\Delta t}}$$

Donc :

$$\alpha_2 = \frac{e^{i\varphi_m^2}}{2} \cdot \frac{\sin(N_2\pi(f_1 - F_m)\Delta t)}{\sin(\pi(f_1 - F_m)\Delta t)} e^{-i\pi(f_1 - F_m)(N_2 - 1 + 2(N' - 1))\Delta t} + \frac{e^{-i\varphi_m^2}}{2} \cdot \frac{\sin(N_2\pi(f_1 + F_m)\Delta t)}{\sin(\pi(f_1 + F_m)\Delta t)} e^{-i\pi(f_1 + F_m)(N_2 - 1 + 2(N' - 1))\Delta t}$$

Donc, en réinjectant dans l'expression de  $S_1$ , on obtient :

$$S_1 = \sum_{m=0}^{N_{s'} - 1} \left\{ A_m^1 \frac{e^{j\varphi_m^1}}{2} \cdot \frac{\sin(N_1\pi(f_1 - F_m)\Delta t)}{\sin(\pi(f_1 - F_m)\Delta t)} e^{-j\pi(f_1 - F_m)(N_1 - 1)\Delta t} + A_m^1 \frac{e^{-j\varphi_m^1}}{2} \cdot \frac{\sin(N_1\pi(f_1 + F_m)\Delta t)}{\sin(\pi(f_1 + F_m)\Delta t)} e^{-j\pi(f_1 + F_m)(N_1 - 1)\Delta t} + A_m^2 \frac{e^{j\varphi_m^2}}{2} \cdot \frac{\sin(N_2\pi(f_1 - F_m)\Delta t)}{\sin(\pi(f_1 - F_m)\Delta t)} e^{-j\pi(f_1 - F_m)(N_2 - 1 + 2(N' - 1))\Delta t} + A_m^2 \frac{e^{-j\varphi_m^2}}{2} \cdot \frac{\sin(N_2\pi(f_1 + F_m)\Delta t)}{\sin(\pi(f_1 + F_m)\Delta t)} e^{-j\pi(f_1 + F_m)(N_2 - 1 + 2(N' - 1))\Delta t} \right\}$$

Comme,  $T_1 = N_1 \cdot \Delta t$ ,  $T' = (N' - 1) \cdot \Delta t$  et  $T_2 = N_2 \cdot \Delta t$ , on remplace  $(N_1 - 1)\Delta t$  par  $T_1 - \Delta t$  et  $N_2 - 1 + 2(N' - 1)$  par  $T_2 - \Delta t + 2T'$

Finalement, nous obtenons le modèle fréquentiel suivant :

$$S(f_1) = \sum_{m=0}^{N_{s'} - 1} \left\{ \frac{A_m^1}{2} e^{j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_1 - F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_1 - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_1 - F_m)(T_1 - \Delta t)} + \frac{A_m^1}{2} e^{-j\varphi_m^1} \cdot \frac{\sin(\pi(f_1 + F_m)T_1)}{\sin(\pi(f_1 + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_1 + F_m)(T_1 - \Delta t)} + \frac{A_m^2}{2} e^{j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_1 - F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_1 - F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_1 - F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} + \frac{A_m^2}{2} e^{-j\varphi_m^2} \cdot \frac{\sin(\pi(f_1 + F_m)T_2)}{\sin(\pi(f_1 + F_m)\Delta t)} \cdot e^{-j\pi(f_1 + F_m)(T_2 - \Delta t + 2T')} \right\}$$

## F) Evolution du critère en fonction du paramètre $N_2$

La figure F.1 montre l'évolution du critère des moindres carrés en fonction de  $N_2$ .

Le critère a été calculé pour une portion de signal, de longueur  $N_1 = 512$  points, dans laquelle il y a une transition. Nous l'avons calculé pour des valeurs de  $N_2$  allant de 0 à  $N_1$  par pas de 0.1, telles que :

$$N_2 = 0, 0.1, 0.2, \dots, N_1$$

ainsi nous pouvons voir comment il se comporte entre deux valeurs entières.

Comme nous pouvons le constater, il est impossible d'utiliser un algorithme du gradient sur un tel critère puisque ce dernier présente, pour chaque valeur entière de  $N_2$ , un minimum local. De ce fait, quel que soit le point d'initialisation, qui sera forcément un nombre entier, l'algorithme du gradient considèrera avoir déjà convergé vers le minimum du critère.

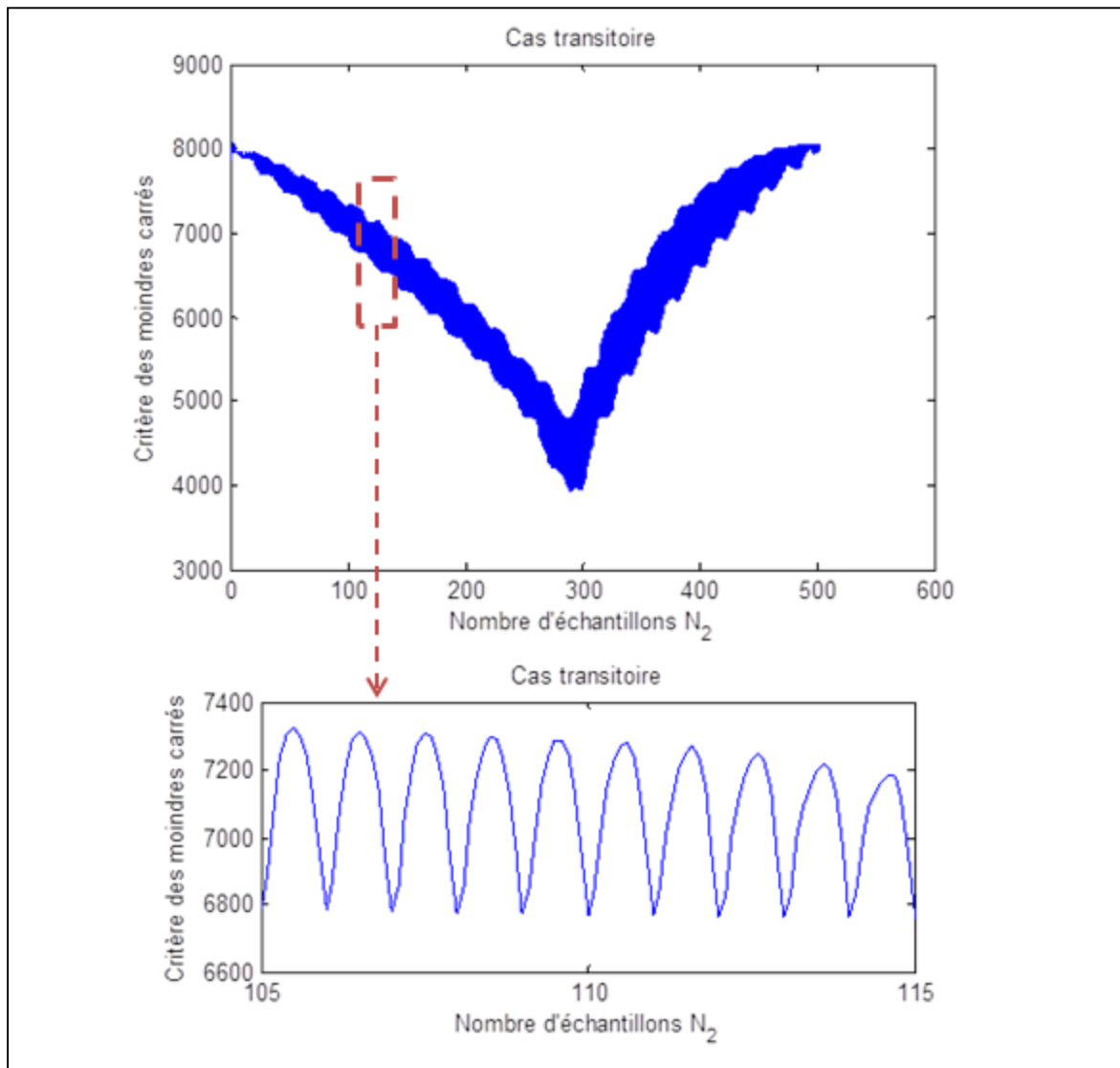


Figure F.0.1 : Evolution du critère en fonction de  $N_2$

# Références bibliographiques

- [1] Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie (ADEME), "L'énergie en France: Etat des lieux et perspectives," Ministère de l'Ecologie, du Développement durable et de l'Energie, ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Guide pratique ISBN 978-2-35838-259-5, 2012.
- [2] Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie (ADEME). site Web ADEME. [Online]. <http://www.ademe.fr>
- [3] G.W. Hart, "Nonintrusive appliance load monitoring," in *Proc. of the IEEE*, vol. 80, Dec. 1992, pp. 1870-1891.
- [4] S.K.K. Ng, J.W.M. Cheng, J. Liang, "Theoretical analysis and experimental evaluation of load disaggregation using macro load signatures," in *Proc. of CEO Conference of AESIEAP*, 2009.
- [5] M. Sanquer, "Détection et caractérisation de signaux transitoires: application à la surveillance de courbes de charge," Université de Grenoble, Grenoble, Thèse 2013.
- [6] E.C. Kern, C.Schwepe, G.W. Hart, "Non-intrusive appliance monitor apparatus," 4858141, August 15, 1989.
- [7] A. Albicki, A.I. Cole, "Algorithme for non-intrusive identification of residential appliances," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, vol. 3, 1998, pp. 338-341.
- [8] L.K. Norford, R. Palomera-Arias, "High performance commercial building systems PIER program," Department of Architecture, Massachusetts Institute of Technology, HPCBS No. E5P2.2T3a, 2001.
- [9] K. Lee, R. Cox, S. Shaw, S. Leeb, L. Norford, P. Armstrong, C. Laughman, "Power signature analysis," *IEEE Power and Energy Magazine*, vol. 1, no. 2, pp. 56-63, Mar/Apr 2003.
- [10] H. Najmeddine, "Méthode d'identification et de classification de la consommation d'énergie par usages en vue de l'intégration dans un compteur d'énergie électrique," Université Blaise-Pascal, Clermont-Ferrand, Thèse 2009.
- [11] T.K. Sarkar, Y. Hua, "Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise," *IEEE Transaction on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 5, May 1990.
- [12] O. Pereira, T.K. Sarkar, "Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, no. 1, Feb 1995.
- [13] J-C. Pesquet, B. Pesquet-Popescu, "Ondelettes et applications," *Techniques de l'ingénieur*, Août 2001.

- [14] C-L. Lin, H-T. Yang, H-H. Chang, "Load recognition for different loads with the same real power and reactive power in a nonintrusive load monitoring system," in *12th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design (CSCWD)*, Xi'an, 2008, pp. 1122-1127.
- [15] S.R. Shaw, J.L. Kirtley Jr, S.B. Leeb, "Transient event detection in spectral envelope estimates for nonintrusive load monitoring," *IEEE Transaction on Power Delivery*, vol. 10, no. 3, pp. 1200-1210, 1995.
- [16] S.B. Leeb, L.K. Norford, "Nonintrusive electrical load monitoring in commercial buildings based on steady-state and transient load detection algorithms," *ELSEVIER Energy and Buildings*, vol. 24, pp. 51-64, 1996.
- [17] S.B. Leeb, S.R. Shaw, L.K. Norford, R. Cox, "Transient event detection for nonintrusive load monitoring and demand side management using voltage distortion," in *21th IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, 2006.
- [18] T. Robertson, J.A. Kientz, S.N. Patel, "At the flick of a switch: detecting and classifying unique electrical events on the residential power line," in *9th International Conference on Ubiquitous Computing (UbiComp '07)*, Berlin Heidelberg, 2007, pp. 271-288.
- [19] M.S. Reynolds, S.N. Patel, S. Gupta, "ElectriSense: single-point sensing using EMI for electrical event detection and classification in the home," in *12th International Conference on Ubiquitous Computing (UbiComp '10)*, New York, 2010, pp. 139-148.
- [20] M. Carlsson, J-Y. Tournet, M. Wendt, F. Andersson, "A new frequency estimation method for equally and unequally spaced data," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 21, pp. 5761-5774, Novembre 2014.
- [21] R.L. Moses, B. Friedlander, T. Söderström, P. Stoica, "Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 3, pp. 378-392, March 1989.
- [22] B. Georgel, D. Garreau, "La méthode de Prony en analyse de vibrations," *Traitement du Signal*, vol. 3, no. 4-5, pp. 235-240, 1986.
- [23] D.W. Tufts, L.L. Scharf, R. Kumaresan, "A Prony method for noisy data: choosing the signal components and selecting the order in exponential signal models," Department of Electrical Engineering, University of Rhode Island, Kingston, Report 1982.
- [24] R. Kumaresan, D.W. Tufts, "Estimation of frequencies of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood," *Proc. of the IEEE*, vol. 70, no. 9, Sept 1982.
- [25] D.W. Tufts, R. Kumaresan, "Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 30, no. 6, pp. 833-840, December 1982.
- [26] R. Moses, P. Stoica, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall, Ed. Englewood cliffs, New Jersey, 2005.
- [27] E.S. Page, "Continuous inspection schemes," *Biometrika*, vol. 41, no. 1, pp. 100-115, June 1954.



- [28] P. Stoica, J. Li H. Li, "Computationally efficient parameters estimation for harmonic sinusoidal signals," *ELSEVIER Signal Processing* 80, pp. 1937-1944, Mar 2000.
- [29] C-L. Lin, J-K. Lee, H-H. Chang, "Load identification in nonintrusive load monitoring using steady-state and turn-on transient energy algorithms," in *14th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design (CSCWD)*, vol. 1, Shanghai, 2010, pp. 27-32.
- [30] R.R. Boorstyn, D.C. Rife, "Single-tone parameter estimation from discrete-time observations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, no. 5, pp. 591-598, September 1974.
- [31] R.R. Boorstyn, D.C. Rife, "Multiple tone parameter estimation from discrete-time observations," *The Bell System Technical Journal*, vol. 55, no. 9, pp. 1389-1410, November 1976.
- [32] S. Saha, S. Kay, "Mean likelihood frequency estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 7, pp. 1937-1946, July 2000.
- [33] C. Mailhes, F. Castanié, A. Ducasse, "Estimation de fréquences: panorama des méthodes paramétriques," *Traitement du signal*, vol. 15, no. 2, pp. 149-162, 1998.
- [34] I. Nikiforov, M. Basseville, *Detection of abrupt changes: theory and application.*: Prentice Hall, 1993.
- [35] B. David, "Caractérisation acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée. Méthodes d'estimation relatives aux fréquences et amortissements des modes propres. Applications en acoustique musicale.," Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Paris, Thèse 1999.
- [36] D. Jin, J.P. Juen, N. Tanaka, C.A. Gunter, A.K. Wright, D.C. Bergman, "Distributed non-intrusive load monitoring," in *Innovative Smart Grid Technologies ISGT*, Jan. 2011.
- [37] M. Tomczak, E. Djermoune, "Statistical analysis of the kumaresan-tufts and matrix pencil methods in estimating a damped sinusoid," in *12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 2004.
- [38] M. El Guedri, "Caractérisation aveugle de la courbe de charge électrique: détection, classification et estimation des usages dans les secteurs résidentiel et tertiaire," Université Paris-Sud 11, Paris, Thèse 2009.
- [39] G.W. Hart, "Residential energy monitoring and computerized surveillance via utility power flows," pp. 12-16, June 1989.
- [40] C-T. Leung, H-C. So, "A simple improvement to Tufts-Kumaresan method for multiple sinusoidal frequency estimation," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. 88, no. 1, pp. 381-383, January 2005.
- [41] S.G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989.
- [42] E. Gildman, H. Scott Matthews, L. Soibelman, M. Berges, "Training load monitoring algorithms on highly sub-metered home electricity consumption data," in *Tsinghua*

*Science and Technology ISSN*, vol. 13, Oct. 2008, pp. 406-411.

- [43] G. D'Urso, C. Lajaunie, G. Fleury, M. El Guedri, "Time frequency characterisation for electric load monitoring," in *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Glasgow, 2009.
- [44] C. Lajaunie, G. Fleury, G. D'Urso, M. El Guedri, "Modèle stochastique pour la séparation des composantes de la courbe de charge électrique," in *XXIIème colloque GRETSI*, Dijon, 2009.
- [45] R. Badeau, "Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoides modulées. Application aux signaux de musique.," Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, Thèse 2005.