Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres

Marie-Line Gardes

N° d'ordre **231-2013** Année 2013

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

ECOLE DOCTORALE 485 EPIC - Éducation, Psychologie, Information et Communication.

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

Spécialité : Didactique des mathématiques

Soutenue publiquement le 25 novembre 2013

par

Marie-Line GARDES

Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres

Sous la direction de Viviane DURAND-GUERRIER et Laurent HABSIEGER.

JURY

Véronique BATTIE	Examinatrice
Christophe DELAUNAY	Rapporteur
Viviane DURAND-GUERRIER	Co-directrice
Laurent HABSIEGER	Co-directeur
François HENNECART	Examinateur
Christian MERCAT	Examinateur
Cécile OUVRIER-BUFFET	Examinatrice
Denis TANGUAY	Rapporteur
Michel MIZONY	Invité

RESUME en français : A l'articulation de la théorie des nombres et de la didactique des mathématiques, notre recherche vise à étudier la question de la transposition du travail du mathématicien, via l'analyse de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants sur la recherche d'un même problème non résolu : la conjecture d'Erdös-Straus. Les analyses mathématiques et épistémologiques nous ont permis d'identifier différents aspects du travail du mathématicien et les éléments moteurs dans l'avancée de ses recherches. Cela nous a conduite à développer la notion de « geste » de la recherche pour décrire, analyser et mettre en perspective les processus de recherche des trois publics. Ces analyses ont mis en évidence les potentialités du problème pour créer une situation de recherche de problèmes en classe, plaçant les élèves dans une position proche de celle du mathématicien. Les analyses didactiques se sont appuyées sur la construction d'une telle situation puis sur sa mise à l'épreuve dans un contexte de laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Nous avons analysé finement les processus de recherche des élèves à l'aide des outils méthodologiques développés dans les analyses mathématiques et épistémologiques. Les analyses ont mis en évidence la richesse des procédures mises en œuvre, un travail effectif de la dialectique entre les connaissances mathématiques et les heuristiques mobilisées, et selon les groupes, une mise en œuvre de démarches de type expérimental, l'approfondissement de connaissances mathématiques notionnelles et une acquisition d'heuristiques expertes de recherche de problème non résolu. Elles montrent également la pertinence de la notion de « geste » de la recherche pour étudier la question de la transposition du travail des chercheurs.

TITRE en anglais : Study of a research process for researchers, pupils and students involved in the research of an unsolved problem in number theory.

RESUME en anglais : Our thesis deals with the transposition of mathematician's reserach activity in mathematical classroom, in the domain of number theory. Our research focuses on the study of a research process for researchers, pupils and students involved in the research of an unsolved problem: the Erdös-Straus conjecture. Our mathematical and epistemological analyses allow us to identify different aspects of the mathematician's work and the elements for progress in his research. The notion of "gesture" is developed to describe, analyze and contextualize different research processes. This analysis reveals the potentiality of this problem to create a research situation in classroom, where pupils are in a position similar to the mathematician's one. Didactical analyses are based on the construction of such a situation and its experimentation in laboratory. We study the research process of the students with the methodological tools developed in mathematical and epistemological analyses. This analysis shows several potentiality of this situation: a wealth of procedures implemented, effective work on the dialectical aspects of the mathematical research activity and implementation of experimental approach. The notion of "gesture" is relevant to consider the question of the transposition of mathematician's work.

DISCIPLINE : Didactique des mathématiques

MOTS-CLES : théorie des nombres, processus de recherche, conjecture d'Erdös-Straus, dimension expérimentale des mathématiques, problème de recherche

---

INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE :
S2HEP (Sciences et Société ; Historicité, Education et Pratiques), EA 4148, Université Claude Bernard – Lyon 1, Bâtiment « La Pagode », 38 boulevard Niels Bohr, Campus de la Doua, 69622 Villeurbanne.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Viviane Durand-Guerrier et Laurent Habsieger qui ont accepté de co-encadrer ce travail. Grâce à leur collaboration et leurs conseils, ces quatre années de recherche ont été extrêmement formatrices sur le plan scientifique et humainement très riches. Ils m'ont laissé une grande liberté pour mener mes recherches et ils m'ont toujours fait confiance et soutenue, tant dans mes décisions professionnelles que personnelles. Je les en remercie infiniment.

Un immense merci à Michel Mizony sans qui cette thèse n'aurait pu être ce qu'elle est. C'est avec une grande générosité et disponibilité qu'il s'est intéressé à mes travaux et qu'il a accepté que je suive ses recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus pendant ces quatre années. Notre collaboration a été très enrichissante tant humainement que mathématiquement. J'ai beaucoup appris en épistémologie et en histoire des mathématiques à ses côtés et c'est toujours avec un immense plaisir que je l'écouterai raconter ses avancées en mathématiques ou en relativité générale mais aussi ses coups de colères concernant des polémiques de l'actualité lors des réunions du groupe DREAM.

Je remercie chaleureusement Louis Thépault qui a eu la gentillesse de répondre à mes questions et de m'avoir reçu chez lui, à Saint-Malo, pour discuter de ses recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Je suis très reconnaissante envers Jean-Louis Nicolas qui m'a présenté la personnalité atypique de son collègue Paul Erdös ainsi que ses principaux travaux.

Merci à Denis Tanguay et Christophe Delaunay d'avoir accepté d'être rapporteurs sur ma thèse. Mes remerciements vont également à Véronique Battie, François Hennecart, Christian Mercat et Cécile Ouvrier-Buffet qui ont accepté d'être membres du jury. Je voudrais remercier particulièrement Véronique Battie dont la présence me fait extrêmement plaisir. En me proposant de m'inscrire dans la lignée de ses travaux de recherche et en encadrant mes premières recherches (en master 2), elle m'a donné l'envie de continuer et transmis une méthodologie de recherche méticuleuse, élément qui a été essentiel pour mener à bien cette thèse.

Un grand merci à tous les élèves et les étudiants qui ont participé à mes différentes expérimentations et en particulier aux élèves de terminale scientifique du Parcours Excellence pour s'être confrontés, pendant plus douze heures, à la conjecture d'Erdös-Straus.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du laboratoire S2HEP que j'ai côtoyé pendant ces quatre années. Je pense en particulier aux doctorants et aux jeunes chercheurs du laboratoire.

J'ai toujours participé, et également organisé, avec grand plaisir le week-end Jeunes Chercheurs de l'ARDM. Ce sont des moments privilégiés pour partager nos questionnements scientifiques ou pour passer des moments conviviaux avec plus ou moins de didactique. Merci à tous les jeunes chercheurs !

Au cours de la rédaction de mon manuscrit, j'ai ressenti de nombreuses fois la solitude du chercheur, seule face à son écran d'ordinateur. Les réunions du groupe DREAM m'ont permis de m'échapper, une fois par mois, de mon bureau et de partager des moments toujours riches mathématiquement, didactiquement et bien sûr humainement. Merci à Michel, Pierre-Yves, Didier, Antoine, Gilles et Mathias ! Quelques mots supplémentaires à l'attention de Gilles et Mathias, pour nos discussions et collaborations didactiques, pour leur intérêt pour mes recherches et leur soutien.

Un grand merci à tous mes amis qui m'ont soutenue et encouragée, en particulier Céline, Laurent et Lucas pour les soirées jeux du Lundi ; Elodie, Matthieu et Théo pour toutes nos discussions scientifiques, ludiques et « de bébé » de ces derniers mois...et aussi pour l'écran ! Une pensée toute particulière pour Estelle, Yohann et Gaël, pour leur présence, leur écoute et tous les moments partagés ensemble.

Une pensée pour ma famille au sens large, les cousinades, week-ends au ski ou autres fêtes familiales sont des moments privilégiés pour garder contact entre nous...et avec la réalité ! Un immense merci à Éric d'avoir accepté de passer une grande partie de ses vacances avec nous cet été, à Sébastien pour ses réflexions inoubliables (et ses sessions « balançoire » avec Zoé) et bien sûr à Laurine et Solène les meilleures baby-sitters du monde. Elles sont maintenant incollables en peinture, pâte à modeler, chansons, Kapla... et elles savent tout sur la traite des vaches ! Merci également à Marraine Solène pour les parties de tomate-ketchup, les puzzles, les p'tites bêtises et la chanson de l'apéro !

Un clin d'œil à mes frères qui ont toujours le petit mot qui va bien pour me déstresser...ou pas en précisant que je travaille trop. Voilà, maintenant j'ai terminé et je ne suis pas la dernière des quatre à être étudiante !

Sans la curiosité scientifique, le goût d'apprendre, l'esprit critique et la persévérance que m'ont transmis mes parents, je n'aurai pu mener à bien cette thèse. Je ne peux ici que les remercier infiniment pour tout ce qu'ils ont fait pour moi, surtout ces derniers mois. Je remercie ma mère pour sa relecture attentive et précise de mon manuscrit et pour s'être beaucoup occupée de Zoé. Il est difficile d'énumérer tout ce que mon père a fait autour de ma thèse mais je vais essayer : me montrer les voies de la didactique des mathématiques et en particulier l'intérêt de la résolution de problèmes en classe, me permettre de réaliser les expérimentations dans ses classes dans des conditions idéales, relire mon manuscrit et bien sûr discuter et débattre de questionnements didactiques sur ou autour de mon sujet de recherche...et je n'oublie pas son investissement auprès de sa petite fille !

Enfin, je ne peux tourner cette page et terminer cette aventure sans remercier ma petite famille. Un seul mot peut résumer ce que PC a fait pour nous et particulièrement pour moi ces derniers mois : TOUT. S'occuper de Zoé bien sûr et de la gestion du quotidien mais surtout me supporter et m'épauler à toute épreuve. Je l'ai beaucoup sollicité et il a toujours été présent. Pour tout ce qu'il m'apporte depuis que nous nous sommes rencontrés, je le remercie infiniment. Pour finir, une pensée pour nos enfants, Zoé et Malo, qui m'ont permis de garder un contact avec le monde réel, de m'échapper de la rédaction et de tenir le coup dans les moments les plus difficiles. Merci à Zoé pour sa patience, ponctuée de ses « viens, Maman, viens » ou « Travaille pas Maman ». Nous nous sommes manquées ces derniers mois mais nous allons nous rattraper. Merci à Malo d'avoir attendu la fin de la rédaction pour pointer le bout de son nez. C'est la seule personne, autre que moi, à avoir suivi la genèse de cette thèse de l'intérieur...j'espère qu'il n'en sera pas traumatisé !

Table des matières

Table des matières des annexes

Introduction générale

Lors de nos premières recherches en didactique des mathématiques dans le cadre de notre stage de recherche de Master, nous nous sommes intéressée à la pratique de la résolution de problèmes de recherche dans un contexte scolaire, à la transition du lycée et de l'université. Notre intérêt pour cette problématique provient de notre expérience personnelle où, au cours de nos études secondaires et universitaires en mathématiques, nous avons constaté l'absence d'un enseignement incluant des notions d'épistémologie et d'histoire des mathématiques d'une part et d'activités de recherche de problèmes d'autre part. Or, notre intérêt pour cette discipline se trouve précisément dans le rôle des problèmes dans le développement des mathématiques, et dans la recherche de problèmes en elle-même.

Pour l'apprentissage des mathématiques, nous faisons l'hypothèse, avec Claude Tisseron, que l'activité de recherche de problèmes permet « d'atteindre l'objectif vague mais porteur d'appropriation par l'élève à la fois de connaissances, d'une méthodologie de recherche scientifique voire d'une méthodologie de pensée » (Tisseron, 1998). Elle permet ainsi de travailler un type d'activité mathématique spécifique, à savoir les aspects dialectiques entre mobilisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques.

Précisons de quel type de problèmes nous parlerons dans la suite de notre travail. Tisseron (1998) a effectué une typologie des problèmes en repérant divers types d'activités à partir de leurs finalités d'apprentissage ou des modalités de fonctionnement des connaissances mises en jeu par l'élève. Il distingue trois types de problèmes : les problèmes d'application (entraînement ou réinvestissement), les problèmes pour apprendre de nouvelles notions (situation-problème) et les problèmes pour chercher (problèmes de recherche, problèmes ouverts et problèmes sur une longue durée). Pour définir plus précisément les problèmes pour chercher, l'auteur précise que :

> On parle de problème s'il n'y a pas de procédure automatique pour résoudre la question posée. C'est en ce sens qu'un problème se cherche. Il y a une distinction entre une situation d'exécution et une situation de recherche par le type de relation entre le sujet et la connaissance en jeu. [...] En situation de recherche, le sujet va réorganiser des connaissances en les faisant fonctionner dans des contextes nouveaux ou avec d'autres contraintes, découvrir les limites de ses connaissances et donc éventuellement modifier ses conceptions, découvrir la nécessité de nouveaux concepts etc. (Tisseron, 1998)

Dans notre travail, nous ferons référence à ce type de problèmes, *les problèmes pour chercher*, où l'élève doit utiliser ses connaissances et les mettre en œuvre dans des conditions très différentes de celles de leur apprentissage. Ces notions ne sont pas nouvelles pour l'élève, en revanche elles sont retravaillées et approfondies au cours de la résolution du problème.

Précisons également notre emploi du terme *heuristique*. Nous l'utiliserons essentiellement dans deux expressions : heuristique de la découverte et développements d'heuristiques. Dans la première expression, nous faisons référence à la « discipline qui étudie les procédés de recherche pour en formuler les règles, et qui effectue une réflexion méthodologique sur cette activité » (Définition du TLFi, Trésor de la Langue Française informatisé). Elle correspond à la définition donnée par Pólya :

> L'heuristique s'efforce de comprendre la méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier les opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles à l'application de cette méthode. Nous ajoutons que l'heuristique se distingue de la méthodologie en ce sens qu'elle est plus une réflexion sur l'activité intellectuelle du chercheur que sur les voies objectives de solution. (Pólya, 1989, p. 99)

Dans la seconde expression, le terme heuristique fait référence aux opérations mentales qui servent à la découverte.

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées, depuis près de trente ans, à la construction, la mise en œuvre et l'analyse de dispositifs didactiques permettant aux élèves de pratiquer des activités de recherche mathématique (Schoenfeld, 1985 ; Arsac, Germain, & Mante, 1988 ; Duchet, 1996 ; Tisseron, 1998 ; Grenier & Payan, 2003 ; Dias, 2008 ; Giroud, 2011). Ils mettent en évidence l'intérêt des enseignants et des élèves pour ces pratiques de classe (Arsac & Mante, 2007) mais également les difficultés de mise en œuvre et les freins au développement des problèmes de recherche en classe (Aldon et al., 2010). Nos recherches s'inscrivent dans la continuité de ces travaux, en partageant notamment l'hypothèse suivante :

> Il est possible de reproduire chez l'élève certains aspects du travail du chercheur en le mettant dans des situations appropriées. (Tisseron, 1998)

De cette hypothèse, sont nées les questions centrales de notre thèse : que veut dire concrètement mettre les élèves en position de chercheur ? Que peut-on transposer de l'activité de recherche d'un mathématicien ? Comment construire un milieu riche favorisant l'activité de résolution de problèmes de recherche en classe ?

Notre recherche vise à se donner des outils pour décrire le travail des mathématiciens, et pour analyser les processus de recherche mis en œuvre au cours de la résolution d'un problème de recherche. Pour cela, nous avons développé la notion de « geste » de la recherche, qui permet de prendre en compte différents aspects de l'activité de recherche mathématique, notamment sa dimension active et ses aspects dialectiques entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. De plus, elle permet de mettre en évidence les ressorts de la dimension expérimentale, dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche, et plus généralement pour l'apprentissage des mathématiques. En accord avec Dias (2008) et l'équipe DREAM [1] (Aldon et al., 2010), nous faisons en effet l'hypothèse que le recours à la dimension expérimentale participe à la construction des connaissances mathématiques. Nous avons ensuite élaboré une situation de recherche pour des élèves et des étudiants, les plaçant dans une position proche de celle d'un chercheur en mathématique. Pour cela, nous avons identifié des éléments qui caractérisent un milieu favorisant une dévolution de la recherche et la production de résultats partiels sur le problème.

Pour conduire notre étude, nous avons choisi de travailler dans un domaine mathématique spécifique : la théorie des nombres. Ce choix est motivé par la nature des objets mathématiques qu'il mobilise. Les travaux de l'équipe Maths à modeler (cf. par exemple Grenier & Payan, 2003 ; Ouvrier-Buffet, 2003 ; Godot, 2006 ; Giroud, 2011 ; Modeste, 2012) montrent la pertinence des mathématiques discrètes pour élaborer des situations de recherche pour la classe ; leur choix des mathématiques discrètes s'appuie sur l'hypothèse selon laquelle « l'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite des problèmes dont la résolution fait appel à des objets mathématiques qui n'ont pas encore été travaillés par les élèves » (Giroud, 2011, p. 121). Dans notre travail, nous faisons l'hypothèse que la dimension expérimentale de l'activité de résolution de problèmes de recherche peut être facilitée si les objets mathématiques en jeu sont suffisamment familiers des élèves pour fonctionner comme des objets concrets. La théorie des nombres offre alors cette possibilité dans la mesure où les objets mathématiques en jeu (notamment les notions de nombre entier et de fraction) sont naturalisés assez tôt dans la scolarité. En accord avec les hypothèses du groupe DREAM (Aldon et al., 2010), nous ajoutons que le recours à la manipulation d'objets familiers favorise la mise

1. Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques.

en œuvre d'une démarche de type expérimental, par des allers et retours entre l'expérience et la théorie. Le problème mathématique que nous avons retenu, parmi des sujets des ateliers MATh.en.JEANS [2], est la conjecture d'Erdös-Straus. Il s'agit d'un problème de théorie des nombres, non résolu actuellement par la communauté mathématique et qui fait l'objet de recherches récentes (Mizony, 2010 ; Elsholtz & Tao, 2011 ; Bello-Hernández, Benito, & Fernández, 2012). Sa formulation est simple et permet une appropriation du problème dès le lycée.

Nos travaux s'inscrivent dans la lignée des recherches menées par Battie à l'articulation de la théorie de nombres et de la didactique des mathématiques. Dans sa thèse (Battie, 2003), elle met en évidence les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement en mathématique. Pour cela, elle construit un outil d'analyse qui permet de situer les difficultés des élèves dans la résolution d'un problème (en arithmétique) et de mettre en évidence une créativité certaine des élèves. Son outil offre l'accès à la dynamique du processus de production d'une preuve arithmétique. Dans notre recherche, nous mettrons à jour cet outil pour analyser la dynamique des processus de recherche dans le cadre de l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous nous inscrivons dans les perspectives de sa thèse (cf. Battie, 2007) dans la mesure où nous avons choisi, d'une part d'étudier l'activité de recherche experte de mathématiciens, et d'autre part de mettre en perspective l'activité de recherche d'élèves, étudiants et chercheurs face à l'étude d'un même problème de recherche (non résolu) en arithmétique. Cette spécificité de notre sujet, à savoir mener nos propres recherches sur la conjecture et suivre celles de chercheurs, a nécessité un double encadrement et une collaboration effective entre nos deux directeurs, Viviane Durand-Guerrier pour la didactique des mathématiques et Laurent Habsieger pour la théorie des nombres.

Notre étude s'est d'abord orientée vers un questionnement de nature épistémologique suivant deux axes : via l'étude de textes historiques et contemporains de mathématiciens sur l'activité de recherche mathématique et via le suivi des recherches de deux chercheurs sur le problème de recherche choisi. Le choix de la méthodologie de ce second axe s'est appuyé sur l'hypothèse suivante : suivre « in statu nascendi [3] » le travail de mathématiciens sur le problème permet d'identifier les éléments moteurs de leur recherche. La mise en œuvre de cette méthodologie de suivi du travail de mathématiciens a été possible, d'une part grâce au double encadrement de notre travail, en théorie des nombres et en didactique des mathématiques, et d'autre part grâce à un chercheur, avec qui nous travaillons au sein du groupe DREAM de l'IREM [4] de Lyon, qui s'est intéressé à l'étude de la résolution de la conjecture à partir de nos premiers travaux de recherche en 2009. Cette partie de la recherche a nécessité de notre part une analyse mathématique détaillée de la conjecture d'Erdös-Straus, afin de pouvoir suivre le travail du mathématicien et interagir avec lui au cours de ses recherches qui se sont poursuivies tout au long de notre thèse. Grâce à ce travail de suivi au long cours, nous avons recueilli des données très riches pour analyser ses processus de recherche mis en œuvre dans l'étude de la conjecture. En retour, cela nous a permis de participer à la recherche mathématique du problème et d'enrichir ainsi nos analyses mathématiques.

Les analyses mathématiques et épistémologiques ont été un préalable à nos analyses didactiques, d'une part pour déterminer différents aspects du travail du chercheur, éléments

2. Méthode d'Apprentissage des Théories Mathématiques en Jumelant des Etablissements pour une Approche Nouvelle du Savoir.

3. Cette expression est empruntée à Pólya : « [...] on n'a, en effet, jamais présenté tout à fait ainsi les mathématiques "in statu nascendi" (c'est-à-dire telles qu'elles sont lorsqu'on est en train de les inventer) [...] ». (Pólya, 1989, p. xv).

4. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

essentiels à approcher pour étudier la question de la transposition de l'activité de recherche professionnelle, afin de placer les élèves dans une situation proche de celle du chercheur en mathématique, et d'autre part pour construire une grille d'analyse des processus de recherche mis en œuvre dans l'étude de la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus. La partie didactique de notre recherche est structurée selon deux axes, relatifs à deux modèles de milieu du cadre d'analyse développé par Bloch (2002). Le premier axe du travail didactique consiste en l'élaboration du milieu expérimental *a priori* pour construire une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Le second axe correspond à la mise à l'épreuve de la contingence de cette situation didactique, que nous avons choisi d'expérimenter dans des conditions de laboratoire, avec des élèves de terminale scientifique. Ce choix a été possible, d'une part grâce à la disponibilité et l'intérêt pour nos travaux d'un enseignant dans notre entourage proche, et d'autre part grâce aux moyens dont il disposait au sein de son établissement pour préparer des élèves de terminale scientifique aux études supérieures. Nous avons mené trois pré-expérimentations et l'expérimentation de type laboratoire dans les classes de cet enseignant de mathématiques en lycée. Ce dernier est expérimenté, il est titulaire d'un DEA [5] de didactique des mathématiques de l'Université de Lyon 1 et a participé pendant plusieurs années à des groupes de recherche autour de la résolution de problèmes en classe. Cela nous a permis de disposer de conditions particulièrement favorables pour mener nos expérimentations.

Le manuscrit se compose de trois parties et d'un intermède qui s'articulent de la manière suivante.

La **première partie** a pour objet la présentation de la méthodologie générale de notre recherche et celle des cadres didactiques dans lesquels nous nous inscrivons. Dans le **chapitre 1**, nous explicitons en détail l'origine de notre projet de recherche, la problématique et les questions de recherche de notre thèse et les caractéristiques spécifiques de notre méthodologie. Les ancrages théoriques sont présentés dans le **chapitre 2**, et le **chapitre 3** présente plus spécifiquement des travaux en didactique des mathématiques s'intéressant à la question de la résolution de problèmes en classe.

L'**intermède** est consacré au mathématicien Paul Erdös, l'un des deux auteurs de la conjecture. Nous avons choisi de présenter ce mathématicien pour sa pratique singulière des mathématiques, faisant écho au point de vue sur l'activité des mathématiques que nous adoptons, c'est-à-dire « faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes » (Perrin, 2007).

La **deuxième partie** contient les analyses mathématique et épistémologique. Dans notre adaptation des modèles de milieu de Bloch (2002), elle correspond à l'élaboration du milieu théorique. Elle est composée de deux chapitres. Dans le **chapitre 4**, nous présentons un état de l'art sur la conjecture d'Erdös-Straus ainsi qu'une analyse mathématique de ce problème, à partir d'articles de la littérature existante d'une part et à partir de l'étude des recherches récentes de deux chercheurs d'autre part. L'analyse épistémologique constitue le **chapitre 5**. Dans un premier temps, nous étudions les divers aspects de l'activité de recherche mathématique à partir de témoignages de mathématiciens sur le processus de découverte mathématique et sur l'heuristique de la découverte. Dans un second temps, nous développons une grille d'analyse, élaborée sur nos analyses mathématiques et épistémologiques, pour étudier les processus de recherche mis en œuvre dans l'étude de la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus. Enfin, dans un troisième temps, nous présentons les recherches des chercheurs que nous avons suivis en analysant leurs travaux grâce à la grille d'analyse construite précédemment.

5. Diplôme d'Etude Universitaire, maintenant remplacé par le Master 2.

La **troisième partie** est consacrée aux analyses didactiques. Elle est composée de cinq chapitres. Le **chapitre 6** décrit les différentes phases de la construction d'une situation de recherche, à destination des élèves et des étudiants, autour de la conjecture d'Erdös-Straus : l'analyse des programmes de mathématiques, le choix des variables de situation et l'analyse de cinq pré-expérimentations. Le **chapitre 7** a pour objet l'analyse *a priori* de la situation expérimentale de type laboratoire autour de la conjecture d'Erdös-Straus qui sera expérimenté en classe de terminale scientifique. Ces deux chapitres correspondent à la phase d'élaboration du milieu expérimental *a priori* (au sens de Bloch). Dans le **chapitre 8**, nous présentons l'expérimentation en laboratoire en décrivant l'organisation didactique de la situation, le choix des variables de situations et en détaillant précisément l'élaboration du milieu matériel des élèves. Le **chapitre 9** est consacré aux analyses *a posteriori* de l'expérimentation en laboratoire avec l'analyse des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans leur recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, à l'aide de la grille d'analyse développée au chapitre 5 et des analyses *a priori* effectuées dans les chapitres 6 et 7. Enfin, dans le **chapitre 10**, nous effectuons un retour sur nos phases de conceptions théoriques en analysant, d'une part la pertinence de la notion de « geste » pour étudier la question de la transposition du travail des chercheurs, et d'autre part les effets du milieu matériel construit sur la recherche des élèves. Les chapitres 8, 9 et 10 constituent la phase de confrontation à la contingence des modèles de milieu de Bloch (2002).

Première partie

Méthodologie de la recherche et ancrages théoriques

Chapitre 1

Méthodologie générale de la recherche

Sommaire

L'objet de ce premier chapitre est de présenter la démarche générale de notre recherche. Nous commençons par expliciter l'origine de notre projet de thèse qui s'inscrit dans la continuité de nos premiers travaux de recherche menés dans le cadre de notre stage de recherche en master 2. Nous présentons en particulier quelques résultats de cette première étude. Nous détaillons ensuite notre problématique avec les questions de recherche épistémologique et didactique associées. Enfin, nous explicitons la méthodologie générale de notre recherche, qui s'appuie sur l'interaction de trois pôles : mathématique, épistémologique et didactique.

1.1 Origine du projet de recherche

Le point de départ de notre projet était de nous intéresser à la pratique des mathématiques dans l'enseignement et en particulier à la mise en place dans les classes d'activités de recherche mathématique à caractère expérimental. Plusieurs groupes (MATH.en.JEANS, Main à la pâte, Maths à modeler, ResCo ou DREAM [1]) se sont intéressés, sous des aspects différents, à cette question. Dans notre travail, nous avons choisi d'étudier cette problématique dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche. Plus particulièrement, notre projet s'est focalisé sur l'étude de processus de recherche qu'un sujet met en œuvre dans la résolution de problème de recherche. Nous avons alors envisagé une analyse comparative de processus de recherche de différents publics (élèves, étudiants, enseignants et chercheurs en mathématiques) engagés dans la recherche d'un même problème. Une mise en perspective des différents processus de recherche viserait alors à dégager des éléments pour développer, dans l'enseignement, des pratiques mathématiques s'appuyant de manière effective sur la résolution de problème de recherche. Dans la suite de ce paragraphe, nous détaillons les principaux résultats de notre recherche conduite dans le cadre du stage de master 2.

La recherche conduite en Master 2. Notre recherche a débuté dans le cadre de notre stage de recherche de master 2 (M.-L. Gardes, 2009) où nous nous sommes intéressée

1. Nous présentons les travaux de certains de ces groupes dans le chapitre 3.

aux processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème de recherche en arithmétique. L'étude des processus de recherche est menée à l'aide de plusieurs critères, notamment la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques, par les allers et retours entre actions sur les nombres et élaboration de conjectures d'une part, et entre argumentation et preuve d'autre part. Les potentialités de l'arithmétique pour développer l'apprentissage du raisonnement mathématique à la transition secondaire/supérieur ont bien été identifiées par Battie (2003). Ceci tient principalement à deux aspects complémentaires. Le premier aspect tient à la grande variété des raisonnements mobilisés et à la possibilité d'identifier clairement ce qui relève de l'organisation générale d'un raisonnement, et ce qui relève des aspects opératoires nécessaires pour mener à terme ce raisonnement [2]. Le deuxième aspect tient à la pluralité des points de vue possibles sur des objets qui, à ce niveau du cursus, sont familiers et peuvent donc jouer le rôle de domaine concret d'expérience au sens où, selon Paul Langevin, « le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage ». Le processus de dévolution de la recherche est ainsi facilité.

Le choix du problème à proposer a été une question primordiale dans notre étude. Il a été motivé en premier lieu par le projet d'étude comparative de processus de recherche d'élèves et de chercheurs sur un même problème. Des conditions sur le problème à proposer se profilaient : non connu, suffisamment intéressant et motivant pour les chercheurs, accessible et permettant une recherche effective aux élèves. Nous supposons qu'un problème ouvert au sens de la recherche mathématique (c'est-à-dire non résolu) peut remplir ces différents critères. Si le qualificatif « ouvert » ne semble pas être essentiel pour les élèves, il apparaît important pour les chercheurs. En effet, cela semble garantir une dévolution de la recherche auprès de ceux-ci. En ce qui concerne les élèves, c'est plutôt la caractéristique de proximité du problème avec un domaine conceptuel qui leur est familier qui favorise la dévolution de la recherche. Ainsi un problème qui présente une distance trop importante avec leurs connaissances risque de ne pas révéler les caractéristiques des processus de leurs recherches, les élèves ne disposant pas des outils nécessaires pour les mettre en œuvre. En second lieu, nous avons choisi un problème comportant un caractère expérimental afin que les élèves puissent potentiellement mettre en œuvre une démarche expérimentale [3].

Afin de trouver un problème répondant à ces différents critères, nous avons d'abord choisi un domaine particulier des mathématiques : la théorie élémentaire des nombres. Charles Pisot, cité par Nimier (1989), mentionne la place particulière de la théorie des nombres au sein des mathématiques :

> Un certain nombre de mathématiciens ont créé BOURBAKI pour essayer d'introduire des structures dans les mathématiques et on m'avait demandé d'y participer : j'avais la mission d'essayer de trouver des structures pour la théorie des nombres ; mais cela ne marchait pas, il n'y a pas de structures là-dedans et finalement BOURBAKI a renoncé à faire quelque chose en théorie des nombres. Maintenant je commence à peu près à savoir pourquoi : je pense que les mathématiques dans leur ensemble procèdent de deux sources et la première source évidemment à laquelle tout le monde pense, c'est l'expérience, et la physique ou la chimie... Ces domaines posent certains problèmes qui font progresser les mathématiques, mais il y en a une autre qui me semble tout aussi importante c'est la théorie des nombres. Les problèmes posés par les nombres entiers nécessitent

2. Nous détaillons ces spécificités du raisonnement en arithmétique dans le chapitre 2, paragraphe 2.1.3.

3. Ici, le caractère expérimental du problème repose sur la possibilité d'étudier des cas particuliers sur différentes valeurs de (petits) nombres entiers. La démarche expérimentale se caractérise ici par des allers et retours entre la théorie et les expériences (telles que l'étude d'un cas particulier). Ces notions seront explicitées en détail dans le chapitre 2, paragraphe 2.1.2.

> de tels travaux et de telles réflexions que finalement c'est de là que sortent à peu près la moitié des théories mathématiques. Je ne donnerais qu'un exemple, enfin l'exemple le plus connu : c'est la théorie des groupes. C'est pour résoudre certaines équations que GALOIS et ABEL avaient créé la théorie des groupes.
> [...]
> Il y a des tas de questions qui se posent. Tous les problèmes de théorie des nombres s'énoncent simplement : tout nombre pair est-il la somme de deux nombres premiers ? ... Vous savez, ce n'est toujours pas démontré ! ... C'est irritant parce qu'on n'y arrive pas, on a inventé de belles méthodes qui, finalement, ont envahi toutes les mathématiques. C'est pour cela que je pense que les mathématiques doivent énormément à la théorie des nombres, c'est une discipline un peu à part mais qui est à l'origine... (Nimier, 1989, p. 70-72)

Pisot relève deux raisons qui placent la théorie des nombres dans une position spécifique au sein des mathématiques : sa place et son rôle dans l'origine des mathématiques et la simplicité des énoncés de ses problèmes. Ce dernier point est un critère que nous avons retenu. En effet, le fait que beaucoup de problèmes d'arithmétique s'énoncent simplement mais soient encore ouverts nous permettait de trouver un même problème à proposer à des élèves, étudiants et mathématiciens. De plus, comme l'écrit Hoffman (2000) dans sa biographie d'Erdös, la théorie élémentaire des nombres contient des objets mathématiques accessibles dès le plus jeune âge :

> Ces domaines [les nombres parfaits et les nombres amiables] ne réclament pas beaucoup de connaissances techniques. [...] Il en va de même dans des domaines mathématiques comme ceux-là, qui représentent certains aspects de la théorie élémentaire des nombres (l'étude des entiers), de la théorie des graphes et de la combinatoire (problèmes mettant en jeu le dénombrement et la classification d'objets). On peut très facilement expliquer les nombres premiers, les nombres parfaits et les nombres amiables à un enfant, et il ou elle pourra commencer à jouer avec et découvrir leurs propriétés. (Hoffman, 2000, p. 49-50)

Pour les niveaux scolaires où nous proposerons le problème de recherche en arithmétique, le domaine des entiers avec ses méthodes élémentaires de calcul sera alors un domaine familier pour les élèves. En effet, les nombres entiers, les opérations sur les entiers et leurs propriétés, les fractions et les opérations sur les fractions sont *a priori* des objets naturalisés. Les élèves pourront donc s'engager dans l'action dans la recherche du problème pour dégager des conjectures et les questionner. Un autre critère est entré en compte dans le choix de la théorie élémentaire des nombres pour notre recherche, il s'agit de la potentialité de ce domaine pour développer une démarche expérimentale. Bouvier, dans son livre *La mystification mathématique* (1981), donne plusieurs exemples de recours à l'expérience dans la résolution de problèmes de théorie élémentaire des nombres. Il mentionne par exemple des travaux de Kummer sur le grand théorème de Fermat :

> Il fut amené à étudier pour chaque nombre entier premier $p \geq 3$, un entier noté souvent $h_1(p)$, fort difficile à calculer et dont la difficulté de calcul augmente avec la grandeur p. Afin d'éclairer ses investigations, Kummer effectua le calcul *explicite* de $h_1(p)$ pour tous les entiers premiers $p = 3, 5, 7, ...$ jusqu'à 163, ce qui lui demanda plus de vingt années d'efforts ! (Bouvier, 1981, p. 20)

Charles Hermite mentionne cet aspect expérimental de l'arithmétique :

> Les recherches d'arithmétique exigent absolument des exemples où l'observation puisse s'exercer ; autrement, on reste dans le vide. (Cité par Bouvier, 1981, p. 23)

Ainsi nous pensons que l'arithmétique offre un terrain propice à la mise en œuvre d'une méthode expérimentale dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche.

Au sein de la théorie élémentaire des nombres, nous avons alors choisi un problème susceptible de répondre aux divers critères cités ci-dessus : il s'agit d'une conjecture formulée par Erdös [4] et Straus [5] en 1950.

Pour tout entier naturel $n > 1$, il existe trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.

Lors de notre recherche en master 2, nous avons mené une première analyse comparative de deux publics. Nous avons étudié les processus de recherche d'élèves de terminale scientifique suivant la spécialité Mathématiques [6] d'une part, et ceux d'élèves de terminale scientifique ne suivant que l'enseignement obligatoire d'autre part. Pour cela, nous avons élaboré puis exploité un outil méthodologique qui a pour essence la complémentarité entre une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire (Battie, 2003) et la prise en compte du caractère expérimental du problème. Les résultats de l'analyse montrent que le processus de recherche des deux groupes est différent, l'un plus axé sur la dimension organisatrice, l'autre davantage centré sur le caractère expérimental du problème. Le groupe suivant la spécialité mathématique a ainsi mené une recherche axée principalement sur la dimension organisatrice en essayant en particulier d'exploiter de nombreux raisonnements (par l'absurde, par disjonction de cas) et diverses connaissances d'arithmétique institutionnalisés dans le cours de spécialité (théorème de Gauss, équation diophantienne). Une déconnexion avec le caractère expérimental en jeu dans le problème est parfois présente dans leur recherche. Le groupe ne suivant que l'enseignement obligatoire de mathématique a, au contraire, exploité rapidement l'aspect expérimental du problème, ce qui l'a conduit à suivre une dimension organisatrice particulière, le jeu d'extension/réduction (restriction de l'étude de l'équation initiale des nombres entiers naturels aux nombres premiers). Nous faisons l'hypothèse que ces élèves, n'essayant pas de se situer dans une dimension organisatrice particulière, faute de posséder des outils théoriques d'arithmétique, ont eu recours presque automatiquement au caractère expérimental en jeu. Nous faisons l'hypothèse que pour ce problème, l'influence de la culture de l'enseignement spécifique à l'arithmétique a freiné, dans un premier temps, la production de résultats des élèves suivant la spécialité mathématique.

Les recherches conduites lors de notre stage de master 2 ont montré la pertinence du domaine de l'arithmétique et du problème choisi pour développer un questionnement épistémologique et didactique sur les processus de recherche mathématique mis en œuvre par des élèves. L'analyse comparative de deux publics a montré l'influence de certains facteurs sur le processus de recherche des élèves, en particulier l'influence des connaissances mathématiques et l'influence de la représentation et de la pratique de la recherche mathématique.

L'intérêt de Mizony. Lors d'un séminaire-étudiants où nous présentions nos premiers travaux de recherche, un mathématicien s'est intéressé à la résolution de la conjecture

4. Paul Erdös (1913-1996) était un mathématicien hongrois. Nous présentons une courte biographie dans l'Intermède.

5. Ernst Straus (1922-1983) était un mathématicien américain d'origine allemande. Il a contribué au développement de la théorie de Ramsey et des propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. Il a été l'assistant d'Einstein. Pour plus de détail, consulter $http://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_G.straus$.

6. En classe de terminale scientifique, les élèves ont le choix entre différentes spécialités, dont celle de Mathématiques qui comporte un enseignement de géométrie et un enseignement d'arithmétique.

d'Erdös-Straus. C'est un problème qu'il ne connaissait pas et ayant travaillé sur plusieurs problèmes de fractions égyptiennes, la conjecture l'a attiré. Il a alors débuté une recherche active sur la résolution de ce problème. Ainsi, parallèlement à nos recherches didactiques autour de ce problème mathématique, nous avons suivi les recherches mathématiques de ce chercheur. L'intérêt et la recherche effective du mathématicien sur la conjecture montrent alors la pertinence du problème pour questionner épistémologiquement et mathématiquement le processus de recherche d'un chercheur.

Pour conclure, les recherches menées lors de notre stage de recherche en master d'une part et les recherches engagées par le chercheur d'autre part montrent que :

1. Le problème choisi remplit les différents critères énoncés : élèves et chercheurs en mathématiques peuvent s'engager dans une recherche effective de la solution problème. De plus le caractère expérimental du problème permet de mener une recherche de nature expérimentale.
2. Le problème choisi est pertinent pour étudier et comparer les processus de recherche des différents publics.
3. Une étude comparative des processus de recherche des différents publics est pertinente pour analyser puis développer l'activité de recherche des élèves. En effet, les premières observations des différents publics montrent que les processus de recherche peuvent être de même nature et qu'une mise en perspective est possible selon certains critères tels que l'exploitation des connaissances mathématiques ou la pratique et la représentation de l'activité mathématique. Citons, à ce propos, Bkouche caractérisant l'activité mathématique :

   > Qu'est ce que l'activité mathématique ? C'est essentiellement la résolution de problèmes (de mathématiques !), c'est-à-dire la recherche de réponses à des questions ouvertes : en ce sens la démarche du mathématicien professionnel et de l'apprenti sont de même type, même si l'un a une activité plus élaborée. (Cité par Bouvier, 1981, p. 44)

1.2 Problématique et questions de recherche

Notre projet de thèse s'inscrit donc dans la continuité de ces premiers travaux. Ceux-ci ont montré la pertinence du projet initial : la mise en perspective des processus de recherche d'élèves, étudiants et chercheurs confrontés à la résolution d'un même problème pour étudier puis développer des activités de recherche mathématique en classe. Notre premier questionnement didactique s'est affiné pour donner naissance à un questionnement de nature épistémologique et didactique. Il s'agit de s'intéresser plus particulièrement **à ce que l'on pourrait apprendre du travail mathématique effectif des chercheurs pour développer et enrichir des ingénieries favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche.**

Nos premières recherches ont montré qu'il était pertinent d'étudier les processus de recherche mis en œuvre à travers l'exploitation des connaissances mathématiques et à travers une certaine représentation et pratique de la recherche mathématique. Nous nous sommes donc interrogée sur la nature de l'activité de recherche mathématique professionnelle et la manière dont elle est pratiquée par les chercheurs. L'objectif épistémologique central est **d'identifier des éléments invariants potentiels dans l'activité de recherche mathématique à travers des témoignages de mathématiciens et à travers le suivi du travail de mathématiciens**.

Ces recherches ont également dégagé certaines conditions qui favorisent l'activité de recherche mathématique des élèves sur le problème choisi. Par exemple, les élèves doivent avoir un certain bagage mathématique disponible et une connaissance du vocabulaire de la recherche. Dans notre projet de thèse, nous envisageons d'étudier cette question didactique plus précisément **par l'identification des éléments pour la construction d'un milieu riche favorisant la résolution de problèmes de recherche dans les classes**.

1.3 Caractérisation de notre méthodologie

Notre projet de thèse se situe principalement dans le champ de la didactique des mathématiques mais il fait intervenir deux autres domaines importants : le domaine de l'arithmétique et celui de l'épistémologie. Le cadre d'analyse des modèles de milieu proposé par Bloch (2002), que nous présentons en détail dans le chapitre 2, permet de modéliser et d'expliciter notre méthodologie générale de la recherche, qui s'articule autour de ces trois domaines : didactique, épistémologie et mathématiques. Nous présentons ci-dessous les fonctions de ces trois pôles et leurs interactions.

Les pôles mathématique et épistémologique

La partie mathématique de la thèse consiste en l'analyse mathématique du problème de recherche choisi. Dans un premier temps, nous avons étudié différents travaux mathématiques existant sur la conjecture d'Erdös-Straus. Dans un second temps, nous avons suivi les recherches de deux chercheurs (dont un mathématicien) sur la résolution de cette conjecture. Cela consiste à étudier finement leur travail de recherche, notamment comprendre leur démarche de résolution mais aussi chercher à comprendre leurs théorèmes et leurs algorithmes et d'en faire les démonstrations. Ce travail nous a amené à contribuer aux recherches mathématiques sur le problème. Dans un troisième temps, nous avons articulé les différents résultats, antérieurs et nouveaux, sur la résolution de la conjecture. Ce travail mathématique nous a permis de faire l'état de l'art sur le problème et d'analyser les différentes approches mathématiques de la conjecture. Il fait l'objet du chapitre 4.

L'étude épistémologique de la thèse consiste en une analyse de la nature de l'activité de recherche mathématique. Une première étude, généraliste, repose sur la lecture de textes de mathématiciens décrivant les processus de l'invention mathématique (Poincaré, Hadamard, Fehr, Thursthon, Nimier, Weil, Connes, Schwartz et Villani) et d'autres explicitant l'heuristique de l'activité de recherche (Pólya, Lakatos). Une seconde étude, plus spécifique, se base sur l'analyse de travaux des deux chercheurs et notamment sur le suivi d'une recherche en cours sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous y observons particulièrement le processus de recherche et la manière dont le mathématicien travaille. Ces études d'épistémologie historique et contemporaine nous ont permis, d'une part de caractériser l'activité de recherche mathématique professionnelle, et d'autre part de construire un outil épistémologique (à partir de la notion de « geste ») pour analyser l'activité de recherche effective d'un sujet en résolution de problème. Elles font l'objet du chapitre 5.

Les interactions entre les études mathématiques et épistémologiques sont doubles. D'une part, le travail mathématique est primordial pour mener l'analyse épistémologique de suivi du travail du mathématicien sur la résolution du problème de recherche. En effet, il est indispensable de comprendre ce que font les mathématiciens lorsqu'ils cherchent un problème si l'on veut étudier leur méthodologie de recherche et repérer des éléments qui caractérisent leur activité de recherche. Par exemple, repérer les différentes variations du problème (Pólya,

1945) nécessite une bonne compréhension du problème initial et la maîtrise de différentes notions mathématiques. D'autre part, en retour, l'analyse épistémologique conduit à approfondir l'analyse mathématique du problème en ciblant certains éléments jouant un rôle central dans l'activité de recherche du mathématicien. Par exemple, faire des liens entre différentes notions ou entre les domaines des mathématiques peut être une étape primordiale dans la résolution de problèmes. Si on veut la repérer dans le travail effectif du mathématicien dont on suit la recherche, cela nécessite de retourner à l'analyse mathématique et de chercher quels sont les liens entre les différentes approches et quelles informations ils nous apportent. Le milieu épistémologique et mathématique (au sens de Bloch) s'est donc construit dans des allers et retours permanents entre l'analyse mathématique de différents travaux sur la conjecture et l'analyse épistémologique de l'activité de recherche mathématique.

Le pôle didactique

A partir des études mathématiques et épistémologiques, nous avons construit une situation didactique de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus (chapitre 6) et nous en avons fait une analyse *a priori* (chapitre 7). Cette étude correspond à l'élaboration du modèle de milieu expérimental *a priori* (au sens de Bloch). Dans un premier temps, nous avons prévu différentes organisations didactiques et identifier plusieurs variables didactiques pour des situations d'enseignement selon différents critères : le public concerné, le contexte d'enseignement, le niveau d'enseignement, le temps disponible, etc. Dans un second temps, afin d'affiner notre analyse *a priori* de la situation créée, nous avons mené des pré-expérimentations. La mise à l'épreuve des différentes variables de la situation a pour but de tester la robustesse de la situation et de dégager des invariants mais aussi des phénomènes didactiques inattendus. La confrontation entre les séances prévues et les séances réelles nous a permis de faire un retour et d'enrichir les études mathématique, épistémologique et didactique et en particulier, d'affiner la grille d'analyse de l'activité de recherche effective d'un sujet en résolution de problèmes. Par exemple, lors d'une pré-expérimentation, nous avons relevé que les élèves avaient des difficultés à questionner les exemples. Nous avons donc analysé plus en détail le rôle de certains exemples dans les recherches sur la résolution de la conjecture et en particulier, dans la recherche en cours du mathématicien que nous avons suivi. Le retour des pré-expérimentations ont ainsi nourri les études théoriques. Les différentes organisations didactiques de la situation ont également pu être modifiées, pour éviter un biais ou pour pouvoir observer un phénomène particulier.

Afin d'observer et d'analyser finement l'activité de recherche effective des élèves en résolution de problèmes, nous avons choisi de mener une expérimentation de type laboratoire, c'est-à-dire hors-classe. Cette étape correspond à la confrontation à la contingence du cadre d'analyse de Bloch (2002). Le contexte de laboratoire permet de neutraliser le paramètre « classe » et ses conséquences (temps limité, insertion dans le cours de l'enseignant, nombre d'élèves) et de se focaliser sur d'autres paramètres qui méritent d'être étudiés plus en détail pour notre questionnement tels que l'influence du bagage mathématique sur la recherche, l'influence de la recherche individuelle sur la recherche collective et l'observation de l'évolution du milieu objectif des élèves. Nous avons ainsi construit un protocole expérimental long (sur sept semaines) pour dix élèves de terminale scientifique. Le scénario de cette expérimentation de type laboratoire s'est construit par des va-et-vient entre les élaborations théoriques mathématique et épistémologique et l'analyse didactique *a priori* qui s'est réalisée dans la mise à l'épreuve des pré-expérimentations. L'expérimentation est présentée dans le chapitre 8, sa mise en œuvre et les analyses *a posteriori* font l'objet des chapitres 9 et 10.

1.4 Schéma de la méthodologie générale de la recherche

A la page suivante, nous présentons, à l'aide du cadre des modèles de milieu de Bloch (2002), un schéma récapitulatif des différents pôles d'étude ainsi que leurs interactions qui ont présidé à notre démarche.

Méthodologie générale de la recherche

Master 2
Le problème choisi est pertinent pour étudier des processus de recherche d'élèves.

Travail de Mizony
Le problème permet d'étudier le processus de recherche d'un chercheur.

Thèse

Que veut dire concrètement mettre les élèves en position de chercheur ? Que peut-on transposer de l'activité de recherche d'un mathématicien ? Comment construire un milieu riche favorisant l'activité de résolution de problèmes de recherche en classe ?

Milieu théorique mathématique et épistémologique

Mathématiques
- Recherche du problème.
- État de l'art.
- Étude de l'articulation de différents résultats.

Épistémologie
- Études de témoignages de mathématiciens sur le processus de découverte mathématique.
- Suivi du travail de mathématiciens sur la conjecture.

- Construction d'une grille d'analyse des processus de recherche, introduction de la notion de gestes.

Milieu expérimental *a priori*

- Détermination d'organisations didactiques pour une situation de recherche en classe autour de la conjecture.

- Mise en œuvre et analyses de cinq pré-expérimentations.

- Mise à l'épreuve de la grille d'analyse des processus de recherche.

- Construction d'une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus.

- Analyse *a priori* de la situation élaborée.

Confrontation à la contingence

- Mise en œuvre de la situation de recherche élaborée autour de la conjecture d'Erdös-Straus dans un contexte de laboratoire en terminale scientifique.
- Analyse des processus de recherche des élèves à l'aide de la grille d'analyse.
- Retour sur les analyses *a priori*.

Chapitre 2

Ancrages théoriques de la recherche

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est de présenter les ancrages théoriques de notre recherche, notamment en présentant différents travaux didactiques. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'explicitation des points de vue épistémologique et didactique que nous avons adoptés sur l'activité mathématique, à propos de la place des problèmes, du caractère expérimental des mathématiques et des spécificités du raisonnement en arithmétique. Ils conduisent à la formulation de nos hypothèses de recherche. Dans la seconde partie, nous expliquons en quoi la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998) nous semble pertinente pour conduire notre étude. Nous montrerons que ce cadre théorique permet de prendre effectivement en compte les aspects dialectiques de l'activité mathématique dans les différentes phases du processus de recherche, de l'expérimentation à l'élaboration de preuves. La troisième partie est spécifique à la notion de milieu. Dans un premier temps nous présentons la notion de milieu antagoniste de type expérimental et dans un second temps, nous mettons en évidence la pertinence des modèles de milieu de Bloch (2002) visant l'élaboration d'un milieu antagoniste riche pour la résolution de problèmes de recherche.

2.1 Points de vue épistémologique et didactique sur l'activité mathématique

2.1.1 La place des problèmes dans l'activité mathématique

I do believe that problems are the heart of Mathematics. (Halmos, 1985)

Comme le mentionne Halmos, les problèmes sont au cœur de l'activité mathématique. C'est la source commune et centrale de toute activité mathématique, qu'elle soit axée sur la résolution de problèmes « pour eux-mêmes » comme l'a pratiquée Erdös ou qu'elle soit centrée sur la découverte et la systématisation des méthodes de recherche de problèmes comme l'œuvre de Descartes (Arsac & Mante, 2007). Dans notre travail, nous nous centrons sur l'activité de résolution de problèmes elle-même. Ainsi nous rejoignons le point de vue de Perrin sur l'activité mathématique : « Faire des mathématiques, c'est poser, et si possible, résoudre des problèmes »(Perrin, 2007). Cette maxime résume précisément la pratique des mathématiques d'Erdös puisqu'on dit de lui qu'« il était le poseur de problèmes par excellence » mais aussi « un solutionneur de problèmes accompli » (Hoffman, 2000). Cette posture épistémologique sur l'activité mathématique est également celle de Brousseau :

> On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre une partie du problème n'est qu'une partie du travail ; trouver des bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. (Brousseau, 1998, p. 49)

La conception du développement des mathématiques adoptée par Arsac et Mante (2007) repose également sur la place centrale des problèmes :

> La science mathématique se construit et évolue à travers les problèmes internes et externes que les mathématiciens se posent et à travers leur acharnement à les résoudre. Au cours des différentes tentatives de résolution de ces problèmes, ils sont naturellement amenés à s'en poser un certain nombre d'autres qu'ils essayeront à leur tour de résoudre etc. La connaissance mathématique se crée en particulier grâce à cette activité de résolution de problèmes [...]. Elle permet aussi de résoudre des catégories de problèmes en identifiant, à l'aide des connaissances acquises, leur appartenance à une même catégorie. (Arsac & Mante, 2007, p. 19)

Ce qui les amène alors à faire l'hypothèse qu'il est souhaitable que :

> [...] l'activité de résolution de problème ait une place dans la classe, et qu'il s'établisse ainsi un équilibre entre l'acquisition de connaissances en vue de résoudre des problèmes « classiques » et l'entraînement à la recherche de problèmes. (Arsac & Mante, 2007, p. 19)

Nous rejoignons leur point de vue en soutenant l'hypothèse didactique suivante :

Hypothèse de recherche 1 : Pour apprendre en mathématiques, il est nécessaire de résoudre des problèmes de recherche car cela participe à la construction des connaissances.

La résolution de problèmes de recherche n'est pas suffisante pour garantir l'apprentissage des mathématiques et n'exclut donc pas tout autre type d'activités mathématiques en classe (découverte de notions, réinvestissement de connaissances, contrôle de connaissances, apprentissage de techniques, etc.) qui participe également à la construction des connaissances. Néanmoins, en accord avec Pólya et d'autres auteurs, nous soutenons que la résolution de problèmes de recherche permet de travailler un aspect particulier de l'activité mathématique, mis en évidence par Pólya dans son ouvrage *Comment poser et résoudre un problème* (1945), à savoir un processus dialectique entre la mobilisation et l'organisation des connaissances mathématiques et l'expérience de la résolution de problèmes, ce qui nous conduit à affiner l'hypothèse de recherche 1 avec une seconde hypothèse :

Hypothèse de recherche 2 : La résolution de problèmes de recherche permet de travailler les relations dialectiques entre les connaissances mathématiques et les connaissances heuristiques de l'activité mathématique.

Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons au caractère expérimental de l'activité mathématique en l'étudiant d'un point de vue épistémologique puis didactique.

2.1.2 Le caractère expérimental de l'activité mathématique

Nulle part, le monde de la théorie et le monde de l'expérience ne sont séparés d'avance.
(Gonseth, 1955)

La citation de Gonseth invite à discuter du caractère expérimental des mathématiques. Cette question a déjà fait l'objet de plusieurs études épistémologiques et didactiques, surtout ces dernières années. Nous nous appuyons sur les travaux de Bkouche (1982, 2008), Chevallard (1991), Dias (2008), Durand-Guerrier (2006, 2010), Giroud (2011) et Perrin (2007) pour présenter et expliciter ce que nous utiliserons sous la terminologie *dimension expérimentale* des mathématiques d'une part et *démarche expérimentale* d'autre part.

Bkouche (1982) reconnaît un caractère expérimental aux mathématiques dans la mesure où elles relèvent des sciences expérimentales qu'il définit selon deux principes :

1. d'une part, l'origine empirique des objets étudiés et des concepts ainsi mis en jeu ;
2. la méthode (ou les méthodes) d'autre part, qui participe à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel. (Bkouche, 1982, p. 307)

Il ajoute que « c'est l'articulation de l'empirique et du rationnel qui constitue la science expérimentale »(Ibid. p. 307) et c'est cette articulation que nous allons mettre en évidence en détaillant les deux principes. Illustrons d'abord le premier principe en étudiant la naissance d'un des premiers objets mathématiques : le nombre [1]. La naissance du concept de nombre est liée à l'opération de compter. Selon Giusti, « dans un premier temps les objets à dénombrer ont été représentés par des signes, puis à ces signes des noms furent donnés, sans plus besoin de l'intermédiaire des signes. Chaque nombre est généré par la répétition d'un acte simple : tracer un signe » (Giusti, 2000, p. 46). Il précise que les *Éléments* d'Euclide conservent des traces de cette genèse dans ses définitions de l'unité et de nombre (Éléments, livre 7, déf. 1 et 2) :

> L'unité est ce par quoi chacune des choses qui sont est dite une.
>
> Le nombre est une multitude composée d'unités.

Pour Bkouche, « il y a un constat expérimental des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition et de la multiplication, constat qui précède les justifications théoriques et celles-ci naissent de la nécessité de validation générale de tels constats » (Bkouche, 1982, p. 317). Ainsi la classification des nombres et les opérations qui forment l'arithmétique élémentaire ont pour origine le donner empirique issu de la pratique du comptage. Ce qui fonde

1. Nous avons choisi cet exemple en référence au travail mathématique de cette thèse qui repose essentiellement sur la notion de nombre.

le caractère expérimental des mathématiques, c'est la manipulation des objets conformément à une théorie, manipulation rendue possible par la représentation sous forme symbolique des objets mathématiques. Ce premier principe est donc relatif à un mode de constitution empirique de certains objets mathématiques qui se réalise dans « un va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets » (Durand-Guerrier, 2010, p. 1). C'est ce qui caractérise la dimension expérimentale des mathématiques, telle que nous l'utiliserons.

Le second principe fondamental d'une science expérimentale selon Bkouche (1982) réside dans sa (ou ses) méthode(s) qui doit participer à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel. Ce qui fonde le caractère expérimental d'une méthode est alors la définition et le rôle de l'expérimentation. C'est en effet elle qui est porteuse de l'articulation entre l'empirique et le théorique. Selon Bkouche (2008) et Chevallard (1991), l'expérimentation se distingue de l'expérience dans le sens où elle fait référence à une théorisation première pour justifier les questions que l'on se pose et pour ensuite construire un dispositif expérimental. Ainsi l'observation empirique ne se réduit pas à une simple constatation empirique, elle est une lecture de l'observation à travers une théorie. L'expérimentation s'appuie donc sur un double raisonnement, en amont pour élaborer une expérience pertinente et en aval pour la lecture des résultats. Son rôle est de vérifier l'adéquation entre la théorie et l'expérience dans le but de créer de nouveaux objets mathématiques. Selon Perrin (2007), cette adéquation se réalise dans un processus itératif composé de plusieurs étapes à renouveler éventuellement : expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelle tentative de preuve etc. Dans cette description de la méthode expérimentale, l'expérimentation (faire une expérience, observer l'expérience et en tirer des conclusions) s'articule avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuves. Dias (2008) prolonge cette idée en pensant l'expérimentation comme un processus dialectique empirique/théorique qui n'a de sens que par ses articulations avec la formulation et la validation. L'échec d'une tentative de preuve peut amener à mieux tester la solidité de la conjecture née d'une expérimentation. Il peut conduire à modifier la conjecture, voire l'expérimentation elle-même et ainsi inciter à imaginer d'autres chemins de preuve. De même, l'expérimentation mise en place pour cerner une question mathématique, peut déboucher sur des résultats imprévus, surprenants, qui conduisent à des interrogations sur d'autres propriétés et sur de nouveaux domaines, sur de nouvelles conjectures et tentatives de preuves. Nous empruntons à cet auteur la définition de la démarche expérimentale qui se caractérise par des va-et-vient constants entre la théorie et l'expérience se réalisant par des rétroactions de trois processus : expérimentation, formulation et validation. Nous préférons la terminologie démarche expérimentale à méthode expérimentale car elle nous semble moins connotée aux termes *systématique* et *organisé*[2]. Elle exprime alors mieux l'aspect parfois erratique que peut prendre la recherche mathématique.

Pour résumer, l'aspect expérimental des mathématiques se fonde sur deux principes intrinsèquement liés. Le premier est l'existence d'un mode empirique de constitution de certains objets mathématiques. Le recours à cette dimension expérimentale entraîne alors le second principe : la mise en œuvre d'une démarche expérimentale qui se caractérise par des allers

2. La définition de *méthode* du petit Larousse est la suivante : 1. Marche **rationnelle** de l'esprit pour arriver à la connaissance ou à la démonstration d'une vérité. 2. Ensemble **ordonné de manière logique** de principes, de règles, d'étapes, qui constitue un moyen pour parvenir à un résultat (c'est nous qui soulignons). La définition de *démarche* : manière de penser, de raisonner.

et retours entre les objets (naturalisés et/ou en cours de naturalisation) par des confrontations, des vérifications et des argumentations. Dans les paragraphes suivants, nous présentons deux travaux de recherche en didactique des mathématiques qui s'intéressent à l'apport de la dimension expérimentale pour l'apprentissage des mathématiques, en particulier dans le contexte de la résolution de problèmes.

a. La thèse de Dias (2008) intitulée : *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*

Dans sa thèse, après avoir étudié l'aspect expérimental des mathématiques d'un point de vue épistémologique, Dias l'étudie d'un point de vue didactique. Il met en évidence les ressorts de la dimension expérimentale des mathématiques dans des situations d'enseignement et de formation afin de développer la construction des savoirs scientifiques. Durand-Guerrier, en empruntant une situation à Barallobres, illustre cela en montrant en quoi

> la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (au sens de Vergnaud). (Durand-Guerrier, 2010, p. 5)

Ces auteurs montrent en particulier que le recours à la dimension expérimentale permet une prise immédiate sur les objets. Or, si « apprendre en mathématiques c'est avant tout comprendre c'est-à-dire entretenir des relations de sens avec les objets ou leur symbolisation qui les représentent » (Dias, 2008, p. 37), on comprend le nécessaire recours à la dimension expérimentale pour la construction de connaissances.

> Si résoudre des problèmes semble adéquat pour décrire l'activité mathématicienne, lui associer une démarche de type expérimental consistant à mener des expérimentations, observer leurs résultats, formuler des conjectures puis tenter de les prouver semble tout à fait appropriée. (Dias, 2008, p. 37)

Nous partageons le point de vue de cet auteur et pensons que le recours à la dimension expérimentale, par son travail sur les objets dans une dialectique théorie/expérience, permet de travailler la dialectique connaissance/heuristique. Nous formulons ainsi une troisième hypothèse didactique :

Hypothèse de recherche 3 : La dimension expérimentale des mathématiques fournit un terrain propice pour travailler les aspects dialectiques de l'activité mathématique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques

b. La thèse de Giroud (2011) intitulée : *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.*

Sur le plan épistémologique, Giroud considère la démarche expérimentale en mathématiques comme l'aspect expérimental de l'activité de recherche qui « a pour origine une tentative de résolution d'un problème mathématique » selon « un processus générateur de nouveaux problèmes » (Giroud, 2011, p. vii). Il place ainsi le problème comme objet central de la démarche expérimentale en mathématique. Il précise qu'il considère le problème comme un couple (instance-question) et que proposer des nouveaux problèmes signifie : « changer les instances du problème ; changer la question du problème ; changer les instances de la question » (Ibid, p. 9). Pratiquer une démarche expérimentale en mathématique consiste alors à faire différents types d'actions (actions non nécessairement ordonnées et à éventuellement répéter) :

– proposer de nouveaux problèmes
– expérimenter-observer-valider
– tenter de prouver.

Il s'agit d'un processus d'interactions, le résultat d'une action entraînant la réalisation d'une autre action. On retrouve l'articulation entre formulation (proposer un nouveau problème), validation (tenter de prouver et valider) et expérimentation mis en évidence dans la définition de Dias (2008) (cf. paragraphe précédent). Il définit l'action d'expérimenter comme l'utilisation ou la construction d'une stratégie. Cette dernière est définie comme « l'ensemble de manipulations ordonnées sur des objets du problème ou sur leurs représentations » (Giroud, 2011, p. 10). Afin d'étudier les interactions en jeu au cours du processus, l'auteur développe la notion de *concept-problème* qui formalise la notion de conception sur un problème. Il définit le *concept-problème* sur un problème P comme un triplet [3] composé de :

– L'espace problème P : ensembles des problèmes qui donnent du sens au problème P ;
– L'ensemble des invariants opératoires I qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de P ;
– L'ensemble des représentations R que l'on peut associer aux éléments de P.

Sur le plan didactique, la notion de *concept-problème* est utile car c'est une aide pour l'analyse *a priori* d'une situation (identification d'obstacles, difficultés et problème ou représentation manquante) d'une part et aux choix des variables de recherche (Godot, 2006 ; Grenier & Payan, 2003) d'autre part. De plus, il permet de montrer comment la mise en œuvre de la démarche expérimentale contribue à développer, de manière dialectique, la conception sur le problème. Il met ainsi en avant le rôle de l'interprétation comme une confrontation d'un fait à une conception via une expérimentation, et montre sur des exemples les liens entre expérimenter et tenter de prouver, puis entre tenter de prouver-expérimenter et proposer de nouveaux problèmes. Il ajoute certains apports de la démarche expérimentale tels que la production de conjectures, la validation du produit de la stratégie, la recherche d'un domaine de validité ou la définition de nouveaux objets.

La notion de *concept-problème* développée par Giroud nous semble intéressante dans la mesure où elle permet de montrer en quoi « la pratique de la démarche expérimentale permet aux élèves d'"avancer" dans la résolution du problème » (Giroud, 2011, p. 117). Il considère que les élèves « avancent » dans la résolution du problème quand la conception des élèves sur le problème est modifiée. Par exemple, lorsqu'un nouveau problème est formulé, une nouvelle relation entre les deux problèmes établie, un nouvel exemple produit, une nouvelle représentation utilisée, etc. Cependant, outre le fait que notre recherche était déjà bien avancée lors de la publication de sa thèse, nous n'avons pas retenu la notion de *concept-problème* pour deux raisons. La première raison est liée à la position de l'auteur quant au rôle des objets mathématiques dans l'apprentissage de la démarche expérimentale :

> L'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite des problèmes dont la résolution fait appel à des objets mathématiques qui n'ont pas encore été travaillés par les élèves. (Giroud, 2011, p. 121)

Nous ne partageons pas cette hypothèse et au contraire, nous pensons que la mise en œuvre d'une démarche expérimentale peut aussi être facilitée si les objets mathématiques en jeu sont suffisamment familiers aux élèves pour fonctionner comme des objets « concrets ». Ainsi, si le *concept-problème* semble très bien s'appliquer aux problèmes issus des mathématiques dis-

3. Cette définition est une spécification, aux problèmes, de celle donnée par Vergnaud (1991) sur les concepts mathématiques.

crètes où les objets mathématiques ont un statut et un rôle particuliers (celui par exemple d'être inconnus des élèves), il semble qu'une étude supplémentaire soit nécessaire pour l'appliquer à d'autres champs des mathématiques, telle que la théorie des nombres par exemple. La seconde raison est liée à l'objectif principal des situations recherches pour la classe (SiRC) qui vise davantage l'apprentissage du savoir-faire *démarche expérimentale* que les apprentissages notionnels [4]. Notre point de vue est différent puisque nous défendons une relation dialectique entre la construction du savoir (mobilisation et acquisition de connaissances) et le travail de l'activité de recherche mathématique (développement d'heuristiques). Ainsi la notion de *concept-problème* ne nous semble pas prendre suffisamment en compte le processus dialectique entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques dans la résolution de problèmes de recherche.

Pour conclure et au vu de nos trois hypothèses de recherche, la situation de résolution de problème de recherche que nous voulons construire devra permettre aux élèves de mettre en œuvre une démarche expérimentale, c'est-à-dire des allers et retours entre la partie expérimentale de la recherche et la construction structurée ou l'approfondissement de notions mathématiques, le tout en appui sur les objets mathématiques en jeu.

2.1.3 Spécificités du raisonnement en arithmétique

Battie (2003) a identifié les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique en classe de terminale scientifique. Son étude s'est appuyée sur une analyse épistémologique distinguant deux dimensions du raisonnement, qualifiées respectivement *dimension organisatrice* et *dimension opératoire*, qui se révèlent complémentaires. Dans ce paragraphe, nous présentons ces deux notions qui nous semblent pertinentes pour étudier le processus de recherche d'élèves et d'étudiants confrontés à la résolution d'un problème de recherche en arithmétique.

La dimension organisatrice

> La dimension organisatrice s'identifie au raisonnement global (on pourrait parler du « squelette » de la démonstration) qui traduit la mise en acte d'une visée. Ce raisonnement organise et structure les différentes étapes ; il nous permet de comprendre l'idée générale de la démonstration. (Battie, 2003, p. 28)

Battie identifie quatre pensées organisatrices fondamentales en arithmétique : la descente infinie et la récurrence, la disjonction de cas, la recherche exhaustive avec ou non limitation préalable du nombre de cas à étudier et le jeu d'extension/réduction, méthode propre aux anneaux factoriels. L'auteure précise avoir regroupé dans une même catégorie la descente infinie et la récurrence « parce qu'elles constituent deux modes d'exploitation dans le raisonnement de la même propriété de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$: muni de l'ordre naturel, $\mathbb{N}$ est un ensemble bien ordonné »(Ibid. p. 43). La disjonction et la recherche exhaustive de cas peuvent également être regroupées dans la mesure où elles illustrent une même démarche globale : ramener la résolution du problème à l'étude d'un nombre fini de cas. Enfin, la quatrième pensée organisatrice est plus spécifique et repose sur les propriétés des anneaux factoriels.

Nous choisissons ici de présenter plus en détail les pensées organisatrices suivantes : la disjonction de cas, l'exhaustion de cas et le jeu d'extension/réduction. Ce choix est motivé par notre analyse mathématique et épistémologique de la conjecture d'Erdös-Straus (chapitres 4 et 5), qui révèle l'importance de ces dimensions organisatrices pour ce problème.

4. Nous présentons plus en détail les situations recherche pour la classe (SiRC) dans le chapitre 3.

La disjonction et l'exhaustion de cas sont deux méthodes pour ramener la résolution d'un problème arithmétique à l'étude d'un nombre fini de cas. Cependant Battie (2003) explique que « la réduction au fini » n'est pas de même nature pour ces deux méthodes :

> Soit E l'ensemble des entiers associé à un problème arithmétique donné. Dans un raisonnement par disjonction de cas, on se ramène à l'étude d'un nombre fini de cas en catégorisant les éléments de E, à l'aide d'une partition de cet ensemble. Alors que dans une recherche exhaustive, on réduit le problème à un nombre fini de possibilités en majorant E ou son cardinal. (Battie, 2003, p. 59)

Nous illustrons cette différence avec un exemple issu de l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus dans l'explicitation ci-dessous de chaque méthode. Précisons d'abord ce qu'on entend par raisonner par disjonction de cas sur un ensemble E : « c'est considérer une partition finie de cet ensemble et traiter séparément chaque cas défini par cette dernière » (Ibid. p. 50). Battie précise alors que la dimension organisatrice associée à un raisonnement par disjonction de cas peut relever de propriétés de nature différente selon la nature de la disjonction faite et donc en particulier selon l'ordre sous-jacent à la partition : ordre naturel ou divisibilité.

Exemple : Pour résoudre la conjecture d'Erdös-Straus, on peut faire une partition reposant sur l'ordre naturel en examinant les cas $n \leq 4$ et $n > 4$ qui donnent respectivement $\frac{4}{n} \geq 1$ et $\frac{4}{n} < 1$. On peut également faire une partition relevant de la divisibilité en étudiant la conjecture pour n pair puis pour n impair ou encore pour une relation de congruence (modulo 4 par exemple).

Dans le cadre de la résolution d'un problème, la recherche exhaustive de cas est une méthode où l'on teste l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles. Battie distingue deux types de recherche exhaustive, celle au sens strict où le contexte limite la recherche à un nombre fini de solutions potentielles et celle au sens large, où un travail de limitation de la recherche précède une phase de recherche exhaustive au sens strict. Elle souligne deux aspects importants concernant cette pensée organisatrice. Le premier est son caractère algorithmique et sa potentialité à une implémentation informatique. Le second est que la dimension organisatrice associée à ce type de raisonnement est à rattacher à un unique caractère de $\mathbb{Z}$: la structure d'ordre naturel dans la mesure où cette méthode repose sur une majoration de l'ensemble des entiers associés au problème étudié.

Dans le cas de la conjecture d'Erdös-Straus, les recherches relèvent davantage de la disjonction de cas et s'appuient sur des catégorisations à l'aide des congruences. L'ordre naturel de $\mathbb{Z}$ ne semble pas facilement exploitable pour la résolution de cette conjecture. Un résultat majeur sur la conjecture d'Erdös-Straus relève ainsi d'une recherche par disjonction de cas avec la réduction de la recherche à l'étude d'un nombre fini de cas par catégorisation modulo 840.

Exemple : La conjecture d'Erdös-Straus peut se limiter à la résolution de l'équation pour n congrus à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840 (cf. chapitre 4, Résultat 1, p. 81). Une étude de ces cas particuliers suffirait alors à démontrer la conjecture. Cependant, si l'on a limité à un ensemble fini le nombre de cas à examiner, chacun de ces cas oblige à considérer *a priori* à nouveau une infinité de cas possibles. Pour ce problème, on observe bien une réduction de la recherche mais sans caractère fini.

Le jeu d'extension/réduction est une méthode spécifique aux anneaux factoriels. Battie la présente en prenant l'exemple de l'anneau $\mathbb{Z}$:

> Il s'agit de montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément n de l'anneau $\mathbb{Z}$. Cet anneau étant factoriel, tout élément n admet une unique décomposition

en facteurs premiers que l'on écrit comme suit :

$$n = \prod_{p \in P} p^{v_p(n)},$$

avec P l'ensemble des nombres premiers. Ainsi si l'on montre que :
– d'une part, la *propriété est multiplicative*, c'est-à-dire que si elle est vraie pour deux éléments de $\mathbb{Z}$ elle est encore vraie pour leur produit,
– d'autre part, la propriété est vraie pour tout nombre premier.
alors la propriété que l'on étudie sera vraie pour tout élément n entier, grâce à l'existence d'une décomposition de n en facteurs premiers. (Battie, 2003, p. 52)

D'une certaine façon, cette méthode va du « particulier » (les nombres premiers) au « général » (tout élément de l'anneau), élément justifiant la terminologie *jeu d'extension/réduction*.

Pour terminer la présentation de la dimension organisatrice, nous précisons que Battie (2003) montre, sur un exemple, que différentes sous-dimensions organisatrices peuvent être imbriquées dans la résolution d'un problème. Dans la suite de notre thèse, nous illustrerons également cet aspect dans l'étude de la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus (cf. chapitre 5, partie 5.3 et chapitre 7, partie 7.2).

La dimension opératoire

La dimension opératoire : il s'agit de tout ce qui relève des techniques de calcul utilisées au fil de la démonstration, techniques qui permettent de mettre en œuvre les différentes étapes du raisonnement suivi. Les techniques de calcul et les raisonnements qui les sous-tendent dépendant, au moins, partiellement, des formes de représentations choisies pour les entiers (représentation structurée autour des nombres premiers, représentation structurée à l'aide de la relation de congruence). (Battie, 2003, p. 29)

Battie identifie quatre pôles opératoires fondamentaux en arithmétique :
– Les formes de représentation choisies pour les entiers : celles liées au caractère factoriel de l'anneau $\mathbb{Z}$ et exploitant la possibilité de décomposer un entier en produit de puissances de nombres premiers et celles exploitant la divisibilité et la relation de congruence.
– L'utilisation de théorèmes-clés en arithmétique tels que les théorèmes de Gauss et de Bézout.
– La manipulation de nature algébrique telles que les identités remarquables ou les combinaisons linéaires de nombres entiers.
– L'articulation entre la structure de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et celle d'ensemble bien ordonné de $(\mathbb{Z}, \leq)$ relative aux deux ordres *divisibilité* et *ordre naturel*.

Nous présentons ci-dessous en détail le premier pôle opératoire dans la mesure où il aura un rôle prépondérant dans l'analyse didactique du processus de recherche des élèves (cf. chapitre 7). L'opératoire en arithmétique n'est bien sûr pas indépendant des systèmes d'écritures utilisés pour représenter et manipuler les nombres entiers. La première écriture relevée par Battie (2003) relève de la structuration des entiers autour de nombres premiers. Cela est lié au caractère factoriel de l'anneau $\mathbb{Z}$ qui fait que tout entier n peut s'écrire sous la forme factorisée

$$n = \prod_{p \in P} p^{v_p(n)},$$

avec P l'ensemble des nombres premiers. L'auteure souligne que « l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers permet d'interpréter aisément des notions d'arithmétique telles que les notions de diviseur, multiple, nombres premiers entre eux, PGCD et PPCM » (Ibid. p. 73). La pensée organisatrice associée en priorité à ce pôle opératoire est le jeu d'extension/réduction, méthode spécifique aux anneaux factoriels.

La seconde écriture identifiée par Battie relève de la structuration des entiers à l'aide de la divisibilité :

> L'écriture dépend d'un paramètre, un entier naturel non nul que l'on notera b.
> Le paramètre b étant donné, tout entier n peut s'écrire de façon unique, sous une des formes suivantes :
> – $n \equiv 0[b], ..., n \equiv b-1[b]$ si on utilise la notion de la congruence modulo b ;
> – $n = bk, n = bk+1, ..., n = bk+(b-1)$, k étant un entier, si l'on revient à la définition de cette congruence. (Ibid. p. 76)

L'auteure distingue deux systèmes d'écriture, celui où intervient l'entier k et celui exploitant les congruences, qui induisent des traitements opératoires *a priori* spécifiques. Elle précise que d'un point de vue didactique cette distinction est primordiale car, en classe de terminale scientifique, une certaine réserve vis-à-vis de l'usage de la notation *congruence* peut se manifester, « craignant qu'elle ne favorise les dérapages formels liés à un calcul aveugle » (Ibid. p. 76). Nous ajoutons que selon la spécialité suivie par les élèves de cette classe, certains ne connaissent pas cette notion. Ainsi pour notre étude didactique, cette distinction est également primordiale. Plusieurs pensées organisatrices peuvent être associées à ce pôle opératoire : le raisonnement par disjonction de cas et le « plongement » dans un des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (structure de corps si n est premier), voire successivement dans plusieurs afin d'en extraire diverses informations. Les études mathématique et épistémologique sur la conjecture d'Erdös-Straus (cf. chapitres 4 et 5) mettront en évidence cette association : structure des entiers à l'aide de la divisibilité et étude dans divers corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n premier).

Enfin, nous voulons insister sur le caractère complémentaire et dialectique qu'entretiennent ces deux dimensions dans le raisonnement mathématique, comme le souligne Battie (2003, p. 97-98), selon trois aspects :

- Les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves.
- Des sous-dimensions organisatrices sont susceptibles de naître dans le jeu opératoire qui règne au sein d'autres dimensions organisatrices, ceci conduisant à une imbrication de formes organisatrices faisant vivre chacune *a priori* plusieurs formes opératoires.
- A chaque pôle opératoire, on peut associer une ou plusieurs pensées organisatrices privilégiées.

Dans le chapitre 5, nous nous attacherons à montrer que les gestes émergeant de l'activité mathématique des mathématiciens peuvent s'associer à une dimension organisatrice ou une dimension opératoire particulière. Cet outil épistémologique sera également utilisé pour analyser le processus de recherche des élèves confrontés à la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus (chapitre 7).

2.2 Les aspects dialectiques dans la théorie des situations

Le cadre de la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998) est particulièrement pertinent pour notre étude car elle prend en compte le processus dialectique de l'activité mathématique et permet ainsi l'étude de processus de recherche mis en œuvre lors d'une résolution de problème de recherche. Dans le paragraphe 2.2.1, nous montrons que la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques est au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau. Le paragraphe 2.2.2 met en évidence les aspects dialectiques de l'élaboration de preuves. Dans le paragraphe 2.2.3, nous présentons les apports d'une analyse des preuves en termes de dialectique syntaxe/sémantique, notamment pour la comparaison de publics différents.

2.2.1 Phases d'action - formulation - validation

Dans sa thèse, Dias (2008) montre que la prise en compte de la dimension expérimentale est au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau. En effet, elle propose un cadre adéquat pour penser et construire les articulations entre expérimentation, formulation de conjectures et tentative de preuves puisque Brousseau définit trois grandes phases d'action, de formulation, et de validation. A chacune de ces phases correspondent des situations de type adidactique, le qualificatif d'adidacticité renvoyant à la potentialité du milieu à assurer les rétroactions nécessaires à la construction des savoirs, sans s'appuyer sur l'omniprésence de l'enseignant. Dans la suite de ce paragraphe, nous reprenons les situations de Brousseau afin de montrer en quoi elles sont pertinentes pour prendre en compte nos situations de résolution de problème de recherche à caractère expérimental.

Dialectique de l'action. Placé dans une situation où il doit résoudre un problème, le joueur élabore des connaissances implicites comme moyen d'action sur le milieu : c'est la situation d'action. Elle est organisée dans un jeu sur et par les objets dont le contrôle est assujetti aux rétroactions du milieu. S'engage alors un « dialogue » avec le milieu qui fait évoluer la représentation du problème que se construit le joueur : c'est la dialectique de l'action.

Cette situation prend en compte la dimension expérimentale des mathématiques dans la mesure où elle permet au joueur un travail sur les objets, par des va-et-vient entre ceux qui sont naturalisés (qui permettent de s'engager dans le problème) et ceux en cours d'élaboration et/ou de naturalisation, via les rétroactions du milieu. Le sujet peut ainsi mettre en place des expérimentations et développer des heuristiques.

Dialectique de la formulation. La situation de formulation met en avant la communication entre les joueurs rendue nécessaire par la résolution des problèmes rencontrés. Les joueurs explicitent le modèle implicite de leurs actions. Progressivement, ils élaborent des formes langagières que tout le monde comprend par un « dialogue » avec le milieu. La formulation est un moyen d'action sur le milieu qui en retour permet une évolution du modèle de l'action. Il s'agit de la dialectique de formulation.

Cette situation prend en compte la phase de formulation de conjectures, processus intégrant de la démarche expérimentale telle que nous l'avons définie. A noter que chez Brousseau, cette phase est plus vaste puisqu'elle intègre tout un système langagier. De plus elle est pensée dans un processus collectif. Nous supposons que dans le cadre de la démarche expérimentale, la phase de formulation de conjectures peut aussi se faire individuellement.

Dialectique de la validation. La situation de validation est dédiée à l'établissement de théorèmes consécutivement à l'énonciation de conjectures, de leur discussion par rapport à la vérité et de leur acceptation par la communauté de joueurs. Un « dialogue » entre conjectures/preuves d'une part et milieu/savoirs d'autre part réalise la dialectique de validation. Ce qui est important, c'est alors l'adéquation des connaissances construites avec les savoirs reconnus par la communauté scientifique grâce aux rétroactions du milieu (Durand-Guerrier, 2007).

La situation de validation de la Théorie des Situations comprend la phase de tentative de preuves, processus nécessaire de la démarche expérimentale telle que nous l'avons décrite. Chez Brousseau, cette phase est présentée d'une part comme interne au problème (prouver une conjecture) mais également externe (nécessité de convaincre un autre joueur). Nous supposons éventuellement que dans le cadre de la démarche expérimentale, seule la validation interne intervient dans un premier temps.

La Théorie des Situations propose donc un cadre d'analyse pertinent pour la prise en compte du caractère expérimental des mathématiques dans des situations d'apprentissage. Ainsi, dans un milieu favorisant la démarche expérimentale, les va-et-vient entre les objets naturalisés et en cours de naturalisation doivent se réaliser entre les phases d'action-formulation et celle de validation. De plus, comme le mentionne Brousseau, l'élaboration d'une preuve relève d'une dialectique théorie/expérience :

> En général, la preuve ne pourra être formulée qu'après avoir été utilisée et éprouvée en tant que règle implicite soit dans l'action, soit dans les discussions. (Brousseau, 1998, p. 40)

Dias rejoint également ce point de vue en émettant l'hypothèse suivante :

> A un stade « primaire » de construction de connaissances, la validation ne peut pas se dérouler seulement dans le registre des énoncés et c'est le retour constant sur les objets, leurs représentants signifiés ou leurs artefacts qui permet d'accéder progressivement à des théorèmes. (Dias, 2008, p. 48)

Nous détaillons ce processus d'élaboration de preuves dans le paragraphe suivant.

2.2.2 Élaboration de preuves

Dans son article sur les processus de preuves et les situations de validation, Balacheff (1987) mentionne deux types de validation (en parallèle des validations interne et externe de Brousseau), en référence à la situation d'une part et à l'aspect social d'autre part.

> Le processus de validation, l'élaboration de preuves de tous ordres, est ainsi d'abord lié à des fins pratiques. Il s'agit de s'assurer les garanties nécessaires à un engagement dans l'action ; ici l'action de décider de la vérité d'une assertion. (Balacheff, 1987, p. 151-152)

Ce type de situation appelle une production particulière de preuve : les preuves pour décider. Il s'agit de décider de la valeur de vérité d'une proposition. Ce type de preuve s'insère dans l'action, dans le fonctionnement du praticien.

> La production de preuve oblige à la prise en compte des interlocuteurs pour finalement construire un système de validation commun, au moins, localement, en référence aux propositions débattues. (Ibid. p. 154)

Ce type de situation appelle davantage la production de preuves pour savoir. Elle se situe dans le fonctionnement du théoricien.

L'auteur précise que tout processus de validation, qu'il s'accomplisse ou non dans l'explicitation d'une preuve, est essentiellement dialectique dans la mesure où il est fondé sur une analyse du pour et du contre, par la prise en charge de contradictions potentielles.

> Ce fait est évident dans un contexte de débat dans le jeu des preuves et réfutations. Hors du contexte social l'élaboration d'une preuve passe par une analyse critique et donc relève de la même dialectique : une preuve rigoureuse et définitive est une preuve qui ne sera pas réfutée. (Ibid. p. 156)

Balacheff distingue deux types de preuves, en référence aux deux types de validation définies ci-dessus et qui reposent sur le rôle de l'expérience dans la dialectique de validation.

> La mise à exécution d'une décision, ou la réalisation du contenu d'une affirmation, permet ce que nous appellerons des validations pragmatiques de la décision ou des preuves pragmatiques lorsqu'elles sont effectuées par l'élève lui-même pour établir la validité d'une proposition. Lorsque cet accès à la réalisation n'est pas possible, alors les validations sont nécessairement intellectuelles. La production de ces preuves intellectuelles requière notamment l'expression langagière des objets sur lesquels elles portent et de leurs relations. (Ibid. p. 157)

Nous voyons ici une prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques dans le processus de validation et d'élaboration de preuves dans son articulation entre preuves pragmatiques et preuves intellectuelles. En effet, Balacheff explique que « les preuves du praticien sont d'abord pragmatiques. Elles s'ancrent dans les faits, dans l'action. Elles se fondent sur des théorèmes-en-acte qui n'ont pas été prouvés mais éprouvés par la pratique »(Ibid. p. 157). Le développement de preuves intellectuelles exige donc un changement de position : « le locuteur doit prendre une position de théoricien dans laquelle la connaissance (jusque là agie) devient l'objet de réflexions, de discours, voire de débats » (Ibid. p. 158). Le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles repose sur trois pôles qui interagissent :
- le pôle des connaissances : nature des connaissances des élèves ;
- le pôle langagier, ou de la formulation ;
- le pôle de la validation, ou des types de rationalité qui sous-entendent les preuves produites.

Des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, Balacheff reconnaît plusieurs types qui se différencient à la fois par le statut des connaissances engagées et par la nature de la rationalité sous-jacente.

L'empirisme naïf : « il consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas, la certitude de la vérité d'une assertion » (Balacheff, 1987, p. 163). Voici un exemple tiré de nos pré-expérimentations sur la conjecture d'Erdös-Straus [5]. Les élèves ont réussi à décomposer $\dfrac{4}{4}$ et $\dfrac{4}{6}$ en somme de trois fractions égyptiennes : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$. Un élève confirme donc que « pour les pairs ça marche bien ».

L'expérience cruciale : c'est « un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaît pour aussi peu particulier que possible » (Balacheff, 1987, p. 163). Ainsi dans le cas de notre exemple, les élèves essaient un « chiffre au hasard » comme en témoigne cet extrait :

> E1 : On va essayer avec $\frac{4}{8}$, attends, si je divise par 2, ça fait $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$. Tu vas voir que ça va être complètement faux.
> E1 : Ça fait $\frac{4}{8}$ [...] Oooh [...]
> E1 : Ah là là, on a essayé pour un nombre au hasard ça a marché [...] Je vais essayer pour $\frac{4}{20}$.

5. Cet exemple est extrait de notre mémoire (M.-L. Gardes, 2009).

Balacheff précise que l'expérience cruciale « consiste à prouver un évènement pour lequel "on ne se fait pas de cadeau" en affirmant que "si cela marche, ça marche toujours". Cette démarche qui reste fondamentalement empirique se distingue de l'empirisme naïf en ce que le problème de la généralisation est effectivement posé et que l'élève se donne un moyen de décider autrement que péremptoirement » (Ibid. p. 164).

L'exemple générique : « il consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attaché au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants » (Balacheff, 1987, p. 164-165). Dans notre exemple, l'élève E2 explique à l'élève E3 la conjecture émise par l'élève E1 quant aux nombres pairs :

> E1 : Oh on a trouvé un truc pour les chiffres pairs en fait, si on divise par 2, qu'on rajoute 1 et qu'on multiplie les deux, ça fait le bon truc [...].
> E2 : Ouais donc là par exemple, $\frac{4}{8}$.
> E3 : Ouais.
> E2 : Le 8 tu le divises, tu le divises par 2.
> E3 : Ouais.
> E2 : Ça donne.
> E3 : $\frac{1}{4}$.
> E2 : $\frac{1}{4}$, là tu rajoutes 1 à ça, ça donne $\frac{1}{5}$ [...] et là, tu multiplies les deux ensembles, ça donne $\frac{1}{20}$ et ça, ça marche.

L'expérience mentale : « invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre » (Balacheff, 1987, p. 165). Dans notre exemple, il s'agit de démontrer la conjecture formulée par E1 en ces termes : « pour les nombres pairs, $a = \frac{n}{2}$, $b = \frac{n}{2} + 1$ et $c = a \times b$ ». C'est l'élève E2 qui explicite leur preuve : « n est un multiple de 2 [...] donc là a c'est égal à $\frac{n}{2}$ donc a c'est un naturel forcément [...] b c'est $\frac{n}{2} + 1$ donc ça marche aussi [...] et c c'est $a \times b$, quand tu multiplies deux naturels, c'est forcément un naturel. Il n'y a pas besoin de faire une récurrence ». Balacheff précise que c'est entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, les deux extraits présentés ci-dessus illustrent assez bien ce passage, notamment en termes de formulations langagières et types de validation.

Pour notre étude, nous retenons la nature dialectique du processus d'élaboration de preuves, entre preuves et réfutations, qui se réalise dans un passage des preuves pragmatiques (en appui sur des manipulations d'objets) aux preuves intellectuelles (élaboration d'une théorie rendant compte des propriétés des objets en jeu).

2.2.3 Dialectique syntaxe-sémantique

Le point de vue épistémologique sur l'activité mathématique que nous avons adopté donne un rôle central aux objets mathématiques. La distinction et l'articulation syntaxe/sémantique permettent de prendre en compte, d'une part cette place importante des objets mathématiques à la fois dans la formulation de conjectures et dans les processus de validation (construction explicite de preuves ou contrôle et vérification de la validité d'un résultat), et d'autre part deux autres aspects de l'activité mathématique : le caractère expérimental et la dialectique connaissances/heuristiques.

Précisons dans un premier temps la définition d'activité syntaxique et sa distinction de l'activité sémantique. L'activité syntaxique consiste en une manipulation formelle du langage où la nature des objets auxquels réfèrent les symboles n'a pas d'importance. Au contraire, l'activité sémantique trouve sa source au-delà du langage, au niveau de la référence aux mots (Barrier, 2009). A l'aide de cette distinction, Barrier a montré que les objets contribuent non seulement à un travail sur les énoncés (valider ou réfuter un énoncé) mais aussi à l'émergence de stratégies et de preuves. Il énonce l'hypothèse que « privilégier les énoncés par rapport aux objets conduit à faire un usage essentiellement syntaxique de l'analyse logique. Il est probable qu'il participe à la minoration du rôle des objets dans la construction des raisonnements » (Barrier, 2009, p. 127). Il précise que la distinction introduite par Balacheff (1987) entre situation de décision et situation de validation permet de préciser ce double rôle des objets mathématiques. Sur un exemple, il montre que « les objets interviennent d'abord pour contribuer à la décision » mais que les élèves « négligent ensuite la possibilité que la manipulation des objets puisse contribuer à l'émergence d'une preuve » (Barrier, 2009, p. 130). Il avance une raison à cette difficulté : la culture scolaire « dans laquelle on montre qu'un énoncé est vrai par le travail sur les énoncés et l'on montre qu'un énoncé est faux par un contre-exemple » (Ibid. p. 130). Il ajoute que :

> Cette conception de l'activité mathématique de validation comme essentiellement restreinte à l'usage de déduction construite à partir de théorèmes du cours et des hypothèses de la situation me parait susceptible de freiner le travail de recherche. Les élèves semblent ici considérer qu'agir sur les objets et chercher une démonstration sont deux activités disjointes ou dit autrement qu'il y a rupture entre les moments de décisions et les moments de validation. (Ibid, p. 130)

Nous partageons le point de vue de cet auteur et nous avons montré, dans notre mémoire de master 2, ces deux aspects :

1. d'une part les élèves étaient convaincus par un raisonnement par récurrence démontrant leur résultat et ont eu des difficultés à reconnaître qu'une « simple » réduction au même dénominateur couplée à une écriture des nombres en jeu (comme ils l'ont écrite ci-dessous, cf. figure 2.1) constituait une preuve. (M.-L. Gardes, 2009, p. 80-81)

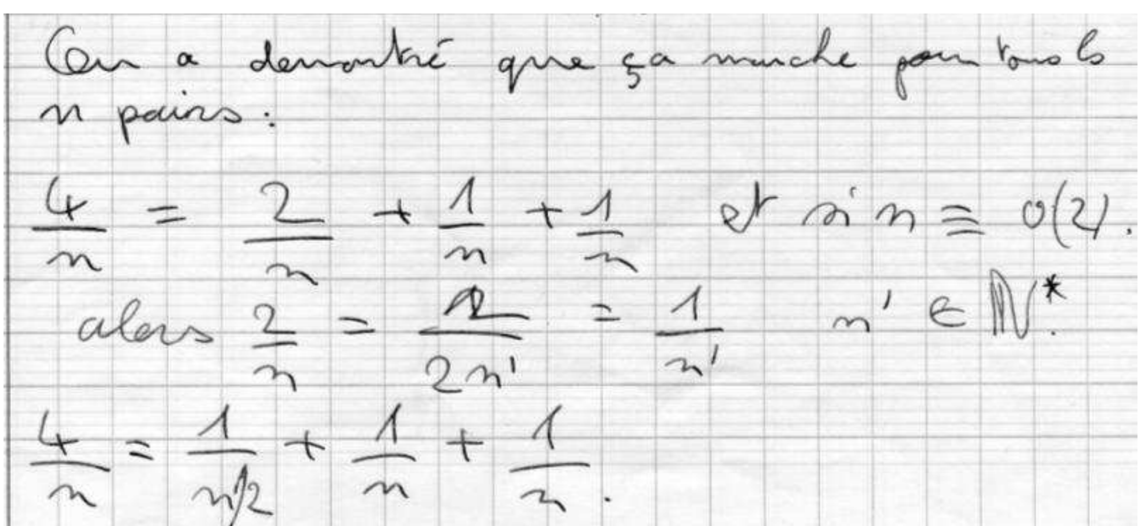


FIGURE 2.1 – Démonstration d'un groupe d'élèves de Terminale Scientifique.

2. d'autre part, l'influence de la culture de l'enseignement spécifique à l'arithmétique a freiné, dans un premier temps, la recherche en termes de productions de résultats. (Ibid. p. 109)

Ces dernières remarques nous ont conduite à examiner plus particulièrement l'articulation syntaxe/sémantique dans la construction de preuves. A l'instar de Barrier, nous nous référons à la distinction de Weber et Alcock (Weber & Alcock, 2004) entre production de preuve syntaxique et preuve sémantique.

> We define a *syntactic proof production* as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is "unwrap the definitions" and "push symbols". (Weber & Alcock, 2004, p. 210) [6]

> We define a *semantic proof production* to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. (Weber & Alcock, 2004, p. 210) [7]

Barrier précise que dans les procédures syntaxiques, « la nature des objets auxquels réfèrent les symboles n'a pas d'importance » alors que pour les productions de preuves sémantiques, « les objets mathématiques viennent s'ajouter au milieu sur lequel celui qui prouve s'appuie pour construire sa stratégie » (Barrier, 2009, p. 22-23).

Afin de montrer la nécessaire articulation des procédures syntaxiques et sémantiques pour la construction de preuves, Barrier fait référence aux travaux de Weber et Alcock (2004) qui « ont mis en évidence une différence de comportement entre étudiants de licence de mathématiques d'une part et de doctorants et algébristes professionnels d'autre part. Les premiers ont davantage tendance à s'engager dans des procédures syntaxiques, procédures qui n'aboutissent que rarement, alors que les seconds s'appuient plus volontiers sur leur connaissance intuitive des objets. Leur étude montre que les étudiants de licence ne disposent pour l'essentiel que d'une connaissance formelle des objets en jeu (essentiellement les définitions) » (Barrier, 2009, p. 23). Ces auteurs montrent en particulier l'apport d'une approche sémantique dans les processus de validation avec construction de preuve :

> Just as most streets in a town intersect many other streets, at any given point in a proof, there are many valid inferences that can be drawn that might seem useful to an untrained eye [...]. Hence, writing a proof by syntactic means alone can be a formidable task. However, when writing a proof semantically, one can use instantiations of relevant objects to guide the formal inferences that one draws,

6. Traduction de Barrier (2009, p. 22) : Nous définissons une *production syntaxique de preuve* comme une production de preuve reposant exclusivement sur des manipulations logiquement acceptables de définitions correctement énoncées et d'autres faits pertinents. Dans une production syntaxique de preuve, celui qui prouve n'utilise pas de diagrammes ou d'autres représentations intuitives et non formelles des concepts mathématiques. Dans la communauté mathématique, une production syntaxique de preuve peut être familièrement définie comme une preuve dans laquelle tout ce que l'on fait est « dérouler les définitions » et « pousser les symboles ».

7. Traduction de Barrier (2009, p. 22) : Nous définissons une *production sémantique de preuve* comme une preuve d'un énoncé dans laquelle interviennent une ou plusieurs instanciation(s) d'objet(s) mathématiques auxquels s'applique l'énoncé de manière à suggérer et guider les inférences qu'il ou elle effectue.

> just as one could use a map to suggest the directions that they should prescribe. (Weber & Alcock, 2004, p. 232) [8]

Barrier ajoute que l'approche sémantique est également riche pour les processus de validation de type décision (c'est-à-dire se convaincre de la vérité d'un énoncé) :

> Les preuves mathématiques ne sont qu'exceptionnellement suffisamment détaillées pour qu'il soit possible de les contrôler en ignorant leur contenu sémantique. Ce type de contrôle construit sur la seule syntaxe n'est pas la méthode la plus souvent employée par les mathématiciens professionnels. Par exemple Weber (2008) montre que les mathématiciens utilisent souvent des arguments informels ou construits sur l'instanciation d'un objet, ou de quelques objets pour contrôler les preuves et même pour les valider. (Barrier, 2009, p. 25)

Dans sa thèse, l'auteur a mis en évidence l'apport de la sémantique pour la didactique, notamment en termes d'enrichissement du milieu des élèves. Dans notre recherche, nous analysons en particulier les difficultés éprouvées par les élèves et les étudiants lors de l'utilisation d'un outil algébrique pour traiter des questions de théorie des nombres : les limites des méthodes algébriques dans le travail de formulation de conjecture, l'importance de l'articulation des procédures syntaxiques et sémantiques dans la construction de preuve et l'importance du retour à la nature des nombres en jeu dans le contrôle et la vérification des résultats (cf. chapitre 9 de notre thèse et (M.-L. Gardes, 2012)).

2.3 Le milieu

Dans la Théorie des Situations, Brousseau définit le milieu comme un environnement dans lequel ont lieu des interactions entre un savoir en voie de construction et des élèves dans un système éducatif. Le milieu est alors défini comme système antagoniste du système enseigné. Il permet de modéliser les situations d'apprentissage :

> Dans la Théorie des Situations Didactiques, l'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres. La connaissance, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage. (Brousseau, 1998, p. 59)

Comme nous l'avons décrit dans chacune des situations (action, formulation et validation), l'élève doit agir sur les éléments du milieu pour apprendre. Il agit grâce à ses connaissances et le milieu lui renvoie en retour des informations utiles à la résolution du problème et donc à la construction de connaissances. Du côté de l'enseignant, pour construire des situations d'apprentissage, la difficulté est alors de déterminer les milieux avec lesquels l'élève doit interagir pour construire de nouvelles connaissances. Dias (2008) et Durand-Guerrier (2010) ont étudié les caractéristiques d'un milieu antagoniste de type expérimental. Nous en donnons ci-dessous les principaux éléments que nous retenons pour notre étude.

8. Traduction de Barrier (2009, p. 24) : Tout comme en ville la plupart des rues croisent de nombreuses autres rues, à tout moment d'une preuve, il y a de nombreuses inférences pouvant être faites qui peuvent paraître utiles à un œil novice [...]. Par conséquent, écrire une preuve par les seuls moyens syntaxiques peut être une tâche redoutable. Cependant, lorsque l'on écrit une preuve par des moyens sémantiques, il est possible d'utiliser des instanciations pertinentes d'objets pour guider la conduite des inférences formelles, tout comme on peut utiliser une carte pour suggérer les directions qu'ils devraient emprunter.

2.3.1 Milieu antagoniste de type expérimental

Salin (2002) donne trois caractéristiques d'un milieu antagoniste que Dias (2008) développe pour définir un milieu antagoniste de type expérimental.

Un milieu porteur de déséquilibres dans les rétroactions qu'il fournit à l'activité de l'élève. C'est en présentant des obstacles dans la situation que l'on provoquera l'adaptation de l'élève et par là-même, la construction et/ou l'appropriation de connaissances. Pour cela, il faut que l'élève puisse engager les connaissances dont il dispose pour tenter de contrôler le milieu. Ensuite il doit être en mesure d'en recevoir les rétroactions lui indiquant que ces moyens de contrôle sont encore insuffisants et que la résolution du problème ne sera pas immédiate. Durand-Guerrier précise ainsi que le milieu doit comporter « des objets suffisamment familiers pour le sujet pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. Il est nécessaire que ce milieu favorise la mobilisation d'outils (par exemple : élaboration de conjectures ou de règles, élaboration d'objets nouveaux, changement de cadre, mise en relation de propriétés, etc.) permettant de mettre en œuvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur les objets. » (Durand-Guerrier, 2010, p. 1)

Un milieu qui développe l'autonomie de l'élève grâce à la mise en œuvre de situations fortement adidactiques. Ce milieu adidactique doit permettre « le fonctionnement de la connaissance comme production libre de l'élève » (Brousseau, 1998, p. 302). Ce dernier doit donc accepter de se sentir responsable de son apprentissage, ce qui nécessite un contrat didactique spécifique. L'enseignant doit favoriser la dévolution de la résolution du problème aux élèves puis contrôler les réponses du milieu. Il doit s'interdire de toute validation ou rejet prématurés d'hypothèses formulées par les élèves et issues de leur travail. Il doit aussi enrichir le milieu pour permettre aux élèves d'interagir en fonction de leurs niveaux de connaissances sans recours à son intervention.

Un milieu qui favorise l'accès à des savoirs mathématiques. Pour cela Durand-Guerrier indique que « ce milieu doit être nourri par la connaissance *a priori*, pour le professeur, de l'épistémologie et de l'histoire des savoirs en jeu dans la situation » (Durand-Guerrier, 2010, p. 1). Dias précise que ce travail relève de la constitution du modèle théorique épistémologique [9] (Bloch, 2002) « qui s'appuie sur la recherche d'une relation consistante entre un savoir mathématique et un jeu de situations qui le fasse fonctionner comme une connaissance afin d'en permettre une institutionnalisation » (Dias, 2008, p. 55). Ce milieu doit alors comporter des éléments qui permettront à l'enseignant d'identifier des savoirs maîtrisés par les élèves à l'issue des phases de résolution de problèmes, d'anticiper et mettre en œuvre une phase d'institutionnalisation pour expliciter l'apprentissage des élèves. Cette institutionnalisation se réalise en appui sur la phase de validation.

Pour notre recherche, nous retenons ces trois critères (antagonisme des rétroactions, dimension adidactique de la situation, accès à des savoirs mathématique) pour construire un milieu de type expérimental favorisant les aspects dialectiques de l'activité de recherche mathématique.

9. Nous détaillons les modèles de milieux de Bloch en paragraphe 2.3.2, qui suit.

2.3.2 Les différents modèles de milieux selon Bloch

Notre méthodologie générale de la recherche, présentée au chapitre 1, s'articule autour de l'interaction de trois pôles : didactique, épistémologique et mathématique. Le cadre d'analyse des modèles de milieu proposé par Bloch (2002) permet de modéliser et d'expliciter notre démarche générale de la recherche, notamment grâce aux articulations entre les élaborations théoriques et la construction de protocoles expérimentaux qui se réalisent dans une confrontation à la contingence. Ainsi nous l'utiliserons pour fonder l'architecture des parties II et III de la thèse puisqu'il en guidera le déroulement en chapitre, pour construire l'expérimentation de type laboratoire ainsi que pour l'analyse des données provenant de notre expérimentation.

Nous présentons ici brièvement les différents modèles de milieu proposés par Bloch (2002) : modèle de milieu épistémologique, modèle de milieu expérimental *a priori* et confrontation à la contingence. Nous donnerons également les adaptations que nous avons faites pour utiliser ce cadre d'analyse pour nos recherches. En effet, Bloch a défini ce modèle en référence aux situations fondamentales de la Théorie des Situations Didactiques alors que nous l'utilisons pour construire et analyser des situations didactiques dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche.

Modèle de milieu théorique épistémologique. Selon Bloch, le premier modèle de milieu fait référence à la constitution d'une situation fondamentale dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Il a ainsi pour but de permettre l'analyse du savoir et de chercher à construire des situations fondamentales.

> Dans un milieu théorique épistémologique relatif à un savoir donné, doit prendre place tout ce qui concerne le savoir mathématique, mais aussi les variables relatives à ce qu'il est possible de faire faire à un acteur qui aurait le projet de jouer (au sens de la théorie des situations) avec ce savoir, dans une situation qui lui laisserait une certaine liberté d'action contre un milieu fournissant des rétroactions (milieu antagoniste). (Bloch, 2002, p. 127)

La construction d'un milieu théorique épistémologique contient donc trois dimensions : une dimension mathématique et épistémologique (analyse du savoir mathématique visé), une dimension cognitive (prise en compte des connaissances de l'actant) et une dimension didactique (« enseignabilité » de la situation dans un contexte donné).

Notre recherche ne portant pas sur les situations fondamentales au sens de la Théorie des Situations, nous avons adapté ce cadre d'analyse à des situations de résolution de problèmes de recherche. Le but de telles situations est de faire travailler aux élèves l'aspect dialectique de l'activité mathématique. Le but du modèle de milieu théorique devient d'une part d'analyser épistémologiquement cet aspect dialectique et d'autre part de construire des situations de résolution de problèmes de recherche permettant de travailler cette dialectique. Ainsi ce milieu va contenir deux dimensions : la première est épistémologique et mathématique, elle étudie mathématiquement le problème de recherche choisi et épistémologiquement l'activité de recherche de mathématiciens (objets de la partie II de notre thèse) ; la seconde est didactique et envisage d'implémenter une activité de résolution de problèmes de recherche dans un contexte scolaire. Pour élaborer ce milieu théorique, nous avons :

- conduit une analyse mathématique du problème de recherche choisi ;
- mené une analyse de la genèse historique du problème, étudié et articulé les résultats anciens et contemporains ;
- mis en évidence les savoirs mathématiques notionnels, les savoirs mathématiques heuristiques, les savoirs mathématiques culturels en jeu dans la résolution du problème ;

– conduit une analyse d'épistémologie historique et contemporaine sur l'activité mathématique des chercheurs ;
– élaboré une situation confrontant le problème de recherche, l'élève et un milieu antagoniste ;
– analysé la pertinence de la situation envisagée par rapport à l'étude des processus de recherche des élèves, par rapport aux connaissances (mathématiques, heuristiques, culturelles) antérieures requises ;
– analysé la consistance de la situation, notamment par rapport aux savoirs mathématiques en jeu (notionnels, heuristiques, culturels).

Modèle de milieu expérimental *a priori*. Ce second modèle de milieu développé par Bloch prend en charge l'organisation effective de l'enseignement d'une situation parmi les scénarios envisagés. Il s'agit de définir des réalisations possibles de l'enseignement afin de pouvoir tester ou falsifier des hypothèses relatives au milieu théorique épistémologique. Cela se réalisera dans une confrontation à la contingence, dernier modèle du cadre d'analyse de Bloch. C'est à cet aspect que l'adjectif « expérimental » renvoie. La terminologie *a priori* fait référence à sa fonction d'analyse *a priori* de situation à visée didactique. Bloch définit deux directions pour l'élaboration du milieu expérimental *a priori* : la première est l'implantation effective de l'enseignement d'une situation parmi les scénarios envisagés et la seconde étudie l'adéquation de l'expérimentation à la situation prévue par le modèle théorique. Dans notre recherche, nous avons utilisé ce modèle pour :
– construire une situation didactique autour du problème choisi ;
– anticiper et prévoir les comportements des élèves dans la situation et notamment l'évolution du milieu ;
– préparer le recueil des observables ;
– analyser les connaissances mises en jeu dans la situation, le rôle des élèves et des encadrants ;
– construire une grille d'analyse, liste de références mathématiques, épistémologiques et didactiques susceptibles de permettre l'analyse de l'activité de recherche mathématique des élèves.
Ces différents éléments sont étudiés dans les chapitres 6 et 7 de notre thèse.

Confrontation à la contingence. La dernière étape du cadre d'analyse des modèles de milieu de Bloch est la confrontation à la contingence. Cette phase a deux fonctions principales : la première consiste en un test des prédictions conduites dans le modèle expérimental *a priori* et la seconde est un dispositif de régulation/modification du modèle théorique. Les objectifs sont les suivants :
– décrire la situation jouée expérimentalement ;
– interpréter le modèle expérimental *a priori* par rapport à l'expérimentation ;
– déterminer les variables qui ont été productrices des effets observés ;
– discuter le rapport entre le modèle épistémologique et mathématique et la contingence ;
– reprendre la discussion de la consistance théorique.
Dans notre thèse, nous mettrons à l'épreuve de la contingence la situation didactique élaborée autour de la conjecture d'Erdös-Straus dans des conditions particulières de laboratoire (cf. chapitre 8). Ce contexte permettra d'analyser finement les travaux de recherches des élèves sur la conjecture d'une part et d'interpréter le modèle expérimental *a priori* d'autre part (cf. chapitre 9). De plus, cela permettra d'approfondir et d'enrichir nos phases de conception théorique (chapitre 10).

Chapitre 3

Travaux antérieurs sur la résolution de problèmes en classe

Sommaire

De nombreux travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés à la construction et à la mise en place de dispositifs didactiques permettant aux élèves de pratiquer des activités de recherche. Dans ce chapitre, nous avons choisi de présenter des travaux dont les problématiques sont proches des nôtres, à savoir permettre aux élèves de vivre une réelle activité de recherche mathématique, en référence au travail du chercheur. Nous montrons en quoi nos recherches s'inscrivent dans ces différents courants mais également, en quoi nous nous en détachons. Dans la première partie, nous présentons un courant anglo-saxon de l'éducation mathématique qui s'est développé dans les années 1980 : le Problem-solving. Dans la seconde partie, nous détaillons quatre dispositifs français : la pratique des Problèmes-Ouverts, les ateliers MATh.en.JEANS, les situations de recherche pour la classe (SiRC) de Maths à modeler et les situations de recherche du groupe DREAM. Les deux premiers dispositifs ont été initiés à la fin des années 80 par des enseignants-chercheurs en mathématiques et les deux derniers sont à l'initiative d'équipes de recherche mixtes composées de mathématiciens et didacticiens (et enseignants du second degré pour le groupe DREAM). Ils ont débuté dans les années 2000.

3.1 Le courant Problem-Solving

Le « Problem-solving » est un courant anglo-saxon de l'éducation mathématique qui s'est développé dans les années 1980.

> Problem solving has, as predicted in the 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (Krulik, 1980, p. xiv), been the theme of the 1980's. The decade began with NCTM's widely heralded statement, in its Agenda for Action, that "problem solving must be the focus of school mathematics" (NCTM, 1980,

> p. 1). It concluded with the publication of Everybody Counts (National Research Council, 1989) and the Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 1989), both of which emphasize problem solving. (Schoenfeld, 1992, p. 2)

Étant données les différentes institutions qui utilisent ce terme pour définir la pédagogie attendue des enseignants, on pourrait penser qu'il existe une définition commune et unifiée de cette terminologie, avec un objectif pédagogique clair. Mais ce n'est pas le cas, comme le précise Schoenfeld :

> One might infer, then, that there is general acceptance of the idea that the primary goal of mathematics instruction should be to have students become competent problem solvers. Yet, given the multiple interpretations of the term, the goal is hardly clear. (Schoenfeld, 1992, p. 3)

Il précise ainsi que « problem solving has been used with multiple meanings that range from "working rote exercises" to "doing mathematics as a professional" » (Ibid. p. 2).

La revue Zentralblatt für Didaktik der Mathematik en 2006, dans le numéro 39 (5-6), fait l'état de l'art de ce courant et met également en évidence les différentes conceptions que prend l'expression *Problem-Solving*. Si ces dernières se rejoignent sur certains points, elles se différencient sur les buts éducatifs de l'activité de résolution de problèmes.

> Le travail d'entraînement à l'utilisation de techniques bien définies et essentiellement algorithmiques dans des exercices limités ne relève pas du Problem Solving, on se centre sur des problèmes non routiniers qui doivent constituer un certain défi pour les élèves, la dimension collective du travail est souvent mise en avant. Mais cette unanimité disparaît quand il s'agit de définir les buts éducatifs de l'activité de résolution de problèmes. (Castela, 2012, p. 7)

Dans un retour historique sur le courant Problem-solving, Stanic et Kilpatrick (1989) ont identifié trois thèmes principaux dans l'usage de cette terminologie (cité par Schoenfeld, 1992, p. 13-14) :

> – **problem solving as context**, problems are employed as vehicles in the service of other curricular goals.
> – **problem solving as skill**, [...] solving mathematical problems is [was] valuable in its own right. The vast majority of curricular development and implementation that went on under the name of "problem solving" in the 1980's was of this type.
> – **problem solving as art**, [...] real problem solving (that is, working problems of the "perplexing" kind) is the heart of mathematics, if not mathematics itself.

Schoenfeld (1992) précise que, même si dans la seconde conception du Problem-solving ce dernier est considéré comme une compétence à part entière, les hypothèses épistémologiques et pédagogiques sous-jacentes sont identiques dans les deux premières interprétations :

> Typically problem solving technics (i.e. drawing diagrams, looking for patterns when $n = 1, 2, 3, 4, ...$) are taught as subject matter, with practice problems so that the techniques can be mastered. After receiving this kind of problem solving instruction (often a separate part of the curriculum), the students' "mathematical tool kit" is presumed to contain "problem solving skills" as well as the facts and procedures they have studied. This expanded body of knowledge presumably comprises the students' mathematical knowledge and understanding. (Schoenfeld, 1992, p. 14)

L'auteur souligne la différence avec la troisième conception qui, comme chez Halmos, place la résolution de problème au cœur des mathématiques.

> I do believe that problems are the heart of mathematics, and I hope that as teachers, in the classroom, in seminars, and in the books and articles we write, we will emphasize them more and more, and that we will train our students to be better problem-posers and problem solvers than we are. (Halmos, 1980, p. 542)

Selon Schoenfeld, Pólya est le mathématicien qui représente le mieux cette conception du Problem-solving, notamment avec ses ouvrages *How to solve it* (1945) et *Mathematics and plausible reasoning* (1954).

> The mathematician best known for his conceptualization of mathematics as problem solving, and for his work in making problem solving the focus of mathematics instruction, is Pólya. Indeed, the edifice of problem solving work erected in the past two decades stands largely on the foundations of his work. (Schoenfeld, 1992, p. 16)

Dans son HDR[1], Castela (2012) distingue différentes conceptions du Problem-solving par les types de connaissances dont la construction par les élèves est visée. Nous voyons ici une autre lecture des trois conceptions décrites par Stanic et Kilpatrick. Cette distinction nous semble intéressante pour notre projet de recherche dans la mesure où nous cherchons à mettre en évidence la dialectique mobilisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques de l'activité de recherche mathématique.

La première conception (que l'on peut associer à *problem-solving as context*) est la formation à la confrontation avec des situations inédites.

> L'accent est mis sur l'originalité des problèmes posés qui ne doivent être en rien familiers aux élèves. La résolution de chaque problème est considérée comme une fin en soi et se maintient relativement isolée du reste des activités mathématiques. Ces problèmes ne doivent apparaître en relation ni avec des savoirs enseignés, ni avec des types de problèmes déjà rencontrés, de façon à ce qu'aucune technique éventuellement disponible ne figure dans l'environnement immédiat. (Castela, 2012, p. 7)

L'objectif n'est pas d'améliorer l'apprentissage des mathématiques enseignées mais d'entraîner les élèves « à la confrontation à des situations dont le traitement repose pour l'essentiel sur des qualités de créativité et d'ingéniosité » (Ibid., p. 8).

La seconde conception (que l'on peut associer à *problem-solving as skill*) est l'entrée dans la culture mathématique de la résolution de problèmes. Cette conception se centre sur l'affrontement de l'inédit mais cette confrontation « est considérée comme une dimension caractéristique de l'activité professionnelle du mathématicien, elle est envisagée de son point de vue » (Castela, 2012, p. 10). La référence pour la résolution de problèmes est celle de l'expert, du chercheur en mathématiques. Castela précise que « cette approche ne nie pas l'intérêt du savoir mathématique mais l'objectif attribué au Problem-solving n'est pas central dans l'acquisition de ce savoir » (Ibid. p. 10).

Si ces deux conceptions mettent en avant la dimension créative de l'activité de résolution de problèmes et ses mécanismes, elles n'insistent pas sur le lien entre les problèmes d'une part et le rôle et la place des savoirs mathématiques en jeu d'autre part. Selon Castela, dans ces deux conceptions, « la résolution de problèmes est alors conçue comme une éducation à des pratiques sans connexion avec l'enseignement et l'appropriation du savoir mathématique » (Ibid. p. 13).

1. Habilitation à Diriger des Recherches.

La troisième conception (que l'on peut associer à *problem-solving as art*) détaillée par Castela est la résolution de problèmes comme une activité sollicitant un ensemble très étendu de savoirs. Il s'agit de l'approche initiée par Schoenfeld (1985) dont les travaux prolongent ceux de Pólya (1945) sur les méthodes de résolution de problèmes. Schoenfeld décline plus précisément certaines stratégies heuristiques en les adaptant à des domaines particuliers et plus détaillés. Elles sont présentées explicitement aux étudiants, en lien avec la recherche de problèmes non routiniers où elles peuvent être en jeu.

> Ainsi la stratégie « prendre des cas particuliers » est spécifiée différemment pour le cas de problèmes faisant intervenir un paramètre entier (chercher des formules récurrentes en envisageant les valeurs 1, 2, 3, etc.), de problèmes sur les suites récurrentes (regarder ce qui se passe pour un terme initial égal à 0 et 1), de problèmes sur les racines d'un polynôme (considérer des polynômes facilement factorisables). (Castela, 2012, p. 12)

Le nombre de stratégies introduites devenant très élevé, la gestion de leur emploi nécessite que les étudiants développent des capacités de régulation de leur activité. Pour les y aider, l'enseignant distribue et commente en détail une sorte de feuille de route dont il est bien dit qu'elle n'est un recours éventuel qu'en cas de blocage.

> The strategy is given in the form of a flowchart indicating the major stages of the problem solving process : analysis, design, exploration, implementation, and verifying. (Schoenfeld, 1985, p. 108)

Selon Castela, la résolution de problèmes pour Schoenfeld est, entre autres, « le moyen d'une appropriation par les étudiants de certaines façons de faire expertes » (Castela, 2012, p. 13). La pratique de référence est donc celle des mathématiciens, vus comme des personnes « disposant d'un ensemble large et structuré de ressources : savoirs mathématiques académiques (concepts et théorèmes), savoirs pratiques allant des algorithmes, "routine procedures", jusqu'aux heuristiques ou problem-solving strategies » (Ibid. p. 13). Cette approche de la résolution de problèmes laisse donc une place centrale aux savoirs mathématiques. Si elle constitue un but à part entière, elle est aussi vue comme favorisant une meilleure compréhension des concepts et théorèmes enseignés.

Si cette conception de la résolution de problèmes met en évidence la place centrale des savoirs mathématiques et un lien avec les concepts enseignés, elle ne nous semble pas assez mettre en lumière l'aspect dialectique de l'activité de recherche mathématique entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. De plus, nous faisons l'hypothèse que le lien avec les concepts enseignés est plus fort : l'activité de résolution de problèmes participe à la construction de ces connaissances. Et c'est en cela que cette activité est nécessaire pour l'apprentissage des mathématiques. Enfin nous faisons l'hypothèse que les travaux sur le Problem-solving (notamment ceux de Schoenfeld) sont adaptés pour un certain type de problèmes mais ne sont peut-être pas aussi pertinents pour la résolution de problèmes de recherche et particulièrement, l'étude d'un problème non résolu.

3.2 Quelques dispositifs français

Depuis la fin des années quatre-vingt, de nombreux groupes de travail s'intéressent à la pratique des mathématiques dans l'enseignement et encouragent vivement la mise en place dans les classes d'activités de recherche mathématique, notamment à caractère expérimental. Nous pouvons ainsi citer le dispositif Problèmes-ouverts, les ateliers MATh.en.JEANS, l'équipe Maths à modeler ou encore le groupe DREAM. Dans ce paragraphe nous présentons ces dispositifs en précisant les éléments que nous retenons pour notre recherche d'une part, et ceux dont nous nous détachons d'autre part.

3.2.1 La pratique des problèmes ouverts

Initiée à l'IREM de Lyon dans les années quatre-vingt, la pratique des problèmes ouverts (Arsac et al., 1988 ; Arsac & Mante, 2007) a pour but de « placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique, c'est-à-dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur en mathématiques » (Arsac & Mante, 2007, p. 13). En ce sens, nos recherches poursuivent ce même objectif. La définition d'un problème ouvert est la suivante :

> 1. L'énoncé est court.
> 2. L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire, ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
> 3. Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.
>
> Il est également souhaitable qu'il y ait plusieurs procédures possibles pour atteindre le résultat et éventuellement aussi plusieurs expressions de la solution, voire plusieurs solutions ou possibilités de trouver des solutions partielles (Ibid. p. 20-21).

Le fait que l'énoncé soit court permet à l'élève d'avoir une première compréhension rapide du problème et une vision possible de résolution. Cela lui donne donc l'envie de chercher. La seconde caractéristique amène l'élève à faire preuve d'imagination et de créativité. Il doit choisir lui-même un cheminement. Selon les auteurs, les élèves sont amenés « à mettre en route la démarche scientifique [...] : faire des essais pour produire une conjecture ; tester leur conjecture en faisant d'autres essais ; prouver la validité de leur conjecture » (Ibid. p. 22). Notons que cette démarche fait écho à la méthode expérimentale décrite par Perrin (2007). La troisième caractéristique de l'énoncé permet à tout élève qui s'engage dans la recherche de produire des résultats partiels dans un temps raisonnable. Elle assure que le temps de la recherche est compatible avec la durée d'une séance en classe. Enfin la multiplicité de procédures possibles augmente la probabilité que « les élèves trouvent "quelque chose" et donc augmente leur motivation à chercher ce genre de problème » (Ibid. p. 22). De ce point de vue, l'énoncé de la conjecture d'Erdös-Straus répond à ces caractéristiques et peut donc être un problème ouvert. En effet, l'énoncé est court et relativement simple à comprendre. Sa résolution ne se réduit pas à la simple utilisation de notions mathématiques vues en cours et le domaine des entiers et des fractions est *a priori* un domaine familier pour les élèves et étudiants à partir de la fin du collège. De plus, la recherche de ce problème peut faire appel à de nombreuses procédures et conduire à différents résultats partiels (cf. chapitre 7).

Concernant la pratique des problèmes ouverts en classe, Arsac et Mante décrivent une gestion de séance de problème ouvert en deux phases :

- une phase de recherche proprement dite qui se termine par la rédaction par groupe (sur une affiche, sur un transparent, etc.) des solutions, des solutions partielles, des conjectures trouvées ;

– une phase de mise en commun des productions et de débat sur leur validité. (Arsac & Mante, 2007, p. 28)

Les auteurs étudient en détail la gestion de la classe pendant ces deux phases en insistant sur le rôle du professeur d'une part et sur l'évolution du comportement des élèves d'autre part. Dans notre recherche, nous reprenons ces caractéristiques de mise en œuvre et le dispositif didactique autour de la conjecture d'Erdös-Straus sera géré par l'enseignant comme celui d'un problème ouvert.

Dans la pratique des problèmes ouverts, l'accent est mis sur la pratique de résolution de problèmes et non sur l'apprentissage de nouvelles connaissances. Arsac et Mante (2008) ont ainsi écrit qu' « il peut être contradictoire de vouloir viser à la fois le changement de rapport aux mathématiques et l'émergence d'une connaissance nouvelle ». Le changement de rapport aux mathématiques serait produit par la pratique de problèmes ouverts alors que l'apport de connaissances nouvelles résulterait principalement des situations-problèmes. Ceci nous semble une évidence si on envisage une situation qui est entièrement élaborée de façon à créer la nécessité de l'apport d'une connaissance nouvelle, la situation portant alors en elle le recours à l'enseignant et à son savoir. Mais il nous semble utile de ne pas fermer la porte à des émergences non seulement en termes de consolidation de savoirs en construction mais également de savoirs nouveaux dans les pratiques de recherche de problèmes ouverts. En ce sens, nous nous écartons donc de la position de Arsac et Mante en faisant l'hypothèse que les problèmes de recherche sont construits et s'appuient sur des objets mathématiques (et leurs propriétés) naturalisés ou en cours de naturalisation et que les élèves en situation de recherche consolident des connaissances antérieures mais peuvent également construire des connaissances nouvelles.

3.2.2 Les ateliers MATh.en.JEANS

MATh.en.JEANS est l'acronyme de « Méthode d'Apprentissage des Théories Mathématiques en Jumelant des Établissement pour une Approche Nouvelle du Savoir ». L'objectif est la popularisation des mathématiques vivantes en milieu scolaire et universitaire par la valorisation des résultats et surtout des méthodes de la recherche. C'est une association créée en 1990 en France, par Pierre Audin et Pierre Duchet, à la suite d'une première opération menée en 1985-1986, intitulée « 1000 classes - 1000 chercheurs », suivie d'un projet pilote MATh.en.JEANS mené sur l'année scolaire 1989-1990. L'idée fondatrice de MATh.en JEANS est la suivante : « faire en sorte que les élèves deviennent eux-mêmes des chercheurs » (Duchet & Audin, 2009, p. 347). L'hypothèse qui en découle est qu'« une activité mathématique qui restituerait les dimensions principales du travail du mathématicien (liberté, échange, documentation, découverte, recherche, invention, responsabilité, publication) procurerait à ses auteurs une joie semblable à celle qui anime les mathématiciens dans leur métier » (Duchet, 1996). Comme dans la pratique des problèmes ouverts, la référence pour l'activité de recherche mathématique en classe est celle des chercheurs. Duchet et Mainguene précisent ce qu'ils entendent sous la terminologie « recherche » en mathématiques :

> Le mot « recherche » apparaît [...] comme l'activité d'un sujet [...], activité qui se caractérisera essentiellement par la transformation de l'objet d'étude (devenu objet de recherche) en objet de connaissance soumis à l'expérience de la preuve (mathématique). Un sujet cherche s'il se trouve confronté à un objet d'étude sur une durée qui lui permet par une interaction directe avec cet objet, de transformer les représentations qu'il en a et d'élaborer ainsi une connaissance. (Duchet & Mainguene, 2003)

Une première similarité entre le travail de l'élève et le travail du mathématicien professionnel peut être caractérisée :

> Dans l'atelier de recherche, il doit s'établir une relation directe (c'est-à-dire non médiée par un maître) entre la personne qui cherche et l'objet qu'elle étudie. Cette relation sur laquelle l'étudiant doit avoir lui-même le contrôle est analogue à celle que le mathématicien entretient avec les objets de sa recherche. (Duchet, 1996)

Les initiateurs des ateliers MATh.enJEANS considèrent une autre caractéristique essentielle de la recherche professionnelle comme seconde similarité avec l'activité de recherche mathématique en classe : le positionnement original par rapport au Savoir, ou plutôt, au Non-savoir. Le trait dominant de la recherche scientifique est de chercher dans le champ de l'ignorance, à l'inverse de chercher dans le savoir établi où c'est être sûr ou en tout cas convaincu que ce qu'on cherche existe (Duchet, 1996). Un des objectifs des ateliers MATh.en.JEANS sera alors « la constitution d'un rapport positif au non-savoir » (Ibid. p. 3). Comme le dispositif Problèmes-Ouverts, les ateliers MATh.en.JEANS assignent alors à l'enseignant un rôle différent : il n'est plus celui qui détient le savoir mais il devient un guide pour les élèves dans la recherche du problème.

> Enclenchant le processus par une neutralité attentive et bienveillante, il invite au questionnement, à la réflexion, à l'expérimentation et à l'argumentation, n'offrant ses compétences qu'à la demande, rendant les élèves conscients et responsables de leur choix. (Ibid. p. 4)

Assistés par l'enseignant, les élèves s'engagent eux-mêmes dans une « véritable démarche expérimentale » :

> C'est par le questionnement que se forgent les premières représentations des problèmes ; c'est par l'exploration et l'expérimentation que, progressivement, se transforment ces représentations ; c'est au travers des formulations et de la confrontation avec autrui que se révèlent et s'affirment les possibilités créatrices et que se structurent de nouvelles connaissances. Au vécu de l'expérience, chacun gagne peu à peu la confiance en ses propres capacités. (Ibid. p. 3)

Duchet et Mainguene (2003) précisent cependant que « la constitution en savoir d'une connaissance acquise par la recherche suppose [...] une seconde transformation, une rupture de la recherche par l'intervention d'une institution didactique ». A ce moment là, le professeur aidera à donner une forme et un statut mathématiques aux propositions issues de la recherche : il institutionnalise les savoirs nouveaux issus de l'activité de recherche.

Les activités de recherche proposées par MATh.en.JEANS accordent un rôle central aux objets mathématiques, l'objet de science est la force antagoniste à l'effort du chercheur en ce sens où il lui révèle les lacunes de son savoir (Duchet & Mainguene, 2003). Ces activités semblent également prendre en compte tant les aspects heuristiques de l'activité de recherche (notamment dans la description de la démarche expérimentale) que les émergences de savoirs mathématiques. Nous partageons cette vision de l'activité de recherche mathématique pour la classe.

L'unité de base du dispositif MATh.en.JEANS est un jumelage de deux ateliers de recherche qui fonctionnent en parallèle et en interaction dans deux établissements scolaires différents. Les ateliers sont hors classe et comportent chacun une vingtaine d'élèves (si possible de niveaux mélangés) et (au moins) un enseignant. Un chercheur est associé au jumelage. Le dispositif s'étale sur l'année scolaire et contient différentes séances de nature différente [2] :

2. Pour le détail des différentes séances, voir par exemple (Duchet & Audin, 2009, p. 350-351).

– des séances ordinaires hebdomadaires de deux heures conduites sous la responsabilité des enseignants dans chaque établissement ;
– des séminaires de trois à six heures réunissant tous les acteurs du jumelage permettant notamment des confrontations et débats critiques ;
– un congrès de deux à quatre jours réunissant un grand nombre de jumelages, quelques mathématiciens invités et un public extérieur, dont l'objectif est de permettre aux groupes d'exposer leurs résultats et bénéficier d'une évaluation externe.

Dans notre recherche, nous nous inspirons de ce dispositif sur un temps très long pour mettre en œuvre une situation de recherche en classe. Cependant, nous ne choisissons pas les mêmes modalités (durée et nature des différentes séances) pour deux raisons. Tout d'abord les ateliers MATh.en.JEANS sont conçus pour être animés dans un contexte hors-classe. Or notre projet est de faire vivre des situations de recherche dans une classe ordinaire. D'autre part, notre étude porte sur l'analyse des processus de recherche d'élèves engagés dans une résolution de problèmes de recherche. Nous portons donc une attention particulière aux phases de recherche effective sur le problème et les phases de séminaires, congrès et publication sont plutôt secondaires. Le dispositif de jumelage n'est donc pas forcément utile et pertinent.

Les sujets de recherche des ateliers MATh.en.JEANS sont proposés par le chercheur en concertation avec les enseignants. Les sujets sont ouverts, toujours pour les élèves, très souvent pour les enseignants et parfois pour les chercheurs (c'est-à-dire non résolu par la communauté mathématique). Ils illustrent fréquemment d'authentiques problématiques vivant dans les mathématiques contemporaines. Notons à ce propos que la conjecture d'Erdös-Straus est un sujet issu d'un atelier MATh.en.JEANS proposé en 1997 à Bordeaux. Il illustre ainsi un sujet ouvert pour tous les acteurs, récent (1950) et encore vivant (en témoignent les différentes publications sur ce sujet, voir chapitre 4). Le chercheur s'efforce alors de rédiger un sujet abordable, ambitieux, accessible, motivant et donnant du sens pour les élèves. La problématique doit être assez riche et complexe pour pouvoir être étudiée sur une année entière. Comme pour le dispositif Problèmes-Ouverts, le choix de donner des sujets attractifs et abordables mais ouverts, riches et profonds est garant de la mise en œuvre d'approches variées par les élèves ; leur imagination et leur créativité est largement favorisée. Les ateliers MATh.en.JEANS se distinguent des séances de problèmes ouverts essentiellement sur deux points : la durée de l'activité et les échanges entre pairs. Pour le premier élément, alors que les séances de problèmes ouverts durent en moyenne deux heures, renouvelées plusieurs fois dans l'année, les activités de recherche des ateliers MATh.en.JEANS sont longues, régulières et étalées sur l'année scolaire. Pour l'association, c'est un élément fondamental pour que les élèves puissent s'approprier toutes les phases du métier de chercheur. Le second élément de distinction concernent les échanges entre pairs. Ceux-ci, dans les ateliers, sont d'une autre dimension que ceux vécus dans les pratiques du problème ouvert : ils sont plus proches que ceux d'une réelle communauté mathématique. Si les objectifs sont les mêmes, à savoir favoriser les interactions entre les élèves et notamment la validation des résultats et la structuration des connaissances, les séminaires et le congrès ajoutent une dimension supplémentaire à la communication des résultats à un public extérieur et au projet de publication.

3.2.3 Les situations de recherche pour la classe de Maths à modeler

Depuis plusieurs années, l'équipe de recherche Maths à modeler est dans une démarche de popularisation et d'enseignement des mathématiques. Composée principalement de chercheurs en mathématiques discrètes et de chercheurs en didactique des mathématiques, son projet de recherche principal est de construire des situations de recherche pour la classe. Leur méthodologie s'appuie en premier lieu sur « une identification des problèmes de la recherche actuelle susceptibles d'être transposés dans des pratiques scolaires et des pratiques d'animation et de médiation scientifique. Les chercheurs en mathématiques discrètes impliqués dans ce projet constituent la force de proposition des problèmes qui serviront de base aux situations de recherche » (Site internet de l'équipe, http ://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/). En second lieu, la validation de ces situations repose sur un corpus expérimental riche et divers : ateliers réguliers ou ponctuels, en classe ou hors classe mais aussi en formation de formateurs. Ce travail permet d'affiner le travail de transposition didactique afin d'aboutir à une situation de recherche pour la classe robuste.

Les caractérisations d'une situation de recherche pour la classe, développées dans Grenier et Payan (2003), sont les suivantes :

- Une situation de recherche s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. Elle doit être proche de questions non résolues.
- La question initiale est facile d'accès : la question est facile à comprendre. Pour cela le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit amener l'élève à l'intérieur des mathématiques.
- Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires pour initier la résolution sont élémentaires.
- Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques en jeu.
- Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question. La situation n'a pas de fin. Il n'y a que des critères de fin locaux.

Les auteurs précisent qu'ils se servent du modèle de situation de recherche pour la classe comme référence épistémologique et didactique. Toutes les situations qu'ils étudient ne vérifient donc pas nécessairement tous les éléments de caractérisation ci-dessus. En ce sens, la conjecture d'Erdös-Straus peut être considérée comme une situation de recherche pour la classe. En effet, elle s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle, étant un problème non résolu et suscitant actuellement des recherches (cf. chapitre 4) ; la question est facile d'accès et facile à comprendre même si elle est déjà mathématisée et formalisée ; de nombreuses stratégies existent (cf. chapitre 7), en appui sur des prérequis élémentaires et naturalisés (les entiers, les fractions et le calcul fractionnaire) et le problème n'a pas de fin et peut renvoyer à d'autres problèmes (par exemple décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires de dénominateurs deux à deux distincts, décomposition de $\frac{5}{n}$ (conjecture de Sierpinski) en somme de trois fractions égyptiennes ou plus généralement décomposition de $\frac{h}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes).

Comme les dispositifs précédents, les situations de recherche pour la classe prennent pour référence l'activité du chercheur en mathématiques. Les caractérisations ci-dessus mettent en avant trois aspects fondamentaux : l'enjeu de vérité (chercher une question ouverte dont on ne connaît *a priori* pas la réponse), l'aspect social de l'activité (rôle de la communauté mathématique) et l'aspect recherche (on ne doit pas utiliser que les propriétés du cours pour résoudre le problème). L'objectif premier des situations de recherche pour la classe « est donc la résolution (au moins partielle) d'une question dont on ne connaît pas la réponse, et non l'apprentissage ou le travail d'une notion mathématique désignée » (Site internet de l'équipe, http ://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/). Les apprentissages visés sont avant tout des « savoirs transversaux », c'est-à-dire des savoirs intervenant dans de nombreux domaines mathématiques et concernant des termes tels que expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, définition, preuve, implication, structuration, décomposition/recomposition, induction, etc. (Grenier & Payan, 2003). L'apprentissage de notions n'est pas visé même si des notions sont présentes et peuvent être étudiées. Comme nous l'avons déjà précisé, il nous semble que la relation entre les « savoirs transversaux » relevant de l'activité mathématique et les savoirs notionnels relevant de la construction de savoir n'est pas nulle mais plutôt dialectique. L'apprentissage de ces savoirs se réalise dans un processus dialectique entre mobilisation, acquisition de connaissances mathématiques (notionnelles) et développements d'heuristiques (savoirs transversaux) ; en ce sens que nous nous détachons de leur point de vue sur le rôle des situations de recherche dans l'apprentissage des mathématiques. Rappelons également que nous ne partageons pas la même approche du rôle des objets mathématiques dans l'apprentissage de la dimension expérimentale (cf. chapitre 2, paragraphe 2.1.2, b. Thèse de Giroud). Dans sa thèse, Giroud (2011) défend que l'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite des problèmes dont la résolution fait appel à des objets mathématiques qui n'ont pas encore été travaillés par les élèves. Nous faisons, au contraire, l'hypothèse que la mise en œuvre d'une démarche expérimentale peut être facilitée si les objets mathématiques sont suffisamment familiers pour les élèves pour fonctionner comme des objets concrets.

3.2.4 Les situations de recherche du groupe DREAM

Les dispositifs précédents montrent clairement les apports de la résolution de problèmes en termes d'apprentissage de la démarche scientifique : développement d'heuristiques, élaboration de conjectures, mobilisation d'outils de contrôle et de validation, etc. Elles mettent également en avant la possibilité d'insérer des situations de ce type en classe (Arsac et al., 1988 ; Arsac & Mante, 2007 ; Grenier & Payan, 2003 ; Grenier, 2009). Pour autant, bien que de telles situations de recherche continuent à vivre, et malgré un certain nombre de recommandations institutionnelles, elles ne se sont pas généralisées. C'est ce constat qui est le point de départ des travaux du groupe DREAM « Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques », qui avance les hypothèses suivantes quant aux freins à la diffusion dans les classes (Aldon et al., 2010) :

- la part importante de la dimension expérimentale dans le travail de recherche rentre en conflit avec la représentation contemporaine dominante parmi les enseignants, et au-delà dans la société, de ce que sont les mathématiques ;
- l'accent mis principalement dans l'approche des problèmes de recherche sur le développement de compétences transversales liées au raisonnement, en laissant au second plan les apprentissages sur les notions mathématiques en jeu, est en opposition avec les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les professeurs, en particulier en ce qui concerne l'avancement dans le programme ;
- les difficultés pour le professeur de repérer ce qui relève des mathématiques dans l'activité des élèves, et par suite de choisir ce que l'on peut institutionnaliser à l'issue du travail en lien avec les programmes de la classe ;
- les difficultés rencontrées par les professeurs pour évaluer ce type de travail, compte tenu de ce que les modes d'évaluation habituels ne sont pas appropriés.

Initié à la rentrée universitaire 2005, le groupe [3] DREAM (dont nous sommes membre) est une équipe de recherche mixte IFé, IREM, IUFM et S2HEP (Université Lyon 1) [4]. Ceci permet d'une part d'avoir accès à des niveaux de classe variés : collège, mais aussi école élémentaire

3. Le groupe s'est d'abord appelé EXPRIME, EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'École.

4. IFé : Institut Français de l'éducation, IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, IUFM : Institut Universitaire de Formation des Maitres et S2HEP : Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques (laboratoire de l'Université de Lyon 1).

et lycée, d'autre part de s'appuyer sur l'ensemble des travaux développés au sein de l'IREM de Lyon depuis près de trente ans sur la résolution de problèmes en classe, ainsi que sur les travaux de recherche développés au LEPS-LIRDHIST sur l'articulation entre logique et rayonnement mathématique par Durand-Guerrier (2005) et sur la dimension expérimentale des mathématiques dans la perspective de leur apprentissage (Dias, 2008). L'objectif principal de DREAM est alors d'élaborer des ressources permettant aux enseignants de mettre en œuvre dans le cours ordinaire de la classe des problèmes de recherche en mettant en évidence, sur quelques situations classiques ou moins classiques, les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique d'une part, les connaissances mathématiques travaillées en lien avec les programmes à différents niveaux d'enseignement primaire et secondaire d'autre part. Cet objectif s'est réalisé avec la publication d'un cérédrom (Aldon et al., 2010) présentant sept situations de recherche pour la classe, étudiées :

- du point de vue des notions mathématiques susceptibles d'être mobilisées ou construites au cours de leur résolution ;
- en s'appuyant sur des analyses *a priori* approfondies, et des études de corpus recueillis en classe ;
- en référence à la théorie des situations didactiques.

Les problèmes sont présentés selon quatre axes : le problème considéré et quelques solutions, les objets mathématiques potentiellement travaillés, des situations d'apprentissage (énoncés pour différents niveaux de classe, scénarios, comptes-rendus d'expérimentation) et des situations connexes (prolongements pour l'enseignant). Les travaux de DREAM se poursuivent avec l'étude de la diffusion de la ressource publiée et son impact auprès des enseignants.

Les situations de problèmes de recherche élaborées par ce groupe permettent de travailler sur les allers et retours entre la partie expérimentale de la recherche et la construction structurée de notions mathématiques. La relation dialectique entre les connaissances notionnelles et le développement d'heuristiques est prise en compte pour l'apprentissage des mathématiques dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche. Les travaux du groupe mettent en évidence les ressorts de la dimension expérimentale des mathématiques pour développer un tel processus dialectique. Dans notre recherche, nous partageons cette conception de la résolution de problèmes de recherche. La situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus est une situation connexe à une des situations de recherche du cédérom (Aldon et al., 2010) intitulée *Les fractions égyptiennes* et dont le problème est la décomposition de l'unité en somme de fractions unitaires.

Conclusion de la partie I

Pour étudier et mettre en perspective les processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans l'étude d'un même problème de recherche, nous avons élaboré une méthodologie de recherche en appui sur l'interaction de trois pôles (mathématique, épistémologique et didactique), et qui se décline en trois éléments constitutifs :

– Une étude d'épistémologie contemporaine qui consiste, outre la lecture des travaux de recherches contemporains sur la conjecture et notre propre travail mathématique, à suivre des travaux de recherche de chercheurs « in statu nascendi » sur la conjecture d'Erdös-Straus.
– La construction d'une situation didactique de recherche autour de la conjecture par des allers et retours entre le milieu théorique et le milieu expérimental *a priori* (au sens de Bloch), en particulier grâce à la mise en œuvre de pré-expérimentations.
– Une expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique pour mettre à l'épreuve la situation didactique élaborée (confrontation à la contingence au sens de Bloch).

L'étude d'épistémologie contemporaine a pour objectif principal de nous permettre d'identifier les éléments moteurs des avancées de la recherche sur la conjecture ainsi que leur origine, dans la perspective de nourrir nos études didactiques. La construction d'une situation didactique dans un processus dialectique entre élaborations théoriques et expérimentations en classe vise d'une part à affiner l'analyse *a priori* de la situation et d'autre part, à tester sa viabilité en classe. Enfin, le contexte de laboratoire nous permettra de mettre en place une situation expérimentale dont les paramètres auront été soigneusement contrôlés afin d'analyser finement les processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans leur étude de la conjecture et d'apporter ainsi des éléments supplémentaires pour importer à nouveau la situation dans une classe ordinaire.

Au sein des mathématiques, nous avons choisi le domaine de la théorie des nombres pour plusieurs raisons : la possibilité de trouver des questions ouvertes mais simples d'accès, la familiarité des objets en jeu pour les élèves, ses potentialités pour développer un raisonnement mathématique (Battie, 2003) et son terrain propice pour mettre en œuvre une démarche de type expérimental. Au sein de la didactique des mathématiques, nos travaux s'inscrivent dans la Théorie des Situations Didactiques de Guy Brousseau (1998) qui offre un cadre d'analyse pertinent pour construire et analyser des situations de recherche de problèmes. Elle permet en effet de prendre en compte le processus dialectique de l'activité mathématique, entre mobilisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques, ainsi que la mise en œuvre d'une démarche expérimentale. Nous nous intéressons plus particulièrement à la notion de milieu sous deux aspects : la notion de milieu antagoniste de type expérimental (Dias, 2008) et les différents modèles de milieux développés par Bloch (2002). Nous utiliserons ce concept, sous le premier aspect, pour élaborer le milieu matériel initial des élèves dans une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus et nous exploiterons le second aspect pour construire une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus pour une expérimentation en laboratoire en classe de terminale scientifique.

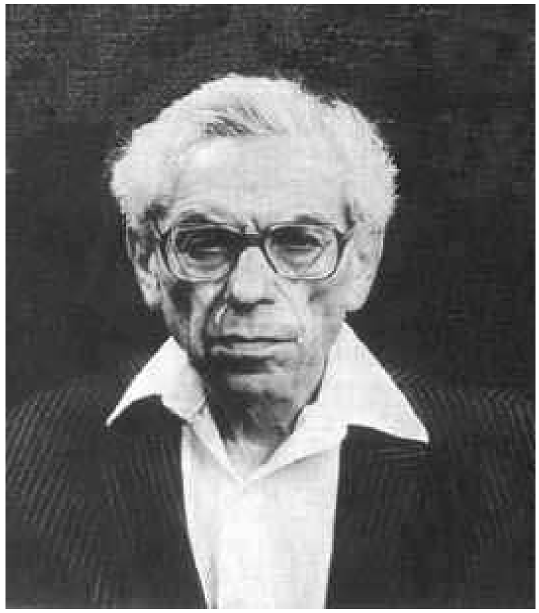
Enfin, nos recherches s'inscrivent dans la continuité de différents travaux s'intéressant à la résolution de problèmes : le courant Problem-solving (Schoenfeld, 1985, 1992), la pratique des Problèmes-Ouverts (Arsac & Mante, 2007), les ateliers MATh.en.JEANS (Duchet, 1996), les situations recherches pour la classe (SiRC) de l'équipe Maths à modeler (Grenier & Payan, 2003) et les situations de recherche du groupe DREAM (Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques) (Aldon et al., 2010). Nous partageons en particulier les hypothèses suivantes concernant les ressorts des situations de recherche pour l'apprentissage des mathématiques. L'activité de résolution de problèmes de recherche permet de :

- prendre en compte la dimension créative des mathématiques ;
- s'approprier certaines heuristiques expertes (en référence au travail du chercheur) ;
- mettre en œuvre une démarche de type expérimentale.

Avec le groupe DREAM, nous ajoutons deux éléments qui nous semblent essentiels : la place centrale des objets mathématiques dans la construction des savoirs et l'aspect dialectique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques. Nous faisons ainsi l'hypothèse forte que les activités de résolution de problèmes participent à la construction des connaissances, en termes de consolidations des connaissances en construction, tout en permettant l'émergence éventuelle de nouveaux savoirs.

Intermède : Erdös

Cet intermède est consacré au mathématicien Paul Erdös. Nous présentons plusieurs aspects de sa vie pour illustrer sa conception et sa pratique singulière des mathématiques. Nous détaillons ses principales contributions, sa manière de travailler au sein de la communauté mathématique et sa vision de l'activité mathématique. Nous présentons également quelques exemples de problèmes qu'il aimait chercher.



Paul Erdös est né en 1913 à Budapest et mort en 1996 à Varsovie. Ses parents étaient tous les deux professeurs de mathématiques en lycée. Il a été très vite intéressé par les mathématiques. Jean-Louis Nicolas, dans un discours prononcé à l'occasion de la remise du doctorat *honoris causa* de l'université de Limoges à Monsieur le professeur Paul Erdös, raconte ainsi que « à quatre ans, vous [Erdös] teniez le raisonnement suivant : si on enlève 250 de 100, on obtient 150 en dessous de zéro, c'est-à-dire que vous redécouvriez les nombres négatifs » (Nicolas, 1986). Erdös a publié son premier article en 1932, obtenu un premier Ph.D à Budapest en 1934 puis un second en 1939 à Manchester. Il a ensuite été lauréat du prix Wolf en 1983. Tout au long de sa carrière, il a écrit plus de 1500 articles, soit seul, soit avec plus de 450 co-auteurs différents. De ce souci du travail de collaboration est apparue la définition du nombre d'Erdös : deux personnes sont liées si elles ont écrit un article en commun. Le nombre d'Erdös d'un auteur est la longueur minimale d'une chaine reliant cet auteur à Paul Erdös. Ainsi une personne a un nombre d'Erdös égal à 1 si elle a publié un article en commun avec Erdös, une personne a un nombre d'Erdös égal à 2 si elle a publié un article en commun avec une personne ayant un nombre d'Erdös égale à 1, etc.(pour plus de détail, consulter le site internet http ://www.oakland.edu/enp/index.html). Selon Hoffman, auteur de sa biographie, Erdös était un « moine des mathématiques », il a mené sa vie autour des mathématiques : « une vie d'ascète, contemplative, une vie vouée à une mission unique et limitée : découvrir la vérité mathématique »(Hoffman, 2000, p. 28). Cependant, il était curieux de tout et s'intéressait aussi à la politique et à l'histoire.

Dans son premier article en 1932 (Erdös, 1932), il a redémontré un théorème établi un siècle plus tôt : entre un nombre et son double il y a toujours un nombre premier. Sa démonstration est plus simple et plus élégante que celle de Tchebychev. En 1949, Atle Selberg et Erdös donnent une démonstration « élémentaire » du théorème des nombres premiers : le nombre $\Pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x est équivalent à $\frac{x}{ln(x)}$ lorsque x tend vers l'infini (i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\Pi(x)}{\frac{x}{ln(x)}} = 1$) (Erdös, 1949 ; Selberg, 1949). Ce théorème a été conjecturé par Gauss. La démonstration est « élémentaire » au sens où elle n'utilise pas de fonctions de variables complexes ni le calcul intégral, contrairement à la démonstration de Hadamard et La Vallée-Poussin. Un autre résultat important d'Erdös est le théorème d'Erdös-Kac, qu'il a établi avec le probabiliste Marc Kac en 1949 (Erdös, 1949). Ce résultat sera le point de départ de la théorie probabiliste des nombres. Erdös a beaucoup travaillé en analyse combinatoire et a grandement contribué au développement de ce domaine des mathématiques, notamment avec la théorie de Ramsey. Ses articles traitent également d'autres domaines des mathématiques tels que la théorie des ensembles, la théorie des graphes, l'analyse et l'étude des polynômes, la géométrie combinatoire, les statistiques dans les groupes finis.

Jean-Louis Nicolas qualifie les méthodes de travail d'Erdös « d'insolites » : « Vos méthodes de travail sont assez insolites [...] un cahier de papier blanc pour pouvoir travailler à tout moment, et une mémoire extraordinaire. [...] Vous avez une agilité d'esprit exceptionnelle [...] Vous êtes ainsi un voyageur de commerce en mathématiques à l'échelle mondiale. [...] Je vous accompagnai à l'Ambassade du Canada à Paris. Dans la salle d'attente vous avez résolu une question sur laquelle je séchais depuis longtemps, puis au fonctionnaire étonné de vous voir retourner si vite au Canada, vous avez déclaré : si j'étais un violoncelliste, cela ne vous étonnerait pas. Un mathématicien est comme un musicien » (Nicolas, 1986). La façon de vivre d'Erdös était ainsi originale, il parcourait le monde de congrès en congrès sans rester plus de 8 jours au même endroit. Il écrivait (près de 1500 lettres par an) et téléphonait beaucoup à des collègues du monde entier. Dans ses articles, ses lettres ou ses conférences, il posait de nombreux problèmes, souvent d'énoncés simples et compréhensibles mais dont la solution pouvait être très compliquée. Il a écrit plusieurs listes de ces problèmes (par exemple (Erdös, 1963), voir ci-dessous) et offrait des prix allant de 25 à 10 000 dollars pour la solution de problèmes, le montant du prix était fonction de la difficulté présumée du problème. Erdös avait le génie de deviner celui ou celle parmi ses collaborateurs qui serait le plus apte à s'attaquer à un problème donné. Il aimait les démonstrations courtes et élégantes. Ainsi, selon Hoffmann, « Erdös, plus que quiconque, faisait des mathématiques une activité de groupe » (Hoffman, 2000, p. 19). Il donne à ce propos l'avis d'Erdös sur le travail en solitaire de Wiles. Selon lui, le théorème aurait pu être démontré plus tôt si Wiles avait tenu la communauté mathématique au courant de ses travaux. Hoffmann cite un autre mathématicien, Ken Ribet, qui décrit l'importance de la communauté mathématique dans l'activité des chercheurs : « les mathématiciens communiquent en permanence. En discutant avec d'autres personnes, on vous fait des compliments ; on vous dit que ce que vous avez fait est important, on vous donne des idées. C'est une sorte de nourriture, et si vous vous coupez de cela, alors vous faites quelque chose de probablement très bizarre psychologiquement » (cité par Hoffman, 2000, p. 180). Cette description de l'activité mathématique illustre parfaitement la manière dont Erdös considérait et pratiquait les mathématiques.

Comme le mentionne Nicolas, « Paul Erdös was well known as a problem poser and a problem solver and, because of this, he was not much appreciated by Bourbaki, though J. Dieudonné once said : rien de ce que fait Erdös n'est facile ; c'est toujours extrêmement astucieux » (Nicolas, 2002, p. 538). La démarche des mathématiciens bourbakistes consistait d'abord en l'étude d'une théorie générale et ensuite en l'application à des problèmes concrets. Celle d'Erdös était d'abord de poser des problèmes et lorsque quelques-uns étaient résolus, il était possible d'en déduire une théorie. Nicolas (2006) souligne ainsi que « les problèmes posés par Paul Erdös constituent un réservoir de sujets de recherche de grande qualité pour les chercheurs du monde entier ».

La motivation d'Erdös pour faire des mathématiques venait du fait qu'il les considérait comme « une quête de beauté durable et de vérité ultime » (Hoffman, 2000, p. 30). Pour lui, les mathématiques étaient une magnifique combinaison de science, science de la certitude par laquelle on accède à la vérité, et d'art, les mathématiques ayant une certaine esthétique. Ainsi beauté et compréhension sont deux mots qu'Erdös utilisait souvent pour qualifier les mathématiques. Par exemple lorsqu'il parle de la démonstration du théorème des quatre couleurs, il admet que la démonstration est valable mais il précise qu' « elle n'est pas belle » et qu'il « aimerait mieux voir une démonstration qui nous fasse un peu comprendre pourquoi quatre couleurs suffisent » (Ibid. p. 45). Cependant, il a du mal à expliquer en quoi les mathématiques sont belles : « C'est comme si l'on demandait pourquoi la neuvième symphonie de Beethoven est belle. Si vous ne voyez pas pourquoi, personne ne pourra vous le dire. Je sais que les nombres sont beaux. S'ils ne sont pas beaux alors rien ne l'est »(Ibid. p. 45). Erdös avait un rapport affectif aux nombres, Hoffman dit que « les nombres premiers étaient les amis intimes d'Erdös » (Hoffman, 2000, p. 38) et qu'il avait de la sympathie pour eux.

Pour résumer, Erdös était « le poseur de problèmes par excellence » ainsi qu' « un solutionneur de problèmes accompli ». De plus, il était « singulièrement généreux quand il s'agissait de partager ses idées mathématiques avec ses collègues » (Hoffman, 2000).

Erdös a écrit en 1963 un article intitulé *Quelques problèmes en théorie des nombres*. Il explique que ce « sont des problèmes difficiles, peut être sans importance, où il reste beaucoup de questions, sinon presque tout, à résoudre » et il ajoute « bien entendu, je n'ai pas la prétention d'être complet et je me suis, dans une trop grande mesure peut-être, confiné dans des problèmes particuliers ; mon excuse est que ce sont ceux que je connais le mieux » (Erdös, 1963, p. 537). Dans cet article, il mentionne 76 problèmes de théorie des nombres, classés en six catégories : problèmes de divisibilité dans les suites finies, problèmes de divisibilité dans les suites infinies, problèmes sur les sommes et les différences des termes d'une ou plusieurs suites, problèmes sur les congruences, les diviseurs d'un entier, les progressions arithmétiques, problèmes sur les nombres entiers et problèmes divers et enfin, problèmes d'analyse indéterminée et problèmes analogues. Cet article semble illustrer précisément la manière dont Erdös pratiquait la recherche mathématique. On observe en effet le grand nombre et la diversité des problèmes sur lesquels il réfléchissait : certains sont « de simples exercices », d'autres sont difficiles, d'autres sont ouverts, certains sont démontrés, etc. Nous présentons dans la suite quelques exemples de ces divers problèmes proposés par Erdös.

Problème 1.

Si $n+1$ nombres entiers sont $\leq 2n$, l'un au moins d'entre eux est divisible par un des autres.

Problème posé par P. Erdös dans *Am. math. Monthly*, 42 (1935), p. 396, problème 3739; solution par Martha Wachsberger et E. Weiszfeld dans *Am. math. Monthly*, 44 (1937), p. 120.

Figure 3.1 – Exemple 1 - Un problème de type « exercice simple ».

Ce problème (figure 3.1) est un problème qu'il qualifie d'exercice simple et dont il donne la démonstration, qui est courte. On peut remarquer que c'est lui qui pose le problème mais qu'il a été résolu par deux autres mathématiciens. C'est en cela que l'article montre bien sa façon de faire des mathématiques et ses multiples communications avec d'autres mathématiciens. On peut ainsi lire de nombreuses fois dans cet article, « problème posé par P. Erdös, solution par... » ou « Erdös et... ont démontré que ». Voici quelques extraits (figure 3.2) :

Problème posé par P. ERDÖS dans *Am. math. Monthly*, 50 (1943), p. 330, problème 4083; solution par W. SCOBERT, *Am.*

Problème posé par P. ERDÖS dans *Am. Math. Monthly*, 56 (1949), p. 479, problème 4352; solution par G. SZEKERES, *Am.*

Mais POSA et ERDÖS ont remarqué que

H. DAVENPORT et P. ERDÖS (voir problème 21) ont montré que, si on adjoint à une suite d'entiers:

FIGURE 3.2 – Exemple 2 - Extraits de la liste de problèmes de Paul Erdös (1963).

Voici deux autres exemples témoignant de la diversité des problèmes que l'on trouve dans cet article (Erdös, 1963) :

Problème 25.

Soit

$$a_1 < a_2 < \ldots$$

une suite infinie d'entiers telle que, pour n suffisamment grand, le nombre $f(n)$ de solutions de la relation

$$n = a_i a_j ,$$

ne soit pas nul. Ce nombre $f(n)$ vérifie la relation:

$$\overline{\lim} f(n) = \infty . \qquad (1)$$

La démonstration est assez difficile et n'a pas été publiée.

FIGURE 3.3 – Exemple 3 - Un problème qualifié de « difficile ».

C'est un problème (figure 3.3) qu'il qualifie de difficile et dont la démonstration n'est pas publiée. Le dernier exemple de problème est celui concernant les fractions égyptiennes. Il représente le dernier type de problèmes : ceux restés à l'état de conjecture (figure 3.4).

Problème 71.

La relation:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

a-t-elle des solutions en entiers x, y, $z > 1$, pour tout entier $n > 2$? (hypothèse de STRAUS et P. ERDÖS).

FIGURE 3.4 – Exemple 4 - Un problème resté à l'état de conjecture : conjecture d'Erdös-Straus.

Deuxième partie

Analyses mathématique et épistémologique

Chapitre 4

Analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus. Il est composé de quatre parties. La première partie présente le problème ainsi que les principaux articles publiés que nous avons recensés. Dans la seconde partie, nous démontrons les principaux résultats théoriques et algorithmiques concernant la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans la troisième partie, nous présentons les travaux de Louis Thépault, amateur de problèmes mathématiques qui a envoyé ses recherches à *Pour la science* en 1979 et ceux de Michel Mizony, chercheur à l'université Lyon 1 qui a débuté ses recherches sur la conjecture en 2009. Enfin, dans la dernière partie, nous articulons les différents résultats afin de faire une synthèse de la recherche actuelle sur ce problème.

4.1 La conjecture d'Erdös-Straus

S'intéressant à la décomposition d'un rationnel $\frac{a}{b}$ en somme de fractions unitaires et plus particulièrement, au nombre minimal $N(a, b)$ de fractions unitaires deux à deux distinctes nécessaires pour représenter toute fraction $\frac{a}{b}$, Erdös et Straus énoncent la conjecture selon laquelle $N(4, b) \leq 3$ si $b > 4$. En d'autres termes :

Conjecture 1. *Pour tout n au moins égal à 2, on peut trouver des entiers (non nécessairement distincts) tels que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \tag{4.1}$$

Cette conjecture est publiée par Erdös (Erdös, 1950) dans un article d'une revue hongroise où il écrit [1] :

> Mais déjà pour le cas $a = 4$ on rencontre des difficultés importantes pour déterminer le maximum de $N(a, b)$. Notre conjecture avec Strauss est que $N(4, b) \leq 3$, si $b > 4$. Strauss a démontré cette conjecture pour le cas $4 < b < 5000$.

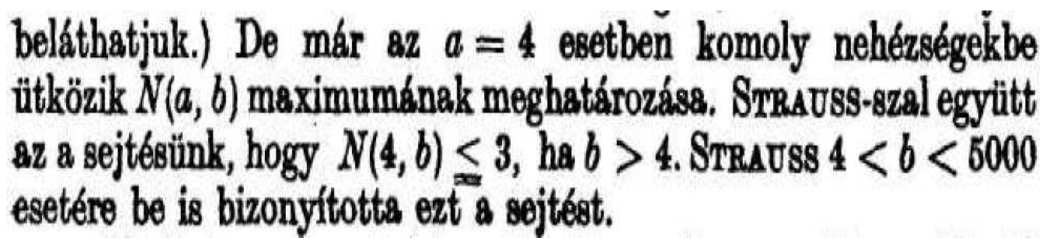

beláthatjuk.) De már az $a = 4$ esetben komoly nehézségekbe ütközik $N(a, b)$ maximumának meghatározása. STRAUSS-szal együtt az a sejtésünk, hogy $N(4, b) \leq 3$, ha $b > 4$. STRAUSS $4 < b < 5000$ esetére be is bizonyította ezt a sejtést.

FIGURE 4.1 – Extrait du texte original en hongrois.

D'après Elsholtz et Tao (2011), les premiers articles concernant la conjecture sont celui de Erdös (Erdös, 1950) et un article de Oblàth (Oblàth, 1950) soumis en 1948 mais parus en 1950 :

> The earliest references to this conjecture are papers by Erdos and Oblath, and we draw attention to the fact that the latter paper was submitted in 1948. (Elsholtz & Tao, 2011, p. 1)

Dans son article, Oblàth précise que « M. STRAUSS a vérifié l'hypothèse de M. ERDÖS pour toute valeur de $n < 5000$ et M. SHAPIRO pour $n < 20000$ », et que cette information lui a été communiquée par Erdös dans une lettre. *A priori*, Straus et Shapiro n'ont pas publié d'article de leurs travaux sur la conjecture. Ainsi, le premier écrit publié concernant une recherche de résolution de la conjecture d'Erdös-Straus serait celui de Oblàth (1950). Il a trouvé des solutions à l'équation pour tout entier naturel $n \leq 106128$ et il décrit la méthode qu'il a utilisée pour arriver à ce résultat. Il établit également un résultat général pour n premier de la forme $4k+3$. En 1954, Rosati reprend les travaux d'Oblàth et améliore son résultat en trouvant des solutions à l'équation pour tout entier naturel $n < 141649$. Il progresse également sur le résultat général en définissant une condition nécessaire et suffisante pour trouver des solutions à l'équation (Rosati, 1954). En 1962, Bernstein, à la suite d'un exposé d'Erdös à Arhus le 10 mai 1961, publie ses recherches sur la conjecture. Il trouve des solutions à l'équation pour tout entier naturel $n < 8000$ et énonce aussi une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions, proche de celle de Rosati (Bernstein, 1962). *A priori*, il ne connaît pas les travaux précédents puisqu'il ne cite ni Oblàth, ni Rosati. En 1965, Yamamoto apporte de nouveaux résultats sur cette conjecture. Il cite uniquement Bernstein, on peut penser qu'il n'a pas eu connaissance des travaux de Oblàth et de Rosati. Son premier théorème est semblable à celui de Rosati, à savoir une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions pour certains nombres, mais il va plus loin en le complétant par un second théorème concernant les nombres non atteints dans le cas précédent. Il vérifie

1. Il s'agit de notre traduction du texte hongrois de la figure 4.1.

également que l'équation a des solutions pour tout entier naturel $n < 10^7$ grâce à un ordinateur (Yamamoto, 1965). En 1969, Mordell reprend ces différents résultats dans le chapitre 30 de son livre sur les *Équations diophantiennes* (Mordell, 1969). En 1999, Swett publie une page Internet avec la vérification de l'existence de solutions pour tout entier naturel $n < 10^{14}$ (Swett, 1999). Il y explique le fonctionnement de son algorithme. En 2000, Schinzel publie un article où il généralise le second résultat de Yamamoto (Schinzel, 2000).

Nous pouvons remarquer que dès sa publication par Erdös, la conjecture a suscité un intérêt chez plusieurs mathématiciens. La conjecture continue d'intéresser les chercheurs puisque nous pouvons recenser différents articles ces dernières années ((Elsholtz, 2001), (Elsholtz & Tao, 2011), (Mizony, 2010), (Gueye & Mizony, 2012), (Mizony & Gueye, 2012), (Bello-Hernández et al., 2012)). Les articles abordent la résolution de la conjecture d'Erdös et Straus ou donnent des résultats quantitatifs, par majorations, sur les nombres des solutions.

4.2 État de l'art

Dans cette partie, nous présentons les principaux résultats théoriques et algorithmiques concernant la conjecture d'Erdös-Straus. Nous énonçons les théorèmes et détaillons leurs démonstrations.

4.2.1 Démonstrations de résultats théoriques

Une première propriété permet de restreindre la recherche de la conjecture de tout entier positif n à tout nombre premier $n = p$.

Propriété 1. *Si l'équation pour l'entier n admet comme solution le triplet (x, y, z) alors l'équation pour l'entier kn admet comme solution le triplet (kx, ky, kz). En effet, il découle immédiatement de l'équation initiale* (4.1) *que :*

$$\frac{4}{kn} = \frac{1}{kx} + \frac{1}{ky} + \frac{1}{kz}.$$

Le théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers assure alors la réduction du problème aux nombres premiers.

Théorème de Rosati-Yamamoto. *Soit p un nombre premier. L'équation $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ a des solutions si et seulement si il existe trois entiers positifs a, b et s, avec $s|a+b$ et $pgcd(4ab, s) = 1$, tels que l'une des congruences soit vérifiée :*

$$p \equiv -s[4ab] \quad (4.2)$$
$$ps \equiv -1[4ab] \quad (4.3)$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit p un nombre premier. L'équation $\frac{4}{p} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ a des solutions si et seulement si l'une des deux congruences suivantes a des solutions entières non nulles (a, b, c) :*

$$a + pb + pc \equiv 0[4abc],\ a \not\equiv 0[p] \quad (4.4)$$
$$pa + b + c \equiv 0[4abc],\ bc \not\equiv 0[p] \quad (4.5)$$

Remarque : Le lemme permet de montrer que s'il existe des solutions (a, b, c) à (4.4) ou à (4.5), alors il en existe avec a, b, c premiers deux à deux. En effet, soit $\delta = pgcd(a, b)$. L'équation (4.5) entraîne que δ divise c. On peut donc supposer, sans perte de généralité (en divisant au besoin par δ) qu'on a l'équation suivante : $pa + b + c = 4abck$, avec k entier naturel non nul et $pgcd(a, b) = 1$. Soit q un diviseur de b et c. On a q divise pa. Or $q \neq \pm p$ puisque p est premier et $bc \not\equiv 0[p]$. Donc $pgcd(q, p) = 1$ et d'après le théorème de Gauss[2], q divise a. On a donc q divise $pgcd(a, b) = 1$, d'où $q = \pm 1$ et $pgcd(b, c) = 1$. Soit q un diviseur de a et c. L'équation (4.5) entraîne que q divise b. D'où q divise $pgcd(a, b) = 1$ et par suite $q = 1$ et $pgcd(a, c) = 1$. On procède de même pour l'équation (4.4).

Démonstration du lemme 1. Première étape : Montrons que si p est un nombre premier supérieur ou égal à 3, alors x, y, z ne peuvent pas être tous les trois multiples de p.
En effet, l'entier p divise $4xyz$ car :

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow p(yz + xz + xy) = 4xyz.$$

Comme p est un nombre premier ≥ 3, il est premier avec 4. Il divise donc xyz. Ainsi soit un seul est multiple de p, par exemple x, soit deux sont multiples de p, par exemple y et z, soit les trois sont multiples de p.
Si les trois sont multiples de p, il existe $k_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1, 2, 3$ tels que $(x, y, z) = (k_1 p, k_2 p, k_3 p)$. On a :

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}.$$

Or le second membre est inférieur ou égal à 3, ce qui aboutit à une contradiction.
Donc soit un seul est multiple de p, par exemple x, soit deux sont multiples de p, par exemple y et z. Cela donne alors :

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{px'} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \ yz \not\equiv 0[p] \tag{4.6}$$

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{py'} + \frac{1}{pz'}, \ x \not\equiv 0[p] \tag{4.7}$$

Deuxième étape : Montrons que (4.6) et (4.7) sont équivalentes respectivement à (4.4) et (4.5). Démontrons le sens direct : (4.7) implique (4.5). Soit $pgcd(y', z') = \delta$. Il existe alors un entier non nul b tel que $y' = \delta b$ et un entier non nul c tel que $z' = \delta c$ avec $pgcd(b, c) = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{py'} + \frac{1}{pz'} \quad &\Leftrightarrow \quad 4xy'z' = py'z' + xz' + xy' \\
&\Leftrightarrow \quad 4x\delta b\delta c = p\delta b\delta c + x\delta c + x\delta b \\
&\Leftrightarrow \quad 4x\delta bc = p\delta bc + x(c + b).
\end{aligned}$$

D'après cette dernière égalité, bc divise $x(c + b)$. Comme[3] $pcgd(b, c) = 1 = pgcd(b + c, bc)$, d'après le théorème de Gauss, l'entier bc divise x. Donc il existe un entier non nul d tel que $x = bcd$. On a alors

$$4bcd\delta bc = p\delta bc + bcd(c + b) \Leftrightarrow 4d\delta bc = p\delta + d(c + b).$$

2. Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif. Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

3. Soit d un diviseur premier de $b + c$ et de bc. On a d divise $c(b + c) - bc$, c'est-à-dire d divise c^2. Comme d est premier, d divise c. On a alors d divise $b + c$ et d divise c, d'où d divise b. Comme $pgcd(b, c) = 1$, $d = \pm 1$. Donc $pgcd(b + c, bc) = 1$.

De cette égalité, on obtient que d divise $p\delta$. Par hypothèse, p ne divise pas x donc p ne divise pas bcd. D'où p ne divise pas d et donc $pgcd(p, d) = 1$. D'après le théorème de Gauss, l'entier d divise δ. Donc il existe un entier non nul a tel que $\delta = da$. On obtient alors $4abcd = pa+b+c$. Reste à montrer que $bc \not\equiv 0[p]$. Or, p ne divise pas bcd donc p ne divise pas bc.

Réciproquement, si on a $4abcd = pa + b + c$, avec $x = bcd$, $y' = abd$ et $z' = acd$, on obtient :

$$\begin{aligned} pa + b + c = 4abcd &\Leftrightarrow paabcdd + babcdd + cabcdd = 4abcdabcdd \\ &\Leftrightarrow py'z' + xy' + xz' = 4xy'z' \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{py'} + \frac{1}{pz'} \end{aligned}$$

avec p qui ne divise pas x d'après la première étape. On démontre de la même façon que (4.4) est équivalente à (4.6). □

Démonstration du théorème de Rosati-Yamamoto. On va montrer que l'équation (4.5) est équivalente à (4.2). Grâce au lemme 1, le théorème sera démontré. D'après l'égalité (4.5), on a $b + c$ divisible par a. Donc il existe un entier non nul s tel que $b + c = as$. L'égalité (4.5) devient donc $pa + as \equiv 0[4abc]$. D'où $p \equiv -s[4bc]$. Reste à montrer que $pgcd(4bc, s) = 1$. Soit d un diviseur positif de $4bc$. Si d divise s alors d divise p. Comme p est premier, $d = p$ ou $d = 1$. Si $d = p$ alors p divise $4bc$. Comme p est premier différent de 2, $pgcd(p, 4) = 1$. D'après le théorème de Gauss, p divise bc. Or, par hypothèse, $bc \not\equiv 0[p]$. Donc $d = 1$. Réciproquement, si s divise $a+b$, il existe un entier relatif d tel que $a+b = ds$. On a donc $pd \equiv -(a+b)[4abd]$, c'est-à-dire $pd + a + b \equiv 0[4abd]$. Reste à montrer que $ab \not\equiv 0[p]$. Si p divise ab, comme $p \equiv -s[4ab]$, on a p divise s. Or, si p est un diviseur commun à ab et s, on a $pgcd(4ab, s) \neq 1$, ce qui contredit les hypothèses. Donc p ne divise pas ab. On montre de même que l'équation (4.4) est équivalente à (4.3). □

Théorème de Yamamoto. *Soient trois entiers naturels non nuls a, b, s tels que s divise $a + b$ et $pgcd(4ab, s) = 1$. Les équations*

$$p^2 \equiv -s[4ab] \tag{4.8}$$
$$p^2 \equiv -1[4ab] \tag{4.9}$$

n'ont pas de solutions entières positives.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le symbole de Legendre et ses généralisations, les symboles de Jacobi et de Kronecker.

Définition 1 (Symbole de Legendre)**.** *Soit p un nombre premier impair. On dit que $n \in \mathbb{Z}$ est un résidu quadratique modulo p s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv m^2[p]$. On définit alors le symbole de Legendre $\left(\frac{n}{p}\right)$ entre n et p comme suit :*

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 0 & si\ p \mid n, \\ 1 & si\ p \text{ est premier avec } n \text{ et si } n \text{ est résidu quadratique modulo } p, \\ -1 & si\ p \text{ est premier avec } n \text{ et si } n \text{ est non résidu quadratique modulo } p. \end{cases}$$

Définition 2 (Symbole de Jacobi)**.** *On généralise le symbole de Legendre en admettant les « dénominateurs impairs non premiers ». C'est ce qu'on appelle le symbole de Jacobi : pour $a, b \in \mathbb{Z}$, avec b impair se factorisant sous la forme $b = p_1^{e_1}...p_r^{e_r}$, on définit le symbole de Jacobi $\left(\frac{a}{b}\right)$ par :*

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1} ... \left(\frac{a}{p_r}\right)^{e_r}.$$

Remarques :

1. $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ si $pgcd(a, b) \neq 1$.
2. $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \equiv k^2[b]$.

Le symbole de Jacobi satisfait les propriétés suivantes[4] :

1. Pour tous $a, a' \in \mathbb{Z}$, on a :
$$\left(\frac{aa'}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a'}{b}\right) \text{ et } \left(\frac{a^2a'}{b}\right) = \left(\frac{a'}{b}\right)$$
où pour la deuxième égalité, il faut supposer de plus que a est premier à b.
2. Si $a \equiv a'[b]$,
$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a'}{b}\right).$$
3. Pour tout b impair :
$$\left(\frac{-1}{b}\right) = (-1)^{\frac{b-1}{2}} \text{ autrement dit } \left[\left(\frac{-1}{b}\right) = 1 \Leftrightarrow b \equiv 1[4]\right].$$
4. Pour tout b impair :
$$\left(\frac{2}{b}\right) = (-1)^{\frac{b^2-1}{8}} \text{ autrement dit } \left[\left(\frac{2}{b}\right) = 1 \Leftrightarrow b \equiv \pm 1[8]\right].$$
5. Loi de réciprocité quadratique :
$$\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^{\frac{(a-1)(b-1)}{4}}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Définition 3 (Symbole de Kronecker)**.** *On généralise le symbole de Jacobi en admettant les « dénominateurs pairs ». Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, avec b se factorisant en facteurs premiers sous la forme $b = up_1^{e_1}...p_r^{e_r}$ où $u = \pm 1$, le symbole de Kronecker $\left(\frac{a}{b}\right)$ est défini par : :*
$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{u}\right)\left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1}...\left(\frac{a}{p_r}\right)^{e_r},$$
avec
$$\left(\frac{a}{u}\right) = \begin{cases} 1 & si\ u = 1, \\ -1 & si\ u = -1 \quad et\ a < 0, \\ 1 & si\ u = -1 \quad et\ a \geq 0. \end{cases}$$
et

- *si p_i est impair, alors $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ est le symbol de Legendre ;*
- *si $p_i = 2$, alors*
$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} 0 & si\ a\ est\ pair, \\ 1 & si\ a \equiv \pm 1[8], \\ -1 & si\ a \equiv \pm 3[8]. \end{cases}$$

4. Pour les démonstrations, se référer à (Demazure, 1997).

Le symbole de Kronecker satisfait les propriétés suivantes [5] :

1. Si $a_1 \equiv a_2[b]$ alors $\left(\frac{a_1}{b}\right) = \left(\frac{a_2}{b}\right)$ pour b impair ou pour b multiple de 8.
2. Pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}^*$, on a :
$$\left(\frac{a_1 a_2}{b}\right) = \left(\frac{a_1}{b}\right)\left(\frac{a_2}{b}\right).$$
3. Pour tous $b_1, b_2 \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\left(\frac{a}{b_1 b_2}\right) = \left(\frac{a}{b_1}\right)\left(\frac{a}{b_2}\right).$$
4. Lois de réciprocité quadratique :
$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$ si a est un entier positif et $a \equiv 1[4]$;
$\left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$ si a est un entier positif et $a \equiv -1[4]$.

Avant de démontrer le théorème, faisons trois remarques :

Remarque 1. *Si $a = b = s = 1$ dans (4.2), le théorème de Rosati-Yamamoto assure des solutions à l'équation (4.1) pour les nombres premiers de la forme $4m-1$. Restreignons donc le problème aux p premiers de la forme $4m+1$.*

Remarque 2. *Si $p = 4m+1$ alors $s \equiv -1[4]$. En effet, (4.2) entraîne que $p \equiv -s[4]$. On a donc $p \equiv 1[4]$ et $p \equiv -s[4]$ donc $s \equiv -1[4]$. De même, (4.3) entraîne que $s \equiv -1[4]$.*

Remarque 3. *Soit p un nombre premier impair. Si $n \in \mathbb{Q}, n = \frac{b}{a}$ avec $pgcd(a,b) = 1$. On dit que n est un résidu quadratique modulo p s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m^2 \equiv n[p]$ i.e $am^2 \equiv b[p]$. Les symboles de Jacobi et de Kronecker peuvent alors être étendus aux rationnels $n = \frac{b}{a}$ avec $pgcd(p,ab) = pgcd(a,b) = 1$ par*
$$\left(\frac{b/a}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

Démonstration du théorème de Yamamoto. Au vu des remarques, nous démontrons ce théorème pour $p \equiv 1[4]$ et $s \equiv -1[4]$. Pour montrer que les équations (4.8) et (4.9) n'ont pas de solution, il faut montrer que $\left(\frac{-s}{4ab}\right) = -1$ et $\left(\frac{\frac{-1}{s}}{4ab}\right) = -1$. En utilisant les différentes propriétés du symbole de Kronecker, on a : $\left(\frac{-s}{4ab}\right) = \left(\frac{-s}{4}\right)\left(\frac{-s}{ab}\right) = \left(\frac{-s}{ab}\right)$ car $s \equiv -1[4]$. En utilisant la loi de réciprocité quadratique et le fait que $s \equiv -1[4]$, on a $\left(\frac{-s}{ab}\right) = \left(\frac{ab}{s}\right)$. Puis $\left(\frac{ab}{s}\right) = \left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{s}\right) = \left(\frac{-a^2}{s}\right)$ car s divise $a+b$. Enfin, $\left(\frac{-a^2}{s}\right) = \left(\frac{-1}{s}\right) = -1$. D'où $\left(\frac{-s}{4ab}\right) = -1$. La démonstration est semblable pour (4.9). □

Théorème de Schinzel. *Soient a, b des entiers tels que $a > 0$ et $pgcd(a,b) = 1$. Si b est un résidu quadratique modulo a alors il n'existe pas de polynômes F_1, F_2, F_3 dans $\mathbb{Z}[X]$ avec des coefficients positifs tels que*
$$\frac{m}{ax+b} = \frac{1}{F_1(x)} + \frac{1}{F_2(x)} + \frac{1}{F_3(x)} \textit{ avec } m \equiv 0[4].$$

La preuve de ce théorème se fait grâce à un raisonnement par l'absurde. Pour cela, nous avons besoin d'un lemme et du théorème de Yamamoto.

5. Pour plus de détail, se référer à (Montgomery & Vaughan, 2006).

Lemme 2. *Si A, B, C, D sont des polynômes à coefficients entiers, pgcd$(A,B) = 1$ et $A/B = C/D$, alors $C = HA$ et $D = BH$ avec H un polynôme à coefficients entiers. De plus, si pgcd$(C,D) = 1$ alors $H = \pm 1$.*

Démonstration. Soient $A, B, C, D \in \mathbb{Q}[\mathbb{X}]$. Comme $\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$ est factoriel, l'égalité $A/B = C/D$ entraîne $AD = BC$. De plus, comme *pgcd*$(A,B) = 1$, il existe $H \in \mathbb{Q}[\mathbb{X}]$ tel que $D = HB$ et $C = HA$. Par contraposée du lemme de Gauss[6], comme $A, B, C, D \in \mathbb{Z}[\mathbb{X}]$, on a $H \in \mathbb{Z}[\mathbb{X}]$. Si, de plus *pgcd*$(C,D) = 1$ alors H divise 1. Le polynôme H est donc constant dans $\mathbb{Z}[X]$ et inversible. Donc $H = \pm 1$. □

Remarque 4. *Dans le théorème de Yamamoto, on a $s|a+b$. Donc il existe un entier non nul c tel que $a + b = cs$. Avec $a = cs - b$, les équations (4.8) et (4.9) deviennent :*

$$p^2 = 4(cs-b)br - s \tag{4.10}$$

$$p^2 s = 4(cs-b)br - 1 \tag{4.11}$$

Ces équations n'ont donc pas de solutions entières positives pour tout r entier.

Notation : Pour $P \subset \mathbb{R}[X]$, nous notons P^+ l'ensemble des polynômes dans P dont le coefficient principal est positif.

Démonstration du théorème de Schinzel. Il suffit de le montrer avec $m = 4$. On suppose qu'il existe F_1, F_2, F_3 tels que

$$\frac{4}{ax+b} = \frac{1}{F_1(x)} + \frac{1}{F_2(x)} + \frac{1}{F_3(x)}. \tag{4.12}$$

On a alors $4F_1(x)F_2(x)F_3(x) = (ax+b)\left[F_2(x)F_3(x) + F_1(x)F_2(x) + F_1(x)F_3(x)\right]$.
D'où

$$F_1\left(-\frac{b}{a}\right) F_2\left(-\frac{b}{a}\right) F_3\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

Si $F_i\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$, pour tout $i = 1,2,3$, alors il existe $G_i \in \mathbb{Q}[X]^+$ tel que $F_i(X) = (aX+b)G_i(X)$. Comme *pgcd*$(a,b) = 1$ alors par le lemme de Gauss, le polynôme $G_i \in \mathbb{Z}[X]^+$. Soit k un entier assez grand tel que $(ak+b)G_1(k)G_2(k)G_3(k) \neq 0$. On obtient une contradiction :

$$4 = \frac{1}{G_1(k)} + \frac{1}{G_2(k)} + \frac{1}{G_3(k)} \leq 3.$$

Donc, à une permutation près de F_1, F_2, F_3 on a deux cas à traiter :

$$F_1\left(-\frac{b}{a}\right) = F_2\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \text{ et } F_3\left(-\frac{b}{a}\right) \neq 0 \tag{4.13}$$

$$F_1\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \text{ et } F_2\left(-\frac{b}{a}\right) F_3\left(-\frac{b}{a}\right) \neq 0 \tag{4.14}$$

Etude du cas (4.13)[7] :

$$\begin{cases} F_i(X) = (aX+b)G_i(X) \text{ pour } i = 1,2 \text{ avec } G_i \in \mathbb{Z}[X]^+ \\ (F_3(X), aX+b) = 1 \end{cases}$$

6. Le lemme de Gauss utilisé ici est le suivant : Soient A et B deux polynômes. Si leurs coefficients sont tous rationnels, sans être tous entiers, alors leur produit AB a au moins un coefficient qui n'est pas entier.

7. L'étude du cas (4.14) se traite de la même façon.

Posons

$$\begin{cases} D = pgcd(G_1, G_2), G_i = DH_i (i = 1, 2) \\ C = pgcd(4DH_1H_2 - H_1 - H_2, DH_1H_2) = pgcd(H_1 + H_2, D) \\ D = CR \\ H_1 + H_2 = CS \end{cases}$$

avec $H_i, C, R, S \in \mathbb{Z}[X]^+$.
On a alors $G_i \in \mathbb{Z}[X]^+$; $pgcd(H_1, H_2) = 1$ et $pgcd(RH_1H_2, S) = 1$. Ce qui donne, en remplaçant dans (4.12) :

$$\frac{ax + b}{F_3} = \frac{4CRH_1H_2 - CS}{CRH_1H_2} = \frac{4RH_1H_2 - S}{RH_1H_2}.$$

Comme $pgcd(aX + b, F_3) = 1 = pgcd(4RH_1H_2, S)$ et $F_3, RH_1H_2 \in \mathbb{Z}[X]^+$, d'après le lemme 2, on a

$$aX + b = 4RH_1H_2 - S = 4(CS - H_2)H_2R - S. \tag{4.15}$$

Comme b est un résidu quadratique modulo a et C, H_2, R, S des polynômes appartenant à $\mathbb{Z}[\mathbb{X}]^+$, il existe des entiers non nuls k et p tels que $ak + b = p^2$ et des entiers positifs b^*, c, r, s tels que $b^* = H_2(k), c = C(k), r = R(k), s = S(k)$. On obtient alors, en remplaçant dans (4.15), l'égalité $p^2 = 4(cs - b^*)b^*r - s$, c'est-à-dire l'équation (4.10), ce qui contredit le théorème de Yamamoto.

Conclusion : Cette preuve est construite à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. Si on suppose qu'il existe des polynômes qui réalisent l'égalité (4.12), alors cela revient à étudier les égalités (4.10) et (4.11). Or, le théorème de Yamamoto nous permet d'établir une contradiction dans les deux cas. Donc il n'existe pas de polynôme satisfaisant l'égalité (4.12). □

Les deux résultats suivants sont des conséquences des théorèmes de Rosati-Yamamoto, de Yamamoto et de Schinzel.

Résultat 1. *L'équation* (4.1) *a des solutions polynomiales en n pour tout n non congru à* $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ *modulo* 840.

Démonstration. L'équation (4.5) peut s'écrire $na + b + c = 4abcd$. En choisissant convenablement a, b, c, d, on obtient des solutions polynomiales en n pour certaines relations de congruences sur n :

- si $a = 2, b = 1, c = 1$ alors $n = 4d - 1$.

Le cas $n \equiv 3[4]$ est donc traité. Les cas $n \equiv 0[4]$ et $n \equiv 2[4]$ sont traités car n est alors pair. Reste donc le cas $n \equiv 1[4]$.

- si $a = 1, b = 1, c = 2$ alors $n \equiv -3[8]$.

Reste donc à considérer le cas $\boldsymbol{n \equiv 1[8]}$.
Écrivons (4.5) sous la forme : $na + b = c(4abd - 1) = cq$ où $q + 1 \equiv 0[4ab]$.

- prenons $q = 3, a = b = 1$, alors $n \equiv -1[3]$.

Comme le cas $n \equiv 0[3]$ a été résolu, il reste le cas $n \equiv 1[3]$.

- prenons $q = 7$, alors ab divise 2 et avec $(a, b) = (1, 1)$, $(a, b) = (1, 2)$, $(a, b) = (2, 1)$, on obtient respectivement $n \equiv -1, -2, -4[7]$.

Comme le cas $n \equiv 0[7]$ a été résolu, il reste le cas $\boldsymbol{n \equiv 1, 2, 4[7]}$.

- prenons $q = 15$ alors ab divise 4 et avec $(a, b) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$, on obtient $n + 2 \equiv 0[15]$ et $n + 8 \equiv 0[15]$.

Si $n \equiv 1[3]$, on a alors $n \equiv 1, 4, 7, 10, 13[15]$. Comme le cas $n \equiv 0[5]$ a été résolu, les cas restant à traiter sont donc $\boldsymbol{n \equiv 1, 4[15]}$.

On a donc trouvé des solutions à l'équation (4.1) pour :

- $n \equiv 0, 2[3]$
- $n \equiv 0, 3, 5, 6[7]$
- $n \equiv 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7[8]$
- $n \equiv 0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14[15]$

Et on n'a pas de solution, pour cette méthode, pour $n \equiv 1[8], n \equiv 1, 2, 4[7]$ et $n \equiv 1, 4[15]$.

Récapitulatif :

a	b	c	d	$na + b + c = 4abcd$		x	y	z
1	1	k	1	$n \equiv 2[3]$	$n = 3k - 1$	k	$3k$-1	$k(3k - 1)$
2	1	1	k	$n \equiv 3[4]$	$n = 4k - 1$	k	$2k(4k - 1)$	$2k(4k - 1)$
2	1	$2k - 1$	1	$n \equiv 3[7]$	$n = 7k - 4$	$2k - 1$	$2(7k - 4)$	$2(2k - 1)(7k - 4)$
1	2	k	1	$n \equiv 5[7]$	$n = 7k - 2$	$2k$	$2(7k - 2)$	$k(7k - 2)$
1	1	k	2	$n \equiv 6[7]$	$n = 7k - 1$	$2k$	$2(7k - 1)$	$2k(7k - 1)$
1	1	2	k	$n \equiv 5[8]$	$n = 8k - 3$	$2k$	$k(8k - 3)$	$2k(8k - 3)$
2	1	$2k - 1$	2	$n \equiv 7[15]$	$n = 15k - 8$	$2(2k - 1)$	$4(15k - 8)$	$4(2k - 1)(15k - 8)$
1	2	k	2	$n \equiv 13[15]$	$n = 15k - 2$	$4k$	$4(15k - 2)$	$2k(15k - 2)$

Déterminons maintenant l'ensemble des nombres pour lesquels cette méthode ne permet pas de trouver des solutions. Pour cela, nous utilisons le théorème des restes chinois.

Théorème des restes chinois. *Soient $n_1, ..., n_k$ des entiers naturels deux à deux premiers entre eux. Alors pour tous entiers $a_1, ..., a_k$, il existe un unique entier x modulo $n = \prod_{i=1}^{k} n_i$ tel que*

$$\begin{cases} x \equiv a_1[n_1] \\ \quad \cdots \\ x \equiv a_k[n_k] \end{cases}$$

Il reste les congruences $n \equiv 1[8], n \equiv 1, 2, 4[7]$ et $n \equiv 1, 4[15]$, donc d'après le théorème des restes chinois, il y a 6 classes de congruences $(1 \times 3 \times 2)$ et on peut alors exhiber les nombres n modulo $840 = 8 \times 7 \times 15$ pour lesquels on ne connaît pas de solution :

$n \equiv 1[8]$ $n \equiv 1[7]$ $n \equiv 1[15]$	$n \equiv 1[840]$	$n \equiv 1[8]$ $n \equiv 2[7]$ $n \equiv 4[15]$	$n \equiv 17^2[840]$
$n \equiv 1[8]$ $n \equiv 1[7]$ $n \equiv 4[15]$	$n \equiv 13^2[840]$	$n \equiv 1[8]$ $n \equiv 4[7]$ $n \equiv 1[15]$	$n \equiv 19^2[840]$
$n \equiv 1[8]$ $n \equiv 2[7]$ $n \equiv 1[15]$	$n \equiv 11^2[840]$	$n \equiv 1[8]$ $n \equiv 4[7]$ $n \equiv 4[15]$	$n \equiv 23^2[840]$

Donc pour $n \equiv 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2[840]$, il n'y a pas de solutions déterminées par cette méthode. $\square$

Les solutions, obtenues par cette méthode, utilisent les équations du théorème de Rosati-Yamamoto. A noter que le théorème de Yamamoto (grâce à l'équation (4.10)) montre que les carrés ne peuvent pas être décomposés avec cette méthode.

Résultat 2. *Pour n congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, il n'existe pas de solutions polynomiales en n lorsque n parcourt l'une de ces progressions arithmétiques.*

Démonstration. C'est le théorème de Schinzel dans le cas particulier $m = 4, a = 840, b = 1$ (ou $11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$). □

4.2.2 Résultats algorithmiques

a. Méthode de Oblàth et Rosati

Oblàth (1950) démontre que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout $n \leq 106129$. Pour cela, il commence par réduire le problème aux nombres premiers. Ensuite, il donne des solutions polynomiales pour certaines progressions arithmétiques : $n \equiv 0[2], n \equiv 0[4], n \equiv 2[4], n \equiv 3[4], n \equiv 5[8], n \equiv 0[3], n \equiv 17[24]$. Grâce au théorème des restes chinois, il ne reste que les classes égales à 1 modulo 24 à étudier. Pour cela, il se place dans $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$. Il détermine alors d'autres solutions polynomiales en posant $x = [\frac{n}{4}]+1+k$ où $k \geq 0$. En faisant varier k, il élimine plusieurs classes et il ne reste que $n \equiv 1[120]$ et $n \equiv 49[120]$. En utilisant la même méthode, il détermine qu'il ne reste que 6 classes modulo 840 puis 42 classes modulo 9240. Pour les nombres premiers restants (appartenant aux classes restantes), il énonce trois théorèmes afin d'éliminer quelques nombres supplémentaires (par exemple, l'équation a des solutions si le nombre $n+1$ a au moins un diviseur premier de la forme $p = 4a+3$). Il ne reste alors que 6 nombres premiers (2521, 29401, 40009, 51361, 66529, 67369) qui posent problème. Pour ceux-là il énonce un dernier théorème qui permet de tous les décomposer mais avec de nombreux calculs.

Rosati (1954) reprend les travaux de Oblàth et énonce deux conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus qui généralisent les théorèmes de Oblàth. Pour $106129 \leq n \leq 141649$, il détermine des solutions en utilisant la même méthode que Oblàth, méthode d'élimination de classes de congruences. Il étudie ainsi, grâce aux conditions nécessaires et suffisantes, les classes modulo 19, 23, 31, 39, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 87, 119. Tous les nombres premiers entre 106129 et 141649 sont ainsi solutions de l'équation d'Erdös-Straus.

b. Méthode de Yamamoto

Yamamoto (1965) démontre que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour pour $n \leq 10^7$. *A priori* c'est la première vérification effectuée à l'aide d'un ordinateur. Il explique sa procédure :

1. Il restreint l'étude aux nombres congrus aux 6 classes restantes modulo 840.
2. Il ôte les carrés parfaits.
3. Il élimine d'autres progressions arithmétiques (modulo 11, 13, 19, 23 ou 47).
4. Il utilise une procédure qu'il nomme « loi de type complémentaire ».
5. Il utilise une procédure qu'il nomme « loi de type réciprocité ».

Le programme tourne pendant 122 minutes et rejette seulement deux nombres premiers : 1095481 et 7502881. Le premier est traité grâce à la « loi de type réciprocité » et le second grâce à la « loi de type complémentaire ».

c. Méthode de Swett

Sur sa page Internet(Swett, 1999), Allan Swett explique comment il a vérifié l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour $n < 10^{14}$. Il précise que le résultat est connu et publié pour $n < 10^8$ et que cette page et ses liens démontrent les progrès effectués depuis. Nous allons retracer les résultats qui justifient son algorithme en langage C++.

Définition 4. *Pour $n > 0$, on définit $S(n)$ l'ensemble des entiers $A \in \{0, 1, 2, ..., 4n-2\}$ tels que : $AW + X \equiv 0[4n-1]$ pour des diviseurs entiers positifs X, W de n.*

Définition 5. *$E(n)$ est l'ensemble des entiers positifs congrus modulo $4n-1$ à un élément de $S(n)$.*

Exemple : $S(9)$ est l'ensemble des entiers $A \in \{0, 1, 2, ..., 34\}$ tels que : $AW + X \equiv 0[35]$ pour des diviseurs entiers positifs X, W de 9. Les diviseurs entiers positifs de 9 sont 1, 3 et 9. Les couples (X, W) sont donc les suivants : (1,1), (1,3), (1,9), (3,1), (3,3), (3,9), (9,1), (9,3), (9,9). Ainsi A appartient à $S(9)$ si et seulement si l'une des congruences suivantes est vraie : $A + 1 \equiv 0[35], A + 3 \equiv 0[35]$, $A + 9 \equiv 0[35]$, $3A + 1 \equiv 0[35]$, $3A + 3 \equiv 0[35]$, $3A + 9 \equiv 0[35]$, $9A + 1 \equiv 0[35]$, $9A + 3 \equiv 0[35]$, $9A + 9 \equiv 0[35]$. D'où $S(9) = \{23, 26, 31, 32, 34\}$.
$E(9)$ est l'ensemble des entiers positifs congrus, modulo 35, à un élément de $S(9)$. L'entier a appartient à $E(9)$ si et seulement si l'une des congruences suivantes est vraie : $a \equiv 23[35], a \equiv 26[35], a \equiv 31[35], a \equiv 32[35], a \equiv 34[35]$.

Lemme 3. *S'il existe k et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \in E(n)$ alors l'équation $\frac{4}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ admet des solutions.*

Ce lemme découle d'un théorème plus général :

Théorème de Swett. *Soit K un entier naturel non nul et A un entier appartenant à $E(P)$ avec $P = 4K - 1$. Soient W et X des diviseurs positifs de K tels que $WA + X \equiv 0[P]$. On a alors :*

$$\frac{4}{(Px + A)} = \frac{1}{F_1(x)} + \frac{1}{F_2(x)} + \frac{1}{F_3(x)}$$

où les polynômes $F_i, i = 1, 2, 3$, sont à coefficients entiers.
De plus, si A est strictement positif, alors il existe f_1, f_2, f_3 trois polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ dont les coefficients dominants sont strictement positifs tels que $\frac{4}{(Px+A)} = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)} + \frac{1}{f_3(x)}$ et $f_1(0), f_2(0), f_3(0)$ sont des entiers naturels non nuls.

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité [8], que $pgcd(W, X) = 1$. Comme X et W sont des diviseurs de K et qu'ils sont premiers entre eux, il existe un entier naturel D tel que $DWX = K$. Par hypothèse $WA + X \equiv 0[P]$ donc il existe un entier relatif R tel que $WA + X = RP$. On peut remarquer que W, X et P étant strictement positifs, si A est strictement positif, alors R l'est aussi.
Posons $F_1(x) = K(Px + A), F_2(x) = DX(Wx + R)$ et $F_3(x) = DW(Px + A)(Wx + R)$. On

8. Sinon, on remplace W par W/G et X par X/G où G est le PGCD de X et W. En effet, les entiers W et X divisent K donc W/G et X/G divisent K. De plus, on sait que $G(\frac{W}{G}A + \frac{X}{G}) \equiv 0[P]$. Or G divise X et W qui divisent K. Donc G divise K. Comme $P = 4K - 1$, $pgcd(P, G) = 1$. D'où $\frac{W}{G}A + \frac{X}{G} \equiv 0[P]$.

a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_2(x)} + \frac{1}{F_3(x)} &= \frac{1}{DX(Wx+R)} + \frac{1}{DW(Px+A)(Wx+R)} \\
&= \frac{W(Px+A)+X}{DXW(Px+A)(Wx+R)} \\
&= \frac{WPx+WA+X}{K(Px+A)(Wx+R)} \\
&= \frac{WPx+PR}{K(Px+A)(Wx+R)} \\
&= \frac{P(Wx+R)}{K(Px+A)(Wx+R)} \\
&= \frac{P}{K(Px+A)} \\
&= \frac{4K-1}{(Px+A)K} \\
&= \frac{4}{Px+A} - \frac{1}{F_1(x)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{4}{Px+A} = \frac{1}{F_1(x)} + \frac{1}{F_2(x)} + \frac{1}{F_3(x)}.$$

De plus, si A est strictement positif, alors R est strictement positif donc il existe f_1, f_2, f_3 trois polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ dont les coefficients dominants sont strictement positifs tels que $\frac{4}{(Px+A)} = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)} + \frac{1}{f_3(x)}$. De plus, $f_1(0) = KA > 0, f_2(0) = DXR > 0, f_3(0) = DWAR > 0$ et

$$\frac{4}{A} = \frac{1}{KA} + \frac{1}{DXR} + \frac{1}{DWAR}.$$

□

Ce théorème montre que, pour tout $A > 0$, si $A \in S(K)$ (i.e $AW + X \equiv 0[P]$ où $P = 4K - 1$) alors $Px + A \in E(K)$ (car $Px + A \equiv A[P]$) et $4/(Px + A)$ se décompose en somme de trois fractions unitaires. Avec $k = Px + A$, on obtient le lemme 3.

Lemme 4. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $m < 4000$. Si $pgcd(k, m) \neq 1$ alors l'équation a des solutions pour $4/k$.*

Pour Swett, les trois résultats (Théorème de Swett, Lemme 4 et Résultat 1) fonctionnent comme des filtres. Il ajoute la propriété 1 (voir p. 75) qui permet d'ôter les carrés parfaits. Les nombres qui passent à travers le filtre sont donc des cas à examiner de plus près. Or le programme montre qu'il ne reste que 7132 cas sur 10^{14} pour lesquels l'équation d'Erdös-Straus n'a pas de solutions. Parmi ces exceptions, qui sont de la forme $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, il ne va conserver que ceux qui sont premiers (d'après la propriété 1). Cela réduit le nombre de cas à 3209, pour lesquels il utilise un algorithme « glouton » :

1. Il cherche la plus grande fraction unitaire inférieure à $\frac{4}{n}$. Il détermine ainsi la valeur de x. (à savoir $x = \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$).
2. Il effectue alors $\frac{4}{n} - \frac{1}{x}$. Il est ainsi ramené à décomposer une fraction $\frac{a}{b}$ en somme de deux fractions unitaires.

Pour cela, il utilise le lemme suivant :

Lemme 5. *Soient* $n, d \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $pgcd(n,d) = 1$*. Alors* $\frac{n}{d}$ *est une somme de deux fractions unitaires si et seulement si il existe* a *et* b *entiers naturels non nuls, diviseurs de* d *tels que* $a+b$ *soit divisible par* n*.*

Démonstration. S'il existe deux entiers naturels non nuls a et b diviseurs de d tels que $a+b$ soit divisible par n alors il existe k, l, m des entiers non nuls tels que $d = ka$, $d = lb$ et $a + b = mn$. On a alors

$$\frac{n}{d} = \frac{a+b}{md} = \frac{\frac{d}{k} + \frac{d}{l}}{md} = \frac{dl + dk}{klmd} = \frac{l+k}{klm} = \frac{1}{km} + \frac{1}{lm}.$$

Réciproquement, posons $z = pgcd(x,y)$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $x = za$ et $y = zb$ avec $pgcd(a,b) = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{n}{d} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{n}{d} = \frac{x+y}{xy} \\ & \Leftrightarrow \quad nxy = d(x+y) \\ & \Leftrightarrow \quad nzazb = d(zb + za) \\ & \Leftrightarrow \quad nzab = d(a+b). \end{aligned}$$

Comme a divise db et comme $pgcd(a,b) = 1$, on a a divise d. De même b divise d. Il existe alors un entier non nul e tel que $d = abe$.

$$\begin{aligned} nzab = d(a+b) \quad & \Leftrightarrow \quad nzab = abe(b+a) \\ & \Leftrightarrow \quad nz = e(b+a). \end{aligned}$$

Comme e divise d et $pgcd(n,d) = 1$, $pgcd(e,n) = 1$, or n divise $e(b+a)$, donc d'après le théorème de Gauss, l'entier n divise $a+b$. ☐

En appliquant ce programme aux cas restants, il résout l'équation pour $n < 10^{14}$.

4.3 Recherches récentes

Dans cette partie nous présentons deux recherches récentes sur la conjecture d'Erdös-Straus : celle de Louis Thépault, un amateur de résolution d'énigmes et problèmes mathématiques et celle de Michel Mizony, un enseignant-chercheur de mathématiques. Le choix de présenter ces travaux s'est effectué en lien avec notre problématique. En effet, nous avons pu suivre ces deux recherches et recueillir de précieux éléments pour notre étude épistémologique sur les processus de recherche de chercheurs engagés dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus (cf. chapitre 5).

4.3.1 Recherche de Thépault

La démarche de recherche de résolution de la conjecture d'Erdös-Straus de Thépault a été la suivante :

1. Restriction de n entier naturel à n nombre premier. Soient n un nombre premier et k un nombre entier. Alors $n = 4k+1$ ou $n = 4k+3$.

2. Pour $n = 4k + 3$, il a regardé s'il pouvait se servir d'une valeur auxiliaire de z lui permettant de déterminer, dans tous les cas, x et y en fonction de n et z. Il a ainsi démontré que pour n premier de la forme $4k+3$ la conjecture d'Erdös-Straus est vérifiée. Nous détaillons la démonstration ci-dessous dans le paragraphe a.
3. Pour $n = 4k + 1$, cette méthode n'étant pas concluante, il a établi une condition suffisante de résolution de l'équation (4.1). La démonstration est explicitée dans le paragraphe b.
4. Étude de la conjecture pour des familles de nombres (paragraphe c.).

a. Étude de la conjecture pour $n = 4k + 3$.

On cherche à résoudre

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

avec n, x, y et z des entiers positifs. Après réduction au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{4z-n}{zn}. \tag{4.16}$$

Si on désigne par P le produit xy et S la somme $x + y$, on déduit de (4.16) :

$$P = \frac{Szn}{4z-n}.$$

Connaissant la somme S des deux nombres x et y et leur produit P, les entiers x et y sont les racines de l'équation du second degré en X :

$$X^2 - SX + \frac{Szn}{4z-n} = 0. \tag{4.17}$$

Une condition nécessaire pour que cette équation ait deux racines entières est que le discriminant soit un carré parfait, soit :

$$S^2 - \frac{4Szn}{4z-n} = Q^2,$$

équation qui peut encore s'écrire :

$$S^2 - \frac{4zn}{4z-n}S - Q^2 = 0, \tag{4.18}$$

nouvelle équation du second degré en S. Une condition nécessaire pour que cette équation ait deux racines entières est que le discriminant soit un carré parfait, soit :

$$\frac{4z^2n^2}{(4z-n)^2} + Q^2 = R^2. \tag{4.19}$$

Si n est de la forme $4k + 3$, en prenant $z = k + 1$, le dénominateur $4z - n$ est égal à 1 et l'équation (4.19) s'écrit :

$$R^2 - Q^2 = (R + Q)(R - Q) = 4z^2n^2.$$

Cette équation admet toujours une solution pour R et Q en se donnant $R + Q = 2z^2n^2$ et donc $R - Q = 2$. Connaissant leur somme et leur différence, on en déduit $R = z^2n^2 + 1$ et $Q = z^2n^2 - 1$. Il ne reste plus qu'à remonter le fil en rappelant que $4z - n = 1$, la racine positive de l'équation (4.18) est $S = 2zn + R = z^2n^2 + 2zn + 1 = (zn + 1)^2$ et les racines x et y de l'équation (4.17) sont $X = 1/2(S \pm Q)$, soit $x = zn(zn + 1)$ et $y = zn + 1$. Ainsi, si $n = 4k + 3$ alors les solutions de l'équation (4.1) sont données par $x = zn(zn + 1) = (4k + 3)(k + 1)((4k + 3)(k + 1) + 1)$, $y = (4k + 3)(k + 1) + 1$ et $z = k + 1$.

b. Étude de la conjecture pour $n = 4k + 1$.

Si n est de la forme $4k+1$, en prenant $z = k$, le dénominateur $4zn - n$ devient égal à -1 et on peut obtenir les valeurs R et Q proches de celles indiquées ci-dessus, sauf que dans ce cas, le produit des racines de l'équation (4.17) est négatif et donc aussi l'un des deux nombres x et y. Pour $n = 4k+1$, il a établi une condition suffisante de résolution de l'équation (4.1) :

Théorème de Thépault 1. *Soit n un nombre premier congru à 1 modulo 4. S'il existe a, b, deux entiers non nuls tels que b divise a^2 et $4a - 1$ divise $bn + a$, alors on a la décomposition $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ où x, y, z sont des entiers non nuls.*

Démonstration. On prend x sous la forme $x = an$ avec a un entier positif. On est alors ramené à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{4}{n} - \frac{1}{an} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

avec n, a, y, z des entiers positifs. Cette équation peut encore s'écrire :

$$\frac{4a-1}{an} = \frac{y+z}{yz}$$

c'est-à-dire :

$$yz = \frac{an(y+z)}{4a-1}. \tag{4.20}$$

Or, $4a - 1$ ne divise[9] ni a ni n, pour avoir yz entier, il suffit que $4a - 1$ divise $y + z$. Ainsi il existe un entier positif l tel que $y + z = l(4a - 1)$. D'après (4.20), on déduit $yz = anl$. Connaissant la somme S des deux nombres y et z et leur produit P, y et z sont les racines de l'équation du second degré en X :

$$X^2 - l(4a-1)X + anl = 0. \tag{4.21}$$

Une condition nécessaire pour que cette équation ait deux racines entières est que le discriminant soit un carré parfait, soit :

$$l^2(4a-1)^2 - 4anl - Q^2 = 0. \tag{4.22}$$

avec Q un entier positif. Une condition nécessaire pour que cette équation en l ait deux racines entières est que le discriminant (réduit) soit un carré parfait, soit :

$$4a^2n^2 + (4a-1)^2Q^2 = R^2 \tag{4.23}$$

avec R un entier non nul. Cette équation peut encore s'écrire :

$$4a^2n^2 = R^2 - (4a-1)^2Q^2 = (R + (4a-1)Q)(R - (4a-1)Q). \tag{4.24}$$

Écrivons l'équation (4.24) sous cette forme :

$$4a^2n^2 = AB,$$

avec $A = R + (4a-1)Q$ et $B = R - (4a-1)Q$.

9. Si $4a - 1$ divise n, l'entier n étant premier, on a $4a - 1 = 1$ ou $4a - 1 = n$. Si $4a - 1 = 1$ alors $a = 1/2$. Si $4a - 1 = n$ alors $a = k + 1/2$ car $n = 4k + 1$. Comme a est un entier, on obtient deux contradictions. Donc $4a - 1$ ne divise pas n.

Le membre de gauche étant pair, les deux facteurs du membre de droite peuvent être pairs tous les deux. Il existe alors deux entiers non nuls A', B' tels que $A = 2A'$ et $B = 2B'$. L'équation (4.24) devient donc

$$a^2n^2 = A'B'. \tag{4.25}$$

Comme n est premier, soit n^2 divise A' (ou n^2 divise B'), soit n divise A' et B'. Étudions le cas où n^2 divise A'.

Si n^2 divise A', il existe un entier non nul b tel que $A' = bn^2$. L'équation (4.25) devient donc

$$a^2 = bB'.$$

On a alors $A = 2A' = 2bn^2$ et $B = 2B' = \frac{2a^2}{b}$. c'est-à-dire,

$$R + (4a-1)Q = 2bn^2,$$
$$R - (4a-1)Q = \frac{2a^2}{b}.$$

Les solutions de ce système sont :

$$R = bn^2 + \frac{a^2}{b},$$
$$Q = \frac{b^2n^2 - a^2}{b(4a-1)}.$$

Ainsi la racine positive de l'équation (4.22) est

$$l = \frac{2an + R}{(4a-1)^2} = \frac{2abn + b^2n^2 + a^2}{b(4a-1)^2} = \frac{(a+bn)^2}{b(4a-1)^2}.$$

Les racines de l'équation (4.21) sont données par l'expression :

$$2X = l(4a-1) \pm Q = \frac{(a+bn)^2 \pm (b^2n^2 - a^2)}{b(4a-1)},$$

ce qui nous donne :

$$y = \frac{b^2n^2 + abn}{b(4a-1)} = \frac{n(a+bn)}{4a-1},$$
$$z = \frac{a^2 + abn}{b(4a-1)} = \frac{a(a+bn)}{b(4a-1)}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{an} + \frac{4a-1}{n(a+bn)} + \frac{b(4a-1)}{a(a+bn)}.$$

Cette décomposition est une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires si b divise a^2 et si $4a-1$ divise $a+bn$. En effet, si $4a-1$ divise $a+bn$ alors y est un entier. Pour montrer que z est un entier, comme $4a-1$ divise $a(a+bn)$ et b divise $a(a+bn)$, il suffit de montrer que $pgcd(4a-1, b) = 1$. Soit q un diviseur commun de $4a-1$ et b. On a q divise $a+bn$ et par suite q divise a. Or si q divise a et $4a-1$ alors $q = 1$.

Les conditions b divise a^2 et $4a-1$ divise $a+bn$ sont donc des conditions suffisantes d'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus.

Remarque : Au cours de cette recherche, Thépault a fait quatre choix afin d'obtenir ces conditions suffisantes d'existence de solutions. Le premier choix est de poser $x = an$. Notons que ce choix est nécessaire d'après la première étape du lemme 1. Le second choix est $4a-1$ divise $y+z$ dans l'équation (4.20) afin d'avoir yz entier. Le troisième choix est de prendre A et B pairs pour obtenir l'équation (4.25). Le quatrième choix est d'étudier le cas où n^2 divise A' dans (4.25).

□

c. Étude de la conjecture pour des familles de nombres

Lors de sa recherche en 1979, Thépault a démontré le résultat suivant : l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tous les nombres impairs à l'exception de ceux de la forme $n = 60k + 1$ et $n = 60k + 49$.

Démonstration. La preuve de ce résultat repose sur l'étude de cas particuliers du théorème de Thépault 1.
Étude du cas $a = 1$. Les conditions se traduisent par $b = 1$ et $(n + 1)$ divisible par 3. Ainsi pour tous les nombres de la forme $4k+1$, suivis d'un multiple de 3 (exemples 5, 17, 29, etc.) l'équation d'Erdös-Straus a des solutions. Associé au résultat de l'étude des nombres de la forme $4k+3$, la conjecture est vérifiée pour les nombres de la forme : $12k+3, 12k+5, 12k+7$ et $12k+11$. Reste donc à étudier la conjecture pour les nombres premiers de la forme $12k+1$ et si on étend cette condition aux nombres de la forme $60k + q$, c'est-à-dire aux nombres de la forme $60k + 1, 60k + 13, 60k + 37$ et $60k + 49$.
Étude du cas $a = 4$. Les conditions donnent $4a - 1 = 15$ et cinq valeurs de b possibles : 1, 2, 4, 8 ou 16. Les valeurs de b égales à 1, 4 et 16 n'apportent pas de nouvelles décompositions (traitées par le cas $a = 1$). Pour $b = 2$, on a $4+2n$ divisible par 15, c'est-à-dire $2+n$ divisible par 15 ; soit n de la forme $15k + 13$. Les nombres de la forme $60k + 13$ sont donc traités. Pour $b = 8$, on a $4+8n$ divisible par 15, c'est-à-dire $8+n$ divisible par 15 ; soit n de la forme $15k + 7$. Les nombres de la forme $15k + 37$ et donc de la forme $60k + 37$ sont traités. □

A la suite d'un courrier que nous lui avons envoyé afin de prendre contact avec lui, Thépault a repris ses recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus. Après avoir redémontré les résultats qu'il avait établis en 1979, il a continué ses investigations. Il nous a livré deux résultats supplémentaires. Le premier est le résultat 1 bien connu de la littérature, à savoir que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n qui n'est pas de la forme $n = 840k + q$ avec $q = 1, 121, 169, 289, 361, 529$. En voici sa démonstration :

Démonstration. D'après le résultat précédent, les valeurs de n de la forme $420k + q$ pour lesquelles l'équation n'a pas de solutions sont : $420k+1, 420k+61, 420k+121, 420k+181, 420k+241, 420k + 361, 420k + 109, 420k + 169, 420k + 229, 420k + 289, 420k + 349, 420k + 409$.

Première étape : étude du cas $a = 2$. Les conditions donnent trois valeurs de b possibles : 1, 2 ou 4. Pour $b = 1$, on a $2 + n$ multiple de 7, l'équation a des solutions pour les nombres de la forme $n = 420k + 61$ et $n = 420k + 229$. Pour $b = 2$, on a $1 + n$ multiple de 7, l'équation a des solutions pour les nombres de la forme $n = 420k + 181$ et $n = 420k + 349$. Pour $b = 4$, on a $4 + n$ multiple de 7, l'équation a des solutions pour les nombres de la forme $n = 420k + 241$ et $n = 420k + 409$. Il reste donc à démontrer l'existence de solutions pour les nombres de la forme $n = 420k + q$ avec $q = 1, 121, 361, 109, 169, 289$.

Remarque : le cas particulier $b = a$ entraîne $a + an$ doit être un multiple de $4a - 1$, soit $1 + n$ multiple de $4a - 1$. Ainsi, si n est suivi d'un multiple d'un nombre de la forme $4k - 1$ alors n est solution de l'équation d'Erdös-Straus.

Exemple : pour $n = 421$, on a $422 = 2 \times 211$ avec $211 = 53 \times 4 - 1$. En posant $a = b = 53$, le théorème de Thépault 1 donne la décomposition suivante : $\frac{4}{421} = \frac{1}{22313} + \frac{1}{44626} + \frac{1}{106}$.

Deuxième étape : étude selon la parité de k. Si k est pair et égal à $2k'$, l'équation n'a pas de solutions pour n de la forme $840k' + q$ avec $q = 1, 121, 361, 109, 169, 289$. Le nombre $840k' + 109$ est suivi de $840k' + 110 = 10(84k' + 11)$ où $84k' + 11$ est de la forme $4a - 1$. Par la remarque précédente, on peut donc enlever le cas $q = 109$ de la liste ci-dessus. Si k est impair et égal à $2k' + 1$, l'équation n'a pas de solutions pour n de la forme $840k' + q$ avec $q = 421, 541, 781, 529, 589, 709$. Les nombres $840k' + 589$ et $840k' + 709$ sont suivis respectivement des nombres $10(84k' + 59)$ et $10(84k' + 71)$. Les seconds facteurs étant de la forme $4a - 1$, les cas $q = 589$ et $q = 709$ peuvent être retirés de la liste ci-dessus. Enfin, les nombres $840k' + 421, 840k' + 541$ et $840k' + 781$ sont respectivement suivis des nombres $2(420k' + 211), 2(420k' + 271)$ et $2(420k' + 391)$. Les seconds facteurs étant tous de la forme $4a - 1$, on peut éliminer de la liste les cas $q = 421, 541, 781$. Ainsi il reste à démontrer l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour les nombres de la forme $n = 840k + q$ avec $q = 1, 121, 361, 169, 289, 529$. □

Le second résultat établi par Thépault lors de ses recherches récentes est la vérification de l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour $n < 10000$ à l'aide d'un tableur.

Démonstration. Première étape : détermination de nouvelles familles de nombres pour laquelle l'équation a des solutions.

Pour $a = 12$, on démontre qu'il existe des solutions pour tout n de la forme $47k + q$ avec $q = 11, 15, 22, 23, 30, 31, 35, 39, 41, 43, 44, 45, 46$.

Pour $a = 8$, on démontre qu'il existe des solutions pour tout n de la forme $31k + q$ avec $q = 15, 23, 27, 29, 30$.

Pour $a = 6$, on démontre qu'il existe des solutions pour tout n de la forme $23k + q$ avec $q = 7, 10, 11, 15, 17, 19, 20, 21, 22$.

Pour $a = 5$, on démontre qu'il existe des solutions pour tout n de la forme $19k + q$ avec $q = 14, 15, 18$.

Pour $a = 3$, on démontre qu'il existe des solutions pour tout n de la forme $11k + q$ avec $q = 7, 8, 10$.

Deuxième étape : test des nombres inférieurs à 10000. On teste tous les nombres congrus à $1, 121, 169, 289, 361, 529$ modulo 840 et inférieurs à 10 000, à l'aide d'un tableur. Le premier test est d'éliminer ceux qui sont des carrés parfaits (par exemple $841 = 29^2$). Le second test élimine ceux qui appartiennent aux familles déterminées ci-dessus par les valeurs successives de a. Par exemple, 1009 est éliminé par le cas $a = 6$ et 2521 par le cas $a = 12$. A l'issue de ces deux tests, il ne reste qu'à démontrer l'existence d'une décomposition pour $n = 3361$, résultat obtenu pour $a = 25$. □

4.3.2 Recherche de Mizony

Mizony a étudié deux formes de la conjecture d'Erdös-Straus, la conjecture forte et la conjecture faible, correspondant respectivement aux équations (4.6) et (4.7).

Conjecture forte. *Pour tout n supérieur ou égal à 2, il existe x, y et z tels que* $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{ny} + \frac{1}{nz}$.

Conjecture faible. *Pour tout n supérieur ou égal à 2, il existe x, y et z tels que* $\frac{4}{n} = \frac{1}{nx} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Dans le paragraphe a., nous présentons son étude de la conjecture forte. Dans le paragraphe b., nous détaillons celle de la conjecture faible à laquelle nous avons également contribuée. Le paragraphe c. est consacré à la présentation de ses résultats algorithmiques et les paragraphes d. et e. exposent d'autres études qu'ils a menées sur la conjecture d'Erdös-Straus avec des collègues.

a. Étude de l'identité forte

Théorème de Mizony 1. *Soit n un nombre entier. S'il existe m, d, deux entiers non nuls tels que d divise m^2 et $4m-1$ divise $n+4d$, alors on a la décomposition $4/n = 1/x+1/y+1/z$ où x, y, z sont des entiers non nuls.*

Ce résultat entraîne la conjecture d'Erdös-Straus grâce à l'identité et aux lemmes suivants :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)nm}. \tag{4.26}$$

Lemme 6. *Si $4m-1$ divise $mn+d$ et si d divise m^2 alors $(mn+d)/(4m-1)$ et $((mn+d)m)/((4m-1)d)$ sont des entiers.*

Démonstration. Tout d'abord, $(mn+d)/(4m-1)$ est un entier car $4m-1$ divise $mn+d$. Examinons ensuite la seconde quantité. D'une part, l'entier d divise m^2 donc d divise m^2n. De plus, l'entier d divise md. Donc d divise $(mn+d)m$. D'autre part, l'entier $4m-1$ divise $(mn+d)m$ par hypothèse. Enfin, les deux conditions $pgcd(4m-1, m) = 1$ et d divise m^2 entraînent que $pgcd(4m-1, d) = 1$. Donc $(4m-1)d$ divise $(mn+d)m$. Ainsi $((mn+d)mn)/((4m-1)d)$ est un entier. □

Ainsi $4/n$ se décompose en somme de trois fractions égyptiennes s'il existe deux entiers non nuls m et d tels que d divise m^2 et $4m-1$ divise $mn+d$.

Lemme 7. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe deux entiers non nuls m et d tels que d divise m^2 et $4m-1$ divise $mn+d$.*
2. *Il existe deux entiers non nuls m et d tels que d divise m^2 et $4m-1$ divise $n+4d$.*

Démonstration. Elle est basée sur l'égalité suivante :

$$4\frac{mn+d}{4m-1} - n = \frac{n+4d}{4m-1}.$$

Montrons la première implication : si $4m-1$ divise $mn+d$ alors $4(mn+d)/(4m-1)-n$ est un entier. Donc $(n+4d)/(4m-1)$ est un entier et $4m-1$ divise $n+4d$.

Réciproquement, si $4m-1$ divise $n+4d$ alors $4(mn+d)/(4m-1)-n$ est un entier. Comme $pgcd(4, 4m-1) = 1$, le quotient $(mn+d)/(4m-1)$ est un entier. Donc $4m-1$ divise $mn+d$. □

Ainsi $4/n$ se décompose en somme de trois fractions égyptiennes s'il existe deux entiers m et d tels que d divise m^2 et $4m-1$ divise $n+4d$. On dit alors que $[n, m, d]$ est solution de l'équation d'Erdös-Straus.

Le premier intérêt de l'identité (4.26) est de reformuler la conjecture d'Erdös-Straus sous la forme :

Conjecture 2. *Pour tout n premier, il existe deux entiers non nuls m et d tels que d divise m^2 et $4m-1$ divise $n+4d$.*

Plus généralement, cette conjecture peut s'exprimer pour tout entier non nul n qui n'est pas un carré. Le second intérêt est d'obtenir une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes sous les seules conditions que $n+4d$ soit divisible par $4m-1$ et d diviseur de m^2. On obtient alors des algorithmes efficaces reposant sur trois progressions arithmétiques. En effet, pour chaque solution $[n, m, d]$, on obtient les trois triplets de progressions arithmétiques $[n(k), m(k), d(k)]$ (pour tout k entier) suivants :

$$[n+(4m-1)k, m, d] \tag{4.27}$$

$$[n+4\frac{(mn+d)}{(4m-1)a}k, m+\frac{m}{a}k, d+\frac{d}{a}k] \text{ où } a = pgcd(m, d, m^2/d) \tag{4.28}$$

$$[n+4\frac{m(n+4d)}{(4m-1)a}k, m+\frac{m}{a}k, d] \text{ où } a^2 \text{ est le plus grand facteur carré de } m^2/d \tag{4.29}$$

Ces trois formules sont particulièrement efficaces pour établir le résultat 3 (cf. paragraphe c. Programmation).

Vérification des formules polynomiales. On doit vérifier que si $[n, m, d]$ est solution alors les triplets (4.27), (4.28) et (4.29) sont solutions.

Pour la formule (4.27), il suffit de vérifier que $(4m-1)$ divise $n+(4m-1)k+4d$. Par hypothèse, on a $(4m-1)$ divise $(n+4d)$. Comme $(4m-1)$ divise $(4m-1)k$ pour tout k entier, on obtient bien $(4m-1)$ divise $n+(4m-1)k+4d$.

Pour la formule (4.28), vérifions d'abord que chaque terme du triplet est un entier. Par définition de a, les termes $m+\frac{m}{a}k$ et $d+\frac{d}{a}k$ sont entiers. Pour le premier terme, par hypothèse $(4m-1)$ divise $(mn+d)$ et par définition de a, on a a divise $mn+d$ et $pgcd(4m-1, a) = pgcd(a, 1) = 1$. D'où $(4m-1)a$ divise $(mn+d)$ et $n+4\frac{(mn+d)}{(4m-1)a}k$ est entier. Montrons ensuite que $d+\frac{d}{a}k$ divise $(m+\frac{m}{a}k)^2$. Écrivons $(m+\frac{m}{a}k)^2$ sous la forme $\frac{m^2}{a^2}(a+k)^2$. Par définition de a, on a a divise $\frac{m^2}{d}$. Il existe donc un entier t tel que $\frac{m^2}{d} = ta$. Ainsi $\frac{m^2}{a^2}(a+k)^2 = t\frac{d}{a}(a+k)^2$. Donc $d+\frac{d}{a}k$ divise $(m+\frac{m}{a}k)^2$. Il reste à montrer que $n+4\frac{mn+d}{(4m-1)a}k+4(d+\frac{d}{a}k)$ est divisible par $4(m+\frac{m}{a}k)-1$. En développant puis factorisant le premier terme, on obtient

$$\left(n+4\frac{mn+d}{(4m-1)a}k+4(d+\frac{d}{a}k)\right) = \left(4(m+\frac{m}{a}k)-1\right)\left(\frac{n+4d}{4m-1}\right).$$

Or par hypothèse, $(4m-1)$ divise $(n+4d)$. Donc $4(m+\frac{m}{a}k)-1$ divise $n+4\frac{mn+d}{(4m-1)a}k+4(d+\frac{d}{a}k)$.

Pour la formule (4.29), vérifions d'abord que les deux premiers termes du triplet sont entiers. Par définition de a, on a a qui divise m et donc $m+\frac{m}{a}k$ est un entier. Par hypothèse $(4m-1)$ divise $(n+4d)$ et donc divise $m(n+4d)$. Comme a divise m, il divise aussi $m(n+4d)$. Enfin, par définition de a, $pgcd(4m-1, a) = pgcd(a, 1) = 1$ donc $(4m-1)a$ divise $m(n+4d)$. D'où $n+4\frac{m(n+4d)}{(4m-1)a}k$ est un entier. Montrons ensuite que d divise $(m+\frac{m}{a}k)^2$. Exprimons $(m+\frac{m}{a}k)^2$ sous la forme $m^2(\frac{k}{a}+1)^2$. Par définition de a, on a a^2d divise m^2. Donc il existe un entier non nul t tel que $m^2 = a^2dt$. D'où $m^2(\frac{k}{a}+1)^2 = dt(k+a)^2$. Ainsi d divise $(m+\frac{m}{a}k)^2$. Il reste à montrer que $4(m+\frac{m}{a}k)-1$ divise $n+4\frac{m(n+4d)}{(4m-1)a}k+4d$. En développant puis factorisant ce dernier terme, on obtient

$$\left(n+4\frac{m(n+4d)}{(4m-1)a}k+4d\right) = \left(\frac{n+4d}{4m-1}\right)\left(4m(1+\frac{k}{a})-1\right).$$

Par hypothèse $4m-1$ divise $n+4d$ donc on a $(4m(1+\frac{k}{a})-1)$ divise $n+4\frac{m(n+4d)}{(4m-1)a}k+4d$. $\square$

Remarque : Dans un cadre plus général, en considérant la fraction h/p où h est un entier supérieur ou égal à 4 et p un entier supérieur à $h/3$, Mizony a établi une identité similaire :

$$\frac{h}{p} = \frac{1}{mp} + \frac{hm-1}{mp+d} + \frac{(hm-1)d}{(mp+d)mp}.$$

Il a également obtenu trois formules de progressions arithmétiques [10], similaires à celles pour $h = 4$.

Théorème de Mizony 2. *Soit n un entier. S'il existe trois entiers non nuls m, a et d avec d divisant m^2a et vérifiant $d < ma$ alors on a, avec $n = (4m-1)a - 4d$, la décomposition $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ où x, y, z sont des entiers non nuls.*

Ce théorème est démontré immédiatement grâce à l'identité ci-dessous, équivalente à la précédente :

$$\frac{4}{(4m-1)a-4d} = \frac{1}{m((4m-1)a-4d)} + \frac{1}{ma-d} + \frac{1}{((4m-1)a-4d)((\frac{m^2a}{d}-m)}. \quad (4.30)$$

En effet, dire que n s'écrit sous la forme $(4m-1)a-4d$ est équivalent au fait que $a = \frac{n+4d}{4m-1}$ et donc $n+4d$ est divisible par $4m-1$.

Remarque : Ce théorème est équivalent au théorème de Mizony 1 si n est premier. En effet, dans ce cas, $pgcd(d, a) = 1$ donc $d|m^2a$ est équivalent à $d|m^2$.

b. Étude de l'identité faible

Cette nouvelle identité a été obtenue par une collaboration entre trois personnes : Pierre, un informaticien, Mizony et nous.

Théorème de Gardes-Mizony. *Soit $n = 4k+1$, k un entier. S'il existe a, c, deux entiers non nuls tels que c divise $(k+a)^2$ et $pcgd(k+a, c)(4a-1)$ divise $k+a+c(4k+1)$, alors on a la décomposition $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ où x, y, z sont des entiers non nuls.*

On obtient cette décomposition grâce à l'identité et au lemme suivants :

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{k+a} + \frac{(4a-1)c}{(k+a)(k+a+c(4k+1))} + \frac{4a-1}{(4k+1)(k+a+c(4k+1))}. \quad (4.31)$$

Lemme 8. *Si $pgcd(k+a, c)(4a-1)$ divise $k+a+c(4k+1)$ et si c divise $(k+a)^2$ alors $(k+a)(k+a+c(4k+1))/((4a-1)c)$ et $(k+a+c(4k+1))/(4a-1)$ sont des entiers.*

Démonstration. Si $pgcd(k+a, c)(4a-1)$ divise $(k+a+c(4k+1))$ alors $(4a-1)$ divise $k+a+c(4k+1)$ et $(k+a+c(4k+1))/(4a-1)$ est un entier. D'après l'hypothèse $pgcd(k+a, c)(4a-1)$ divise $(k+a+c(4k+1))$, pour montrer que $(k+a)(k+a+c(4k+1))/(4a-1)c$ est un entier, il suffit de montrer que c divise $pgcd(k+a, c)(k+a)$. Comme $pgcd(k+a, c)$ divise $k+a$, cette condition se ramène à c divise $pgcd(k+a, c)^2$. Comme c divise $(k+a)^2$, $pgcd((k+a)^2, c) = c$. De plus $pgcd(k+a, c)^2 = pgcd((k+a)^2, c^2)$. Or $pgcd((k+a)^2, c)$ divise $pgcd((k+a)^2, c^2)$, c'est-à-dire c divise $pgcd(k+a, c)^2$. Donc $((k+a)(k+a+c(4k+1)))/((4a-1)c)$ est un entier. $\square$

10. Pour plus de détails, consulter (Mizony & Gardes, 2010-2012).

L'intérêt de l'identité (4.31) est de fournir de nouvelles progressions arithmétiques. Par exemple, pour chaque solution $[k, a, c]$ de l'équation (4.31), on obtient les triplets de progressions arithmétiques $[k(t), a(t), c(t)]$ (pour tout t entier) suivants :

$$[k + c(4a - 1)t, a, c] \tag{4.32}$$

$$[k + e(k + a), a, c(1 + e)] \text{ où } e(t) = (4a - 1)(k + a)t. \tag{4.33}$$

Démonstration. Vérifions que si $[k, a, c]$ est solution alors les triplets (4.32) et (4.33) sont aussi solutions. Pour (4.32), vérifions d'abord que c divise $(k + c(4a - 1)t + a)^2$. Écrivons $(k+c(4a-1)t+a)^2$ sous la forme $(k+a)^2+c(2(k+a)(4a-1)t+(4a-1)^2ct^2)$. Par hypothèse c divise $(k + a)^2$ et comme c divise $c(2(k + a)(4a - 1)t + (4a - 1)^2ct^2)$, la condition c divise $(k + c(4a - 1)t + a)^2$ est vérifiée. Pour la seconde condition, comme $pgcd(k + a, c)(4a - 1)$ divise $k+a+c(4a-1)$ par hypothèse et que $c(4a-1)t$ est divisible par $pgcd(k+a, c)(4a-1)$, on a : $pgcd(k + a, c)(4a - 1)$ divise $k + c(4a - 1)t + a + c(4k + 1)$.

Pour (4.33), vérifions d'abord que $c(1+e)$ divise $(k+e(k+a)+a)^2$. Pour cela étudions le quotient : $\frac{(k+a)^2(1+e)^2}{c(1+e)} = \frac{(k+a)^2}{c}(1+e)$. Comme c divise $(k+a)^2$ (par hypothèse), le quotient est un entier et la condition est vérifiée. Vérifions ensuite que $pgcd(k+e(k+a)+a, c(1+e))(4a-1)$ divise $k+e(k+a)+a+c(1+e)(4k+1+4e(k+a))$. On a $pgcd(k+e(k+a)+a, c(1+e))(4a-1) = pgcd(k + a, c)(1 + e)(4a - 1)$. Factorisons $k + e(k + a) + a + c(1 + e)(4k + 1 + 4e(k + a))$ par $(1 + e)$: on obtient $(1 + e)(k + a + c(4k + 1) + 4ec(k + a))$. D'une part $k + a + c(4k + 1)$ est divisible par $pgcd(k + a, c)(4a - 1)$ par hypothèse et d'autre part $4ec(k + a)$ est divisible par $pgcd(k + a, c)(4a - 1)$ car e est divisible par $(4a - 1)$ et $k + a$ par $pgcd(k + a, c)$. La condition $pgcd(k + e(k + a) + a, c(1 + e))(4a - 1)$ divise $k + e(k + a) + a + c(1 + e)(4k + 1 + 4e(k + a))$ est donc vérifiée.

□

Algorithmiquement, pour avoir une progression arithmétique efficace, on remplace e dans (4.33) par $e = \frac{(4a-1)(k+a)t}{d\delta}$ où $d = pgcd(k + a, c)$ et $\delta = pgcd(\frac{(k+a)^2}{c}, k + a)$.

c. Programmation

Résultat 3. *L'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n inférieur à 10^{17}.*

Le programme de vérification de l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour $n \leq 10^{17}$ construit et mis en œuvre par Mizony repose sur l'identité (4.26) (plus précisément sur les trois formules polynomiales qui en découlent) et s'effectue en deux étapes. La première étape consiste à diminuer le nombre de progressions arithmétiques à étudier et la seconde examine les exceptions, c'est-à-dire les nombres contenus dans les progressions arithmétiques restantes. Nous décrivons ci-dessous ces deux étapes.

Première étape : diminuer le nombre de classes à étudier. Le résultat 1 indique que seules les classes $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840 n'ont pas de solution polynomiale en n. Nous nommerons ces progressions arithmétiques, les classes restantes, c'est-à-dire les classes de nombres restants à étudier pour vérifier l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus. Ainsi dans $\mathbb{Z}/840\mathbb{Z}$, il reste 6 classes, soit environ 0.71% de classes pour lesquelles l'existence de solutions n'est pas démontrée. Afin de diminuer le nombre de classes à étudier, Mizony a utilisé plusieurs éléments :

1. Utilisation du théorème des restes chinois.

2. Utilisation de la formule polynomiale (4.27).
3. Utilisation des formules polynomiales (4.28) et (4.29) obtenues à partir de la méthodologie décrite ci-dessous :

Soient Cp les classes restantes dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ après l'utilisation du théorème des restes chinois. Soit A un diviseur de M. Considérons les éléments x de $\mathbb{Z}/A\mathbb{Z}$ susceptibles de donner naissance à une formule (4.28) ou (4.29). En d'autres termes, on considère la progression $A \times k + x$ qui permet d'obtenir une décomposition en somme de trois fractions unitaires de $\frac{4}{(A\times k+x)}$ selon les formules (4.28) ou (4.29). Pour cela il faut que :

– cette progression contienne des éléments de la forme $24u + 1$.
– cette progression $A \times k + x$ ne contienne aucun carré, c'est-à-dire que x ne soit pas un résidu quadratique dans $\mathbb{Z}/A\mathbb{Z}$.
– x soit dans Cp modulo A.

Il reste alors peu de x susceptible de fournir une formule éliminant des classes dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ d'où la rapidité de cette méthode.

Nous montrons ci-dessous le fonctionnement de cette méthode sur quelques exemples.

Soit $M = 24 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$. Soit $C7$ les classes restantes dans $\mathbb{Z}/2520\mathbb{Z}$. A partir du résultat 1 (classes modulo 840) et du théorème des restes chinois, il reste 18 classes. Ainsi $C7$ contient 18 éléments. Dans ce cas, les formules polynomiales (4.27), (4.28) et (4.29) n'éliminent pas d'éléments.

Soit $M = 24\times3\times5\times7\times11 = 27720$. Soit $C11$ les classes restantes. Dans $\mathbb{Z}/2520\mathbb{Z}$ il reste 18 classes, dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ il reste 7 classes donc d'après le théorème des restes chinois, il reste $18 \times 7 = 126$ classes dans $\mathbb{Z}/27720\mathbb{Z}$. On teste ces 126 classes avec la formule polynomiale (4.27) pour $m = 14$ et $m = 25$, il reste alors 102 éléments. Enfin, à l'aide des formules polynomiales (4.28) et (4.29) suivantes : $[396 \times k + 61, 9 \times k + 9, 81]$, $[616 \times k + 585, 770 \times k + 770, 23716 \times k + 23716]$ et $[3080 \times k + 2921, 5 \times k + 5, 25 \times k + 25]$ testées sur les 102 classes, il reste 96 éléments dans $C11$, soit environ 0.34% de classes pour lesquelles on ne trouve pas de solution à l'équation d'Erdös-Straus avec cette méthode.

Soit $M = 24 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 360360$. Soit $C13$ les classes restantes dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. A partir de $C11$ et du théorème des restes chinois, il reste 768 classes. A l'aide de la formule polynomiale (4.27) avec $m = 36, m = 114$ et $m = 322$, le nombre de classes est réduit à 635 éléments. La méthode exposée ci-dessus permet de trouver 12 formules polynomiales de type (4.28) et (4.29) qui suppriment d'autres classes. $C13$ contient alors 567 classes, soit 0.15% de classes pour lesquelles on ne trouve pas de solution à l'équation d'Erdös-Straus avec cette méthode.

Par la même méthode, $C17$ contient 4758 éléments soit 0.077% de classes restantes et $C19$ contient 42462 éléments. Il reste donc à démontrer l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour au plus 42462 éléments sur 116396280 ($= 24\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$) classes d'entiers, c'est-à-dire moins de 0.04%.

Remarque : L'utilisation de l'identité (4.31) permet de « gagner » environ 6,5% sur $C19$ qui a alors au plus 39658 éléments (environ 0.034% de classes restantes).

Deuxième étape : traitement des classes restantes. Le programme part des 42462 éléments x de $C19$ pour lesquels il n'existe pas de formule polynomiale. Il considère les entiers de la forme $n = n(k) = x + k \times 116396280$ avec $n \leq 10^{17}$ et les soumet à des filtres, pour $m \leq 3000$, construits à partir des trois formules polynomiales de progression. Le programme rejette alors les exceptions c'est-à-dire les nombres premiers $p = n(k)$ pour lesquels il n'y a pas de solutions $[p, m, d]$ avec $m \leq 3000$. Pour les 76 exceptions restantes, on cherche explicitement une décomposition en cherchant m et d avec l'identité (4.26). Le programme décompose rapidement toutes ces exceptions en trouvant les $[m, d]$ donnant la plus petite solution en m.

Tous les détails de ce programme peuvent être consultés dans (Mizony & Gardes, 2010-2012).

d. Travail avec I. Gueye

En avril 2012, à la suite de la lecture d'un article de Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus, Ibrahima Gueye[11] prend contact avec lui pour lui faire part de ses réflexions sur le problème. Ce fut le début d'un travail de collaboration sur la recherche de la conjecture. Ils ont publié deux articles (Gueye & Mizony, 2012) et (Mizony & Gueye, 2012). Nous exposons ici leurs résultats majeurs.

Théorème de Gueye-Mizony. *Soit $p \geq 2$ un entier positif. A toute décomposition $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, avec $z = x + a$, a un entier naturel, correspond le triplet pythagoricien suivant* $(4ay - pa, 2py, \sqrt{(4ay - pa)^2 + (2py)^2}$.

Démonstration. Soit $p \geq 2$ un entier positif et x, y, z trois entiers positifs non nuls et distincts tels que $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Supposons $z > x$ et posons $z = x + a$ où a est un entier positif. L'équation devient $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+a}$ puis $4xy(x+a) = p[(x+a)y + x(x+a) + xy]$. On obtient alors une équation du second degré en x :

$$x^2(4y - p) + x(4ya - 2py - pa) - pay = 0.$$

Résolvons cette équation. Le discriminant est égal à $\Delta = (4ya - 2py - pa)^2 + 4(4y - p)pay$ et les solutions sont $x = \frac{4ya-2py-pa\pm\sqrt{\Delta}}{2(p-4y)}$. Pour que x puisse être un entier, il faut que Δ soit un carré parfait. Or $\Delta = (4ay - pa)^2 + (2py)^2$. Ainsi le triplet $(4ay - pa, 2py, \sqrt{\Delta})$ est un triplet pythagoricien. Écrivons le à partir d'un triplet irréductible. Pour tout k entier non nul et α, β, γ entiers non nuls, on a :

$$\begin{aligned} 4ay - ap &= \alpha k, \\ 2py &= \beta k, \\ \sqrt{\Delta} &= \gamma k. \end{aligned}$$

En éliminant k à l'aide des deux premières équations, on obtient y :

$$y = \frac{pa\beta}{4a\beta - 2\alpha p}.$$

Puis exprimons les deux valeurs possibles de x et prenons celle qui est positive :

$$x = \frac{a(\beta - \alpha + \gamma)}{2\alpha}.$$

Enfin, $z = x + a$ s'écrit :

$$z = \frac{a(\beta + \alpha + \gamma)}{2\alpha}.$$

11. Ibrahima Gueye est sénégalais, médecin dans l'armée à Dakar, passionné de mathématiques et amateurs de résolution de problèmes.

Ainsi la décomposition de $\frac{4}{p}$ devient :

$$\frac{4}{p} = \frac{2\alpha}{(\beta - \alpha + \gamma)a} + \frac{4a\beta - 2\alpha p}{a\beta p} + \frac{2\alpha}{(\beta + \alpha + \gamma)a}. \tag{4.34}$$

Le paramètre k du triplet pythagoricien $(\alpha k, \beta k, \gamma k)$ s'exprime sous la forme $k = \frac{p^2 a}{2a\beta - \alpha p}$. En substituant dans (4.34), on obtient une autre décomposition :

$$\frac{4}{p} = \frac{2(-p^2 + 2\beta k)}{(\beta - \alpha + \gamma)kp} + \frac{2p}{\beta k} + \frac{2(-p^2 + 2\beta k)}{(\beta + \alpha + \gamma)kp}. \tag{4.35}$$

□

Remarque : Réciproquement, se pose le problème de savoir si pour tout entier $p \geq 2$, on peut trouver un triplet pythagoricien donnant lieu à la décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires. Si c'est le cas alors la conjecture d'Erdös-Straus sera démontrée.

Exemple de décomposition avec les triplets pythagoriciens : Considérons le triplet le plus simple $(3, 4, 5)$ et établissons une famille de nombres p qui admettent une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires. Nous utiliserons deux formules, l'une liée au choix $\alpha = 3$ et l'autre à $\alpha = 4$ dans l'équation (4.34). Ainsi pour $(\alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 5)$, nous avons la décomposition suivante :

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{a} + \frac{8a - 3p}{2ap} + \frac{1}{2a}. \tag{4.36}$$

Pour le triplet $(\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 5)$, nous avons la décomposition suivante :

$$\frac{4}{p} = \frac{2}{a} + \frac{4(3a - 2p)}{3ap} + \frac{2}{3a}. \tag{4.37}$$

Pour $p = 2k$, prenons la formule (4.36). Avec $a = k$, on obtient la décomposition classique $\frac{4}{2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$.
Pour $p = 3k$, prenons la formule (4.37). Avec $a = 8k$, on obtient la décomposition suivante : $\frac{4}{3k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{12k}$.
Pour $p = 5k$, prenons la formule (4.36). Avec $a = 5k$, on obtient la décomposition suivante : $\frac{4}{5k} = \frac{1}{5k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{10k}$.
De même pour $p = 7k$ et $p = 13k$, la formule (4.36) donne les décompositions suivantes : $\frac{4}{7k} = \frac{1}{21k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{42k}$ et $\frac{4}{13k} = \frac{1}{26k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{52k}$ avec respectivement $a = 21k$ et $a = 26k$.
Pour $p = 11k$ et $p = 23k$, la formule (4.37) donne les décompositions $\frac{4}{11k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{33k} + \frac{1}{12k}$ et $\frac{4}{23k} = \frac{1}{8k} + \frac{1}{138k} + \frac{1}{24k}$ avec respectivement $a = 8k$ et $a = 16k$.
En revanche, pour les multiples de 17 et de 19, il faut recourir à un second triplet $(12, 5, 13)$ pour obtenir des décompositions simples. Ainsi on trouve les décompositions suivantes : $\frac{4}{17k} = \frac{1}{34k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{170k}$ avec $a = 136k$ et $\frac{4}{19k} = \frac{1}{6k} + \frac{1}{95k} + \frac{1}{30k}$ avec $a = 24k$.

Cet exemple démontre ainsi le résultat suivant : pour tout nombre p différent de 1 ou 17 modulo 24, les triplets pythagoriciens $(3, 4, 5)$ et $(5, 12, 13)$ donnent une décomposition en trois fractions unitaires de $\frac{4}{p}$.

Définition 6 (Triplet pythagoricien irréductible d-cousins)**.** *Un triplet pythagoricien irréductible d-cousins est de la forme* $F = (n, \sqrt{d(2n + d)}, n + d)$ *avec* $d(2n + d)$ *un carré.*

Les premières valeurs de d, telles que $\sqrt{d(2n+d)} \in \mathbb{N}^*$, sont $\{1, 2, 8, 9, 12, 25, 32, ...\}$. Pour $d = 1$, les triplets 1-cousins sont donnés par la suite des triplets $F1 = \{(2n(n+1), 2n+1, 2n(n+1)+1) | n \in \mathbb{N}\}$. Exemples : (4, 3, 5), (12, 5, 13) , (24, 7, 25). Pour $d = 2$, les triplets 2-cousins sont donnés par la suite des triplets $F2 = \{(4n^2-1, 4n, 4n^2+1) | n \in \mathbb{N}\}$. Exemples : (3, 4, 5), (15, 8, 17), (35, 12, 37).

Avec le théorème précédent, Gueye et Mizony (2012) redémontrent des résultats classiques tel que le résultat 1, formulé en ces termes : pour tout nombre premier p différent de $1, 121, 169, 289, 361, 529$ modulo 840, il existe une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires dont le triplet pythagoricien associé, par l'identité (4.34), soit un 1-cousin ou un 2-cousin.

Un intérêt majeur de ce nouveau point de vue est une reformulation de la conjecture d'Erdös-Straus :

Conjecture Gueye. *Pour tout entier $p \geq 2$, il existe une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires dont le triplet pythagoricien irréductible associé est un triplet 1-cousin.*

Cette conjecture a été vérifiée algorithmiquement jusqu'à 10^{12}. Cependant les algorithmes associés à l'identité (4.36) sont lents car la variable n indexant les 1-cousins est parfois très grande. Mais cette nouvelle forme de conjecture donne une autre approche théorique du problème. En particulier, ce nouveau paramétrage via les triplets pythagoriciens ne se heurte pas au problème des carrés, soulevé par Yamamoto.

Remarque 5. *L'équation* (4.23) *de Thépault contient un triplet pythagoricien :* $(4an, (4a-1)Q, R)$.

e. Un autre regard

En avril 2012, Mizony prend connaissance d'un article (Bello-Hernández et al., 2012) étudiant la conjecture d'Erdös-Straus grâce à un polynôme à trois variables.

Théorème de Bello-Hernàndez-Benito-Fernàndez. *Soit p un nombre premier de la forme $4k+1$, k entier. S'il existe trois entiers naturels non nuls u, v, w tel que $p = 16uvw + 12uv + 12uw + 8u + 16vw + 8v + 12w + 5$ alors il existe une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires.*

La décomposition associée est la suivante :

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{(1+u)(4vw+3v+3w+2)} + \frac{1}{(4uw+3u+4w+2)(1+u)(4vw+3v+3w+2)}$$

$$+\frac{1}{(16uvw+12uv+12uw+8u+16vw+8v+12w+5)(4uw+3u+4w+2)(4vw+3v+3w+2)}.$$

Les auteurs ont vérifié que tout nombre premier de la forme $4k+1$ et plus petit que 10^{14} est une valeur de ce polynôme. Ainsi, ils conjecturent que :

Conjecture espagnole. *Pour tout entier p premier de la forme $4k+1$, k entier, il existe une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires, donnée par l'égalité ci-dessus.*

Remarque 6. *Mizony a montré que le triplet associé à cette décomposition est un triplet 1-cousin si u est impair ou un triplet 2-cousin si u est pair. A noter également que la décomposition est au sens faible, c'est-à-dire que un seul dénominateur est multiple de p.*

Avec la conjecture Gueye et cette remarque, nous pouvons énoncer une nouvelle conjecture :

Conjecture 3. *Pour tout entier $p \geq 2$ il existe une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires dont le triplet pythagoricien associé est un triplet 1-cousin ou 2-cousin.*

Remarque 7. *Mizony a également établi un polynôme à trois variables :*

$$p = 3 + 8w + 7t + 8wt + 4k + 8kw + 8kt + 8kwt$$

pour lequel on a une décomposition de $\frac{4}{p}$ en somme de trois fractions unitaires via l'égalité suivante :

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{2(1+w)(1+k)(3+8w+7t+8wt+4k+8kw+8kt+8kwt)} + \frac{1}{(1+k)(1+2w+2t+2wt)}$$

$$+\frac{1}{2(3+8w+7t+8wt+4k+8kw+8kt+8kwt)(1+w)(1+k)(1+2w+2t+2wt)}.$$

Cette décomposition est au sens fort (deux dénominateurs sont multiples de p) et elle est associée à un triplet pythagoricien 1-cousin défini par $n = t + w(1+t)$.

Cette décomposition est un cas particulier de l'identité forte générale suivante :

$$\frac{h}{hxyza - hyz^2 - a} = \frac{1}{xyz\,(hxyza - hyz^2 - a)} + \frac{1}{yz\,(xa - z)} + \frac{1}{(hxyza - hyz^2 - a)\,xy\,(xa - z)},$$

associée à l'équation diophantienne : $p = hxyza - hyz^2 - a$.

4.4 Articulation des différents résultats

Dans cette partie, nous mettons en évidence les liens entre les différents résultats connus sur la conjecture d'Erdös-Straus et présentés dans les deux parties précédentes. Dans un premier paragraphe, nous articulons les résultats relatifs à la forme forte de la conjecture. Dans un second paragraphe, nous montrons l'équivalence de deux théorèmes relatifs à la conjecture faible. Enfin, dans un troisième paragraphe, nous discutons des liens entre les différents résultats algorithmiques.

4.4.1 Sur la conjecture forte

a. Équivalence des théorèmes de Thépault et de Mizony

Avec les notations de Mizony, le théorème Thépault 1 devient le suivant :

Théorème de Thépault 2. *Soit n un nombre premier. S'il existe d, m, deux entiers non nuls tels que d divise m^2 et $4m - 1$ divise $dn + m$, alors on a la décomposition $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ où x, y, z sont des entiers non nuls.*

La décomposition associée est la suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{d(4m-1)}{m(m+dn)} + \frac{4m-1}{(dn+m)n}. \tag{4.38}$$

Propriété 2. *Si n est premier alors le théorème de Mizony 1 est équivalent au théorème de Thépault 2.*

Démonstration. Montrons que le théorème de Thépault 2 implique le théorème de Mizony 1. Supposons donc qu'il existe d, m, deux entiers non nuls tels que d divise m^2 et $4m-1$ divise $dn+m$. Posons $d_1 = m^2/d$. Ce nombre est un entier car, par hypothèse d divise m^2. De plus, la condition d_1 divise m^2 est vérifiée. Grâce à la seconde hypothèse, à savoir $4m-1$ divise $dn+m$, l'entier $4m-1$ divise $m + n\frac{m^2}{d_1}$. Par suite, il divise $md_1 + nm^2$. Comme $4m-1$ et m sont premiers entre eux, on obtient que $4m-1$ divise $d_1 + nm$. En outre, en remplaçant d par m^2/d_1 dans (4.38), on obtient

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{(4m-1)}{(d_1+mn)} + \frac{d_1(4m-1)}{(d_1+mn)nm}.$$

c'est-à-dire l'identité (4.26) de Mizony.

Réciproquement, supposons qu'il existe d_1 et m, deux entiers non nuls tels que d_1 divise m^2 et $4m-1$ divise $mn+d_1$. Posons $d = m^2/d_1$. Ce nombre est un entier car, par hypothèse d_1 divise m^2. De plus, la condition d divise m^2 est vérifiée. Grâce à la seconde hypothèse, à savoir $4m-1$ divise $mn+d_1$, l'entier $4m-1$ divise $mn + \frac{m^2}{d}$. Par suite, il divise $mnd + m^2$. Comme $4m-1$ et m sont premiers entre eux, on obtient que $4m-1$ divise $nd+m$. En outre, en remplaçant d_1 par m^2/d dans (4.26), on obtient

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{d(4m-1)}{(dn+m)m} + \frac{(4m-1)}{(dn+m)n}.$$

c'est-à-dire l'identité (4.38) de Thépault. □

b. Équivalence des théorèmes de Mizony et de Rosati-Yamamoto

Propriété 3. *Si n est premier alors le théorème de Mizony 1 est équivalent à la première assertion du théorème de Rosati-Yamamoto.*

Démonstration. Pour $n = p$ premier, le théorème de Mizony 1 est équivalent au théorème de Mizony 2. Soit $p = 4(ma-d) - a$ avec d diviseur de m^2. Il existe trois entiers non nuls x, y, z tels que $m = xyz$ et $d = yz^2$. En effet, posons $z = \frac{d}{pgcd(m,d)}$ et $y = \frac{pgcd(m,d)^2}{d}$. Par définition, z est un entier. Comme d est un diviseur de m^2, on a $d = pgcd(m^2, d)$. De plus $pgcd(m,d)^2 = pgcd(m^2, d^2)$ donc $y = \frac{pgcd(m^2,d^2)}{pgcd(m^2,d)}$. Comme $pgcd(m^2, d)$ divise $pgcd(m^2, d^2)$, y est un entier. Définissons x : comme $pgcd(m,d)$ divise m, il existe un entier non nul x tel que $m = x \times pgcd(m,d) = xyz$. On a donc $p = 4(ma-d) - a = 4yz(xa-z) - a = 4yzt - a$ avec $t = xa - z$, c'est-à-dire a divise $t + z$. On obtient donc l'équation (4.2).

Réciproquement, si $p \equiv -s[4ab]$ alors il existe un entier non nul y tel que $p = -s + 4aby$. Comme s divise $a+b$, il existe un entier non nul x tel que $a+b = xs$. D'où $p = -s+4ay(mx-a)$. En posant $m = xya$ et $d = a^2y$. On a alors d qui divise m^2 et $p = -s + 4(sm-d)$. □

c. Lien entre les théorèmes de Mizony et de Yamamoto-Schinzel

Lemme 9. *Pour tout entier non nul m et tout diviseur d de m^2 alors $-4d$ n'est pas un résidu quadratique modulo $4m-1$.*

Démonstration. Soit un entier non nul m et d un diviseur de m^2. Comme nous l'avons vu dans la démonstration précédente, il existe trois entiers non nuls x, y, z tels que $m = xyz$ et $d = yz^2$. Or d'après le théorème de Yamamoto (équation (4.8)) $-4yz^2$ n'est jamais un résidu quadratique modulo $4xyz - 1$. □

Une conséquence immédiate de ce lemme est le fait que pour tout carré n^2 il n'existe pas d'entier m et un diviseur d de m^2 tels que $[n^2, m, d]$ soit un triplet solution. On retrouve la même conséquence que le théorème de Yamamoto : les carrés ne sont pas décomposés avec l'identité (4.26) du théorème de Mizony 1.

Remarque : Que la conjecture soit vraie ou non, l'identité (4.26) donne naissance à trois formules polynomiales (les formules 1, 2 et 3) pour chaque m et pour chaque d diviseur de m^2 tels que $[p, m, d]$ soit solution, autrement dit à une infinité de formules polynomiales différentes d'après le résultat de Yamamoto-Schinzel. Ainsi, sans contredire ce résultat, on peut espérer prouver la conjecture.

4.4.2 Sur la conjecture faible

La propriété ci-dessous montre l'équivalence entre les théorèmes de Mizony-Gardes et de Rosati-Yamamoto.

Propriété 4. *Si n est premier alors le théorème de Mizony-Gardes est équivalent à la seconde assertion du théorème de Rosati-Yamamoto.*

Démonstration. Démontrons le sens direct. Comme c divise $(k+a)^2$, il existe trois entiers non nuls x, y, z tels que $c = yz^2$ et $k + a = xyz$. En effet, posons $z = \frac{c}{pgcd(k+a,c)}$ et $y = \frac{pgcd(k+a,c)^2}{c}$. Par définition, z est un entier. Comme c est un diviseur de $(k+a)^2$, on a $c = pgcd((k+a)^2, c)$. De plus $pgcd(k + a, c)^2 = pgcd((k + a)^2, c^2)$ donc $y = \frac{pgcd((k+a)^2,c^2)}{pgcd((k+a)^2,c)}$. Comme $pgcd((k + a)^2, c)$ divise $pgcd((k + a)^2, c^2)$, y est un entier. Définissons x : comme $pgcd(k + a, c)$ divise $k + a$, il existe un entier non nul x tel que $k + a = x \times pgcd(k + a, c) = xyz$.

Posons $t = (x + z(4k + 1))/(4a - 1)$. Pour montrer que t est un entier, exprimons t en fonction c et a :

$$t = \frac{x + z(4k + 1)}{4a - 1} = \frac{c(4k + 1) + k + a}{yz(4a - 1)}.$$

Comme $yz = pgcd(yz^2, xyz) = pgcd(k + a, c)$, on a $t = \frac{k+a+c(4k+1)}{4a-1}$. Par hypothèse, $pgcd(k + a)(4a - 1)$ divise $c(4k + 1) + k + a$ donc t est un entier. On a alors $(4a - 1)t = x + z(4k + 1)$ si et seulement si $4xyzt - pt = x + zp$. Donc $x + p(z + t) = 4xyzt$. D'après cette dernière égalité, l'entier x divise $p(z + t)$. Comme $pgcd(x, p) = 1$, on a x divise $z + t$. Donc il existe un entier non nul m tel que $z + t = mx$, ce qui donne $x + pmx = 4xyzt$ et donc $1 + pm = 4yzt$. C'est-à-dire $pm \equiv -1[4zt]$ avec $m|z + t$.

Réciproquement, si $ps \equiv -1[4bd]$ avec $s|b+d$. Il existe deux entiers non nuls e et m tels que $ps = -1+4bde$ et $b+d = ms$. On a alors $ps = -1+4bde$ si et seulement si $pms = -m+4bdem$. Donc $p(b+d)+m = 4bdem$. Posons $c = b^2e$ et $k+a = bme$. On a déjà $c|(k+a)^2$. Il reste à voir que $pgcd(k + a, c)(4a - 1)$ divise $(4k + 1)c + k + a$. Remarquons d'abord que $pgcd(k + a, c) = pgcd(bme, b^2e) = be$. Puis $(4k + 1)c + k + a = (4k + 1)b^2e + bme = be((4k + 1)b + m)$. Comme $m = 4bdem - (4k + 1)(b + d) = be(4bdem - (4k + 1)d) = bed(4bem - (4k + 1))$ et $4a - 1 = 4bme - (4k + 1)$, on obtient $(4k + 1)c + k + a = pgcd(k + a, c)d(4a - 1)$. D'où $pgcd(k + a, c)(4a - 1)$ divise $(4k + 1)c + k + a$.

□

4.4.3 Sur la programmation

Les différentes méthodes de vérification de l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus reposent sur le même schéma : construire des filtres pour restreindre les nombres pour lesquels il est difficile de trouver une décomposition explicite de $\frac{4}{n}$ en trois fractions égyptiennes puis traiter ces exceptions au cas par cas. Toutes les recherches sont basées sur cette méthode d'élimination de classes de congruences et partent toutes du résultat modulo 840. Les différences apparaissent dans la construction des filtres suivants qui sont basés sur des théorèmes pour certains cas particuliers (pour Oblàth), sur les conditions nécessaires et suffisantes (pour Rosati et Yamamoto), sur un théorème général (pour Swett) et sur une identité (pour Mizony). De même, le traitement des exceptions n'est pas le même : lois particulières pour Yamamoto, décompostion en deux fractions égyptiennes pour Swett et utilisation de l'identité (4.26) pour Mizony.

Remarque : la vérification par ordinateur de l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus suit la loi de Moore qui stipule que la puissance des ordinateurs double tous les 18 mois. A partir de 10^7 en 1964 (Yamamoto), on a 10^{14} en 1999 (Swett) et 10^{17} en 2010 (Mizony).

4.5 Conclusion

Au vu des résultats 1, 2 et 3, les recherches sur la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus peuvent être résumées ainsi : il reste à démontrer l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour tout n premier, congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840 et plus grands que 10^{17}.

Les différents travaux présentés dans ce chapitre mettent en évidence deux approches pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. La première approche distingue l'étude de la forme forte de la conjecture de celle de la forme faible. Elle permet, d'une part d'établir les trois résultats, et d'autre part de prouver algorithmiquement l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour tout $n < 10^{17}$. La seconde approche, plus récente, est celle étudiée par Gueye et Mizony d'une part et par Bello-Hernandez, Benito et Fernandez d'autre part. Elle s'appuie sur l'existence d'un polynôme assurant l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus. La différence entre ces deux approches est double :

- algorithmiquement, la première approche est plus efficace et performante car l'identité ((4.26) établie par Mizony) sur laquelle repose le programme de vérification de l'existence de solutions pour $n < 10^{17}$ ne dépend que de deux paramètres (qui sont liés). Les algorithmes de la seconde approche sont plus lents car ils reposent sur des formules dépendant de trois ou quatre paramètres (non liés) ;
- théoriquement, la première approche se heurte au problème des résidus quadratiques alors que la seconde approche permet de les contourner.

L'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus met également en évidence une diversité des domaines mathématiques et des méthodes utilisées par les mathématiciens dans leurs recherches sur la conjecture. Les travaux de Obàth, Rosati et Yamamoto se situent dans le champ de l'arithmétique modulaire. Yamamoto utilise des outils d'arithmétique supplémentaires par rapport à ses collègues en introduisant les symboles de Kronecker et de Jacobi ainsi que la loi de réciprocité quadratique. Les recherches de Schinzel relèvent de l'arithmétique des polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$. Concernant les recherches récentes que nous avons recueillies, Thépault a eu recours à des outils algébriques simples, équations du second degré et Mizony a étudié le problème algorithmiquement et en arithmétique modulaire. Avec Gueye, ils ont exploité de nouveaux outils d'arithmétique tels que les triplets pythagoriciens. En analysant l'articulation de ces différents travaux, nous avons montré qu'ils mènent tous aux mêmes résultats, à savoir les résultats 1, 2 et 3. Cependant, chacun apporte des éléments ou des outils supplémentaires pour enrichir les connaissances sur le problème. Par exemple, l'avancée du travail de Mizony se situe au niveau algorithmique car son identité (4.26) ne dépend que d'un paramètre m et des diviseurs de m^2 alors que les formules (4.2) et (4.3) de Rosati et Yamamoto dépendent de quatre paramètres. Les programmes de vérification sont donc plus performants. La seconde approche de la conjecture apporte également des éléments intéressants pour la preuve de la vérité de la conjecture dans la mesure où elle permet de dépasser le problème des résidus quadratiques.

Notons enfin que cette étude mathématique montre qu'il est possible de proposer une étude de la conjecture d'Erdös-Straus à des élèves de lycée et à des étudiants en début d'université. En effet, les outils mathématiques mobilisés dans l'exploration du problème (nombres entiers, calcul fractionnaire, divisibilité, congruences, etc.) sont *a priori* naturalisés dès les classes de collège et se révèlent performants pour avancer assez loin dans la recherche du problème.

Dans le schéma de la page suivante, nous résumons les différentes recherches que nous avons analysées dans ce chapitre et leurs articulations. Il présente les deux approches de la conjecture, les équivalences entre les résultats antérieurs et récents et les vérifications algorithmiques.

Première approche de la conjecture

Conjecture forte

Théorème de Rosati-Yamamoto $\Longleftrightarrow$ Théorème de Mizony $\Longleftrightarrow$ Théorème de Thépault

Existence de solutions démontrée pour tout entier naturel $n < 10^{17}$

Conjecture faible

Théorème de Rosati-Yamamoto $\Longleftrightarrow$ Théorème de Mizony-Gardes

Cette approche est intéressante algorithmiquement : l'identité ne dépendant que de deux paramètres (qui sont liés), les algorithmes sont performants. En revanche, théoriquement, elle se heurte au problème des résidus quadratiques.

Conjecture d'Erdös-Straus

Deuxième approche de la conjecture

Conjecture 1 ou 2-cousins

Conjecture Gueye

Existence de solutions démontrée pour tout entier naturel $n < 10^{12}$

Conjecture espagnole

Existence de solutions démontrée pour tout entier naturel $n < 2.10^{14}$

Cette approche est moins intéressante algorithmiquement : les formules dépendant de trois (ou quatre) paramètres (non liés), les algorithmes sont plus lents. En revanche, théoriquement elle contourne le problème des résidus quadratiques.

Chapitre 5

Analyse épistémologique

Sommaire

Comme les différents travaux en didactique des mathématiques présentés au chapitre 3 et s'intéressant à la mise en œuvre dans les classes d'activités de recherche mathématique, notre référence pour définir l'activité de recherche en classe est le travail des mathématiciens. Des recherches en didactique se sont déjà intéressées aux caractéristiques de l'activité de recherche du mathématicien. Citons par exemple les travaux de Tisseron [1] (1998) ou ceux de l'équipe Maths à modeler (Grenier & Payan, 2003 ; Grenier, 2012) .

> Dans son quotidien, un chercheur va faire des essais, résoudre des cas particuliers, calculer, dessiner, étudier des conjectures, changer de cadre ou de registre, se poser une nouvelle question, mais aussi s'informer sur ce qui a été fait, échanger et débattre avec d'autres chercheurs. (Grenier, 2012, p. 1355)

1. Nous étudions plus en détail ses travaux dans le chapitre 6.

Dans cette citation, nous distinguons des actions de natures différentes : des actions intrinsèques à la recherche d'un problème (faire des essais, résoudre des cas particuliers, étudier des conjectures, changer de cadre, etc.) et des actions extrinsèques telles que les échanges au sein de la communauté mathématiques. Dans notre recherche, nous nous intéressons plus spécifiquement à l'activité effective de recherche du chercheur lorsqu'il cherche un problème mathématique. Nous cherchons à analyser les processus de recherche mis en œuvre dans les actions intrinsèques, c'est-à-dire par exemple comment un chercheur va faire des essais, pour quelles raisons, comment il va les exploiter, quelles avancées cela entraîne pour ses recherches, etc. Nous voulons ainsi dégager des éléments invariants dans les processus de recherche mis en œuvre par les chercheurs dans une recherche de problème. Pour cela, nous avons choisi de mener une analyse d'épistémologie historique et contemporaine sur l'activité de recherche mathématique d'une part et une analyse d'épistémologie contemporaine sur la conjecture d'Erdös-Straus d'autre part.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude épistémologique de l'activité de recherche mathématique. Nous avons choisi de nous référer à des textes historiques et contemporains de source primaire, c'est-à-dire des textes autobiographiques de mathématiciens sur le processus de découverte ou d'invention mathématique. Nous avons également étudié plus particulièrement l'heuristique de la découverte à partir des ouvrages de Pólya *How to solve it* (1945) et *Mathematics and plausible reasoning* (1954) et d'un essai de Lakatos, *Proofs and refutations* (1976). A partir de l'analyse de ces témoignages de mathématiciens, nous avons identifié différents aspects du travail du chercheur en situation de recherche. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous développons la notion de « geste » de la recherche à partir de références philosophiques et didactiques. Nous explicitons en quoi cette notion prend en compte les différents aspects du travail du chercheur dégagé dans la première partie et en quoi elle nous paraît pertinente pour étudier les processus de recherche effectifs de l'activité de recherche mathématique. La troisième partie est consacrée à une analyse d'épistémologie contemporaine de la conjecture d'Erdös-Straus. L'adjectif *contemporain* renvoie ici à la méthodologie particulière de cette étude. Nous avons recueilli et suivi des recherches en cours de chercheurs engagés dans l'étude de la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus. A partir des données que nous avons recueillies, nous présentons leurs témoignages sur le processus de découverte et sur l'heuristique de la recherche d'une manière générale et plus spécifiquement, sur la recherche de la conjecture. Nous analysons ensuite leurs recherches sur l'étude de la conjecture à l'aide des éléments dégagés dans les analyses épistémologiques des deux premières parties, c'est-à-dire différents aspects de l'activité mathématique et la notion de « geste » de la recherche. Enfin, dans une quatrième partie, nous illustrons les recherches conjointes que nous avons menées avec Mizony sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, à l'interaction de questionnements de natures différentes (algorithmique, théorique et didactique).

5.1 Une analyse d'épistémologie historique et contemporaine

Dans le premier paragraphe de cette partie, nous présentons et analysons des témoignages de mathématiciens sur le processus de découverte ou d'invention mathématique. Nous avons choisi trois textes historiques (Poincaré (1908), Fehr (1908), Hadamard (1945)) et quatre textes contemporains (Nimier (1989), Dossier *Pour la Science* Les mathématiciens (1994), Thruston (1995), Villani (2012)). Dans le second paragraphe, nous analysons l'heuristique de la découverte mathématique à partir des ouvrages de Pólya *How to solve it* (1945) et *Mathematics and plausible reasoning* (1954).

5.1.1 Sur le processus de découverte ou d'invention mathématique

Le processus de découverte ou d'invention mathématique a été étudié par deux mathématiciens célèbres : Poincaré et Hadamard. Ils en ont donné une description à partir de réflexions sur leurs propres expériences. Cela a donné lieu à deux publications : un article de Poincaré (1908) intitulé *L'invention mathématique* et un *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, rédigé par Hadamard (1945) [2]. A la même époque, un périodique suisse, *l'Enseignement Mathématique*, a lancé une grande enquête intitulée : « Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens ». De nombreux mathématiciens ont répondu à ce questionnaire et apportent également des éléments de réponses sur le processus de découverte. Dans cette partie, nous présentons dans un premier temps les ouvrages de Poincaré et Hadamard en exposant leur description du processus de découverte mathématique en quatre étapes ainsi que leur position quant au choix du sujet d'étude. Dans un second temps, nous présentons l'enquête de *l'Enseignement Mathématique* en revenant sur le processus de recherche et le choix du sujet d'étude, mais aussi en montrant d'autres aspects de l'activité du mathématicien. Dans un troisième temps, nous confrontons ces références à des textes plus récents où des mathématiciens contemporains donnent leur point de vue sur les différents aspects de l'activité mathématique discutés dans les premières parties. Nous avons ainsi étudié le livre de Nimier (1989) *Entretiens avec des mathématiciens*, un dossier du périodique *Pour la Science* intitulé « Les mathématiciens » (1994) et un article de Thurston (1995). Enfin, dans un quatrième temps, nous faisons référence au dernier ouvrage de Villani (2012), qui livre un témoignage de sa vie de chercheur en mathématiques à travers l'histoire de la genèse d'un théorème.

a. Poincaré et Hadamard

Les deux auteurs commencent par définir l'invention en mathématiques par une production de combinaison d'idées. Poincaré précise que l'invention mathématique ne consiste pas « à faire de nouvelles combinaisons avec des être mathématiques déjà connus. [...] Inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une minorité. Inventer, c'est discerner, c'est choisir » (Poincaré, 1993, p. 143). Pour inventer, il faut donc choisir les « bonnes » associations d'idées, c'est-à-dire les combinaisons utiles et fécondes. Si toute invention ne peut avoir lieu sans volonté de découvrir, les auteurs précisent que ce choix est guidé par l'esthétique des mathématiques : « les combinaisons utiles, ce sont précisément les plus belles, je veux dire celles qui peuvent le mieux charmer cette sensibilité spéciale que tous les mathématiciens connaissent » (Ibid. p. 149). Poincaré définit cette sensibilité par « le sentiment de la beauté mathématique, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'élégance géométrique » (Ibid. p. 148). Pour lui, c'est « un vrai sentiment esthétique ». Hadamard évoque une « beauté scientifique »(Hadamard, 1993, p. 38). A travers cette définition de l'invention, nous pouvons remarquer deux aspects du processus d'invention ou de découverte mathématique décrit par Hadamard et Poincaré : une phase d'action consciente — « volonté de découvrir » — et une phase d'action inconsciente — guidée par ce « vrai sentiment esthétique ». Ainsi leurs ouvrages détaillent « la coopération » (Hadamard, 1993, p. 47) du conscient et de l'inconscient à travers quatre étapes du processus de découverte ou d'invention mathématique.

2. Dans la suite, nous nous référons à l'édition Jacques Gabay de 1993 de ces deux textes : (Poincaré, 1993) et (Hadamard, 1993).

Les quatre étapes

1. La préparation ou le travail conscient initial.
   L'étude d'une question commence par la mobilisation d'idées afin de créer des liens entre elles dans le but de construire la solution désirée : « Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat » (Poincaré, 1993, p. 144). Cette phase de travail alterne progrès, échecs et reprises comme le décrit Hadamard : « après avoir travaillé sur un sujet et ne voyant plus de progrès possible, on l'abandonne et on essaie autre chose, mais cela de façon provisoire avec l'intention de la reprendre après un intervalle de quelques mois » (Hadamard, 1993, p. 58). Si cette phase de travail est incertaine concernant la production de résultats, elle permet de bien comprendre le problème et ses difficultés « tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose » (Poincaré, 1993, p. 145). De plus, comme le précise Hadamard le travail préparatoire « donne l'impulsion au travail inconscient » (Hadamard, 1993, p. 57) dans le sens où les combinaisons formées pendant le travail conscient portent potentiellement en elles celle qui sera révélée par l'illumination comme féconde et utile. A ce propos, Poincaré précise que les seules combinaisons qui ont une chance de se former sont celles où au moins un des éléments a été mobilisé par notre volonté.

2. L'incubation ou le rôle du travail inconscient.
   A la suite de ce travail conscient, où les efforts semblent avoir été infructueux, vient fréquemment une période d'abandon du problème. Hadamard et Poincaré décrivent un moment où ils pensent à autre chose : « dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose » (Poincaré, 1993, p. 145). Mais ce repos serait « rempli par un travail inconscient » qui a « non seulement la tâche compliquée d'édifier les diverses combinaisons d'idées, mais aussi la tâche délicate et essentielle de choisir celles qui satisfont notre sens de la beauté et qui ont donc des chances d'être utiles » (Hadamard, 1993, p. 39). Le rôle du travail inconscient, guidé par une « beauté scientifique », serait d'exercer un certain tri dans les diverses combinaisons établies et de rendre uniquement celles qui sont utiles au conscient : « les idées choisies par mon inconscient sont celles précisément qui parviennent à mon conscient [...] celles qui sont en accord avec mon sens esthétique » (Hadamard, 1993, p. 45). Cette phase d'incubation et de travail inconscient est ainsi nécessaire mais non suffisante. Non suffisante car elle ne peut avoir lieu sans travail préparatoire conscient en amont et nécessaire afin de provoquer l'étape suivante : l'illumination.

3. L'illumination.
   L'illumination est la « conséquence de ce travail inconscient plus ou moins intense et long » (Hadamard, 1993, p. 49). Poincaré qualifie cette étape des caractères suivants : brièveté, soudaineté et certitude immédiate. En effet, l'illumination ne dure pas et elle est imprévue. Elle survient sans qu'on s'y attende, occupé parfois par autre chose comme en témoigne ces trois citations de Poincaré (1993, p. 145) :
   – Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint.
   – Au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé.
   – Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup.

Quant au caractère de certitude immédiate, c'est une impression forte mais pas une démonstration, une vérification est ainsi nécessaire par la suite comme le précise Poincaré « je ne fis pas la vérification [...] mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat » (Ibid. p. 145).

4. Le travail conscient ultérieur.
   Dans un premier temps, il s'agit de vérifier l'idée de l'illumination. Même s'il y a un sentiment de certitude, il se peut que cette idée soit fausse. Ainsi il faut l'intervention de la raison afin de vérifier le résultat comme le précise Poincaré « je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience ». Puis vient un second temps de finition pour exposer les résultats avec précision « j'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner » (Ibid. p. 146). Cela vise également à exposer les résultats oralement ou par écrit. Enfin un dernier temps de cette étape doit être consacré à la continuation du travail. Il ne doit pas être considéré comme la fin d'une recherche mais plutôt comme une étape, de sorte qu'il faut réfléchir aux conséquences des résultats, à leurs applications. Hadamard qualifie alors ces résultats de *résultats-relais*, ouvrant sur une nouvelle piste de recherche ou une nouvelle question. Poincaré l'explique ainsi : « Je réfléchis sur ce résultat et j'en tirai les conséquences. Je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuschiennes » (Poincaré, 1993, p. 145).

Pour résumer la coopération du travail conscient et inconscient dans le processus de découverte ou d'invention mathématique, citons Poincaré : « le travail inconscient n'est possible et en tout cas il n'est fécond que s'il est d'une part précédé, et d'autre part suivi d'un période de travail conscient » (Ibid. p. 146). Les auteurs mentionnent également une autre différence entre ces différentes phases de travail. Les trois premières phases sont davantage guidées par l'intuition et il y a une certaine liberté dans la création alors que la quatrième phase est davantage dirigée par la rigueur et la logique. Poincaré dit ainsi que « c'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente » (Poincaré, 1924) et Hadamard énonce un fait général « que la logique intervient à la suite d'une intuition initiale » (Hadamard, 1993, p. 106).

Le choix du sujet et motivation

Hadamard précise qu'il y a deux conceptions de l'invention : l'une qui consiste, le but étant donné, à trouver les moyens d'y parvenir et l'autre qui consiste, au contraire, à découvrir un fait puis à imaginer à quoi il pourrait servir. Pour les recherches mathématiques étant « inspirées par le désir de savoir et de comprendre » (Hadamard, 1993, p. 116), les mathématiciens ne connaissent que le second type d'invention. Il pose alors la question du choix des sujets de recherche. Pour lui, c'est « un choix délicat, un point des plus importants de la recherche » qui se fait comme celui des moyens de la découverte, par « le sens de la beauté, cette sensibilité esthétique spéciale » (Ibid. p. 117) également mentionnée par Poincaré. Il écrit ainsi « nous *sentons* que telle direction de recherche vaut la peine d'être suivie, nous sentons que la question mérite *en elle-même* l'intérêt » (Ibid. p. 118, souligné par l'auteur). Il illustre ensuite ces propos avec un exemple : « j'avais été attiré par une question d'Algèbre (sur les déterminants). En la résolvant, je ne soupçonnais pas qu'elle put avoir un usage défini, me contentant de *sentir* qu'elle méritait l'intérêt » (Ibid. p. 118, souligné par l'auteur). Ainsi pour lui, le seul moteur utile à la découverte ou l'invention mathématique est le sens de la beauté, le même qui guide l'inspiration et provoque l'illumination. Cependant il note une différence entre ces deux interventions de cette sensibilité : « cette fois [dans le choix du sujet], nous nous y référons consciemment alors que, dans l'inconscient, ce sens travaille à nous donner l'inspiration » (Ibid. p. 120). Hadamard se pose ensuite la question de l'existence d'autres raisons qui pourraient influencer la direction de la recherche. S'il réfute une intervention de causes émotionnelles, il accepte que le mathématicien puisse être « attiré par une question simplement parce qu'elle a été négligée jusque là » (Ibid. p. 122). Il précise même que cela a été souvent son cas, abandonner un travail après s'être rendu compte que plusieurs auteurs cherchaient dans la même direction. Cependant il conclut en insistant sur l'importance de la sensibilité : « que ce soit dans le choix des questions ou dans la manière de les traiter, un homme dépourvu d'un certain amour de la science ne pourrait réussir, car il serait incapable de choisir » (Ibid. p. 122).

Analyse critique des témoignages de Poincaré et Hadamard sur le processus de découverte mathématique

Dans ce paragraphe, nous faisons une analyse critique des témoignages de Poincaré et Hadamard sur le processus de découverte ou d'invention mathématique, notamment en mettant en évidence certains aspects qui nous semblent omis.

1. Récit rationaliste après coup ?
   La première remarque que l'on peut faire sur les récits d'Hadamard et Poincaré, c'est qu'ils proviennent de réflexions personnelles. Ils étudient introspectivement leurs propres processus mentaux lors de leurs recherches mathématiques. Ils doivent donc penser et observer leur pensée en même temps. La première difficulté est que ces deux actions peuvent se gêner et la seconde est que l'observateur peut déformer le phénomène qu'il étudie. Cela peut alors conduire à un récit rationaliste lors de la retranscription. Hadamard est conscient de ces difficultés et s'excuse auprès du lecteur « j'utiliserai les résultats de l'introspection, les seuls dont je me sente qualifié pour parler. Dans notre cas, ces résultats sont assez clairs pour mériter, me semble-t-il, un certain degré de confiance » (Hadamard, 1993, p. 14).

2. L'aspect esthétique, seul moteur et seul mécanisme ?
   Hadamard rapporte une objection de Wallas sur la conférence de Poincaré : il pense qu'« il est extrêmement improbable que l'instinct esthétique seul ait été le "moteur" actionnant le "mécanisme" de sa pensée » (1993, p. 44). Hadamard explique alors que Wallas confond moteur et mécanisme et qu'il ne comprend finalement pas très bien cette objection. Comme nous l'avons vu précédemment, pour Hadamard, le rôle de l'esthétique est primordial dans le choix du problème comme dans la manière de le traiter. Nous rejoignons l'avis de Wallas dans le sens où nous pensons que d'autres facteurs influencent le processus de découverte ou d'invention mathématique. Si nous faisons référence à certains sentiments comme la frustration ou le plaisir, nous pensons qu'un élément entre toujours en compte : le bagage mathématique, tant notionnel qu'heuristique. Poincaré y fait référence dans son récit de la découverte des fonctions fuschiennes où il mentionne que « l'analogie avec les fonctions elliptiques le[me] guidait » (Poincaré, 1993, p. 144). Cependant aucun des deux auteurs ne mentionne ses connaissances et sa pratique de la recherche comme éléments le guidant pour trouver des combinaisons et surtout les trier et choisir les « bonnes ». En suivant leur hypothèse, on ne pourrait pas « apprendre » à chercher un problème. En effet si inventer c'est choisir et que le choix n'est guidé que par notre sensibilité, comment intervenir sur la sensibilité d'autrui ? D'ailleurs Hadamard explique qu'il base son jugement sur les étudiants en recherche sur leur choix de sujet. Si ces derniers demandent un conseil sur le choix de leurs sujets, Hadamard a « tendance à les classer [...] dans les gens de second ordre » (1993, p. 117). Ils doivent choisir eux-mêmes, guidés par leur sensibilité, pas par celles des autres.

3. Travail entre pairs.
   Les travaux d'Hadamard et Poincaré visaient à décrire les processus mentaux lors d'une

découverte ou invention mathématique. C'est en ce sens qu'ils se sont appuyés sur leurs propres réflexions. Cependant nous pouvons remarquer qu'ils font peu allusion au travail entre pairs tels que les échanges qu'ils ont pu avoir avec d'autres mathématiciens dans des séminaires, conférences, correspondances, ou via des communications. Les expériences de découverte ou invention qu'ils relatent semblent avoir été vécues seuls. Est-ce la réalité ou est-ce pour ne décrire que leurs processus mentaux qu'ils l'ont omis ? Nous pouvons nous poser la question notamment en ce qui concerne l'appropriation du travail des autres qui pourrait être décrit, nous semble-t-il, comme un élément du processus mental. A ce propos, Hadamard mentionne juste l'existence de deux cas de figures : ceux qui s'intéressent fortement à la lecture des œuvres de leurs prédécesseurs avant de commencer tout travail de recherche et ceux qui, au contraire, préfèrent étudier directement les problèmes par eux-mêmes. Il précise qu'il appartient à cette seconde catégorie.

4. Méthode de la découverte ?
   Comme le remarque Lefebvre (1999), la description de Hadamard et Poincaré n'est « qu'illustrative et incitative à la réflexion ». Leur objectif n'était pas, en effet, de donner une méthode de la découverte mathématique. Ce sera l'objectif de Pólya, qui en 1945 publira un ouvrage *Comment poser et résoudre un problème*, où il donne des explications et des conseils en tenant compte du contexte scolaire et en proposant un petit dictionnaire heuristique.

Pour conclure, les travaux de Poincaré et d'Hadamard décrivent les différentes phases du processus d'invention ou de découverte mathématique. Ils mettent en évidence l'importance de l'intuition, liée à une certaine beauté scientifique que tous les mathématiciens connaissent. Cette sensibilité intervient aussi bien dans le choix des problèmes de recherche que dans la manière de les traiter. Cependant elle intervient consciemment dans le choix d'un sujet de recherche alors qu'elle apparaît inconsciemment pour provoquer l'inspiration et l'illumination. Les auteurs s'attachent particulièrement à expliquer cette coopération du conscient et de l'inconscient dans le processus de découverte. Ainsi la « découverte ne peut être produite uniquement par le hasard » (Hadamard, 1993, p. 50), le travail conscient avant et après les phases d'incubation et d'illumination est indispensable. Nous verrons par la suite que de nombreux mathématiciens partagent ces points de vue sur la découverte ou l'invention mathématique. Nous avons également mis en évidence quelques écueils dans leurs travaux tels l'existence d'autres facteurs que le sens de la beauté influençant le processus de découverte ou d'invention. Les auteurs ne mentionnent pas, par exemple, l'importance du bagage mathématique ou le travail collaboratif en recherche. Enfin nous avons souligné que ces travaux étaient issus de réflexions personnelles et que cela pouvait induire un risque de récit rationaliste.

b. L'enquête de *l'Enseignement Mathématique*

Pour atténuer le biais introduit par la dimension personnelle des deux savants, Hadamard et Poincaré, par ailleurs illustres, nous nous référons à une enquête menée sur la méthode de travail des mathématiciens par le périodique *l'Enseignement Mathématique* au début des années 1900. Poincaré mentionne cette enquête en précisant qu'il avait déjà écrit sa conférence lorsqu'il a pris connaissance des résultats. Cependant il précise que « la majorité des témoignages confirment ses [mes] conclusions » (Poincaré, 1993, p. 140). Hadamard fait référence à cette enquête dans son essai et en réalise une analyse critique. Il publie également les trente questions de cette enquête en annexe de son ouvrage. Dans un premier paragraphe, nous décrivons succinctement l'enquête et le type de questions posées. Dans une seconde partie, nous présentons des résultats relatifs à certaines questions portant sur le processus de découverte ou d'invention mathématique ainsi que sur le choix des sujets de recherche. Enfin, dans un troisième paragraphe nous faisons une analyse critique de cette enquête.

Description de l'enquête

Cette enquête a été initiée par Maillet[3] dans une lettre publiée dans le périodique *l'Enseignement Mathématique* en 1901. Son objectif est « d'ouvrir une sorte d'enquête auprès des savants connus ; il s'agirait d'obtenir de chacun d'eux quelques renseignements personnels sur sa méthode de travail et de recherche, ses habitudes, l'hygiène générale qu'il juge la plus propre pour faciliter son travail intellectuel, la manière de conduire le plus efficacement ses lectures et d'en tirer le meilleur parti etc. » (Maillet, 1901). Il précise quelques lignes plus loin que l'enquête ne doit pas « se borner aux savants illustres » mais qu'elle doit comprendre « le plus grand nombre de mathématiciens ayant quelque notoriété ». Il pense que cela serait très utile aux jeunes mathématiciens. Les directeurs de la revue, Laisant et Fehr, indiquent en note de cette lettre que ce projet est très intéressant et proposent que les personnes intéressées soumettent des questions qu'ils choisiront et mettront sous forme de questionnaire ensuite. En 1902 la revue publie le premier questionnaire composé de vingt-huit questions (Fehr & Laisant, 1902). En 1904 un questionnaire complété (trente questions) à l'aide notamment de deux psychologues Flournoy et Claparède, est publié avec un appel à réponses (Fehr & Laisant, 1904). Les directeurs de la revue invitent toutes les personnes intéressées à se procurer le questionnaire et le formulaire de réponses. A partir de 1905 et jusqu'en 1908 la revue publie régulièrement une analyse des réponses reçues, question par question, dans l'ordre du questionnaire (Fehr, 1905 ; Flournoy, 1905 ; Fehr, 1906a, 1906b, 1906c ; Flournoy, 1906 ; Claparède, 1907 ; Fehr, 1907b, 1907a ; Flournoy, 1907a, 1907b ; Claparède, 1908). Fehr (1908) publie un ouvrage regroupant ces différentes réponses[4].

Le questionnaire est composé de trente questions réparties en trois thèmes :

– 21 questions générales d'ordre philosophique.
– 7 questions particulières relatives au mode de vie du mathématicien.
– 2 questions intitulées *Observations finales*.

Les premières questions ont un caractère introspectif, on demandait par exemple aux mathématiciens s'ils s'intéressaient fortement à la lecture des œuvres de leurs prédécesseurs ou si, au contraire, ils préféraient étudier directement les problèmes par eux-mêmes, s'ils avaient l'habitude d'abandonner un problème pendant un temps et le reprendre plus tard, s'ils pouvaient décrire la genèse de leurs principales découvertes, etc. Les questions suivantes sont davantage générales, on demandait par exemple l'influence de l'environnement immédiat tel que les bruits, les conditions météorologiques sur leur travail ou s'ils considéraient comme utiles ou nuisibles les activités littéraires ou artistiques, etc. Les dernières questions sont d'ordre psychologique, pour connaître plus précisément les images mentales ou les mots internes dont se servent les mathématiciens.

Concernant les réponses reçues, les directeurs de *l'Enseignement Mathématique* précisent qu'ils en ont reçu plus d'une centaine, provenant de « mathématiciens appartenant pour la plupart, au temps présent, mais parmi lesquels figurent aussi quelques-uns des grands géomètres décédés, depuis les Bernouilli jusqu'à Lie » (Fehr, 1905, p. 387). Ils précisent qu'ils ont étudié les résultats de l'enquête question par question sans chercher de conclusions générales sur l'ensemble des réponses. En effet, la diversité des questions et leur grand nombre

3. Maillet (1865-1938) était un mathématicien français, président de la Société Mathématique de France en 1918. Ses travaux portent, entre autres, sur la théorie des nombres transcendants. Il a écrit un ouvrage sur le rêve mathématique (Maillet, 1902).

4. L'impression de ce livre étant de mauvaise qualité, nous avons travaillé avec les articles en ligne de *l'Enseignement Mathématique*. Ce sont ces références qui seront citées dans le texte.

ainsi que la variété des réponses ne leur permettaient pas de faire ce travail de synthèse. Toutefois à chaque réponse, les auteurs ont rédigé une brève analyse des réponses reçues.

Quelques résultats sur le processus de découverte ou d'invention mathématique

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats relatifs aux questions suivantes :
– questions 6 à 10 concernant la découverte mathématique.
– question 21 sur le choix des problèmes de recherche

Après avoir présenté succinctement les réponses des mathématiciens à ces questions, nous les mettons en regard des écrits de Poincaré et Hadamard afin d'en dégager des similitudes et des différences.

1. Les questions 6 à 9 sur le processus de découverte ou d'invention mathématique.
   Les auteurs de l'enquête ont regroupé les réponses aux questions 6, 7, 8 et 9 car elles ont trait « à la façon dont les découvertes ou les idées nouvelles naissent dans l'esprit des mathématiciens » (Flournoy, 1906, p. 294). Les questions sont les suivantes :

   > 6 - Avez-vous cherché à vous rendre compte de la genèse des vérités, découvertes par vous, auxquelles vous attachez le plus de prix ?
   >
   > 7 - Quelle est, selon vous, la part de hasard ou de l'intuition dans les découvertes mathématiques ? Cette part est-elle aussi grande toujours qu'elle le parait ?
   >
   > 8a - Avez-vous remarqué parfois que des découvertes ou des solutions, sur un sujet complètement étranger à vos recherches du moment, vous aient apparu, alors qu'elles correspondaient à des recherches antérieures fructueuses ?
   >
   > 8b - Vous arrive-t-il de calculer ou de résoudre des problèmes en rêve ? Ou de voir surgir toutes prêtes, en vous réveillant le matin, des solutions ou des découvertes soit complètement inattendues, soit vainement poursuivies la veille ou les jours précédents ?
   >
   > 9 - Estimez-vous que vos principales découvertes aient été le résultat d'un travail voulu, dirigé dans un sens précis, ou bien se soient présentées à votre esprit spontanément pour ainsi dire ?

   Parmi les réponses à la question 6, il se dégage les étapes psychologiques ou les processus logiques de toute recherche : intuition, démonstration, généralisation. Concernant la question 7, les réponses sont assez variables mais elles s'accordent néanmoins sur la nécessité du travail soutenu pour préparer ou parfaire les dons du hasard ou de l'inspiration comme en témoigne la réponse suivante : « le hasard, l'inspiration produisent toujours les découvertes, mais à condition que l'on ait beaucoup cherché dans leur sens ou dans de très voisins » (Méray dans Flournoy, 1906, p. 298) [5]. Les réponses à la question 8 se rejoignent « sur les circonstances spéciales où cette éclosion d'idées lumineuses, vainement cherchées auparavant » surgit : « à la promenade, dans la rue, dans le train, à propos d'une lecture tout à fait étrangère etc. » (Flournoy, 1907a, p. 296). La réponse de Cantor illustre bien cette étape : « Il m'est arrivé de rester pendant des semaines sur un problème que j'ai fini par abandonner et dont la solution a jailli devant mes yeux pendant la nuit au bout d'environ deux ans où je n'avais plus pensé consciemment à ce problème » (Ibid. p. 299). Les réponses à la question 9 confirment la tendance générale des réponses précédentes, à savoir qu'elles attribuent au travail voulu et dirigé le rôle prépondérant dans les découvertes mathématiques. Ces réponses

5. Nous ne mentionnerons l'auteur de la réponse que lorsque la réponse a été signée.

sont en accord avec la description du processus de découverte de Poincaré et d'Hadamard. On retrouve la coopération du conscient et de l'inconscient comme le mentionne Maillet : « la volonté et l'inspiration jouent très souvent un rôle pour le choix du sujet et la découverte » (Ibid. p. 304) mais aussi les différentes étapes de travail conscient préparatoire, d'incubation et d'illumination comme en témoigne la réponse de Laisant : « Les rares propositions nouvelles résultent sinon du hasard, du moins d'un travail inconscient, sorte d'incubation cérébrale. On a longtemps travaillé une question sans rien trouver. Tout à coup et parfois lorsqu'on a laissé la question de côté, la lumière surgit, la vision nette se fait, sans qu'on puisse dire pourquoi. [...] Toute découverte me parait être le résultat d'un travail voulu, mais souvent très antérieur, si bien qu'on n'en a pas toujours conscience ; et on peut de bonne foi attribuer ainsi à l'inspiration spontanée ce qui provient de la méditation patiente » (Ibid. p. 301). La dernière étape du processus de découverte décrit par Poincaré et Hadamard, à savoir le travail conscient ultérieur, est très peu présente dans les réponses à ces questions. Cependant on peut la retrouver dans les réponses à d'autres questions (notamment 10 et 21) [6]. L'étape de vérification par une démonstration de l'idée lumineuse est évoquée dans cette réponse : « puis après un repos dû par exemple à une bonne nuit, l'intelligence plus reposée et vigoureuse voit la vérité se dégager dans un énoncé net et précis. La démonstration n'est plus qu'une affaire de mise en ordre et de patience » (Ibid. p. 299). L'étape de finition qui consiste à une rédaction précise et fine de la solution de la recherche est évoquée dans plusieurs réponses : « la rédaction conduit à le [résultat] perfectionner et à l'étendre » (Fehr, 1906c, p. 464). La finition permet également de mieux formuler les résultats dans un but de communication : « Communiquer si c'est possible, ses recherches à d'autres mathématiciens ; on est ainsi amené à mieux formuler ce qu'on a trouvé. Publier car cela excite le travail personnel » (Hatzidakis dans Fehr, 1907a, p. 308). Enfin l'étape de continuation est également évoquée, notamment la production de nouvelles idées et pistes de recherche comme en témoigne cette réponse : « je cherche toujours à rédiger ce que j'ai trouvé par le calcul ; souvent il me vient alors de nouvelles idées » (dans Fehr, 1906c, p. 467).

Concernant les réponses à ces questions, nous voulons ajouter que l'aspect des combinaisons d'idées développé par Poincaré et Hadamard est également présent : « L'idée que leur enchainement [des connaissances] produit souvent la connaissance d'autres vérités » (Z.G. de Galdeano dans Fehr, 1906b, p. 223) ou « le hasard est l'assemblage de toutes les combinaisons et associations d'idées qui se présentent à l'esprit. Le jeu de l'imagination éveille des rapprochements qui souvent mettent sur la voie du résultat désiré » (Brocard dans Flournoy, 1906, p. 300). Si Hadamard et Poincaré pensent que c'est le sens d'une beauté mathématique qui guide le choix d'une bonne combinaison, ce mathématicien met en avant l'imagination. C'est d'ailleurs une différence à pointer entre les récits des deux mathématiciens et les réponses à cette enquête : ces derniers font très peu référence à cette sensibilité si importante chez Hadamard et Poincaré. En effet, les réponses de l'enquête aux questions 6 à 9 ne mettent pas en avant cet aspect du processus de découverte, à l'exception de l'une d'entre elles : « le hasard a aussi sa part, surtout dans les résultats et notamment en ce qui concerne leur élégance » (dans

6. Question 10 : Lorsque vous avez obtenu un résultat sur un sujet que vous poursuivez en vue de publier vos recherches, rédigez-vous immédiatement la partie de votre travail correspondante ? Au contraire, accumulez-vous vos résultats sous forme de simples notes pour n'aborder la rédaction que sur un ensemble important ? Question 21 : Quels conseils, en résumé, donneriez-vous : a) à un jeune homme poursuivant ses études mathématiques ; b) à un jeune mathématicien ayant achevé ses études ordinaires et désireux de poursuivre une carrière scientifique ?

Flournoy, 1906, p. 303). Dans le reste de l'enquête, cette question de la sensibilité n'apparaît que deux autres fois. D'une part, dans une réponse à la question 19, relative à l'influence des distractions artistiques sur l'invention mathématique, où l'auteur de la réponse, Hatzidakis, fait un parallèle entre la poésie, la musique et la vérité mathématique : « quelle différence radicale y-a-t-il entre un théorème ou en général une vérité mathématique et une belle poésie ou un beau morceau de musique, du moins quant à ce qui fait qu'ils nous plaisent tous trois ? C'est l'harmonie qui nous plait dans chaque vérité, poésie ou morceau de musique » (dans Flournoy, 1907b, p. 213). On retrouve l'idée d'harmonie des choses, très présente chez Poincaré ainsi que le parallèle entre la poésie et les mathématiques souvent évoqué par Hadamard. D'autre part, la sensibilité est évoquée dans une réponse à une question sur les conseils à donner pour un jeune mathématicien où l'auteur de la réponse préconise qu'il faut travailler « suivant vos goûts pour embellir votre existence » (dans Fehr, 1907a, p. 307).

Comme Poincaré et Hadamard, les différentes réponses à la question 15 s'accordent sur le fait qu'il existe une différence de méthodes entre le travail d'invention et le travail de rédaction[7]. Ils expliquent ainsi que « l'invention n'a pas de méthode » et qu'elle ne s'astreint pas « à une rigueur absolue » contrairement à la phase de rédaction qui doit « apporter l'ordre et combler les lacunes » (dans Fehr, 1907b, p. 125-126). Les auteurs de l'enquête résument les réponses à cette question en écrivant qu'« il existe évidemment une différence, au point de vue de la méthode, entre le travail d'invention où la pensée a, pour ainsi dire, libre cours, et celui qui consiste à coordonner d'une manière systématique les résultats » (Ibid. p. 125). A noter qu'un mathématicien compare ces deux phases de travail en terme d'émotions : « Le premier est un grand plaisir, le second un labeur très ardu » (Ibid. p. 126).

Il est intéressant de remarquer que les auteurs synthétisent les réponses à ces questions en disant que « les découvertes mathématiques ne naissent jamais par génération spontanée. Elles supposent toujours un terrain ensemencé de connaissances préalables, et bien préparé par un travail à la fois conscient et subconscient » (Flournoy, 1906, p. 310). On retrouve la coopération du conscient et de l'inconscient dans le processus de découverte mentionné par Poincaré et Hadamard mais ils mettent également en évidence l'importance des connaissances préalables. Ils ajoutent que la découverte, par sa nouveauté et son originalité « tranche forcément avec ce qui précède » et ce d'autant plus qu'elle « jaillit inopinément d'une incubation latente » (Ibid. p. 310). Ils s'appuient sur cet argument pour justifier la grande variété de réponses à ce sujet : « on comprend donc que suivant les cas et les individus, ce soit tantôt son caractère imprévu, tantôt sa dépendance du travail volontaire antérieur, qui frappe davantage son auteur lorsqu'il y réfléchit rétrospectivement » (Ibid. p. 310). Ainsi ils sont prudents quant au caractère introspectif des réponses des différents auteurs, doute que nous avions émis pour les récits de Poincaré et Hadamard.

2. Les questions 4 et 21 sur le choix des sujets de recherche.
   L'enquête ne pose pas explicitement la question du choix des problèmes à étudier. Cependant nous pouvons relever des éléments de réponses à cet aspect dans les réponses à certaines questions, notamment les questions 4 et 21. La question 4 porte sur la manière de travailler des mathématiciens pendant leurs études[8] et la question 21 interroge

7. Question 15 : Faites-vous une distinction, au point de vue de la méthode, entre le travail d'invention et celui de rédaction ?

8. Question 4 : Avez-vous conservé un souvenir précis de votre manière de travailler lorsque vous poursuiviez vos études, alors que le but était plutôt de s'assimiler les richesses d'autrui que de vous livrer à des

les conseils à donner à un jeune mathématicien se destinant à une carrière mathématique[9]. Les réponses à ces deux questions s'accordent sur le fait que les problèmes étudiés doivent être choisis par attirance et par goût. Ainsi Méray explique sa manière de travailler : « je travaillais au hasard des questions qui tout à tout m'attiraient [...] je n'ai jamais choisi les questions qu'au hasard de mes goûts et de l'intérêt que ces questions m'ont successivement présenté » (Méray dans Fehr, 1906b, p. 217-218). Une autre réponse précise qu'il faut « choisir selon ses goûts » (dans Fehr, 1906c, p. 308). Certains mathématiciens admettent que d'autres aspects peuvent entrer en compte dans le choix du sujet comme en témoigne cette réponse : « prendre un sujet spécial, le plus à son goût et qui ne soit pas complètement épuisé » (Ibid. p. 308), qui ajoute le caractère original de la question à traiter. D'autres semblent plus restrictifs, et pensent qu'il ne faut faire des mathématiques que si on se sent « fortement attiré vers elles » (Fehr dans Fehr, 1907a, p. 311) ou encore que « *si vous êtes sûr* d'en avoir le goût. Suivez vos inspirations » (Laisant dans Fehr, 1907a, p. 307, souligné par l'auteur de la réponse). Toutes ces réponses font allusion à une certaine sensibilité, comme chez Poincaré et Hadamard même si elle n'est pas explicitée dans les mêmes termes (bien que Hadamard fasse référence à un goût scientifique comme il existerait un goût littéraire ou artistique (Hadamard, 1993, p. 117)). A noter que l'autre raison admise pour motiver le choix du sujet est le fait qu'il soit original et peu travaillé. C'est également une seconde raison acceptée par Hadamard. Toutefois, dans les deux études, elle reste minoritaire et surtout non primordiale ; c'est toujours la sensibilité, l'esthétique, le goût ou l'attirance qui est moteur principal pour le choix du sujet d'étude. Dans les réponses aux questions 4 et 21, on rencontre également une autre forme de sensibilité, puisque plusieurs réponses mentionnent la notion de plaisir : « le travail scientifique doit être un plaisir » (dans Fehr, 1906c, p. 470) ; « la satisfaction de se voir soi-même capable de trouver de nouvelles vérités » (dans Fehr, 1906b, p. 221). Enfin, un mathématicien met au centre de sa motivation pour l'invention mathématique le fait de comprendre : « j'aime comprendre et creuser, je ne m'occupe pas d'apprendre. [...] J'ai travaillé non pas pour savoir [...] mais par simple curiosité » (Ibid. p. 218), motivation exprimée également par Poincaré.

Autres apports de cette enquête

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence d'autres éléments qui nous semblent intéressants quant à la méthode de travail des mathématiciens. Nous développons en particulier certains aspects absents que nous avions pointés dans l'analyse des écrits de Poincaré et Hadamard. Nous étudions ainsi les réponses aux questions 4, 11, 12 et 13 sur l'appropriation et la lecture de travaux existants lors d'une recherche, puis celles des questions 5 et 21 sur l'importance des connaissances mathématiques. Enfin, nous analysons les réponses de la question 14 concernant le processus de découverte et notamment, « la méthode expérimentale ».

1. Questions sur le positionnement par rapport aux travaux antérieurs.
   L'enquête pose plusieurs questions relatives au positionnement des mathématiciens par rapport aux travaux antérieurs de leurs pairs et notamment sur l'importance des lectures. Ce sont les questions[10] 11 à 13. Les questions 4 et 5 relatives à la manière de

recherches personnelles ? Avez-vous sur ce point quelques renseignements intéressants à fournir ?

9. Question 21 : Quels conseils, en résumé, donneriez-vous : a) à un jeune homme poursuivant ses études mathématiques ; b) à un jeune mathématicien ayant achevé ses études ordinaires et désireux de poursuivre une carrière scientifique ?

10. Question 11 : D'une manière générale, quelle est la part d'importance que vous attribuez aux lectures en matière de recherche mathématique ? Quel conseil donneriez-vous à ce sujet à un jeune mathématicien

travailler des mathématiciens avant et après les études donnent également des éléments de réponses à cet aspect des rapports entre pairs. Les mathématiciens ayant répondu à ces questions s'accordent sur l'importance pour le jeune mathématicien des lectures de travaux antérieurs, car elles permettent « de compléter et d'étendre ses connaissances générales dans le domaine des mathématiques » (Fehr, 1906c, p. 467). Ainsi certains précisent que « c'est par les lectures qu'on apprend de nouvelles méthodes de recherche » (dans Fehr, 1906c, p. 474) ou encore qu'elles suggèrent « des idées nouvelles, d'autres points de vue, des problèmes et des sujets d'étude » (Ibid. p. 472). En ce qui concerne leur méthode de travail à savoir, commencer ou non par assimiler les travaux antérieurs avant de débuter tout travail de recherche, les mathématiciens sont nettement moins unanimes. Les auteurs de l'enquête écrivent d'ailleurs « sans doute, il est bon de se rendre compte jusqu'à quel point la question que l'on se propose d'étudier a été approfondie par d'autres ; mais on ne saurait s'exercer trop à développer ses idées personnelles. Et même si on s'expose, surtout au début, à retrouver des résultats déjà connus, ce travail n'a pas été fait en pure perte » (Ibid. p. 468). Certaines réponses de mathématiciens vont en effet dans ce sens en expliquant qu'il est important de lire pour se faire « une idée générale » (dans Fehr, 1906b, p. 220) du sujet tout en effectuant ses recherches par soi-même. Une citation de Combebiac résume bien ce point de vue : « *parcourir* les travaux déjà existants et de ne les *approfondir* qu'au fur et à mesure de ses propres réflexions » (dans Fehr, 1906c, p. 475, souligné par l'auteur de la réponse). Cependant certains mathématiciens sont plus catégoriques, soit pour défendre l'importance des premières lectures, soit pour défendre au contraire de ne lire qu'après avoir des résultats. Les réponses d'Escott et de Boltzmann illustrent ces deux points de vue différents :

> Un jeune homme doit avoir une bonne connaissance générale des mathématiques avant de se livrer aux recherches. Avant d'entreprendre un sujet, il doit lire ce que les autres ont fait dans ce domaine afin d'éviter des répétitions inutiles. (Escott dans Fehr, 1906c, p. 471)

> J'ai toujours négligé, plus qu'il ne fallait, les travaux des autres et je ne les ai consultés qu'au dernier moment, immédiatement avant la publication de mes recherches. (Boltzmann dans Fehr, 1906c, p. 471)

Nous donnerons encore deux citations relatives à cette dernière méthode de travail, précisément parce qu'elle est en adéquation avec le travail de Mizony, le mathématicien dont nous avons suivi le travail de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus (cf. partie 5.3) :

> Ce n'est qu'une fois que je crois avoir trouvé quelque chose de nouveau que j'examine la question dans les ouvrages et les périodiques en vue de comparer mes résultats à ceux obtenus par d'autres. (dans Fehr, 1906c, p. 470)

> Je préfère toujours y arriver par mes seules forces et par une méthode personnelle et comparer ensuite mes résultats avec ceux qu'un autre peut avoir trouvés. (Ern. Pascal dans Fehr, 1906b, p. 223)

2. Questions sur l'importance des connaissances mathématiques.
   A travers différentes réponses de l'enquête, les mathématiciens pointent l'importance

pourvu de l'instruction classique habituelle ? Question 13 : Préférez-vous au contraire laisser à votre esprit son entière liberté, sauf à vérifier ensuite, par les lectures sur le sujet, la part qui vous est personnelle dans les résultats que vous avez obtenus ?

des connaissances mathématiques dans leur travail de recherche en mettant en évidence la dialectique entre l'acquisition des connaissances mathématiques et le développement de méthodes pour chercher un problème. Laisant précise par exemple qu' « il vaut mieux chercher par soi-même » mais que « pour cela cependant un premier bagage général est nécessaire » (dans Fehr, 1906b, p. 219-220). Moulton explique en retour que « ses connaissances mathématiques se sont beaucoup développées par suite des exigences des problèmes dont il [je] s'occupe [m'occupe] » (Ibid. p. 225). Ainsi, des connaissances mathématiques sont nécessaires pour débuter tout travail de recherche mais celles-ci s'enrichissent à travers les recherches de problèmes. De même, les méthodes heuristiques de recherche de problèmes se développent en appui sur les connaissances mathématiques et sur l'expérience de la recherche de problème. Ainsi, la majorité des mathématiciens conseillent aux jeunes mathématiciens d'« acquérir des connaissances dans les branches les plus diverses des mathématiques, poursuivre quelque problème par ses propres forces, s'attacher à quelque sujet, s'approprier les différentes méthodes et ne pas perdre de vue les progrès de la science » (Delaunoy dans Fehr, 1907a, p. 307).

3. Question sur les méthodes.
   La question 14 aborde les différentes méthodes des mathématiciens pour étudier un problème :

   > Quand vous abordez une question cherchez-vous à étudier de suite d'une façon aussi générale que possible les problèmes plus ou moins précis que vous vous posez ? Préférez-vous habituellement traiter d'abord des cas particuliers, ou un cas étendu, pour généraliser ensuite progressivement ?

   Les auteurs de la question font référence à deux méthodes différentes pour aborder un problème. La première consiste à étudier directement le cas général et utiliser les cas particuliers simplement à titre de vérifications, comme en témoigne la réponse suivante :

   > J'examine d'ordinaire le cas général et je cherche à m'assurer de sa justesse et de sa portée par des hypothèses particulières. (dans Fehr, 1907b, p. 124)

   La seconde méthode procède par généralisations successives à partir de l'étude de cas particuliers. Une réponse qualifie cette méthode d'expérimentale : « plus un sujet est neuf, plus il est nécessaire de s'en faire une idée sur des cas simples, c'est la méthode expérimentale » (Ibid. p. 124). Les auteurs de l'enquête précisent que c'est cette dernière méthode qui est la plus répandue parmi les mathématiciens qui ont répondu à la question (30 réponses sur 60). Un quart des mathématiciens qui ont répondu préfère aborder un problème avec la première méthode décrite et un autre quart emploie l'une ou l'autre des méthodes, selon la nature de la question, comme le précise une réponse : « cela dépend de la difficulté du sujet » (Ibid. p. 124). Les auteurs de l'enquête définissent la méthode expérimentale comme un procédé « par généralisations successives en partant de cas simples » (Fehr, 1907b, p. 123). Plusieurs réponses de mathématiciens décrivent effectivement cette étude première des cas particuliers pour ensuite généraliser. Certaines réponses sont plus précises et expliquent pourquoi ils ont recours à l'étude de cas particuliers. Méray justifie, par exemple, le fait qu'« il cherche la clef du général dans l'étude approfondie et le rapprochement des cas particuliers simples » en précisant qu'« une théorie mathématique a *presque toujours pour base* son cas particulier le plus simple » (Ibid. p. 123, souligné par l'auteur de la réponse). D'autres réponses, comme celle de Boltzmann, ajoutent que l'étude des cas particuliers permet de mieux comprendre le problème : « je considérais toujours d'abord des cas particuliers afin de bien comprendre la véritable signification d'un théorème, et ce ne fut qu'ensuite que je cherchais la démonstration générale » (dans Fehr, 1906b, p. 219). Enfin, une réponse apporte un détail sur la méthode utilisée pour généraliser : « Dans beaucoup de problèmes, lorsque le cas général est trop difficile, je préfère approfondir d'abord un certain nombre de cas particuliers et je cherche ensuite à obtenir le cas général par induction » (Escott dans Fehr, 1907b, p. 124). Il est à noter que toutes les réponses font le lien et la différence entre l'étude de cas particuliers et la généralisation, comme le résume Combebiac, « les concepts sont d'autant plus précis et faciles à manier qu'ils sont plus particuliers mais une propriété a d'autant plus de valeur qu'elle est plus générale » (dans Fehr, 1907b, p. 125). Notons une différence entre la démarche expérimentale telle que nous l'avons définie et celle décrite par ces mathématiciens. Cette dernière semble en effet se réduire au passage de l'étude de cas particuliers à une généralisation. On obtient peu d'éléments de réponses quant à l'heuristique utilisée pour passer du cas particulier au cas général. Seule l'induction est mentionnée. Cependant l'énoncé de la question, en mettant en avant cette méthode, n'induisait pas d'autres types de réponses.

4. Autres questions.
   Chercher par soi-même. Évoqué dans le paragraphe concernant le positionnement par rapport aux lectures antérieures, le fait de chercher soi-même est un conseil donné par de nombreux mathématiciens aux jeunes étudiants. Deux raisons sont principalement évoquées : d'une part, une meilleure compréhension : « quand on a trouvé quelque chose par soi-même dans une branche quelconque, on pénètre beaucoup mieux dans les travaux des autres » (dans Fehr, 1906b, p. 218) ; et d'autre part, une certaine satisfaction et plaisir « à suivre son [mon] propre chemin et à démontrer d'une manière différente ce qu'on [je] trouvait chez d'autres » (Ibid. p. 221).

   Rôle du temps dans le processus de découverte. Si aucune question n'interroge explicitement le rôle du temps dans le processus de découverte, plusieurs questions évoquent le temps de travail ou les interruptions lors d'une recherche. Les réponses contiennent donc des indices sur le rôle que le temps peut jouer dans le travail des mathématiciens. Deux questions (18 et 20) relatives au temps (durée) de travail des mathématiciens donnent des réponses assez disparates. Certains mentionnent la nécessité d'une régularité dans le travail, d'autres préfèrent des « coups de collier » alors que d'autres travaillent quand ça leur vient. Cependant ils s'accordent presque tous à dire que le temps est nécessaire pour travailler et résoudre une question mathématique comme en témoigne Tallmann : « le seul moyen de mener à bonne fin un travail mathématique est de lui réserver chaque jour un certain temps, le plus possible » (dans Flournoy, 1907a, p. 134). Le temps permet ainsi de « s'acharner souvent » mais aussi « d'y revenir plus tard » (Méray dans Fehr, 1907b, p. 127). En effet, plusieurs réponses mettent en avant l'importance des interruptions « lorsqu'il s'agit de problèmes difficiles, il est souvent nécessaire de les abandonner. Certaines questions peuvent être traitées en quelques semaines ou mois ; d'autres doivent attendre et subir des interruptions de plus d'une année » (Fehr, 1907b, p. 127-128).

Analyse critique de cette enquête.

Les auteurs de l'enquête eux-mêmes reconnaissent quelques faiblesses à ce genre de questionnaire très étendu. Une première difficulté, relevée lors de l'analyse des réponses aux questions 6 à 9, est le découragement des interviewés face à une liste de 30 questions. Une conséquence est alors un nombre non négligeable de réponses laconiques. Les auteurs pensent alors que « l'idéal serait sans doute de faire autant d'enquêtes différentes et séparées qu'il y a de problèmes à élucider, et surtout d'interviewer à fond chaque répondant, oralement ou par correspondance, pour l'obliger à développer et à bien préciser sa pensée » (Flournoy, 1906, p.

294). Mais ils sont bien conscients de la difficulté à mener ce genre de travail dans un temps limité et sans lassitude des enquêteurs et des enquêtés. Une seconde difficulté est pointée dans la conclusion de l'enquête, il s'agit de la la difficulté à analyser, synthétiser et classer des réponses multiples. C'est un inconvénient majeur de ce genre d'étude à grande échelle. Ainsi les auteurs s'en défendent en précisant qu'ils n'ont pas cherché de conclusions générales sur l'ensemble des réponses, d'une part parce que le nombre et la variété des réponses ne le permettaient pas, et d'autre part parce que ce n'était pas le but de leur travail. En effet, le but de l'enquête était « de faire connaître les principaux types de travailleurs » (Claparède, 1908, p. 172). De ce point de vue, ils pensent que « les résultats [...] publiés fournissent des indications d'un grand intérêt » (Ibid. p. 172), notamment pour les jeunes mathématiciens. Hadamard (1993) donne deux autres critiques concernant cette enquête. La première est l'absence de questions portant sur l'influence de l'état psychologique du chercheur et ses émotions. Il mentionne également le manque de questions concernant les échecs que connaissent les chercheurs. Sa deuxième critique, qu'il formule sous forme de question : « qui peut-on considérer comme mathématicien, et surtout comme mathématicien dont les processus créateurs sont dignes d'intérêt ? » (Hadamard, 1993, p. 21) reste la plus importante. Elle questionne le traitement des nombreuses réponses réalisé de manière égale, qu'elle provienne d'un des mathématiciens les plus créateurs de l'époque ou de gens « déclarés mathématiciens... dont les noms sont maintenant complètement inconnus » (Ibid. p. 21).

En conclusion, si ce genre d'enquête présente des inconvénients pour le traitement des données nombreuses et variées, elle apporte néanmoins de précieuses réflexions et de nombreux éléments réponses quant aux méthodes de travail des mathématiciens, en particulier sur le processus de découverte ou d'invention. Elle confirme celui décrit par Poincaré et Hadamard en apportant également d'autres aspects tels que le travail de lecture des œuvres antérieures, l'importance de la dialectique entre l'acquisition des connaissances mathématiques et le développement de méthodes heuristiques, ou encore la différence de méthode entre le travail d'invention et de rédaction.

c. Références plus récentes

Les ouvrages de Poincaré et Hadamard et l'enquête de *l'Enseignement Mathématique* datant du début ou milieu du vingtième siècle, nous avons souhaité étudier des ouvrages plus récents sur le processus de découverte mathématique. Nous nous sommes appuyée sur trois références :

– un ouvrage de Nimier (1989) intitulé *Entretiens avec des mathématiciens* avec comme sous-titre, *L'heuristique mathématique*,
– un dossier du périodique *Pour la Science* intitulé « Les mathématiciens » publié en 1994,
– un article de Thurston (1995) intitulé « Preuve et progrès en mathématiques » publié dans *Repères IREM* pour la traduction française.

Dans un premier paragraphe, nous présentons brièvement les auteurs et leurs écrits puis dans un second paragraphe, nous mettons en évidence certains aspects du processus de découverte mathématique.

Présentation des ouvrages

Nimier propose dans son ouvrage d'étudier les relations du chercheur à l'objet mathématique. Pour cela il a effectué des entretiens avec différents mathématiciens : Claude Berge, André Joyal, Nicolas Kuiper, André Lichnérowicz, Bernard Malgrange, Charles Pisot, Jacques Riguet et René Thom. Afin d'éclairer la lecture de ces entretiens, Nimier présente une grille d'analyse de l'œuvre créatrice, décrite par Didier Anzieu (psychanalyste s'étant intéressé à la psychanalyse du génie créateur et en particulier, au processus créatif) en cinq étapes : éprouver un état de saisissement, prendre conscience d'un représentant psychique inconscient, l'ériger en code organisateur de l'œuvre et choisir un matériau apte à doter ce code d'un corps, composer l'œuvre dans ses détails, la produire au dehors (Anzieu, 1981). Nimier décrit et illustre ces différentes phases avec des citations recueillies dans ses entretiens avec les mathématiciens. A la lecture de cette description nous pouvons constater un rapprochement entre ces cinq étapes de toute œuvre créatrice et les quatre étapes du processus de découverte mathématique décrit par Poincaré et Hadamard. Nimier observe que les trois premières phases décrites par Anzieu font appel au « noyau psychotique du chercheur » c'est-à-dire à une partie de son inconscient. Il fait ainsi un parallèle avec ce que décrit Poincaré dans son récit de sa découverte lorsqu'il met le pied sur le marchepied de l'autobus. Ces phases correspondraient ainsi aux étapes d'incubation et d'illumination dans le processus de Poincaré et Hadamard. Nimier précise que ce « noyau psychotique » n'est pas « un handicap à la création mais bien au contraire sa source » (Nimier, 1989, p. 6). Comme Poincaré et Hadamard, il souligne le caractère nécessaire de cette intervention de l'inconscient sans qu'il soit suffisant. Les deux dernières étapes de l'œuvre créatrice d'Anzieu font référence à l'étape de finition et de continuation mentionnée par Poincaré et Hadamard. Nous pouvons remarquer que le processus de l'œuvre créatrice d'Anzieu ne cite pas le travail préparatoire conscient, phase de travail voulu, nécessaire selon Poincaré et Hadamard pour initier le travail inconscient ou celui du noyau psychotique. Or, dans les réponses des mathématiciens interviewés, cet aspect du processus de découverte est bien présent et reconnu. En conclusion, si l'on observe des similitudes entre la description de ces deux processus, nous pouvons mettre en évidence une différence majeure : le processus d'Anzieu décrit « toute œuvre créatrice » (sans spécifier un domaine particulier) sous un aspect psychologique, alors que celui de Poincaré et d'Hadamard est spécifique aux mathématiques (même si celui d'Hadamard montre des similitudes avec d'autres disciplines) et est décrit en termes de coopération du travail conscient et du travail inconscient.

Le périodique *Pour la Science* a consacré, en 1994, un dossier hors série intitulé « Les mathématiciens ». Le dossier est composé d'articles sur différents mathématiciens, qui retracent leur vie et leurs découvertes mathématiques. Trois articles laissent la parole à de grands mathématiciens contemporains : Laurent Schwartz, médaillé Fields en 1950 pour avoir développé la théorie des distributions, Alain Connes, médaillé Fields en 1982 pour ses contributions à la théorie des opérateurs algébriques et André Weil, qui fit « partie de l'élite mathématique mondiale » (Thuillier dans Weil, 1994, p. 48) pour ses travaux en géométrie algébrique et en théorie des nombres. Ce sont ces trois articles que nous avons étudiés.

William P. Thurston est un mathématicien américain, médaillé Fiels en 1982. Ses travaux ont notamment contribué à renouveler la vision de la géométrie en dimension 3 en montrant la puissance des modèles de géométrie hyperbolique. Il s'est également intéressé à faire avancer la compréhension humaine des mathématiques. Dans *Preuve et progrès en mathématiques* (Thurston, 1995), il aborde ce thème à partir de réflexions sur ses propres travaux. Pour lui pensée, création et communication sont intimement liées en mathématiques. Ainsi, il aborde autant les aspects mentaux (rôle de l'intuition, de la logique) que les aspects plus sociologiques, comme le rôle de la communauté mathématique dans la création, ou certaines difficultés inhérentes à la communication entre mathématiciens.

Sur différents aspects du processus de découverte

Une des conclusions du livre de Nimier est que « pour tous ces grands mathématiciens, faire des mathématiques c'est avant tout mettre en association des images, des concepts etc., qui peuvent, à première vue, paraître éloignés » (Nimier, 1989, p. 109). Les associations d'idées sont centrales dans la définition de l'activité mathématique pour les chercheurs interrogés. Par exemple, Claude Berge donne une définition de « la mathématique » comme un « ensemble de tous les [ces] domaines et le lien entre ces domaines » (dans Nimier, 1989, p. 31) et Jacques Riguet explique que son attrait pour les mathématiques a débuté avec la géométrie et l'algèbre et que « ce qui l'a ravi à l'époque c'est la liaison entre l'algèbre et la géométrie » (Ibid. p. 81). Ces deux mathématiciens illustrent alors leur définition des mathématiques par métaphore architecturale. Les différents domaines des mathématiques deviennent pour Jacques Riguet « des espèces de temples avec des parois belles et rigides et les communications entre ces divers secteurs étaient elles aussi très architecturées » (Ibid. p. 89). Il compare l'univers mathématique à une « espèce de palais immense » où les mathématiciens « se promènent ». Claude Berge évoque les mathématiques comme un « building » où « il faudrait que dans tous les différents départements, les connexions soient bien établies » (Ibid. p. 32). Laurent Schwartz fait également référence à cette architecture :

> Je me suis construit mon ensemble mathématique, une architecture, je dirais même un palais. Je vois en le parcourant les connexions entre les différentes parties des mathématiques, et j'essaie constamment d'agrandir cette architecture, de repousser les bornes du palais, les bornes des connaissances. (Schwartz, 1994, p. 16)

A l'instar de Poincaré et Hadamard, certains évoquent, pour constituer ces connexions et ces liens, une certaine sensibilité du mathématicien. Ainsi Charles Pisot pense que « le mathématicien [...] est sensible à une certaine beauté d'une construction des rapprochements inattendus entre les différentes parties des mathématiques » (dans Nimier, 1989, p. 69).

Dans la suite de ce paragraphe, nous détaillons les points de vue de ces mathématiciens sur différents aspects de la recherche mathématique : les quatre étapes du processus de découverte, l'intérêt qu'ils ont pour les mathématiques, le choix de leur sujet d'étude et leurs motivations, et enfin le travail entre pairs.

1. Sur le processus de découverte en quatre étapes.
   Les différents mathématiciens qui parlent du processus de découverte en mathématiques le décrivent en quatre étapes, similaires à celles décrites par Poincaré et Hadamard. Alain Connes raconte par exemple les souvenirs précis de deux de ses découvertes en ces termes :

   > Pour la première découverte, j'avais accompagné ma femme en voiture [...] ; en revenant, alors que je pensais, croyais-je, à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis six mois s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique.
   >
   > [...]
   >
   > Ma seconde expérience se passe au Canada. [...] Je faisais régulièrement la même promenade sans progresser d'un millimètre dans mon problème, lorsqu'un jour, j'eus l'impression que tout pouvait débloquer, ce que je vérifiai à ma table de travail. (Connes, 1994, p. 107)

   Dans ces deux récits, nous pouvons repérer l'étape de travail préparatoire, « les calculs longs et pénibles », puis un temps de repos « en promenade » ou « en pensant à tout autre chose » qui déclenche l'illumination avec « certitude absolue », et enfin un travail ultérieur de vérification afin de « remplacer l'intuition par une démonstration rigoureuse » (Ibid. p. 107). Alain Connes précise que sa découverte n'est pas la conséquence d'une démonstration mais que « tout s'était passé comme si son [mon] inconscient s'était brutalement exprimé » (Ibid. p. 107). Ce processus est également décrit par André Lichnérowicz lorsqu'il donne une définition de l'activité mathématique :

> L'activité mathématique pour moi, enfin, pour n'importe quel chercheur en mathématiques est d'une espèce assez différente : vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème... Vous commencez par travailler un peu de manière apparente à une table avec un bout de papier, pas très longtemps — bon... le but en fait, le plus souvent le problème, est un prétexte — le but est de faire à ce propos une méthode ou de créer des êtres mathématiques... qui, dans le réseau de la connaissance mathématique irradient. Pendant très longtemps ensuite, apparemment vous ne travaillez pas, mais vous travaillez tout le temps. C'est-à-dire, vous finissez laborieusement par arriver à une espèce d'état de transe qui dure trois semaines, un mois où vous pensez pratiquement tout le temps à la même question et votre manière de penser n'est pas du tout la manière logique... qui ne viendra qu'après. Vous avez acquis un espèce de domaine, un univers mathématique, une espèce d'appréhension directe et vous jouez avec cela, indéfiniment... en marchant, là, sur la plate-forme d'un autobus, etc. la plate-forme d'autobus est présente chez Poincaré, chez Hadamard, etc. et c'est ça la partie qui dure le plus longtemps. Et puis, à un moment donné quelque chose s'enclenche, vous avez l'impression avant toute démonstration, d'avoir fait un progrès essentiel et à ce moment-là vous retournez à votre table de travail, vous vérifiez et finalement, vous exposez les choses en les soumettant à l'ascèse logique. Mais ce n'est pas du tout l'essentiel du travail, l'essentiel du travail en temps et en qualité s'est passé entre les deux et généralement même sans écrire. (dans Nimier, 1989, p. 19)

L'expression « entre les deux » fait référence à une phase de travail « sans écrire », précédée et succédée par une phase de recherche menée « à la table de travail ». Cette période d'entre deux, il la définit comme « un filtre... un essai d'abord de beaucoup de combinaisons possibles. Très rapidement, grâce à une certaine sensibilité mathématique cultivée, une élimination, quelquefois à tort d'ailleurs, de certaines choses... Mais essentiellement, c'est étudié rapidement, apparemment, superficiellement, du point de vue mathématique, mais en fait assez profondément, une multitude de combinaisons d'idées aux êtres... » (Ibid. p. 19). André Lichnérowicz ne qualifie pas cette phase de travail d'inconsciente mais sa description fait appel à celle de Poincaré et Hadamard, qui utilise ce mot. De plus, il fait également référence à une certaine sensibilité qui intervient dans la sélection des « bonnes » combinaisons.

Plusieurs mathématiciens mettent en avant la différence de méthodes entre les phases d'invention et de rédaction comme l'ont déjà montré Poincaré, Hadamard ou l'enquête. André Lichnérowicz explique ainsi que pendant les premières phases du processus de découverte, « votre manière de penser n'est pas du tout la manière logique » (Ibid. p. 19). Cette dernière n'intervient qu'après, au moment de la vérification et de la finition où « vous exposez les choses en les soumettant à l'ascèse logique » (Ibid. p. 19). André Joyal regrette que les cours et les publications accordent beaucoup d'importance à la rigueur et la déduction : « Les mathématiques, ça ne se fait pas comme ça. [...] La rigueur, c'est quelque chose d'essentiel, c'est important mais c'est le seul aspect de l'activité mathématique et on devrait pouvoir rendre compte de ce qui se passe aussi sur un mode moins rigoureux et qui est très important pour guider la démonstration » (dans Nimier, 1989, p. 46). Enfin, Alain Connes exprime ces différences entre travail d'invention et travail de rédaction en termes d'émotions. En évoquant l'illumination, il explique avoir éprouvé un sentiment de joie alors qu'il qualifie le mois suivant, lors de l'étape de vérification et finition de « pénible » car il devait « remplacer l'intuition par une démonstration rigoureuse et il naviguait d'épouvante en épouvante : ne se serait-il pas trompé ? » (Connes, 1994, p. 107).

2. Intérêt pour les mathématiques.
   Un premier intérêt pour les mathématiques exprimé par les chercheurs interviewés par Nimier est la compréhension du monde. Nicolas Kuiper, par exemple, explique qu'avec les mathématiques, « on a la possibilité de comprendre le monde en général » et les mathématiques c'est « comprendre de la façon la plus efficace, la plus merveilleuse possible [...] comprendre avec le minimum de notions et d'organisation que quelque chose d'intéressant est vrai » (dans Nimier, 1989, p. 49). Pour René Thom, les mathématiques représentent essentiellement « le langage théorique universel » et « les seules possibilités d'accéder à une pensée ayant validité universelle se font par les mathématiques » (Ibid. p. 99). Un second intérêt est évoqué par d'autres mathématiciens et rejoint le premier puisqu'il s'agit de comprendre différentes façons de penser en mathématiques. André Lichnérowicz porte ainsi un intérêt aux mathématiques « probablement parce qu'elles portent témoignage sur l'un des modes de fonctionnement de notre esprit » (Ibid. p. 17). De même, André Joyal explique que s'il a « fait de la logique mathématique, c'était pour mieux éclaircir, pour mieux saisir les méthodes de pensée en mathématiques » (Ibid. p. 45). On retrouve ce point de vue chez Thurston qui pense qu'une des activités du mathématicien « consiste à trouver des moyens permettant aux gens de comprendre les mathématiques et de pouvoir y penser, y réfléchir » (Thurston, 1995, p. 8). Afin de produire de la compréhension, ils doivent donc « construire de meilleures façons de penser » les mathématiques.

3. Choix du sujet d'étude et motivations.
   Concernant le choix du sujet d'étude, les mathématiciens donnent différentes raisons, contrairement à Poincaré et Hadamard qui se focalisent essentiellement sur l'esthétique. On retrouve les notions de goût et d'attirance très présentes dans les réponses de l'enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. Claude Berge explique que « l'existence d'une configuration, ses propriétés, les réductions d'une configuration l'attirent par goût [...], le goût du puzzle [...] ou bien le goût de ranger les objets suivant des contraintes spéciales » et il précise que cet « aspect affectif dans les mathématiques est non seulement intéressant pour savoir si on va devenir mathématicien ou pas, mais quelle sorte de mathématiques va vous attirer » (dans Nimier, 1989, p. 29). Il fait alors le lien entre cet aspect affectif et une certaine esthétique en évoquant un goût universel chez les mathématiciens qui les guide, celui de trouver « des démonstrations élégantes » (Ibid. p. 30). René Thom évoque également une réaction « quasi-affective du mathématicien vis-à-vis de certaines théories » et explique ainsi qu'il n'aurait jamais pu « entrer » dans certaines théories à cause d' « une espèce de répulsion au départ » (Ibid. p. 103). Charles Pisot résume bien ce sentiment et donne une règle pour faire des mathématiques : « il faut faire dans les mathématiques, ce qui vous plaît, c'est la première règle » (Ibid. p. 77). D'ailleurs, il explique que « quand quelqu'un vient me dire : je voudrais faire une thèse, donnez-moi un sujet », il lui répond « eh bien ! non le sujet c'est vous qui devez le trouver [...] en mathématiques il faut avoir soi-même une idée si on veut progresser » (Ibid. p. 70). L'insatisfaction est donnée par deux mathématiciens comme une autre raison pour choisir leur sujet d'étude. Jacques Riguet explique que

son choix de sujet « résultait d'une certaine insatisfaction » car les méthodes employées à l'époque le « satisfaisaient très peu » (Ibid. p. 92). De même André Linchnérowicz explique que « vous avez des questions qui vous viennent, parce que, justement vous avez créé récemment, des choses, qui marchent bien, mais qui vous laissent insatisfait sur un point. Et c'est cette insatisfaction même, due à votre travail, qui vous entraîne plus loin » (Ibid. p. 20-21). Enfin, Bernard Malgrange évoque une troisième raison, une question « donnée de l'extérieur [...] donnée par des collègues » et explique que lorsqu'il choisit lui-même ses sujets, « cela n'a jamais rien donné... » (Ibid. p. 61-62). A noter que ce dernier point de vue est minoritaire chez les mathématiciens.

Dans les trois ouvrages, les chercheurs discutent de la motivation à faire des mathématiques et mettent en avant son caractère émotionnel. André Joyal croit que les mathématiques « c'est plutôt une question de motivation, c'est une question émotionnelle » (Ibid. p. 41). Selon lui, ce caractère émotionnel est le plaisir, il croit ainsi « que s'il y a du plaisir dans l'activité, il y a créativité » (Ibid. p. 44). Le plaisir comme moteur de la découverte est partagé par plusieurs mathématiciens. Charles Pisot pense que « c'est un peu le même plaisir que celui de l'explorateur » (Ibid. p. 76). Claude Berge évoque « un plaisir esthétique primordial » et explique qu'il éprouve du plaisir surtout quand il est « sur le point de découvrir quelque chose ». Il relie cette notion de plaisir au jeu et définit ce jeu comme « une façon de jouir avec l'esprit », de « concentrer son activité sur ce qui vous donne le maximum de jubilation » (Ibid. p. 33-35). Ce plaisir provoque donc « un sentiment de grande joie et de grande exaltation » comme le décrit André Lichnérowicz, ou encore « un grand bonheur » pour Nicolas Kuiper. Thurston évoque également une jubilation de la création : « il y a une joie réelle à faire des mathématiques, à apprendre de nouvelles méthodes de pensée qui expliquent, organisent et simplifient » (Thurston, 1995, p. 18). Cependant ce dernier précise que les mathématiciens ne font pas des mathématiques seulement pour elles-mêmes. Il ajoute alors une seconde motivation, l'environnement social : « nous sommes inspirés par les autres, nous cherchons leur appréciation et nous aimons aider les autres à résoudre leurs problèmes mathématiques » (Ibid.). Les mathématiciens seraient ainsi plus motivés lorsqu'ils peuvent partager leur excitation et leurs résultats. André Weil évoque une certaine reconnaissance de la société et des pairs, en particulier en expliquant qu'il a toujours espéré que « son travail aurait une certaine place dans l'histoire des mathématiques » (Weil, 1994, p. 49). Il compare sa motivation à celle « aussi noble que celui qui prétend au prix Nobel » (Ibid.). Enfin, Thurston donne une troisième raison, économique et institutionnelle dans la mesure où les mathématiciens « sont impliqués dans beaucoup d'évaluations, dans un système férocement compétitif » (Thurston, 1995, p. 19) où ils sont jugés et émettent des jugements. André Joyal évoque également une motivation dans la compétition chez certains chercheurs : « pour certains ce qui compte, c'est de vouloir détruire quelqu'un, un autre mathématicien, montrer à quel point ce type-là n'y connaît rien. Et ça va lui donner assez de motivation pour démontrer des théorèmes qui systématiquement seront meilleurs que les théorèmes de l'autre » (dans Nimier, 1989, p. 47).

4. Travail individuel et entre pairs.
Un autre point commun entre de nombreux chercheurs est le fait de chercher par soi-même. La majorité explique ainsi, à l'instar de Laurent Schwartz, qu'ils désirent « apprendre des choses en les retrouvant » et en cherchant par « soi-même » (Schwartz, 1994, p. 16-17). La raison première est de chercher à comprendre : « j'ai aimé comprendre et faire comprendre », dit Laurent Schwartz. La seconde raison est de se former, d'acquérir

des connaissances comme l'explique Alain Connes : « on forme ses outils en attaquant un problème difficile » (Connes, 1994, p. 106). La dialectique entre l'acquisition des connaissances et le développement de méthodes heuristiques prend tout son sens dans cette manière de se former, en cherchant par soi-même. Connes précise ainsi qu' « il faut faire des gammes pour maîtriser la technique mathématique d'un domaine » mais qu' « à l'inverse quand on est immergé dans un sujet, on ne maîtrise pas la technique » (Ibid.).

Certains mathématiciens évoquent le travail entre pairs dans les entretiens. Comme dans les réponses de l'enquête sur la méthode de travail des mathématiciens, les avis sont assez partagés. Certains préfèrent ne pas lire les travaux antérieurs, comme Bernard Malgrange qui dit avoir « refusé de lire leur truc pendant un certain temps » (dans Nimier, 1989, p. 64) ; certains préfèrent travailler seuls tout en reconnaissant que les discussions sont nécessaires, notamment pour connaître les points de vue des collègues. D'autres, au contraire, envisagent l'activité mathématique comme une activité collective, comme en témoigne André Joyal : « je n'ai jamais travaillé d'une façon isolée, c'est toujours en rapport avec d'autres personnes. Il y a un questionnement qui se développe, on répond aussi à certaines questions individuelles ; c'est une construction individuelle au groupe de recherche » (Ibid. p. 43). Cependant, un mathématicien, Thurston, s'est intéressé particulièrement au rôle de la communauté mathématique dans la création et donc aux relations entre les chercheurs. Pour faire des mathématiques, il relève une motivation essentielle : l'environnement social. Il explique que les mathématiciens ont « tendance à suivre des modes » et qu'ils « n'aiment pas être seuls ». Ils ont ainsi « des difficultés à rester motivés par un sujet, même s'ils y font personnellement des progrès, s'ils n'ont pas des collègues qui partagent leur excitation » (Thurston, 1995, p. 19). On entrevoit alors l'importance de la communauté mathématique dans la création. Avant d'illustrer ses propos avec des exemples tirés de son expérience personnelle, il explique certaines difficultés inhérentes à la communication entre mathématiciens. Dans un premier temps, il distingue différentes interactions sociales : informelles telles que les tête à tête, le courrier et le courrier électronique, et formelles comme les séminaires, les préprints et les publications dans les revues. Ensuite, il différencie la communication à l'intérieur et à l'extérieur d'un secteur. Il explique ainsi que la connaissance mathématique se transmet vite à l'intérieur d'un secteur « car les gens développent un corpus commun de connaissances, de techniques » et qu'ils « apprennent à comprendre par des contacts informels » en copiant « les façons de penser des uns et des autres et finalement les idées peuvent s'expliquer clairement et facilement » (Ibid. p. 13). Il souligne ici l'importance des interactions informelles qui favorisent la communication car les chercheurs « utilisent différents canaux de communication, qui vont bien au-delà du langage mathématique formel » (Ibid.). Il ajoute également que « la communication se fait dans les deux sens et les gens peuvent se concentrer sur ce qui requiert le plus d'attention » (Ibid. p. 14). Ces deux modalités de communication sont effectivement peu présentes dans les interactions formelles. En effet, dans les séminaires, les chercheurs sont « plus inhibés et plus formels », les auditeurs ne sont pas « bons » pour poser des questions et les orateurs ont du mal à y répondre ; et dans les articles, les auteurs traduisent « leurs idées sous forme symbolique et logique » que les lecteurs essaient de décoder. Concernant les communications à l'extérieur d'un secteur, Thurston explique que les difficultés proviennent de l'existence de différents modes de pensée selon les différents secteurs. S'il existe bien un langage mathématique commun, il ne permet pas, selon lui, de transmettre tous les modes de pensée. Il pense alors que les mathématiciens doivent faire « des efforts beaucoup plus importants pour communiquer les idées mathématiques.

Pour cela, ils doivent [nous devons] accorder davantage d'attention à communiquer leurs [nos] schémas mentaux, leurs [nos] façons de penser, et pas seulement leurs [nos] définitions, théorèmes et démonstrations » (Ibid. p. 15). Il illustre ensuite ses propos par deux exemples tirés de sa propre expérience. Le premier se situe au début de sa carrière : il a commencé à s'intéresser à la théorie des feuilletages et a rapidement prouvé et publié un certain nombre de théorèmes. Ayant pris du retard dans ses communications, le sujet a peu à peu perdu tout son intérêt auprès des autres chercheurs car « Thurston était en train de faire place nette » et il « tuait le sujet ». Lui-même s'est donc tourné vers d'autres sujets d'étude et il explique que ce domaine « aurait été accéléré si les mathématiciens avaient continué vigoureusement l'étude des feuilletages » (Ibid.). Cependant il pense que les raisons pour lesquelles le sujet a perdu son intérêt sont ailleurs et en particulier dans l'écriture et la communication des résultats qui « furent documentés dans un style mathématique conventionnel, écrasant de virtuosité. [...] Ces articles ne donnaient que le raisonnement et les conclusions au niveau le plus profond, celui qu'il [je] avait atteint après beaucoup de réflexions et d'efforts » (Ibid. p. 21). Les prérequis étant absents et la théorie étant récente et non normalisée, les mathématiciens avaient des difficultés à comprendre. A travers son deuxième exemple, il montre alors l'importance de communiquer ses façons de penser et non seulement la démonstration d'un résultat. En étudiant les variétés de dimension 3 et leurs relations avec la géométrie hyperbolique, il a démontré le théorème de géométrisation pour les variétés de Haken. Fort de son expérience avec la théorie des feuilletages, il s'est astreint à communiquer « une compréhension opérationnelle des concepts et de l'infrastructure dans lesquels le sujet s'inscrivait naturellement » (Ibid. p. 24). Cette communication a porté ses fruits car ce dont les mathématiciens avaient besoin, « c'était d'apprendre ses [mes] façons de penser et non comment il [je] démontrait ».

> Il y eut, et il continue à y avoir, une masse d'activité mathématique florissante dans ce domaine. En me concentrant sur la construction de ce cadre, sur la publication des définitions, sur l'explication des façons de penser le sujet [...] j'ai laissé la place à beaucoup d'autres pour en tirer les bénéfices. Il y avait de la place pour découvrir et publier d'autres preuves du théorème de géométrisation. Ces preuves ont contribué à élaborer des concepts mathématiques très intéressants en eux-mêmes, et qui ont conduit à des développements ultérieurs. (Ibid. p. 24)

Ces deux exemples montrent que la recherche mathématique et donc la création s'insère dans une activité sociale qui stimule les mathématiciens. Sans les interactions entre les pairs, l'intérêt pour un sujet peut se tarir, notamment en raison des difficultés de communication. Thurston met alors en évidence l'importance de communiquer, non seulement ses résultats et démonstrations de théorèmes mais aussi ses façons de penser. Cela permet ensuite aux mathématiciens d'élaborer de nouveaux concepts et de développer la théorie et le domaine concernés.

d. Le témoignage de Cédric Villani

Cédric Villani, mathématicien français médaillé Fields en 2010, livre dans son dernier ouvrage (Villani, 2012) un témoignage de sa vie de chercheur en mathématiques. A travers le récit de la genèse d'une avancée mathématique, il tente de répondre aux questions classiques qu'on lui pose souvent : à quoi ressemble la vie d'un chercheur, de quoi est fait son quotidien, comment s'écrit son œuvre, etc. et montre les différentes étapes qui composent le processus de recherche. Dans une interview au journal Le Monde, il explique que

> le livre est l'histoire d'une conception, de la gestation d'un théorème, depuis la fécondation qui est le moment de la première discussion, quand vous avez l'idée de vous lancer dans un projet, jusqu'à la naissance, qui est le moment où le résultat est suffisamment mûr pour être publié. Dans mon livre, j'ai tenu à ce qu'on puisse voir ces étapes [...]. (Le Monde, 14 septembre 2012, p. 3)

La référence à ces différentes étapes dans la genèse d'un théorème fait écho à la description du processus de découverte mathématique décrit par Poincaré puis Hadamard. Cependant, à l'inverse de ces deux mathématiciens dont les textes sont théoriques et s'adressent à la communauté scientifique, cet ouvrage est à destination du grand public. Les textes n'ont donc pas la même fonction et ne ciblent pas les mêmes lecteurs. La structure du livre de Villani est ainsi particulière : alternance de phases de récits, d'échanges de mails, de pages de mathématiques et de notes sur de nombreux mathématiciens. Le lecteur est alors emporté dans son histoire et pénètre au cœur de la vie scientifique et sociale des mathématiques de Paris à Princeton en passant par New York et Prague. En ce sens, ce témoignage est une illustration assez concrète de ce que Poincaré et Hadamard ont décrit comme le processus de découverte. De plus, Villani illustre les propos de Thurston sur l'activité sociale de la recherche mathématique. Il met en effet en évidence le rôle des collaborations, des rencontres et des séminaires tout au long de la naissance de son théorème. Ce livre corrobore ainsi de nombreux éléments mentionnés par d'autres mathématiciens mais en apportent également de nouveaux. Les paragraphes suivants s'attachent à exposer ces différents éléments sur l'activité mathématique via le point de vue de Villani.

« *Ces liens sont si précieux!* »

Dans une interview au journal Libération (LibéLyon, 16 septembre 2010, site consulté le 6 septembre 2012, http ://www.libelyon.fr/info/2010/09/), Villani explique que pour lui, « les mathématiques c'est la beauté et la surprise. La beauté réside dans les constructions élégantes et harmonieuses. La surprise provient d'un rapprochement inattendu ». A l'instar de nombreux mathématiciens, il définit les mathématiques en mentionnant une certaine esthétique et en mettant en évidence la notion de liens. Comme Poincaré et Hadamard, Villani explique que les critères esthétiques peuvent être un guide pour choisir une piste de recherche : « l'esthétique peut vous conduire, dans l'océan des possibles, vers quelque chose qui a des chances de tenir debout » (Le Monde, 14 septembre 2012, p. 3). Cependant il donne d'autres critères qui influent sur ce choix, notamment « des schémas déjà éprouvés qui marchent » (Ibid.). Dans son livre, il montre l'importance de faire des liens pour avancer dans la recherche mathématique. Il explique d'ailleurs que « ce sont ces liens cachés entre différents domaines mathématiques qui ont fait [sa] réputation de chercheur. Ces liens sont si précieux! Ils permettent d'éclairer l'un et l'autre des domaines impliqués, dans un jeu de ping-pong où chaque découverte sur une rive en entraîne une sur l'autre » (Villani, 2012, p. 146). Il détaille ainsi plusieurs de ses recherches et les liens qui lui ont permis d'avancer et d'établir ensuite des théorèmes. Cette capacité à aborder le problème sous différents angles et d'une façon différente des autres est pour lui une qualité nécessaire pour affronter la résolution d'un problème.

« *Le processus de découverte est commun à toutes les branches.* »

Dans une interview au journal Le Nouvel Observateur (23 août 2012, site consulté le 6 septembre 2012, http ://bibliobs.nouvelobs.com/essais/20120823.OBS0285/les-illuminations-mathematiques-de-cedric-villani.html), Villani explique que « le processus de découverte est commun à toutes les branches » et que ses « confrères de toutes obédiences se reconnaîtront dans ce livre [...] ». Pour décrire ce processus de découverte, il commence par citer Darwin :

« un mathématicien est comme un aveugle dans une pièce noire, cherchant à voir un chat noir, qui n'est peut-être même pas là » (Villani, 2012, p. 264). Il continue en expliquant que « cette période noire qui marque les premiers pas d'un mathématicien en territoire inconnu, c'est la première phase du cycle habituel » (Ibid. p. 264). Nous pouvons ici faire le parallèle avec la phase de travail préparatoire décrite par Poincaré et Hadamard. Villani raconte cette période de noir lorsqu'il débute ses recherches sur l'amortissement de Landau. Une première phase de travail est consacrée à déterminer la question : « mais pour résoudre le problème, il faut d'abord savoir exactement quelle est la question ! En recherche mathématique, identifier clairement l'objectif est un premier pas crucial et délicat » (Ibid. p. 19). Pour cela, il va déjà lire la littérature antérieure : « j'apprends vite, je m'immerge, j'assimile, comme un enfant qui s'imprégnerait d'une langue étrangère. J'apprends sans prétention, humblement, des notions de base que les physiciens connaissent depuis un demi-siècle » (Ibid. p. 32). Puis il franchit « un cap : maintenant, [il] sait ce qu'il veut démontrer » (Ibid. p. 40). Suit alors une seconde phase de travail. Possédé par le problème « et les jours et les nuits passèrent en compagnie du Problème » (Ibid. p. 47), il explore « pistes et sous-pistes, notant méticuleusement tous les possibles, éliminant au fur et à mesure les voies sans issue » (Ibid. p. 47). Il y a de petites avancées mais « Non, le Problème n'a pas été craqué » (Ibid. p. 48). Il explique alors qu'il pense que « la solution requiert des outils complètement nouveaux, et doit nous apporter aussi un regard neuf sur le problème » (Ibid. p. 47). Il a alors une nouvelle idée et le travail avec son collaborateur reprend. Après des efforts parfois infructueux, ce sont de nouvelles idées ou astuces qui leur permettent de repartir. Puis, l'une d'elles sera décisive : « Après le noir vient une petite, petite lueur fragile, qui nous fait penser que quelque chose se prépare... » (Ibid. p. 264). On retrouve les phases inconscientes décrites par Poincaré et Hadamard : l'incubation et l'illumination. Dans l'interview au journal le Nouvel Observateur (op.cit., 23 août 2012), il explique que « l'illumination peut survenir au moment le plus fortuit, alors qu'on était occupé à autre chose, et les pensées s'enchaîner comme par miracle ». Dans son livre il raconte ce moment particulier survenu dans sa recherche sur l'amortissement de Landau :

> Il y a une voix dans ma tête. *Il faut faire passer le second terme de l'autre côté, prendre la transformée de Fourier et inverser dans* L^2. Pas possible ! [...] Vite [...] je teste l'idée qui est apparue magiquement ce matin pour combler ce maudit trou. [...] Je griffonne et contemple. Un instant de réflexion. Ça marche ! Je crois... Ça marche !!! C'est sûr ! (Villani, 2012, p. 154)

Cette voix lui est apparue soudainement et brièvement, au réveil et quelques heures après, il est sûr que cette idée va lui fournir une clé pour la suite de son travail. Il se représente cette illumination comme « un coup de fil direct du dieu de la mathématique [...] C'est très rare, il faut l'avouer ! » (Ibid. p. 154). Cette idée fournit donc une trame qu'il va falloir développer et enrichir pour espérer terminer la démonstration. C'est l'étape de vérification, finition et communication : « Puis après la petite, petite lueur, si tout va bien, on démêle le fil, et c'est l'arrivée au grand jour ! On est fier et sûr de soi, on expose partout » (Ibid. p. 264). Ce moment sonne « la fin de l'exploration tous azimuts » et le début d'un travail de consolidation et vérification : « Maintenant il faut consolider, renforcer, vérifier, vérifier, vérifier... Ce sera le moment de mettre en œuvre [notre] puissance de feu en analyse ! » (Ibid. p. 118). Cette phase de recherche marque ainsi le retour au travail conscient, comme le qualifie Poincaré et Hadamard, accompagné d'un changement de méthode de travail « l'effort d'imagination pour trouver un enchaînement logique » laisse place à « un effort de rigueur pour qu'il soit bon » (op.cit. Interview Libération, 16 septembre 2010). A noter que la phase de communication est particulièrement mise en avant dans le récit de Villani. Nous détaillons cet aspect dans le paragraphe suivant. Enfin, Villani termine sa description du cycle de la recherche mathématique en mentionnant un état émotionnel final particulier : « Et puis, après le grand jour et la lumière, il y a toujours la phase de dépression qui suit les grands accomplissements, où l'on minimise sa propre contribution » (Ibid. p. 264).

« *C'est une rencontre qui déclenche tout.* »

Le récit de Villani met également en évidence l'aspect social de la recherche mathématique. A l'instar de Thursthon (1995), il montre l'importance de toutes les interactions sociales, formelles et informelles, dans le processus de création mathématique. Nous distinguons trois types d'interactions sociales dans le récit de Villani : sa collaboration particulière avec un autre mathématicien pour cette recherche, ses interactions informelles avec d'autres collègues au sein du laboratoire et les interactions formelles lors de séminaires, colloques ou publication d'articles. Dans la suite, nous illustrons ces différents aspects sociaux de la recherche mathématique en montrant leur rôle dans ce processus.

La recherche mathématique que raconte Villani est une aventure qu'il a menée avec un proche collaborateur, Clément Mouhot. Tout au long du livre, il montre les interactions qu'ils ont eues pour établir un nouveau résultat. Tout commence par une séance de travail où Villani veut parler d'un problème à Mouhot. S'ensuit une discussion mathématique où chacun apporte des réponses aux questions de l'autre et surtout, pose de nouvelles questions.

> J'explique longuement : on discute, on conteste. [...] Clément veut en savoir plus sur la positivité. [...] Nous nous mettons à chercher, chacun de son côté pour retrouver le raisonnement qu'avait dû faire Dong Li. [...] Au bout de quelques minutes de griffonnage silencieux, c'est moi qui gagne. [...] Clément réfléchit à haute voix devant mon calcul. Soudain il s'illumine, tout excité, agitant l'index en direction du tableau : Mais alors il faudrait voir si ça peut pas aider pour le damping Landau ! Je suis bluffé. [...] Je demande des explications, Clément se trouble, s'affaire, m'explique que cette preuve lui rappelle une discussion qu'il a eue il y a trois ans de cela avec un autre chercheur d'origine chinoise [...]. (Villani, 2012, p. 12-14)

A la suite de cette séance de travail, Villani et Mouhot commencent une collaboration de plusieurs mois afin d'établir un théorème. Travaillant à plusieurs milliers de kilomètres l'un de l'autre, leurs échanges se réalisent essentiellement par mails (voir par exemple (Villani, 2012, p. 50-54 ; p. 137-139)) ou par téléphone. Leurs travaux sont écrits dans « quatre fichiers informatiques, mis à jour simultanément au fur et à mesure que [nous] progressons, contiennent tout ce que nous avons compris sur l'amortissement de Landau. Quatre fichiers que nous avons échangés, complétés, corrigés, retravaillés, et parsemés de notes - NdCM pour les remarques de Clément, NdCV pour les remarques de Cédric » (Ibid. p. 59). Villani résume leur collaboration en ces termes :

> Au bout du compte, Clément et moi on se sera bien partagé les trouvailles sur ce projet : à moi les normes, les estimations de déflexion, la décroissance en temps grand et les échos ; à lui le time cheating, la stratification des erreurs, les estimations à deux temps et le procédé sans régularisation. Et puis il y a l'idée des normes glissantes, née d'une séance de travail en commun, et dont, on ne sait pas vraiment à qui elle est due... Sans parler bien sûr des centaines de petites astuces. Et si on y repense, c'était pas si mal qu'on ait divergé en milieu de projet : pendant un mois ou deux chacun était braqué sur sa propre idée et restait sourd aux arguments de l'autre, mais maintenant on a compris qu'il fallait marier les deux points de vue. (Ibid. p. 117-118)

Cet extrait met en lumière l'importance de confronter des points de vue différents sur un même problème pour le résoudre. En effet, chacun a apporté ses propres idées, parfois complémentaires et parfois différentes. Dans un premier temps, cela permet à chacun de développer sa propre connaissance du problème ; puis, dans un second temps, la confrontation de ces différents points de vue permet d'enrichir la connaissance commune du problème et donc le champ des possibles pour la résolution.

Outre cette proche collaboration avec Mouhot, Villani montre également l'importance des discussions informelles entre collègues au sein du laboratoire. Il raconte par exemple qu'à la suite d'une séance de travail avec un collaborateur, son voisin de bureau, Étienne Ghys, lui a fait une remarque qui s'avéra importante pour la suite de sa recherche. Il explique alors :

> C'est ce que j'apprécie par-dessus tout, dans mon laboratoire si petit et si performant, la façon dont les sujets se mélangent dans les conversations, entre chercheurs d'horizons mathématiques divers, autour d'une machine à café ou dans les couloirs, sans craindre les barrières thématiques. Tant de nouvelles pistes à explorer ! (Ibid. p. 24)

Villani mentionne également les discussions entre collègues lors des repas pendant les séminaires, qui parfois engendrent de nouvelles questions sur leurs travaux.

> Nous sommes une dizaine à déjeuner ensemble après l'exposé, les discussions vont bon train. [...] Il me raconte avec un enthousiasme communicatif ses amours de jeunesse pour la physique des plasmas, l'encrantage, l'écho plasma, la théorie quasi-linéaire... [...] L'écho plasma attire mon attention.[..] Tout cela me rappelle les calculs que j'ai effectués il y a quelques jours : une résonance en temps... mon plasma qui réagissait à certains instants bien particuliers... je croyais avoir perdu la tête, mais peut-être que c'est la même chose que ce phénomène des échos, bien connu en physique des plasmas ? (Ibid. p. 94-95)

Ces rencontres avec des collègues jouent un rôle important dans sa manière de travailler. Lorsqu'il décrit plusieurs de ses travaux, il précise ainsi qu' « à chaque fois c'est une rencontre qui déclenche tout » (Ibid. p. 147).

Les interactions avec les collègues se passent également dans un cadre institutionnel, davantage formel. En premier lieu, il y a les exposés dans les séminaires de recherche. Villani mentionne l'enjeu social de reconnaissance par les pairs porté par ces séminaires. Ainsi, après un exposé où il a présenté des résultats qui ne sont pas encore totalement démontrés, il explique que « Ce séminaire à Rutgers marque un moment clé dans ma quête. Avoir annoncé des résultats qui ne sont pas encore démontrés est une faute grave, une rupture dans le contrat de confiance qui lie l'orateur à son auditoire. Pour que la faute ne soit pas trop énorme, je suis dos au mur, il faut à tout prix que je prouve ce que j'ai annoncé. [...] il faut compléter cette preuve, ou je suis déshonoré ! ! » (Ibid. p. 98). Mais il montre également un autre aspect, tout aussi essentiel des interventions en séminaire pour le processus de genèse mathématique : le rôle de la critique des pairs.

> Au cours de la semaine passée, j'ai compris tant de choses en donnant des exposés sur l'amortissement de Landau. Après mon premier exposé, une fois son irritation retombée, Elliott m'a fait des commentaires valables sur la difficulté conceptuelle associée au modèle coulombien périodique. Au second exposé, j'ai annoncé les principales idées physiques de la preuve [...]. Au troisième exposé, j'ai trouvé la solution à la critique de Hammett et j'ai pu énoncer des hypothèses presque optimales sur la condition de stabilité et la longueur de perturbation. J'ai présenté des résultats tout frais et seulement à moitié cuits mais la stratégie a été payante : les critiques me permettront de faire progresser mon travail à une

> vitesse considérable ! Encore une fois, il fallait se mettre en position vulnérable pour devenir plus fort. (Ibid. p. 145-146)

L'exposition de son travail à la communauté mathématique et notamment, les critiques émises par ses pairs lui ont ainsi permis de corriger, améliorer et perfectionner ses résultats.

La publication d'article de recherche constitue un second lieu d'interactions sociales de la communauté mathématique. Villani raconte que l'article exposant leur nouveau résultat a été refusé une fois car « l'éditeur n'est pas sûr que les résultats soient définitifs » (Ibid. p. 210). Les deux critiques revenant souvent lors des exposés en séminaire sont à nouveau pointées. S'ensuit alors encore quelques mois de travail intensif afin de répondre à ces difficultés et soumettre une nouvelle version de l'article. Villani explique qu'un refus est très décevant car la publication de l'article est la garantie de la validité de leur résultat : « Seule une expertise indépendante, réalisée par des spécialistes dont l'anonymat sera soigneusement gardé, pourra confirmer nos résultats » (Ibid. p. 265). Ainsi, lorsqu'il reçoit l'acceptation de leur article après une seconde soumission, il écrit : « cette fois, notre théorème est bien né » (Ibid. p. 265).

Le témoignage de Villani montre le rôle que la communauté mathématique joue dans différentes étapes du processus de création mathématique. Les discussions informelles entre collègues interviennent davantage dans la phase de travail préparatoire, notamment pour élargir le champ des possibles et explorer de nouvelles pistes ; alors que les interactions sociales institutionnelles influencent davantage la phase de travail ultérieur de vérification, finition et communication.

« *Finalement, ma solution était encore fausse.* »

Un autre aspect de la recherche mathématique est mis en évidence par le récit de Villani : le rôle du temps dans la genèse du théorème. La naissance du théorème a duré plus de deux ans, entre la première séance de travail sur le problème et la publication de l'article annonçant les résultats. Ce temps long de la recherche joue un rôle important car il permet aux mathématiciens de suivre différentes pistes de recherche, au risque de tomber dans des impasses et de chercher à les surmonter.

> La nouvelle impasse semble terrible, mais j'y crois encore. Il faut dire qu'au cours des trois dernières semaines nous avons déjà été trois fois dans des impasses, et à chaque fois nous avons réussi à trouver une issue de secours. Il est vrai aussi que les obstacles qui semblaient vaincus sont revenus nous narguer sous une forme différente... [...] Mais ce jour-là, je suis convaincu, envers et contre tout, que rien ne pourra nous arrêter. (Ibid. p. 108)

> Finalement, ma solution était encore fausse, il a fallu près d'une semaine pour s'en convaincre. La plus grande partie de la preuve tenait toujours, mais le maudit mode nul continuait à nous narguer... pourtant, on s'approchait ! (Ibid. p. 137)

Cette maturation de la recherche est essentielle car elle leur permet de mieux comprendre le problème et notamment ses difficultés. Ce sont donc des étapes importantes dans le processus de découverte mathématique même si parfois elles sont accompagnées de désespoir : « ce jour-là on est passé à un cheveu de l'abandon du projet. Plusieurs mois de travail ont failli disparaître » (Ibid. p. 108). Le récit de Villani est ainsi jalonné de phases d'impasses et de moments très productifs, associés respectivement à un état psychologique proche du désespoir ou d'optimisme et d'enthousiasme.

Le récit de Villani, comme ceux de Poincaré et de Hadamard, est le fruit de réflexions personnelles sur sa propre pratique de recherche mathématique. De plus, son livre est une vulgarisation à destination du grand public. Ceci amène une critique : son témoignage peut être perçu comme un récit rationaliste lors de l'écriture, peut-être déformé, voire simplificateur. Cependant, en croisant son point de vue sur l'activité de recherche mathématique avec d'autres points de vue de mathématiciens (présentés dans les analyses ci-dessus), son récit semble refléter assez fidèlement ce que ressentent de nombreux chercheurs. De plus, Villani apporte des éléments complémentaires en illustrant assez précisément l'aspect social de l'activité de recherche mathématique, notamment en montrant les différents rôles de la communauté mathématique. Concernant la beauté des mathématiques, Villani reconnaît qu'elle joue un certain rôle lors de la genèse d'un théorème mais il ne la considère pas comme seul critère de choix pour guider sa réflexion. En effet, il s'appuie également sur ses connaissances mathématiques : « [...] je vois bien que le développement de l'idée aboutit à des schémas que je reconnais » (Ibid. p. 154). Son récit montre le rôle joué par les connaissances mathématiques tout au long du processus de genèse du théorème. C'est en appui sur ses connaissances de l'équation de Bolzmann que Villani développe un premier questionnement. Afin de bien comprendre le problème qu'il se pose, il va approfondir et apprendre de nouvelles connaissances grâce à la lecture de la littérature existante. Ce travail lui permet ensuite de poser précisément le problème à résoudre. La recherche de ce problème va l'amener, en appui sur ses connaissances anciennes et nouvellement apprises, à en construire de nouvelles pour avancer dans la résolution. Il y a donc un véritable mouvement dialectique entre les connaissances mathématiques (acquises, apprises, en construction) et le problème (comprendre le problème, poser la question, résoudre) dans le processus de genèse d'un théorème. Si ces allers et retours entre les connaissances mathématiques et le problème sont bien illustrés dans le témoignage de Villani, la nature de ces connaissances ainsi que les rouages mécaniques de la découverte sont plus obscurs. Lorsqu'il évoque ses « dix-huit ans de pratique mathématique » (Ibid. p. 154), englobe-t-il ses connaissances heuristiques ? Comment se créent les liens entre les connaissances et le problème ? Mais montrer ces aspects de la recherche mathématique n'était pas l'objectif de son livre.

e. Conclusion

André Weil, dans son entrevue avec le périodique *Pour la Science*, dit qu'« il n'est pas possible de donner une description générale [du mécanisme de la découverte] ; on peut tout au plus chercher à décrire son expérience personnelle » (Weil, 1994, p. 48). Ce point de vue rejoint celui d'Hadamard qui a cherché à décrire les étapes du processus de découverte et non son mécanisme. En effet, le processus de découverte reposant sur les représentations mentales et les modes de pensée des mathématiciens est différent selon les schémas de pensée de chacun. Hadamard dit d'ailleurs à ce sujet que les étapes du processus de découverte « semblent avoir lieu de façon analogue chez beaucoup de spécialistes des recherches mathématiques » mais qu'au contraire, la pensée mathématique prend différentes voies qui sont « loin d'être les mêmes pour tous » (Hadamard, 1993, p. 96). Villani exprime également ce point de vue puisqu'il dit d'une part que « le processus de découverte est commun à toutes les branches » (op.cit. interview le Nouvel Observateur, 23 août 2012) mais d'autre part, que la manière de faire des mathématiques est différente : « [...] les mathématiques se parlent partout. Même si le style varie. » (op.cit. interview Le Monde, 14 septembre 2012). C'est également ce que Thurston (1995) a mis en évidence dans son article *Preuves et progrès en mathématiques.*

L'étude des différents ouvrages sur le processus de découverte mathématique nous permet d'identifier ces similitudes et des différences. Une première similitude est que pour tous ces mathématiciens, faire des mathématiques, c'est avant tout faire des associations : des connexions entre les différents domaines des mathématiques, des associations d'images ou de concepts, des associations d'idées, etc. Et cette logique d'associations d'idées est à la source de toute créativité. Nimier ajoute que c'est elle qui « préside à la construction des représentations diverses des mathématiques » (Nimier, 1989, p. 109). Un second point à mettre en évidence est que la plupart des mathématiciens décrivent leurs expériences de découverte mathématique en quatre étapes sous la forme décrite par Poincaré puis Hadamard. Ils reconnaissent le rôle de l'intuition dans les premières phases de travail puis l'importance de la phase de vérification et de démonstration pour finaliser la découverte. Ils notent une différence de méthodes entre ces deux phases de travail, la première étant guidée par l'inspiration, une certaine liberté de penser, alors que la seconde est dirigée par la logique et une certaine rigueur. Concernant les motivations des chercheurs, nous pouvons pointer une certaine diversité et variété des réponses mais nous retenons qu'elles ont souvent trait à un aspect affectif comme une sensibilité esthétique ou une sensation de plaisir. Un autre élément que nous relevons de cette étude est que les discours des mathématiciens ne s'accordent pas sur l'appropriation du travail des pairs. En effet, certains préfèrent étudier les œuvres de leurs prédécesseurs alors que d'autres ne les regardent qu'après avoir eux-mêmes travaillé sur un sujet. Le rôle de la communauté mathématique dans la création n'est pas évoqué dans certains discours alors que Thurston et Villani en montrent l'importance. Enfin, un dernier point qui n'est pas toujours mentionné par les mathématiciens et qui nous semble pourtant au cœur de l'activité de recherche mathématique, est l'importance des connaissances mathématiques et surtout, de la dialectique entre les connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. L'omission de cet aspect dans certains écrits, notamment dans celui de Poincaré, peut s'expliquer par le fait que sa conférence était destinée à d'autres mathématiciens et que ces derniers sont conscients de l'importance du bagage mathématique dans leur activité. Dans l'enquête sur les méthodes de travail des mathématiciens, certains chercheurs évoquent cet élément en répondant aux questions concernant les conseils à donner aux jeunes mathématiciens. Le témoignage de Villani montre l'importance du bagage mathématique lors de certaines phases de la recherche mathématique, notamment lors du travail préparatoire ou de la vérification. Enfin, nous supposons que cela a également un lien avec l'objectif de telles études qui se voulaient être une réflexion sur le processus de découverte en mathématiques et non ériger une méthode de la découverte en mathématiques, comme l'ont fait Pólya (1945) ou Lakatos (1976).

5.1.2 Sur l'heuristique de la découverte

Dans ce paragraphe, nous présentons trois ouvrages sur l'heuristique de la découverte mathématique, écrits par deux mathématiciens hongrois célèbres : les livres de Pólya *How to solve it* (1945) et *Mathematics and plausible reasoning* (1954) et l'essai de Lakatos *Proofs and Refutations* (1976). Dans la suite, nous nous référerons aux traductions françaises de ces textes : *Comment poser et résoudre un problème* (Pólya, 1989), *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (Pólya, 1958) et *Preuves et réfutations* (Lakatos, 1984).

a. Pólya

L'ouvrage de Pólya (1945), *How to solve it*, est une référence en matière d'heuristique [11] sur la résolution de problèmes en mathématiques. L'auteur a écrit ce livre à partir de nombreuses études de méthodes de résolution de problèmes très variés, en appui sur sa propre expérience.

> C'est en essayant de comprendre non seulement la solution de tel ou tel problème, mais aussi les raisons et le processus de cette solution, en tentant d'expliquer ces raisons et ce processus, qu'il fut conduit à écrire le présent ouvrage. (Pólya, 1989, p. XIV)

L'auteur met en évidence l'importance de la résolution de problèmes dans l'activité mathématique, en particulier parce qu'elle peut faire connaître « le charme de la découverte et en goûter le triomphe » (Pólya, 1989, p. XIII). Or le plaisir des mathématiques entraîne un certain intérêt à faire des mathématiques. Pólya préconise ainsi aux enseignants de « piquer la curiosité » de leurs élèves en proposant des problèmes à résoudre, en rapport avec leurs connaissances. Ce livre vise ainsi à aider les enseignants à développer chez leurs élèves l'aptitude à résoudre des problèmes mais également, à aider les élèves eux-mêmes à développer leurs propres aptitudes. L'auteur convient également que cet ouvrage peut intéresser toute personne s'intéressant à l'étude des voies et moyens de l'invention et de la découverte.

Dans ce paragraphe, nous présentons dans un premier temps la méthodologie de résolution de problèmes proposée par Pólya comprenant quatre étapes : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution et revenir sur la solution. Dans un second temps, nous mettons en évidence un aspect récurrent dans l'ouvrage : une dialectique entre l'utilisation des connaissances et l'aptitude à résoudre des problèmes. Enfin, nous discuterons de la nature et du rôle du raisonnement plausible dans la résolution de problèmes.

Une méthodologie en quatre étapes

Pólya décrit une méthodologie de résolution de problèmes en quatre étapes :

> Tout d'abord il faut comprendre le problème, c'est-à-dire voir clairement ce qui est demandé. En second lieu, il faut saisir le lien qui existe entre les divers éléments, voir ce qui unit l'inconnue aux données pour trouver l'idée de la solution, pour dresser un plan. Troisièmement, mettre notre plan à exécution ; enfin, revenir en arrière sur la solution, une fois qu'elle est acquise, la passer au crible et la discuter. (Pólya, 1989, p. 11)

Comprendre le problème. En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé. La plupart du temps, le simple fait de ne pas bien maîtriser la signification d'une partie même infime du problème empêche de poursuivre le raisonnement. Pólya propose certaines questions références ayant pour objet de vérifier que l'on a bien tout compris. Une première série de questions permet de se demander si la compréhension verbale du problème est acquise : compréhension des différents termes de l'énoncé, de la structure logique donnée(s)/condition(s)/inconnue(s).

Exemples : Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ? Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue ? Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?

11. Pour Pólya (1989, p. 93), l'heuristique s'efforce de comprendre la méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier les opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles à l'application de cette méthode. Nous ajoutons que l'heuristique se distingue de la méthodologie en ce sens qu'elle est plus une réflexion sur l'activité intellectuelle du chercheur que sur les voies objectives de solution.

Ces premières questions visent ainsi à faire connaissance avec le problème. Pólya donne une seconde série d'items dont l'objectif est de travailler pour mieux comprendre.

Exemples : Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée. Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

Répondre à ces items permet un premier contact avec les différents objets et concepts mathématiques en jeu dans le problème. Enfin, Pólya précise que comprendre le problème ne suffit pas pour s'engager dans sa résolution, il faut également avoir le désir de le résoudre. Le choix du problème et sa présentation sont alors deux éléments décisifs pour la compréhension et pour l'intérêt, notamment pour les élèves.

Concevoir un plan. Le deuxième principe posé par Pólya est la conception d'un plan pour la résolution du problème. Il s'agit de chercher des idées qui donnent, de manière un peu générale et parfois imprécise, une direction globale, un schéma de raisonnement ou une suite d'étapes (calculs, constructions, vérifications, etc.) qui amènent à la résolution du problème.

> Nous avons un plan lorsque nous savons, au moins en gros, quels calculs, quels raisonnements ou constructions il nous faudra effectuer pour trouver l'inconnue. (Pólya, 1989, p. 13)

Cette étape est primordiale dans le sens où l'essentiel dans la solution d'un problème est de concevoir l'idée d'un plan, mais elle est difficile car elle fait appel à l'intuition et à l'imagination. En effet, Pólya explique que cette idée peut provenir progressivement « ou bien, après des essais apparemment infructueux et une période d'hésitation, on peut avoir soudain un éclair, une "idée lumineuse" » (Pólya, 1989, p. 13-14). Il poursuit en précisant que les bonnes idées s'appuient sur l'expérience passée de résolution de problèmes et sur les connaissances précédemment acquises. Il insiste sur l'importance de celles-ci, des problèmes résolus ou des théorèmes démontrés, qui sont « des matériaux nécessaires à la résolution de problèmes » (Ibid. p. 14). Pólya propose une première série de questions références dont l'objet est précisément de faire naître des idées grâce aux connaissances précédemment acquises.

Exemples :

> Avez-vous déjà rencontré ce problème ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
>
> Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ? Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
>
> Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
>
> Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?

Si cette première série de questions ne permet pas de faire naître les enchaînements d'idées qui conviennent, Pólya propose une autre méthode : changer de point de vue sur le problème et en explorer les divers aspects : soit en ayant recours à un problème plus simple ou analogue mais en relation avec le problème initial, soit en cherchant à ne résoudre qu'une partie du problème ou encore en modifiant le problème.

Exemples :

> Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ?
>
> Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui

> s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ?
>
> Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?
>
> Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ? Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

Pour résumer, il faut essayer de faire varier le problème en utilisant divers moyens tels que la généralisation, la particularisation, l'emploi de l'analogie, le fait de négliger une partie de la condition, le recours aux définitions, etc. Nous reviendrons sur ce point central de la résolution de problèmes dans le paragraphe intitulé *faire varier le problème.*

Mettre le plan à exécution. La conception du plan a fourni une ligne directrice pour un schéma de démonstration. Le troisième principe de Pólya consiste alors à exécuter la stratégie adoptée et en particulier, à en examiner tous les détails. Cette étape est plus facile que les précédentes mais elle demande de savoir faire preuve de patience. Le plan ne doit plus contenir de zones obscures où une erreur pourrait se cacher. L'auteur propose deux manières de s'assurer de l'exactitude d'un détail du raisonnement : soit par « intuition », soit à l'aide d'une « démonstration formelle », et précise que la question essentielle est que l'élève doit être convaincu honnêtement de l'exactitude de chaque détail de sa démonstration. Il propose alors deux questions références : Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

Revenir sur la solution. La dernière étape proposée par Pólya consiste à porter une vue d'ensemble sur le problème en revenant à la solution. L'auteur précise l'importance de cette phase, souvent négligée :

> En se reportant à la solution, une fois celle-ci bien acquise, en reconsidérant et réexaminant le résultat et le chemin qui les y a conduits, ils pourraient consolider leurs connaissances et développer leurs aptitudes à la solution des problèmes. (Pólya, 1989, p. 19)

Un problème n'est jamais terminé, il reste toujours quelque chose à comprendre ou à apprendre. Un travail sur la solution permet par exemple de l'améliorer et de mieux la comprendre. Pólya propose trois types de travaux pour cette étape. Le premier est un travail de vérification du résultat afin de débusquer d'éventuelles erreurs (Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?). Le second est un travail de démonstration. Afin de mieux comprendre un résultat, il peut être utile de chercher une seconde démonstration ou de simplifier la première démonstration (Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?). Enfin le troisième travail consiste à prolonger le problème en mettant en évidence les liens avec d'autres problèmes ou en cherchant une application du problème (Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?).

Cette méthodologie en quatre étapes proposée par Pólya est à mettre en parallèle avec le processus de découverte ou d'invention mathématique décrit par Poincaré et Hadamard. En effet le travail préparatoire correspond à l'étape *comprendre le problème*, l'incubation et l'illumination se passent pendant *la conception du plan* et les étapes de vérification, finition et continuation correspondent à *la mise à exécution du plan* ainsi qu'au *retour sur la solution.* C'est en ce sens que Pólya donne une heuristique au processus de découverte mathématique. Comme le mentionnent ces trois auteurs, une phase centrale du processus de découverte est de choisir les « bonnes idées ». Si Poincaré et Hadamard mentionnent avant tout l'esthétique comme moteur, Pólya met l'accent sur une action essentielle : faire varier le problème, en appui sur l'utilisation des connaissances antérieures d'une part et sur le développement d'heuristiques d'autre part. Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons à ce processus dialectique connaissance/heuristique.

Faire varier le problème : un processus dialectique heuristique/connaissance. Comme nous l'avons mentionné en introduction, Pólya, dans son ouvrage, met en avant l'importance de la résolution de problèmes pour l'apprentissage des mathématiques. Il rappelle ainsi que « nos connaissances mathématiques [...] ne se fondent pas sur les seules preuves formelles. S'il en existe de solides, elles reposent largement sur une base expérimentale renforcée par tout problème dont le résultat a été soigneusement vérifié » (Pólya, 1989, p. 156). Ainsi, selon l'auteur, résoudre des problèmes permet d'acquérir des connaissances mathématiques tout en développant les aptitudes à résoudre des problèmes.

> Si [...] l'élève parvient à résoudre le problème qui lui est proposé, il développe par là même son aptitude à résoudre des problèmes. (Pólya, 1989, p. 9)
>
> Grâce à de tels conseils [questions posées par le professeur] l'élève découvrira sans doute la façon d'utiliser les questions et les suggestions, et acquerra ainsi des connaissances plus importantes que celles d'un simple fait mathématique. (Pólya, 1989, p. 10)

A travers les différents articles de son petit dictionnaire heuristique, l'auteur montre que la résolution de problèmes se réalise dans un processus dialectique entre utilisation des connaissances et développement d'heuristiques. Nous allons illustrer cela avec l'étude d'une étape particulière dans la résolution d'un problème : la variation du problème.

A l'instar de nombreux mathématiciens, Pólya met en évidence l'importance de faire des liens pour résoudre un problème en mathématiques. Dans la description de sa méthodologie, on peut en distinguer de plusieurs types. D'une part, des liens internes au problème (entre les données, les conditions et les inconnues : « En somme, résoudre un problème, c'est essentiellement trouver le lien entre les données et l'inconnue » (Pólya, 1989, p. 102)) et d'autre part, des liens externes entre le problème et les connaissances en jeu (Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?), entre le problème et d'autres problèmes (Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ? pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?) ou plus généralement entre différents domaines mathématiques. Faire ces différents liens, pour la personne qui cherche un problème, est primordial car cela permet d'enrichir le problème mais surtout d'enrichir sa conception du problème.

> Pour essayer de trouver une solution, il nous faut à différentes reprises modifier notre point de vue, notre façon de considérer le problème ; il nous faut sans cesse changer de position. Notre conception du problème sera probablement incomplète au début de notre travail ; notre optique sera différente lorsque nous aurons un peu avancé et le sera davantage encore lorsque nous serons sur le point de tenir la solution. (Pólya, 1989, p. 11)

Les questions formulées par Pólya dans les différentes étapes de sa méthodologie visent à faciliter ces diverses mises en relation. Les moyens pour y parvenir reposent en particulier sur la variation du problème, étape « essentielle » (Ibid. p. 208) pour résoudre un problème.

Pólya mentionne quatre critères importants pour résoudre un problème :

- La mobilisation de connaissances antérieures telle que des problèmes antérieurs déjà résolus, des théorèmes connus ou des définitions.
- L'organisation de ces connaissances, c'est-à-dire trouver des combinaisons de ces connaissances tout en les adaptant au problème proposé.
- La variation du problème pour faire évoluer sa conception du problème.
- Un raisonnement heuristique pour prévoir les étapes qui constitueront le raisonnement final.

Il précise que la mobilisation et l'organisation des connaissances sont difficilement séparables : « la mémoire ne jouera qu'en faveur de faits plus ou moins liés au but poursuivi, et l'on n'aura à lier et à organiser que les matériaux dont on s'est souvenu et que l'on a mobilisés » (Pólya, 1989, p. 182). La variation du problème demande une mobilisation et une organisation des connaissances dans la mesure où elle cherche à faire le lien entre les connaissances précédemment acquises et le problème en apportant de nouveaux éléments, en créant de nouveaux contacts, « de nouvelles possibilités de "toucher" des éléments susceptibles de jouer un rôle dans la question qui nous occupe » (Pólya, 1989, p. 209). Pólya décrit plusieurs méthodes pour faire varier le problème : se reporter à la définition, décomposer et recomposer le problème, résoudre un problème auxiliaire, généraliser, particulariser, raisonner par analogie. Nous les détaillons ci-dessous.

Se reporter à la définition. Pólya décrit un processus type de retour à la définition :

> On introduit des éléments appropriés dans la conception du problème ; puis sur la base de la définition, on établit des rapports entre les éléments introduits. Si ces rapports expriment complètement la signification du terme, nous avons utilisé la définition du terme technique et l'ayant utilisée, nous avons éliminé ce dernier. (Pólya, 1989, p. 68)

Cette méthode consiste en une variation du problème dans la mesure où on opère une modification du problème en remplaçant le terme technique par de nouveaux éléments et de nouveaux rapports entre ces éléments. Pólya précise que le mathématicien se reporte aux définitions pour établir les rapports réels, dissimulés par les termes techniques, qui existent entre les objets mathématiques. Cette méthode repose donc sur les objets et les concepts associés : en appui sur les connaissances, on cherche à introduire et établir de nouveaux rapports entre les objets. Pólya souligne alors l'importance des connaissances acquises antérieurement mais précise que celles-ci ne suffisent pas, il faut savoir les utiliser à bon escient :

> Si nous connaissons de nombreux théorèmes applicables à la notion, si nous avons une grande expérience de la façon dont il faut l'employer, il y a des chances pour que nous mettions la main sur un théorème utile qui comporte cette notion. (Pólya, 1989, p. 69)

Décomposer et recomposer le problème. Cette méthode consiste d'abord à comprendre le problème comme un tout puis à en déterminer les points de détail qui peuvent se révéler essentiels. Ces éléments sont ensuite examinés finement. En dernier lieu, il faut recomposer le problème en combinant les éléments d'une manière différente pour en faire un nouveau problème (par exemple un problème similaire ou un problème plus simple). Pólya propose trois combinaisons simples pour obtenir un nouveau problème : garder l'inconnue et changer les autres éléments (données et conditions) ; garder les données et changer les autres éléments (inconnue et condition) ; changer à la fois inconnue et données. Il précise cependant que ces combinaisons ne permettent pas de résoudre certains problèmes difficiles qui peuvent se prêter à « des combinaisons exceptionnelles, originales et l'ingéniosité de celui qui les résout se révèle par l'originalité de ses combinaisons [12] » (Pólya, 1989, p. 57).

Introduire des éléments auxiliaires. Les éléments auxiliaires sont des éléments nouveaux introduits dans le problème initial pour aider à sa résolution. Il peut s'agir d'objets, d'inconnues ou de théorèmes. On peut les introduire en employant des résultats connus ou en se reportant aux définitions. Cette méthode repose sur les connaissances précédemment acquises et sur des heuristiques. Elle peut conduire à de nouveaux problèmes notamment des problèmes auxiliaires dont l'étude ne se fait pas pour eux-mêmes mais pour aider à la résolution du problème initial.

Généraliser.

> La généralisation consiste à passer de l'examen d'un objet à celui d'un groupe d'objets parmi lesquels figure le premier, ou encore de l'examen d'un groupe limité d'objets à celui d'un groupe plus important de ces mêmes objets. (Pólya, 1989, p. 91)

Pólya mentionne deux types de généralisation. Le premier consiste à établir une loi générale à partir d'une observation particulière. Il donne l'exemple suivant :

> Si par hasard, nous rencontrons la somme $1+8+27+64 = 100$, nous remarquons qu'elle peut s'exprimer sous la forme curieuse $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$. Il est alors naturel de se poser la question : arrive-t-il souvent qu'une somme de cubes successifs, tels que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$, soit un carré ? (Pólya, 1989, p. 91)

La généralisation s'est effectuée par le passage de constantes (4 et 10) à des variables (n et un carré). Le second type de généralisation présenté par Pólya est un « plongement » du problème dans un cadre plus général. Il donne un exemple en géométrie où le problème initial est le suivant : « Une droite et un octaèdre régulier sont dans une position relative donnée. Trouver un plan qui passe par la droite et coupe le volume en deux parties égales » (Pólya, 1989, p. 92). Pour résoudre ce problème, il propose de résoudre le problème suivant, plus général : « Une ligne droite et un solide ayant un centre de symétrie sont dans une position relative donnée. Trouver un plan qui passe par la droite et coupe le solide en deux parties égales » (Ibid.). Dans cet exemple, la généralisation s'opère dans une modification des données où on supprime un critère (le solide est un octaèdre). Il précise qu'en inventant le second problème, plus général, il fait « ressortir la propriété essentielle de l'octaèdre par rapport au problème initial, à savoir qu'il a effectivement un centre de symétrie » (Ibid.).

Particulariser. La particularisation est « le fait de passer de la considération d'un ensemble d'objets donné à celle d'un ensemble plus petit — ou même d'un seul objet — contenu dans l'ensemble donné » (Pólya, 1989, p. 137). Plusieurs emplois de la particularisation sont mentionnés par Pólya : la vérification, l'élaboration de preuve ou l'aide à la résolution. La particularisation peut permettre de vérifier en étudiant un ou plusieurs cas particuliers un théorème qui semble insolite mais également la solution d'un théorème. Concernant l'élaboration de preuve, elle peut permettre de réfuter une proposition générale sur une certaine catégorie d'objets en trouvant dans cet ensemble un objet ne la vérifiant pas. Il s'agit alors d'un contre-exemple. Enfin elle peut constituer une aide précieuse à la résolution d'un problème en donnant une idée de la direction dans laquelle il faut chercher une preuve. Pólya précise que l'étude de ces extrêmes est particulièrement instructive :

> En les examinant de près, nous arriverons peut-être à réfuter l'affirmation générale, car ces cas extrêmes risquent forts d'être négligés par les inventeurs de

12. Cet extrait est à rapprocher du témoignage de Villani.

> généralisations. Si au contraire nous constatons que la proposition est vérifiée même dans le cas extrême, nous tirerons de cette constatation une preuve par induction d'autant plus solide que les risques de réfutation étaient grands. (Pólya, 1989, p. 139)

Notons que, comme dans la généralisation, deux types de particularisation sont possibles. Le premier pose le problème dans un cadre plus restrictif (par exemple poser le problème pour les nombres pairs dans un problème initial concernant tout nombre entier). La particularisation s'effectue par l'introduction de conditions supplémentaires (dans l'exemple, n pair). Le second type de particularisation consiste en l'étude de cas particuliers (dans notre exemple, étudier le problème pour des valeurs paires de n), le passage s'opère par le remplacement d'une variable (n) par des objets déterminées ($n = 2, 4, 6$).

Faire des analogies. Pólya dit que deux systèmes sont analogues si on trouve les mêmes relations, bien définies, entre leurs éléments respectifs. Par exemple, dans un plan, un triangle est analogue dans l'espace à un tétraèdre. La relation entre triangle et plan est la même que celle entre tétraèdre et espace : le triangle et le tétraèdre sont limités par le nombre minimum d'éléments simples. Faire des analogies permet d'établir des liens précieux entre des éléments. Pour résoudre un problème, Pólya propose ainsi d'utiliser différents types d'analogies : « nous pourrons souvent utiliser la solution d'un problème analogue plus simple, en empruntant soit sa méthode, soit son résultat, soit les deux à la fois » (Pólya, 1989, p. 50). Il précise cependant que cela est parfois plus compliqué et qu'une reconsidération de la solution est nécessaire. Il faut alors essayer de la transformer, de la modifier ou d'en chercher d'autres afin de trouver celle qui s'appliquera au problème initial. Pólya mentionne également l'usage de l'analogie pour tirer des conclusions, il s'agit de l'inférence par analogie.

> L'inférence par analogie paraît être le type de conclusion le plus courant, et sans doute le plus utile. Il produit des hypothèses plus ou moins plausibles que viendront peut-être confirmer l'expérience ou un raisonnement plus serré. (Pólya, 1989, p. 50-51)

Cette citation montre le rôle de l'analogie dans la phase de conception du plan. Il permet de produire un raisonnement plausible pour progresser dans la résolution du problème. Plus généralement, les différentes méthodes de variation du problème sont des moyens pour prévoir les éléments du plan et construire un raisonnement heuristique. Dans le paragraphe ci-dessous nous donnons quelques éléments sur la nature et le rôle de ce type de raisonnement dans la résolution de problèmes.

Nature et rôle du raisonnement plausible dans la résolution de problème

A la suite de son ouvrage de 1945, *How to solve it*, Pólya écrit, en 1954, un essai philosophique intitulé *Mathematics and plausible reasoning*. En appui sur ces deux écrits, nous discuterons de la nature et du rôle donné au raisonnement plausible par cet auteur dans la résolution de problèmes.

Pólya définit le raisonnement plausible dans sa comparaison avec le raisonnement démonstratif, par leur finalité différente d'une part et par leur nature différente d'autre part. La finalité d'un raisonnement démonstratif est d'assurer la validité des connaissances mathématiques alors que celle d'un raisonnement plausible est la justification d'hypothèses. Une preuve mathématique est un exemple de raisonnement démonstratif alors que la preuve inductive du physicien appartient au raisonnement plausible. Pólya précise que la nature même de ces raisonnements est différente : « Le raisonnement démonstratif est sûr, à l'abri des controverses et définitif. Le raisonnement plausible est hasardeux, il peut être controversé et il est provisoire » (Pólya, 1958, p. IX). Il ajoute que ces deux raisonnements ne sont pas soumis aux mêmes règles de fonctionnement : « Le raisonnement démonstratif a des règles rigides, codifiées et clarifiées par la logique (formelle ou démonstrative) qui est la théorie du raisonnement démonstratif. Les règles du raisonnement plausible sont mouvantes et il n'en n'existe aucune théorie qu'on puisse comparer, sous le rapport de la clarté, à la logique démonstrative ou sur laquelle un accord comparable puisse être réalisé » (Ibid.).

Pólya différencie également ces deux types de raisonnements par leur rôle dans le travail mathématique.

> Le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve ; mais la preuve est découverte, par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée. (Pólya, 1958, p. X)

L'acquisition de nouvelles connaissances implique l'intervention du raisonnement plausible, elle ne peut pas reposer uniquement sur un raisonnement démonstratif. Cet aspect montre que les deux raisonnements ne sont pas contradictoires mais au contraire, qu'ils se complètent. Le raisonnement plausible permet de concevoir le plan et de conduire au raisonnement final. Ce dernier est alors rigoureusement vérifié lors de la mise à exécution du plan. Pólya utilise une métaphore architecturale pour expliciter les liens et rôles des deux raisonnements dans la résolution de problèmes.

> Nous pouvons nous contenter de raisonnements provisoires simplement plausibles pour nous conduire au raisonnement final et rigoureux. De la même façon qu'on emploie des échafaudages pour soutenir un pont pendant sa construction. Lorsque, celle-ci étant suffisamment bien avancée, on enlève les échafaudages, le pont doit se maintenir en place lui-même. De même, lorsque la solution est suffisamment avancée, nous écartons tous les raisonnements provisoires et simplement plausibles et le résultat doit être étayé par la seule rigueur du raisonnement. (Pólya, 1989, p. 118)

Pour résumer, le raisonnement plausible est un raisonnement que l'on considère comme non final et non rigoureux mais simplement comme provisoire. Son but est de découvrir la solution du problème à traiter, non de la démontrer. Il intervient dans la construction de la démonstration rigoureuse de la solution comme l'échafaudage dans la construction d'une maison. Ce raisonnement est souvent fondé sur l'induction ou sur l'inférence par analogie. Illustrons ces différents points à l'aide d'un exemple faisant intervenir deux types de raisonnements : l'induction et l'induction mathématique. Le raisonnement inductif est une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leurs combinaisons. L'induction essaie de découvrir derrière l'observation la régularité et la cohérence. Ses instruments les plus utilisés sont la généralisation (remplacer une constante par une variable), la particularisation (remplacer une variable par une constante) et l'analogie (mettre en relation des éléments d'objets similaires). Pólya précise qu'il faut distinguer l'induction de l'induction mathématique : l'induction est un raisonnement plausible, provisoire et expérimental alors que l'induction mathématique (souvent appelée raisonnement par récurrence) est une démonstration formelle et déductive.

Exemple : On peut observer que $1 + 8 + 27 + 64 = 100$. Cette observation peut être présentée sous la forme suivante : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$. On peut alors se poser la question générale concernant la somme de cubes successifs $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ qui soit un carré. Pour étudier cette question, on peut examiner la somme pour quelques valeurs de n :

$n=1$	1	$=1$	$=1^2$
$n=2$	$1+8$	$=9$	$=3^2$
$n=3$	$1+8+27$	$=36$	$=6^2$
$n=4$	$1+8+27+64$	$=100$	$=10^2$
$n=5$	$1+8+27+64+125$	$=225$	$=15^2$

L'induction suggère alors le théorème suivant : *La somme des n premiers cubes est un carré.* L'étude de ce problème peut se poursuivre en remarquant que $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = (1+2+3+...+n)^2$, toujours par induction :

$n=1$	1	$=1^2$	
$n=2$	$1+8$	$=3^2$	$=(1+2)^2$
$n=3$	$1+8+27$	$=6^2$	$=(1+2+3)^2$
$n=4$	$1+8+27+64$	$=10^2$	$=(1+2+3+4)^2$
$n=5$	$1+8+27+64+125$	$=15^2$	$=(1+2+3+4+5)^2$

Or on sait que $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, on peut donc transformer le résultat obtenu par la formulation suivante :

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démontrons maintenant ce résultat par une preuve par induction mathématique. On suppose que cette égalité est vraie pour un entier $n>0$ et on va montrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n+1$.

- Pour $n=1$, $(\frac{1\times 2}{2})^2 = 1^2$ et $1^2 = 1^3$.
- Supposons que l'égalité soit vraie au rang n et montrons que $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3 = (\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$. Or,
  $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2+(n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{n^2}{4}+n+1) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = (\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$. Le passage de n à $n+1$ est établi [13].

L'induction a permis d'affiner la première expression du théorème (La somme des n premiers cubes est un carré), issue d'une généralisation. La nouvelle expression qui en découle ($1^3+2^3+3^3+...+n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$) est plus explicite, plus facile à soumettre à l'expérience, à vérifier que la première. C'est d'ailleurs en partant de cette expression qu'une preuve a été construite par induction mathématique. Ainsi l'induction a constitué une contribution importante à la démonstration finale.

Conclusion.

Pólya a écrit ses ouvrages (1945, 1954) en appui sur sa propre pratique de résolution de problèmes. Conscient que cela puisse constituer un inconvénient, il prévient les lecteurs dans la préface de *How to solve it* :

> Se rendant parfaitement compte de la possibilité de critiques venant des horizons les plus divers, et pleinement conscient de ses limites, l'auteur se permet toutefois de faire remarquer qu'il possède une certaine expérience de la solution des problèmes et de l'enseignement des mathématiques à des stades divers. (Pólya, 1989, p. XV)

Il reconnaît une autre limite à son ouvrage, elle concerne le type de problèmes mathématiques traités : « Le présent exposé toutefois ne donne en principe comme exemples que des problèmes de mathématiques élémentaires ce qui a imposé certaines limites à notre étude »

13. Nous utilisons ici les termes employés par Pólya. En langage moderne, il s'agit d'une preuve par récurrence avec initialisation et hérédité.

(Pólya, 1989, p. 97). Cependant, cet ouvrage restant une référence en heuristique de résolution de problèmes, nous pouvons penser que sa réflexion a une portée assez générale et que nombre de mathématiciens et d'enseignants se retrouvent dans ses propos.

Concernant les quatre étapes de la méthodologie (comprendre le problème, concevoir un plan, mettre à exécution le plan et revenir à la solution), nous voulons souligner un élément qui nous semble important et qui n'est pas toujours explicite. En effet, il nous semble qu'il ne s'agit pas de phases qui s'enchaînent nécessairement et successivement dans cet ordre précis. Certes, comprendre en partie le problème est nécessaire avant de concevoir un plan. Cependant il se peut que la conception du plan invite à revenir à un questionnement de l'énoncé du problème et donc à l'étape de compréhension du problème. De même la mise à exécution du plan peut soulever une faille dans la conception du plan et nécessiter le retour à cette étape, pour concevoir un nouveau plan. Nous pensons donc sa méthodologie davantage comme un processus interactif entre les différentes phases.

Nous voulons également souligner que de notre point de vue, la méthodologie de Pólya permet de prendre en compte la dimension expérimentale des mathématiques, notamment dans l'étape de variation du problème. En effet, cette étape s'effectue en appui sur les connaissances antérieures et sur l'expérience de résolution de problèmes, dans un processus dialectique entre la manipulation des objets mathématiques en jeu et l'élaboration d'éléments théoriques.

Les ouvrages de Pólya (1945, 1954) s'insèrent dans la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. La préface de l'ouvrage de 1958 place ainsi son essai « dans le développement de la pensée didactique » (Couffignal dans Pólya, 1958, p. VII). Pólya déplore que les mathématiques à l'école soient présentées à « la manière euclidienne, comme une science systématique et déductive alors que la mathématique en voie de formation se présente comme une science expérimentale, inductive » (Ibid. p. XV). Il mentionne également que seul le raisonnement démonstratif est appris à l'école, au détriment du raisonnement plausible, pourtant essentiel dans la découverte de la solution d'un problème. Un objectif de *How to solve it* est alors d'aider les enseignants et les élèves à la résolution de problèmes, en référence au travail du mathématicien. Les travaux de Schoenfeld (1985) montrent que cet objectif est partiellement atteint. En effet, ce dernier, en appui sur les travaux de Pólya, montre qu'il est nécessaire de détailler davantage le tableau des questions de Pólya. Cela a donné lieu au courant Problem-solving (que nous avons présenté dans le chapitre 3).

Dans le paragraphe suivant, nous présentons un autre ouvrage célèbre sur l'heuristique de la découverte mathématique : *Proofs and refutations* de Lakatos. Ce dernier prolonge les travaux de Pólya en s'intéressant plus spécifiquement à décrire une heuristique propre aux problèmes de preuve, comme il le précise dans cette note :

> La phase de *conjecture* et d'*essai* de la relation [il s'agit de la relation d'Euler sur les polyèdres réguliers $S - A + F = 2$] est étudiée par Pólya (1954, pp. 21-30). Pólya s'est arrêté là et ne traite pas la phase de *preuve*, bien que naturellement il souligne le besoin d'une heuristique propre aux « problèmes de preuve » (Pólya, 1954, p. 144). Notre discussion commence là où Pólya s'arrête. (Lakatos, 1984, p. 8, souligné par l'auteur)

b. Lakatos

L'ouvrage de Lakatos (1976), *Proofs and Refutations*, est un essai sur la logique de la découverte mathématique fondée sur la réfutation et le rôle de l'erreur dans le développement des connaissances mathématiques. L'auteur avance la thèse selon laquelle les connaissances mathématiques s'accroissent dans une dialectique de la preuve et de la réfutation et les contre-exemples jouent un rôle fondamental dans les processus d'émergence de preuves.

> Les mathématiques se développent dans l'amélioration incessante des conjectures grâce à la spéculation et à la critique, grâce à la logique des preuves et des réfutations. (Lakatos, 1984, p. 5)

Il caractérise ainsi l'heuristique mathématique par « la mise en œuvre de conjectures, preuves et réfutations » (Ibid. p. 94). Sa méthode de preuve et réfutation repose sur les cinq règles suivantes :

> Règle 1 : en présence d'une conjecture, mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation. Examiner la preuve avec précaution pour préparer une liste de lemmes non triviaux (la preuve non-analytique) ; trouver des contre-exemples à la fois à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local).
>
> Règle 2 : en présence d'un contre-exemple global, écarter votre conjecture, ajouter à la preuve analytique un lemme convenable, réfuté par le contre-exemple, et remplacer la conjecture écartée par une version améliorée en lui incorporant ce lemme sous forme de condition. Ne pas accepter qu'une réfutation soit écartée comme un monstre. Essayer d'expliciter tous les lemmes cachés.
>
> Règle 3 : en présence d'un contre-exemple local, vérifier s'il n'est pas non plus global. Si oui, il est aisé d'appliquer la règle 2.
>
> Règle 4 : en présence d'un contre-exemple local et non global, essayer d'améliorer la preuve analytique en remplaçant le lemme réfuté par un autre qui ne le soit pas.
>
> Règle 5 : en présence de contre-exemples, quel qu'en soit le type, essayer de trouver par une spéculation déductive un théorème plus profond pour lequel ce ne sont plus des contre-exemples. (Ibid. pp. 63-97)

Lakatos met en évidence le fait que les concepts mathématiques s'élaborent et se modifient progressivement, dans un processus dialectique, lorsque certaines preuves, où ils sont mis en œuvre, sont réévaluées du point de vue de leur validité. Cette évolution est provoquée par l'apparition de nouveaux problèmes, ou par une réorganisation des connaissances. Les définitions sont ainsi créées progressivement en fonction des problèmes.

Cette logique de la découverte mathématique, basée sur le rôle de l'erreur dans la construction des connaissances, amène Lakatos à proposer une méthode d'enseignement qui montre « la science telle qu'elle se fait », pour reprendre l'expression de Lévy-Leblond, par opposition à l'idée d'un développement linéaire et déductiviste des mathématiques :

> Pourquoi cette mise en scène mystique qui consiste à poser la définition avant la preuve ? [...] Énoncer la conjecture primitive, montrer la preuve, les contre-exemples et suivre l'ordre heuristique jusqu'au théorème et à la définition-éprouvette [i.e. née dans la preuve], dissiperait le mysticisme autoritaire des mathématiques abstraites et en ralentirait leur dégénérescence. (Lakatos, 1984, p. 196)

La modélisation de la découverte mathématique par Lakatos met en lumière l'intérêt de l'activité de résolution de problèmes pour les apprentissages mathématiques. Balacheff et Laborde, traducteurs de la version française de l'ouvrage de Lakatos, insistent, dans leur introduction, sur l'importance de cette heuristique pour le chercheur en didactique des mathématiques :

> La tentative de Lakatos pour une modélisation de la découverte mathématique apporte une vision revigorante et renouvelle l'enthousiasme des chercheurs qui avancent en se trompant, qui s'engagent dans des voies sans issue, qui ne savent même pas ce qu'ils veulent démontrer. A la recherche aussi bien de P que de sa négation, ils manient simultanément les exemples et les contre-exemples, les preuves et les réfutations. (Balacheff et Laborde dans Lakatos, 1984, p. xv)

> [...]
> Pour le chercheur en didactique cette tentative est d'autant plus importante qu'en démontrant un mécanisme de développement du savoir mathématique, elle met au jour le rôle central de la contradiction et du débat critique dans le progrès. (Ibid. p. xviii)

En didactique des mathématiques, Ouvrier-Buffet (2003) s'est spécifiquement intéressée aux travaux de Lakatos pour modéliser le processus de construction de définition à travers la description du processus de construction de concepts dans la dialectique des preuves et réfutations.

> C'est donc la recherche d'une preuve, l'étude d'une conjecture qui conduisent à la formation d'un ou plusieurs concepts, et ceci se traduit notamment par l'évolution des définitions de ceux-ci. Ainsi, des définitions, balisent en quelque sorte la formation du concept, traduisent son évolution. [...] D'après Lakatos, une procédure définitionnelle correspond à la formation du concept qui lui-même provient de la preuve. (Ouvrier-Buffet, 2003, p. 58)

Grâce à cette étude, elle a mis en évidence des processus de construction de définition, ainsi que différentes types de définition (*zéro-définitions* et *proof-generated definitions*) et leur rôle (Ouvrier-Buffet, 2003, p. 58-66). Elle a montré que, dans les travaux de Lakatos, la définition est perçue comme l'aboutissement d'un processus dans lequel prennent part des opérateurs et contrôles (génération d'exemples et de contre-exemples, fonction de preuve de la définition). Dans notre recherche, nous ne nous intéressons pas particulièrement au processus de construction de définition dans les processus de recherche, dans la mesure où l'élaboration de définitions n'est pas travaillée dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus (cf. l'analyse mathématique de la conjecture, chapitre 4). Ceci est lié à la nature des objets mathématiques en jeu qui sont déjà définis, et naturalisés pour le chercheur ou les élèves (à partir du lycée).

Pour notre recherche, nous retenons de cette modélisation de la découverte mathématique, l'aspect dialectique de l'activité de recherche mathématique entre la construction des connaissances et le développement des heuristiques. Comme l'heuristique décrite par Pólya, celle de Lakatos prend en compte la dimension expérimentale des mathématiques dans la phase d'élaboration de preuves, qui se réalise par un processus dialectique entre les preuves et les réfutations. En revanche, en accord avec Feferman, nous relevons une limite de la méthode de preuve et réfutation de Lakatos, en particulier pour explorer une conjecture comme celle d'Erdös-Straus. Feferman (1988) relève le point suivant concernant la méthode de Lakatos : la forme logique de la conjecture proposée par l'auteur est particulièrement simple. Il donne alors quelques exemples de théorèmes qui ne se prêtent guère à une analyse analogue. Ouvrier-Buffet (2003) donne une caractérisation des problèmes sur laquelle la modélisation de Lakatos est opératoire : des problèmes intra-mathématiques de recherche du domaine de validité d'une conjecture. En ce qui concerne la conjecture d'Erdös-Straus, elle ne rentre pas dans cette classe de problème et nous faisons l'hypothèse qu'elle peut être difficile à étudier à l'aide de la méthode de preuve et réfutation dans la mesure où il n'y a pas de recherche de contre-exemple global de la conjecture. Cependant, ce processus dialectique peut s'appliquer sur des sous-problèmes liés à la conjecture d'Erdös-Straus ou à des conjectures locales, avec dans ce cas, la recherche de contre-exemples locaux.

5.1.3 Conclusion

L'analyse d'épistémologie historique et contemporaine à partir de témoignages de mathématiciens sur le processus de découverte mathématique d'une part, et sur l'heuristique de la découverte d'autre part, met en évidence plusieurs aspects de l'activité mathématique de recherche :

- un processus en quatre étapes où s'alternent des phases de travail « conscient » et des phases de travail « inconscient », avec des méthodes de recherche différentes dans les phases d'invention et les phase de rédaction ;
- le rôle central de l'intuition dans la création mathématique ;
- le rôle d'une certaine sensibilité dans le choix d'un problème et dans la manière de le traiter ;
- le rôle de la communauté mathématique dans le processus de création et en particulier, des collaborations entre pairs ;
- le processus dialectique de l'activité de recherche mathématique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques (par exemple l'importance de faire des liens entre les notions, les problèmes déjà résolus, les méthodes, les domaines mathématiques, etc.) ;
- le caractère expérimental des heuristiques développées dans la résolution de problème de recherche.

Ces différentes caractéristiques du processus de découverte mathématique mettent en avant la dimension active de l'activité de recherche mathématique. Pour étudier plus finement les processus de recherche mis en œuvre par un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche, il nous semble ainsi intéressant de mieux comprendre les aspects suivants : le rôle de l'intuition (peut-on la provoquer ? si oui, comment la provoquer ?), l'importance du processus dialectique connaissances/heuristiques (comment y avoir recours ? comment le mettre en œuvre ?) et les ressorts de la dimension expérimentale (comment la favoriser ? comment permet-elle d'avancer dans la recherche d'un problème ?). Pour cela, nous avons développé la notion de « geste » de la recherche que nous présentons dans la partie suivante.

5.2 Sur l'émergence de gestes

La notion de « geste » issue de la philosophie des mathématiques nous a semblé pertinente à développer pour analyser l'activité effective de recherche d'un problème mathématique, dans la mesure où elle permet de prendre en compte la dimension active de la recherche, le rôle central de l'intuition dans le processus de création et les aspects dialectiques entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. Pour mettre en évidence ces éléments, nous nous sommes appuyée sur trois références philosophiques développant la notion de « geste » en mathématiques (Cavaillès, Châtelet et Longo). Nous les présentons dans le premier paragraphe de cette partie. Dans le second paragraphe, nous avons exploré l'usage de la notion de « geste » dans les travaux de didactique des mathématiques, dans la Théorie Anthropologique du Didactique d'une part et dans les travaux de Dias d'autre part. Enfin, dans un troisième paragraphe, nous détaillons la notion de « geste » de la recherche que nous avons développé pour analyser les processus de recherche mis en œuvre par un sujet engagé dans l'étude de la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus.

5.2.1 La notion de « geste » en philosophie des mathématiques

La notion de « geste » a été utilisée en philosophie des mathématiques pour discuter du fondement des mathématiques mais également des pratiques mathématiques, notamment par deux philosophes et mathématiciens français : Jean Cavaillès (1903-1944) puis Gilles Chatelet (1944-1999). Plus récemment, Longo s'est intéressé (avec Bailly, un physicien) aux problèmes fondationnels à l'interface entre Mathématiques, Physique et Biologie. Leurs études se situent à l'articulation des sciences cognitives et de l'épistémologie des sciences. Après une brève présentation de ces mathématiciens et de leurs travaux, nous présentons la notion de « geste » dans l'épistémologie de Cavaillès (paragraphe a.) puis ses prolongements contemporains dans les travaux de Châtelet et Longo (paragraphe b.). Dans le paragraphe c., nous donnons la définition du « geste » que nous retenons pour nos recherches.

Jean Cavaillès était un mathématicien et philosophe des mathématiques français, titulaire d'une licence de mathématiques et agrégé de philosophie. Il a soutenu deux thèses en philosophie des mathématiques à la Sorbonne en 1938 : *Méthode axiomatique et formalisme* (thèse principale) et *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* (thèse complémentaire). Il a ensuite été maître de conférences de logique et de philosophie générale à l'université de Strasbourg. Dans ses recherches, il s'est efforcé de prendre la mesure des avancées et des controverses qui ont déterminé les mathématiques modernes. Il s'est intéressé à la notion d'expérience mathématique qu'il définit comme « un système de gestes » (Cavaillès, 1994, p. 601). Pour l'étude de la notion de « geste » dans ses travaux, nous nous aiderons d'une analyse de ses œuvres philosophiques écrite par Cassou-Noguès (2001b).

Gilles Châtelet était un mathématicien français, professeur de mathématiques à l'Université Paris VIII Saint-Denis, puis directeur du Programme au Collège international de philosophie entre 1989 et 1995 (où il a fondé le séminaire *Rencontre Science-Philosophie*). Par la suite, il a exercé une influence notable dans le séminaire « Acte, Puissance, Virtualité » au sein du laboratoire « Pensée des sciences » fondé par Charles Alunni. Ses réflexions épistémologiques portent sur la construction de l'objectivité scientifique s'appuyant sur l'histoire humaine (Bailly & Longo, 2003). Ses travaux initient un geste de pensée dont on retrouve la présence en filigrane dans tous ses textes théoriques, mais nous étudierons en particulier son ouvrage *Les enjeux du mobile* (1993).

Guiseppe Longo est un mathématicien, logicien et épistémologue italien. Il a soutenu une thèse de mathématiques en 1971 et est actuellement enseignant-chercheur à l'ENS. Ses recherches récentes ont porté sur les sciences cognitives et l'épistémologie des mathématiques et en particulier, sur les problèmes fondationnels à l'interface entre Mathématiques, Physique et Biologie. Avec un physicien, Francis Bailly, il a écrit un article sur les enjeux philosophiques des problèmes d'incomplétude et d'incertitude en Mathématiques et en Physique (Bailly & Longo, 2003) en s'appuyant en particulier sur les travaux de Châtelet et la notion de « geste ». Nous ferons essentiellement référence à cet article.

a. La notion de « geste » dans l'épistémologie de Cavaillès.

Dans l'épistémologie de Cavaillès, on trouve trois gestes de nature différente. Cassou-Noguès (2001b) introduit pour les distinguer les qualificatifs : naturel, combinatoire et opératoire [14]. Le geste naturel est une manipulation de signes où les signes, en mathématiques, sont des chiffres, des symboles algébriques ou des figures géométriques. Lorsque ce geste s'effectue dans un milieu propre au travail mathématique, Cassou-Noguès le qualifie de combinatoire. Selon Cavaillès, le travail mathématique passe par un geste sur des signes soumis à des règles d'emploi. Or, ces règles d'emploi inscrivent les signes dans un « espace combinatoire, [...] une sorte d'espace abstrait avec autant de dimensions qu'il y a de degrés de liberté dans l'opération concrète et imprévisible de la combinaison » (Cavaillès, 1981, p. 93). Le geste combinatoire est alors « une synthèse réglée sur un divers où le divers est fait de signes

14. Ces différents qualificatifs ne se trouvent pas dans les textes de Cavaillès. En revanche, il utilise la notion d'espace combinatoire.

d'un espace combinatoire et où les règles sont des règles d'emploi de ces signes » (Cassou-Noguès, 2001b, p. 12). Pour illustrer la distinction entre geste naturel et geste combinatoire, Cassou-Noguès prend un exemple en algèbre :

> En algèbre, alors que, pour un enfant, tout signe peut se combiner avec tout autre et dans n'importe quelle direction, les règles, que suit le mathématicien dans la combinaison, déterminent des directions privilégiées et des relations d'ordre entre les signes. Le signe « + » doit être complété à gauche et à droite. Il sera l'origine d'un sous-espace à deux dimensions. Le signe 5 peut être complété vers le haut, par un chiffre ou une lettre (52), et à gauche et à droite, par un chiffre ou un signe d'opération. Il est l'origine d'un sous-espace plus complexe à trois dimensions. De la même façon, chaque signe est l'origine d'un sous-espace de proximité, d'une sorte de voisinage, au sein duquel peut se poursuivre la combinaison. (Cassou-Noguès, 2001a)

Parallèlement au geste combinatoire, Cavaillès décrit le geste comme acte de pensée, l'acte intellectuel du mathématicien. Lorsqu'il renvoie à la pensée du mathématicien, Cassou-Noguès parle de geste opératoire. Il s'agit d' « un procédé ou une opération c'est-à-dire une synthèse réglée sur des objets mathématiques » (Cassou-Noguès, 2001b, p. 13). En reprenant l'exemple précédent, le geste opératoire est une mise en relation entre les nombres a, b et c qui peut être accomplie, si effectivement, la somme de a et de b est égale à c, et qui peut ne pas être accomplie si la somme de a et de b n'est pas égale à c.

Le geste naturel n'est pas un élément de l'expérience mathématique mais seulement une étape dans le cheminement vers l'expérience mathématique. Il est alors remplacé par le geste combinatoire qui est l'usage des signes dans le travail mathématique. Ce dernier est une construction, un geste qui combine les signes et modifie les combinaisons selon des règles. Cavaillès définit l'expérience mathématique comme un système de gestes.

> [...] l'activité des mathématiciens est une activité expérimentale. Par expérience, j'entends un système de gestes, régi par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes. [...] Chaque procédé mathématique se définit par rapport à une situation mathématique antérieure dont il dépend partiellement, par rapport à laquelle aussi il entretient une indépendance telle que le résultat de ce geste doit être constaté dans son accomplissement. C'est, je crois, par là qu'on peut définir l'expérience mathématique. (Cavaillès, 1994, p. 601)

Il ajoute que la spécificité de l'expérience mathématique est que « le geste accompli nous donne un résultat qui, par le fait même qu'il apparaît, prend place dans un système mathématique prolongeant le système antérieur (le contenant comme cas particulier) » (Cavaillès, 1994, p. 601). Cassou-Noguès précise alors que « l'expérience mathématique serait un double système de gestes : gestes combinatoires dans les espaces combinatoires, gestes opératoires dans les théories mathématiques » (Cassou-Noguès, 2001b, p. 13). Ce ne sont pas deux actes distincts mais un seul acte qui se déploie comme combinatoire et opératoire. Le geste, au sens large, est alors une combinaison de signes, qui, pour qui sait lire, réalise une opération mathématique. Cavaillès reconnaît une certaine unité des gestes combinatoire et opératoire.

> La mathématique ne quitte pas le monde sensible mais est analyse sans fin du noyau des gestes sensibles. [...] la pensée est immanente au geste. (Cavaillès, 1994, p. 579)

> La liaison ne cesse pas entre activité concrète du mathématicien dès les premiers moments de son développement – mettre deux objets symétriques l'un à côté de l'autre, les faire changer de place – et les opérations les plus abstraites, car

> chaque fois la liaison se trouve dans le fait que le système d'objets considérés est un système d'opérations qui, elles-mêmes, sont des opérations sur d'autres opérations qui, finalement, se retrouvent sur des objets concrets. (Cavaillès, 1994, p. 602)

Cependant, Cassou-Noguès interroge d'une manière critique cette unité et pointe en particulier un manque dans les écrits de Cavaillès, celui de la détermination de l'émergence de la pensée dans le geste. Il précise que ce manque se répercute sur le problème du pouvoir de créer. Il développe alors ces deux points. Pour Cavaillès, le pouvoir de créer, qui réalise l'extension de l'expérience et le développement des théories, semble déterminé comme pouvoir de gestes dans l'expérience, c'est-à-dire comme pouvoir de gestes combinatoires. Cassou-Noguès reprend cette idée en s'appuyant sur le processus de résolution de problèmes par un mathématicien.

> Le mathématicien est confronté à un problème posé dans une théorie mais insoluble dans cette théorie. [...] Le mathématicien expérimente, tâtonne. Peu à peu, il modifie l'environnement du problème. Enfin, il lance un geste qui comporte de nouveaux signes et de nouvelles règles. Ce geste inaugure un nouvel espace combinatoire et une nouvelle théorie. Mais considérons la multiplicité des espaces combinatoires que le mathématicien peut constituer à partir d'un problème donné. [...] Si l'expérimentation était aveugle, si le mathématicien tentait des gestes au hasard, jamais il ne tomberait sur le champ viable qui résout le problème. Pour qu'un pouvoir de geste puisse réaliser l'extension de l'expérience et le développement des théories, il faut que les gestes soient guidés. (Cassou-Noguès, 2001b, p. 187)

Il avance deux éléments pour guider le mathématicien, l'exigence des problèmes posés et une sorte de prémonition du sens. Les notions exigées pour la résolution du problème sont pressenties et reconnues proches, à la limite du champ constitué. Et c'est précisément pour saisir ces notions, qui le hantent, que le mathématicien expérimente et teste des gestes. Le progrès dans la résolution du problème, c'est-à-dire l'extension de l'expérience provient alors d'un geste qui capte ces notions dans l'espace combinatoire initial au moyen d'une combinaison de signes, laquelle bouleverse le champ d'expérience et ouvre un nouvel espace combinatoire. Pour Cassou-Noguès, l'unité des gestes opératoires et combinatoires se réalise dans l'émergence de la pensée dans le geste, déterminée par cette possibilité de capter une notion pressentie dans un champ d'expérience au moyen d'un geste dans l'expérience.

Cette analyse du pouvoir de créer chez Cavaillès met en évidence l'importance de l'intuition en mathématiques. Dans *Méthode axiomatique et Formalisme*, Cavaillès (1938, 1981) apprécie l'intuition construite des mathématiques dans le sens où elle précède et accompagne une théorie car elle « constitue l'unité profonde – mais cette fois saisissable dans l'action – d'une théorie : tels le calcul désarguien en géométrie projective élémentaire, le procédé général de la diagonale ou la linéarisation dans la théorie de Cantor ; comprendre est en attraper le geste et pouvoir continuer » (Cavaillès, 1981, p. 178). La notion de « geste » développée par l'auteur permet de saisir [15] l'intuition puis de la mettre en œuvre afin de faire progresser le développement des mathématiques.

b. Prolongements contemporains : Châtelet et Longo.

Dans *Les enjeux du mobile* (1993), Châtelet reprend ce rôle du « geste » :

15. Au sens de « s'emparer de », « attraper ».

> Ce concept de geste nous semble crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques, qui échappent aux paraphrases rationalisantes [...] aux métaphores et à leurs fascinations confuses et enfin, et surtout, aux systèmes formels qui voudraient boucler une grammaire des gestes [...]. (Châtelet, 1993, p. 31-32)

Il précise ainsi que « ce geste ne se laisse pas "attraper" devant nous – il ne lance pas des ponts entre nous et les choses – ni "derrière" nous – aucun algorithme ne commande sa mise en scène » (Châtelet, 1993, p. 32). Il définit alors le geste comme une « propulsion, qui se referme en une impulsion, d'un même geste qui décape une structure et réveille en nous d'autres gestes » (Ibid. p. 32). La notion de « geste » chez Châtelet est relativement complexe et semble plutôt se décliner comme un système de gestes :

> Le geste inaugure une lignée de gestes.
>
> Un geste réveille d'autres gestes.
>
> Le geste enveloppe avant de saisir et esquisse son déploiement bien avant de dénoter ou d'exemplifier : ce sont les gestes déjà domestiqués qui font référence. (Ibid. p. 31-32)

D'autre part, comme chez Cavaillès, le « geste » chez Châtelet ne se réduit pas à l'acte mais comporte une intentionnalité.

> Le geste n'est pas un simple déplacement spatial : il décide, libère et propose une nouvelle modalité du « se mouvoir » ; [...] on se pénètre du geste avant de le savoir. (Ibid. p. 31)

Dans le travail mathématique, il ouvre le champ des possibles et permet de progresser dans l'élaboration de nouveaux concepts. Bailly et Longo précisent ainsi qu'il n'est « pas étonnant que les concepts les plus généraux et les plus abstraits, en mathématiques et en physique, s'enracinent "en première instance" dans l'expérience motrice et que ce soit "le geste" qui en permette le développement en même temps qu'il permet, si abstrait soit-il lui-même devenu, l'élaboration de nouveaux concepts » (Bailly & Longo, 2003, p. 13). Selon ces auteurs, trois gestes semblent avoir présidé à la naissance des concepts les plus fondamentaux des mathématiques et de la physique : celui des déplacements pour l'espace (et le temps), celui de la caresse pour le continu, celui de l'itération illimitée pour l'infini (et le nombre). Bailly et Longo précisent le rôle du geste dans l'élaboration de ces concepts :

> Le passage à la limite de ces notions d'abord tributaires de leur saisie intuitive corrélative de l'action, leur confère ensuite leur autonomie de concepts rigoureux et définis : l'espace et le temps ne se réduisent plus à des réceptacles pour nos mouvements, le continu ne donne plus matière à paradoxes insurmontables (les éléates, les infinitésimaux), le nombre ne désigne plus seulement des entiers ou des rationnels et l'infini lui-même est apprivoisé et devient actuel. Et, comme par un juste retour des choses, ce que le mouvement d'abstraction constitue à partir de ce que le geste autorise vient, avec la physique mathématique, rendre possible et féconder une théorie de la nature physique. (Bailly & Longo, 2003, p. 25)

Ces exemples semblent ainsi préciser l'unité des gestes combinatoires et opératoires de Cavaillès en les associant dans un processus dialectique.

Cependant, selon Longo [16], Châtelet ne fait pas suffisamment référence au geste en tant que mouvement et posture du corps et en particulier en tant que posture animale.

16. Nous nous référons au chapitre 1 de (Bailly & Longo, 2003) écrit par Longo.

> Toutefois, il faut « naturaliser » ce geste bien plus de ce que Châtelet ne l'a fait. Car la limite de sa pensée est dans le refus d'un vécu animal qui précède notre expérience intellectuelle, dans le manque d'appréciation de ce cerveau biologique qui intègre notre corps. C'est ce corps qui permet le geste, entre les hommes, dans l'histoire, bien évidemment, mais aussi par sa posture animale. (Bailly & Longo, 2003, p. 16)

Dans l'article, Longo insiste sur l'action motrice du geste :

> Le geste, qui commence par l'action motrice, enracine la signification entre nous et le monde, à l'interface entre les deux. (Ibid. p. 4)

> Et le geste, en tant qu'action élémentaire, mais complexe, du vivant, est à l'origine de notre rapport à l'espace, de nos tentatives de l'organiser, de la géométrie, donc. (Ibid. p. 8)

Selon lui, « la mémoire du geste est une toute première expérience vers une abstraction mathématique très importante » (Ibid. p. 8). Il illustre cela à propos la construction du concept de nombre réel :

> Elle est une expérience animale « abstraite » car elle est la mémoire d'une prévision, la prévision d'une ligne qui n'est pas là et que la mémoire détache de son contexte [...]. Mémoire, donc, d'une ligne continue sans épaisseur, car ligne qui n'est pas là, pure trajectoire, pratique pré-conceptuelle des lignes d'Euclide, de nos lignes paramétrisées sur les nombres réels. Voilà l'un des piliers constitutifs de ce parcours de construction de connaissance, dont on parle ici : il va de la mémoire abstraite catégorisante du prédateur, mémoire de sa propre action dans l'espace (voire de sa prévision), jusqu'à notre concept abstrait, mathématique, rigoureux de ligne continue, donné dans le langage. Mais le sens de cette construction conceptuelle, organisatrice de l'espace (et de la connaissance), a son origine dans le tout premier geste du prédateur, dans son intentionnalité originaire, dans sa friction signifiante sur le monde en tant qu'action. Et la construction mathématique bien accomplie, la trajectoire paramétrée sur les nombres réels à la Cantor-Dedekind, par exemple, est signifiante pour nous car derrière nous avons ce geste en commun. (Bailly & Longo, 2003, p. 8)

Longo montre alors en quoi cette notion de « geste » est intéressante pour l'enseignement des mathématiques :

> Dans ce cas [le concept de nombre réel], l'intuition précède la structure mathématique et, ensuite, elle en est enrichie et précisée. Un mathématicien comprend et communique à l'élève l'appréciation du continu, par le geste, car, derrière le geste, les deux partagent cet acte d'expérience ancien ; par des gestes et des mots, l'enseignant peut (et doit) introduire à « [...] tout ce parler *dans les mains* [...] réservé aux initiés » dont parle Châtelet (1993, p. 34). La re-construction conceptuelle rigoureuse est nécessaire, bien évidemment [...] mais l'enseignement doit aussi faire vivre à l'élève l'expérience de l'intuition, de ce « voir » qui est au cœur de toute pratique scientifique. (Bailly & Longo, 2003, p. 15)

Les gestes permettent donc de saisir l'intuition qui précède et suit la construction conceptuelle. On retrouve ici un certain pouvoir de création par les gestes.

> L'intuition originaire n'est peut-être pas essentielle à la preuve, mais elle l'est à la compréhension et à la communication et, surtout, à la conjecture et à l'invention de structures nouvelles. (Ibid. p. 15)

> Il faut urgemment revenir au sens, à la construction motivée, pour retrouver et communiquer le plaisir du geste mathématicien. (Ibid. p. 17)

c. Conclusion

A la lecture de ces textes philosophiques, nous retenons la définition suivante du mot « geste » :

Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience.

Deux caractéristiques nous semblent essentielles dans cette définition pour notre recherche. La première est la double facette unifiée du geste (geste sur les signes et gestes sur les idéalités) qui lui confère un pouvoir de créer dans le travail mathématique. Il prend en compte le rôle de l'intuition dans la création mathématique décrite par de nombreux mathématiciens. Identifier les gestes dans l'activité d'un mathématicien pourrait permettre ainsi de caractériser les éléments marqueurs de progression dans leur recherche. Notons également que ce pouvoir de créer, de saisir une intuition par un geste sur les signes, se réalise dans un processus dialectique entre organisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques. La seconde caractéristique du geste est sa dimension active, il s'agit d'une action au cœur du travail mathématique. Dans une perspective socio-constructiviste de l'apprentissage, cette notion nous semble donc pertinente pour décrire et analyser l'activité mathématique effective d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche. Enfin, précisons que nous ne retenons pas la dimension spatio-corporelle de la notion de « geste » développée par Longo car elle nous semble davantage liée à la Géométrie. Nos travaux se situant en Théorie des nombres, elle nous semble moins pertinente à prendre en compte pour nos analyses.

Avant de préciser la manière dont nous utiliserons cette notion de « geste » dans nos analyses épistémologiques du travail des chercheurs d'une part, et dans nos analyses didactiques des travaux des élèves d'autre part, nous explorons, dans le paragraphe suivant, son usage en didactique des mathématiques.

5.2.2 La notion de « geste » en didactique des mathématiques

La notion de « geste » en didactique des mathématiques est surtout étudiée dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999) où sont distingués les gestes professionnels de l'enseignant et les gestes d'étude des élèves. La majorité des recherches s'intéressent à l'étude des gestes professionnels et relèvent de travaux sur les pratiques enseignantes (Bronner, 2006 ; Chevallard, 1996, 1997, 2002 ; Mathé, 2006 ; Sensévy, 1998). Cependant, nous avons relevé quelques travaux analysant les gestes d'étude des élèves (Félix, 2002 ; Castela, 2006, 2012). Nous présentons brièvement ces travaux dans un premier paragraphe. Dans un second paragraphe, nous nous référons à des recherches didactiques dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau. Il s'agit des travaux de Dias (2008) que nous avons déjà présentés dans les chapitres précédents. Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence comment il a utilisé la notion de « geste » (en référence à Cavaillès et Châtelet) pour caractériser l'expérimentation en mathématiques.

a. Dans la Théorie Anthropologique du Didactique

La Théorie Anthropologique du Didactique développée par Chevallard (1992, 1999) offre un cadre d'analyse pour modéliser des pratiques sociales en général et l'activité mathématique en particulier. La modélisation de cette activité, désignée par le qualificatif de *praxéologie*, se décline en quatre composantes : types de tâches, techniques, technologies et théorie.

> En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T, accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique* τ. Le couple $[T/\ \tau]$ constitue, par définition, un *savoir-faire*. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un *environnement technico-théorique* $[\theta/\Theta]$, ou *savoir* (au sens restreint), formé d'une *technologie* θ, « discours » rationnel (*logos*) censé justifier et rendre intelligible la technique (*technê*), et à son tour justifiée et éclairée par une *théorie* Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue alors une *organisation praxéologique* ou *praxéologie*, dénomination qui a le mérite de rappeler la structure bifide d'une telle organisation, avec sa partie pratico-technique $[T/\tau]$ (savoir-faire), de l'ordre de la *praxis*, et sa partie technico-théorique $[\theta/\Theta]$ (savoir), de l'ordre du *logos*. (Chevallard, 1997, p. 37-38, c'est lui qui souligne).

Selon Chevallard, deux objets sont à considérer : l'organisation mathématique et l'organisation didactique qui correspondent à deux questions différentes ; l'une relative aux gestes d'étude des élèves (Que peut faire un élève afin d'étudier une question mathématique Q ?) et l'autre relative aux gestes professionnels de l'enseignant (Que peut faire un professeur afin de diriger l'étude d'une question de mathématique par l'élève ou par une classe ?). La notion de « geste d'étude » est définie à partir de la notion de *topos* de l'élève, notion introduite afin de préciser les problèmes d'organisation didactique :

> Dans une grande partie des situations de classe, l'élève doit accomplir des tâches coopératives, où chacun des acteurs – élèves et professeur – doit accomplir certains gestes dont l'ensemble constitue son rôle. Mais à côté de ces phases où l'élève opère ainsi en interaction didactique, il existe des phases où il est amené à opérer en autonomie didactique, accomplissant des tâches dont il est l'unique acteur, et dont l'ensemble constitue par définition son topos, ce lieu où, psychologiquement, il éprouve le sentiment d'être seul à la barre et de ne devoir compter que sur ses propres forces. (Chevallard, 2002, p. 17)

Chevallard donne quelques exemples de gestes d'étude :

> [...] il arrive forcément un moment où tel geste d'étude devra être accompli : où, par exemple, l'étudiant devra fixer les éléments élaborés (moment de l'institutionnalisation) ; où, encore, il devra se demander ce que vaut ce qui s'est construit jusque-là (moment de l'évaluation) ; etc. (Chevallard, 2002, p. 13)

Les gestes d'étude sont donc relatifs au travail effectif des élèves et sont accomplis en autonomie didactique. Si les gestes d'étude permettent une analyse du travail mathématique effectif des élèves comme le montrent les travaux de Félix (2002) et Castela (2006, 2012), ils semblent se situer à un niveau davantage macro que ce que nous essayons de réaliser dans notre recherche. Castela a ainsi étudié les gestes de l'étude en mathématiques d'élèves de Première Scientifique en s'entretenant avec ceux-ci sur leur travail personnel :

> Sont apparus trois types de gestes [...], à des moments différents : entre deux séances, gestes de reprise du cours ou des exercices ; dans la phase de révision du

> contrôle, gestes d'évaluation de l'état de l'apprentissage réalisé relativement aux exercices et gestes visant à pallier les ignorances diagnostiquées.
>
> [...]
>
> L'essentiel du travail [...] concerne donc les exercices déjà résolus avec trois gestes possibles de reprise de contact et d'auto-évaluation : 1. lire directement le corrigé, 2. refaire de tête puis confronter au corrigé dans des allers et retours portant sur des parties plus ou moins courtes, 3. refaire entièrement par écrit à partir de l'énoncé d'origine puis confronter au corrigé. (Castela, 2012, p. 69)

Dans l'article *La fonction professorale*, Chevallard (1996) développe plus spécifiquement la notion de « geste professionnel ». Afin de préciser l'emploi du mot « geste », il se rapporte à son étymologie :

> Le latin *gestus* signifie, au figuré, « prendre sur soi, se charger volontairement de », et donc « exécuter, faire ». C'est en ce sens large, et non dans le sens restreint plus courant (« mouvement du corps »), que le mot est pris ici : on doit le rapprocher du verbe *gérer* et du substantif *gestion*, de même origine, et de quelques autres encore. (Chevallard, 1996, p. 2, c'est lui qui souligne)

Chevallard, à l'instar de Cavaillès, Châtelet et Longo, ne réduit pas le geste à l'acte, au mouvement du corps mais y incorpore une notion d'intentionnalité « se charger volontairement de ». Bronner (2006) développe également cette caractéristique du geste professionnel :

> Si l'action du professeur est un agir, cela ne veut pas dire qu'il n'y a ni intentionnalité dans l'agir, ni rationalité, ni improvisation. (Bronner, 2006, p. 124)

Chevallard développe la notion de « geste » dans le but d'analyser la position de professeur de mathématiques des lycées et collèges dans une institution.

> Je dirai que la position p est caractérisée par un répertoire de *gestes*, que son occupant, x, doit accomplir dans le cadre d'un certain nombre de *dispositifs*.
>
> [...]
>
> La personne x en position p dans I rencontre l'ensemble des objets o auquel elle a affaire dans le cadre de dispositifs où elle accomplit certains gestes qui activent ces objets o. C'est à travers ces gestes, et à travers eux seulement, que, dans I, on pourra apprécier son rapport personnel à o, et le déclarer conforme, ou non conforme, ou insuffisamment conforme, etc. (Chevallard, 1996, p. 2, c'est lui qui souligne)

Il précise ensuite le lien entre la notion de « geste » et celle des tâches et techniques :

> une technique, c'est un ensemble réglé de gestes que l'on accomplit dans un certain dispositif. (Ibid. p. 5)

Cependant, ce lien ne semble pas si simple et Chevallard définit peu à peu « un système de gestes » comme un ensemble $[T/\tau]$ de tâches et techniques puis comme une praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ du professeur :

> Les notions de geste et de dispositif sont, en un sens, d'un usage plus facile que celles de tâche et de technique. Elles tendent en effet à confondre dans une même désignation tâche et technique, et reflètent en cela la vision ordinaire des pratiques que nous impose le processus de routinisation : dire que l'on va « balayer la pièce », ou « effacer le tableau », c'est tout à la fois désigner une tâche et la manière de l'accomplir – la routinisation, monotechnique, d'une tâche identifiant tendanciellement tâche et technique. Mais elles reflètent aussi un autre phénomène. Toute

technique, ai-je dit, toute tâche/technique pourrais-je dire maintenant, se décompose en un ensemble de gestes. Or la plupart des « gestes » exécutés lorsque la tâche $t \in T$ est accomplie selon la technique τ sont en fait eux-mêmes des tâches : ce sont des « sous-tâches » dont l'accomplissement est appelé par la technique τ. En d'autres termes, une tâche $t' \in T'$ apparaît généralement *à titre de sous-tâche* dans l'accomplissement d'une tâche $t \in T$ *selon une certaine technique* τ : elle apparaît ainsi *engendrée par cette technique*, relative à un type de tâches de niveau supérieur. Ainsi voit-on apparaître l'idée d'un système (plus ou moins intégré) des types de tâches et des techniques, des « tâches/techniques » relatives à la position p dans l'institution I, système que l'on peut noter $[T/\tau](p)$. C'est précisément ce « système de gestes », comme je dirai aussi, que les questions formulées plus haut appellent à explorer. (Ibid. p. 6, c'est lui qui souligne)

[...] tout d'abord, la question du contenu de la praxéologie du professeur $[T/\tau/\theta/\Theta]$ (que j'appelle aussi, tout simplement, système de gestes, ou système de tâches, du professeur) (Ibid. p. 27).

De même, Bronner (2006) définit les gestes professionnels « comme des pratiques de réalisation de tâches au sens de l'approche anthropologique ». Le geste professionnel est vu comme « une praxéologie liée à un type de tâches d'enseignement ou à un agrégat de tels types » et donc « une pratique qui peut s'analyser et se décomposer selon les quatre dimensions : type de tâches, technique, technologie et théorie » (Bronner, 2006, p. 123). Il distingue deux types de gestes professionnels : des praxéologies professorales globales (comme celles qui se constituent autour des types de tâches « construire une séance » ou « construire une progression ») et des praxéologies plus ponctuelles (comme celles liées aux types de tâches « donner une consigne » ou « gérer des réponses d'élèves après un exercice »). Chevallard montre également une certaine diversité des gestes professionnels :

Attribuer une note au devoir d'un élève est un geste professoral, de même qu'en est un le fait de retoucher les notations de l'énoncé d'un exercice trouvé dans un manuel avant de le proposer à des élèves, ou de préparer pendant l'été son cours pour l'année suivante, ou de participer à une réunion pour choisir le manuel qui sera utilisé dans les classes de tel niveau de l'établissement, ou de s'abstenir de répondre à un élève de Quatrième qui, ayant à développer l'expression algébrique $(2x-3)(x+1)$, demande « s'il faut mettre les flèches », ou de demander à un élève qui vient de développer l'expression $(2x-3)(x+1)$ de vérifier l'égalité des deux membres pour au moins une valeur de x, ou d'indiquer à la mère d'un élève de Sixième que son fils « est plus littéraire que scientifique » (ce qui est un geste à vrai dire étonnant), etc. (Chevallard, 1996, p. 2)

Il donne une classification des gestes professionnels tout en précisant que ces catégories ne permettent pas d'englober toutes les tâches professionnelles et surtout, qu'elles évoluent au fil du temps (« un type de tâches pouvant d'abord être refusé puis progressivement accepté, et passer ainsi de la troisième à la deuxième catégorie » (Chevallard, 1996, p. 26)) :

- La catégorie des gestes d'aide à l'étude, considérés comme les traits distinctifs de leur fonction (tâche d'organisation du temps didactique) ;
- La catégorie des gestes contingents qu'ils accomplissent réellement mais qui ne distinguent pas le professeur des autres acteurs de l'institution (tâche d'imposition de la discipline) ;
- La catégorie des gestes existants ou potentiels qu'ils se refusent d'accomplir car ils y voient une atteinte à l'identité professorale.

De la notion de geste professionnel développé dans la Théorie Anthropologique du Didactique, nous partageons la prise en compte de l'activité effective du sujet, dans l'action avec une certaine intentionnalité. Il s'exprime dans une dynamique comme l'exprime Bronner :

> Un geste professionnel n'est pas une entité rigide, figée, mais constitue une structure dynamique qui doit faire l'objet d'adaptations permanentes, comme le sont ou devraient être les gestes d'étude d'un apprenant. L'ajustement est l'adaptation d'un geste professionnel par rapport à des contraintes de la situation. Il n'a de sens que par rapport à une intentionnalité, un projet, ou encore une analyse *a priori* de la situation, il ne peut se discerner que dans une confrontation entre le geste professionnel prévu ou possible, et la réalisation effective de ce geste dans la dynamique de l'action. (Bronner, 2006, p. 124)

Cependant la notion de « geste » que nous voulons développer pour analyser les processus de recherche semble difficilement décomposable en praxéologie. Nous ne considérons pas les gestes comme des savoir-faire (ensemble de tâche/technique) mais comme les moyens, par l'action, de réaliser et mettre en pratique ces savoir-faire. Ces derniers sous-tendent les gestes et peuvent permettre aux gestes d'émerger dans l'action. Ainsi les gestes peuvent intervenir dans la réalisation de plusieurs types de tâches et donner lieu à différentes techniques. Par exemple, questionner des exemples est un geste de la recherche qui ne s'appuie pas sur une technique spécifique, cela dépend du problème et de son domaine d'application. Pour ces différentes raisons, nous n'utiliserons pas les praxéologies dans la notion de « geste ».

b. Dans les travaux de Dias

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà présenté les travaux de Dias et notamment sa thèse (Dias, 2008), intitulée *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'apprentissage*. Épistémologiquement, cet auteur a choisi de parler d'expérimentation en mathématiques à la lumière de Cavaillès comme d'un double système de gestes (combinatoire et opératoire) en les envisageant dans une dialectique qui les associe. Il considère l'intersection des espaces opératoire (où se situent la théorie mathématique et les opérations produits de la pensée) et combinatoire (où se construisent les signes sensibles et leurs règles d'emploi) par le sujet lui-même : « c'est en effet le sujet lui-même, celui qui écrit et qui pense, l'auteur unique de ces gestes » (Dias, 2008, p. 38). Il précise qu'il fait référence à la notion de « geste » chez Châtelet (1993) : « un geste qui ne se laisse pas réduire à l'acte mais qui comporte une intentionnalité. Il s'agit d'un mouvement s'inscrivant entre physique et mathématiques traduisant une forme de pensée de l'espace, plus précisément de l'espacement » (Dias, 2008, p. 38). Cette représentation permet de faire apparaître l'expérience mathématique comme un dialogue du sujet avec les objets, où ces objets ne sont rendus visibles et accessibles que par les actes portant sur eux. En important ce modèle dans le champ didactique, l'auteur montre l'importance de créer un milieu propice à ce dialogue pour « faire faire des mathématiques » (au sens de Conne, 1999) :

> Un sujet « faisant des mathématiques » ne donne à voir que les gestes de l'espace combinatoire, ce qui rend difficile le processus d'enseignement. En effet, pour un enseignant, l'accès n'est permis qu'à la pratique mathématicienne du sujet qui apprend, et jamais à son activité mathématique. « Faire faire des mathématiques » c'est alors créer un milieu propice à ce dialogue, un milieu objectif (matériel et/ou symbolique) dans lequel les expériences sont permises afin d'enrôler l'activité de l'élève. (Dias, 2008, p. 38)

L'auteur fait ainsi l'hypothèse que « le travail mathématique passe par l'expérience sensible et même que le développement des mathématiques ne peut se penser hors du monde sensible » (Ibid. p. 38), ce qui fait écho à l'épistémologie de Cavaillès :

> La mathématique ne quitte pas le monde sensible mais est analyse sans fin du noyau des gestes sensibles. (Cavaillès, 1994, p. 579)

Selon Dias, dans le processus d'acquisition du savoir, l'expérience sensible est alors préalable à l'expérience mathématique et cette dernière se produit en extension et en déformation sur le même objet. On retrouve là encore les idées de Cavaillès :

> Mais le sensible, conscience concrète immédiate, n'est pas abandonné : ce n'est pas le quitter que d'agir sur lui (tout objet abstrait, obtenu, par exemple, par thématisation, est un geste sur un geste, ... sur un geste sur le sensible primitif). Le champ thématique n'est donc pas situé hors du monde mais est transformation de celui-ci : la pensée effective des choses est pensée de ses objets. [...] Pour les logicistes, dépassant la représentation du triangle, immuable en tant que représentation, est le discours sur le triangle, qui fait les mathématiques. Mais le discours en tant que mouvement n'est qu'un aspect particulier du devenir général de la conscience : l'accompagnement symbolique, comme tout jalonnement par la conscience des étapes de son action sur les choses, ne doit pas en être isolé, il participe dans les meilleurs cas à l'extension corrélative de l'expérience. (Cavaillès, 1981, p. 178-179)

Dias précise ainsi que même si l'expérience sensible peut apparaître comme première, il ne faut pas seulement l'enfermer dans ce rôle :

> En effet, les expressions et opérations qui portent sur cette première expérience vont ensuite donner naissance à des besoins de contrôle ou seulement des confrontations dans l'espace sensible du fait de l'élaboration de conjectures « bâtisseuses » de la théorie. De ce fait, ce qui est appris et conçu sur la réalité permet en retour d'agir sur elle. (Dias, 2008, p. 28)

C'est en ce sens qu'il considère que l'expérience mathématique est capable d'intervention sur le réel.

La référence à Cavaillès et Châtelet pour le modèle de « geste » permet à Dias de considérer l'expérience mathématique comme un jeu interrogatif du sujet sur des objets et de la distinguer de l'expérimentation qui est un processus plus global de démarche de construction de connaissances incluant une phase déterminante de validation. On retrouve la dimension active de la connaissance, « ce trait si humain de l'effort cognitif en friction avec le réel » (Bailly & Longo, 2003, p. 2) présent dans la notion de « geste » chez Châtelet. Cette représentation permet également de mettre en évidence le rôle central des objets dans l'élaboration des savoirs et en particulier, la dialectique objet sensible/objet théorique. Les objets mathématiques sont présents sous une forme symbolique qui permet leur interrogation, leur manipulation et leur transformation. Ce processus, associé à un processus de validation, participe à la construction de nouveaux objets mathématiques et au processus de conceptualisation.

Dias montre aussi que le modèle de « geste » peut rendre compte de l'aspect actif de l'activité mathématique ainsi que du processus dialectique de mobilisation, acquisition des connaissances et développement d'heuristiques (notamment dans la dialectique objets sensibles/objets théoriques). Cependant il ne l'utilise pas pour l'analyse de l'activité des sujets. Dans notre travail, nous voulons utiliser cette notion de « geste » à une autre échelle : celle de l'analyse du travail effectif d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche.

5.2.3 La notion de « geste » pour analyser les processus de recherche

Pour étudier les processus de recherche d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche en mathématiques, nous proposons une analyse à deux niveaux. Dans un premier temps, nous effectuons une analyse globale de ces processus grâce à un outil méthodologique développé dans notre recherche menée en master 2 (M.-L. Gardes, 2009), basé sur une articulation entre une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire (Battie, 2003) et une prise en compte du caractère expérimental en jeu dans le problème. L'exploitation de cet outil méthodologique permet, d'une part de spécifier la nature des procédures mises en œuvre par un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche, notamment en mettant en évidence les connaissances mathématiques mobilisées ; d'autre part d'effectuer une comparaison des processus de recherche de publics différents. Ce premier niveau d'analyse des processus de recherche permet de donner des éléments sur la nature des processus (relevant d'une démarche théorique, expérimentale, en algèbre, en arithmétique, en algorithmique, avec quelles visées, etc.) et de déterminer des premiers éléments comparatifs. Cependant, il ne permet pas d'analyser finement le travail effectif de recherche d'un sujet en situation de résolution de problèmes de recherche, en particulier les éléments qui permettent concrètement une « avancée » dans la recherche du problème. Pour cela, nous réalisons une seconde analyse s'appuyant sur la notion de « geste ». Dans cette partie, nous développons plus spécifiquement cet outil méthodologique.

Définissons dans un premier temps ce que nous appellerons « avancer dans l'étude d'un problème de recherche ». Nous identifions deux marqueurs d'avancement dans l'étude d'un problème de recherche. Nous empruntons le premier à Giroud (2011) qui considère que :

> Il y a avancée dans la recherche lorsque la conception des élèves sur le problème est modifiée. Par exemple, lorsqu'un nouveau problème est formulé, une nouvelle relation entre deux problèmes établie, un nouvel exemple produit, une nouvelle représentation utilisée, etc. (Giroud, 2011, p. 118)

Pour la recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus, résoudre un problème auxiliaire en lien avec la conjecture, simplifier la conjecture, réduire ou limiter la recherche, le poser dans un autre cadre, etc., seront des indices de progression de la recherche. Le second marqueur d'avancée de la recherche est la production de résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus. Par exemple, trouver des valeurs de n solutions de l'équation d'Erdös-Straus, trouver des identités assurant l'existence de décompositions pour des classes de nombres ou trouver des conditions suffisantes ou nécessaires d'existence de solutions.

Dans un second temps, précisons le lien entre une analyse sémiotique de l'activité mathématique par une dialectique syntaxe/sémantique (au sens de Morris, 1938) et une analyse en termes de gestes combinatoire et opératoire (au sens de Cassou-Noguès, 2001b). Morris (1938) distingue, à l'intérieur de la sémiotique, l'étude syntaxique qui décrit les relations entre les signes ; la sémantique qui vise à l'étude des rapports entre les signes et les objets qu'ils désignent ; la pragmatique qui décrit les relations entre les signes, les objets et les utilisateurs des signes. En référence aux définitions de Morris, le geste combinatoire, geste sur les signes, relève de l'étude syntaxique et le geste opératoire, geste sur les objets mathématiques renvoie aux aspects sémantiques. Soulignons que Cavaillès, s'il n'utilise pas les termes de gestes combinatoire et opératoire, fait la distinction entre les signes et les objets qu'ils désignent :

> Mais, ici encore, le sensible intervient : dans la configuration du signe, est inscrit le rappel à ses règles d'emploi, un raisonnement écrit ne peut tromper, car dans son dessin apparaîtraient des figures exclues. Tel est le double rôle du signe, mixte, lui aussi, intellectuel-sensible ; s'il possède dans son essence une règle intellectuelle,

> qui garantit contre l'erreur, il est condition de création dans sa mobilité dans le sensible. (Cavaillès, 1981, p. 94)

Ainsi une analyse en termes de gestes combinatoire et opératoire permet de relire une catégorisation syntaxe/sémantique.

En didactique des mathématiques, Durand-Guerrier (2005) a montré la nécessité de l'utilisation de cette dialectique syntaxe/sémantique/pragmatique pour analyser l'interprétation des énoncés mathématiques en situation d'enseignement et d'apprentissage d'une part et pour analyser les raisonnements mathématiques dans les discours dans la classe de mathématique d'autre part. Cependant, nous faisons l'hypothèse que cet outil, restant une catégorie langagière, est moins efficace pour analyser l'activité effective d'un sujet en situation de résolution de problèmes de recherche. L'aspect actif de l'activité de recherche semble davantage pris en compte avec la notion de « geste » chez Cavaillès et Châtelet, comme l'ont montré Bailly et Longo (2003). Une analyse en termes de gestes combinatoire et opératoire permet ainsi d'analyser le travail mathématique dans l'articulation syntaxe/ sémantique tout en prenant en compte la dimension pragmatique par l'action située au cœur des processus. C'est pour cette raison que nous avons développé notre analyse des processus de recherche en construisant une grille de lecture des gestes plutôt que des catégories langagières.

En appui sur l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus, sur les études épistémologiques de l'activité de recherche mathématique et sur les premières expérimentations en classe de terminale scientifique (M.-L. Gardes, 2009), nous avons identifié sept gestes permettant d'analyser les processus de recherche mis en œuvre par les différents sujets cherchant cette conjecture. Dans la suite, nous détaillons la nature de chaque geste en mettant en évidence les « avancées » qu'ils sont susceptibles d'entraîner dans la recherche de la conjecture.

1. Désigner des objets

Désigner un objet, c'est représenter cet objet par le langage ou un signe (définition du Petit Larousse 2001). Cela permet d'indiquer précisément la nature de ces objets. S'effectuant dans la manipulation d'objets mathématiques, ce geste se situe dans l'espace opératoire mais va permettre progressivement de faire passer le travail mathématique sur les objets dans l'espace combinatoire. Il permet ainsi de mettre en évidence le travail mathématique à l'articulation des deux espaces, combinatoire et opératoire. La désignation des objets intervient en premier lieu pour faciliter le travail. En représentant un objet par un signe, on peut ensuite effectuer des opérations sur les signes, sans toujours se référer aux objets qu'ils désignent. Cela facilite donc le travail mathématique sur les objets et par suite les élaborations théoriques. Cela peut également conduire à une reformulation du problème en d'autres termes, ce qui l'enrichit. Pólya (1945), dans l'article *Notation*, met également en avant l'apport de l'introduction d'une notation appropriée ou du choix de certains symboles.

> Le choix de la notation constitue une étape importante dans la solution d'un problème ; aussi doit-on la choisir avec soin. [...] Nous serons guidés, dans ce choix, par un examen attentif de tous les éléments d'un problème. Ainsi une notation appropriée pourra-t-elle contribuer de façon primordiale à la compréhension de ce problème. (Pólya, 1945, p. 126)

Ajoutons que ce geste permet d'exploiter les aspects expérimentaux du problème en favorisant la manipulation des objets en jeu. Sans désignation des objets, leur manipulation est rendue difficile. Ce geste nous semble donc primordial pour entrer dans une démarche expérimentale de recherche.

2. Réduire le problème aux nombres premiers

Réduire le problème aux nombres premiers, c'est ramener l'étude du problème (pour tout entier n) à une forme équivalente (étudier la conjecture d'Erdös-Straus pour tout n premier), ce qui réduit le domaine de l'objet à explorer et apporte de nouvelles informations sur le problème. C'est en ce sens qu'il fournit une avancée à la recherche. Cette réduction se fait à l'aide de deux propriétés d'arithmétique [17]. Si ces propriétés sont connues et mobilisables par un sujet, alors ce geste se situe dans l'espace combinatoire, il s'agit de manipulation de signes, les objets étant présents mais relégués au second plan. En revanche, si ces propriétés ne sont pas disponibles, le geste peut reposer sur un travail mathématique se situant dans l'espace opératoire, sur des manipulations d'objets mathématiques concrets permettant de construire les connaissances manquantes.

3. Introduire un paramètre

L'introduction d'un paramètre est une forme de désignation mais elle se situe dans l'espace combinatoire. On introduit un signe, dans une modification des écritures mathématiques, sans renvoi explicite aux objets qu'il désigne. Ce geste peut permettre plusieurs avancées dans la recherche d'un problème : simplifier les écritures et donc leurs manipulations ; se ramener à un problème connu dont on connaît la méthode de résolution et/ou les résultats ; effectuer une généralisation. Ce geste est à mettre en parallèle avec une méthode de variation du problème initial que Pólya désigne sous le nom d'introduction d'éléments auxiliaires (Pólya, 1945, p. 74-77).

4. Construire des exemples et les questionner

Ce geste se décompose en deux actions. La première est la détermination d'une méthode de construction des exemples à partir de manipulations des objets mathématiques naturalisés en jeu dans le problème. La seconde est un questionnement de ces différents exemples dans le but d'en dégager des informations. Plusieurs types d'informations peuvent être tirés de ces exemples. Un questionnement sur de nombreux exemples se base sur la recherche de régularités dans le but d'aboutir à une généralisation. Un questionnement des exemples particuliers, par exemple des exceptions à une certaine propriété, permet de mieux cerner les difficultés liées à la résolution du problème. Nous avons regroupé ces deux actions car nous les pensons liées et en interaction : la construction des exemples favorise un questionnement, et en retour le questionnement des exemples permet d'affiner leur méthode de construction. Il n'est pas exclu que l'une des actions puisse être faite sans l'autre, cependant nous considérons que, dans ce cas, l'avancée provoquée serait moindre, voire inexistante. L'étude d'exemples en tant que « produit fini » semble donc moins productive si elle n'est pas précédée d'une phase de construction des exemples. De même, si la construction des exemples n'est pas suivie d'une phase de questionnement de ces exemples, les informations qu'on peut en dégager ne seront pas formalisées, voire identifiées. Selon nous, ce travail sur les exemples se réalise donc dans un processus dialectique qui peut aboutir à différentes avancées dans la recherche du problème : un approfondissement des connaissances sur le problème et en particulier sur les difficultés liées à sa résolution, une élaboration de résultats mais également des améliorations de résultats ou de preuves. Ce système de gestes s'effectue sur les objets mathématiques naturalisés en jeu dans le problème et exploite en particulier le caractère expérimental du problème. Il

17. Propriété 1 : tout nombre admet un diviseur premier. Propriété 2 (multiplicativité) : si une propriété est vraie pour deux éléments de $\mathbb{Z}$, alors elle est encore vraie pour leur produit. Ici, c'est la propriété *satisfaire à la conjecture d'Erdös-Straus, pour* $n \in \mathbb{Z}$ qui est multiplicative.

est porteur de l'articulation des deux espaces, combinatoire et opératoire, dans la mesure où le travail mathématique s'appuyant sur les exemples est un moyen de construire une syntaxe sur les objets.

5. Effectuer des contrôles locaux

Effectuer des contrôles locaux, c'est vérifier les différentes étapes des manipulations et combinaisons de signes dans les écritures mathématiques. Il s'agit de faire référence aux objets désignés par les signes en les positionnant au premier plan. Ce geste se situe donc à l'articulation des espaces combinatoire et opératoire. Lorsque le travail mathématique se situe dans l'espace combinatoire, les contrôles locaux permettent « de plonger » ce travail dans l'espace opératoire avec un retour aux objets mathématiques en jeu dans la résolution du problème. Une première avancée est la simplification des écritures mathématiques et donc un travail sur les signes facilité. Mais surtout, ce geste permet de vérifier les étapes des raisonnements et fournit ainsi une aide à élaboration et à la preuve de résultats. Ce geste constitue ainsi un moyen de répondre aux questions de Pólya concernant la vérification : pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ? Il précise qu'« une réponse satisfaisante à ces questions renforcera notre confiance dans l'exactitude de la solution ; elle contribuera également à consolider nos connaissances » (Pólya, 1945, p. 155).

6. Transformer l'équation initiale

La transformation de l'équation initiale s'effectue par équivalence de jeux d'écriture. Les différentes écritures équivalentes à l'équation initiale sont obtenues par manipulations de signes et de symboles. Il s'agit donc d'un geste combinatoire s'exprimant par des manipulations algébriques. Il marque des avancées dans la résolution du problème dans la mesure où il permet de le reformuler avec d'autres termes. Il n'y a pas nécessairement simplification du problème mais il y a un approfondissement des connaissances sur le problème. Ce geste peut ainsi permettre de placer le problème dans un autre domaine des mathématiques avec d'autres outils de résolution. Il peut être producteur de résultats.

7. Implémenter un algorithme

Implémenter un algorithme signifie « traduire un algorithme dans un langage de programmation » (Wikionnaire, consulté le 7 mars 2013) [18]. Cette terminologie marque une distinction entre la construction d'un algorithme et son système de représentation. Nous choisissons ici ce terme pour insister sur le passage de la construction d'un algorithme « papier-crayon » à sa programmation sur ordinateur. Si la construction d'algorithmes se réalise en appui sur les objets mathématiques en jeu dans le problème, son implémentation se situe davantage dans l'espace combinatoire. Il s'agit d'écrire une syntaxe, dans un langage particulier, qui permet la réalisation de la liste d'opérations pour résoudre un problème.

> En particulier, la description d'algorithmes à destination de machines demande la spécification de langages particuliers et leur étude. (Modeste, 2012, p. 27)

18. Le verbe implémenter a été officiellement adopté en France le 20 avril 2007 par la Commission générale de terminologie et de néologie avec pour définition le fait d'« effectuer l'ensemble des opérations qui permettent de définir un projet et de le réaliser, de l'analyse du besoin à l'installation et la mise en service du système ou du produit », définition très large qui couvre toutes les opérations exceptées la vente et la maintenance éventuelle dudit projet.

Ce geste demande donc la connaissance d'un langage de programmation et en particulier celui du logiciel utilisé. Dans la résolution d'un problème de recherche, et en particulier sur celle de la conjecture d'Erdös-Straus, la construction d'algorithmes peut permettre diverses avancées : conjecturer, tester et valider les conjectures, établir un résultat partiel ou intermédiaire, multiplier le nombre d'exemples à étudier, contrôler ou améliorer des résultats. Le recours à l'algorithmique peut donc se faire dans les diverses étapes de la recherche décrites par Pólya : dans la compréhension du problème, dans la conception du plan, dans sa mise à l'épreuve ou dans le retour à la solution. Si nous insistons sur l'implémentation, c'est pour mettre en évidence ses apports dans la résolution de problèmes. La programmation d'un algorithme sur ordinateur offre d'abord un moyen efficace pour faire des calculs coûteux, ce qui peut impliquer un gain de temps. De plus il permet de multiplier le recours à de nombreux exemples et de faciliter ainsi leurs études. L'implémentation rend effectif l'algorithme, en particulier son processus et sa terminaison. Par la puissance des machines, les informations recueillies peuvent être plus nombreuses.

5.2.4 Conclusion

Étudiées pour discuter des problèmes de fondements mais aussi des pratiques des mathématiques et de leur développement, les références philosophiques de la notion de « geste » nous ont permis de montrer que celles-ci prenaient en compte le rôle de l'intuition dans la découverte ou l'invention mathématique, qu'elles situaient l'activité mathématique dans l'action du sujet et qu'elles permettaient de mettre en évidence le processus dialectique de cette activité de recherche entre mobilisation, organisation des connaissances et développement d'heuristiques.

L'usage des gestes en didactique des mathématiques a été développé en particulier dans la Théorie Anthropologique du Didactique pour analyser les pratiques enseignantes d'une part et l'activité des élèves d'autre part, en prenant en compte la double facette du geste : un acte dans une intentionnalité. Les travaux de Dias montrent la pertinence épistémologique de cette notion pour caractériser la dimension expérimentale en mathématiques. En nous appuyant sur nos analyses épistémologique et mathématique, nous avons identifié et décrit plusieurs gestes de recherche permettant d'étudier l'activité mathématique effective d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche. Le recours à ces gestes tels que nous les avons définis nous permet de montrer comment un sujet agit sur le problème afin d'avancer dans sa étude. Ils produisent « des indices du progrès », terme emprunté à Pólya (1945, p. 112). Dans la partie suivante, nous mettons à l'épreuve cette grille d'analyse pour étudier les processus de recherche de deux chercheurs, Thépault et Mizony, mis en œuvre dans leur étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

5.3 Une analyse d'épistémologie contemporaine sur la conjecture d'Erdös-Straus

Dans cette partie, nous analysons les travaux récents de deux chercheurs concernant la conjecture d'Erdös-Straus, et dont nous avons pu recueillir et/ou suivre les différentes étapes de leurs recherches.

Les premiers travaux sont ceux de Thépault, un ingénieur chimiste, passionné de mathématiques et amateur de résolution de problèmes mathématiques. Il est l'auteur de plusieurs livres de casse-tête et d'énigmes mathématiques [19]. Nous avons trouvé les travaux de Thépault sur la conjecture d'Erdös-Straus dans un courrier des lecteurs de la revue *Pour la Science* de 1979 (Gardner, 1979, p. 112), en réponse à une invitation de Gardner qui proposait, dans le numéro précédent de *Pour la Science*, de résoudre le problème suivant :

> Une étonnante question non résolue sur la fraction égyptienne concerne le cas $4/b$: une bonne fraction de la forme $4/b$ peut-elle toujours s'exprimer avec trois termes ou moins ? Autrement dit, l'équation diophantienne $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$ possède-t-elle toujours une solution pour n'importe quelle valeur entière de n supérieur à 4 ? (Gardner, 1978, p. 102-103)

Il s'agit de la conjecture d'Erdös-Straus. L'auteur invite le lecteur à réfléchir à ce problème et celui qui « trouvera la meilleure solution de ce problème aura un abonnement gratuit ». Il précise qu'une « telle offre ne risque pas de grever trop lourdement le budget du journal ! » (Ibid. p. 103). Quelques mois plus tard, l'auteur précise qu'il a reçu de nombreux courriers mais que personne n'a démontré la conjecture. Il a choisi de publier la réponse de Thépault :

> Après avoir remarqué qu'il suffisait de la démontrer pour n premier, il démontre que pour n premier de la forme $4k + 1$ (le cas $n = 4k + 3$ étant trivial car $4/(4k+3) = 1/(k+1) + 1/(k+1)(4k+3)$) une condition suffisante est l'existence, pour n de deux nombres, a et b tels que d'une part, b divise a^2 et que $bn + a$ soit divisible par $4a - 1$. Dans ce cas, une solution de l'équation est donnée par $x = an, y = a(a + bn)/b(4a - 1), z = n(a + bn)/(4a - 1)$. (Gardner, 1979, p. 112)

Gardner précise que ce résultat lui « paraît très intéressant car en se donnant a et en donnant à b toutes les valeurs possibles, on obtient explicitement une infinité de congruences pour n, telle que la conjecture soit vraie. De plus cette méthode semble très efficace pour la recherche de solutions explicites de l'équation pour une valeur de n donnée » (Ibid.). Afin de connaître la démarche suivie par Thépault pour établir ce résultat sur la conjecture d'Erdös-Straus, nous l'avons contacté par le biais de son éditeur. Dans un premier temps, nous avons correspondu par courriels (à partir de mars 2010) puis dans un second temps, nous nous sommes rencontrés, pour un entretien en août 2011. Après notre premier courrier, Thépault s'est de nouveau engagé dans l'étude de la conjecture et nous a envoyé ses nouvelles recherches qui reprennent et prolongent les précédentes (cf. chapitre 4 partie 4.3.1). Pour analyser ses travaux sur la conjecture d'Erdös-Straus, nous nous appuyons sur ses écrits (son courrier des lecteurs de *Pour la Science*, l'article de son livre (Thépault, 2007, p. 264) et ses courriels), sur nos correspondances électroniques et sur notre entretien. Précisons que ce corpus est principalement composé de textes rédigés par Thépault, postérieurs à ses recherches et que les propos tenus sur la résolution de la conjecture lors de l'entretien émanent d'une réflexion *a posteriori* sur les démarches mises en œuvre.

Les seconds travaux sont ceux de Mizony, enseignant-chercheur de mathématiques de l'Université de Lyon 1 actuellement à la retraite. Lors d'un séminaire-étudiants, en février 2009, où nous présentions nos premiers travaux de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus, Mizony s'est intéressé au problème. Il a alors débuté une recherche sur la conjecture, qui se poursuit actuellement. Nous avons suivi ses recherches depuis le début, par courriel et lors d'entretiens réguliers. Nos échanges portaient sur des questions mathématiques, épistémologiques ou didactiques autour de la conjecture. Notre objectif premier était de suivre ses recherches avec un regard épistémologique sur sa démarche de recherche, dans une perspective ensuite d'étude didactique. Cependant, en effectuant ce suivi, nous avons interagi avec lui sur ses recherches mathématiques et nous avons ainsi participé à l'élaboration de certains

19. (Thépault, 2003, 2005, 2006, 2007, 2008)

résultats (cf. paragraphe 5.4). Nous avons écrit un article en commun (M.-L. Gardes & Mizony, 2012) et un article est en préparation (Mizony & Gardes, 2010-2012). Pour l'analyse de ses travaux, nous nous appuyons sur le corpus suivant :

- notre correspondance électronique (environ 200 courriels en quatre ans) comprenant des échanges écrits mais également des documents, notamment des fichiers d'algorithmes ;
- nos rencontres (une à deux fois par mois pendant 4 ans) dont certaines ont été enregistrées ;
- différentes versions d'articles présentant ses résultats ;
- des articles écrits et/ou en préparation.

Ces différents éléments ont été recueillis « en direct ». Les correspondances électroniques rendent compte des avancées de sa recherche « à l'instant t » et non *a posteriori*. Les documents joints ne sont pas des écrits retraçant, après réflexion, la démarche utilisée, ils sont des produits même de la recherche. De même, lors de nos rencontres, nous discutions de questions mathématiques en cours de construction, leurs constructions se poursuivant parfois pendant ces entretiens. Enfin, les différentes versions précédant les versions finales des articles publiés ont permis de suivre et de rendre compte des différentes avancées de la recherche.

Dans les deux premiers paragraphes (5.3.1 et 5.3.2), nous présentons différents éléments caractérisant les démarches de recherche généralement mises en œuvre par ces deux chercheurs dans une résolution de problème de recherche. Dans le troisième paragraphe (5.3.3), nous analysons spécifiquement les processus de recherche mis en œuvre dans leur étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Pour cette analyse, nous utilisons les outils méthodologiques présentés dans la partie précédente, à savoir une première analyse en termes de dimension organisatrice et opératoire articulée avec le caractère expérimental en jeu dans le problème et une seconde analyse à l'aide du modèle de « geste ».

5.3.1 Sur la démarche de recherche de Thépault

Lors de nos communications avec Thépault, nous l'avons interrogé sur la démarche de recherche qu'il emploie lorsqu'il est confronté à un nouveau problème et plus particulièrement sur celle employée lorsqu'il a cherché la conjecture d'Erdös-Straus. Dans le paragraphe a. nous présentons son point de vue sur le processus de découverte mathématique et dans le paragraphe b., nous détaillons l'heuristique de sa recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus.

a. Sur le processus de découverte

Thépault n'est pas mathématicien professionnel, il est ingénieur chimiste passionné par la résolution de problèmes mathématiques. Les domaines mathématiques dans lesquels il effectue des recherches de problèmes sont « la géométrie plane et en particulier les transformations, les propriétés géométriques des coniques et des courbes connues, la géométrie analytique et la géométrie par les complexes, l'étude des suites et des séries, l'arithmétique » (communications personnelles, 4 avril 2010). Les problèmes qu'il étudie sont des sujets qui lui plaisent. Il explique « qu'il ne le choisit pas, quand il voit un problème, il se dit celui-là me passionne » ou alors il en « invente » (communications personnelles, 18 août 2011). C'est bien là une illustration de la maxime « Faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes » (Perrin, 2007). Pour la conjecture d'Erdös-Straus, il précise que c'est un problème qui lui a plu car il aime bien tout ce qui touche aux nombres entiers. Il fait donc des mathématiques pour le plaisir, pour leur aspect ludique et pour la curiosité de découvrir des « choses formidables ». Il donne en particulier un exemple :

Je reste toujours fasciné par certains résultats et en particulier par la formule de Grégory-Leibniz :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

qui reste pour moi l'une des plus belles avec celle d'Euler. Même si dans sa convergence vers π, elle est moins performante que celle de Ramanujan, comment ne pas s'émerveiller devant un tel résultat. *A priori*, quel « rapport » peut-il y avoir entre le nombre π qu'on apprend dans les classes élémentaires comme étant le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre (notion de géométrie) et le nombre π obtenu à partir d'une suite alternée de fractions $(\frac{1}{n})$, les termes n étant les impairs successifs, les « bannis » de l'arithmétique (notion d'arithmétique) ? (Communications personnelles, 4 avril 2010)

Pour lui, cette relation est très puissante et c'est en cela qu'il la trouve belle. On retrouve ici, la notion de plaisir et de beauté des mathématiques évoquée par les mathématiciens dans le précédent chapitre.

Concernant ses recherches, Thépault met en avant le rôle de l'intuition. Par exemple, pour expliquer comment il a cherché la conjecture, il explique qu'il a mis le problème en équation car « il savait qu'il fallait mettre en équation et qu'il n'y avait pas de raisonnement pur ». Il précise qu'il savait que ça allait marcher : « on le sent ça » (communications personnelles, 18 août 2011). Cependant il mentionne également l'importance de l'expérience de la recherche de problèmes. Ainsi, la méthode algébrique lui est venue tout de suite car dans de nombreux problèmes d'arithmétique qu'il avait cherchés, c'était une méthode classique. La motivation de chercher un problème tel que la conjecture d'Erdös-Straus réside dans le caractère non résolu du problème, exprimé avec des termes simples mais dont la résolution est complexe. Le plaisir de trouver éventuellement la solution à un problème que personne n'a résolu motive la recherche de la conjecture. En effet, au sujet de la résolution, il explique que cela lui procure une certaine « satisfaction » d'avoir accompli quelque chose et que c'est « une jouissance intellectuelle ». Il précise également qu'il aime bien ensuite rédiger et mettre en forme.

Même s'il n'a pas communiqué avec d'autres personnes lors de sa recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus, Thépault précise l'importance du travail en équipe : « toute découverte est le fruit d'un travail d'équipe ou de différentes personnes ayant œuvré chacun dans son coin ». (Communications personnelles, 4 avril 2010)

b. Sur l'heuristique de la découverte

Thépault a débuté sa recherche de la conjecture d'Erdös-Straus par la réduction du problème des nombres entiers naturels aux nombres premiers. Il explique que cette idée lui est venue tout de suite en raison de son expérience de la résolution de problèmes d'arithmétique. Il évoque en particulier sa recherche sur le grand théorème de Fermat :

Mais ça, c'est l'expérience. L'idée m'est venue aussi du fait que j'avais déjà essayé de résoudre le grand théorème de Fermat donc à partir du moment où on a déjà fait Fermat, on a tout de suite la même réaction, si on l'a résolu pour l'un, on l'a résolu pour l'autre. (Communications personnelles du 18 août 2011)

Dans la suite de notre entretien, il évoque les étapes suivantes de sa recherche de la conjecture d'Erdös-Straus.

J'ai dû poser, la première chose que j'ai faite, forcément, bon ça je m'en souviens, c'était de mettre le problème en équation et de voir si on pouvait donc le simplifier. Donc ça c'est la première démarche, celle que j'ai faite. Et après [...] j'ai démontré

> rapidement que c'est vrai pour $4k+3$, ça je n'ai pas eu de mal à le démontrer [...] c'est la méthode classique. Et après pour $4k+1$, j'avais des exemples et à partir des exemples, là c'est l'intuition. (Communications personnelles, 18 août 2011)

Il a donc utilisé tout de suite une méthode algébrique, basée sur la somme et le produit des racines d'une équation du second degré. Pour lui, c'était une méthode classique de résolution de problèmes d'arithmétique qu'il avait utilisée de nombreuses fois. Il précise qu'il n'a fait qu'un seul constat issu de l'expérience : remarquer que l'un des dénominateurs x, y ou z est un multiple de n. Il mentionne également à ce moment là le rôle de l'intuition. Ainsi, sa démarche de recherche a été théorique et s'est peu appuyée sur l'aspect expérimental du problème.

> Je n'ai jamais procédé à des va-et-vient entre l'expérience et la théorie. Le seul constat issu de l'expérience était que pour toute décomposition avec n de la forme $4k+1$, était l'existence parmi les trois diviseurs, d'un multiple de n, résultat que j'ai mis à profit et qui conduit à la démonstration que je vous ai communiquée. (Communications personnelles du 25 mai 2010)

Cette démarche est *a priori* celle qu'il a suivie en 1979 lorsqu'il a envoyé ses recherches au périodique *Pour la Science* et c'est également celle qu'il a entreprise lorsqu'il a cherché à nouveau la conjecture après notre courrier. Une différence entre ces deux recherches réside dans l'emploi d'outils technologiques. En 1979, il n'a utilisé aucune technologie alors qu'en 2010, il a utilisé un tableur afin de démontrer l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour $n < 10000$. Notons que l'emploi de l'outil informatique n'est intervenu que dans la démonstration de l'existence d'une solution pour un n donné et non dans le résultat théorique de la condition suffisante d'existence de solutions.

Thépault nous a dit un jour qu'il était plus « un praticien des mathématiques qu'un théoricien » (communications personnelles, 4 avril 2010). Il s'explique avec un exemple :

> J'ai fait des calculs, [...] j'avais trouvé une méthode [...] pour calculer le nombre π, je crois que c'est la formule de Leibniz, qui converge très lentement mais on peut la faire progresser, alors je ne sais pas si la démonstration, non je ne l'ai pas démontré mais les calculs corroborent, les calculs montrent quand même qu'on tend vers π donc je considère le résultat comme acquis [...] cependant rien ne m'interdit, si je peux le démontrer, de le faire. (Communications personnelles, 18 août 2011)

Concernant la conjecture d'Erdös-Straus, il explique qu'il pense qu'elle est « statistiquement vraie ». Nous notons ici un parallèle avec Mizony qui pense que la conjecture est « algorithmiquement vraie ». (Cf. paragraphe suivant 5.3.2)

5.3.2 Sur la démarche de recherche de Mizony

Dans un premier paragraphe, nous exposons le point de vue de Mizony sur le processus de découverte ou d'invention mathématique, notamment sur le rôle de l'intuition et de l'esthétique ainsi que celui joué par la communauté mathématique. Dans un second paragraphe, nous présentons l'heuristique de la découverte d'un résultat majeur dans sa recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus.

a. Sur le processus de découverte

Mizony partage la description de Poincaré et Hadamard sur la découverte mathématique, processus en quatre étapes. Il nous a fait part de trois moments forts d'illumination qu'il a vécus en tant que mathématicien. Nous relatons ici celui relatif à la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus.

> Le 13 août 2009, chez mon frère, vers 6 heures du matin, j'avais ouvert une session de calcul formel avec un logiciel ; mais au lieu de faire de nouveaux tests, j'ai écrit des choses sur ma feuille de brouillon : 3 ou 4 formules ; d'un seul coup j'en entoure une et instantanément je me suis dit c'est ça le bon résultat. Ce résultat est devenu beau une heure après quand, après des essais infructueux de preuve, je me suis aperçu que cette formule était une identité ; puis grâce à sa fertilité car ayant écrit et vérifié immédiatement après, sa généralisation pour les fractions $\frac{h}{n}$, elle est devenue « belle ». Une joie intense m'envahit. (Mizony, communications personnelles, 23 juillet 2012)

Pour lui, l'illumination se caractérise par l'intuition fertile d'un nouveau résultat. Nous retrouvons les caractères de soudaineté et de certitude de l'illumination décrits par de nombreux mathématiciens (cf. partie 5.1). Mizony souligne également l'importance de la quatrième phase de travail, celle de vérification, finition et continuation qui lui a permis de généraliser sa première identité. Dans le cadre d'une autre recherche, il précise que cette phase de travail, après l'illumination, a duré cinq à six ans « pour arriver à une exploitation et une rédaction synthétique de ses conséquences [de l'illumination] » (Mizony, communications personnelles, 23 juillet 2012). Concernant la phase de travail préparatoire, Mizony nous précise que l'identité provient d'un travail énorme et que « c'est sorti parce que j'ai fait, je suis resté cinq mois dessus avec des tas d'algorithmes » (communications personnelles, 21 septembre 2009). Dans un article (Mizony, 2010), il précise la nature de ce travail :

> Il est clair que cette identité n'est pas tombée du ciel, mais est le fruit d'une grande quantité d'algorithmes mis en œuvre ayant deux buts :
>
> 1. être efficace : passer de 100 décompositions à la seconde à 20 000 n'est pas anodin.
> 2. être le plus proche possible d'une preuve avec papier et crayon, l'idée sous-jacente à ces algorithmes et formules ayant été d'éviter le plus possible le recours à la fonction partie entière.

Cependant, il ajoute qu'il lui est difficile « de préciser le long cheminement suivi et de dire pourquoi il [je] l'a écrite ce 13 août 2009, et généralisée [...] ». A noter que Mizony exprime également la notion de plaisir, très présente chez les nombreux mathématiciens interviewés par Nimier (1989) lors de la découverte. Dans une note réflexive sur l'expérimental en mathématique (communication personnelle, janvier 2011), il mentionne également une différence entre le plaisir que procure la découverte et l'exigence de chercher une preuve :

> En recherche, dès que j'ai trouvé un truc dont je suis sûr intuitivement que c'est bon, ça ne me fait pas plaisir de chercher une preuve ; je le fais par obligation, par exigence éthique. (Le plaisir de la « découverte » l'emporte sur la satisfaction d'avoir prouvé). (Communication personnelle, janvier 2011)

Il exprime cette idée dans la conclusion d'un article en expliquant qu'« à l'instar des Babyloniens, il a plus été intéressé par la construction d'algorithmes mathématiques que par l'élaboration de preuves » (Mizony, 2010). Ainsi, pour lui, la conjecture d'Erdös-Straus est « algorithmiquement vraie ».

Si Mizony est en accord avec Poincaré et Hadamard sur les quatre étapes du processus de découverte mathématique, il ne partage pas leur point de vue sur le caractère décisionnel de l'esthétique dans le choix du problème ni sur son rôle dans la phase menant à l'illumination. En effet, pour lui, le résultat devient beau par « l'intérêt et les conséquences limpides qu'il engendre ». Ainsi la beauté est « le fruit » et non le moteur des phases du travail inconscient que sont l'incubation et l'illumination. Elle ne devient moteur que dans le travail conscient ultérieur, « en premier lieu, en confortant le résultat trouvé par intuition » (communications personnelles, 23 juillet 2012). Concernant le choix du sujet, il explique, rétrospectivement que

> Ce qui a été un guide fort et inconscient est le désir de maîtriser des calculs horribles à faire et finalement le désir de simplifier et améliorer les domaines où ces calculs sont horribles. La beauté repose alors sur la satisfaction d'avoir mis au point des trucs qui économisent des temps de calculs et par là, permettent une meilleure compréhension d'un domaine. (Communications personnelles, 23 juillet 2012)

Concernant le rapport aux œuvres existantes, Mizony rejoint les chercheurs qui préfèrent chercher par eux-mêmes et étudier les travaux antérieurs par la suite. Il a ainsi cherché la conjecture d'Erdös-Straus sans prendre connaissance de la littérature existante sur le sujet :

> [...] même connaissant la littérature, je n'ai pas regardé les résultats. Je voulais m'approprier ce problème à ma manière. [...] c'est-à-dire, euh, rester libre pour faire les connections que je voulais et que je sentirais. (Communications personnelles, 21 septembre 2009)

Il ne voulait pas que son travail d'appréhension du problème soit influencé par les résultats existants. Il n'a commencé à examiner la littérature en détail qu'une fois l'identité (4.26) établie pour la forme forte de la conjecture (cf. p. 92). Sa lecture des travaux antérieurs a été facilitée par sa connaissance riche du problème. Dans une communication personnelle du 8 mars 2012, il nous écrit :

> Je suis persuadé que si je n'avais pas exploré seul pendant longtemps cette conjecture, je n'aurai jamais pu prendre du recul vis-à-vis de la littérature.

Il ajoute d'ailleurs qu'il avait déjà procédé de cette manière lors d'une autre recherche. Chercher le problème lui-même sans prendre connaissance en détail de la littérature existante lui a donc permis de prendre du recul face à ces différents travaux. Il précise ainsi qu'en ne la lisant pas, il a perdu du temps à redécouvrir des théorèmes, comme le théorème de Yamamoto. Mais en même temps se pose la question suivante : « aurais-je compris toute la pertinence ce de théorème avant d'avoir écrit $m = xyz$ et $d = xy^2$ [relatif à son identité] ? » (communications personnelles, 23 juillet 2012). Une dernière conséquence de cette manière de chercher est le fait qu'il a acquis une vision large et multiple de la conjecture. Il a ainsi pu répondre positivement à Gueye lorsqu'il lui a présenté un lien potentiel entre la conjecture et les triplets pythagoriciens.

A l'instar de Thurston, Mizony mentionne l'importance de la communauté mathématique dans le processus de découverte en mathématiques et particulièrement dans la phase d'incubation :

> Sans dialogue et écoute de collègues à qui je posais des questions ou à qui je racontais « mes salades », je suis certain que certaines idées n'auraient pas pu jaillir. (Communications personnelles, 23 juillet 2012)

Il explique comment se conduit le travail entre pairs chez les chercheurs et plus précisément, l'échange d'informations :

> Alors nous, ce qui arrive très souvent, c'est que, on dit à un collègue, euh, voilà, je me pose cette question, est ce qu'on n'aurait pas quelque chose qui pourrait, je ne sais pas, qui pourrait ressembler à tel résultat ? Le collègue répond, en général,

> [...] ou il dit oh ben non, mais tiens, tu pourrais t'adresser à un tel, lui il doit savoir. [...] Hein, alors très fréquemment, un, deux, trois jours après il revient en disant, écoute il m'est venu une idée, t'as mal formulé ton problème, et si tu le formulais comme ça ? [...] Et là c'est génial parce que en fait, j'exprimais une intuition et le fait d'en avoir parlé aux collègues, le collègue a saisi l'intuition à sa manière et il l'a transformée en un énoncé plus correct. Donc à l'un l'intuition, à l'autre un travail d'énonciation correct, voilà. Et ça, ça arrive très souvent en recherche. (Communications personnelles, 21 septembre 2009)

Sa collaboration avec Gueye illustre très bien ces propos :

> Dans le travail avec I. Gueye, il a eu cette bonne intuition d'introduire les triplets, moi je n'ai fait qu'un travail de mise en œuvre et de justification de son intuition. (Communications personnelles, 23 juillet 2012)

Mizony a ainsi interagi ou collaboré avec de nombreux collègues, mathématiciens, informaticiens, didacticiens, enseignants, amateurs et autres mécaniciens, astronomes, physiciens et astrophysiciens.

b. Sur l'heuristique de la découverte

Nous présentons la démarche de recherche de Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus, en la scindant en trois parties : la première est relative à l'élaboration de l'identité [20] (4.26), la seconde à la construction d'un programme résolvant l'équation pour $n < 10^{17}$ et la troisième vise à acquérir d'autres points de vue sur la conjecture. Soulignons que ces trois parties ne sont pas indépendantes ni chronologiquement successives. Au contraire, elles ont été effectuées simultanément et en interactions. C'est en s'appuyant sur des algorithmes de construction de solutions et une recherche de preuve papier-crayon que Mizony a trouvé l'identité (4.26), résultat phare de sa recherche. En retour, cette identité lui a permis d'améliorer ses algorithmes, de mieux comprendre le problème et de le voir ensuite sous des angles différents. Dans ce paragraphe, nous présentons en détail la première partie de la démarche de Mizony, celle qui l'a conduit à écrire l'identité (4.26). La construction du programme vérifiant l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour $n < 10^{17}$ et les autres points de vue sont décrits dans le chapitre 4 (partie 4.3.2 paragraphes c., d., e.).

Rappelons que Mizony a pris connaissance de l'existence de la conjecture d'Erdös-Straus lors d'un séminaire où nous présentions notre travail. Nous avions exposé une partie des résultats mathématiques existants et en particulier le résultat modulo 840 (Résultat 1) [21]. Le premier élément qui guide la recherche de Mizony est de chercher à se passer du modulo 840 « car ce n'était pas naturel » (communication personnelle du 21 septembre 2009). Il commence sa recherche en réduisant la recherche du problème à l'étude des nombres premiers : « comment trouver une décomposition générique pour tout nombre premier ? » (Mizony dans Aldon et al., 2010). Mizony étudie ensuite la résolution de l'équation en cherchant une méthode de construction de décomposition : prendre $\frac{1}{x}$ la plus grande fraction égyptienne inférieure à $\frac{4}{n}$ puis pour $\frac{1}{y}$, prendre la plus grande fraction égyptienne inférieure à $\frac{4}{n} - \frac{1}{x}$ et enfin voir sous quelles conditions $\frac{4}{n} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ est une fraction égyptienne pour déterminer $\frac{1}{z}$. Avec cet algorithme de type « glouton » [22], il montre que si n est différent de 1 et 17 modulo 24, l'équation

20. L'identité (4.26) est la suivante : $\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}$.

21. Résultat 1 : L'équation (4.1) a des solutions polynomiales en n pour tout n non congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840.

22. Un algorithme glouton est un algorithme basé sur le principe de faire des choix d'optimisation locale pour trouver un optimum global. (Modeste, 2012, p. 246)

a des solutions. Ensuite, il entreprend de regarder un autre problème : décomposer $\frac{4}{n}$ en somme de deux fractions égyptiennes. L'étude de ce problème va lui permettre de « saisir la profondeur des difficultés pour prouver la conjecture d'Erdös-Straus et des concepts mis en œuvre, en particulier celui de nombre pythagoricien » (Mizony, communication personnelle avril 2009). Il montre alors que seules les fractions $\frac{4}{n}$, avec n nombre premier qui n'est pas pythagoricien [23] (c'est-à-dire de la forme $4m-1$, m entier naturel), admettent une décomposition en somme de deux fractions égyptiennes. La recherche du problème auxiliaire se base sur la construction d'algorithmes décomposant $\frac{4}{n}$ en somme de deux fractions égyptiennes quand une solution existe. A la suite de ce résultat, il fait deux remarques importantes :

- Le ppcm de 6 (tout nombre premier > 3 est égal à ± 1 modulo 6) et de 4 (les nombres pythagoriciens ou non sont égaux à ± 1 modulo 4) est 12, nombre qui revient de manière importante dans ce problème.
- Il est à noter que, contrairement à la méthode standard qui cherche x le plus petit possible, l'utilisation des non pythagoriciens permet de chercher un x multiple de n (le plus petit possible) d'où y est « petit ». De plus cette méthode a l'avantage de moins utiliser la partie entière d'un nombre, ce qui rend plus efficace les procédures mises en œuvre. (Mizony, communication personnelle, avril 2009).

La résolution de ce problème met en évidence le rôle des nombres premiers non pythagoriciens ainsi que certaines propriétés des nombres premiers modulo 12. A noter que ce résultat entraîne que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour les nombres premiers non pythagoriciens de la forme $4m-1$. La suite de l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus va alors s'appuyer sur la méthode utilisée pour décomposer $\frac{4}{n}$ en somme de deux fractions égyptiennes. Dans un premier temps, il trouve une solution polynomiale pour $n \equiv 17$ modulo 24 : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{3}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{3}}$. Reste donc à étudier la conjecture pour les nombres $n \equiv 1$ modulo 24, comme le montre l'algorithme suivant :

```
> Erdos3:=proc(n)
local x,y,z;
if  not(n mod 24 in {1,17}) then x:=trunc(n/4)+1;y:=trunc((1/(4/n-1/x)))+1;
z:=1/(4/n-1/x-1/y); return([4/n=[1/x,1/y,1/z]]) fi:
#c'est la solution standard avec x minimum possible E(n/4)+1.
#il reste les nombres congrus a 1 et 17 à étudier
#pour 17 on utilise le fait que n modulo 3 = 2 (le polynôme ci-dessus) :
if n mod 24 =17 then return([4/n=[3/(n+1),1/n,3/n/(n+1)],17]) fi:
return([n,‘modulo 24=‘,1]):
end:
```

Il vérifie cet algorithme pour les nombres impairs inférieurs à 31 puis il s'intéresse uniquement aux nombres premiers congrus à 1 modulo 24 et inférieurs à 841. Dans cet algorithme de type glouton, il modifie $x = E(\frac{n}{4}) + 1$ et $y = E(\frac{1}{\frac{4}{n} - \frac{1}{x}}) + 1$ en introduisant les paramètres a et b, ce qui donne $x = E(\frac{n}{4}) + a$ et $y = E(\frac{1}{\frac{4}{n} - \frac{1}{x}}) + b$. Il fait alors varier a et b pour trouver des décompositions de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes pour certaines valeurs de n congrues à 1 modulo 24. En étudiant ces différentes décompositions, il détermine des régularités, puis une caractérisation de a (Ces différentes étapes sont explicitées en détail dans

23. Les nombres premiers pythagoriciens sont de la forme $4m+1$, m entier naturel. Fermat a établi qu'un nombre premier est somme de deux carrés si et seulement si il est de cette forme. Les nombres premiers non pythagoriciens sont de la forme $4m-1$, m entier naturel.

la partie suivante 5.3.3). Cette étude lui a ainsi permis de déterminer des décompositions pour certains nombres premiers congrus à 1 modulo 24.

L'idée d'introduire les paramètres a et b et de les faire varier provient du travail effectué sur la décomposition en deux fractions égyptiennes. Comme dans ce problème, il met en évidence le rôle des nombres premiers de la forme $4m-1$ et en particulier, le fait que x peut s'écrire comme multiple de n lorsque n est de cette forme. Un second élément va alors guider la poursuite de ses recherches : se passer totalement de la partie entière pour rester uniquement en arithmétique et améliorer ainsi l'efficacité des algorithmes.

> Le résultat principal de cette contribution est effectivement de donner une (des) méthode(s) algorithmique(s) qui reste(nt) dans le cadre de la théorie des nombres (donc qui se passe de la fonction analytique « partie entière ») et, de fait, qui améliore considérablement les résultats partiels trouvés à ce jour. (Mizony, communication personnelle, septembre 2009)

Pour cela, il commence par réduire ses recherches aux nombres premiers modulo 12. Les nombres premiers de la forme $4m-1$ étant congrus à 7 et 11 modulo 12, il ne reste donc que les nombres congrus à 1 et 5 pour lesquels l'équation n'a pas de solutions. Les nombres congrus à 5 modulo 12 sont congrus à 2 modulo 3 donc il existe des décompositions. Par exemple, $x=n, y=\frac{n+1}{3}$ et $z=ny$. Pour les nombres congrus à 1 modulo 12, il construit un ensemble $T(m)$ qui permet de construire des décompositions. Soit $n=(4m-1)k+b$ où m est un entier positif et b le reste de la division euclidienne de n par $4m-1$. On pose $x=mn$, $y=E(\frac{x}{4m-1})+1=mk+1+E(\frac{mb}{4m-1})$ et $z=\frac{nym}{(4m-1)(1+E(\frac{mb}{4m-1})-mb)}$. $T(m)$ est alors l'ensemble des b tel que z soit un polynôme en k à coefficients entiers positifs. On peut alors construire les ensemble $T(m)$ pour $m<m_0$.

Exemple : $T(6)$ avec $m_0=300$ est l'ensemble $\{7,10,11,15,19,20,21,22\}$. Pour $n\equiv 1[12]$ et b dans $T(m)$ alors $x=mn$, $y=E(\frac{x}{4m-1})+1$ et $z=\frac{1}{(\frac{4}{n}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y})}$ est solution. Les décompositions de $\dfrac{4}{n}$ pour $n\equiv 1[12]$ et b dans $T(6)$ (pour $m_0=300$) sont alors les suivantes (présentées sous la forme $\frac{4}{n}=[\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}],[m,b]$) :

$$\frac{4}{23k}=[\frac{1}{138k},\frac{1}{6k+1},\frac{1}{6k(6k+1)}],[6,0]$$

$$\frac{4}{23k+7}=[\frac{1}{6(23k+7)},\frac{1}{2(3k+1)},\frac{1}{3(23k+7)(3k+1)}],[6,7]$$

$$\frac{4}{23k+10}=[\frac{1}{6(23k+10)},\frac{1}{3(2k+1)},\frac{1}{2(23k+10)(2k+1)}],[6,10]$$

$$\frac{4}{23k+11}=[\frac{1}{6(23k+11)},\frac{1}{3(2k+1)},\frac{1}{6(23k+11)(2k+1)}],[6,11]$$

$$\frac{4}{23k+15}=[\frac{1}{6(23k+15)},\frac{1}{2(3k+2)},\frac{1}{6(23k+15)(3k+2)}],[6,15]$$

$$\frac{4}{23k+19}=[\frac{1}{6(23k+19)},\frac{1}{6k+5},\frac{1}{6(23k+19)(6k+5)}],[6,19]$$

$$\frac{4}{23k+20}=[\frac{1}{6(23k+20)},\frac{1}{6(k+1)},\frac{1}{2(23k+20)(k+1)}],[6,20]$$

$$\frac{4}{23k+21} = [\frac{1}{6(23k+21)}, \frac{1}{6(k+1)}, \frac{1}{3(23k+21)(k+1)}], [6, 21]$$

$$\frac{4}{23k+22} = [\frac{1}{6(23k+22)}, \frac{1}{6(k+1)}, \frac{1}{6(23k+22)(k+1)}], [6, 22]$$

A noter que cette méthode fait encore intervenir une partie entière (dans l'expression de y). Cependant l'étude des différentes décompositions fait apparaître qu'avec cette méthode, z est toujours un multiple de n (comme x). En étudiant cette propriété pour chaque b et en observant les valeurs de x et plus particulièrement le coefficient devant k, il remarque qu'il contient des diviseurs de m et/ou de $4m-1$.

Exemple : pour $n \equiv 1[12]$ et $b \in T(6)$, le coefficient devant k dans x est $6 \times 23 = 138$. Or la factorisation de 138 est $2 \times 3 \times 23$.

Après quelques tests, il remarque qu'il peut passer de $T(m)$ à l'ensemble des diviseurs de m^2. Ce passage est établi grâce à la proposition suivante : Soit $n \equiv b[4m-1]$ alors il existe d diviseur de m^2 défini par $bd \equiv 3m-1[4m-1]$. Cette idée est à l'origine de l'écriture de l'identité (4.26) qui synthétise tous ses résultats et surtout, qui ne fait intervenir aucune partie entière :

> L'identité finale a émergé petit à petit (en particulier dans le passage des « bons » restes b de n modulo $4m-1$ a de « bons » diviseurs d de m^2, ce qui m'a permis de me débarrasser de la fonction partie entière, but qui focalisait mon attention). (Mizony, communication personnelle, 18 février 2010)

L'intérêt de cette identité est double : d'une part la construction d'un programme de vérification de l'existence de solutions pour $n < 10^{17}$ grâce à la production de progressions arithmétiques à partir de cette identité et d'autre part, la reformulation de la conjecture en une conjecture d'existence (cf. conjecture 2, chapitre 4, partie 4.3.2 p. 93). Il a ensuite généralisé cette identité à toute fraction $\frac{a}{b}$.

5.3.3 Analyse des processus de recherche des chercheurs dans leur étude de la conjecture d'Erdös-Straus

Pour étudier les processus de recherche des deux chercheurs, Thépault et Mizony, nous avons développé une grille d'analyse constituée de deux outils méthodologiques. Le premier a été construit dans notre mémoire de Master 2 (M.-L. Gardes, 2009) et est basé sur une articulation entre une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire et une prise en compte du caractère expérimental en jeu dans le problème. Il permet d'une part de spécifier la nature des procédures mises en œuvre par un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche et d'autre part, d'effectuer une comparaison des processus de recherche de différents publics. Il s'agit d'une analyse globale des processus de recherche. Le second outil méthodologique développé consiste en l'identification de « gestes » de la recherche. Nous l'avons présenté à la section précédente. L'exploitation de cet outil permet d'analyser en détail l'activité de recherche effective d'un sujet engagé dans la résolution d'un problème de recherche, en déterminant les éléments moteurs dans l'avancement de la recherche. Dans cette partie, nous mettons à l'épreuve cette grille d'analyse pour analyser les travaux de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus de Thépault (dans le paragraphe a.), puis de Mizony (dans le paragraphe b.).

a. Analyse des recherches de Thépault

L'analyse globale des processus de recherche de Thépault sur la conjecture d'Erdös-Straus montre que sa recherche s'effectue dans un cadre algébrique et théorique. Le caractère expérimental du problème (faire des essais sur différentes valeurs de n) est peu exploité. Nous avons identifié une première dimension organisatrice dans sa recherche, celle du jeu d'extension/réduction. Il s'agit de son premier résultat, restreindre la nature de n, des entiers naturels aux nombres premiers. Sa recherche semble ensuite guidée par deux éléments : d'une part la volonté de simplifier le problème et d'autre part la volonté de se ramener à des éléments mathématiques qu'il connaît et qu'il maîtrise. Cela implique alors la recherche d'une simplification du problème avec un changement de cadre, le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Nous faisons l'hypothèse que c'est cet objectif, le passage à l'algèbre pour simplifier le problème, qui l'entraîne dans une recherche plutôt théorique et exploitant peu le caractère expérimental du problème. En effet l'algèbre est porteuse du général et puissante pour exploiter cet aspect du problème. Ce choix de dimension organisatrice agit alors sur le choix d'une dimension opératoire particulière pour la forme de représentation des entiers. Thépault distingue les nombres premiers en les écrivant sous la forme $4k+1$ et $4k+3$, k entier naturel. Cette notation est plus algébrique que celle des congruences qui fait davantage appel à des concepts d'arithmétique.

La démarche de recherche de Thépault pour trouver des conditions suffisantes d'existence de solutions pour la conjecture d'Erdös-Straus ne relève pas d'une démarche expérimentale au sens où nous l'avons définie. En effet, il n'a pas effectué de va-et-vient entre des expériences sur les objets mathématiques en jeu et des éléments théoriques. Cependant, sa démarche ne se déconnecte pas pour autant de l'aspect expérimental. Thépault a en effet eu recours, à un moment donné, à des expériences sur des exemples qui lui ont permis de trouver la bonne simplification à apporter au problème pour utiliser ensuite une méthode algébrique. Il a ainsi utilisé des constats issus de l'expérience au profit de sa démarche de résolution algébrique. De plus, dans la poursuite de ses recherches, il a montré que l'équation a des solutions pour $n < 10000$ en confrontant ses résultats théoriques (le théorème de Thépault 1) à des expériences (l'étude de cas particuliers du théorème de Thépault 1 pour certaines valeurs de a et de b). La dimension organisatrice en jeu dans cette recherche est la réduction de la recherche à la recherche de familles de nombres pour lesquelles des solutions sont connues. L'idée est ainsi de réduire l'étude de la conjecture à l'étude de cas particuliers. Cette dimension organisatrice est donc porteuse du caractère expérimental du problème. Thépault a effectué cette limitation de la recherche en s'appuyant sur le théorème établi dans sa recherche théorique de condition suffisante d'existence de solutions.

A l'aide de la notion de « geste », nous avons analysé les processus de recherche de Thépault à une échelle plus locale en identifiant quatre gestes moteurs dans l'avancée de sa recherche. Nous les détaillons ci-dessous dans l'ordre chronologique d'apparition dans les documents fournis par Thépault [24].

Premier geste : réduire le problème aux nombres premiers.

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, la première étape de la recherche de Thépault sur la conjecture d'Erdös-Straus est la restriction de la recherche des nombres entiers naturels aux nombres premiers. Il s'agit du premier geste de sa recherche.

> Il est clair que si pour un n donné, il existe une solution, il existe également une

24. Il s'agit de leur apparition dans les écrits ou récits transmis par Thépault et donc postérieurs à sa recherche. Nous ne disposons pas d'éléments pour savoir si cet ordre correspond à celui effectivement apparu lors de ses recherches.

> solution pour tout multiple de n et *que le problème se réduit à se pencher sur le cas où « n premier »*. (Thépault, communications personnelles du 24 mars 2010, c'est lui qui souligne)

Notons que dans son raisonnement, il mentionne uniquement le caractère multiplicatif de la propriété pour effectuer la réduction aux nombres premiers. Il ne précise pas que cela relève également de l'existence, pour tout entier, d'au moins un diviseur premier. Cependant ces deux aspects de la propriété semblent être des connaissances présentes dans le milieu et mobilisables par le chercheur. C'est ce qui lui permet d'agir et de faire ce geste. Ce geste est important car il permet de réduire le champ de recherche de la conjecture. Par exemple, d'un point de vue algébrique, les nombres premiers étant congrus à 1 ou 3 modulo 4, une partition modulo 4 se réduit à l'étude de deux classes de nombres.

Deuxième geste : transformer l'équation initiale.

Le second geste de sa recherche est la *transformation de l'équation initiale*.

> Savoir, si pour un n donné, je pouvais me servir d'une valeur auxiliaire de z me permettant de déterminer dans tous les cas, x et y entiers en fonction de n et de z. Je suis arrivé à l'équation [25] $[\frac{x+y}{xy} = \frac{4z-n}{zn}]$, dans laquelle apparaissaient à la fois la somme S et le produit P de ces deux inconnues. (Thépault, communications personnelles du 24 mars 2010).

Ce geste semble provoqué par la volonté de formuler le problème dans un cadre qu'il connaît bien et dans lequel il sait mobiliser les objets mathématiques ainsi que leurs concepts et leurs propriétés. La transformation de l'équation initiale qu'il a effectuée va lui permettre, en passant dans un cadre algébrique, de simplifier le problème puis de trouver des résultats partiels sur la conjecture. En effet, le problème se ramène à la résolution d'une équation du second degré avec une méthode « classique » algébrique qu'il connaît bien, à savoir celle de la somme et du produit des racines d'une fonction polynôme du second degré. Il utilise ensuite cette méthode pour le traitement des nombres premiers de la forme $4k+3$. Pour les nombres premiers de la forme $4k+1$, il l'exploitera à nouveau mais elle demandera en amont un travail supplémentaire.

Troisième geste : construire des exemples et les questionner.

Le travail supplémentaire évoqué ci-dessus pour étudier le cas des nombres premiers de la forme $4k+1$ est un travail sur les objets mathématiques en jeu et plus précisément, sur *la construction et le questionnement d'exemples*. Thépault a eu recours à ce geste afin de trouver une propriété spécifique de l'un des trois dénominateurs des fractions égyptiennes.

> Le seul constat issu de l'expérience était, pour toute décomposition avec n de la forme $4k+1$, l'existence parmi les trois dénominateurs d'un multiple de n. (Thépault, communications personnelles du 25 mai 2010)

L'observation de quelques exemples lui a ainsi permis de trouver une régularité sur la forme de x : x est un multiple de n. Précisons qu'il ne nous a pas explicité la manière dont il a trouvé ou construit des exemples et ceux qu'il a choisi d'étudier. Ce geste est décisif dans sa recherche dans la mesure où il lui permet ensuite de simplifier le problème pour les nombres premiers de la forme $4k+1$ et ainsi, de revenir à une formulation du problème où il peut utiliser à nouveau la méthode algébrique « classique ». Ce geste, pour Thépault, articule l'aspect expérimental du problème avec l'aspect algébrique. Il met à profit ces constats expérimentaux pour sa recherche plus théorique et générale utilisant des outils algébriques.

25. Cette équation est obtenue par les équivalences suivantes : $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \iff \frac{4}{n} - \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \iff \frac{4z-1}{zn} = \frac{x+y}{xy}$.

Quatrième geste : effectuer des contrôles locaux.

Utiliser une méthode algébrique pour résoudre un problème d'arithmétique nécessite un geste particulier du chercheur : *effectuer des contrôles locaux* et en particulier, celui du retour à la nature des nombres en jeu. En effet, cette méthode repose sur de nombreuses manipulations algébriques et notamment sur des résolutions d'équation du second degré. Le fait que les nombres en jeu soient des entiers naturels réduit le champ des solutions potentielles et donc, simplifie les résolutions des équations du second degré.

> Une condition nécessaire pour que cette équation ait deux racines entières est que le discriminant soit *un carré parfait.* (Communications personnelles du 4 avril 2010, c'est nous qui soulignons).

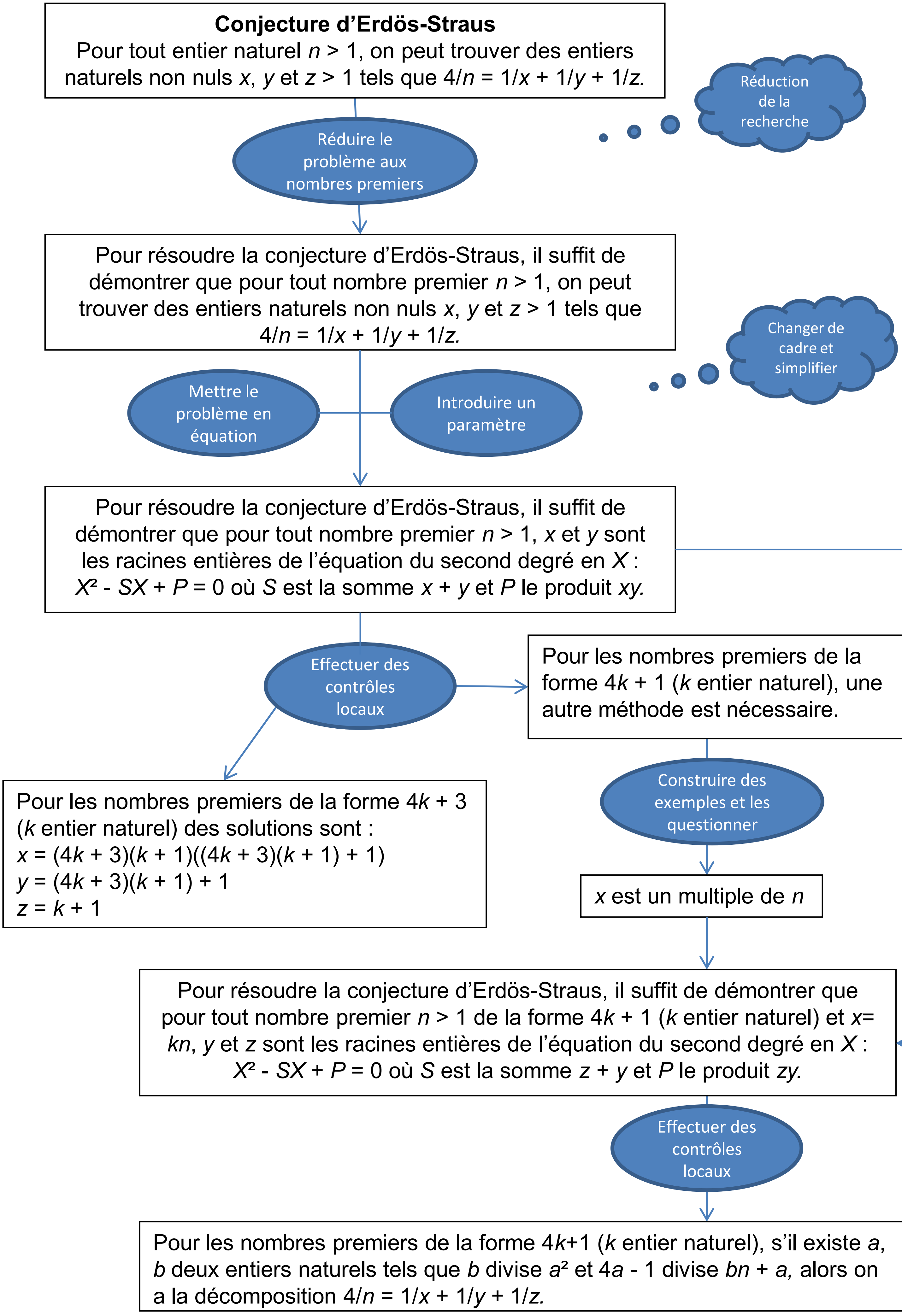
Sans un retour à la nature des nombres en jeu, les résolutions seraient davantage complexes et cette méthode, moins pertinente, serait peut être abandonnée, voire non suivie. De plus, revenir au caractère premier des nombres en jeu conduit Thépault à distinguer et étudier séparément les nombres premiers de la forme $4k+1$ et les nombres premiers de la forme $4k+3$. L'étude de ce dernier cas est relativement simple et va apporter des éléments pour la résolution du premier cas qui est plus problématique. Enfin, c'est précisément le retour à la nature des nombres qui permet d'obtenir les conditions suffisantes d'existence de solutions, le résultat majeur de ses recherches.

> Quant aux racines de l'équation [...] elles sont données par l'expression [...] qui nous donne $y = \frac{n(a+bn)}{(4a-1)}$ et $z = \frac{a(a+bn)}{b(4a-1)}$; c'est-à-dire les conditions publiées dans *Pour la Science* : b divise a^2 et $4a-1$ divise $a+bn$ [car y et z doivent être des entiers]. (Communications personnelles du 4 avril 2010).

Ces exemples montrent l'efficacité de la méthode algébrique, articulée avec une procédure sémantique de contrôle de la nature des objets, pour obtenir un résultat partiel sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Schéma de l'avancée de la recherche de Thépault.

La recherche de Thépault telle qu'il nous l'a écrite et explicitée semble assez linéaire. Nous n'avons pas d'éléments permettant de connaître plus précisément le cheminement suivi au cours de son étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Afin d'illustrer sa démarche de recherche, nous avons construit un schéma mettant en évidence, d'une part les dimensions organisatrice et opératoire en jeu dans son raisonnement, et d'autre part les quatre gestes de la recherche effectués au cours de son étude (voir page suivante). Nous avons cherché à illustrer les « pas en avant » provoqués par les gestes dans l'étude de la résolution de la conjecture. Dans les bulles, nous avons mentionné les dimensions organisatrices, les ellipses représentent les gestes de la recherche et dans les rectangles, ce sont les avancées provoquées par les gestes, c'est-à-dire les nouvelles formulations du problème, de nouveaux éléments introduits dans le problème et/ou les résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus.


Conjecture d'Erdös-Straus
Pour tout entier naturel $n > 1$, on peut trouver des entiers naturels non nuls x, y et $z > 1$ tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.
Réduire le problème aux nombres premiers
Réduction de la recherche
Pour résoudre la conjecture d'Erdös-Straus, il suffit de démontrer que pour tout nombre premier $n > 1$, on peut trouver des entiers naturels non nuls x, y et $z > 1$ tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.
Changer de cadre et simplifier
Mettre le problème en équation
Introduire un paramètre
Pour résoudre la conjecture d'Erdös-Straus, il suffit de démontrer que pour tout nombre premier $n > 1$, x et y sont les racines entières de l'équation du second degré en X : $X^2 - SX + P = 0$ où S est la somme $x + y$ et P le produit xy.
Effectuer des contrôles locaux
Pour les nombres premiers de la forme $4k + 1$ (k entier naturel), une autre méthode est nécessaire.
Pour les nombres premiers de la forme $4k + 3$ (k entier naturel) des solutions sont :
$x = (4k + 3)(k + 1)((4k + 3)(k + 1) + 1)$
$y = (4k + 3)(k + 1) + 1$
$z = k + 1$
Construire des exemples et les questionner
x est un multiple de n
Pour résoudre la conjecture d'Erdös-Straus, il suffit de démontrer que pour tout nombre premier $n > 1$ de la forme $4k + 1$ (k entier naturel) et $x= kn$, y et z sont les racines entières de l'équation du second degré en X : $X^2 - SX + P = 0$ où S est la somme $z + y$ et P le produit zy.
Effectuer des contrôles locaux
Pour les nombres premiers de la forme $4k+1$ (k entier naturel), s'il existe a, b deux entiers naturels tels que b divise a^2 et $4a - 1$ divise $bn + a$, alors on a la décomposition $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.

b. Analyse des recherches de Mizony

L'analyse globale du processus de recherche de Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus montre que sa recherche s'effectue dans un cadre arithmétique et algorithmique tout en exploitant le caractère expérimental du problème. La première étape de sa recherche est le choix d'une dimension organisatrice particulière, celle du jeu d'extension/réduction pour restreindre la nature de n, des entiers naturels aux nombres premiers. A l'issue de cette première étape, il formule une nouvelle question sur la conjecture d'Erdös-Straus : comment trouver une décomposition générique pour tout nombre premier ? Sa recherche va alors s'effectuer dans un cadre arithmétique et algorithmique. En effet, Mizony construit un algorithme de type « glouton » pour décomposer $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes. Le résultat de cet algorithme, à savoir l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n non congru à 1 et 17 modulo 24, va diriger sa recherche dans une nouvelle dimension organisatrice : la réduction de la recherche via la recherche de classes de nombres pour lesquelles une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes existent. Un parallèle peut être fait avec les dimensions organisatrices définies par Battie (2003), dont l'idée est de ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas (exhaustion et disjonction de cas). L'idée sous-jacente de limitation de la recherche est la même, en revanche l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus ne comporte pas de caractère fini. Notons que cette dimension organisatrice est porteuse du caractère expérimental du problème. En effet, le moyen « naturel » pour Mizony d'effectuer cette limitation de la recherche est l'étude des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour certaines valeurs de n. Afin de mieux comprendre les difficultés liées aux décompositions de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes pour certains nombres premiers, Mizony s'attache à résoudre un problème auxiliaire, celui de la décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de deux fractions égyptiennes, en ayant recours également à des algorithmes. La résolution de ce problème auxiliaire va lui permettre d'affiner et d'améliorer les premiers algorithmes construits pour trouver des décompositions effectives pour l'équation d'Erdös-Straus. Sa recherche est alors guidée par une seconde sous-dimension organisatrice : le « plongement » du problème dans le corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour de nombreuses valeurs de n premier. Cette pensée organisatrice est dans la même lignée que la réduction de la recherche et est particulièrement fructueuse pour limiter la recherche de solutions, en éliminant de plus en plus de classifications pour lesquelles la conjecture a des solutions. Cette dimension organisatrice est donc également révélatrice du caractère expérimental du problème puisqu'elle incite à étudier la conjecture dans différents corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n premier). La recherche de Mizony révèle ainsi une complémentarité entre le choix des dimensions organisatrices et le caractère expérimental du problème. Relevons également la complémentarité entre le choix des dimensions organisatrices et une dimension opératoire particulière, celle de la représentation des entiers à l'aide de la divisibilité et des congruences. Comme le précise Battie (2003), la limitation de la recherche par disjonction de cas et le « plongement » dans un corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n premier) sont des pensées organisatrices fortement associées à cette forme d'écriture des entiers. Mizony semble avoir fait le choix de la notation avec des congruences, d'une part pour rester dans le domaine de l'arithmétique et d'autre part, pour faciliter le travail sur les algorithmes et en particulier leur implémentation informatique. En effet, les logiciels de programmation possèdent la fonction « modulo » donc l'écriture des entiers avec les congruences (par exemple $n \equiv 1[4]$) ne nécessite pas un recours à une variable locale. Représenter un entier à l'aide de la divisibilité (par exemple $n = 4k+1$, k entier relatif) nécessite en revanche l'introduction de la variable k. L'implémentation d'algorithmes se situant dans un espace combinatoire, la notion de congruence porte davantage un caractère générique et facilite ainsi la construction d'une syntaxe.

Mizony a effectué une recherche avec une démarche expérimentale où l'expérimentation repose essentiellement sur la manipulation et l'implémentation de nombreux algorithmes. Des interactions constantes entre les processus d'expérimentation, de formulation et de validation se sont réalisées grâce à la construction de ces algorithmes. Dans les phases d'expériences, ceux-ci constituent un outil puissant de construction et d'exploitation d'exemples de décompositions pour certaines valeurs de n. Ils permettent d'une part un gain de temps pour les calculs à effectuer et d'autre part, une multiplication des exemples. Ce dernier aspect met par exemple en évidence l'importance du rôle joué par certains nombres premiers. Mizony a ainsi constamment réalisé des allers et retours entre ses manipulations et constructions d'algorithmes et l'élaboration de résultats théoriques sur la conjecture d'Erdös-Straus. Par ces va-et-vient, il a établi petit à petit les théorèmes Mizony 1 et Mizony 2, ainsi que les théorèmes Gardes-Mizony et Gueye-Mizony (cf. chapitre 4). En retour, la confrontation de ses résultats théoriques avec les processus de ses algorithmes lui a permis de les améliorer et de les rendre plus rapides. Il en découle le programme de vérification de l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour tout $n < 10^{17}$. Ainsi, si l'aspect expérimental est prépondérant dans les recherches de Mizony, il n'est pas déconnecté de l'aspect théorique et de la recherche de preuve ; au contraire, ces deux aspects interagissent et sont complémentaires. L'analyse à une échelle plus locale des processus de recherche de Mizony met en évidence ce processus dialectique grâce à l'identification de six gestes que nous détaillons ci-dessous.

Premier geste : réduire le problème aux nombres premiers.

La première étape de la recherche de Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus est la restriction de la nature de n des nombres entiers naturels aux nombres premiers. Il s'agit du premier geste de sa recherche.

> Si n vérifie la conjecture alors kn également, car si $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ alors $\frac{4}{kn} = \frac{1}{kx} + \frac{1}{ky} + \frac{1}{kz}$. Ainsi tout multiple d'un nombre premier vérifiant la conjecture la vérifie aussi.
> Conséquence : comme $\frac{4}{2} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ alors $\frac{4}{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$.
> Autrement dit, tout nombre pair vérifie la conjecture. De même tout multiple de 3 vérifie la conjecture car $\frac{4}{3} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$, ou tout multiple de 5 ($\frac{4}{5} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$) ou tout multiple de 7 ($\frac{4}{7} = \frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{210}$) etc. Mais comment trouver une décomposition générique pour tout nombre premier ? (Mizony dans Aldon et al., 2010)

Dans ce raisonnement (rédigé pour un article), Mizony met en évidence le caractère multiplicatif de la propriété pour effectuer la réduction aux nombres premiers. L'autre propriété nécessaire, à savoir tout entier admet au moins un diviseur premier, n'est pas mentionnée, elle semble évidente pour le chercheur. Il est clair que ces deux connaissances, permettant ce geste de réduction de la recherche, sont mobilisables par le chercheur et présentes dans le milieu. Notons également que la présentation de ce résultat articule les aspects algébriques et numériques. Nous n'avons pas d'éléments pour savoir si ce résultat a été trouvé algébriquement ou à partir des exemples mentionnés mais il est clair, par sa rédaction, que ces deux aspects et leur articulation sont importants pour lui. Ce geste permet à Mizony de restreindre le champ de la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus aux nombres premiers. Il constitue une avancée dans sa recherche dans la mesure où ces objets vont jouer un rôle particulier dans la suite de ses travaux. En particulier, l'étude de certains nombres premiers, les nombres premiers (non)-pythagoriciens, permettra de formuler la conjecture d'Erdös-Straus en d'autres termes et de donner ainsi une nouvelle piste de recherche.

Deuxième geste : désigner des objets.

Comme nous l'avons déjà souligné, la recherche de Mizony s'est appuyée sur de nombreuses manipulations d'objets mathématiques. Si dans l'énoncé de la conjecture d'Erdös-Straus, les objets mathématiques en jeu sont déjà désignés (fractions égyptiennes, nombres naturels), leur manipulation va engendrer petit à petit de nouveaux objets qu'il sera nécessaire de désigner : d'une part pour faciliter leur manipulation et par suite, l'élaboration d'éléments théoriques rendant compte de leurs propriétés ; et d'autre part, pour favoriser leur processus de naturalisation. Au sein de la résolution du problème, ce geste de *désignation des objets* entraîne des avancées : formulation du problème en d'autres termes, découverte de nouvelles pistes de recherche, amélioration des algorithmes et des conditions suffisantes d'existence de solutions, simplification des conditions, etc. Les exemples 1 et 2 ci-dessous illustrent l'importance de ce geste dans la recherche de Mizony.

Exemple 1 : désignation des nombres premiers pythagoriciens.

Étudier l'ensemble des entiers n tels que $\frac{4}{n}$ se décompose en somme de deux fractions égyptiennes est, pour Mizony, un préliminaire pour saisir la profondeur des difficultés inhérentes à la démonstration de la conjecture d'Erdös-Straus. Cette étude lui a permis, entre autres, de mettre en évidence le rôle des nombres premiers pythagoriciens dans ces types de décompositions. Après de multiples procédures algorithmiques et consultations de pages de l'encyclopédie des suites « Sloane »[26], il a montré que la suite des nombres n tels que $\frac{4}{n}$ n'admet pas de décomposition en somme de deux fractions égyptiennes est la suivante[27] :

$$5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97, 101, 109, 113, 125, \\ 137, 145, 149, 157, 169, 173, 181, 185, 193, 197.$$

Il remarque alors que ce sont tous des entiers de la forme $4m + 1$, m entier naturel. A l'aide de Sloane A008846, il met un nom sur ces nombres : ce sont des nombres premiers pythagoriciens ou produits de ceux-ci. En examinant uniquement les nombres premiers de cette liste, il détermine que seuls les premiers de la forme $4m - 1$, m entier naturel, c'est-à-dire les nombres premiers non-pythagoriciens, admettent une décomposition en somme de deux fractions égyptiennes. Il explique alors que « cela doit être sûrement connu, même si ce résultat n'a pas beaucoup d'intérêt en lui-même, il est significatif pour avancer dans la compréhension de la conjecture d'Erdös-Straus » (communication personnelle, avril 2009). Nous avons identifié ensuite plusieurs avancées de sa recherche liée à cette désignation des nombres premiers pythagoriciens. Écrire ces nombres sous la forme $4m-1$, m entier naturel, lui a permis de simplifier et d'améliorer ses algorithmes de décompositions, passant « de premiers programmes de balayages (lents) puis de tests (nettement plus rapides et contrôlés par les précédents) à un algorithme » (Mizony, communication personnelle, avril 2009) où on voit clairement apparaître cette écriture. Voici une partie de cet algorithme de décomposition pour les nombres premiers :

```
> Erdos2e:=proc(n) #pour les nombres premiers:
local x,y,k;
if n+1 mod 4=0 and isprime(n) then
k:=(n+1)/4:x:=k*n:y:=k: #n modulo 4=3 et n premier
return([4/n,k,1/x,1/y,m-1]):fi:
end:
```

Désigner ces nombres lui a donc permis de regrouper plusieurs objets en fonction d'une propriété commune, ce qui a rendu obsolète les balayages et les tests sur de nombreux exemples.

26. Adresse Internet du site en français : http ://oeis.org/ ?language=french

27. A partir de ses algorithmes, Mizony ne mentionne qu'un nombre fini de termes de la suite, qui, elle, est infinie.

Cette désignation apporte une généralisation. Dans l'algorithme précédent, on voit apparaître que x est implémenté comme un multiple de n. Cette propriété est issue de l'utilisation de nombres premiers de la forme $4m-1$ comme le souligne Mizony :

> L'utilisation des nombres de la forme $4m-1$ permet de chercher un x multiple de n, de moins utiliser la partie entière d'un nombre, ce qui rend plus efficace les procédures de mises en œuvre. [...] Ces algorithmes reposent en définitive sur l'utilisation de la nature pythagoricienne ou non d'un nombre premier. (communication personnelle, avril 2009)

Ici, la désignation des nombres premiers pythagoriciens a permis d'effectuer une simplification en spécifiant la nature du nombre entier x d'une part et en le reliant au nombre n d'autre part. Il écrit alors x en fonction de n : il existe k entier naturel tel que $x = kn$. En découle une nouvelle formulation de la conjecture d'Erdös-Straus (pour tout nombre premier $n > 3$ et pour $x = kn$ (k entier naturel), il existe des entiers naturels y et z tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$) et une nouvelle piste de recherche (chercher des décompositions avec cette propriété sur x). De plus, comme le précise le chercheur, les procédures algorithmiques mises en œuvre sont à nouveau améliorées.

Exemple 2 : construction de l'ensemble $T(m)$

Un second exemple où la désignation des objets en cours de manipulation marque une avancée dans la recherche de Mizony est la construction d'un ensemble de nombres afin de déterminer les premières conditions suffisantes d'existence de solutions.

> Voici le principal résultat intermédiaire qui, outre le fait qu'il nous a conduit à l'identité présentée, possède un intérêt en lui-même.
>
> *Lemme 1* sur les restes modulo $4m-1$: soit $p = (4m-1)k + b$, où m est un entier positif et b le reste de la division euclidienne de p par $4m-1$. Posons $x = mp, y = mk + 1 + E\left(\frac{mb}{4m-1}\right)$ et $z = \frac{pym}{(4m-1)\times\left(1+E\left(\frac{mb}{4m-1}\right)-mb\right)}$; alors si pour b, z est un polynôme en k à coefficients entiers, il est de degré 2 et $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ est une décomposition en une somme de trois fractions égyptiennes.
>
> *Définition :* Notons $T(m)$ l'ensemble des $b > 0$ tels que z soit un polynôme en k à coefficients entiers positifs.
>
> *Conjecture 1 :* pour tout nombre premier p il existe un entier m tel que p modulo $(4m-1)$ soit dans $T(m)$. (Mizony dans Aldon et al., 2010, p. 4)

Cet ensemble a été construit grâce à de nombreuses procédures algorithmiques, en repérant certaines régularités communes à de nombreux exemples. Comme précédemment, la construction de cet ensemble et sa désignation permettent de simplifier les écritures, d'améliorer les algorithmes grâce à une généralisation. Mais ce geste, ici, permet une avancée majeure dans la recherche, celle de formuler une nouvelle conjecture qui, si elle est prouvée, entraîne la vérité de celle d'Erdös-Straus. Mizony a ainsi formulé un nouveau problème, en lien avec le problème initial. Il s'agit d'une condition suffisante d'existence de solutions : si pour tout nombre premier n il existe un m tel que n modulo $4m-1$ soit dans $T(m)$, alors l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n. Sans construction et désignation de cet ensemble de nombres, cette reformulation de la conjecture n'aurait pas vu le jour et par suite, son théorème majeur non plus. Mizony ajoute que ce résultat lui a permis de démontrer par des moyens élémentaires le résultat bien connu (cf. Résultat 1, chapitre 4, p. 81) tout en y apportant deux améliorations :

> Il y a cependant deux différences : premièrement les décompositions associées à n sont différentes ; la méthode classique donne en général un z de l'ordre de n^4,

alors que cette méthode donne en général un z de l'ordre de n^2. Deuxièmement on peut itérer le processus en considérant $T(3)$ [lemme avec $m = 3$] ce qui nous donne 42 restes possibles modulo $9240 = 840 \times 11$, puis avec les ensembles $T(m)$ pour $m > 4$. (Mizony dans Aldon et al., 2010, p. 4)

Ceci indique que ce travail de construction et de désignation de $T(m)$ lui a permis d'enrichir sa conception de la conjecture d'Erdös-Straus au point de pouvoir faire des liens avec les résultats existants dans la littérature. Enfin, il précise que c'est à partir de l'étude de cet ensemble de nombres qu'il a abouti au théorème de Mizony 1 (cf. chapitre 4, p. 92).

> [...] il est apparu une propriété intéressante, celle de constater que dans la décomposition basée sur ce lemme, pour tout premier $n < 108$, z est un multiple de p. C'est l'étude de cette propriété qui nous a permis de passer des ensembles $T(m)$ de restes possibles à ceux de diviseurs de m^2 et ainsi d'aboutir au résultat [théorème de Mizony 1] et surtout de se passer de tout recours à la fonction partie entière. (Mizony dans Aldon et al., 2010, p. 5)

Ces deux exemples illustrent bien les avancées de la recherche de Mizony effectuées grâce à la désignation des objets en cours de manipulations, notamment dans les procédures algorithmiques. Ils mettent ainsi en évidence les va-et-vient entre les expériences (constituées majoritairement de nombreux algorithmes et de leur étude), les manipulations de certains objets dans ces expériences (par exemple les nombres premiers qui n'ont pas de décomposition en somme de deux fractions égyptiennes) et la tentative d'élaboration d'éléments théoriques pour rendre compte de propriétés communes de ces objets (ces nombres sont des nombres premiers pythagoriciens s'écrivant sous la forme $4k - 1$, k entier). Ce sont ces interactions qui rendent nécessaire à un moment donné la désignation de ces objets pour faciliter leur manipulation, leur naturalisation et par suite l'avancée dans la résolution du problème. Ce geste semble donc indispensable pour mettre en œuvre une dimension expérimentale. Sans la désignation des objets, leur manipulation est complexe (dans l'exemple 1, les premiers algorithmes sont des tests ou des balayages et sont très lents) et rend difficilement possible l'élaboration d'éléments théoriques. L'articulation entre les phases d'expérimentation, formulation et validation repose ainsi, en partie, sur ce geste de recherche. En ce sens, il contribue à l'évolution du milieu du chercheur dans la mesure où il apporte de nombreux éléments nouveaux sur lesquels il peut s'appuyer pour avancer dans la recherche, c'est-à-dire simplifier le problème, le reformuler, trouver des résultats partiels, etc.

Troisième geste : construire des exemples et les questionner.

La démarche de recherche de Mizony, comme nous l'avons déjà souligné, a été expérimentale. Ses expériences se sont appuyées sur la construction d'exemples, c'est-à-dire la construction de décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes pour certaines valeurs de n puis sur l'étude de ces différents exemples. Nous identifions ici un geste prépondérant et central de la recherche : *la construction et le questionnement d'exemples.* Le rôle de ces expériences dans les recherches de Mizony est double : d'une part l'exploitation de nombreux cas particuliers permet d'effectuer des généralisations et d'autre part, l'analyse fine d'exemples clés permet de mieux comprendre les difficultés liées à la preuve de la conjecture. La construction et l'étude des exemples se sont effectuées à l'aide d'algorithmes. Ce recours à l'informatique lui permet de construire de nombreux exemples en temps limité. Or disposer de nombreux exemples est un avantage, en particulier pour la recherche de régularités. Ainsi, au sein de la résolution de la conjecture, ce geste de *construction et questionnement des exemples* conduit à de nombreuses avancées : approfondissement des connaissances sur le problème et en particulier des difficultés pour sa preuve, amélioration des algorithmes de décompositions et élaboration de résultats partiels sur la conjecture. Afin d'illustrer les avancées obtenues par Mizony en effectuant ce geste de la recherche, nous détaillons :

- un premier exemple (exemple 3) où l'utilisation de nombreux exemples permet une généralisation et par suite une amélioration des algorithmes de décomposition ;
- un second exemple (exemple 4) où l'étude de quelques cas particuliers permet de mieux comprendre le problème et de contribuer à l'élaboration d'un résultat partiel.

Exemple 3 : utilisation de nombreux exemples. Le premier algorithme de type « glouton » (*Erdos3*, p. 173) construit par Mizony prend comme valeurs : $x = E\left(\frac{n}{4}\right) + 1$ et $y = E\left(\frac{1}{\frac{4}{n}-\frac{1}{x}}\right) + 1$. Ses recherches le conduisent à modifier cet algorithme en introduisant les paramètres a et b dans les expressions respectives de x et y, ce qui donne $x = E\left(\frac{n}{4}\right) + a$ et $y = E\left(\frac{1}{\frac{4}{n}-\frac{1}{x}}\right) + b$. Cela donne lieu à un nouvel algorithme paramétré par n, a et b :

```
> erdos3Etest:=proc(n,a,b)
local x,y,z;
x:=trunc(n/4)+a;y:=trunc(1/(4/n-1/x))+b;z:=1/(4/n-1/x-1/y);
if is(z,integer) then return([4/n=[1/x,1/y,1/z],a]) fi:
end :
```

Il construit alors un programme de balayage en faisant varier a et b pour trouver de nombreuses décompositions de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes pour certaines valeurs de n congru à 1 modulo 24 :

```
> #ce sont les nombres critiques; que trouvent t-on ?
avec un programme de balayage systématique,
> #pour 25, a=4, b=1 période 120=5*24 (période 60 et même 20); ou a=1, b=2,
période 120;
#pour 49, a=2, b=1 ou 2 période 84=7*2*6 (même 28);
#pour 73, a=2, b=2 période 840=35*24 (même 280);
#pour 97, a=4, b=1 ou 2 période 840=35*24;
#pour 97, a=1, b=2 période 120=5*24 (même 60);
#pour 121, a=3, b=1 ou 3, période 264=11*24;(même 44)
#pour 145, a=4, b=1, période 120=5*24;
#pour 169, a=10, b=1, période 312=13*24;
#pour 193, a=2, b=2 ou 2 période 840=35*24;
#pour 217, a=2, b=1 ou 2 période 168=7*24;
#pour 217, a=1, b=2 période 120=5*24;
#pour 241, a=3, b=6, période 1848=7*11*24;
```

L'étude de ces différents exemples lui permet de déterminer des régularités, par exemple concernant les périodes. Cela le conduit dans un premier temps à modifier l'algorithme *erdos3Etest*, en regroupant les périodes identiques pour certaines classes de nombres :

```
Erdos3c:=proc(n)
local x,y,z;
if not(n mod 24 in {1,17}) then x:=trunc(n/4)+1;y:=trunc((1/(4/n-1/x)))+1;
z:=1/(4/n-1/x-1/y); return([4/n=[1/x,1/y,1/z]]) fi:
#c'est la solution standard avec x minimum possible E(n/4)+1.
#il reste les nombres congrus a 1 et 17 à étudier
#pour 17 on utilise le fait que n modulo 3 = 2 (le polynôme ci-dessus) :
```

```
if n mod 24 =17 then return([4/n=[3/(n+1),1/n,3/n/(n+1)]]) fi:
#cascade pour n=1 modulo 24
if n mod 20 =5 then x:=trunc(n/4)+4;y:=trunc((1/(4/n-1/x)))+1;
z:=1/(4/n-1/x-1/y); return([4/n=[1/x,1/y,1/z]]) fi:
if n mod 60 =37 then x:=trunc(n/4)+1;y:=trunc((1/(4/n-1/x)))+2;
z:=1/(4/n-1/x-1/y); return([4/n=[1/x,1/y,1/z]]) fi:
if n mod 28 =21 then x:=trunc(n/4)+2;y:=trunc((1/(4/n-1/x)))+1;
z:=1/(4/n-1/x-1/y); return([4/n=[1/x,1/y,1/z]]) fi:
if n mod 44 =33 then x:=trunc(n/4)+3;y:=trunc((1/(4/n-1/x)))+1;
z:=1/(4/n-1/x-1/y); return([4/n=[1/x,1/y,1/z]]) fi:
end:
```

Puis, dans un second temps, il détermine une caractéristique du paramètre a :

```
> erdostest:=proc(n)
local x,y,z,a,w;
for w from 3 by 4 to n do
if (w*n+1) mod 4=0
then a:=(w*n+1)/4:x:=trunc(n/4)+a;
y:=trunc(1/(4/n-1/x))+1;
z:=1/(4/n-1/x-1/y);
if is(z,integer) then
return([4/n=[1/x,1/y,1/z],a,w]) fi:
fi:
od:#return([n,echec]);
end:
```

Ce travail de construction de nombreux exemples puis de leur questionnement a permis à Mizony, d'une part de mieux comprendre les nombres exceptions (les nombres premiers congrus à 1 modulo 24) et d'essayer de les traiter (en déterminant notamment une caractérisation de a) et d'autre part d'améliorer les premiers algorithmes de décomposition grâce à différentes généralisations.

Exemple 4 : étude de cas particuliers.

La naissance de l'identité [28] (4.26) repose sur l'exploitation de nombreux exemples (ci-dessous pour $m = 16$ et différentes valeurs de b ; données par $[m, b]$), comme le précise Mizony (communications personnelles, février 2010) :

$$\frac{4}{63k+54} = \frac{1}{144(7k+6)} + \frac{1}{2(8k+7)} + \frac{1}{16(7k+6)(8k+7)}[16,54]$$

$$\frac{4}{63k+55} = \frac{1}{16(63k+55)} + \frac{1}{2(8k+7)} + \frac{1}{16(63k+55)(8k+7)}[16,55]$$

$$\frac{4}{63k+59} = \frac{1}{16(63k+59)} + \frac{1}{16k+15} + \frac{1}{16(63k+59)(16k+15)}[16,59]$$

$$\frac{4}{63k+60} = \frac{1}{48(21k+20)} + \frac{1}{16(k+1)} + \frac{1}{16(21k+20)(k+1)}[16,60]$$

28. L'identité (4.26) est la suivante : $\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}$.

$$\frac{4}{63k+61} = \frac{1}{16(63k+61)} + \frac{1}{16(k+1)} + \frac{1}{8(63k+61)(k+1)}[16,61]$$

$$\frac{4}{63k+62} = \frac{1}{16(63k+62)} + \frac{1}{16(k+1)} + \frac{1}{16(63k+62)(k+1)}[16,62]$$

```
> ifactor(1008);
```

$$(2)^4(3)^2(7)$$

```
> #c'était en juin, on voit clairement apparaître qu'à chaque b, correspond
des diviseurs de m ou (et) de 4*m-1 devant k.
(par exemple ifactor(1008) dans l'exemple ci-dessus).
```

Mais elle repose également sur l'étude spécifique de nombres premiers particuliers, comme l'étude de la décomposition de $\frac{4}{3361}$ (communication personnelle, février 2010) :

```
#en juillet dans un programme je teste en fonction de d*p+m modulo 4*m-1; avec
d diviseur de m puis de m^2, car ça marchait (l'étude du nombre 3361 fut
important, voir note). D'où un paramétrage par les d au lieu des b et le
passage de b à d via 3*m-1 par un calcul modulo 4*m-1 (ce passage  marche très
bien si d<4*m-1, d'où la plus grande généralité obtenue avec les d diviseurs
de m^2).

> #note sur 3361 :
> ErdosDmpqg(3361,300);#les trois plus petites (pour m)  solutions pour 3361
(avec x et z multiples de p)
```

$$[[3361, 25, 125],[3361, 170, 5780],[3361, 290, 29]]$$

```
> is(3361 mod 99 in Tm[25]),is(3361 mod (4*170-1) in Tm[170]),is(3361 mod
(4*290-1) in Tm[290]);
```

$$\text{false, false, true}$$

```
> #il n'y a pas de bons b pour m=25 et 170; le plus petit m donnant un bon b
est m=290 (d est inférieur à 4*m-1 uniquement pour la troisième solution).
```

L'étude de ce nombre premier particulier a permis de passer des diviseurs de m aux diviseurs de m^2. Tout au long de ses recherches, Mizony a eu recours à l'étude de quelques cas particuliers, tels 3361 ou 2521, pour différentes raisons :

– pour mieux comprendre les difficultés faisant obstacle à la résolution du problème et pour accroître ses connaissances sur le problème :

```
> #certains premiers ont peu de solutions, (pourquoi ?) :
> ErdosDmp(3361,3500);ErdosDmp(2521,3500);

        {[3361, 25, 125], [3361, 170, 5780], [3361, 290, 29]}

  {[2521, 2226, 50562], [2521, 483, 25921], [2521, 319, 9251], [2521, 28, 8],
[2521, 22, 44], [2521, 12, 16]}
```

(Communications personnelles, avril 2010)

– pour vérifier ses résultats et en particulier ses algorithmes :

> J'ai testé -> [jusqu'à] 10^7 environ 2^{23} en 15 min environ, une seule exception : $2521(k = 105)$ (qui est un nombre clé donnant bcp [beaucoup] de fil à retordre). (communication personnelle par courriel , mars 2011)

L'étude de ces nombres premiers « exceptions » a ainsi fortement contribué à l'élaboration de l'identité (4.26) et du théorème de Mizony 1 qui en découle, mais également à la construction du programme de vérification d'existence de solutions pour tout $n < 10^{17}$.

Quatrième geste : introduction d'un paramètre.

Dans l'exemple 3 ci-dessus (p. 185), la construction et l'étude d'exemples fait appel à un autre geste de la recherche, celui de *l'introduction d'un paramètre*. En effet, Mizony modifie le premier algorithme en remplaçant la constante 1 dans les expressions de x et y respectivement par a et b. Le premier effet de cette modification d'écriture des entiers x et y est d'apporter une généralisation. Puis en effectuant des balayages sur a et b, c'est-à-dire en leur attribuant successivement différentes valeurs numériques, il génère de nombreux exemples numériques de décomposition. Leur étude va ensuite permettre une amélioration des algorithmes. Précisons ici que c'est le couple de gestes (construction et questionnement d'exemples ; introduction d'un paramètre) réalisé en interaction qui produit les avancées dans la recherche du problème.

Cinquième geste : effectuer des contrôles locaux.

Si la démarche de Mizony dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus s'appuie davantage sur les objets mathématiques naturalisés en jeu dans le problème et la construction et l'étude de nombreux exemples numériques, certaines phases de recherche relèvent davantage d'un travail syntaxique. Ainsi la formulation de certaines progressions arithmétiques résulte dans un premier temps de procédures algorithmiques, d'un travail sur les écritures dans l'espace combinatoire et dans un langage spécifique de programmation. Dans un second temps, effectuer des contrôles locaux est alors nécessaire pour déterminer les contraintes répondant aux conditions imposées par l'énoncé de la conjecture. Ce geste permet ainsi d'articuler le travail mathématique dans les espaces combinatoire et opératoire. Nous illustrons ci-dessous les effets des contrôles locaux par les exemples 5 et 6.

Exemple 5 : contrôles locaux pour déterminer des conditions suffisantes d'existence de solutions.

Le théorème de Mizony 1 s'appuie sur l'identité (4.26) et sur un retour à la nature des nombres en jeu dans cette identité. En effet, cette relation est une identité, elle est vraie pour tous nombres entiers n, m, d. Cependant, pour satisfaire aux conditions de la conjecture d'Erdös-Straus (x, y et z entiers), il faut que $\frac{mn+d}{4m-1}$ et $\frac{(mn+d)mn}{(4m-1)d}$ soient des entiers pour tous entiers n, m et d. Ces contraintes déterminent ainsi les conditions du théorème de Mizony 1, à savoir d diviseur de m^2 et $4m - 1$ diviseur de $mn + d$.

Exemple 6 : contrôles locaux pour améliorer les algorithmes.

A partir de l'identité (4.26), Mizony établit trois formules polynomiales augmentant l'efficacité de ses algorithmes de recherche de solutions explicites. Si $[n, m, d]$ est solution de (4.26) alors les progressions arithmétiques suivantes sont aussi solutions de (4.26) :

$$[n + (4m - 1)k, m, d]$$

$$[n + 4\frac{(mn + d)}{(4m - 1)a}k, m + \frac{m}{a}k, d + \frac{d}{a}k] \quad \text{où } a = pgcd(m, d, m^2/d)$$

$$[n+4\frac{m(n+4d)}{(4m-1)a}k, m+\frac{m}{a}k, d] \text{ où } a^2 \text{ est le plus grand facteur carré de } m^2/d.$$

Pour établir ces formules, il a tout d'abord construit de nombreux algorithmes, en faisant varier différents paramètres. Il a ensuite écrit ces formules et en dernière étape, il a déterminé les conditions sur a (c'est-à-dire $a = pgcd(m, d, \frac{m^2}{d})$ et a^2 le plus grand facteur carré de $\frac{m^2}{d}$) pour que chaque nombre en jeu soit un entier.

Ainsi *effectuer des contrôles locaux*, en particulier avec un retour à la nature des nombres en jeu, est un geste entraînant plusieurs avancées dans la recherche de Mizony : détermination de formules polynomiales générales de décompositions de $\frac{4}{n}$ pour certains nombres premiers n, construction et amélioration d'algorithmes de décomposition et de vérification et détermination de conditions théoriques suffisantes d'existence de solutions.

Sixième geste : implémenter un algorithme.
La construction et l'implémentation d'algorithmes de décompositions effectives de solutions pour la conjecture d'Erdös-Straus constitue l'essence de la recherche de Mizony. Il semble réaliser ces deux actions en même temps, en écrivant directement un programme implémentant l'algorithme qu'il désire construire. Ce geste illustre donc bien la double facette du geste : opératoire avec un travail sur les objets mathématiques (construction) et combinatoire avec un travail sur les écritures (implémentation). Cette articulation est présente tout au long des recherches effectives du chercheur mais il la met également en évidence dans ses écrits (voir par exemple (Mizony, 2010)).

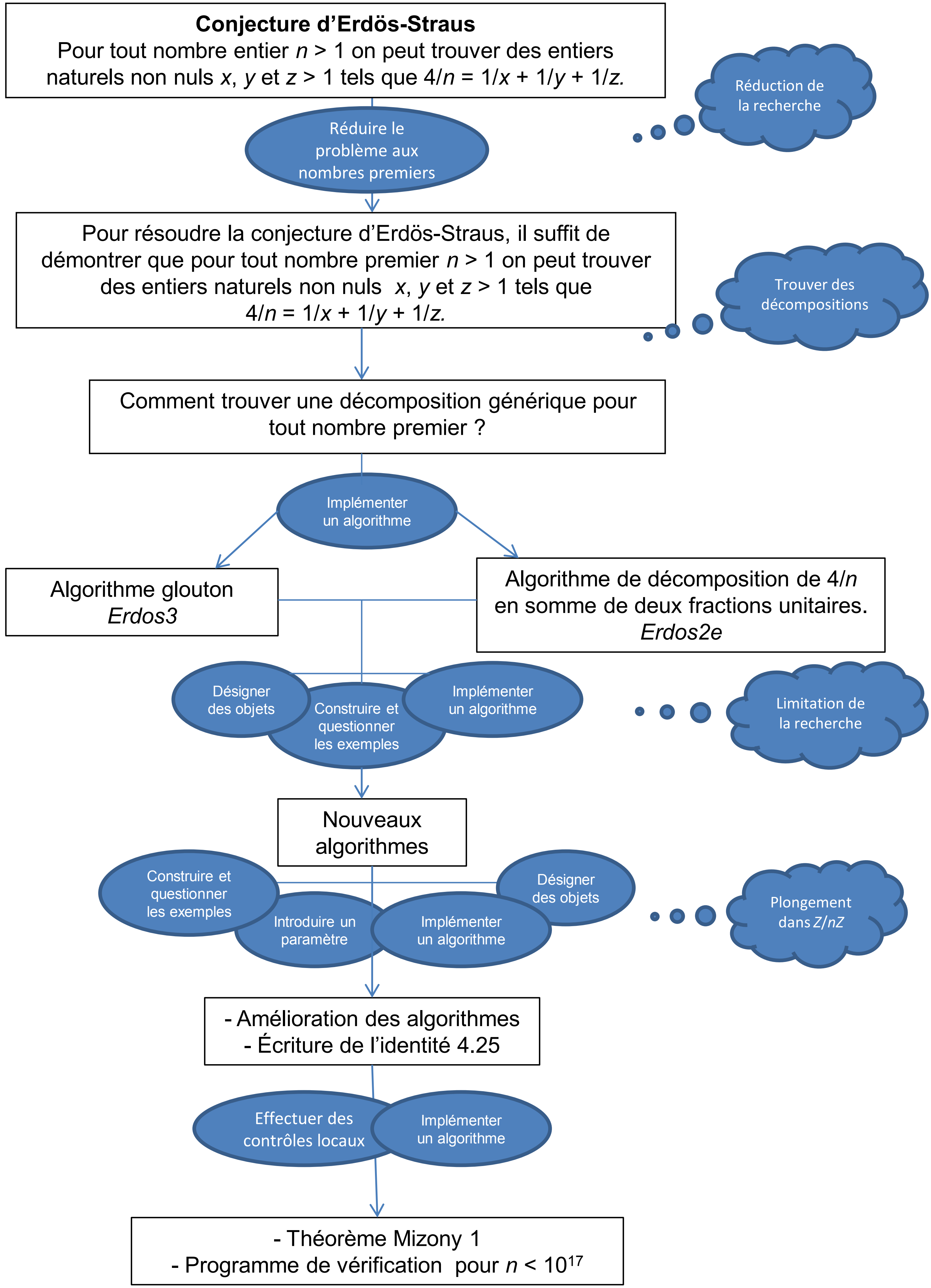
Mizony a construit et implémenté des centaines d'algorithmes tout au long de ses recherches. Ils sont construits dans des buts différents : conjecturer, tester et valider les conjectures, établir un résultat partiel ou intermédiaire, multiplier le nombre d'exemples à étudier, améliorer des résultats. Illustrons cela avec différents exemples. L'algorithme *Erdos3* (cf. p. 173), établit un résultat partiel sur la conjecture : l'équation a des solutions pour tout n non congru à 1 modulo 24. Cet algorithme combine l'algorithme « glouton » qui donne des solutions pour tout n non congru à 1 et 17 modulo 24 et une formule polynomiale donnant des solutions pour n congru à 17 modulo 24. Notons que cet algorithme répond à un problème différent de celui d'Erdös-Straus : pour tout entier naturel n non congru à 17 modulo 24, il existe trois entiers naturels non nuls x, y, z tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Cependant ce résultat intermédiaire apporte des éléments importants pour la résolution de la conjecture. L'algorithme construit par Mizony, pour la décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de deux fractions égyptiennes, met en évidence le rôle joué par certains objets dans la conjecture d'Erdös-Straus. En cela, il enrichit sa conception de la conjecture, notamment en cernant mieux les difficultés faisant obstacle à sa résolution. L'algorithme *erdos3Etest* présenté dans l'exemple 3 ci-dessus (cf. p. 185) cherche à déterminer une caractéristique du paramètre a sous les conditions initiales de la conjecture (c'est-à-dire seulement *if is(z,integer)*). L'étude des résultats de cet algorithme avec différentes valeurs de n, a et b va ensuite conduire à la formulation d'une conjecture sur la valeur de a. Il construit alors un nouvel algorithme (*erdostest* dans l'exemple 3 p. 185) de décomposition implémentant cette possible valeur de a. Il teste à nouveau ce programme sur différentes valeurs de n pour vérifier, algorithmiquement et sur de nombreux exemples, sa conjecture. Enfin le programme de vérification de l'existence de solutions pour tout $n < 10^{17}$ (cf. chapitre 4, partie 4.3.2, paragraphe c.) comporte différents algorithmes permettant d'apporter efficacité et rapidité pour améliorer les premiers programmes de vérification. Notons que nous utilisons le mot « programme » pour la vérification puisque ce n'est pas un algorithme au sens de Modeste :

> Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (Modeste, 2012, p. 25)

En effet, ce programme ne résout pas la conjecture d'Erdös-Straus et ne se réalise pas en un nombre fini d'étapes. Si ces algorithmes ont des buts différents, les avancées dans la recherche du problème se rejoignent : enrichir les connaissances sur le problème, améliorer certains résultats et algorithmes de décomposition et établir des résultats partiels sur la conjecture, tels que l'identité (4.26) et le théorème de Mizony 1.

Schéma de l'avancée des recherches de Mizony.

La recherche de Mizony telle que nous l'avons suivie n'a pas été linéaire. Comme nous l'avons souligné ci-dessus, les interactions entre les dimensions organisatrices, l'aspect algorithmique et l'aspect expérimental du problème sont constantes et très imbriquées. De même, l'analyse de la recherche à l'aide de la notion de « geste » montre que les différents gestes sont liés, s'appelant les uns les autres dans leur réalisation. Les processus de recherche mis en œuvre sont complexes et les avancées dans l'étude du problème sont provoquées par un système de gestes. Afin d'illustrer sa démarche de recherche, nous avons construit un schéma mettant en évidence d'une part les dimensions organisatrices et opératoires en jeu dans ses raisonnements, et d'autre part les systèmes de gestes, éléments moteurs dans l'avancée de sa recherche (voir page suivante). Nous avons utilisé les mêmes codes que pour le schéma de la recherche de Thépault : les bulles représentent les dimensions organisatrices, dans les ellipses, ce sont les gestes de la recherche et dans les rectangles, nous avons mentionné les avancées provoquées par les gestes, c'est-à-dire les nouvelles formulations du problème, de nouveaux éléments introduits dans le problème et/ou les résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus.


Conjecture d'Erdös-Straus
Pour tout nombre entier $n > 1$ on peut trouver des entiers naturels non nuls x, y et $z > 1$ tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.
Réduire le problème aux nombres premiers
Réduction de la recherche
Pour résoudre la conjecture d'Erdös-Straus, il suffit de démontrer que pour tout nombre premier $n > 1$ on peut trouver des entiers naturels non nuls x, y et $z > 1$ tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.
Trouver des décompositions
Comment trouver une décomposition générique pour tout nombre premier ?
Implémenter un algorithme
Algorithme glouton *Erdos3*
Algorithme de décomposition de $4/n$ en somme de deux fractions unitaires. *Erdos2e*
Désigner des objets
Construire et questionner les exemples
Implémenter un algorithme
Limitation de la recherche
Nouveaux algorithmes
Construire et questionner les exemples
Introduire un paramètre
Implémenter un algorithme
Désigner des objets
Plongement dans Z/nZ
- Amélioration des algorithmes
- Écriture de l'identité 4.25
Effectuer des contrôles locaux
Implémenter un algorithme
- Théorème Mizony 1
- Programme de vérification pour $n < 10^{17}$

5.3.4 Conclusion

L'analyse mathématique des recherches de Thépault et Mizony (cf. chapitre 4) a montré, d'une part que les résultats qu'ils ont obtenus sont équivalents (Théorème de Thépault 1 et théorème de Mizony 1), et d'autre part qu'ils n'ont pas utilisé les mêmes outils mathématiques pour établir ces résultats. Thépault a utilisé des outils algébriques (équations du second degré) alors que Mizony a exploité des outils d'arithmétique et d'algorithmique.

L'analyse épistémologique de leurs travaux révèle, quant à elle, que leurs processus de recherche ont été différents. L'analyse globale en termes de dimensions organisatrice et opératoire montre que la recherche de Thépault s'est effectuée dans un cadre algébrique et théorique sans mise en œuvre d'une dimension expérimentale alors que la démarche de Mizony a été de nature expérimentale, en appui sur la manipulation et la construction de nombreux algorithmes. Si les chercheurs privilégient une démarche de recherche particulière, ils ne déconnectent pas leurs recherches de l'autre aspect. Thépault exploite le caractère expérimental du problème pour vérifier que l'équation a des solutions pour des familles de nombres et Mizony garde à l'esprit la quête d'une preuve théorique de la conjecture. L'analyse à une échelle plus locale à l'aide de la notion de « geste » met en évidence une différence majeure dans les processus de recherche mis en œuvre par les chercheurs : la recherche de Thépault semble linéaire et structurée alors que la recherche de Mizony semble plus erratique et complexe. Nous avançons deux raisons pour expliquer cette différence. La première est liée à la nature des outils mathématiques mobilisés et au rôle des objets en jeu dans leurs recherches. La nature des principaux gestes identifiés comme moteurs dans la recherche de Thépault (réduction du problème aux nombres premiers, transformer l'équation initiale, effectuer des contrôles locaux) met en évidence qu'il a peu travaillé sur les objets mathématiques en jeu. Il a en effet mobilisé des outils algébriques qui ne favorisent pas le recours à la manipulation des objets. Dans les procédures syntaxiques mises en œuvre, la nature des objets auxquels réfèrent les symboles n'a pas d'importance et elle peut être mise de côté. Notons cependant que Thépault ne l'oublie pas et contrôle ses procédures algébriques à l'aide de procédures sémantiques, notamment par un retour à la nature des nombres en jeu. Dans les recherches de Mizony, la place des objets mathématiques est centrale. La nature des principaux gestes identifiés comme moteurs dans ses recherches (implémenter un algorithme, désigner des objets, construire et questionner des exemples) met en évidence qu'il a travaillé en appui sur la manipulation et le questionnement de ces objets. Le fait que ses gestes soient liés et s'appellent les uns les autres dans leur réalisation montre que ce travail sur les objets a favorisé la mise en œuvre d'une démarche expérimentale, processus non linéaire mais au contraire dialectique entre expérience et théorie. La seconde raison est liée à la nature des données recueillies. Nous distinguons deux types de données :

- les données provenant des récits des chercheurs sur leur recherche, ce sont des données reconstruites *a posteriori* ;
- les données provenant de notre suivi régulier des recherches en cours, ce sont des données brutes recueillies « en direct » et non rationalisées par les chercheurs.

Pour analyser les recherches de Thépault, nous ne disposons que de données reconstruites *a posteriori* alors que pour Mizony, nous avons également eu accès à des données brutes. Comme nous l'avons montré dans l'analyse épistémologique de l'activité mathématique (chapitre 5, partie 5.1), la phase de rédaction est associée à un processus de structuration, simplification et vérification des raisonnements mis en œuvre au cours des phases d'invention. Ne disposant que de récits (écrits ou oraux) des recherches de Thépault, nous faisons l'hypothèse que c'est une des raisons pour lesquelles sa recherche semble linéaire et structurée. En suivant régulièrement les travaux de Mizony, nous avons pu observer précisément les processus de recherche mis en œuvre et mettre en avant les aspects erratiques et dialectiques de sa recherche.

Pour conclure, l'analyse des processus de recherche des deux chercheurs nous permet d'identifier deux visées de la recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus : la quête de la vérité de la conjecture (choix de Thépault) et la recherche de décompositions effectives (choix de Mizony). Chaque visée privilégie des dimensions organisatrice et opératoire particulières et favorise l'émergence de gestes de nature différente. Les dimensions organisatrices associées à la quête de la vérité de la conjecture sont le jeu d'extension/réduction puis la simplification du problème avec changement de cadre. Les dimensions opératoires exploitées sont la manipulation d'outils algébriques, l'utilisation de théorèmes-clés et la représentation des entiers en référence à la division euclidienne. Cette visée favorise l'émergence de gestes dans l'espace combinatoire tels que *la transformation de l'équation initiale*, *l'introduction de paramètre* et *les contrôles locaux*. Les dimensions organisatrices privilégiées dans la recherche de décompositions effectives sont le jeu d'extension/réduction puis la limitation de la recherche et le plongement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La dimension opératoire associée est la représentation des entiers à l'aide de la divisibilité, avec ou sans les congruences. Cette visée favorise la mise en œuvre d'une dimension expérimentale et l'émergence de gestes opératoires tels que *la construction et le questionnement des exemples*, *la désignation des objets* et *l'implémentation d'algorithmes*.

5.4 Remarques sur la genèse d'un résultat mathématique : entre preuves et algorithmes

Dans ce paragraphe, nous souhaitons illustrer les recherches conjointes que nous avons menées avec Mizony sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Nos recherches respectives nous ont en effet amenés à de nombreuses interactions, en particulier sur la genèse et la validité de certains résultats mathématiques. Nos objectifs étant différents (résoudre la conjecture d'une part et construire un dispositif didactique d'autre part), les questionnements associés le sont également. A partir de l'élaboration d'une progression arithmétique, nous allons montrer comment nous avons interagi avec nos questionnements propres et comment ces interactions ont enrichi notre travail pour arriver à un beau résultat. Nous mettrons également en évidence l'importance et le rôle d'une dialectique entre preuves et algorithmiques dans l'élaboration de résultats mathématiques.

Dans l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus (cf. chapitre 4), nous avons présenté les recherches de Mizony (cf. partie 4.3.2). Le premier théorème (théorème de Mizony 1 p. 92) qu'il a énoncé est un théorème d'existence de solutions permettant d'étudier la conjecture forte, c'est-à-dire lorsque deux des trois entiers x, y, z sont des multiples de n. Pour étudier la conjecture faible, c'est-à-dire lorsque un seul des trois entiers x, y, z est un multiple de n, nous avons trouvé, avec Mizony et l'aide d'un collègue informaticien, un second théorème d'existence de solutions pour tout n congru à 1 modulo 4. Nous rappelons ci-dessous ce théorème :

Théorème de Gardes-Mizony. *Soit $n = 4k+1$, k un entier naturel. S'il existe a, c, deux entiers tels que c divise $(k+a)^2$ et $pcgd(k+a, c)(4a-1)$ divise $k+a+c(4k+1)$, alors on a la décomposition $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ où x, y, z sont des entiers non nuls.*

On obtient cette décomposition grâce à l'identité (4.31) :

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{k+a} + \frac{(4a-1)c}{(k+a)(k+a+c(4k+1))} + \frac{4a-1}{(4k+1)(k+a+c(4k+1))}.$$

L'intérêt de cette identité est de fournir des progressions arithmétiques qui permettent d'éliminer de nouvelles classes de nombres (elles permettent de passer de 0,036% à 0,034% de classes restantes). Pour chaque $[k, a, c]$ solution de (4.31), nous avons défini deux triplets de progressions arithmétiques $[k(t), a(t), c(t)]$ (pour tout t entier naturel) solutions de (4.31) :

$$[k + c(4a - 1)t, a, c]$$

$$[k + e(k + a), a, c(1 + e)] \qquad \text{où } e(t) = \frac{(4a-1)(k+a)t}{d\delta} \text{ avec } d = pgcd(k + a, c) \text{ et } \delta = pgcd(\frac{(k+a)^2}{c}, k + a). \tag{5.1}$$

L'élaboration de la progression arithmétique (5.1) est le fruit de nombreuses interactions entre les recherches de Mizony et nos propres recherches mathématiques sur la conjecture d'Erdös-Straus. Elle résulte en effet d'un double questionnement :

– un questionnement de nature algorithmique : chercher à étudier la conjecture pour les nombres dont l'existence de solutions n'est pas assurée par un théorème d'existence (théorème de Mizony 1 ou théorème de Gardes-Mizony). Pour cela, on cherche à élaborer des algorithmes construisant explicitement des décompositions pour un n donné. On n'étudie donc que les nombres exceptions, à savoir les nombres premiers congrus à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840.
– un questionnement de nature théorique : chercher à élaborer une progression arithmétique pour tout entier naturel n de la forme $4k + 1$ (k entier naturel), à partir de l'identité (4.31).

Dans la suite, nous détaillons la genèse de cette progression arithmétique (5.1). La première progression arithmétique écrite à partir de l'étude algorithmique de l'identité (4.31) est la suivante (pour tout entier naturel t) :

$$[k + \frac{(4a-1)(k+a)^2}{c}t, a, c + (4a - 1)(k + a)t]. \tag{5.2}$$

En voulant effectuer la preuve de l'algorithme c'est-à-dire montrer que pour ce triplet, l'algorithme construit explicitement des décompositions de $\frac{4}{4k+1}$, pour tout t entier naturel, on se rend compte que l'algorithme ne construit pas de décomposition explicite pour certains triplets. En effet, pour $k = 18, a = 3$ et $c = 63$, on obtient le triplet $[18 + 77t,\ 3,\ 63 + 231t]$. Pour $t = 1$, le triplet donne $x = 98, y = \frac{10192}{3}, z = 3883152$, ce qui n'est pas une solution de l'équation d'Erdös-Straus puisque y n'est pas un entier naturel. Ainsi la formule (5.2) ne donne pas de solution pour tout entier naturel t. La tentative de preuve formelle soulève alors le problème : ce triplet ne vérifie pas la première condition du théorème de Gardes-Mizony, à savoir $(63+231t)$ divise $(21+77t)^2$. Pourtant l'algorithme dont est issue la formule (5.2) donne une décomposition pour $k = 18, a = 3$ et $c = 63$ et pour tout entier naturel t : $\frac{4}{73+132t} = \frac{1}{3(7+11t} + \frac{1}{4(7+11t)(9t+5)} + \frac{1}{12(7+11t)(9t+5)(73+132t)}$. En étudiant cet exemple, on remarque que pour vérifier la condition qui posait problème, le terme $\frac{(21+77t)^2}{63+231t}$ a été divisé par une constante $(\frac{7}{3})$, de sorte à rendre y entier. Le retour à l'algorithme montre alors que la progression arithmétique (5.2) ne correspond pas exactement à la procédure de l'algorithme. En effet cette dernière contient une astuce calculatoire qui permet d'obtenir x, y et z entiers. Cependant, il est difficile d'écrire formellement la formule correspondante à l'algorithme. Nous avons donc cherché à modifier la première progression arithmétique (5.2) afin qu'elle soit, d'une part vraie formellement pour tout entier naturel t, et d'autre part toujours aussi efficace algorithmiquement pour construire explicitement des décompositions de $\frac{4}{4k+1}$. Ici nous avons effectué deux recherches en parallèle, l'une plutôt théorique et l'autre plutôt algorithmique.

L'étude théorique, c'est-à-dire à partir de la progression (5.2) et du théorème de Gardes-Mizony, fait émerger deux nouvelles formules :

$$\begin{aligned}&[k+(4a-1)^2(k+a)^2c\ pgcd\left(\frac{(4a-1)(k+a)^2}{c},(4a-1)(k+a)\right)t, a,\\ &c+(4a-1)^2(k+a)^2\ pgcd\left(\frac{(4a-1)(k+a)^2}{c},(4a-1)(k+a)\right)c^2t]\end{aligned}$$

$$[k+(4a-1)^2(k+a)^2ct, a, c+(4a-1)^2(k+a)c^2t]$$

Ces deux progressions arithmétiques donnent, pour tout t entier naturel des décompositions de $\frac{4}{4k+1}$ pour tout entier naturel k. En effet, les deux conditions du théorème de Gardes-Mizony sont vérifiées. Cependant, algorithmiquement, elles sont très couteuses en temps car les termes du triplet sont très grands. Elles ne remplissent donc pas le critère d'efficacité des algorithmes. Parallèlement, l'étude algorithmique donne également deux formules :

$$\begin{aligned}&[k+\frac{(4a-1)(k+a)^2at}{\delta d}, a, c+\frac{(4a-1)(k+a)act}{\delta d}]\\ &\text{où } \delta = pgcd(\frac{(4a-1)(k+a)^2}{c}, k+a) \text{ et } d = pgcd(c, k+a).\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}&[k+\frac{(4a-1)(k+a)^2t}{\delta d}, a, c+\frac{(4a-1)(k+a)ct}{\delta d}]\\ &\text{où } \delta = pgcd(\frac{(4a-1)(k+a)^2}{c}, k+a) \text{ et } d = pgcd(c, k+a).\end{aligned} \tag{5.4}$$

La formule (5.3) ne vérifie pas les conditions du théorème de Gardes-Mizony pour tout entier naturel t. Elle permet de trouver de nombreuses décompositions efficacement du point de vue algorithmique mais théoriquement, elle ne permet pas de donner une formule générale. La formule (5.4) vérifie les conditions du théorème de Gardes-Mizony pour les nombres premiers mais pour certains nombres composés, elle ne donne pas de solution à l'équation d'Erdös-Straus. Par exemple, pour $n = 5$, le triplet [5, 49, 81] ne donne pas de solution. Cependant, en ajoutant une condition supplémentaire $pgcd(4a-1, c) = 1$, cette difficulté pour certains nombres composés est levée. Algorithmiquement, elle est très efficace et donne les mêmes résultats que le premier algorithme construit avec l'astuce calculatoire. Cette formule remplit donc les critères théorique et algorithmique. Notons que la difficulté sur certains nombres composés n'en est pas une pour la recherche algorithmique puisque l'existence de solutions pour ces nombres est assurée par la première proposition. Cependant l'étude de ces cas triviaux est importante et intéressante car elle va permettre d'améliorer cette progression arithmétique au point de vue complexité. En appui sur la progression arithmétique (5.4) et sur le théorème de Gardes-Mizony, une autre progression arithmétique a vu le jour :

$$[k+\frac{(4a-1)(k+a)^2t}{\delta d}, a, c+\frac{(4a-1)(k+a)ct}{\delta d}]$$
$$\text{où } \delta = pgcd(\frac{(4a-1)(k+a)^2}{c}, (4a-1)(k+a)) \text{ et } d = pgcd(c, k+a). \quad (5.5)$$

où on peut remarquer que δ peut se simplifier par $4a-1$. Ainsi, grâce aux formules (5.4) et (5.5), nous avons trouvé la « bonne formule » c'est-à-dire celle qui vérifie à la fois les critères théorique et algorithmique :

$$[k+\frac{(4a-1)(k+a)^2t}{\delta d}, a, c+\frac{(4a-1)(k+a)ct}{\delta d}] \text{ où } \delta = pgcd(\frac{(k+a)^2}{c}, k+a) \text{ et } d = pgcd(c, k+a).$$

Elle est plus performante que la formule (5.5) puisqu'elle est optimale (algorithmiquement), c'est-à-dire que le terme $\frac{(4a-1)(k+a)^2}{\delta d}$est le plus petit possible et elle est vérifiée pour tout entier t.

En résumé, la genèse de la progression arithmétique (5.1) débute avec un premier algorithme, très efficace dans la recherche de solutions pour certains nombres exceptions. Pour affirmer qu'un algorithme résout une famille de problèmes, il convient d'en donner une démonstration, il s'agit de la correction de l'algorithme (Modeste, Gravier, & Ouvrier-Buffet, 2010). La recherche de la preuve formelle du premier algorithme, c'est-à-dire montrer que pour tout entier naturel t, l'algorithme fournit une décomposition de $\frac{4}{4k+1}$ en somme de trois fractions unitaires, montre que la correction de l'algorithme est fausse : pour certain t, il ne propose pas de solutions. Cette difficulté exhibée par la tentative d'élaboration d'une preuve formelle a entrainé une recherche de nouvelles progressions arithmétiques et a permis d'établir une progression juste théoriquement (pour tout entier naturel t) et efficace algorithmiquement (algorithme associé rapide et optimal), notamment grâce à l'étude de cas triviaux (pour les nombres composés). Comme le mentionne Modeste et al. (2010), la preuve a joué un rôle fondamental pour la complexité de l'algorithme final, c'est-à-dire pour la recherche d'un algorithme optimal de décomposition de $\frac{4}{4k+1}$ en somme de trois fractions unitaires. La genèse de la progression arithmétique (5.1) met ainsi en évidence le processus dialectique entre preuves et algorithmes dans l'élaboration d'un résultat mathématique. Cette dialectique s'est réalisée grâce à la richesse de nos interactions entre une recherche centrée sur la tentative de preuves théoriques et une recherche axée sur la construction d'algorithmes performants. Un de nos échanges avec Mizony, résume bien notre recherche collaborative :

> Remplacer c par $pgcd(c, k+a)$ au dénominateur de la formule 3 devrait marcher ?
> Si tu peux vérifier, moi je vais regarder si c'est optimum, mais je ne le pense pas.
> (mail de Mizony du 28/09/12)

La progression arithmétique (5.1) résulte véritablement de nos interactions et nous ne sommes plus capables de dire quel est l'apport de l'un ou de l'autre dans l'élaboration de ce résultat.

5.5 Conclusion

Notre étude épistémologique s'est composée de trois parties. Dans un premier temps, nous avons effectué une analyse d'épistémologie historique et contemporaine de l'activité de recherche mathématique à partir de l'étude de textes de mathématiciens, sur le processus de découverte mathématique d'une part et sur l'heuristique de la découverte d'autre part. Nous retenons de cette étude plusieurs aspects de l'activité de recherche mathématique qui nous semblent essentiels à prendre en compte pour créer une situation didactique de recherche de problèmes, proche de celle des chercheurs, dans un contexte scolaire. Le premier aspect est la nature du processus de découverte mathématique : quatre étapes alternant une phase de création et une phase de vérification. Les chercheurs pointent une différence de méthode entre ces deux phases. Ils mettent en avant le rôle de l'intuition et du raisonnement plausible dans la phase d'invention et celui de la rigueur et du raisonnement démonstratif dans la phase de rédaction. Le second aspect est le rôle de la communauté mathématique dans le processus de création et en particulier, l'importance des différentes modalités d'échange entre pairs. Le troisième aspect est relatif au mécanisme de la découverte mathématique, où les chercheurs pointent l'importance de faire des liens pour résoudre un problème (liens entre des problèmes et entre des domaines mathématiques, associations d'idées, de notions), l'importance d'articuler les connaissances antérieures avec l'expérience de résolution de problèmes (dialectique connaissances/heuristiques) et les ressorts de la dimension expérimentale pour s'engager et avancer dans l'étude de la résolution du problème. Ces trois aspects nous permettront de déterminer des variables macro-didactiques et didactiques pour construire une situation de recherche de problèmes dans un contexte scolaire (cf. chapitre 6). Grâce à cette étude épistémologique, nous avons également mis en évidence les éléments importants à prendre en compte pour analyser les processus de recherche d'un sujet en situation de résolution de problèmes : l'action du sujet, le rôle de l'intuition dans la phase de création, l'importance de la dialectique entre la mobilisation des connaissances et le développement d'heuristiques et le rôle de la dimension expérimentale. Cela nous a conduite à la seconde partie de notre étude épistémologique : la construction d'une grille d'analyse des processus de recherche mis en œuvre dans une résolution de problème de recherche. Cette grille s'appuie sur deux outils méthodologiques, d'une part une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire (outil développé par Battie (2003) et repris dans nos premiers travaux (M.-L. Gardes, 2009, 2010)), et d'autre part une analyse à l'aide de la notion de « geste » de la recherche. Pour développer ce second outil, nous nous sommes appuyée sur une étude de la notion de « geste » en philosophie des mathématiques et en didactique des mathématiques. Nous rappelons ci-dessous la définition d'un « geste » de la recherche :

> Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans la possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience.

Nous considérons ainsi le geste comme un élément moteur dans la recherche, particulièrement pour provoquer des avancées et la production de résultats. En ce qui concerne l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons identifié sept gestes de la recherche : désigner des objets, réduire le problème aux nombres premiers, introduire un paramètre, construire des exemples et les questionner, effectuer des contrôles locaux, transformer l'équation initiale et implémenter un algorithme. Certains gestes sont porteurs de l'aspect expérimental du problème et favorise la mise en œuvre d'une démarche expérimentale pour étudier le problème (désigner des objets, réduire le problème aux nombres premiers, construire des exemples et les questionner, implémenter un algorithme). La troisième partie de nos investigations épistémologiques sur l'activité de recherche mathématique des mathématiciens consiste en une analyse des processus de recherche de deux chercheurs engagés dans l'étude de la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans un premier temps, le recueil de leurs points de vue sur l'activité de recherche mathématique et sur l'heuristique qu'ils ont mise en œuvre dans leurs travaux sur la conjecture nous ont permis d'étayer les témoignages étudiés dans la première partie de l'étude épistémologique. Dans un second temps, nous avons analysé leurs travaux à l'aide de la grille d'analyse construite dans la seconde partie de l'étude épistémologique. Les résultats montrent que les outils développés sont pertinents et complémentaires pour analyser les processus de recherche effectifs des chercheurs engagés dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. L'analyse globale, en termes de dimensions organisatrice et opératoire, permet de mettre en évidence la visée générale de la recherche suivie : quête de la vérité de la conjecture ou recherche de décompositions effectives. Les processus de recherche sont alors de nature différente (algébrique et théorique ou arithmétique, algorithmique et expérimental) et l'analyse à une échelle plus locale à l'aide de la notion de « geste » permet de les étudier finement. Les gestes mettent en évidence le recours aux connaissances mathématiques disponibles et mobilisables, le rôle des objets mathématiques en jeu, les heuristiques développées, la complexité des raisonnements mis en œuvre et les origines et la nature des avancées de la recherche. La mise à l'épreuve de notre grille d'analyse sur les travaux des chercheurs montre donc son efficacité pour confronter et comparer différentes recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus, en pointant les similitudes et les différences des processus de recherche mis en œuvre. Nous utiliserons à nouveau cette grille d'analyse pour étudier les travaux des élèves sur la conjecture et les mettre en perspective avec ceux des chercheurs (cf. chapitres 7 et 9).

Conclusion de la partie II

Dans cette partie nous rendons compte des travaux que nous avons conduits pour élaborer le milieu théorique (au sens de Bloch) de la situation expérimentale autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans le chapitre 4, nous présentons l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus que nous avons effectuée en étudiant et en articulant les résultats anciens et nouveaux sur le problème. Dans le chapitre 5, nous rendons compte de l'analyse d'épistémologie historique et contemporaine que nous avons conduite sur l'activité de recherche mathématique d'une part, et sur la conjecture d'Erdös-Straus d'autre part.

Dans le manuscrit, nous avons présenté l'analyse mathématique et l'analyse épistémologique dans deux chapitres différents. Cependant, au cours de nos recherches nous avons mené ces deux études en interaction, notamment dans les parties relatives à l'étude des travaux de Thépault et Mizony. Dans un premier temps, notre méthodologie de suivi des travaux des deux chercheurs a nécessité une étude mathématique fine du problème. En effet, il nous a semblé indispensable de comprendre ce que font les mathématiciens dans leurs recherches si l'on veut étudier leur processus de recherche et repérer les éléments moteurs dans les avancées de leurs travaux. Il était nécessaire de mettre en évidence les savoirs mathématiques notionnels, heuristiques et culturels en jeu dans l'étude de la résolution de la conjecture. Ce travail a été mené en recensant puis en étudiant les principaux articles sur la conjecture d'Erdös-Straus (Erdös, 1950 ; Oblàth, 1950 ; Rosati, 1954 ; Bernstein, 1962 ; Yamamoto, 1965 ; Mordell, 1969 ; Swett, 1999 ; Schinzel, 2000, cf. parties 4.1 et 4.2 du chapitre 4). Parallèlement, nous avons étudié (cf. partie 4.3) les travaux de recherche de Thépault et Mizony sur le problème. Ces analyses mathématiques ont mis en évidence deux approches différentes du problème, diverses méthodes, outils et connaissances mathématiques mobilisés dans l'étude de chaque approche (cf. partie 5.5). Dans l'étude épistémologique, nous nous sommes alors intéressée à ces différentes méthodes, et particulièrement aux processus de recherche mis en œuvre et aux connaissances mobilisées au sein de ces différentes méthodes. Nous avons cherché à identifier les éléments moteurs dans l'avancée des recherches et les modalités d'utilisation des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques. Pour cela, en appui sur notre étude épistémologique de l'activité de recherche mathématique à partir des témoignages de mathématiciens, nous avons développé la notion de « geste » de la recherche puis déterminé sept gestes moteurs dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Les interactions entre ces études épistémologiques et l'analyse mathématique des travaux de Thépault et Mizony nous ont alors permis d'affiner l'origine et le rôle de ces gestes dans les avancées de la recherche du problème. Par exemple, l'étude des travaux de Mizony a mis en évidence l'importance des gestes *implémenter un algorithme*, *construction et questionnement d'exemples* et *désignation des objets* pour mettre en œuvre une démarche de type expérimental et étudier la conjecture sous la visée de la recherche de décompositions effectives. Dans les travaux de Thépault, ce sont les gestes de *transformation de l'équation initiale* et *des contrôles locaux* qui se sont révélés moteurs pour sa recherche menée sous la visée de la quête de la vérité. Les gestes de la recherche sont ainsi révélateurs de la visée de la recherche choisie et de la nature de la démarche de recherche mise en œuvre. Ces études épistémologiques nous ont ensuite conduite à affiner nos analyses mathématiques afin de comprendre les liens entre les différentes approches et les différents résultats de la littérature, de Mizony et de Thépault. Dans le paragraphe 4.4, nous avons ainsi étudié les articulations entre les différents théorèmes formulés sur la conjecture d'Erdös-Straus, pointé les particularités de chaque approche et identifié les informations supplémentaires apportées sur le problème par les recherches de Mizony et de Thépault. Nous avons ainsi montré que toutes les recherches mènent à trois résultats, les résultats 1, 2 et 3.

Le milieu théorique épistémologique et mathématique de notre recherche s'est donc construit dans des allers et retours permanents entre l'analyse mathématique du problème et les analyses épistémologiques de l'activité de recherche mathématique et de la conjecture d'Erdös-Straus. Nos échanges et nos interactions avec Mizony, tant sur la recherche mathématique du problème que sur des questions d'épistémologie, illustrent tout particulièrement cette démarche, comme en témoigne le paragraphe 5.4 sur la genèse d'un résultat mathématique, entre preuves et algorithmes. Pour conclure, les résultats principaux de cette partie sont les suivants :

– l'identification de différents aspects du travail du chercheur, éléments essentiels pour construire une situation de recherche de classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus, proche de celle des mathématiciens ;
– la construction d'une grille d'analyse des processus de recherche mis en œuvre dans la recherche du problème reposant sur deux outils méthodologiques : une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire et une analyse à l'aide de la notion de « geste ».

Cette étude mathématique et épistémologique a permis de confirmer le potentiel de la conjecture d'Erdös-Straus pour l'objectif didactique principal que nous nous sommes fixée, à savoir, mettre les élèves dans une situation de recherche de problèmes, en contexte scolaire, proche de celle du mathématicien. Ces analyses montrent, d'une part la possibilité d'implémenter une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus en classe (à partir du lycée) en prenant en compte différents aspects du travail du chercheur, et d'autre part les potentialités de ce problème pour analyser les processus de recherche mis en œuvre dans une étude de résolution de problème de recherche. Dans la partie suivante, partie III, Analyses didactiques, nous élaborons une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus, que nous expérimentons dans un contexte de laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Nous effectuons ensuite les analyses des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans leur étude du problème, ce qui nous permettra en retour d'affiner et d'enrichir nos phases de conception théorique.

Troisième partie

Analyses didactiques

Chapitre 6

Vers la construction d'une situation de recherche pour la classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus

Sommaire

Dans les différents modèles de milieu développés par Bloch (2002), l'élaboration du milieu expérimental *a priori* consiste, dans un premier temps, à définir les possibles effectifs de l'enseignement afin de pouvoir tester ou falsifier des hypothèses relatives au milieu théorique. Cela fait l'objet des deux premières parties (6.1 et 6.2) de ce chapitre. Dans la partie (6.1), nous effectuons une étude des contenus des programmes de mathématiques du secondaire concernant l'arithmétique d'une part et la démarche expérimentale d'autre part. Dans la partie (6.2), en nous appuyant sur nos analyses épistémologiques, nous déterminons trois variables macro-didactiques (Artigue, 1990, p. 290) concernant l'organisation didactique de situations autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Ces variables nous permettent de construire quatre scénarios qui seront ensuite expérimentés en classe. Nous identifions les connaissances mathématiques utiles pour la constitution d'un milieu initial favorisant une dévolution de la recherche du problème aux élèves et étudiants, puis nous présentons huit variables didactiques de situations. Dans un second temps, afin de tester la robustesse de la situation et de repérer des invariants ou des phénomènes inattendus, nous avons expérimenté plusieurs situations didactiques autour de la conjecture d'Erdös-Straus, dans différents contextes (scolaire, non scolaire, stage de formation professionnelle) et avec des publics différents (élèves de collège, élèves de lycée, étudiants de classe préparatoire, étudiants à l'université, enseignants et enseignants stagiaires). Certaines expérimentations ont été effectuées avec un dispositif d'observation et de recueil de données, d'autres ont été mises en place sans objectif d'analyse précis. Nous présentons et analysons, dans la troisième partie (6.3), les cinq expérimentations menées avec un recueil de données. Leur rôle est important dans notre démarche de recherche dans la mesure où elles ont constitué des outils performants, à l'articulation des analyses théoriques et expérimentales, pour l'élaboration d'une ingénierie didactique de type laboratoire (présentée dans le chapitre 8). Dans une quatrième partie (6.4), nous mettons en évidence les apports des pré-expérimentations pour enrichir l'analyse *a priori* de la situation didactique qui sera expérimentée en laboratoire. Nous étudions en particulier la constitution du milieu initial des élèves.

6.1 Ce que disent les programmes

Cette première partie est consacrée à l'étude des contenus des programmes de mathématiques du secondaire concernant l'arithmétique d'une part, et la démarche expérimentale d'autre part. Dans un premier paragraphe, nous présentons la place de l'arithmétique dans les programmes de mathématiques des différents niveaux, de la sixième à la terminale scientifique. Dans un second paragraphe, nous analysons sous quelles terminologies et avec quels critères l'institution mentionne la démarche expérimentale dans les programmes et dans certains documents officiels de mathématiques du secondaire.

6.1.1 L'arithmétique dans les programmes de mathématiques du secondaire

Les connaissances notionnelles que nous identifions comme utiles pour l'engagement dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus sont les suivantes : nombre entier naturel, fraction, écriture fractionnaire et calcul fractionnaire. Les notions de multiples, nombres premiers et décomposition en facteurs premiers peuvent être utiles au cours de la recherche du problème, notamment pour produire des résultats partiels. Dans un premier temps, nous étudions les connaissances d'arithmétique susceptibles d'être disponibles à chaque niveau du collège. Dans un second temps, nous réalisons cette étude pour trois niveaux de lycée : seconde générale, première scientifique et terminale scientifique.

a. L'arithmétique au collège

L'arithmétique dans les programmes actuels de collège (Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008) est présente dans le thème *Nombres et calculs*. Ce champ est présent dans toutes les classes de collège avec une forte dominante en classe de troisième. Nous donnons ci-dessous quelques éléments des programmes de chaque classe. Pour une analyse détaillée des programmes d'arithmétique au collège, nous nous référons à la thèse de Majaj (2011).

En classe de sixième, l'arithmétique est présente sous le chapeau *Opérations*, qui englobe à la fois la division des entiers et la division décimale. Le terme de division euclidienne n'est pas mentionné. Les élèves doivent connaître les termes multiples et diviseurs et utiliser quelques critères de divisibilité (cf. figure 6.1).

2.2 Opérations Multiples et diviseurs	Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 5 et 10. *Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 3, 4 et 9*	La notion de multiple, introduite à l'école primaire, est rappelée sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de diviseur. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées.
	Connaître la signification du vocabulaire associé : somme, différence, produit, *terme, facteur, dividende, diviseur, quotient, reste.*	

FIGURE 6.1 – Extrait du programme (2009) de mathématiques de la classe de sixième.

La notion de fraction est travaillée à travers l'écriture fractionnaire d'un nombre et son vocabulaire comme le précise l'extrait ci-dessous :

> Le programme de la classe de sixième a pour objectif d'interpréter aussi 7/3 comme :
> – le tiers de 7 ;
> – le nombre qui multiplié par 3 donne 7 ;
> – un nombre dont une valeur approchée est 2,33.
> L'utilisation de quotients, sous forme fractionnaire, permet de gérer plus facilement les raisonnements et de repousser la recherche d'une valeur approchée décimale à la fin de la résolution. (Extrait du programme de 2009 de mathématiques de la classe de sixième)

Le programme de cinquième met l'accent sur les notions de multiple et de diviseur, comme en témoigne l'extrait proposé ci-dessous (figure 6.2) :

2.1 Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers Multiples et diviseurs, divisibilité	Reconnaître, dans des cas simples, si un nombre entier positif est multiple ou diviseur d'un autre nombre entier positif	Les notions de multiple et diviseur sont entretenues. La reconnaissance de multiples ou de diviseurs est faite soit en utilisant les critères de divisibilité installés en classe de sixième, soit en ayant recours au calcul mental ou à la division.

FIGURE 6.2 – Extrait du programme (2009) de mathématiques de la classe de cinquième.

Concernant les fractions, le programme introduit le sens de l'écriture fractionnaire et les opérations : addition et soustraction de deux fractions ayant le même dénominateur ou dans le cas où un dénominateur est multiple de l'autre. La notion de multiplication de deux fractions peut être abordée.

Le programme d'arithmétique en classe de quatrième étend le calcul fractionnaire aux quatre opérations, sur des fractions ayant des dénominateurs différents et pouvant être négatives. Il pointe la possibilité de la recherche des multiples communs pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire tout en soulignant que les notions de PGCD et PPCM sont hors-programme.

Le programme de troisième introduit les notions de PGCD et nombres premiers entre eux (voir figure 6.3).

2.1. Nombres entiers et rationnels Diviseurs communs à deux entiers, PGCD.	*Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide).* Calculer le PGCD de deux entiers. *Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.*	*Plusieurs méthodes peuvent être envisagées.* La connaissance de relations arithmétiques entre nombres — que la pratique du calcul mental a permis de développer — permet d'identifier des diviseurs communs de deux entiers. La recours à une décomposition en produit de facteurs premiers est possible dans des cas simples mais ne doit pas être systématisée. Les tableurs, calculatrices et logiciels de calcul formel sont exploités.
Fractions irréductibles.	Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Dans le cadre du socle commun, les élèves utilisent leur calculatrice pour rendre irréductible une fraction donnée.
Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire. **[Reprise du programme de cycle central]**		Dans le cadre du socle commun, l'addition, la soustraction et la multiplication « à la main » de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, sont exigibles seulement dans des cas simples : pour l'addition et la soustraction, il s'agit uniquement des cas où un calcul mental est possible. Dans les autres cas, la calculatrice est utilisée.

FIGURE 6.3 – Extrait du programme (2009) de mathématiques de la classe de troisième.

Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers pour obtenir une fraction irréductible peut être travaillé, mais ceci sans donner lieu à un développement particulier ni à des exercices systématiques de décomposition en facteurs premiers (Majaj, 2011, p. 112). Pour la recherche de PGCD, c'est l'aspect algorithmique qui est privilégié. Concernant le calcul fractionnaire, ce programme reprend celui des années précédentes et notamment les opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire. La notion de fraction irréductible est travaillée. Notons également que le programme associe l'arithmétique au raisonnement en précisant que « la résolution de problèmes a pour objectifs [...] de familiariser les élèves aux raisonnements arithmétiques ».

Au vu des programmes de mathématiques de collège, nous faisons l'hypothèse que la conjecture d'Erdös-Straus peut être proposée à partir de la classe de cinquième mais en autorisant les calculatrices avec calcul fractionnaire. En effet, le calcul fractionnaire étant nouveau à ce niveau et réduit aux fractions de même dénominateur, cela pourrait freiner l'engagement des élèves dans le problème par peur du coût de ces calculs à effectuer. A partir de la classe de quatrième, la dévolution de la recherche semble facilitée par les connaissances disponibles dans le milieu des élèves, mais la calculatrice reste un outil utile pour faciliter et favoriser l'engagement dans le problème.

b. L'arithmétique au lycée

Notre recherche ayant débuté en 2009 et s'étant intéressée principalement à des élèves de terminale scientifique ou à des étudiants, nous nous référons aux programmes de mathématiques de lycée en place durant les années 2009-2012 c'est-à -dire :

- les programmes de 2009 pour la classe de seconde ;
- les programmes de 2000 avec un aménagement pour l'année 2010-2011 pour la classe de première scientifique ;
- les programmes de 2001 avec un aménagement pour l'année 2011-2012 pour la classe de terminale scientifique.

Après une réintroduction dans le programme de la classe de seconde en 1999 (après disparition en 1925), l'arithmétique disparaît à nouveau des programmes en 2009. En 1999, l'arithmétique est réintroduite avec la notion de nombre premier et de décomposition en facteurs premiers. Par rapport aux programmes des classes de collège, il propose de nouvelles notions d'arithmétique sans mentionner celles étudiées dans les classes précédentes. Ces nouvelles notions doivent constituer une base de connaissances exploitables pour les années ultérieures, en particulier pour la classe de terminale scientifique, où une partie du programme de Spécialité s'intitule « Arithmétique » (Majaj, 2011). Les notions de PGCD et PPCM ainsi que le travail sur les fractions ne sont plus explicitement mentionnés dans le programme (voir figure 6.4).

Nature et écriture des nombres.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées.	
Nombres premiers.	Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On se limite à des exemples (du type 56×67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.

FIGURE 6.4 – Extrait du programme (1999) de mathématiques de la classe de seconde.

Le nouveau programme de mathématiques de la classe de seconde entré en vigueur à la rentrée 2009 marque une évolution quant à la place de l'arithmétique : ce champ a été à nouveau supprimé, au profit de l'algorithmique. Les raisonnements arithmétiques sont mentionnés uniquement dans la partie algorithmique.

Intéressons nous maintenant aux programmes des classes de première et terminale, section scientifique. Le programme de la classe de première scientifique ne contient pas d'arithmétique. En terminale scientifique, l'arithmétique ne figure que dans l'enseignement de Spécialité intitulé « Arithmétique ». D'après le B.O n° 4 du 30 août 2001, les notions en jeu sont les suivantes : divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne (algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD), congruences dans $\mathbb{Z}$, entiers premiers entre eux, nombres premiers (existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers), PPCM, théorèmes de Bézout et de Gauss (voir figure 6.5).

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Arithmétique		
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Entiers premiers entre eux.	On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.	On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : $a \equiv b\ (n)$ ou $a \equiv b$ (modulo n), et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication. Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.
Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.	On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.	L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.
Théorème de Bezout. Théorème de Gauss.	Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.	L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

FIGURE 6.5 – Extrait du programme (2001) de l'enseignement de spécialité mathématiques de la classe de terminale scientifique.

Le programme fait référence à toutes les notions d'arithmétique présentes dans les programmes des classes précédentes et précise qu'il faut en faire une synthèse. De plus, il mentionne l'intérêt de l'arithmétique comme domaine des mathématiques où des applications récentes sont nombreuses et où les raisonnements sont intéressants et formateurs. Plusieurs applications sont ainsi citées dans les modalités de mise en œuvre, telles que le codage et la cryptographie. L'aspect algorithmique est évoqué en introduction de la partie « Arithmétique » :

> C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement.

Le programme préconise de faire quelques études d'algorithmes simples et un lien entre arithmétique et informatique est mentionné dans les commentaires. Notons enfin que le petit théorème de Fermat est en application des théorèmes de Bézout et de Gauss et que l'introduction de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue. Précisons enfin que le programme aménagé pour l'année 2011-2012 n'a pas modifié cette partie du programme.

Pour conclure, l'arithmétique dans les classes de lycée a une place moindre que celle qu'elle occupe dans les programmes de collège. Actuellement, seuls les élèves de terminale scientifique choisissant l'enseignement de spécialité étudient ce domaine mathématique. Entre la classe de troisième et la classe de terminale, ils n'ont pas revu de notions d'arithmétique. Notons que le programme de l'enseignement de spécialité insiste sur le lien entre l'arithmétique, le raisonnement mathématique et la résolution de problèmes. En didactique des mathématiques, comme nous l'avons déjà mentionné, Battie (2003) a mis en évidence les potentialités de ce champ pour développer l'apprentissage du raisonnement mathématique en classe de terminale scientifique. Notre première recherche (M.-L. Gardes, 2009, 2010) montre, quant à elle, les potentialités de l'arithmétique pour permettre aux élèves de s'engager facilement dans une résolution de problèmes de recherche, en particulier grâce aux ressorts de la dimension expérimentale.

6.1.2 La démarche expérimentale dans les programmes de mathématiques du secondaire

Dans ce paragraphe, à partir d'une étude de certains documents officiels de mathématiques du secondaire (programmes, bulletins officiels, document ressource, épreuves de baccalauréat), nous identifions sous quelles terminologies et avec quels critères l'institution mentionne la démarche expérimentale en mathématiques.

a. Dans les programmes de collège

Les programmes de collège actuels (programmes de 2009) mentionnent à deux reprises l'expression démarche expérimentale, sans en donner de définition :

> La démarche expérimentale, au-delà de la simple observation, contribue à une représentation scientifique, donc explicative, du monde. (Introduction commune aux quatre années de collège, BO Spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 1)

> Une démarche expérimentale permet de vérifier la formule de l'aire du disque. (Programme de mathématiques de sixième, partie Grandeurs et mesures, BO Spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 18)

Le terme expérimental semble réservé aux sciences physiques, aux sciences de la vie et de la terre ou encore à la technologie que les auteurs des programmes nomment sciences expérimentales. L'expression démarche d'investigation est en revanche mise en évidence, elle occupe notamment une page entière dans le document commun aux quatre années de collège, dont voici un extrait :

> La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. (BO Spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 4)

Remarquons d'une part que les auteurs distinguent les mathématiques des sciences expérimentales et d'autre part, que cette distinction ne semble se réaliser qu'au moment de la validation. Grenier (2012) discute ce point de vue en spécifiant que l'observation expérimentale et le raisonnement inductif n'ont pas les mêmes fonctions en mathématiques et dans les autres sciences.

> Dans ces dernières, si aucune observation contraire ne vient contredire celles qui ont été faites, elles seront considérées comme valides (ce sera le cas sur un petit nombre d'observations en classe). C'est bien sûr faux en mathématiques. (Grenier, 2012, p. 1356)

D'autre part, elle se pose la question de la « proximité » entre les domaines. Selon elle, le risque est de masquer les spécificités du raisonnement mathématique, indispensable pour mener la résolution d'un problème, notamment pour construire et étudier des conjectures.

> Il n'est peut-être pas prévu que les conjectures des élèves puissent être fausses ! Ce qui n'est effectivement jamais le cas avec des logiciels de géométrie dynamique qui ne donnent que des conjectures évidemment vraies [...] Or les incertitudes et les erreurs font partie intégrante d'une situation permettant une vraie investigation. (Grenier, 2012, p. 1356)

La suite de la page consacrée à la démarche d'investigation propose un « canevas d'une séquence d'investigation ». Ce canevas est commun aux disciplines scientifiques mais doit être aménagé pour chaque discipline. Pour les mathématiques, il est associé à la résolution de problèmes. Il contient sept moments essentiels non nécessairement linéaires, « un aller et retour entre ces moments est tout à fait souhaitable, et le temps consacré à chacun doit être adapté au projet pédagogique de l'enseignant » (BO Spécial nº 6 du 28 août 2008, p. 4). Les sept moments sont les suivants :

- Le choix d'une situation-problème ;
- L'appropriation du problème par les élèves ;
- La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ;
- L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves ;
- L'échange argumenté autour des propositions élaborées ;
- L'acquisition et la structuration des connaissances ;
- La mobilisation des connaissances.

A la lecture de ce canevas, nous pouvons observer que les sept moments sont de nature différente. Par exemple le premier moment ne concerne que l'enseignant et s'effectue dans un moment qui se situe en dehors de la classe. Concernant le second moment, les phases didactiques et a-didactiques ne sont pas clairement distinguées (Grenier, 2012), le texte est ambigu : « L'enseignant guide le travail des élèves et, éventuellement, l'aide à reformuler les questions » (BO Spécial nº 6 du 28 août 2008, p. 4). On peut également se demander si les deux derniers moments en sont vraiment. Ils sont présentés comme des étapes relativement délimitées or, selon nous, ce sont davantage des actions se réalisant et évoluant tout au long de la résolution d'un problème, dans un processus dialectique entre mobilisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques. Enfin évoquons une certaine linéarité dans cette description qui ne met pas en évidence les allers et retours nécessaires entre les différentes étapes des expériences, formulation de conjectures, élaboration d'éléments théoriques, contrôle, élaboration de preuves pour mener une résolution de problèmes. Les auteurs mentionnent ces différentes phases de l'activité mathématique mais ne précisent rien sur leur articulation comme en témoigne cet extrait du document « Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège » sur le thème « Raisonnement et démonstration », paragraphe « Démarche d'investigation et raisonnement » :

> Les étapes possibles d'une démarche d'investigation en mathématiques :
>
> Réflexion sur le problème posé :

1. appropriation du problème, vocabulaire, contexte ;
2. confrontation avec les savoirs disponibles (il est donc nécessaire de « connaître son cours ») ;
3. recherche éventuelle d'informations sur le thème.

Élaboration d'une conjecture :

1. recherche, avec mise en place éventuelle d'une première expérimentation ;
2. émission de la conjecture ;
3. confirmation, avec mise en place éventuelle d'une seconde expérimentation.

Mise en place d'une preuve argumentée.

L'appropriation du problème semble se réaliser uniquement dans la phase de réflexion sur le problème posé. Or les premières explorations permettent d'en approfondir la connaissance. La formulation de la conjecture (remarquons l'utilisation d'un article défini, ne pourrait-on pas formuler plusieurs conjectures ?) ne semble pas être une étape de l'expérimentation (notons ici une confusion probable entre les termes expérience et expérimentation) et l'élaboration d'une preuve semble être l'étape ultime, sans articulation avec les phases d'expérience et d'émission de conjecture. Notons que Grenier (2012) montre, en analysant deux exemples de problèmes proposés dans ce même document, que cet aspect dialectique de l'activité de résolution de problèmes n'est effectivement pas prise en compte.

Pour conclure, les documents officiels de mathématiques des classes de collège mettent en avant l'importance de la démarche d'investigation, qui se réalise en mathématiques par la résolution de problèmes, sans mentionner l'aspect expérimental de cette activité. Grenier (2012) relève que l'investigation proposée aux élèves est contrainte à la fois par la désignation des notions ou propriétés visées, l'utilisation d'outils externes (calculatrice, logiciel) qui donnent les « bonnes » conjectures, et une interaction fréquente de l'enseignant avec la situation (pour guider, recentrer, reformuler). L'importance du doute, de la part de l'empirique, celle de l'intuition ou encore de la gestion des erreurs et des impasses ne sont pas prises en compte. L'absence de ces éléments, constitutifs de la dimension expérimentale des mathématiques, ne permet pas, d'une part de présenter les aspects dialectiques de l'activité de recherche mathématique, ni d'autre part de proposer et de décrire une démarche de type expérimentale telle que nous l'avons fait, à savoir, des allers et retours entre la manipulation d'objets mathématiques (naturalisés et/ou en cours de naturalisation) et l'élaboration d'éléments théoriques grâce à des confrontations, des vérifications et des argumentations.

b. Dans les programmes de lycée

Le programme actuel (2009) de mathématiques de la classe de seconde utilise le terme de « démarche scientifique » :

> L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes, pour les rendre capables de :
> – modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
> – conduire un raisonnement, une démonstration ;
> – pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
> – faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
> – pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registres (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
> – utiliser les outils logiciels (ordinateurs ou calculatrices) adaptés à la résolution d'un problème ;

– communiquer à l'oral et à l'écrit.
(Extrait du BO n° 30 du 23 juillet 2009, p. 1)

L'expression « activité expérimentale » apparaît comme une forme d'activité mathématique mais semble dissociée des phases de contrôle ou d'élaboration de preuves. Les caractéristiques définissant cette activité ne sont pas explicitées. Le texte du programme associe souvent l'aspect expérimental des mathématiques à l'algorithmique ou à l'utilisation d'outils logiciels. Dans le paragraphe « diversité de l'activité de l'élève », on retrouve ces ambigüités :

> La diversité des activités mathématiques proposées :
> – chercher, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
> – appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
> – raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
> – expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit ;
>
> doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.
> (Extrait du BO n° 30 du 23 juillet 2009, p. 1)

Les programmes de première et de terminale scientifiques reprennent en partie ces deux paragraphes en ajoutant, dans le paragraphe sur la diversité de l'activité de l'élève, des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques et insistent sur l'importance de la mobilisation de l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes.

> Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts. [...] Les modes d'évaluation prennent également des formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis. En particulier, l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer.
> (Extrait des Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010 p. 1-2 pour les classes de premières et Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011 p. 1-2 pour les classes de terminales)

Ces textes officiels nous amènent à faire deux remarques sur la conception de l'expérimental en mathématiques. D'une part, l'aspect expérimental de l'activité mathématique est évoqué mais souvent en relation étroite avec l'utilisation de l'outil informatique ou de l'algorithmique. Il ne semble pas articulé avec les autres aspects de l'activité mathématique telles que la modélisation, le raisonnement, l'analyse critique de résultats ou encore l'élaboration de preuves. D'autre part, la démarche scientifique telle qu'elle est présentée ne semble pas prendre en compte une démarche de type expérimental en mathématiques au sens où nous l'avons définie, c'est-à-dire par des allers et retours entre les phases de manipulation des objets mathématiques en jeu dans le problème et les phases d'élaboration d'éléments théoriques. Ces textes semblent réduire l'aspect expérimental des mathématiques à l'usage ponctuel d'outil informatique dans une phase bien délimitée (celle de « l'observation ») de la résolution de problèmes sans articulation particulière avec les étapes de formulation de conjectures, contrôle de résultats et élaboration de preuves.

Cette conception de l'expérimental en mathématiques dans les programmes de mathématiques du secondaire n'est pas nouvelle. En 2007, Duverney, lors d'un débat à propos de l'épreuve d'évaluation des capacités expérimentales en mathématiques au baccalauréat scientifique [1], tient ces propos :

> Le deuxième inconvénient [de cette épreuve] est que l'insistance sur l'aspect expérimental des mathématiques et l'usage de l'ordinateur pour « voir » ne conduisent une grande partie de nos élèves à une conception faussée de ce que sont les mathématiques et des conditions de leur efficacité (que certains trouvent « déraisonnable », on ne sait trop pourquoi). Ce danger n'est pas illusoire : le Bulletin Officiel [2] n'affirme-t-il pas que les mathématiques se rapprochent des sciences expérimentales, grâce à l'expérimentation numérique, à la simulation, et à ce que l'on peut appeler la démonstration empirique ? (Duverney dans Artigue et al., 2007)

Un des objectifs de cette épreuve pratique au baccalauréat était de tester les capacités des élèves à s'engager dans une démarche expérimentale et notamment, la capacité à mobiliser les TICE [3] pour résoudre un problème mathématique. Duvervey exprime un doute quant à la possibilité d'atteindre les objectifs de la pratique expérimentale en mathématiques mis en avant par Artigue :

> A travers les pratiques expérimentales, au delà de l'acquisition stricte de connaissances, on cherche à développer les compétences des élèves à poser des problèmes, les explorer, élaborer des conjectures et les tester, systématiser une étude, produire des argumentations convaincantes et des preuves, communiquer leur travail et les résultats obtenus. (Artigue dans Artigue et al., 2007)

> Il paraît douteux que cela permettre d'atteindre les objectifs de la pratique expérimentale en mathématiques mis en avant par Michèle Artigue, objectifs centrés sur la recherche de problèmes. (Duverney dans Artigue et al., 2007)

Chevallard (dans Artigue et al., 2007) se pose également la question :

> S'agit-il d'y évaluer la maîtrise de l'expérimental dans l'activité mathématique ou la capacité à employer des TICE dans un travail d'allure expérimentale ? Les deux choses sont aujourd'hui fortement liées, sans doute ; mais elles ne sont pas exactement superposables.

Pour illustrer ces propos, nous avons analysé quelques sujets de l'épreuve pratique au baccalauréat, expérimentée de 2007 à 2009. Nous avons relevé plusieurs éléments qui étayent une conception de l'aspect expérimental réduit à l'utilisation d'un outil informatique dans la phase d'observation, et sans articulation avec la phase d'élaboration de preuves :

- les conjectures sont trop simples à formuler ;
- le recours à l'outil informatique n'est pas toujours justifié ;
- il n'y a pas d'allers et retours entre les résultats de l'expérience et la recherche théorique ;
- l'expérience est un moyen de prévoir le résultat ou de le contrôler ;
- l'expérience n'est généralement d'aucune aide pour réaliser la preuve.

Nous présentons ci-dessous deux exemples de sujets de cette épreuve pratique.

1. Il s'agit d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat scientifique qui a été expérimentée pendant trois ans, de 2007 à 2009. (Cf. Fort, 2007)
2. L'enseignement des sciences au lycée, Bulletin Officiel, Hors série n° 2 du 30 août 2001, page 8.
3. Technologies d'Information et de Communication en Éducation.

Exemple 1 : Sujet 32 de l'épreuve pratique du baccalauréat de mathématiques[4] - année 2009.

Énoncé

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts O et P et la droite d passant par P et perpendiculaire à la droite (OP). Soit M un point variable appartenant à la droite d. On définit le point Q, quatrième sommet du rectangle $OPMQ$, puis les points R et S tels que les triangles MPR et MSQ soient équilatéraux, de sens direct.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, représenter la situation proposée.
   (b) Lorsque le point M varie sur la droite d, quelle conjecture peut-on émettre à propos de la nature du triangle ORS ?

Appeler le professeur et lui montrer la figure. Lui indiquer la propriété conjecturée et proposer une procédure de contrôle de cette conjecture.

   (c) Sur la figure, construire le point G centre de gravité du triangle ORS.
   Lorsque M se déplace sur la droite d, quelle semble être la nature de la courbe sur laquelle le point G se déplace ?

Appeler le professeur pour faire vérifier la construction. Formuler oralement la conjecture et expliquer comment elle a pu être émise.

Partie B

2. Démontrer la nature du triangle ORS.

FIGURE 6.6 – Sujet 32 de l'épreuve pratique du baccalauréat de mathématiques - année 2009.

Dans ce sujet, il est demandé à l'élève de construire, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une figure peu complexe et de conjecturer qu'un triangle est équilatéral. Comme le prouve le dessin effectué à main levée (cf. figure 6.7 ci-dessous), la conjecture est évidente à formuler et de plus ne nécessite pas le recours à l'outil informatique. La question 1.(c) est plus intéressante car la réponse est nettement moins évidente. Le logiciel est ici une aide pour conjecturer la réponse et ensuite il devient assez simple de la vérifier. Cependant la démonstration n'est pas demandée.

4. Disponible sur http ://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/IMG/pdf/EPM09sud.pdf

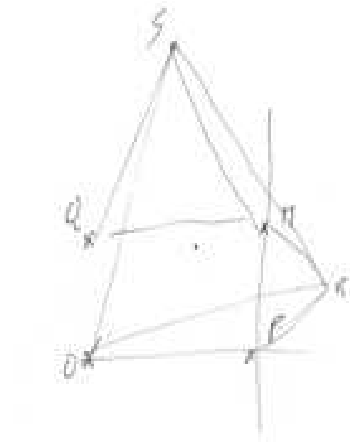


FIGURE 6.7 – Figure correspondante à la question 1.(a), effectuée à main levée.

Exemple 2 : Sujet 3 de l'épreuve pratique du baccalauréat de mathématique [5] - année 2008.

On lance trois dés bien équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
Alice et Bob calculent la somme des trois nombres obtenus.
Si la somme obtenue est égale à 9, Alice gagne.
Si la somme obtenue est égale à 10, Bob gagne.
Dans tous les autres cas, la partie est annulée.

Le but de l'exercice est de déterminer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner.

Étude expérimentale

1. Sur un tableur, réaliser une simulation de cette expérience aléatoire.

   Appeler l'examinateur pour valider cette simulation.

2. Sur un tableur, réaliser une simulation sur un échantillon de taille 1000 de cette expérience aléatoire et déterminer, pour cette simulation, les fréquences de réussite respectives d'Alice et de Bob.

   Appeler l'examinateur pour valider la feuille de calcul construite.

3. Est-il possible de conjecturer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

   Appeler l'examinateur pour lui fournir cette réponse et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Étude mathématique

On souhaite maintenant calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.

4. Répondre aux deux questions suivantes (dans n'importe quel ordre) :
   - Calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.
   - Qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

FIGURE 6.8 – Sujet 3 de l'épreuve pratique du baccalauréat de mathématiques - année 2008.

5. Disponible sur http ://www.ac-strasbourg.fr/fileadmin/pedagogie/mathematiques/TICE/EPM/EPM08-fiches-eleves.pdf.

A l'image de cet énoncé, presque tous les travaux pratiques présentés lors de ces trois sessions comportaient deux parties essentiellement distinctes : une partie informatique où l'élève utilise un logiciel pour répondre à la question et une partie mathématique, où il doit prouver les conjectures émises. Celles-ci sont, dans la plupart des cas, évidentes à formuler et d'aucune aide à la démonstration. Nous pouvons ainsi remarquer qu'avec ces énoncés il n'y a pas d'allers et retours entre les résultats de l'expérience, la formulation de(s) conjecture(s) et les preuves. L'expérience permet seulement de s'assurer des résultats ou de les contrôler, mais rarement de les construire.

Cette analyse succincte montre que ces activités ne permettent pas aux élèves de mettre en œuvre une démarche de recherche expérimentale (au sens où nous l'avons définie) favorisant une dialectique entre les phases expérimentales et les phases d'élaboration de preuves.

Pour conclure, les programmes de mathématiques du lycée mettent en évidence l'importance de la résolution de problèmes en mathématiques et présentent souvent l'expérimentation en mathématiques comme une forme d'activité liée à l'usage d'un outil informatique ou à l'algorithmique. L'aspect expérimental semble réduit à la phase d'observation dans le but de formuler une conjecture. L'articulation avec les phases d'élaboration de preuves n'est pas mise en évidence. L'analyse de quelques sujets de l'épreuve pratique visant à évaluer les capacités des élèves à mettre en œuvre une démarche expérimentale confirme ces différents aspects. Les sujets ne permettent *a priori* pas aux élèves de mettre en œuvre une démarche expérimentale au sens où nous l'avons définie, c'est-à-dire un processus dialectique entre les phases expérimentales de manipulation des objets mathématiques en jeu et les phases théoriques d'élaboration de preuves.

6.2 Choix des variables de situation

Dans cette partie, nous présentons les choix de variables effectués pour construire des situations de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. En référence à Artigue (Artigue, 1990), nous distinguons deux types de variables de situation : les variables macro-didactiques qui concernent l'organisation globale de la situation et les variables didactiques (ou micro-didactiques) qui concernent l'organisation d'une phase et dépendent du contenu didactique dont l'enseignement est visé. Dans un premier paragraphe, en appui sur nos analyses épistémologiques, nous déterminons trois variables macro-didactiques pour construire une situation de recherche en classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Ces variables nous permettent de construire quatre scénarios qui seront expérimentés en classe. Dans un second paragraphe, nous identifions huit variables didactiques agissant plus spécifiquement sur les comportements des élèves en situation de recherche du problème.

6.2.1 Choix pour une organisation didactique

Notre objectif étant de placer les élèves ou étudiants dans une position relativement proche de celle d'un chercheur en mathématiques, l'organisation didactique de situations autour de la conjecture d'Erdös-Straus s'est appuyée sur l'analyse épistémologique de l'activité de recherche des mathématiciens. Plusieurs différences entre les activités de recherche du mathématicien et les activités de recherche des élèves ou étudiants en contexte scolaire montrent les limites de cette référence au travail du chercheur professionnel. On peut citer par exemple la durée d'une recherche, le choix d'un objet de recherche ou la raison sociale du chercheur, dont le métier est de chercher. Cependant, de nombreuses modalités du travail des chercheurs peuvent être approchées et une organisation didactique spécifique peut permettre, sous certaines conditions, la reproduction de la position d'un chercheur en situation de résolution de problèmes de recherche. En appui sur un article de Tisseron (1998) et sur notre analyse épistémologique de l'activité de recherche mathématique (chapitre 5), nous présentons ces différents aspects du travail du mathématicien et les choix qu'ils engendrent pour déterminer une organisation didactique de situations autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous décrivons ensuite quatre scénarios possibles construits à partir du choix de ces variables macro-didactiques.

Le rôle du temps.

Le chercheur a la possibilité d'approfondir une question dans la durée. L'importance du rôle du temps est attestée par de nombreux chercheurs comme en témoigne par exemple Lichnérowicz :

> Ce sont des choses qu'on a cherchées très longtemps, pour lesquelles on s'est découragé et qui brusquement, viennent mais viennent parfois cinq ou six ans après [...]. (Lichnérowicz dans Nimier, 1989, p. 21)

Les travaux de Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus illustrent également cet aspect : sa recherche a débuté en février 2009 et continue actuellement. Il dit avoir travaillé sur ce problème en moyenne deux heures par jour pendant ces quatre années. L'aspect création de l'activité mathématique est également lié au facteur temps car il permet au sujet de se confronter à son objet de recherche qui résiste. Le chercheur passe beaucoup de temps sans trouver :

> Précisément parce qu'il cherche ce qu'il ne connaît pas, le chercheur ne peut que passer le plus clair de son temps à explorer de fausses pistes, à suivre des intuitions erronées, à se tromper [...]. (Lévy-Leblond, 1998, p. 31)

Tisseron (1998) explique que l'absence de cet aspect essentiel du travail du chercheur dans le temps didactique traditionnel montre une limite de la référence au travail du chercheur professionnel dans la description des activités des élèves en situation scolaire de recherche de problèmes. Cependant il apporte une réponse à cette difficulté par les problèmes de recherche menés sur une longue durée, incluant le paramètre « temps ouvert ». Il précise que ces activités permettent de :

> Faire travailler les élèves avec des problèmes plus complexes, générateurs de sous problèmes en leur laissant le temps de se poser des questions et de suivre leurs propres pistes. Cette implication de l'élève pour résoudre les questions et les sous problèmes qu'il se pose lui-même est un facteur assurant la dévolution de la recherche (Tisseron, 1998)

Afin de prendre en compte ce paramètre « temps ouvert », nous choisissons deux modalités selon le temps didactique disponible :

- une séance de recherche d'une durée minimum de deux heures ;
- un dispositif sur un temps long avec plusieurs séances de recherche de deux heures, régulièrement espacées.

Notons que ce second dispositif s'inspire de celui des ateliers MATh.en.JEANS qui se déroulent sur un temps long (pendant toute l'année scolaire). La durée que nous choisissons pour mettre en œuvre une situation de recherche en classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus est moins longue (sur deux mois environ), car nous ne mettons pas en place de jumelage entre deux classes [6].

6. Ce choix est motivé par notre projet qui s'intéresse spécifiquement à l'analyse des processus de recherche effective des élèves sur un problème. Les phases de séminaires, congrès et publication sont moins importantes.

Importance et modalités variées des échanges entre pairs.

A l'instar de Thurston et Villani, Tisseron (1998) pointe l'importance et les modalités variées des échanges entre pairs : informels et formalisés, oraux et écrits, publiés et communiqués etc. L'analyse de la recherche de Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus montre également le rôle de la communauté mathématique dans sa recherche, notamment ses travaux avec Gueye ou ses échanges informels avec d'autres mathématiciens ayant publié des articles sur le problème. Au niveau de la classe, cet aspect essentiel du travail du chercheur peut être approché par un scénario comportant des phases de recherche aux modalités variées. Par exemple, les ateliers MATh.en.JEANS proposent des phases de recherche collective, des séminaires, un congrès et une publication (Duchet & Audin, 2009). Dans notre travail, nous choisissons de suivre le scénario décrit par Arsac et Mante (2007) pour la mise en œuvre du problème ouvert[6], c'est-à-dire :

- une phase de recherche individuelle ;
- une phase de recherche collective (par groupes de trois ou quatre) ;
- une phase de production d'affiches et d'écrits ;
- une phase de mise en commun et débat entre les groupes ;
- une phase de synthèse.

Pour une expérimentation se déroulant sur plusieurs semaines, nous adaptons ce scénario, notamment la durée de chaque phase et le nombre de séances de recherche collective par groupe.

Importance de la documentation.

Tisseron (1998) met en évidence l'importance de la documentation dans le travail des chercheurs. Elle peut prendre différentes formes : ouvrages, articles prépubliés ou publiés, articles en ligne, encyclopédies, dictionnaires, etc. Villani (2012) lit par exemple un ouvrage d'astrophysique (*Galactic Dynamics* de Binney et Tremaire) pour approfondir ses connaissances sur l'équation de Vlasov qui pourrait lui être utiles dans la résolution de son problème. Mizony s'est documenté sur les nombres pythagoriciens et en particulier, sur certaines suites de nombres entiers grâce à l'encyclopédie en ligne *Sloane*. Afin de prendre en compte cet aspect du travail du chercheur, nous choisissons d'autoriser la consultation de tout type de documents (cours, exercices, manuels scolaires, ouvrages, dictionnaires, etc.) aux élèves pendant la recherche du problème. Concernant l'usage d'Internet, la consultation de documents en ligne nous semble difficile à autoriser dans la mesure où il est possible de trouver des articles sur des recherches de la conjecture d'Erdös-Straus. Cela pourrait démotiver les élèves et freiner, voire stopper leur recherche sur le problème. Nous avons ainsi demandé aux élèves de ne pas consulter Internet pendant leurs recherches sur le problème.

Importance du positionnement par rapport aux travaux antérieurs.

Un autre aspect pointé par Tisseron (1998) dans le travail des chercheurs est l'importance de leur positionnement par rapport aux travaux antérieurs existant sur le problème cherché. Notre analyse épistémologique a également mis en évidence cet aspect avec deux points de vue des mathématiciens : ceux qui préfèrent étudier en détail les travaux antérieurs avant de chercher eux-mêmes le problème et ceux qui préfèrent, au contraire, ne pas les lire et chercher par eux-même le problème. Cet aspect nous semble montrer une limite de la référence au travail du chercheur pour décrire et analyser les activités des élèves en situation de résolution de problème de recherche. En effet, il nous semble difficile à approcher dans un contexte scolaire. Faire étudier aux élèves les travaux existants sur un problème non résolu pourrait freiner la dévolution de la recherche puis freiner, voire stopper la recherche. De plus cela demanderait un scénario particulier avec des séances dédiées à ce travail. Dans le cas contraire, laisser les élèves découvrir le problème sans étudier les travaux antérieurs les place dans une position plus proche des chercheurs préférant chercher par eux-mêmes avant de consulter la littérature. Cependant, les situations sont différentes dans la mesure où les élèves n'ont pas accès à ces documents et en ignorent certainement l'existence. Nous faisons le choix, dans l'organisation didactique de la situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus, de ne pas mentionner les travaux antérieurs connus sur la conjecture, de leur laisser accès à tout type de document tout en sachant que cette littérature ne leur est pas facilement accessible (surtout sans accès à Internet).

Le chercheur éprouve en cherchant la jubilation de la création.

Le dernier aspect pointé par Tisseron (1998) sur le travail du chercheur est l'importance d'un rapport spécifique au processus de recherche lui-même et en particulier, au fait d'éprouver, en trouvant, la jubilation de la création. Dans notre étude épistémologique, cet aspect est mis en évidence par de nombreux chercheurs comme en témoigne, par exemple, cette citation de Thurston :

> Il y a une joie réelle à faire des mathématiques, à apprendre de nouvelles méthodes de pensée qui expliquent, organisent, simplifient. (Thurston, 1995, p. 18)

Cette jubilation de la découverte est particulièrement évoquée dans les phases de recherche de préparation, incubation et illumination décrites dans le processus de découverte proposé par Poincaré et Hadamard. La phase de vérification, continuation et finition est moins exaltante que les précédentes mais permet de confirmer l'illumination et d'établir rigoureusement le résultat. Le plaisir de créer en mathématiques est un aspect essentiel du travail du chercheur et il nous paraît important qu'il puisse être approché par des élèves engagés dans la résolution d'un problème de recherche. Il est lié au paramètre « temps ouvert » mentionné ci-dessus. Le choix d'organiser la situation sur une durée longue et comportant de nombreuses séances de recherche peut permettre, selon nous, de reproduire, sous certaines conditions, les différentes phases du processus de découverte. Les premières séances de recherche peuvent correspondre à la phase de préparation, l'espace de quelques jours entre ses séances peut ensuite favoriser une phase d'incubation et de repos où les élèves pensent à autre chose pour mieux revenir sur la recherche du problème et avoir éventuellement une « illumination » à la séance suivante. La séance de production d'affiches et d'écrits doit permettre de vérifier rigoureusement les résultats établis, les phases de débat et synthèse stabilisent les résultats et connaissances mobilisées, ce qui peut correspondre à la phase de vérification, continuation et finition.

En résumé, les choix effectués pour l'organisation didactique de situations autour de la conjecture d'Erdös-Straus sont les suivants :

- proposer, selon le temps disponible, une recherche du problème sur une séance d'au moins deux heures ou une recherche du problème sur un temps long, avec plusieurs séances de recherche de deux heures, afin de prendre en compte le facteur « temps ouvert » ;
- construire des scénarios composés de différentes phases de recherche (phase de recherche individuelle, phase(s) de recherche collective par groupes, phase de production d'affiches, phase(s) de mises en commun et de débat, phase de synthèse) afin de prendre en compte la dimension sociale de l'activité de recherche sous toutes ses formes d'une part et d'approcher les différentes phases du processus de création mathématique d'autre part ;
- permettre l'accès à tout type de documentation (sauf Internet) afin d'approcher l'importance du recours à la documentation dans une recherche mathématique ;
- ne pas faire travailler les élèves sur des travaux existants sur la conjecture ;

– mettre en place, pour les élèves, des outils méthodologiques pour assurer le suivi de leur recherche : mémoire de leurs résultats, conservation de traces écrites, synthèse des travaux, etc.

A partir de ces choix, nous identifions trois variables macro-didactiques de situation puis nous construisons quatre scénarios pour mettre en œuvre une situation didactique autour de la conjecture d'Erdös-Straus dans une classe.

Variable macro-didactique 1 : durée et nombre de séances de recherche.

Cette variable comporte deux valeurs : une séance unique de recherche d'au moins deux heures, plusieurs séances de recherche d'au moins deux heures. Afin que les élèves ou les étudiants puissent mener une recherche effective sur la conjecture d'Erdös-Straus, nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire de leur proposer au minimum une séance de deux heures de recherche. Proposer plusieurs séances de recherche de deux heures permettrait d'approcher plus significativement certains aspects du travail du mathématicien, tels que le temps ou les diverses phases de la découverte.

Variable macro-didactique 2 : variété des différentes phases de la recherche.

La variable prend deux valeurs : présence d'une phase de débat, absence d'une phase de débat. Le choix de cette variable dépend en partie du temps disponible pour mettre en œuvre une situation didactique autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Comme nous venons de le préciser, nous faisons l'hypothèse que deux heures de recherche sont nécessaires aux élèves et étudiants afin de mener une recherche effective sur ce problème. Si la classe ne dispose que d'une séance unique de deux heures, nous faisons le choix de ne pas mettre en place de phase de mise en commun et débat en classe entière au profit d'une phase de recherche collective par groupes plus longue.

Variable macro-didactique 3 : modalité de la phase de synthèse.

Cette variable prend deux valeurs : phase faisant l'objet d'une séance particulière, phase incluse dans la séance de recherche. Proposer une séance à part entière pour la phase de synthèse permet de développer plusieurs aspects : un retour sur les travaux effectués par les élèves, une présentation des travaux des chercheurs sur le problème, une mise en relation entre les travaux des élèves et ceux des chercheurs et éventuellement, une séance de travail autour de problèmes issus des questions posées par les élèves au cours de la recherche de la conjecture. Selon le temps dont dispose la classe pour mettre en œuvre une activité de recherche, il n'est pas toujours possible de consacrer une séance particulière à la synthèse. Dans ce cas, la phase de synthèse est intégrée à la (aux) séance(s) de recherche et est réduite à une courte présentation de l'état actuel des recherches sur la conjecture.

Le choix des valeurs de ces variables nous permet de construire des scénarios possibles pour élaborer des situations didactiques autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous présentons ci-dessous quatre scénarios que nous avons testés dans différentes pré-expérimentations (cf. partie 6.3).

Scénario 1 : Les valeurs des trois variables macro-didactiques choisies sont les suivantes : une séance unique de recherche de deux heures, absence d'une phase de débat, séance particulière pour la synthèse.

Nous proposons le scénario suivant, issu du dispositif Problème Ouvert (Arsac & Mante, 2007) : une phase de recherche individuelle de dix minutes, une phase de recherche collective par groupes (trois ou quatre élèves) d'environ une heure et cinquante minutes, avec production commune d'une affiche . La phase de synthèse fait l'objet d'une séance d'une heure, quelques jours après la première séance.

Scénario 2 : Les valeurs des trois variables macro-didactiques choisies sont les suivantes : une séance unique de trois heures, présence d'une phase de débat, séance de synthèse incluse dans la séance de recherche.

Le scénario est le suivant : une phase de recherche individuelle de dix minutes, une phase de recherche collective par groupes (de trois ou quatre élèves) d'environ deux heures, avec production commune d'une affiche, une phase de mise en commun et de débat en classe entière de trente minutes et une phase de synthèse de vingt minutes.

Scénario 3 : Les valeurs des trois variables macro-didactiques choisies sont les suivantes : deux séances de une heure trente, présence d'une phase de débat, séance de synthèse incluse dans une séance de recherche.

Nous proposons un scénario sur une période longue, environ deux mois, composé de trois temps différents :

- une première séance (une heure et demie) de présentation du dispositif et de recherches individuelle et collective (en groupes) du problème ;
- une période de deux mois où le travail est libre, avec un suivi tous les quinze jours de l'avancée des recherches. Un forum est mis en place dans le but de favoriser les discussions entre les élèves, d'échanger des documents, de remettre des compte-rendus et de notre côté, de suivre les recherches ;
- une seconde séance (une heure et demie) sous forme d'un séminaire, où chaque groupe expose ses résultats dans un premier temps et où nous effectuons une synthèse dans un second temps.

Nous proposons ce scénario, avec une période longue de deux mois où la recherche sur le problème serait libre pour les élèves, pour les placer dans une position plus proche de celle d'un chercheur en mathématiques. Ils disposent ainsi d'un temps long, d'une organisation de travail libre, de modalités d'échanges variées et d'un accès à une autre documentation que celle disponible dans une classe. La dernière séance, proposée sous forme d'un séminaire de recherche permet également d'approcher une modalité particulière d'échanges au sein de la communauté des chercheurs. Le suivi des recherches est assuré par le forum et des compte-rendus demandés aux élèves.

Scénario 4 : Les valeurs des trois variables macro-didactiques choisies sont les suivantes : trois séances de deux heures, présence d'une phase de débat, séance de synthèse incluse dans une séance de recherche.

Nous proposons le scénario suivant, se déroulant sur au moins trois semaines :

- Séance 1 : phase de recherche individuelle d'une heure, rédaction d'une synthèse personnelle (15 minutes), phase de mise en commun et début de recherche collective au sein du groupe d'environ 45 minutes.
- Séance 2 : phase de recherche collective par groupes avec rédaction d'une synthèse collective (deux heures).
- Séance 3 : phase de recherche collective par groupes (une heure), phase de mise en commun et de débat en classe (30 minutes) et phase de synthèse (30 minutes).

Dans ce scénario, nous faisons le choix d'augmenter significativement la durée de la recherche individuelle. Nous faisons l'hypothèse que ce temps supplémentaire permettra à chaque élève d'approfondir ses connaissances sur le problème et de s'engager dans une première piste de recherche. Cela facilitera et enrichira ensuite la recherche collective au sein du groupe.

Concernant les phases de recherche collective par groupes, nous retenons trois critères pour déterminer le nombre de séances : le temps disponible de la classe à consacrer à ce type d'activité, le maintien de la dévolution de la recherche du problème aux élèves et l'avancée des recherches des élèves sur le problème. Pour la dernière séance, nous choisissons de consacrer une séance d'une heure trente à la mise en commun et au débat au sein de la classe. Ce temps permettra à chaque groupe d'exposer plus en détail ses résultats, ce qui enrichira le débat. Un temps de synthèse de trente minutes est consacré à la mise en valeur des travaux des élèves, puis à une présentation de l'état actuel des recherches sur la conjecture. Afin d'assurer une continuité entre les différentes séances de recherche sur le problème, nous nous sommes appuyée sur la notion de « résultats-relais » développée par Hadamard, un résultat qui permet d'articuler différentes étapes de la recherche :

> Pour nous résumer, chaque étape de la recherche doit pour ainsi dire s'articuler à la suivante par un résultat de forme précise que je proposerais d'appeler résultats-relais. (Hadamard, 1945, p. 64)

Afin d'aider les élèves à effectuer ce travail, nous choisissons de leur demander de rédiger une synthèse collective de groupe à la fin de chaque séance. Cela leur permet de conserver en « mémoire [de] l'état de la résolution d'une séance à une autre : cas étudiés, conclusions, questions non résolues, nouvelles questions mais aussi difficultés, pistes abandonnées, etc. » (Grenier, 2009). Cela leur permet ainsi de faire le point sur les avancées, les différentes pistes de recherche, et d'amorcer plus facilement le travail à conduire lors de la séance suivante. Précisons également que, pour nos analyses, il s'agit d'un outil performant et efficace pour le recueil des données.

6.2.2 Choix des variables didactiques

Dans le chapitre 2, nous avons détaillé les caractéristiques d'un milieu antagoniste de type expérimental : un milieu porteur de déséquilibres, un milieu qui développe l'autonomie de l'élève et un milieu qui favorise l'accès à des savoirs mathématiques. Nous avons notamment mis en évidence l'importance des objets mathématiques en jeu dans le problème. Ces derniers doivent être suffisamment familiers des élèves pour qu'ils puissent les manipuler. Cela leur permet de s'engager dans la recherche du problème par l'action et favorise la dévolution de la recherche. Cependant, les rétroactions n'ont de sens que si les élèves disposent des connaissances et des outils mathématiques suffisants à la manipulation de ces objets. Pour une situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons identifié deux éléments qui doivent permettre aux élèves de comprendre la situation et de s'engager dans la recherche du problème.

Des connaissances mathématiques, notionnelles et heuristiques

Nous distinguons deux types de connaissances mathématiques utiles pour favoriser l'engagement dans le problème et la dévolution de la recherche : les connaissances notionnelles et les connaissances heuristiques, c'est-à-dire relatives à l'activité de recherche mathématique. Les notions mathématiques identifiées sont les nombres et la nature des nombres, en particulier les nombres entiers et les fractions, le calcul fractionnaire et la notion de multiple. Pour les connaissances heuristiques, nous avons identifié la connaissance du statut épistémique d'une conjecture, la connaissance du rôle d'un contre-exemple et celle du rôle des exemples dans une preuve (savoir qu'ils ne permettent pas de démontrer des propositions universelles mais qu'ils permettent de démontrer des propositions existentielles).

Une représentation de l'activité de recherche mathématique

Une représentation de la nature de l'activité de recherche mathématique nous semble être un élément important pour favoriser la dévolution de la recherche du problème aux élèves et étudiants. Par exemple : savoir qu'un problème de mathématiques peut se chercher sur plusieurs heures, qu'au bout de ce temps de travail il est possible de ne trouver que des résultats partiels, ou que certains résultats resteront à l'état de conjecture.

Le choix des variables didactiques de la situation et de leur valeur est déterminant pour mettre en adéquation ces connaissances et outils mathématiques utiles à l'engagement dans le problème avec le répertoire des élèves. Nous avons identifié huit variables didactiques pour une situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus.

Variable didactique 1 : Statut épistémique du problème

La première variable didactique que nous avons identifiée concerne le statut épistémique de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous avons effectué deux choix pour présenter ce problème de recherche aux élèves :

1. Donner le nom de la conjecture et préciser qu'elle n'est pas encore résolue par la communauté mathématique ;
2. Ne pas donner le nom de la conjecture et ne pas préciser que le problème est encore ouvert.

Nous faisons l'hypothèse que révéler le statut épistémique de la conjecture d'Erdös-Straus peut avoir deux effets : démotiver les élèves et « tuer » la recherche ou, au contraire, motiver les élèves à relever un défi. Concernant le second choix, nous pensons que ne pas indiquer le caractère non résolu du problème favorise la dévolution de la recherche du problème aux élèves.

Variable didactique 2 : lettres pour désigner les solutions

Cette variable concerne le choix des lettres pour désigner les solutions : x, y, z ou a, b, c. Nous faisons l'hypothèse que choisir a, b, c plutôt que x, y, z permet de mettre en évidence la nature des nombres en jeu. Battie, dans son travail sur le raisonnement en arithmétique a mis en évidence « l'absence d'une claire conscience [chez les élèves] que l'arithmétique (enseignée en classe de terminale scientifique) concerne les entiers et qu'elle n'exclut pas qu'une certaine attention soit portée à la nature des nombres en jeu » (Battie, 2007, p. 33). En théorie des nombres et dans certains manuels de terminale scientifique, les lettres x, y, z étant davantage utilisées pour désigner des variables et a, b et c pour nommer des nombres entiers, nous faisons ainsi l'hypothèse que désigner les solutions par a, b, c pourrait atténuer cette difficulté.

Variable didactique 3 : syntaxe de l'énoncé

La troisième variable concerne la forme syntaxique de l'énoncé et se distingue en deux sous-variables.

Variable didactique 3a : aspects prédicatif et opératoire

Vergnaud fait une distinction dialectique entre forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. La forme opératoire est « celle qui permet de faire et de réussir », la forme prédicative est « celle qui prend la forme de textes, d'énoncés, de traités et de manuels » (Vergnaud, 2001, p. 1). Nous lui empruntons les terminologies *prédicatif* et *opératoire* pour qualifier la syntaxe d'un énoncé. L'aspect prédicatif renvoie à l'utilisation de quantificateurs dans le langage naturel et l'aspect opératoire fait référence au vocabulaire de l'action. Cette variable didactique peut prendre trois valeurs : syntaxe avec forme prédicative, syntaxe avec forme opératoire, syntaxe hybride articulant les aspects prédicatif et opératoire. Le choix de ces valeurs permet de jouer sur deux critères : la proximité de la formulation de l'énoncé avec celle des chercheurs et l'incitation à s'engager dans une démarche particulière de recherche. Choisir une forme prédicative de l'énoncé (avec quantificateurs ou connecteurs logiques) permet de proposer aux élèves l'énoncé de la conjecture d'Erdös-Straus que l'on trouve dans la littérature (Yamamoto, 1965, Mordell, 1969, Elsholtz, 2001) :

Si $n > 1$, alors l'équation $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ a des solutions en entiers positifs a, b, c.

ou

Pour tout n supérieur ou égal à 2, il existe des entiers naturels non nuls a, b, c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Nous faisons l'hypothèse que cette formulation favorise plutôt une démarche axée sur la recherche non constructive d'existence de solutions. A l'inverse, un énoncé avec une syntaxe hybride, articulant les aspects prédicatif et opératoire (*pour tout entier naturel n [...] peut-on trouver [...]*) ou un énoncé avec une forme opératoire (*pour quels entiers naturels n [...] peut-on trouver [...]*) favorise plutôt un engagement dans la recherche du problème par l'action et oriente vers une recherche constructive de solutions.

Notons que la syntaxe hybride (*pour tout entier naturel n [...] peut-on trouver [...]*) peut engendrer une difficulté avec l'étude du cas $n = 1$ qui est un contre-exemple à la proposition. Ayant une réponse à la question posée, les élèves pourraient arrêter la recherche du problème. La forme opératoire de l'énoncé (*pour quels entiers naturels n [...] peut-on trouver [...]*) permet d'éviter cette difficulté potentielle. Une autre différence peut être relevée entre ces deux formulations de l'énoncé, liée à un effet de contrat. Dans les exercices d'arithmétique rencontrés par les élèves, la formulation *pour quels entiers n ou déterminer les entiers n* est utilisée quand la proposition n'est pas vraie pour tous les entiers (cf. figure 6.9, exercice 50, multiples de 17). Elle incite donc à une étude des entiers pour lesquels la proposition est vraie puis une détermination des entiers pour lesquels la proposition est fausse. Elle privilégie un recours au raisonnement par disjonction de cas. La formulation *pour tout entier naturel n* est utilisée quand la proposition est effectivement vraie pour tous les entiers (cf. figure 6.9, exercice 51, multiples de 19). Elle incite plutôt à effectuer une preuve par élément générique ou une vérification sur tout entier n et non une disjonction de cas. Si ces différentes syntaxes peuvent *a priori* inciter les élèves à exploiter une démarche de recherche privilégiée, toute autre direction de recherche n'est pas exclue et peut quand même émerger.

Variable didactique 3b : forme interrogative ou forme affirmative

Cette variable didactique concerne la forme grammaticale de la phrase : forme interrogative (*pour tout* [...], *peut-on trouver* [...] ?) ou forme affirmative (*pour tout* [...], *on peut trouver* [...]). Nous choisissons de fixer la valeur de cette variable en lien avec la variable 1 relative au statut épistémique du problème :

– si le statut épistémique du problème est indiqué aux élèves, nous proposons un énoncé sous forme affirmative ;
– si le statut épistémique du problème n'est pas indiqué aux élèves, nous proposons un énoncé sous forme interrogative.

Notons que la forme interrogative incite explicitement les élèves à chercher des solutions à l'équation initiale. Elle peut favoriser davantage l'engagement dans la recherche du problème.

50 Multiple de 17

Il s'agit dans cet exercice de déterminer tous les entiers n tels que $2^n - 1$ est un multiple de 17.

1) Vérifier que $2^8 \equiv 1 \bmod 17$. En déduire que si $n = 8k$ ($k \in \mathbb{N}$), $2^n - 1$ est multiple de 17.

2) Si n est un entier quelconque, on écrit la division euclidienne de n par 8 : $n = 8k + r$.
Vérifier que $2^n \equiv 2^r \bmod 17$.
En déduire tous les entiers n cherchés.

51 Multiple de 19

Le but de cet exercice est de prouver que, pour tout entier naturel n, l'entier $N = 2^{2^{6n+2}} + 3$ est un multiple de 19.

1) Vérifier cette affirmation pour $n = 0$.

2) Vérifier que $2^6 \equiv 1 \bmod 9$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel k tel que : $2^{6n} = 9k + 1$.

3) À l'aide de congruences, déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{18} par 19.

4) En utilisant les questions **3)** et **4)**, prouver l'affirmation précédente pour tout n.

FIGURE 6.9 – Exercices d'arithmétique extraits d'un manuel scolaire de mathématiques de terminale scientifique, collection Terracher, p. 356, 2002.

Avec une forme affirmative, le fait qu'aucune question ne soit posée peut dérouter les élèves qui n'ont pas l'habitude de l'activité de recherche de problèmes. Prendre l'initiative de la recherche peut être un frein à l'engagement dans le problème.

Variable didactique 4 : indication sur le domaine d'exploration
La quatrième variable didactique concerne les indications données sur le domaine d'exploration de n d'une part, et de a, b, c d'autre part.

Variable didactique 4a : indication sur le domaine d'exploration de n
Cette variable peut prendre trois valeurs : ($n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$).

Variable didactique 4b : indication sur le domaine d'exploration de a, b, c
Cette variable peut prendre deux valeurs : ($a, b, c \in \mathbb{N}$ et $a, b, c \in \mathbb{N}^*$).

Pour ces deux variables, nous faisons l'hypothèse que ne pas ajouter « non nul » peut inciter les élèves à être davantage attentifs à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent, en l'occurrence des fractions. Cela peut les amener à se questionner sur le sens de $\frac{1}{0}$ et enrichir ainsi leurs connaissances sur les fractions. Pour la variable 4a, ne pas préciser que n est supérieur ou égal à 2 peut favoriser l'étude du cas particulier $n = 1$ qui nous semble importante pour la compréhension du problème et pour éventuellement donner des pistes de recherche. En effet, cette étude permet de se rendre compte que toute fraction $\frac{1}{n}$ est inférieure ou égale à 1 pour tout entier naturel n. Cela peut aider à trouver des décompositions de $\frac{4}{n}$

pour les premières valeurs de n ($\frac{4}{2} = 2 = 1 + 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, etc.), à remarquer qu'à partir de $n > 4$, la fraction devient inférieure à 1 et à mettre éventuellement sur la piste de la plus petite fraction unitaire inférieure à $\frac{4}{n}$. La décroissance de $\frac{1}{n}$ peut être mise en évidence.

Variable didactique 5 : précision sur les solutions

Nous fixons deux valeurs possibles pour cette variable : préciser, ou ne pas préciser, que a, b, c sont *non nécessairement distincts*. Ajouter cette précision sur les solutions dans la formulation de l'énoncé peut avoir deux effets. Le premier est une complexification de l'énoncé par l'introduction d'un vocabulaire (la notion de nécessaire) qui peut être difficile à comprendre pour certains élèves. Cela peut constituer une difficulté de compréhension du problème. Le second effet est la levée du questionnement suivant : a, b et c peuvent-ils être égaux ? Ce questionnement ne constitue *a priori* pas une difficulté en lui-même mais il peut être un obstacle pour l'avancée dans la recherche dans la mesure où les élèves doivent faire eux-même un choix, initiative qu'ils n'ont pas toujours l'habitude (ou l'occasion) de prendre.

Variable didactique 6 : séance préalable

La sixième variable didactique concerne une modification des scénarios avec l'ajout possible d'une séance préalable à la séance de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Cette séance serait une séance de recherche sur un problème de fractions égyptiennes avec comme objectifs : d'une part familiariser les élèves avec les fractions égyptiennes et le calcul fractionnaire et d'autre part, installer ou renforcer un contrat de recherche de problèmes au sein de la classe. Une connaissance plus fine des fractions égyptiennes pourrait permettre aux élèves de s'engager plus rapidement dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, notamment dans une démarche de recherche de solutions constructives. La recherche pourrait ainsi être plus riche en termes de production de résultats. Installer ou renforcer un contrat de recherche de problèmes permettrait de favoriser la dévolution de la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus aux élèves.

Variable didactique 7 : outils technologiques

Cette variable se décline en deux sous variables : disponibilité d'une calculatrice et disponibilité d'un ordinateur.

Variable didactique 7a : disponibilité d'une calculatrice

Nous pouvons faire le choix d'autoriser ou non les calculatrices pendant la (ou les) séance(s) de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Différentes fonctions de la calculatrice peuvent être utilisées par les élèves et avoir des effets sur les démarches de recherche mises en œuvre.

La fonction « calcul fractionnaire » d'une calculatrice évite le passage à une valeur approchée des fractions. Taper $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ donne comme résultat $\frac{7}{12}$ et non 0.583333333 (le nombre de décimales variant selon le modèle et la puissance des calculatrices). Dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, l'utilisation de calculatrice à calcul fractionnaire s'avère utile pour favoriser l'engagement par l'action dans la recherche du problème. Elle permet, par exemple, de vérifier aisément si une fraction se décompose en fractions unitaires ou pas.

Exemple : comment vérifier, à l'aide d'une calculatrice que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$ *?* A l'aide d'une calculatrice avec calcul fractionnaire, il suffit de taper la somme des trois fractions unitaires et elle donnera directement $\frac{2}{3}$. La vérification de ce calcul est facile et rapide. Avec une calculatrice sans calcul fractionnaire, la vérification est délicate car elle calcule avec des valeurs approchées. La différence entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ ne donne pas 0 mais un résultat de l'ordre de 10^{-13} (avec une TI-80 par exemple).

L'utilisation de la calculatrice devient également un outil utile pour la recherche d'exemples. Si on cherche quelle quantité il faut ajouter à $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ pour obtenir $\frac{2}{3}$, en effectuant $\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ on obtient directement $\frac{1}{12}$. L'utilisation de la calculatrice à calcul fractionnaire peut ainsi favoriser une recherche constructive de solutions plutôt qu'une recherche d'existence de solutions. Précisons que les calculatrices programmables sont plus performantes pour le calcul fractionnaire qu'une simple calculatrice avec la fonction calcul fractionnaire. Par exemple les calculatrices TI-82 ne font pas de calcul fractionnaire avec des nombres de plus de trois chiffres. Des calculatrices de type TI-89 sont plus performantes et permettent de faire du calcul fractionnaire avec des grands nombres.

L'utilisation de la fonction « calcul formel » d'une calculatrice peut faciliter certaines manipulations algébriques. La commande *factoriser* appliquée à l'équation de départ ($\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$) permet d'obtenir rapidement une réduction au même dénominateur. La commande *résoudre* permet d'isoler n.

L'utilisation d'une calculatrice programmable rend possible l'implémentation d'un algorithme, par exemple un algorithme de décomposition de fraction en somme de fractions égyptiennes. Cela privilégierait une démarche de recherche exhaustive de solutions.

L'utilisation d'une calculatrice permet donc aux élèves de s'engager rapidement et facilement par l'action dans la recherche du problème. Les fonctions de calcul fractionnaire et de programmation sont celles qui peuvent avoir le plus d'influence sur les démarches de recherche mises en œuvre par les élèves. Elles favorisent l'exploitation du caractère expérimental du problème et la recherche de solutions constructives.

Variable 7b : disponibilité d'un ordinateur

Nous pouvons faire le choix de rendre possible ou non l'accès à un ordinateur pendant la recherche du problème[7]. Plusieurs logiciels pourraient être utilisés par les élèves : tableur, logiciel de calcul formel, logiciel de géométrie, logiciel de programmation. L'utilisation d'un tableur peut favoriser l'exploitation du caractère expérimental du problème en permettant de vérifier une formule générale sur de nombreux exemples. Comme pour la calculatrice, l'utilisation d'un logiciel de calcul formel peut favoriser certaines manipulations algébriques. Un logiciel de géométrie peut être utilisé au sein d'une piste de recherche géométrique, par exemple pour visualiser une représentation géométrique du problème. L'accès à un ordinateur et à un logiciel de programmation rend possible l'implémentation d'un algorithme et peut favoriser ainsi l'aspect algorithmique du problème et une démarche de recherche constructive et exhaustive de solutions.

Variable didactique 8 : aides écrites

Nous envisageons la possibilité d'introduire dans le milieu des aides écrites pour les élèves au cas où ils seraient bloqués pour s'engager ou pour avancer dans la recherche du problème. Elles ont pour but de les encourager à développer une piste de recherche ou à les orienter vers une nouvelle réflexion. Nous donnons deux exemples ci-dessous, la description détaillée des différentes aides prévues est dans l'annexe A.

Exemple 1 - Aide possible à proposer à des élèves qui n'arrivent pas à s'engager dans la recherche de la conjecture : *faire des essais pour différentes valeurs de n.*

Exemple 2 - Aides possibles à proposer à des élèves qui n'arrivent pas à trouver des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour des valeurs de n supérieur à 4 :

– *Pourquoi la recherche d'une décomposition devient plus difficile pour $n > 4$?*
– *Pour $n < 4$, la fraction $\frac{4}{n}$ peut être décomposée en $1+\frac{p}{q}$, pourquoi cette décomposition*

7. Nous discutons, dans ce paragraphe, uniquement de la disponibilité des logiciels et non de l'accès à Internet, difficulté évoquée dans le paragraphe 6.2.1.

n'est pas possible pour $n > 4$? Peut-on trouver une décomposition semblable ?

En résumé, nous avons identifié les huit variables didactiques suivantes :
– V1 - Statut épistémique du problème
– V2 - Lettres pour désigner les solutions
– V3 - Syntaxe de l'énoncé
– V4 - Indication sur le domaine d'exploration
– V5 - Précision sur les solutions
– V6 - Séance préalable
– V7 - Outils technologiques
– V8 - Aides écrites

Dans les différentes situations didactiques autour de la conjecture d'Erdös-Straus que nous avons testées, nous avons joué sur les différentes valeurs de ces variables. Seules les valeurs de deux variables didactiques n'ont pas été modifiées : la variable didactique 2 (choix des lettres pour désigner les solutions) et la variable didactique 7a (disponibilité de la calculatrice). Pour la variable 2, nous avons choisi de désigner les solutions par a, b, c afin de mettre en évidence la nature de ces nombres. Pour la variable didactique 7a, nous avons choisi de préciser, dans les consignes de la séance de recherche, que la calculatrice est autorisée. Le tableau de la page suivante présente les différents choix effectués sur les autres variables didactiques dans les cinq pré-expérimentations que nous analysons en détail dans la partie suivante (6.3).

Conclusion

L'analyse de l'enseignabilité de situations de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus a permis de déterminer :
– des critères pour choisir une organisation didactique spécifique plaçant les élèves et les étudiants dans une position proche de celle d'un chercheur en mathématiques ;
– trois variables macro-didactiques et quatre scénarios ;
– huit variables didactiques.

A partir de ces éléments, nous avons construit cinq situations de recherche pour la classe que nous avons expérimentées. La confrontation au terrain expérimental va permettre, d'une part d'affiner les choix des variables de situation (notamment en fixant la valeur de certaines variables), et d'autre part de caractériser le milieu matériel initial des élèves. Dans les parties suivantes (6.3 et 6.4), nous présentons et analysons les cinq pré-expérimentations ainsi que leurs apports pour construire la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus de type laboratoire (chapitres 7 et 8).

	Pré-expérimentation 1	Pré-expérimentation 2	Pré-expérimentation 3	Pré-expérimentation 4	Pré-expérimentation 5
Variables didactiques					
V1 - Statut épistémique du problème	Non indiqué aux élèves	Non indiqué aux élèves	Indiqué aux élèves	Non indiqué aux élèves	Non indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	*a, b, c*	*a, b, c*	*a, b, c*	*a, b, c*	*a, b, c*
V3 - Syntaxe de l'énoncé V3a – (prédicatif, opératoire) V3b – (interrogatif, affirmatif)	 Hybride (prédicatif, opératoire) Interrogatif	 Hybride (prédicatif, opératoire) Interrogatif	 Hybride (prédicatif, opératoire) Affirmatif	 Opératoire Interrogatif	 Opératoire Interrogatif
V4 – Indication sur le domaine d'exploration V4a – pour *n* V4b – pour *a, b, c*	 *n* entier naturel *a, b, c* entiers naturels	 *n* entier naturel *a, b, c* entiers naturels	 *n* entier naturel supérieur ou égal à 2 *a, b, c* entiers naturels	 *n* entier naturel non nul *a, b, c* entiers naturels non nuls	 *n* entier naturel non nul *a, b, c* entiers naturels non nuls
V5 – Précision sur les solutions : *a, b, c* non nécessairement distincts	Non précisé	Non précisé	Non précisé	Non précisé	Précisé
V6 - Séance préalable	Non	Oui	Non	Non	Non
V7 – Outils technologiques V7a – disponibilité d'une calculatrice V7b – disponibilité d'un ordinateur	 Oui Non	 Oui Non	 Oui Non	 Oui Non	 Oui Oui
V8 – Aides écrites	Oui	Non	Non	Non	Non

6.3 Analyse de cinq pré-expérimentations

Les cinq pré-expérimentations que nous avons choisies d'analyser dans ce paragraphe se sont déroulées tout au long de notre travail de recherche, entre mars 2009 et décembre 2011. Pour chaque pré-expérimentation, nous présentons les principaux éléments d'organisation et d'analyse.

Pré-expérimentation 1

La première pré-expérimentation autour de la situation d'Erdös-Straus est celle que nous avons menée dans le cadre de notre stage de recherche de Master 2. L'objectif était d'étudier le processus de recherche d'élèves de terminale scientifique engagés dans la résolution d'un problème de recherche en arithmétique. Deux questions ont été étudiées : comment les élèves engagés dans la résolution d'un problème de recherche utilisent-ils leurs connaissances mathématiques ? Quels éléments comparatifs peut-on observer entre la recherche d'élèves suivant un enseignement spécifique en arithmétique (spécialité mathématique) et la recherche d'élèves ne suivant que l'enseignement obligatoire ? Cette expérimentation est étudiée en détail dans (M.-L. Gardes, 2009, 2010). Nous résumons ici les principaux éléments d'organisation et d'analyse.

Contexte : L'expérimentation s'est déroulée dans une classe de terminale scientifique en mars 2009 dans un établissement de Saône-et-Loire. L'enseignant de mathématiques de la classe est expérimenté et est titulaire d'un DEA (Diplôme d'Etudes Approfondies) en Didactique des Mathématiques. Il a été pendant de nombreuses années formateur à l'IUFM [8] et à l'IREM [9]. Lorsque cette expérimentation a eu lieu, nous étions l'assistante pédagogique de la classe depuis le début de l'année. Nous avions donc l'habitude de travailler avec cet enseignant et avec ses élèves.

L'analyse des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire (cf. partie 6.1) montre que les connaissances mathématiques identifiées comme utiles à l'engagement dans le problème (les fractions, le calcul fractionnaire, les nombres entiers, les nombres premiers, les multiples et les diviseurs) sont des notions qui ont été déjà étudiées par les élèves de terminale scientifique. La classe où s'est déroulée cette expérimentation a une culture mathématique spécifique. Les élèves ont l'habitude d'aborder l'activité mathématique par des recherches de problèmes. En effet, dans chaque devoir à la maison (environ 12 sur l'année scolaire) un problème ouvert (au sens de (Arsac & Mante, 2007)) ou à prise d'initiative leur est posé. De même, dans chaque devoir surveillé (environ 6 sur l'année scolaire) un exercice de ce type leur est proposé [10]. De plus, de nombreuses situations de recherche de problèmes, soit sous forme de débat scientifique, soit sous forme de travaux en groupes, sont proposées aux élèves. Ces derniers sont également sensibilisés au vocabulaire relatif à une recherche : conjecture, preuve, contre-exemple, etc. Enfin, pour les élèves suivant la spécialité Mathématiques, il est essentiel de savoir que le premier chapitre de la partie arithmétique portait sur les « différents types de

8. Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

9. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

10. *Exemple 1* : Combien de régions du plan 1000 droites délimitent-elles ? (les droites sont telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes et deux quelconques non parallèles).

Exemple 2 : On considère les deux nombres : $A = \frac{1{,}000000000000004}{1{,}000000000000006^2}$ et $B = \frac{0{,}999999999999995^2}{0{,}999999999999998}$. Comparer A et B.

raisonnements » en arithmétique [11] (cf. annexe B1). Ainsi les connaissances mathématiques utiles pour favoriser l'engagement dans la recherche du problème semblent *a priori* dans le milieu initial des élèves. De même, la diversité des activités mathématiques proposées à la classe au cours de l'année laisse penser qu'ils ont acquis une représentation de l'activité de recherche mathématique favorisant une dévolution du problème.

Organisation didactique : La séance de recherche a duré deux heures, organisée selon le scénario 1 décrit p. 221 et a été gérée avec l'enseignant de la classe comme un dispositif Problème Ouvert (Arsac & Mante, 2007). Nous avons fait ce choix de scénario (sans phase de mise en commun et de débat au sein de la classe) pour privilégier les phases de recherche individuelle et collective par groupes. Cette décision a été motivée par l'objectif principal de notre recherche de Master 2, à savoir l'étude des processus de recherche effective des élèves engagés dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus.

La classe compte 36 élèves que nous avons répartis en neuf groupes en fonction de leur niveau scolaire et de l'enseignement de spécialité suivi [12]. Nous avons enregistré deux groupes d'élèves. Les élèves du groupe 1 suivent la spécialité Mathématiques et disposent de calculatrices programmables et les élèves du groupe 2 suivent une autre spécialité et disposent de calculatrices programmables. Le corpus recueilli pour chacun des groupes est le suivant : la production finale remise au bout des deux heures de recherche, les transcriptions des discussions des élèves pendant tout le travail collectif et certains brouillons d'élèves.

Choix des variables didactiques : Le tableau 6.10 présente les choix des variables didactiques effectués pour cette expérimentation.

V1 - Statut épistémique du problème	Non indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	a, b, c
V3 - Syntaxe de l'énoncé V3a - (prédicative, opératoire) V3b - (interrogatif, affirmatif)	 Hybride (prédicative, opératoire) Interrogatif
V4 - Indication sur le domaine d'exploration V4a - pour n V4b - pour a, b, c	 n entier naturel a, b, c entiers naturels
V5 - a, b, c non nécessairement distincts	Non précisé
V6 - Séance préalable	Non
V7 - Outils technologiques V7a - Disponibilité de la calculatrice V7b - Disponibilité d'un ordinateur	 Oui Non
V8 - Aides écrites	Oui

FIGURE 6.10 – Tableau des choix des variables didactiques pour la pré-expérimentation 1.

11. Raisonnement par contraposée, raisonnement par condition nécessaire et suffisante, raisonnement par l'absurde, raisonnement par disjonction de cas, raisonnement par récurrence.

12. Rappelons qu'en classe de terminale scientifique, les élèves ont le choix entre différentes spécialités : mathématiques, sciences physiques et chimie, sciences de la vie et de la terre ou sciences de l'ingénieur.

Le but de cette première expérimentation étant de tester les potentialités de la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus en classe de terminale scientifique, nous avons voulu renforcer les éléments favorisant une dévolution de la recherche du problème aux élèves. Nous avons effectué nos choix de variables didactiques dans cet objectif. Nous avons donc choisi de ne pas révéler le statut épistémique de la conjecture d'Erdös-Straus afin de favoriser leur engagement dans le problème puis la dévolution de la recherche tout au long de la séance. Concernant la formulation de l'énoncé, nous avons choisi une syntaxe hybride et une forme interrogative pour inciter les élèves à l'action et les orienter plutôt vers une démarche de recherche de solutions constructives. L'énoncé proposé est le suivant :

Pour tout n entier naturel, peut-on trouver trois entiers naturels a, b, c tels que
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\,?$$

Pour des raisons d'organisation et de matériel, nous n'avons pas pu mettre d'ordinateurs à disposition des élèves. Afin d'assurer le maintien d'une recherche active tout au long de la séance, nous avons prévu de proposer éventuellement des aides écrites aux élèves (cf. annexe A) qui seraient bloqués dans leur recherche (cf. M.-L. Gardes, 2009, p. 39-44).

Milieu matériel des élèves : Le tableau 6.11 résume les éléments du milieu matériel des élèves pour cette expérimentation.

Organisation didactique	Scénario 1 (cf. p. 221) et tout type de document autorisé.
Connaissances mathématiques et heuristiques	Disponibles et *a priori* mobilisables.
Représentation de l'activité mathématique	Pratique de diverses activités mathématiques dont des résolutions de problèmes de recherche.
Énoncé	Pour tout n entier naturel, peut-on trouver trois entiers naturels a, b, c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?
Outils technologiques mis à disposition	Calculatrice programmable de type TI-89.

FIGURE 6.11 – Tableau des éléments du milieu matériel des élèves de la pré-expérimentation 1.

Analyses : Les élèves se sont engagés sans difficulté dans la recherche du problème. La dévolution du problème s'est ensuite maintenue durant toute la séance.

L'énoncé proposé aux élèves a entraîné un questionnement sur les cas particuliers $n = 0$ et $n = 1$. Les élèves montrent rapidement que pour ces deux valeurs de n, l'équation n'a pas de solution. Ils obtiennent un contre-exemple et peuvent répondre négativement à la question posée. Cependant ils ne sont pas sûrs de leur réponse compte-tenu des modalités de la séance :

E1 : Oui mais enfin, en toute rigueur, oh, tu pourrais répondre.

E2 : Oui.

E1 : Et c'est ça si ça se trouve ils n'attendent pas plus hein.

E2 : Ben non parce qu'ils n'attendraient pas une heure et demie deux heures [...] sinon tu imagines, tout le monde a fini au bout de 10 minutes, laisse tomber.

Cet effet de contrat fait émerger une connaissance heuristique en acte : même si deux contre-exemples sont trouvés, on continue la recherche du problème. Pour ce groupe, l'intervention de l'enseignant va, d'une part leur confirmer qu'ils ont effectivement trouvé un contre-exemple, et d'autre part les inviter à poursuivre l'exploration du problème pour d'autres valeurs de n.

P : Maintenant on pourrait rajouter pour tout entier naturel différent de 1.

Les résultats obtenus par les élèves de cette classe sont les suivants : existence de formules polynomiales donnant une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour n pair, n multiple de 3, n multiple de 5, n multiple de 7 et n multiple de 11. La multiplicité a été utilisée sur des cas particuliers (par exemple, si on a une solution pour 3 alors on a une solution pour tous les multiples de 3) mais pas dans le cas général (si on a une solution pour n alors on a une solution pour tout multiple de n). La réduction du problème aux nombres premiers n'a été effectuée que dans certains groupes, à la fin de la recherche collective.

Les démarches de recherche mises en œuvre par les élèves sont principalement de deux natures. Certains élèves ont débuté une démarche de type exploratoire en cherchant une méthode de décomposition de la fraction $\frac{4}{n}$ à partir de valeurs particulières de n puis ont mis en œuvre une démarche expérimentale pour établir des résultats partiels pour certains multiples de n. D'autres groupes ont d'abord mené une recherche davantage axée sur la recherche d'un raisonnement général, pour montrer l'existence de solutions pour tout n. Cette voie ne leur permettant pas d'avancer dans leur recherche du problème, ils s'engagent dans la construction et le questionnement d'exemples. Nos analyses des processus de recherche ont montré que c'est l'articulation de procédures exploiratoire et opératoire, c'est-à-dire la mise en œuvre d'une dimension expérimentale, qui permet aux élèves d'avancer dans la recherche, notamment pour produire des résultats partiels (M.-L. Gardes, 2009, 2010).

Conclusion de la pré-expérimentation 1 : Concernant l'organisation didactique de la situation et le choix du scénario, cette expérimentation montre l'importance de la phase de débat pour les élèves afin qu'ils valident eux-même leurs résultats, qu'ils argumentent et qu'ils s'approprient *a minima* les résultats des autres groupes. Elle est également importante pour préparer la séance de synthèse avec la valorisation des travaux des élèves. Pour les prochaines pré-expérimentations d'une séance unique de recherche sur la conjecture, nous ne choisirons plus ce scénario mais le scénario 2, décrit p. 221.

Le choix des variables didactiques 1 et 3 concernant le statut épistémique du problème (non indiqué) et la forme syntaxique de l'énoncé (pour tout entier naturel n [...], peut-on trouver [...]) a permis aux élèves de s'engager facilement, par l'action, dans la recherche du problème, par des procédures exploratoires (recherche constructive de solutions) ou des procédures opératoires (chercher à résoudre l'équation initiale). La valeur de la variable didactique V4a (indication sur le domaine d'exploration de n), fixée à *entier naturel* n, associée à un aspect prédicatif de la première assertion *pour tout* a révélé un effet de contrat sur les élèves : même si des contre-exemples sont trouvés, ils continuent la recherche du problème compte-tenu des modalités de la séance. Une intervention de l'enseignant est nécessaire pour clarifier la situation.

Les aides écrites (variable didactique 8) n'ont été proposées qu'à un seul groupe, à la fin de la séance, pour les encourager à persévérer dans leur piste de recherche. Cette aide leur a permis de se poser de nouvelles questions, de tenter de nouvelles expériences mais ne leur a pas permis de produire un résultat supplémentaire. Si ces aides n'ont pas été davantage utilisées, c'est qu'elles ne se sont pas révélées nécessaires. En effet, tous les groupes ont réussi à s'engager sans difficulté dans la recherche du problème et par la suite à établir des résultats partiels. Les élèves n'ont pas été réellement bloqués dans leur recherche. Pour les pré-expérimentations suivantes, nous faisons donc le choix de ne pas introduire ces aides dans le milieu des élèves.

Le milieu matériel des élèves semble avoir favorisé la dévolution de la recherche du problème. Cependant nous pensons que notre position d'assistante pédagogique a influencé positivement les élèves à s'engager dans ce type de travail. Nous voyons deux raisons : d'une part le contrat didactique au sein de la classe était déjà installé entre l'enseignant, les élèves et nous et d'autre part une dimension affective de la relation élève-assistante pédagogique semble être entrée en considération [13].

Enfin, à l'issue de cette première pré-expérimentation, nous faisons l'hypothèse qu'une connaissance plus fine des fractions égyptiennes permettrait aux élèves d'une part, de s'engager plus rapidement dans la recherche du problème et d'autre part, de mener une recherche plus riche en termes de production de résultats. Une séance d'exercices préalable sur ces objets pourrait être bénéfique pour la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus.

Pré-expérimentation 2

La seconde pré-expérimentation a été menée dans une classe de terminale scientifique. L'objectif était de tester à nouveau la situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus pour étudier la modification du milieu matériel des élèves à la suite de l'ajout d'une séance préalable de recherche d'un problème autour des fractions égyptiennes (variable didactique 6).

Contexte : L'expérimentation s'est déroulée en mars 2010 dans le même établissement et avec le même enseignant que lors de la pré-expérimentation 1. Nous avions l'habitude de travailler avec cet enseignant et nous connaissions certains élèves de la classe puisque nous intervenions dans l'établissement dans des stages de remise à niveau et de perfectionnement pendant les vacances scolaires.

Organisation didactique : Cette expérimentation s'est déroulée sur deux séances. La première séance a pour objectifs principaux, d'une part de familiariser les élèves avec les fractions égyptiennes et le calcul fractionnaire, et d'autre part de mettre en place ou renforcer un contrat de recherche de problème au sein de la classe. Elle a duré deux heures et a été animée par l'enseignant selon le scénario 1 décrit p. 221.

Le problème posé est la décomposition de l'unité en somme de fractions égyptiennes. Une analyse mathématique et didactique détaillée se trouve dans (Aldon et al., 2010). L'énoncé que nous avons proposé est le suivant : Peut-on trouver deux entiers naturels non nuls a et b distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

Peut-on trouver trois entiers naturels non nuls a, b et c distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

Peut-on trouver quatre entiers naturels non nuls a, b, c et d distincts tels que :
$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c}$? Continuer...

13. Nous avons communiqué et écrit un article sur cette problématique de la position du chercheur dans les expérimentations lors du IV séminaire Jeunes chercheurs de l'ARDM (voir Daina, Mathé, Pelay, & Sabra, 2001).

La deuxième séance a eu lieu deux jours après la première, nous avons proposé aux élèves une recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. La séance a duré trois heures, animée, avec l'enseignant, selon le scénario 2 décrit p. 221. Nous avons choisi le scénario 2 pour ajouter une phase de mise en commun et de débat au sein de la classe dans la séance de recherche de la conjecture d'Erdös-Straus. Notons que par rapport à la première pré-expérimentation, la phase de synthèse ne fait pas l'objet d'une séance particulière mais est insérée dans la séance de trois heures. Précisons également que nous avons construit un questionnaire pour les élèves afin de recueillir des informations complémentaires sur le lien établi ou non entre les deux problèmes de fractions égyptiennes et plus généralement, sur leur démarche de recherche. Il a été donné aux élèves la semaine suivant les deux séances de recherche de problèmes. Voici les quatre questions :

1. L'exercice ouvert fait en groupe, deux jours avant, vous a-t-il aidé dans la recherche de cet exercice ouvert ? Justifier en quelques lignes.
2. Ce problème vous a-t-il fait penser à un autre exercice ? à un cours ? à une notion ou un domaine mathématique particulier ?
3. Lors de la recherche (individuelle ou collective), avez-vous utilisé votre calculatrice ? Quel modèle ? Pour quelles raisons ? Est ce que cela vous a aidé ?
4. Lorsque vous avez appris que c'était un problème non résolu par les chercheurs en mathématiques, quelle a été votre réaction ou votre ressenti ?

La classe compte 36 élèves que nous avons répartis en neuf groupes en fonction de leur niveau et de l'enseignement de spécialité suivi. Nous avons enregistré trois groupes d'élèves. Les élèves du premier groupe suivent la spécialité Mathématiques et disposent de calculatrices programmables. Les élèves des deux autres groupes suivent une autre spécialité et un seul des deux groupes dispose de calculatrices programmables. Le corpus recueilli pour chacun des groupes est le suivant : les productions de la séance préalable, la production finale, les échanges enregistrés des élèves pendant tout le travail collectif et certains brouillons d'élèves de la séance sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Choix des variables didactiques : Le tableau 6.12 présente les choix des variables didactiques effectués pour cette expérimentation.

Par rapport à la pré-expérimentation 1, nous avons modifié uniquement la valeur de la variable didactique 6 (séance préalable). Ce choix est d'abord motivé par l'objectif de cette expérimentation qui est l'analyse de l'influence d'une première séance de recherche de problème autour des fractions égyptiennes sur celle de la conjecture d'Erdös-Straus, tant au niveau de la mobilisation des connaissances, de la manipulation des objets mathématiques en jeu que de l'activité de recherche en elle-même. La modification d'un seul paramètre facilite l'analyse de ses effets. Le maintien de la valeur des variables didactiques 1, 3 et 7 est motivé par l'importance de favoriser l'engagement dans le problème et la dévolution de la recherche. En effet, par rapport à la pré-expérimentation 1, les connaissances heuristiques et la représentation de l'activité de recherche mathématique identifiées comme utiles risquent de ne pas être dans le milieu objectif de tous les élèves. La classe où s'est déroulée cette seconde pré-expérimentation a une certaine représentation de l'activité mathématique grâce à un enseignement qui propose diverses activités mathématiques dont des résolutions de problèmes de recherche mais d'après l'enseignant, le niveau scolaire de cette classe étant moins bon que celui de l'année précédente (pré-expérimentation 1), il n'a pas proposé autant d'activités de recherche en groupe, en classe ou dans les devoirs. Le contrat didactique est un peu différent et n'inclut pas une habitude régulière de pratique d'activités de recherche

V1 - Statut épistémique du problème	Non indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	a, b, c
V3 - Syntaxe de l'énoncé V3a - (prédicative, opératoire) V3b - (interrogatif, affirmatif)	 Hybride (prédicative, opératoire) Interrogatif
V4 - Indication sur le domaine d'exploration V4a - pour n V4b - pour a, b, c	 n entier naturel a, b, c entiers naturels
V5 - a, b, c non nécessairement distincts	Non précisé
V6 - Séance préalable	Oui
V7 - Outils technologiques V7a - disponibilité d'une calculatrice V7b - disponibilité d'un ordinateur	 Oui Non
V8 - Aides écrites	Non

FIGURE 6.12 – Tableau des choix des variables didactiques pour la pré-expérimentation 2.

mathématique. Enfin, la modification d'une unique variable permet d'observer et d'analyser si certaines difficultés liées à la valeur des variables didactiques persistent, par exemple la difficulté liée à la variable 4 sur le domaine d'exploration de n. Précisons que pour des raisons d'organisation et de matériel, nous n'avons pas pu mettre d'ordinateurs à disposition des élèves.

Milieu matériel des élèves : Le tableau 6.13 résume les éléments du milieu matériel des élèves pour cette expérimentation.

Organisation didactique	Scénario 2 (cf. p. 221) et tout type de document autorisé.
Connaissances mathématiques et heuristiques	Disponibles mais difficilement mobilisables.
Représentation de l'activité mathématique	Pratique, peu régulière, d'activités mathématiques diverses dont des résolutions de problèmes de recherche.
Énoncé	Pour tout n entier naturel, peut-on trouver trois entiers naturels a, b, c tel que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?
Outils technologiques mis à disposition	Calculatrices programmables de type TI-89.
Élément particulier	Résolution et solutions du premier problème sur les fractions égyptiennes.

FIGURE 6.13 – Tableau des éléments du milieu matériel des élèves de la pré-expérimentation 2.

Analyses : Nous avons analysé l'influence de la séance préalable sur la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus grâce aux échanges enregistrés des élèves et de leurs réponses à la première question du questionnaire [14]. Nous avons relevé que la majorité des groupes fait appel à cette séance préalable et essaie de voir si les résultats obtenus ou la méthode utilisée peuvent les aider dans la résolution de la conjecture. Le premier problème les a aidés à s'engager dans la recherche de la conjecture et à favoriser le recours à des méthodes de décomposition. Pour $n = 4$, ils ont en effet déjà trouvé une décomposition lors de la séance précédente ; certains ont su la réutiliser. Nous faisons l'hypothèse que cela a favorisé l'exploitation du caractère expérimental du problème, à savoir faire des essais pour différentes valeurs de n. Cependant les échanges au sein des groupes et les productions finales montrent que le lien effectué entre les deux problèmes se limite à cet aspect. Contrairement à ce que nous avions envisagé, la familiarisation avec l'objet « fraction égyptienne » ne semble pas être assurée par cette première séance et ne permet pas d'enrichir la production de résultats partiels.

Pour certains élèves, nous avons relevé que la succession des deux séances a constitué une rupture du contrat de recherche, instauré par l'enseignant et renforcé par la première séance. Le problème cherché dans la séance préalable est un problème ouvert (au sens de Arsac & Mante, 2007) comme ils ont l'habitude d'en chercher en cours de mathématiques. Après un certain temps de recherche, ils aboutissent à des solutions. Sur la conjecture d'Erdös-Straus, ils n'arrivent à établir que des résultats partiels et ne reconnaissent pas ou difficilement leur valeur. Ce travail ne les convainc pas et ils pensent qu'ils ne suivent pas la bonne démarche. Ils se découragent et arrêtent parfois leurs recherches. En ce sens, la séance préalable a eu un effet négatif sur la dévolution du problème au cours de la recherche.

Au début de la séance, les élèves se sont engagés sans difficulté dans la recherche du problème et la dévolution s'est bien réalisée. C'est au fur et à mesure de l'avancée de leurs recherches que certains élèves se sont démotivés. Outre l'effet de la séance préalable, nous avançons deux autres raisons quant à cette démotivation. La première est relative au contrat didactique installé au sein de la classe. Le milieu matériel ne comportait pas, pour tous les élèves, les connaissances relatives à la recherche mathématique et le rapport à l'activité de recherche mathématique identifiés comme utiles à la dévolution de la recherche du problème. La seconde raison est liée au statut accordé par les élèves à une telle activité. Certains élèves n'ont pas perçu la pertinence de ces séances dans leurs cours de mathématiques, notamment au sein du programme et de la préparation de l'examen. Plusieurs réflexions recueillies dans les réponses au questionnaire expriment bien cela : « c'est inutile », « on rattrape des heures de maths pour chercher un problème non résolu ». Les deux situations ont pourtant été insérées dans le cours normal de mathématiques. Enfin, on peut remarquer, lors de cette expérimentation, l'influence de notre position au sein de la classe sur la dévolution du problème aux élèves. Il semble que, étant animées par une intervenante extérieure, les séances aient été perçues comme marginales et sans intérêt pour eux. Ne se sentant pas (ou peu) concernés par le sujet, ils ne se sont pas (ou peu) impliqués dans la situation proposée.

Concernant la formulation de l'énoncé, nous avons observé que le questionnement autour des cas particuliers $n = 0$ et $n = 1$ apparaît toujours dans de nombreux groupes. S'il ne s'agit pas d'une difficulté de traitement mathématique (les élèves arrivent à démontrer qu'il n'existe pas de décomposition pour ces deux valeurs de n), il est question d'un obstacle qui entrave leur confiance dans les résultats trouvés. Cela freine leurs recherches car ils doutent de la justesse de leur raisonnement et reviennent toujours dessus. Une nouvelle formulation

14. L'exercice ouvert fait en groupe, deux jours avant, vous a-t-il aidé dans la recherche de cet exercice ouvert ? Justifiez en quelques lignes.

de l'énoncé pourrait éviter cette difficulté et aider les élèves à s'engager plus facilement dans la recherche de solutions constructives pour d'autres valeurs de n. Une nouvelle question est apparue sur la formulation de l'énoncé : a, b et c doivent-ils être distincts ? Il semble que ce questionnement soit apparu en raison du premier problème sur la décomposition de l'unité en somme de fractions égyptiennes où l'énoncé précise que les entiers naturels sont non nuls et distincts. Dans certains groupes les discussions autour de l'égalité possible de a, b et c ont freiné les recherches, les élèves n'arrivant pas à faire un choix. L'enseignant est souvent intervenu pour les aider à comprendre cette formulation de l'énoncé et relancer ainsi la recherche sur le problème.

Les résultats obtenus par les élèves de cette classe sont les suivants : l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout entier naturel n multiple de k, pour $2 \leq k \leq 10$. Des formules polynomiales ont été trouvées pour n multiple de 2 et de 3. Pour les multiples de 4 à 10, la notion de propriété multiplicative a été utilisée : si on a une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes alors on a une décomposition de$\frac{4}{kn}$ pour $4 \leq k \leq 10$ en somme de trois fractions égyptiennes. Notons que la généralisation à tout entier naturel k n'a pas été établie par les élèves. De même, aucun groupe n'a évoqué la réduction du problème aux nombres premiers, ni les nombres premiers eux-mêmes.

Les démarches de recherche des élèves ont été sensiblement les mêmes que dans la pré-expérimentation 1. Nous observons toujours deux grandes catégories de procédures : celles à caractère expérimental (faire des essais sur différentes valeurs de n et trouver des relations sur a, b et c, chercher la plus grande fraction inférieure à $\frac{4}{n}$ pour trouver des décompositions) et celles plus algébriques et théoriques (raisonner par récurrence pour démontrer que l'équation admet des solutions pour tout entier naturel n, raisonner algébriquement à l'aide de résolutions d'équations du second degré).

Le débat en classe entière a permis aux élèves d'exposer leurs résultats et de les démontrer. Il a particulièrement mis en évidence la difficulté des élèves à comprendre qu'un raisonnement par récurrence n'était pas nécessaire pour démontrer leurs formules polynomiales ; par exemple celle pour n pair $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$. L'utilisation de la nature des nombres en jeu et de la réduction au même dénominateur, « simple jeu d'écriture des nombres », leur semblait trop simple pour établir un tel résultat.

Enfin, les réponses au questionnaire montrent d'une part que les élèves cherchent des liens au cours de la recherche, notamment entre différents problèmes (ici les deux problèmes sur les fractions égyptiennes ou d'autres problèmes cherchés en classe) et entre le problème et des notions mathématiques étudiées dans leurs cours (ici les suites, la division euclidienne et les congruences). La nature de ces liens et ce qu'ils leur permettent de faire ne sont pas évoqués (la formulation de la question ne les invitait pas à préciser ces éléments). Le questionnaire révèle également que la calculatrice est un outil très utilisé pendant la recherche du problème, notamment pour chercher et/ou vérifier des solutions. C'est le mode calcul fractionnaire qui est surtout utilisé, un seul élève s'est servi de la fonction calcul formel. Quelques élèves mentionnent que leur calculatrice leur permettait de faire des calculs plus rapidement. Concernant la question 4 qui portait sur le caractère non résolu du problème et sur leur réaction lorsqu'ils l'ont appris, les réponses sont diverses et parfois partagées : huit élèves n'ont pas été surpris, cinq ont été étonnés car le problème est simple à comprendre, cinq sont contents d'avoir trouvé des résultats partiels, quatre sont rassurés et trois sont déçus. Certaines réponses d'élèves laissent entendre que s'ils avaient su avant la recherche qu'il s'agissait d'une conjecture, ils n'auraient pas cherché de la même façon, voire pas du tout.

Conclusion de la pré-expérimentation 2 : Cette expérimentation a permis d'analyser l'influence d'une séance préalable de recherche de problème autour des fractions égyptiennes sur la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus. Les analyses ont montré que les effets n'ont pas été ceux que nous avions prévus : elle ne favorise pas nécessairement la manipulation des fractions égyptiennes et par suite la production de résultats partiels sur la conjecture. De plus, elle peut avoir un effet négatif sur la dévolution de la recherche de la conjecture au cours de la séance. Pour ces deux raisons, nous choisissons d'abandonner la mise en place d'une telle séance avant celle sur la conjecture d'Erdös-Straus pour les pré-expérimentations suivantes. Les analyses ont également mis en évidence la persistance d'un questionnement dû à la formulation de l'énoncé avec l'association de la valeur *prédicatif, opératoire* de la variable V3a et de la valeur *n entier naturel* de la variable V4a. Ce questionnement se révélant être un frein pour certains élèves, nous choisissons, pour les pré-expérimentations suivantes, de modifier la formulation de l'énoncé en jouant sur la valeur de la variable V3a en prenant la syntaxe opératoire suivante : *pour quels entiers naturels n, peut-on trouver* [...]. Enfin, la comparaison des deux premières pré-expérimentations en classe de terminale scientifique permet de mettre en évidence l'influence d'un paramètre particulier pour favoriser une dévolution de la recherche dans la durée : une certaine représentation de l'activité mathématique. Nous faisons effectivement l'hypothèse que le fait que ces élèves avaient moins l'habitude de faire des problèmes de recherche en classe que ceux de l'année précédente a été un frein à la dévolution du problème après l'engagement dans la recherche.

Pré-expérimentation 3

La troisième pré-expérimentation a été menée dans un contexte hors-classe. Les trois objectifs étaient les suivants :

– tester si une situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus peut être proposée à des collégiens ;
– analyser l'effet de la variable macro-didactique 1 sur la durée et le nombre de séances de recherche sur la conjecture ;
– analyser l'effet sur la recherche des élèves de la variable didactique 1 liée au statut épistémique du problème en leur précisant que le problème est une conjecture.

Contexte : Cette expérimentation s'est déroulée en février 2010 avec huit élèves (collégiens et lycéens) membres du club de mathématiques discrètes [15] de l'université de Lyon 1. Ce club s'adresse essentiellement aux collégiens et lycéens qui désirent pratiquer les mathématiques comme un loisir. Il est animé par des enseignants-chercheurs de l'université de Lyon 1 et de l'ENS de Lyon. Le club propose des séances pendant l'année scolaire (un à deux dimanche par mois) et des stages de trois jours pendant les vacances scolaires. Le contenu est centré sur la résolution de défis, de problèmes, la recherche d'énoncés, de méthodes et de solutions. D'après leur site Internet, « le but principal du club n'est pas de préparer un concours mais d'étudier des mathématiques jolies, élégantes, amusantes, efficaces, profondes, importantes et passionnantes ». Cependant, il est précisé que « beaucoup de participants se présentent à des concours mathématiques avancés comme le Concours Général, le concours hongrois KöMaL, le Tournoi des Villes, les Olympiades Balkaniques et notamment les Olympiades Internationales de Mathématiques ». Le site mentionne d'ailleurs les résultats des membres du club à ces différents concours. Cette présentation donne des premiers éléments sur les connaissances

15. Adresse de leur site Internet : http ://math.univ-lyon1.fr/ lass/club.html.

mathématiques des élèves, membres de ce club et participant à notre expérimentation. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- participer à ce club permet d'acquérir une culture sur l'activité mathématique et une pratique régulière de résolution de problèmes de recherche ;
- présenter des concours de mathématiques avancés comme le Concours Général ou les concours de l'ENS et recevoir un prix est un indicateur de la richesse de leur bagage mathématique (notions, techniques, mobilisation des connaissances).

Afin d'étayer ces hypothèses, nous avons assisté à quelques séances de cours dominical du club. Nous avons pu observer que les enseignants-chercheurs proposaient effectivement aux participants différents types d'activités mathématiques (par exemple cours et exercices sur une notion mathématique particulière, résolution d'énigmes ou de défis mathématiques) et en particulier de nombreuses résolutions de problèmes de recherche. Tous les domaines des mathématiques sont abordés. Ces élèves semblent ainsi acquérir d'une part des savoirs mathématiques avancés (par exemple l'inégalité de Tchebychev pour les lycéens) et d'autre part une expérience de la résolution de divers types de problèmes (par exemple des problèmes de concours tels que le Concours Général ou le concours des ENS et de l'Ecole Polytechnique, ou des problèmes des concours de type Olympiades).

Organisation didactique : Un objectif de cette expérimentation est d'analyser l'effet de la variable macro-didactique 1 (durée et nombre de séances), d'une part pour observer si un dispositif en temps long permet pertinemment de prendre en compte le facteur « temps ouvert » pour une recherche de problème effectuée par des élèves, et d'autre part pour observer si le processus de création décrit par de nombreux mathématiciens peut être approché par des élèves en situation de recherche de problèmes. Pour analyser l'effet de cette variable, nous avons choisi le scénario 3 décrit p. 221, composé de deux séances de recherche entrecoupée d'une période de travail libre de deux mois. Cette expérimentation n'a pas été implémentée entièrement. Seule la première phase (première séance de recherche) a fonctionné. Pour la période de travail libre, nous n'avons pas réussi à mobiliser suffisamment les élèves. Certains ont utilisé le forum dans les deux semaines suivant la première séance, puis cela s'est essoufflé. La distance, le dispositif, notre intervention extérieure et ponctuelle, l'intérêt des élèves sont autant de facteurs possibles et explicatifs de l'échec de l'expérimentation. Dans la suite, nous analysons uniquement la première séance du dispositif prévu.

Déroulement de la première séance : Nous sommes intervenue lors d'un stage du club pendant les vacances scolaires pour animer une séance d'une heure et demie. Nous avons débuté cette séance par une brève présentation de nos recherches, puis du dispositif que nous désirions mettre en place. Ensuite, les élèves ont cherché individuellement le problème pendant dix minutes puis collectivement (par groupes) pendant cinquante minutes et enfin rédigé une production commune de groupe sur une feuille (quinze minutes). Il y avait huit élèves que nous avons répartis en deux groupes : un groupe de cinq lycéens (trois élèves de terminale scientifique, spécialité Mathématiques, un élève de première scientifique et un élève de seconde) et un groupe de trois collégiens (deux élèves de troisième et un élève de cinquième). Les groupes ont été enregistrés et nous avons recueilli la production finale de chaque groupe.

Choix des variables didactiques : Le tableau 6.14 présente les choix des variables didactiques effectués pour cette expérimentation.

V1 - Statut épistémique du problème	Indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	a, b, c
V3 - Syntaxe de l'énoncé	
V3a - (prédicative, opératoire)	Hybride (prédicative, opératoire)
V3b - (interrogatif, affirmatif)	Affirmatif
V4 - Indication sur le domaine d'exploration	
V4a - pour n	$n \geq 2$
V4b - pour a, b, c	a, b, c entiers naturels
V5 - a, b, c non nécessairement distincts	Non précisé
V6 - Séance préalable	Non
V7 - Outils technologiques	
V7a - Disponibilité de la calculatrice	Oui
V7b - Disponibilité de l'ordinateur	Non
V8 - Aides écrites	Non

FIGURE 6.14 – Tableau des choix des variables didactiques pour la pré-expérimentation 3.

Pour cette expérimentation, nous voulions analyser l'effet de la variable 1 lié au statut épistémique du problème, d'une part sur la dévolution de la recherche, et d'autre part sur les démarches de recherche mises en œuvre. La question est de savoir si le rapport qu'entretiennent les chercheurs avec leur objet de recherche peut être approché par les élèves. Nous avons donc choisi d'indiquer aux élèves le statut épistémique du problème sur lequel ils allaient travailler. Même s'il semble difficile de prévoir *a priori* l'effet de cette variable sur la recherche des élèves, nous faisons l'hypothèse que ce choix ne sera pas un obstacle à l'engagement des élèves dans le problème étant donné qu'ils ont l'habitude (dans le cadre du club de mathématiques discrètes) de résoudre des problèmes mathématiques de recherche et des défis mathématiques. Nous avons présenté le problème sous cette forme (extrait du diaporama de présentation du dispositif) :

> Le problème :
> La conjecture d'Erdös-Straus
>
> Pour tout entier naturel n au moins égal à 2, on peut trouver trois entiers naturels a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Pour indiquer aux élèves que le problème était une conjecture, nous avons fait le choix de citer le nom de la conjecture et de proposer un énoncé proche de celui formulé dans la littérature mathématique. Ce choix fixe les valeurs des variables V3b (syntaxe grammaticale de l'énoncé) à *affirmatif* et V4a (indication sur le domaine d'exploration de n) à *n entier naturel supérieur ou égal à 2*. Pour des raisons d'organisation et de matériel, nous n'avons pas pu mettre d'ordinateurs à disposition des élèves.

Milieu matériel des élèves : Le tableau 6.15 résume les éléments du milieu matériel des élèves pour cette expérimentation.

Organisation didactique	Scénario 3 (cf. p. 221) et tout type de document autorisé.
Connaissances mathématiques et heuristiques	Disponibles et mobilisables.
Représentation de l'activité mathématique	Pratique régulière de recherche de problèmes au sein du club de mathématiques discrètes.
Énoncé	Pour tout entier naturel n au moins égal à 2, on peut trouver trois entiers naturels a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
Outils technologiques mis à disposition	Calculatrices de type Collège (avec calcul fractionnaire sur des nombres à deux chiffres maximum) pour les collégiens et calculatrices programmables de type TI-89 pour les lycéens.

FIGURE 6.15 – Tableau des éléments du milieu matériel des élèves de la pré-expérimentation 3.

Analyses : Lors de la séance de recherche sur la conjecture, les élèves se sont facilement engagés dans la résolution du problème. La dévolution de la recherche au cours de la séance s'est effectuée différemment dans les deux groupes. Le groupe des collégiens a toujours mené une recherche active alors que le groupe des lycéens a parfois été démotivé. A partir de nos observations des deux groupes, nous faisons l'hypothèse que cette différence est due au choix effectué sur la variable didactique 1 : révéler le statut épistémique du problème aux élèves. Comme nous l'avions identifié dans l'analyse préalable, l'effet de cette variable semble être double : motiver les élèves par la résolution d'un défi (groupe des collégiens) ou, au contraire, démotiver les élèves à la recherche d'un problème que, de toute façon, ils ne pourront pas résoudre (groupe des lycéens).

Le groupe des collégiens a formulé une première conjecture : pour tous les nombres non premiers, l'équation d'Erdös-Straus est vraie ; puis a trouvé des décompositions polynomiales en n pour les valeurs de n suivantes : n pair, n multiple de 3, 5, 7 et 11. Leur démarche de recherche s'est appuyée sur la construction expérimentale de solutions explicites pour décomposer $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

Le groupe des lycéens a étudié l'équation dans le cas où $a = b = c$ et a exhibé une solution pour tout entier naturel n multiple de 4. Pour cela, ils ont utilisé des outils mathématiques algébriques parfois complexes (par exemple l'inégalité de Tchebychev [16] pour les sommes).

La démarche de recherche des deux groupes a été très différente : les lycéens ont exploité des procédures opératoires en cherchant des outils mathématiques algébriques alors que les collégiens ont exploité le caractère expérimental du problème et ont mis en œuvre une démarche expérimentale. En termes de production de résultats partiels, la recherche des collégiens s'est révélée plus productive.

Précisons que, contrairement aux deux premières pré-expérimentations, le résultat pour les nombres pairs est trouvé très rapidement (environ dix minutes dans le groupe des collé-

16. L'inégalité de Tchébychev pour les sommes est la suivante : Si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ et $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$. De même, si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.

giens contre une heure environ chez les lycéens des pré-expérimentations 1 et 2) et la réduction aux nombres premiers est effectuée au début de la recherche. Nous faisons l'hypothèse que la richesse de leur bagage mathématique ainsi que leur pratique régulière d'activités mathématiques de recherche dans le cadre du club de mathématiques discrètes sont deux éléments pouvant expliquer ces différences entre les deux publics.

Conclusion de la pré-expérimentation 3 : Rappelons les trois objectifs de cette expérimentation : tester si une situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus peut être proposée en collège, analyser l'effet de la variable macro-didactique 1 (durée et nombre de séances) et analyser l'effet de la variable didactique 1 (statut épistémique du problème). Le second objectif n'a pu être réalisé puisque l'expérimentation prévue sur plusieurs séances ne s'est pas déroulée entièrement. Concernant l'effet de la variable didactique 1, l'analyse de cette expérimentation confirme qu'il est difficile de fixer *a priori* sa valeur et d'en anticiper les effets [17]. Choisir d'indiquer aux élèves le statut épistémique du problème nous a conduite à formuler l'énoncé de la conjecture en fixant les valeurs des variables V3b (syntaxe grammaticale) à *affirmatif* et V4a (indication sur le domaine d'exploration de n) à $n \geq 2$. L'analyse des recherches des élèves montre que cette formulation permet une bonne compréhension du problème par les élèves et n'entraîne pas la difficulté relevée dans les deux premières pré-expérimentations, à savoir le statut de contre-exemple du cas $n = 1$ (difficulté évitée par la valeur de V4a). Enfin, cette expérimentation semble montrer qu'il est possible de proposer une recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus à des élèves de collège. Ne disposant que de peu d'outils algébriques, ces élèves vont exploiter l'aspect expérimental du problème et effectuer des essais sur des valeurs de n données. Des résultats partiels sont alors abordables pour eux, tels que l'existence et la construction de décompositions de $\frac{4}{n}$ pour des valeurs particulières de n. Bien sûr cette hypothèse est à confirmer en effectuant une expérimentation dans une classe ordinaire de collège et non sur un petit échantillon d'élèves, membres d'un club de mathématiques discrètes.

Pré-expérimentation 4

La quatrième pré-expérimentation s'est déroulée avec un public étudiant. Le premier objectif est de tester la situation avec un public différent. Le second objectif est d'analyser plus en détail l'influence des connaissances mathématiques et de la culture mathématique dans la résolution de ce problème de recherche.

Contexte : L'expérimentation a eu lieu en novembre 2010 dans le même établissement et avec le même enseignant que les pré-expérimentations 1 et 2 mais avec un public différent : des étudiants en première année d'un cycle de trois ans de classe préparatoire aux grandes écoles de type TSI (Technologie et Sciences Industrielles), issus de filières technologiques ou professionnelles. Nous sommes intervenue au sein de la classe en tant qu'intervenante extérieure pour une séance ponctuelle de deux heures trente.

L'expérimentation a eu lieu deux mois après l'entrée des étudiants en première année de cette classe préparatoire aux grandes écoles. Durant ces premiers mois, ils ont reçu un enseignement de mathématiques basé sur des révisions des connaissances acquises lors de leurs études secondaires. L'enseignant a axé ses cours sur la diversité des activités mathématiques. Cependant, en deux mois, il nous a précisé que ces étudiants avaient peu pratiqué de telles

17. Nous reviendrons sur cette hypothèse que nous étayerons avec des retours d'élèves et d'étudiants dans le cadre d'autres expérimentations, voir p. 257.

activités. Pour l'analyse de cette expérimentation, nous nous appuyons donc sur les enseignements de mathématiques que ces étudiants ont suivis pendant leurs études secondaires en filière professionnelle.

Par rapport à une classe de terminale scientifique, les connaissances mathématiques et en particulier arithmétiques de ces étudiants sont moins nombreuses. Par exemple, l'arithmétique est absente des programmes de mathématiques des voies professionnelles et le calcul fractionnaire n'est pas mentionné (cf. BO n° 2 du 19 février 2009). Les connaissances identifiées comme utiles pour l'engagement dans la recherche du problème sont *a priori* disponibles, car étudiées dans les classes de collège, mais nous faisons l'hypothèse qu'elles peuvent être difficilement mobilisables par les étudiants. Le programme de mathématiques des filières professionnelles insistent sur une approche des mathématiques par des situations concrètes issues du domaine professionnel. La volonté d'introduire une notion théorique par une situation concrète vise à faciliter la compréhension et la maîtrise de concepts et en montrer l'efficacité (Rivoal, 2010 ; BO n° 5 du 29 août 2002 et BO n° 2 du 19 février 2009).

> Algèbre - Analyse. Ce domaine vise essentiellement la résolution de problèmes de la vie courante et professionnelle. Les situations choisies doivent permettre d'approcher les grands débats de société, autour du développement durable par exemple, et de traiter des problématiques parfaitement identifiées. Il est important également d'adapter les supports en fonction des métiers préparés afin de donner du sens aux notions abordées. Les connaissances et les capacités sous-jacentes sont réactivées au travers d'exemples concrets. (Extrait BO n° 2 du 19 février 2009 p. 4)

Nous faisons l'hypothèse que la pratique des mathématiques des étudiants issus des filières professionnelles est davantage appliquée que théorique. La résolution de problèmes de recherche n'est *a priori* pas travaillée. Notons que les programmes insistent sur la mise en place d'une démarche d'investigation. Les activités expérimentales et l'utilisation de l'outil informatique semblent incontournables (Rivoal, 2010). Ces éléments pourraient favoriser l'engagement des étudiants dans le problème par des procédures exploratoires.

Organisation didactique : La séance a duré deux heures trente, animée avec l'enseignant, selon le scénario 2 décrit p. 221. La classe compte 23 étudiants que nous avons répartis en sept groupes, selon le type de baccalauréat obtenu (bac technologique ou bac professionnel). Nous avons enregistré quatre groupes mais analysé en détail un seul groupe.

Choix des variables didactiques : Le tableau 6.16 présente les choix des variables didactiques effectués pour cette expérimentation.

Le choix des variables didactiques pour cette expérimentation s'est appuyé sur la prise en compte de la formation des étudiants. Issus de filières technologiques, les mathématiques ne sont pas leur matière privilégiée comme c'est le cas pour des élèves de terminale scientifique. Nous faisons l'hypothèse que leur bagage mathématique est moins riche et que leur pratique des mathématiques est différente (davantage technique et automatisée) de celle d'élèves issus de filières scientifiques générales. Dans le but de favoriser la compréhension du problème et l'engagement dans la recherche, nous avons choisi de ne pas indiquer le statut épistémique de la conjecture (variable 1) aux étudiants et de formuler l'énoncé de la manière suivante :

> Pour quels entiers naturels (non nuls) n, peut-on trouver trois entiers naturels (non nuls) a, b, c tels que : $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

V1 - Statut épistémique du problème	Non indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	a, b, c
V3 - Syntaxe de l'énoncé V3a - (prédicative, opératoire) V3b - (interrogatif, affirmatif)	 Opératoire Interrogatif
V4 - Indication sur le domaine d'exploration V4a - pour n V4b - pour a, b, c	 n entier naturel non nul a, b, c entiers naturels non nuls
V5 - a, b, c non nécessairement distincts	Non précisé
V6 - Séance préalable	Non
V7 - Outils technologiques V7a - Disponibilité de la calculatrice V7b - Disponibilité de l'ordinateur	 Oui Non
V8 - Aides écrites	Non

FIGURE 6.16 – Tableau des choix des variables didactiques pour la pré-expérimentation 4.

Nous avons choisi de préciser le domaine d'exploration des nombres en jeu (variable 4) en ajoutant qu'ils étaient *non nuls*. Cette valeur permet d'éviter des éventuelles difficultés liées à un questionnement sur la possibilité d'avoir des fractions du type « $\frac{1}{0}$ ». Une syntaxe sous forme opératoire et interrogative (variable 3) permet, d'une part d'inciter les étudiants à l'action et à l'exploitation du caractère expérimental du problème, et d'autre part à éviter le questionnement sur le cas particulier $n = 1$ dont les analyses précédentes montrent l'obstacle que son étude peut entraîner sur la recherche de la conjecture. Précisons que pour des raisons d'organisation et de matériel, nous n'avons pas pu mettre d'ordinateurs à disposition des étudiants.

Milieu matériel des étudiants : Le tableau 6.17 résume les éléments du milieu matériel des étudiants pour cette expérimentation.

Analyses : Les étudiants se sont facilement engagés dans le problème et la dévolution s'est maintenue tout au long de la séance. L'énoncé a été compris par tous les étudiants mais la formulation a fait émerger des questions sur la possibilité d'avoir des cas d'égalité entre a, b et c. Comme dans la pré-expérimentation 2, les travaux des différents groupes montrent que ce questionnement ne permet pas aux étudiants d'effectuer, seuls, un choix. Il devient alors un frein pour la recherche de la conjecture. Précisons que le choix de la valeur de la variable 3a (syntaxe de l'énoncé avec aspect opératoire) permet effectivement d'éviter le statut de contre-exemple du cas $n = 1$ tout en permettant l'étude de ce cas particulier.

Les résultats obtenus par les étudiants sont les suivants :

- Tous les groupes ont conjecturé qu'il existe une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes pour tout n multiple de 2. Cependant les preuves ont rarement été effectuées.
- Un groupe a démontré que $\frac{4}{n}$ se décompose en somme de trois fractions égyptiennes pour tout n multiple de 5 en utilisant la méthode de la plus grande fraction unitaire inférieure à $\frac{4}{n}$.

Organisation didactique	Scénario 2 (cf. p. 221) et tout type de document autorisé.
Connaissances mathématiques et heuristiques	*A priori* disponibles mais difficilement mobilisables.
Représentation de l'activité mathématique	*A priori* peu de connaissances sur l'activité de recherche mathématique.
Énoncé	Pour quels entiers naturels (non nuls) n, peut-on trouver trois entiers naturels (non nuls) a, b, c tels que : $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$?
Outils technologiques mis à disposition	Calculatrices de type TI-82, avec calcul fractionnaire sur des nombres de deux chiffres maximum.

FIGURE 6.17 – Tableau des éléments du milieu matériel des étudiants de la pré-expérimentation 4.

- Un groupe a trouvé des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour tout n multiple de 2, n multiple de 3 et n multiple de 5. Il présente ensuite une identité pour décomposer $\frac{4}{n}$ pour tout n : $\frac{4}{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}$. Il est précisé que c'est « Impossible pour $n = 1$ (car $\frac{4}{1-1} = \frac{1}{0}$) ».
- Un groupe pense avoir également démontré la conjecture pour tout n à l'aide des identités suivantes :
  - pour tout nombre entier naturel pair non nul, on a $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$.
  - pour tout nombre entier naturel impair $n \geq 1$, on a $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{4}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Les groupes, qui présentent une identité de décomposition pour tout n, pensent l'avoir démontrée et tentent de l'expliquer à la classe lors de la phase de débat. Notons que c'est la première fois que des élèves ou des étudiants présentent un tel résultat et pensent ainsi avoir démontré la conjecture (dans le cas où le statut épistémique du problème n'est pas indiqué). Nous avançons plusieurs raisons pour l'expliquer. En premier lieu, les étudiants ignorent que le problème est non résolu donc il n'est pas étonnant, pour eux, de trouver une réponse. La seconde raison est liée à leur pratique des mathématiques. Ces étudiants n'ont pas ou ont très peu pratiqué de recherche de problèmes mathématiques de ce type. La possibilité de ne pas trouver de solution ne semble pas imaginée. Enfin, les étudiants sont rarement entrés dans une démarche de preuve de leurs résultats. Lorsque cette phase de recherche a été abordée, un défaut de connaissances notionnelles et/ou de connaissances relatives à la preuve est entré en considération (ce point est étudié plus en détail dans la suite des analyses p. 248 puis p. 287).

Concernant les démarches mises en œuvre par les étudiants dans leurs recherches, elles ont été, au départ, majoritairement de type opératoire. Ils ont essayé des transformations de l'écriture de l'équation initiale, chercher à faire l'inverse de la somme des fractions, à écrire et résoudre un système d'équations, à faire un lien avec les suites arithmétiques, etc. Si dans certains groupes, les étudiants sont passés à des procédures s'appuyant sur la recherche de décompositions pour une valeur de n donnée, nous avons dû intervenir dans plusieurs groupes (3 sur 7) pour les inciter à faire des essais avec $n = 1, n = 2, n = 3$, etc. Ces groupes restaient sur des aspects algébriques et tournaient « en rond » comme en témoigne l'exemple suivant extrait de (M.-L. Gardes, 2012).

Exemple : Extrait de la recherche d'un groupe de trois étudiants.

Au début de leur recherche, ils transforment l'écriture de l'équation initiale (6.1) grâce à une réduction au même dénominateur puis à un produit en croix :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \tag{6.1}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{ab + bc + ac}{abc} \tag{6.2}$$

$$4abc = n(ab + bc + ac) \tag{6.3}$$

Un étudiant, E1, veut alors s'engager dans une procédure algébrique à partir de l'équation (6.3) mais l'étudiant E2 est sceptique :

> E1 : Mais à mon avis en fait, il faudrait trouver la valeur littérale de abc, la valeur littérale de n et la valeur littérale de $ac + ab + bc$ et après à tous les coups il y a des trucs qui se simplifient.
>
> E2 : Ouais mais il faut le trouver.
>
> E1 : On attaque ?
>
> E2 : Bah si tu veux mais je ne suis pas convaincu.

L'étudiant E1 suit quand même son idée : à partir de l'équation (6.3), il isole successivement n, abc et $bc + ac + ab$ qu'il va ensuite injecter dans (6.2). Il se rend compte alors qu'il obtient de nouveau l'équation (6.3) : « On retombe sur ce qu'on avait en fait. [...] On tourne en rond ». Le troisième étudiant, E3, propose alors une autre méthode : à partir de l'équation (6.1), il isole successivement $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ qu'il va ensuite injecter dans (6.1). Il obtient :

$$\frac{4}{n} = \frac{12abc - 2nac - 2nab - 2nbc}{nabc}$$

$$8abcn = 2n^2ac + 2n^2ab + 2n^2bc$$

$$4abc = n(ab + bc + ac)$$

Il retombe également sur l'équation (6.3) : « On retrouve, on tourne en rond ». Ces deux étudiants se sont engagés dans des méthodes uniquement syntaxiques et se rendant compte qu'ils tournent en rond, sont découragés. L'enseignant intervient alors pour les diriger vers la procédure de l'étudiant E2 qui cherche, de son côté, à décomposer $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{7}$ et $\frac{4}{3}$. En cherchant à décomposer $\frac{4}{46}$, l'étudiant E2 écrit (vingt minutes plus tard) « pour tout n pair, $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$ » et demande aux étudiants E1 et E3 de vérifier cette identité « avec n'importe quel chiffre ».

La majorité des étudiants s'est engagée dans le problème en utilisant uniquement l'outil algébrique, sans recourir à un point de vue sémantique en exploitant, par exemple, le caractère expérimental du problème. Ce constat fait écho aux travaux de Kouki (2008) sur l'*enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*, où il met en évidence que l'articulation des aspects syntaxiques et sémantiques dans les raisonnements mathématiques mis en œuvre par les élèves est une difficulté. Il a montré que les élèves mobilisent des techniques sémantiques lorsqu'elles sont recommandées explicitement par des types de tâches, alors que les techniques syntaxiques de résolution sont mobilisées dès qu'elles sont disponibles. De plus, ses analyses mettent en évidence la difficulté des élèves à éventuellement quitter le registre de l'algébrique dans la résolution de tâches pour lesquelles les théories ne leur sont pas accessibles.

> Le résultat qui nous semble peut-être le plus intéressant provient des analyses des réponses aux types de tâches pour lesquelles les techniques syntaxiques ne sont disponibles qu'à un niveau mathématique très élevé. Pour réussir à résoudre la tâche, aux niveaux que nous avons étudiés, il faut donc nécessairement faire appel à un point de vue sémantique et, éventuellement, quitter le registre algébrique. Dans ce cas, la plupart des élèves n'accèdent pas à la solution. (Kouki, 2008, p. 344)

Dans notre travail, une analyse détaillée des cursus suivis par les étudiants (programmes de mathématiques, manuels scolaires, sujets d'examen, etc.) permettrait de connaître davantage leur pratique des mathématiques et de comprendre en partie les raisons pour lesquelles l'exploration des exemples et les procédures de type empirique n'ont pas été exploitées, au profit des procédures algébriques.

Un autre point important à soulever est la conception de la preuve chez ces étudiants. Lors de la phase de débat, chaque groupe devait présenter ses résultats à l'ensemble de la classe et convaincre les autres groupes de la validité de ses résultats. La majorité des groupes pense avoir prouvé leurs résultats en les testant sur de nombreux exemples, comme en témoignent ces extraits du débat :

> *Le second groupe présente le résultat suivant : pour tout n pair,* $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$.
>
> P = professeur ; Ei = étudiants.
>
> P : Tout le monde est convaincu ?
>
> E1 : On ne se base pas sur des exemples même si c'est ce que j'ai fait. (rires)
>
> P : Ah, on ne se base pas sur des exemples.
>
> E2 : Mais il y a une formule là.
>
> [...]
>
> E3 : Oui mais après t'es bien obligé de prendre un exemple, il faut prouver de toute façon.
>
> P : Oui et tu la prouves comment ?
>
> E3 : Bah avec un exemple. (rires)
>
> P : Tout le monde est d'accord, on prouve la formule comme ça, avec un exemple ?
>
> E1 : On va dire que oui.
>
> E4 : On regarde plusieurs exemples et on regarde si ça fait la même chose.
>
> E5 : Sinon, si on reste en littéral, ça fait $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}$ donc ça fait toujours $\frac{4}{n}$.
>
> *A l'issue de cette discussion, l'enseignant insiste sur le fait que pour prouver ce résultat, les exemples ne constituent pas une preuve. Dix minutes plus tard, le cinquième groupe présente le résultat suivant : pour tout n multiple de 5,* $\frac{4}{5n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{20n}$.
>
> E6 : En fait ça marche pour tous les multiples de 5.
>
> P : C'est vrai ça ?
>
> E6 : Bah ouais. (rires)
>
> P : Et on fait comment pour savoir que c'est vrai ?
>
> E7 : On prend un exemple.
>
> E6 : Bah on a pris un exemple, on a pris avec tous les multiples de, on a été jusqu'à, je ne sais plus, $n = 10$ je crois ou 15 et ça marche.
>
> P : Tout le temps ?
>
> E6 : Oui.

P : Si je prends 1 472 505 ça marche ?

E6 : Ouais bien sûr, c'est obligé.

L'étudiant E6, avec l'aide de l'enseignant, effectue ensuite la preuve de ce résultat en mettant les trois fractions au même dénominateur et en vérifiant que la somme fait bien $\frac{4}{5n}$. *Cinq minutes plus tard, le sixième groupe présente le résultat suivant : pour tout n multiple de 3,* $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{2n}{3}} + \frac{1}{\frac{2n}{3}}$.

E8 : On a testé avec que des multiples de 3, ça marche.

P : Et c'est vrai ça ?

E8 : Ouais, ouais on a testé, ça marche [...].

L'étudiant ajoute rapidement qu'il faut le prouver et commence à effectuer une réduction au même dénominateur pour prouver sa formule.

Ces extraits du débat montrent que cette conception de la preuve est très ancrée chez ces étudiants puisque à trois reprises, les discussions reviennent sur la question de la preuve par les exemples. Cette phase aura permis à l'enseignant, d'une part de mettre au jour cette difficulté pour ses étudiants, et d'autre part de travailler cet aspect avec eux.

Conclusion de la pré-expérimentation 4 : Cette expérimentation a permis de confirmer notre hypothèse issue des pré-expérimentations précédentes : la culture mathématique et le bagage mathématique disponible des élèves et des étudiants a un impact à deux niveaux, sur la dévolution de la recherche d'une part et sur la recherche en elle-même (démarche et résultats) d'autre part. Pour assurer la dévolution du problème tout au long de la recherche, des connaissances mathématiques minimales couplées à une certaine représentation des mathématiques semblent suffisants. Dans le cas de la conjecture d'Erdös-Straus, il s'agit de connaissances notionnelles (nombres, fractions, calcul fractionnaire, multiples) et heuristiques (statut épistémique d'une conjecture, rôle d'un contre-exemple, nature d'une preuve) d'une part et d'une représentation de la nature de l'activité de recherche mathématique d'autre part. Pour produire des résultats et avancer dans l'étude de la résolution du problème, ces éléments ne semblent plus suffisants. Il semble en effet important de disposer d'un bagage mathématique mobilisable plus riche (par exemple connaître les notions de parité, congruences ou divisibilité) et de pratiquer régulièrement et fréquemment des résolutions de problèmes de recherche (ce qui permet, par exemple, de savoir qu'on peut chercher longtemps un problème, qu'il faut accepter de n'avoir éventuellement que des résultats partiels, que changer de point de vue est une piste de recherche souvent fructueuse). Il semble donc important de constituer le milieu matériel des élèves, d'une part avec des éléments favorisant la dévolution de la recherche du problème, et d'autre part avec une perspective d'évolution au cours de la recherche vers un milieu favorisant l'avancée de la recherche avec production de résultats.

Pré-expérimentation 5

La cinquième pré-expérimentation est une expérimentation de type laboratoire, c'est-à-dire dans un contexte hors-scolaire et avec un petit nombre de sujets volontaires. Le but d'une telle expérimentation est de neutraliser certains paramètres dûs à la classe (autres élèves, enseignant, durée de la séance) afin d'analyser précisément d'autres éléments (par exemple le paramètre « temps ouvert » et les effets de la recherche individuelle sur la recherche collective).

Les deux objectifs de cette expérimentation en laboratoire sont les suivants :
- analyser l'effet de la variable macro-didactique 1 (durée et nombre de séances de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus) ;
- analyser finement l'évolution du milieu au cours de la recherche et en particulier, l'influence du bagage mathématique et de la culture mathématique sur cette évolution.

Contexte : Nous avons organisé cette expérimentation de type laboratoire avec trois étudiants de l'université Claude Bernard Lyon 1. Deux étudiantes suivent les cours de troisième année de licence, parcours mathématiques pour l'enseignement et un étudiant est en troisième année de licence, parcours informatique. Ces étudiants sont volontaires pour effectuer cette expérimentation, en dehors de leur emploi du temps habituel. Nous les avons sollicités lors du cours d'Histoire, Épistémologie et Didactique des Mathématiques (HEDM) que nous dispensons dans le parcours mathématiques pour l'enseignement.

Les étudiants étant en troisième année de licence mathématiques ou informatique, les connaissances mathématiques et heuristiques identifiées comme utiles à la dévolution du problème sont *a priori* dans le milieu matériel initial. Concernant la pratique d'activités de recherche mathématique, nous faisons l'hypothèse qu'elle n'est pas régulière et habituelle pour ces étudiants. Le cursus universitaire laisse effectivement peu de place à ce type d'activités mathématiques avant le stage de recherche de master 2.

Organisation didactique : Le choix d'analyser l'effet de la variable macro-didactique 1 (durée et nombre de séances) est motivé par trois raisons :
- observer si un dispositif en temps long permet de prendre en compte le facteur « temps ouvert » dans une recherche de problèmes effectuée par des élèves ou des étudiants ;
- observer si le processus de création décrit par de nombreux mathématiciens peut être approché par des élèves ou des étudiants en situation de recherche de problèmes ;
- analyser plus en détail les processus de recherche mis en œuvre par les étudiants.

Pour cela, nous avons choisi de mettre en œuvre le scénario 4 décrit p. 221, composé de trois séances de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Les deux premières séances sont espacées de quinze jours puis une semaine s'est écoulée entre la séance 2 et la séance 3. Une quatrième séance a été consacrée à un entretien post-expérimentation avec les étudiants afin de recueillir des informations complémentaires sur leur démarche de recherche et leur vécu de l'expérimentation (motivation, travail effectué, apports éventuels de cette expérience pour eux, activité de recherche de problèmes et enseignement). Elle a eu lieu trois semaines après la fin des séances de recherche.

Nous avons enregistré toutes les séances de recherche et de débat et recueilli différentes productions écrites : brouillons, compte-rendus, affiche finale exposant les résultats ainsi que des productions informatiques : algorithmes et figures sous le logiciel GeoGebra.

Choix des variables didactiques : Le tableau 6.18 présente les choix des variables didactiques effectués pour cette expérimentation.

V1 - Statut épistémique du problème	Non indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	a, b, c
V3 - Syntaxe de l'énoncé V3a - (prédicative, opératoire) V3b - (interrogatif, affirmatif)	 Opératoire Interrogatif
V4 - Indication sur le domaine d'exploration V4a - pour n V4b - pour a, b, c	 n entier naturel non nul a, b, c entiers naturels non nuls
V5 - a, b, c non nécessairement distincts	Précisé
V6 - Séance préalable	Non
V7 - Outils technologiques V7a - Disponibilité de la calculatrice V7b - Disponibilité de l'ordinateur	 Oui Oui
V8 - Aides écrites	Non

FIGURE 6.18 – Tableau des choix des variables didactiques pour la pré-expérimentation 5.

Pour cette expérimentation, nous avons choisi d'analyser l'effet de la variable didactique 5 sur la formulation de l'énoncé en choisissant de préciser que les solutions a, b, c sont *non nécessairement distinctes*. Les autres variables didactiques relatives à la forme de l'énoncé (variables 3 et 4) n'ont pas été modifiées par rapport à la pré-expérimentation 4 (forme opératoire et interrogative de l'énoncé et n, a, b, c non nuls). L'énoncé proposé est le suivant :

> Pour quels entiers naturels (non nuls) n, peut-on trouver trois entiers naturels (non nuls et non nécessairement distincts) a, b, c tel que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

Nous avons fait ce choix à cause de la difficulté (relevée dans les pré-expérimentations 2 et 4), pour certains élèves, de statuer sur une possible égalité des valeurs de a, b, c. Les analyses ayant montré que le questionnement n'apportait pas d'éléments pertinents pour la recherche du problème, nous avons voulu observer si cet ajout avait une influence significative sur la compréhension de l'énoncé puis sur la recherche du problème.

Nous avons également joué sur la variable didactique 7a (disponibilité d'un ordinateur) en permettant aux étudiants d'avoir accès à un ordinateur. Comme l'un d'entre eux est en licence informatique, nous faisons l'hypothèse que la disponibilité d'un ordinateur peut favoriser l'exploitation de l'aspect algorithmique du problème. Précisons que ce choix a été techniquement possible car il s'agit d'une expérimentation de type laboratoire, c'est-à-dire avec un petit nombre d'étudiants, dans une salle adéquate, sans contrainte institutionnelle.

Milieu matériel des étudiants : Le tableau 6.19 résume les éléments du milieu matériel des étudiants pour cette expérimentation.

Organisation didactique	Scénario 4 (cf. p221) et tout type de document autorisé.
Connaissances mathématiques et heuristiques	Disponibles et *a priori* mobilisables.
Représentation de l'activité mathématique	*A priori* peu de connaissances sur l'activité de recherche mathématique.
Énoncé	Pour quels entiers naturels (non nuls) n, peut-on trouver trois entiers naturels (non nuls et non nécessairement distincts) a, b, c tel que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?
Outils technologiques	Calculatrices programmables et ordinateurs
Élément particulier	Synthèse écrite à la fin de chaque séance.

FIGURE 6.19 – Tableau des éléments du milieu matériel des étudiants de la pré-expérimentation 5.

Analyses : Les étudiants se sont engagés facilement dans la résolution du problème et la dévolution de la recherche s'est bien réalisée sur l'ensemble des séances. Nous avons pu relever des moments de découragement, mais vite suivis de phases où de nouvelles idées ont relancé la recherche. Par exemple, à la fin de la séance 2, les étudiants ne savent plus comment avancer dans la recherche et pensent être dans une impasse. Cependant, au début de la séance 3, deux étudiants arrivent avec de nouvelles pistes de recherche, l'une algorithmique et l'autre géométrique. Cela relance immédiatement la recherche collective pour cette séance.

La formulation de l'énoncé permettant d'éviter le questionnement sur les cas d'égalité de a, b et c a produit un effet inattendu sur la recherche des trois étudiants. Ils ont débuté leur recherche en étudiant successivement les cas où $a = b = c$, où $a = b$ et $a \neq c$ et où a, b, c sont deux à deux distincts. Leur recherche s'est alors focalisée sur l'étude de a, b et c donnant une valeur entière de n. Cela les a conduit à énoncer des « réciproques » de résultats partiels de la conjecture d'Erdös-Straus, du type : si $a = b = c = 3k$ alors $n = 4k$ pour tout k entier naturel. Mais ils n'ont pas vu qu'ils pouvaient démontrer ainsi que la conjecture avait des solutions pour tous les multiples de 4. On peut donc constater qu'ajouter les termes « non nécessairement distincts » modifie davantage le milieu que ce que l'on avait prévu.

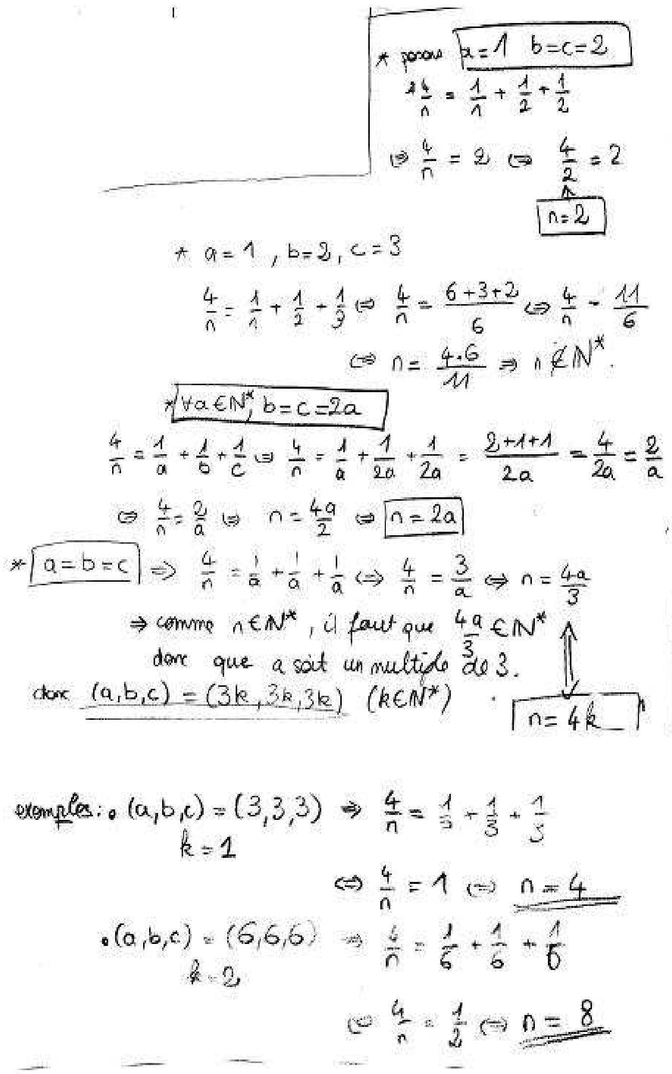
Les résultats présentés par les étudiants à la fin de l'expérimentation ne sont pas nombreux :

Résultat 1 : $a = b = c = 3k \Longrightarrow n = 4k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Résultat 2 : $2a = b = c \Longrightarrow n = 2a$.

Ces résultats ont été obtenus par une étudiante lors de sa recherche individuelle, par des manipulations algébriques, articulées avec des exemples (cf. figure 6.20).

Lors du débat, lorsque nous leur demandons quelle est leur réponse à la question « quels sont les entiers n pour lesquels il existe une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes », ils se rendent compte qu'ils n'ont pas de réponse et comprennent qu'ils auraient dû étudier les réciproques des résultats qu'ils avancent. Leurs affiches mentionnent également leur principale piste de recherche, à savoir « étudier le cas $a \neq b \neq c$ puis $\forall a, b = c$ ». Pour le premier cas, ils précisent qu'ils n'ont pas trouvé de conditions « à la main » mais que des



* posons $\boxed{a=1 \quad b=c=2}$

$\frac{4}{n} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{n} = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{2}=2$

$\boxed{n=2}$

* $a=1$, $b=2$, $c=3$

$\frac{4}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{n} = \frac{6+3+2}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{n}=\frac{11}{6}$

$\Leftrightarrow n=\frac{4\cdot 6}{11} \Rightarrow n\notin\mathbb{N}^*$.

* $\boxed{\forall a\in\mathbb{N}^*, b=c=2a}$

$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a} = \frac{2+1+1}{2a} = \frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{n}=\frac{2}{a} \Leftrightarrow n=\frac{4a}{2} \Leftrightarrow \boxed{n=2a}$

* $\boxed{a=b=c} \Rightarrow \frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{4}{n}=\frac{3}{a} \Leftrightarrow n=\frac{4a}{3}$

$\Rightarrow$ comme $n\in\mathbb{N}^*$, il faut que $\frac{4a}{3}\in\mathbb{N}^*$

donc que a soit un multiple de 3.

donc $(a,b,c)=(3k,3k,3k)$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ $\boxed{n=4k}$

exemples : • $(a,b,c)=(3,3,3)$ $\Rightarrow \frac{4}{n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

$k=1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{n}=1 \Leftrightarrow n=4$

• $(a,b,c)=(6,6,6)$ $\Rightarrow \frac{4}{n}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$

$k=2$

$\Leftrightarrow \frac{4}{n}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow n=8$

FIGURE 6.20 – Recherche individuelle d'une étudiante de Licence 3e année.

solutions ont été trouvées à l'aide d'un algorithme qui fait varier a, b et c entre 1 et 100 et qui ne donne que les décompositions pour lesquelles n est un entier. Pour le second cas, ils précisent qu'ils l'avaient exclu lors de leurs études « à la main » mais que l'algorithme trouve des solutions (par exemple $a = 42, b = c = 63, n = 72$). Cette explicitation montre que, dans un premier temps, leur recherche était uniquement algébrique (en essayant différentes pistes) et conduisait souvent à des impasses. Puis, dans un second temps, c'est l'articulation entre leurs recherches de type algébrique (celles qu'ils qualifient de « à la main ») et leurs recherches plus empiriques (avec l'algorithme) qui leur a permis d'avancer dans l'étude du problème.

Concernant les connaissances mathématiques notionnelles des étudiants, nous avons relevé que certaines connaissances *a priori* disponibles ne sont pas ou sont peu mobilisées. Par exemple, les nombres premiers n'ont pas été évoqués, de même que la propriété *tout entier n supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier* ou le théorème des restes chinois. Nous faisons l'hypothèse que cela peut être lié à la piste de recherche qu'ils ont empruntée (chercher des valeurs de a, b, c donnant n entier naturel) qui n'est pas axée sur le domaine d'exploration de n. D'autre part, le calcul sur les congruences et la divisibilité sont disponibles mais difficilement manipulés par les étudiants. Les notions mobilisées par ces étudiants sont donc comparables à celles mobilisées par des élèves de terminale scientifique. Les connaissances d'arithmétique supplémentaires acquises à l'université (calcul modulaire, théorème des restes chinois) ne semblent pas mobilisables. Une hypothèse pour expliquer cela est qu'ils ne sont pas habitués à convoquer leurs connaissances dans ce contexte particulier de résolution de problèmes de recherche. En effet, concernant leur pratique des mathématiques, les étudiants nous ont dit, lors de l'entretien post-expérimentation, qu'ils n'avaient jamais fait d'activité de résolution de problèmes de recherche au cours de leur scolarité.

Conclusion de la pré-expérimentation 5 : Un des objectifs de cette expérimentation était l'analyse de l'influence de la valeur de la variable macro-didactique 1 sur la durée et le nombre de séances de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Les analyses des travaux des étudiants montrent qu'il est possible de construire un scénario avec plusieurs séances de recherche de deux heures et d'assurer la dévolution de la recherche sur un temps long. Dans l'entretien post-expérimentation, les étudiants mentionnent qu'ils auraient aimé disposer d'une séance supplémentaire pour étudier plus en détail leur dernière piste de recherche (algorithmique) et espérer ainsi avancer dans l'étude du problème en trouvant des résultats. L'espacement de ces séances (entre une et deux semaines) semble bénéfique pour la recherche comme en témoigne la réponse d'une étudiante à la question : le temps entre deux séances vous a-t-il apporté quelque chose ?

> On a le temps de laisser reposer et parfois il y a des trucs qui reviennent.

Cette période de quelques jours entre les séances a aussi permis aux étudiants de continuer certaines recherches chez eux, par exemple d'explorer une piste de recherche avec l'utilisation de GéoGebra ou avec la programmation d'un algorithme. Ces éléments confirment qu'un scénario construit sur un temps long, avec plusieurs séances de recherche, permet d'approcher certaines modalités du travail du chercheur telles que le rôle important du temps dans la recherche et l'importance de différentes phases de recherche (individuelle, collective, période de travail active, période de repos).

Concernant la mise en place d'outils méthodologiques pour assurer la continuité des recherches entre les séances, nous avons observé que la rédaction d'une synthèse des recherches à la fin de chaque séance est utile mais pas suffisante. En effet, elle a permis aux étudiants d'aborder plus facilement la séance suivante mais elle a montré ses limites pour la mémoire des travaux. La synthèse ne mentionne que les résultats principaux et les pistes de recherche qui restent à explorer. Les idées qui ont précédé les résultats, les raisonnements qui ont conduit à établir un résultat ou à le prouver ne sont pas repris. Si les brouillons ne sont pas conservés, ces éléments peuvent être oubliés, ce qui peut être un frein à la poursuite de la recherche. Cet outil de suivi peut donc être amélioré, notamment en l'associant à la tenue d'un cahier de bord personnel pour consigner toute trace de recherche, brouillons et synthèses.

Concernant le choix des variables didactiques, à l'issue de cette expérimentation, nous faisons le choix d'abandonner la valeur « a, b, c sont non nécessairement distincts » de la variable didactique V5. L'influence que cette valeur peut avoir sur la direction des recherches prise par les étudiants nous semble constituer un frein plus important pour la recherche de la conjecture que le questionnement sur la possibilité d'avoir des cas d'égalité entre a, b et c.

Un autre objectif de cette expérimentation était d'analyser l'évolution du milieu et en particulier, l'influence de la culture mathématique et des connaissances mathématiques des étudiants sur la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus. Les analyses des travaux des étudiants semblent confirmer notre hypothèse : les connaissances mathématiques (notionnelles et heuristiques) identifiées comme utiles à l'engagement dans le problème et une représentation de la nature de l'activité de recherche mathématique semblent suffisantes pour réaliser la dévolution de la recherche du problème. En revanche, elles semblent insuffisantes pour avancer dans la recherche et produire des résultats partiels sur la conjecture. Pour ces étudiants, le manque d'expérience de résolution de problèmes de recherche et la difficulté à mobiliser certaines connaissances mathématiques notionnelles (par exemple la divisibilité ou le calcul modulaire) semble être un frein à l'avancée dans le problème et à la production de résultats, même partiels.

6.4 Apports des pré-expérimentations pour l'analyse *a priori*

La mise en œuvre des cinq pré-expérimentations nous a permis de jouer sur la valeur des variables macro-didactiques et des variables didactiques d'une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. La confrontation à la contingence a mis en évidence l'influence de ces valeurs sur le choix d'un scénario, sur la présentation et la formulation de l'énoncé et sur les outils technologiques à mettre à disposition. Nous avons également pu observer l'évolution du milieu matériel des élèves. Dans cette partie, nous synthétisons les choix que nous avons effectués sur l'organisation didactique et sur le choix des valeurs des variables didactiques, puis nous décrivons les apports pour l'évolution du milieu.

6.4.1 Sur l'organisation didactique

L'analyse des pré-expérimentations a montré que l'organisation didactique de situations autour de la conjecture d'Erdös-Straus peut prendre en compte différents aspects du travail du chercheur et permettre aux élèves d'approcher leur position dans le cadre de résolution de problèmes de recherche. Le rapport au temps d'une recherche, la dimension sociale de l'activité de recherche et le processus de création peuvent ainsi être approchés par une situation de recherche de problèmes sur une durée longue avec plusieurs phases de recherche variées. En revanche, l'importance de la documentation dans le travail des mathématiciens semble être une limite à la référence au travail des chercheurs. Les élèves consultent peu de documents. Ils font parfois référence à leurs cours, exercices et devoirs de mathématiques, sans toutefois les consulter. La difficulté semble, pour eux, de cibler ce qui pourrait être utile et de voir comment le mettre en relation avec le problème cherché. L'extrait suivant, issu d'une conversation entre trois élèves de l'expérimentation 2, illustre cette difficulté. Ils font référence à la séance précédente, à savoir la recherche d'un problème autour des fractions égyptiennes (cf p. 234) :

E1 : Ça ne va pas nous aider.

E2 : Ça n'a rien à voir.

E3 : Ah bon ?

Nous choisissons toutefois de maintenir un accès à tout type de documents dans une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Concernant l'usage d'Internet, nous n'avons jamais essayé, dans les pré-expérimentations, de le rendre accessible aux élèves ou aux étudiants. Il pourrait être intéressant, pour modifier le rapport à la documentation, d'en autoriser un accès limité (par exemple consultation d'encyclopédies ou de dictionnaires), pendant les séances de recherche en classe.

Les cinq pré-expérimentations ont permis de tester les quatre scénarios possibles pour mettre en œuvre des situations autour de la conjecture d'Erdös-Straus. La confrontation à ce terrain expérimental permet d'affiner le choix des valeurs des variables macro-didactiques de situations de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous reprenons ci-dessous les trois variables macro-didactiques identifiées dans le chapitre 6 en précisant les modifications apportées.

Variable macro-didactique 1 : durée et nombre de séances - (une séance unique d'au moins deux heures, plusieurs séances d'au moins deux heures). Nous modifions la seconde valeur de cette variable en fixant le nombre minimum de séances de recherche effective sur la conjecture dans le cadre d'une situation se déroulant sur une durée longue. Nous le fixons à trois : une séance de recherche individuelle et mise en commun au sein d'un groupe, une séance de recherche par groupes et une séance de recherche par groupes avec préparation d'une mise en commun au sein de la classe. En fonction du temps disponible de la classe pour cette activité, de la réalisation de la dévolution de la recherche et de l'avancée des élèves dans l'étude du problème, le nombre de séances fixé *a priori* peut éventuellement évoluer au cours d'une expérimentation. Il peut être diminué si la dévolution ne se réalise pas ou si les élèves n'avancent pas dans l'étude du problème ou au contraire, il peut être augmenté si les élèves semblent avoir besoin d'une séance supplémentaire pour approfondir une piste de recherche et avancer dans la production de résultats partiels.

Variable macro-didactique 2 : variété des différentes phases de la recherche. Dans la mesure du possible, nous fixons cette variable à la valeur *présence d'une phase de débat*. Dans le cas d'une situation se déroulant sur une unique séance, nous proposons de prévoir trente minutes pour la phase de mise en commun et de débat au sein de la classe. La durée de la situation est alors au minimum de deux heures trente. Dans le cas d'une situation se déroulant sur plusieurs séances, nous proposons de prévoir une séance de deux heures avec deux phases : une phase de mise en commun et de débat au sein de la classe et une phase de rédaction d'une synthèse des recherches par la classe.

Variable macro-didactique 3 : modalité de la phase de synthèse. Dans la mesure du possible, nous fixons cette variable à la valeur *phase faisant l'objet d'une séance particulière*. Ce choix permet, d'une part de faciliter l'élaboration de la phase de synthèse à partir des productions des élèves au fur et à mesure des séances de recherche, et d'autre part de développer et d'approfondir les quatre aspects identifiés pour réaliser une synthèse sur la recherche de la conjecture, à savoir, un retour sur les travaux effectués par des élèves, une présentation des travaux des chercheurs sur le problème, une mise en relation entre les travaux des élèves et ceux des mathématiciens et une séance de travail autour de problèmes issus de questions posées par les élèves au cours de l'étude de la conjecture. Ce dernier point nous semble particulièrement important, tant pour l'enseignant que pour les élèves, car il permet de mettre en valeur les travaux effectués par les élèves, les notions mathématiques travaillées ainsi que les compétences heuristiques développées. Il montre la légitimité de ce type d'activité mathématique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Le choix de ces valeurs des variables macro-didactiques, nous conduit à conserver uniquement deux scénarios. Pour une situation se déroulant sur une unique séance de recherche, nous proposons le scénario 2 (décrit p. 221), avec l'ajout, dans la mesure du possible, d'une séance particulière pour la phase de synthèse. Pour une situation se déroulant sur plusieurs séances de recherche, nous proposons le scénario 4 (décrit p. 221) en prévoyant une séance particulière pour la phase de synthèse. D'autre part, le nombre de séances de recherche (au minimum trois), fixé *a priori*, peut évoluer au cours de la situation, être diminué ou augmenté. Précisons également que, dans ce scénario, la mise en place d'outils méthodologiques pour permettre aux élèves de maintenir une continuité dans leur recherche est importante ; d'une part pour garantir une mémoire de leurs travaux, et d'autre part pour relancer les recherches d'une séance à l'autre. L'analyse de la pré-expérimentation 5 montre que la rédaction d'une synthèse à la fin de chaque séance est un outil pertinent mais non suffisant. Nous choisissons d'ajouter la tenue d'un cahier de bord personnel pour chaque élève, où toute trace de recherche est consignée (brouillon personnel, brouillon collectif, synthèse collective, etc.).

6.4.2 Sur le choix des variables didactiques

La réalisation de cinq pré-expérimentations nous a permis de modifier ou fixer certaines valeurs des huit variables didactiques d'une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous faisons ci-dessous une synthèse des modifications apportées à ces variables didactiques.

La variable didactique 2 (lettres pour désigner les solutions) n'a pas été étudiée dans les pré-expérimentations puisque nous n'avons pas modifié sa valeur. Nous avions fait le choix de désigner les solutions par a, b, c plutôt que par x, y, z pour mettre en évidence la nature de ces nombres. Les analyses montrent que les élèves et les étudiants sont conscients de travailler avec des nombres entiers lors de la recherche de la conjecture. Nous choisissons de conserver cette valeur.

Grâce aux pré-expérimentations, nous avons fixer les valeurs des variables didactiques 6 (séance préalable) et 8 (aides écrites). Nous abandonnons la mise en place d'une séance préalable de recherche de problème autour des fractions égyptiennes ainsi que la possibilité d'introduire dans le milieu des élèves des aides écrites.

Pour la variable didactique 1 (statut épistémique du problème), nous avions envisagé *a priori* deux réactions possibles des élèves lorsque le statut épistémique du problème leur est indiqué. Certains peuvent être galvanisés par le défi représenté par la recherche du problème alors que d'autres peuvent être démotivés, ne pouvant rivaliser avec les recherches des mathématiciens. Au cours de différentes expérimentations, nous avons recueilli des éléments qui confirment cette hypothèse.

Exemple 1 : Extrait de conversations de l'entretien post-expérimentation avec les étudiants de l'expérimentation 5 concernant leurs probables réactions s'ils avaient su que le problème était non résolu par la communauté mathématique.

E1 : On aurait moins cherché je pense.

E2 : Ouais, cela nous aurait découragé.

E3 : Non.

E1, E2 : Non ?

E3 : Non, curiosité jusqu'au bout.

E1 : Oui mais tu va contrer des chercheurs que ça fait des années qu'ils sont dessus ?

E3 : Mais avec un peu de chance.

[...]

E2 : Ça m'aurait moins motivée.

E1 : Car on était persuadé qu'à un moment on allait arriver à un truc et bim, c'était quasi pas toutes les solutions mais...

E2 : Proche en tout cas.

Les étudiantes E1 et E2 pensent que l'indication du statut épistémique du problème les aurait démotivées et que cela aurait eu un impact sur leur recherche. Le fait qu'elles aient été persuadées à un moment de leur recherche qu'elles trouveraient des solutions semble avoir été moteur. Elles évoquent également le travail des mathématiciens avec lesquels elles ne peuvent pas rivaliser. Au contraire, l'étudiant E3, pense que, par curiosité, il aurait cherché le problème et que cela n'aurait pas eu d'influence sur sa démarche de recherche (« J'aurai fait pareil »). Des éléments similaires sont évoqués par des élèves de terminale scientifique.

Exemple 2 : Extraits de réponses d'élèves de terminale scientifique d'une expérimentation de type laboratoire[18] menée dans un lycée français à Tunis en mai 2013.

> Question : Si vous en aviez été avertis [que le problème était non résolu], que pensez-vous que cela aurait modifié dans votre travail ?
>
> Réponse 1 : Cela nous aurait sûrement excités de savoir que nous potassions sur un problème ouvert. Toutefois, à mon avis, cela nous aurait rendus plus réalistes quant à l'aboutissement de nos recherches, et donc moins motivés.
>
> Réponse 2 : Je pense que oui, en quelque sorte, dans la mesure où on aurait eu tendance à peut-être considérer la partie comme perdue d'avance, si, même la « communauté mathématique » n'est pas encore parvenue à des solutions. Je crois qu'on aurait été moins motivés. Comme je l'ai dit, je pensais, jusque ce vendredi, qu'on arriverait à le résoudre, parce qu'on avait réussi à éliminer la moitié des nombres, dès la première semaine. Mais bien sûr, les choses n'étaient pas aussi simples qu'elles n'y paraissaient.
>
> Réponse 3 : Peut-être aurais-je été moins motivé pour trouver une solution. Après tout, on se serait nécessairement dit : si la communauté mathématique toute entière n'a pas résolu ce problème, pourquoi je pourrais moi le résoudre ?
>
> Réponse 4 : J'aurais sûrement eu une perception complètement différente de notre travail. Mais je pense que, dans le fond, notre démarche n'aurait pas vraiment changé.

La valeur de cette variable semble donc difficile à fixer *a priori*. Cependant nous faisons l'hypothèse qu'un milieu spécifique (par exemple une pratique réelle d'activités de recherche mathématique, des notions d'histoire et d'épistémologie des mathématiques) peut permettre d'anticiper certains effets, notamment sur l'engagement dans le problème et la dévolution de la recherche. Cette hypothèse sera testée dans l'expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique (cf. chapitres 8 et 9).

Les variables didactiques 3 à 5 (syntaxe de l'énoncé, indication sur le domaine d'exploration et précision sur les solutions) sont relatives à la formulation de l'énoncé. A l'issue des pré-expérimentations, nous retenons deux énoncés pour proposer la conjecture d'Erdös-Straus à des élèves ou à des étudiants :

> **Énoncé 1** : Pour tout n supérieur ou égal à 2, on peut trouver trois entiers naturels non nuls a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
>
> **Énoncé 2** : Pour quels entiers naturels n, peut-on trouver trois entiers naturels non nuls a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

Le choix de l'énoncé est lié au choix de la variable didactique 1 : si le statut épistémique du problème est indiqué aux élèves, nous proposons l'énoncé 1 et si le statut épistémique du

18. Cette expérimentation a été construite par un collègue enseignant de mathématiques dans un lycée français à Tunis. Elle s'est déroulé avec cinq élèves pendant 4 semaines à raison d'une séance de deux heures par semaine.

problème n'est pas indiqué aux élèves, nous choisissons l'énoncé 2. Nous faisons l'hypothèse que l'énoncé 2, par sa syntaxe (opératoire et interrogative), dissimule davantage l'aspect non résolu du problème et que la formulation de l'énoncé 1, qui est sous forme affirmative, est plus proche de celle utilisée dans la littérature. Dans ces deux énoncés, la forme opératoire de la seconde assertion incite à explorer le problème par l'action. Dans l'énoncé 2, la forme interrogative et la forme opératoire de la première assertion renforcent cet aspect en invitant explicitement à l'étude de cas par disjonction (étudier pour quelles valeurs de n la décomposition existe et pour quelles valeurs de n elle n'existe pas). Dans les deux formulations, l'étude du cas particulier $n = 1$ peut émerger : la forme de l'énoncé 1 incite à comprendre les raisons pour lesquelles le domaine d'exploration de n commence à 2 et l'énoncé 2 incite à faire une disjonction de cas sur toute valeur de l'entier n. Notons enfin que dans les deux énoncés, nous ne précisons pas que les nombres a, b et c sont non nécessairement distincts.

Concernant la variable didactique 7 sur les outils technologiques, les pré-expérimentations ont montré que les élèves utilisent très souvent leur calculatrice pendant la recherche du problème. C'est surtout la fonction calcul fractionnaire qui est utilisée, notamment pour chercher et/ou vérifier des solutions pour une valeur de n donnée, comme le précisent ces élèves de terminale scientifique (expérimentation 2) :

- Oui j'ai utilisé la calculatrice au début par tâtonnement.
- Cela m'a aidé pour trouver plusieurs solutions pour ensuite les regrouper.
- Oui j'ai utilisé ma calculatrice pour trouver quelques termes et pouvoir en déduire une relation et pour confirmer que notre hypothèse fonctionne.
- Pour vérifier les calculs.
- La calculatrice m'a aidée dans le sens où les calculs sont effectués plus rapidement qu'à la main.

L'utilisation d'une calculatrice (avec calcul fractionnaire) favorise l'exploitation du caractère expérimental du problème et les démarches de recherche constructives de solutions. Les élèves ayant une calculatrice programmable mentionnent également l'utilisation de la fonction calcul formel pour simplifier et vérifier des expressions numériques. Nous faisons le choix de conserver la mise à disposition d'une calculatrice et si possible, d'une calculatrice programmable. Concernant la disponibilité d'un ordinateur, pour des raisons essentiellement techniques, nous n'avons proposé un accès à un ordinateur qu'aux étudiants de la pré-expérimentation 5. Nous faisons l'hypothèse que la mise à disposition d'un ordinateur peut favoriser une exploitation algorithmique du problème, nous choisissons donc de mettre à disposition des élèves, dans la mesure du possible, un ordinateur lors des séances de recherche sur la conjecture.

Pour résumer, nous fixons les valeurs des variables didactiques 2 (a, b, c pour désigner les solutions), 6 (pas de séance préalable), 7 (mise à disposition de calculatrices programmables et d'ordinateurs) et 8 (pas d'aides écrites) et nous conservons, deux valeurs (hybride, affirmatif) et (opératoire, interrogatif) pour la syntaxe de l'énoncé (variable didactique 3) , deux valeurs ($n \geq 2$, a, b, c non nuls) et (n entier naturel, a, b, c non nuls) pour le domaine d'exploration de n et des solutions (variable didactique 4) et une seule valeur (a, b, c non nécessairement distincts non précisé) pour la variable didactique 5. Les choix de ces valeurs étant liés, ils ne donnent que les deux énoncés présentés ci-dessus.

6.4.3 Sur l'évolution du milieu

L'analyse des pré-expérimentations a montré que les éléments (connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques et une représentation de l'activité de recherche mathématique cf. p. 222) identifiés comme utiles pour pouvoir manipuler les objets en jeu dans le problème sont suffisants. Ils permettent, d'une part de s'engager dans la recherche du problème, et d'autre part de garantir une dévolution de la recherche sur un temps court (environ une heure). Cependant ces éléments deviennent insuffisants pour maintenir une dévolution sur une durée plus longue (par exemple une séance de deux heures) et pour favoriser l'avancée dans le problème avec la production de résultats partiels. La comparaison entre les expérimentations 1 et 2, avec le même enseignant et au même niveau scolaire, met en évidence l'influence d'une pratique régulière d'activités de recherche sur le maintien de la dévolution tout au long de la séance de recherche (cf. p. 239). La pré-expérimentation 4, avec des étudiants issus de filières professionnelles, met en évidence l'influence des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques sur la production de résultats partiels, notamment dans les phases d'élaboration de preuves (cf. p. 248). Pour assurer une dévolution de la recherche sur un temps long d'une part et des avancées significatives notamment en terme de production de résultats partiels d'autre part, il est alors fondamental que le milieu matériel des élèves contienne des éléments supplémentaires. Grâce aux pré-expérimentations, nous identifions, par exemple, des connaissances mathématiques notionnelles (parité, divisibilité) et heuristiques (raisonnement par disjonction de cas, conception de la preuve) supplémentaires et une pratique régulière et fréquente d'activités de recherche mathématique (notions de vrai et faux, identifier que des résultats partiels sont des résultats).

L'analyse des pré-expérimentations a également mis en évidence d'autres éléments importants pour permettre l'évolution d'un milieu favorisant une recherche effective et riche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus : une formulation de l'énoncé incitant à l'action, une organisation didactique spécifique (scénario, accès à la documentation, tenue d'un cahier de bord) et la mise à disposition d'outils technologiques. Une formulation de l'énoncé incitant à l'action contribue à l'évolution du milieu matériel initial des élèves en leur permettant de dialoguer avec ce milieu, notamment en interprétant les rétroactions indiquant que les moyens de contrôle sont encore insuffisants et que la résolution du problème ne sera pas instantanée. Un scénario construit sur plusieurs séances de recherche agit sur la dynamique du milieu. La prise en compte du « temps ouvert » favorise la dévolution du problème en encourageant les élèves à prendre en charge la recherche du problème, en se posant des questions et en trouvant des résultats par eux-mêmes. L'espacement des séances, d'une semaine environ, permet aux élèves, soit de penser au problème et revenir avec de nouvelles idées, de nouvelles pistes de recherche ou des résultats partiels, soit au contraire, d'oublier le problème et de débuter la séance suivante avec un regard neuf sur le travail déjà effectué. Ces deux cas de figure apportent potentiellement des éléments nouveaux dans le milieu effectif des élèves. La tenue du cahier de bord et la rédaction d'une synthèse à la fin de chaque séance de recherche collective sont des outils importants pour l'évolution du milieu, d'une part pour le stabiliser entre deux séances (faire en sorte que les pistes de recherche étudiées, les résultats trouvés, les difficultés éprouvées ne soient pas oubliés), et d'autre part pour permettre son évolution au fil des séances (favoriser l'exploitation de toutes les idées et pistes de recherche, l'utilisation de résultats conjecturés ou démontrés, etc.). Ces synthèses assurent ainsi une certaine continuité dans la recherche des élèves. Enfin, la dimension sociale du scénario est un paramètre primordial pour l'évolution du milieu, notamment les confrontations et les échanges entre les membres du groupe, puis entre les groupes dans la phase de mise en commun et de débat. Ils permettent, par exemple, d'enrichir le milieu grâce à la diversité des points de vue, la prise de position et de décision par rapport aux différentes pistes de recherche évoquées. L'usage des calculatrices de type TI-89 contribue à l'évolution du milieu, notamment dans les phases d'expérience et de formulation de conjectures. L'usage du calcul fractionnaire de ces machines permet d'obtenir rapidement de nombreuses décompositions de $\frac{4}{n}$ pour des valeurs de n données. La vérification des calculs et de certaines conjectures est facilitée. L'usage du calcul formel de la calculatrice permet d'obtenir facilement des transformations de l'équation initiale $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, par factorisation ou résolution d'équation en n. Enfin l'utilisation du logiciel de programmation de la calculatrice ou de l'ordinateur permet aux élèves d'implémenter un algorithme et de le tester.

Pour conclure, nous identifions cinq éléments importants pour caractériser et faire évoluer un milieu matériel favorisant une recherche effective et riche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus : des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques, une pratique de résolution de problèmes, une organisation didactique spécifique, une formulation de l'énoncé incitant à l'action et l'utilisation d'outils technologiques. Dans le chapitre 8 (partie 8.3), nous définissons plus précisément la nature de ces différents éléments et nous décrivons en détail un milieu matériel qui permet de dévoluer la recherche du problème aux élèves tout au long de la (ou des) séance(s) de recherche, et de favoriser leur avancée dans la recherche du problème en termes de production de résultats.

6.5 Conclusion

Les pré-expérimentations ont permis d'affiner les choix de variables didactiques ainsi que la nature des éléments utiles à insérer dans le milieu matériel des élèves pour l'élaboration de situations de recherche en classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Le tableau 6.21 résume les choix effectués pour l'organisation didactique de telles situations selon leur durée, et le tableau 6.22 résume les choix effectués concernant les variables didactiques en fonction de la valeur de la première variable, le statut épistémique du problème. Concernant l'évolution du milieu, l'analyse des pré-expérimentations montre l'importance de déterminer finement les éléments utiles que le milieu matériel des élèves doit contenir pour s'engager dans le problème, dévoluer la recherche du problème tout au long de la (ou des) séance(s) de recherche et favoriser l'avancée dans la recherche du problème en termes de production de résultats.

	Une seule séance de recherche.	Plusieurs séances de recherche.
Scénario	Une phase de recherche individuelle ; Une phase de recherche collective avec rédaction d'une affiche ; Une phase de mise en commun et de débat. Une séance particulière pour la synthèse	Une séance de recherche individuelle ; Une séance de recherche collective avec rédaction d'une affiche ; Une séance de mise en commun et de débat. Une séance particulière pour la synthèse.
Accès à tout type de documents	Oui.	Oui.
Accès à Internet	Non.	Limité aux séances de recherche en classe.
Outils pour assurer une continuité des recherches		Rédaction d'une synthèse à la fin de chaque séance de recherche et tenue d'un cahier de bord personnel.

FIGURE 6.21 – Tableau des choix effectués pour l'organisation de situations de recherche en classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus.

V1 - Statut épistémique du problème	Indiqué aux élèves	Non indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	a, b, c	
V3 - Syntaxe de l'énoncé	(Hybride, affirmatif)	(Opératoire, interrogatif)
V4 - Indication sur le domaine d'exploration	$n \geq 2$ a, b, c non nuls	n entier naturel a, b, c non nuls
V5 - Précision sur les solutions	a, b, c non nécessairement distincts non précisé	
V6 - Séance préalable	Non	
V7 - Outils technologiques	Mises à disposition de calculatrices programmables et d'ordinateurs	
V8 - Aides écrites	Non	

FIGURE 6.22 – Tableau des valeurs des variables didactiques pour une situation de recherche en classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus.

Pour déterminer une situation de recherche en classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus, les choix portent désormais sur deux critères, d'une part sur la durée de l'expérimentation (une seule séance ou plusieurs séances de recherche) et d'autre part sur l'indication ou non du statut épistémique du problème aux élèves. Pour la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus qui sera expérimentée dans un contexte de type laboratoire avec des élèves de terminale scientifique (cf. chapitre 8), nous avons effectué les choix suivants : une organisation didactique avec plusieurs séances de recherche et une présentation du problème aux élèves avec indication du statut épistémique de la conjecture. Dans le chapitre suivant (chapitre 7), nous présentons l'analyse *a priori* de la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus qui sera expérimentée en laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Nous décrivons les procédures mathématiques envisageables, nous étudions la pertinence des outils épistémologiques développés dans le chapitre 5 pour analyser *a posteriori* les processus de recherche des élèves sur la conjecture et nous détaillons précisément les éléments utiles à insérer dans le milieu matériel initial pour que celui-ci favorise une recherche effective des élèves sur le problème.

Chapitre 7

Analyse *a priori* de la situation expérimentale de type laboratoire autour de la conjecture d'Erdös-Straus

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'analyse *a priori* de la situation didactique, autour de la conjecture d'Erdös-Straus, qui sera expérimentée en laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Dans une première partie, en appui sur l'analyse mathématique de la conjecture (chapitre 4) et l'analyse des pré-expérimentations (chapitre 6), nous envisageons différentes procédures mathématiques qui pourraient être mises en œuvre par des élèves selon la direction de recherche privilégiée. Dans une seconde partie, à partir des analyses épistémologiques (chapitre 5) et de l'analyse des pré-expérimentations (chapitre 6), nous faisons une analyse *a priori* des processus de recherche des élèves en termes de dimensions organisatrice et opératoire, puis nous étudions la pertinence de la notion de « geste » pour analyser le travail effectif des élèves engagés dans la recherche du problème. Dans une troisième partie, nous caractérisons un milieu matériel initial qui permet, dans un premier temps, de dévoluer la recherche du problème aux élèves, et dans un second temps, qui évolue pour maintenir la dévolution sur un temps long et favoriser l'avancée dans la recherche et la production de résultats.

7.1 Procédures mathématiques

A partir de l'analyse mathématique du problème (chapitre 4), des contenus des programmes scolaires de mathématiques concernant l'arithmétique et la démarche expérimentale (chapitre 6, paragraphe 6.1) et des analyses des pré-expérimentations (chapitre 6, paragraphes 6.3 et 6.4), nous exposons différentes procédures susceptibles d'être mises en œuvre par des élèves de terminale scientifique. Nous présentons ensuite les résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus, abordables par ces élèves dans une recherche en classe de ce problème.

7.1.1 Différentes procédures envisageables

Lors de l'analyse épistémologique de la conjecture (chapitre 5), nous avons identifié deux visées dans la recherche du problème : la quête de décompositions effectives pour une valeur de n donnée et la recherche de la vérité de la conjecture pour tout entier naturel n. Nous distinguons deux catégories de procédures, en fonction de la visée choisie par un sujet s'engageant dans la recherche de la conjecture. La première catégorie, nommée procédure exploratoire, est caractérisée par le geste de *construction d'exemples*. Cette procédure s'appuie sur le caractère expérimental du problème, à savoir faire des essais sur différentes valeurs de n. La seconde catégorie, intitulée procédure opératoire, se caractérise par des manipulations algébriques. Nous avons ensuite identifié cinq procédures différentes : deux procédures exploratoires et trois procédures opératoires. La figure (7.1) représente un diagramme de classification des différentes procédures en fonction de la visée de la recherche.

Ce diagramme explicite la manière dont nous avons classifié les procédures potentielles afin de les présenter puis de les étudier. Il montre deux branches distinctes, *a priori* sans interaction entre elles. L'analyse des travaux des chercheurs (chapitre 5) montre qu'une visée principale sous-tend les recherches mais que l'autre visée n'est pas oubliée. De même, différents types de procédures sont mis en œuvre au cours d'une même recherche et s'articulent entre eux. L'analyse des travaux des élèves de l'expérimentation de type laboratoire (chapitre 9) s'appuiera sur ce diagramme tout en mettant en évidence les différentes interactions entre les visées, entre les types de procédures et entre visées et types de procédures.

Dans la suite de cette partie, nous présentons les cinq procédures (deux procédures exploratoires et trois procédures opératoires), illustrées par des exemples, en mentionnant les connaissances notionnelles en jeu pour s'engager puis pour avancer dans la recherche, et en précisant les conjectures et/ou résultats partiels qui en découlent.

a. Les procédures exploratoires

Le premier geste caractérisant les procédures de type exploratoire est de chercher à *construire des exemples*, c'est-à-dire chercher à décomposer $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes pour différentes valeurs de n. Les connaissances utiles pour s'engager dans ces procédures sont la notion de nombre entier, le calcul fractionnaire et la notion de fraction inférieure ou supérieure à 1. D'autres connaissances peuvent être utiles pour avancer dans la recherche et établir des résultats partiels telles que les notions de multiples, de parité d'un nombre entier et de partie entière.

Exemple :

$n = 1$ impossible car $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq 3$ pour tous x, y et z entiers naturels non nuls.

$n = 2$ donne $\dfrac{4}{2} = 2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$.

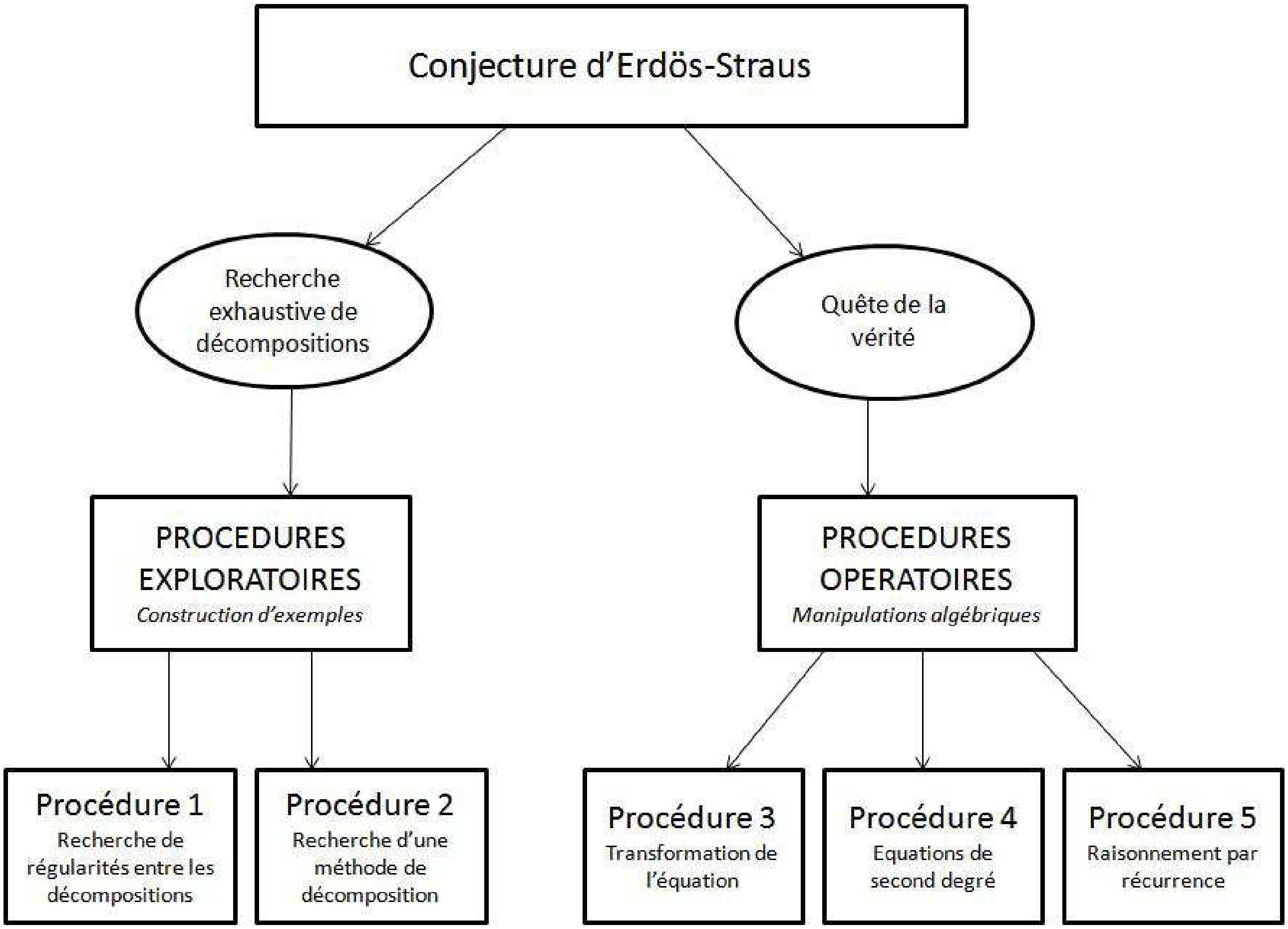


FIGURE 7.1 – Diagramme de classification des différentes procédures.

$n = 3$ donne $\dfrac{4}{3} = 1 + \dfrac{1}{3} = 1 + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}$ ou $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$ ou $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}$.

$n = 4$ donne $\dfrac{4}{4} = 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}$ ou $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$.

Etc.

Comme nous l'avons précisé dans l'analyse épistémologique (chapitre 5), ce geste est lié à un autre geste de recherche, celui de *questionner ces exemples*. Ce système de gestes donne alors lieu à deux types de procédures : la première est une recherche de régularités entre les différents exemples étudiés et la seconde est la recherche d'une méthode exhaustive de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée. Nous détaillons ci-dessous ces deux procédures.

Procédure 1 : Recherche de régularités.

L'exploitation des exemples peut amener à rechercher des régularités entre les différentes décompositions. Nous avons identifié deux types de régularité possibles.

Régularité 1 : l'étude de la décomposition $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ pour un n particulier, par exemple $n = 2$, peut mettre en évidence la relation suivante : $x \times y = z$. En la comparant ensuite à d'autres décompositions, on peut remarquer que cette relation se vérifie pour d'autres valeurs de n. Il peut ainsi en découler plusieurs conjectures.

Exemple : Décomposition pour $n = 2$: $\dfrac{4}{2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Décomposition pour $n = 4$: $\dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$.

Décomposition pour $n = 3$: $\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}$.

Décomposition pour $n = 6$: $\dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{18}$.

Conjecture pour les nombres pairs : $x = \dfrac{n}{2}, y = \dfrac{n}{2} + 1$ et $z = x \times y$.

Conjecture pour les nombres multiples de 3 : $x = \dfrac{n}{3}, y = n + 3$ et $z = x \times y$.

Régularité 2 : l'étude comparative de plusieurs décompositions peut mettre au jour des relations entre ces décompositions. Par exemple, si n est multiplié par 2, alors les solutions x, y et z le sont aussi ; ou si n est multiplié par 3, alors les solutions x, y et z le sont aussi.

Exemple : Décomposition pour $n = 2$: $\dfrac{4}{2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Décomposition pour $n = 4$: $\dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}$.

Décomposition pour $n = 3$: $\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$.

Décomposition pour $n = 6$: $\dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}$.

Conjecture pour les nombres pairs : $x = \dfrac{n}{2}, y = n$ et $z = n$.

Conjecture pour les nombres multiples de 3 : $x = n, y = \dfrac{2n}{3}$ et $z = \dfrac{2n}{3}$.

Ce raisonnement peut conduire à une généralisation (si l'équation a des solutions pour n entier naturel alors elle a des solutions pour tout multiple de n) et à une réduction de l'étude du problème aux nombres premiers.

L'exploitation des exemples peut mener à deux types de régularité qui permettent de formuler des conjectures, différentes dans leur forme (les valeurs de x, y et z ne sont pas les mêmes) mais semblables dans l'énonciation du résultat (l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout entier naturel n multiple de 2 et pour tout entier naturel n multiple de 3). D'autre part, cette procédure de recherche de régularités incite à une recherche exhaustive des nombres entiers n pour lesquels l'équation a des solutions.

Procédure 2 : Recherche d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée.

L'exploitation des différents exemples peut mener à la recherche d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée. On peut, par exemple, remarquer que pour $n < 4$ les fractions se décomposent en $1 + \frac{p}{q}$. Pour $n > 4$, la décomposition ne peut pas être $1 + \frac{p}{q}$ car la fraction est plus petite que 1. On remarque alors que si la fraction est plus grande que $\frac{1}{2}$, on peut prendre $\frac{1}{2}$ comme première fraction égyptienne. Pour celles qui sont plus petites que $\frac{1}{2}$, on prend $\frac{1}{3}$ comme première fraction égyptienne, etc. La méthode de décomposition consiste alors à trouver la valeur de x la plus petite possible telle que $\frac{1}{x}$ soit inférieure à $\frac{4}{n}$. Cela peut se faire par tâtonnements (on essaie $\frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{3}$, etc.) ou en déterminant explicitement cette valeur, c'est-à-dire en posant $x = E(\frac{n}{4}) + 1$. Ensuite, il faut déterminer les valeurs de y et z.

Deux méthodes peuvent être envisagées :

Méthode 1 : en utilisant une relation du type $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ ou $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$. Ces relations peuvent être connues ou trouvées à l'aide d'exemples ou de manipulations algébriques.

Méthode 2 : en réitérant la méthode pour trouver y, c'est-à-dire en cherchant la plus grande fraction unitaire inférieure à $\frac{4}{n}-\frac{1}{x}$ puis, pour trouver z, en cherchant la plus grande fraction unitaire inférieure à $\frac{4}{n}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. Le recours à un algorithme (programmé ou non) pour cette méthode est très efficace. Cela nécessite cependant des connaissances mathématiques supplémentaires en algorithmique et éventuellement en programmation. Nous présentons ci-dessous deux exemples d'algorithmes programmés, sur une calculatrice puis sur un ordinateur.

Algorithme 1 : programmation de l'algorithme de Fibonacci-Sylvester sur une calculatrice TI-89.

```
EGYPT(x)
Prgm
Local p,q,f,n
ClrIO
Disp x
numer(x):=p
While p>1
Denom(x):= q
If mod(q,p)=0 Then
q/p := n
Else
entPréc(q/p)+1:=n
EndIf
 Disp 1/n
 x-1/n := x
 Numer(x):=p
 EndWhile
 Disp x
 EndPrgm
```

EGYPT($\frac{7}{17}$) donne $\frac{1}{3};\frac{1}{13};\frac{1}{663}$.

EGYPT($\frac{4}{13}$) donne $\frac{1}{4};\frac{1}{18};\frac{1}{468}$.

EGYPT($\frac{4}{25}$) donne $\frac{1}{7};\frac{1}{59};\frac{1}{5163};\frac{1}{53307975}$

Cet algorithme peut construire des décompositions de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions égyptiennes mais il n'assure pas l'arrêt à trois fractions. Une question serait alors : comment l'améliorer pour qu'il ne donne que trois fractions égyptiennes ? Une réponse :

Algorithme 2 : programmation de l'algorithme amélioré qui donne exactement trois fractions égyptiennes (algorithme Maple de Mizony), où « trunc » désigne la fonction partie entière.

```
> erdos:=proc(n)
local a,b,c;
a:=trunc(n/4)+1;b:=trunc(1/(4/n-1/a))+1;c:=(1/(4/n-1/a-1/b));
```

```
if is(c,integer) then return([4/n=[1/a,1/b,1/c]]) else return([n,‘non‘]) fi:
end:
> erdos(11);erdos(13);erdos(15);erdos(17);
```

$$[\frac{4}{11} = [\frac{1}{3}, \frac{1}{34}, \frac{1}{1122}]]$$

$$[\frac{4}{13} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{18}, \frac{1}{468}]]$$

$$[\frac{4}{15} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{61}, \frac{1}{3360}]]$$

$$[17, \mathrm{non}]$$

Remarque : cet algorithme ne donne pas de solution pour $n = 17$. Mizony, au cours de ses recherches, a amélioré de nombreuses fois cet algorithme (cf. chapitre 4, partie 4.3.2).

Cette procédure n'exploite pas les exemples de la même manière que la procédure 1 dans la mesure où, en appui sur les premiers exemples, elle cherche une méthode pour construire d'autres exemples. Cette procédure permet alors de formuler des conjectures du même genre que les conjectures énoncées dans la procédure 1, c'est-à-dire pour une valeur de n donnée, l'équation d'Erdös-Straus a des solutions. Notons que ces résultats partiels sont constructifs puisqu'ils donnent, pour une valeur de n donnée, une décomposition explicite de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires. Cette procédure incite à une recherche de type exhaustive.

Notons enfin que ces deux procédures (1 et 2) peuvent être exploitées dialectiquement : la recherche de régularités peut précéder la recherche d'une méthode de décomposition et quand celle-ci est trouvée, elle peut entraîner une nouvelle recherche de régularités, par exemple pour déterminer les nombres pour lesquels la méthode de décomposition ne fonctionne pas et pour en comprendre les raisons.

b. Les procédures opératoires

Les procédures de type opératoire se caractérisent par la manipulation de l'outil algébrique. Le travail mathématique ne porte donc pas sur l'exploitation d'exemples mais s'ancre dans la recherche de généralités, possibilité offerte par l'algèbre. Nous avons distingué trois types de manipulations algébriques : la transformation de l'écriture de l'équation initiale, l'utilisation d'équations du second degré et l'utilisation d'un raisonnement par récurrence. Nous les détaillons ci-dessous.

Procédure 3 : transformation de l'écriture de l'équation initiale.

La première transformation est la réduction de l'équation initiale au même dénominateur, ce qui donne $\frac{4}{n} = \frac{xy+yz+xz}{xyz}$. Selon l'exploitation de cette égalité, nous distinguons trois types de transformations.

Transformation 1 : $n = \dfrac{4xyz}{xy+yz+xz}$. Cette première transformation consiste à isoler n. L'idée est de chercher à exprimer l'inconnue n en fonction de x, y et z. Cette transformation est peu exploitable seule.

Transformation 2 : $4zyx = (xy + yz + xz)n$. Cette transformation utilise, à partir de l'écriture de l'équation réduite au même dénominateur, l'égalité des produits en croix. Cette égalité peut conduire à une étude de critères de divisibilité en utilisant le théorème de Gauss.

Exemple : n divise $4xyz$. En supposant que n est premier avec 4, le théorème de Gauss permet d'écrire que n divise xyz. Pour n premier, on peut donc en déduire que au moins l'un des trois facteurs x, y ou z est un multiple de n.

Cette procédure permet d'établir des relations entre les différents termes de l'équation initiale mais ne permet pas facilement de trouver des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée.

Transformation 3 : $4k = xy+xz+yz$ et $kn = xyz$, $k \in \mathbb{N}^*$. Cette transformation s'appuie sur la proportionnalité, exprimée à l'aide de la multiplicativité. La procédure consiste à essayer de résoudre ces équations en prenant par exemple $x = y = z$ ou $y = z$. Cette piste de recherche n'est pas fructueuse en production de résultats pour l'étude de la conjecture. Notons tout de même que prendre $x = y = z$ permet de montrer que l'équation a des solutions pour tout n multiple de 4. De même en fixant n, on peut chercher k (ou des conditions sur k) pour que le système ait une solution. Par exemple pour $n = 5$, on peut montrer que k ne peut pas être un nombre premier, puis trouver que $k = 20$ donne des valeurs de x, y, z vérifiant l'équation initiale. Cependant cette démarche est fastidieuse et coûteuse en temps.

Procédure 4 : utilisation d'équations du second degré.

Cette procédure est celle présentée dans l'analyse mathématique et mise en œuvre par Thépault (cf. chapitre 4, partie 4.3.1). Elle permet de déterminer un théorème d'existence de solutions et donne également une construction explicite des décompositions pour ces solutions.

Procédure 5 : raisonnement par récurrence.

Cette procédure consiste à essayer de résoudre l'équation initiale par récurrence en trouvant une relation entre $\frac{4}{n}$ et un terme suivant. Ces relations de récurrence existent pour tout n appartenant à une classe de congruence dont on sait qu'il existe des solutions[1]. Par exemple pour n congru à 3 modulo 4.

Exemple : si $n = 4k-1$, on a $\dfrac{4}{4k-1} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k(4k-1)}$. Notons (P_k) cette propriété et démontrons-là par récurrence pour $k \geq 1$.

Démonstration. Initialisation :

$\frac{4}{4\times1-1} = \frac{4}{3}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{1\times(4\times1-1)} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Donc (P_0) est vraie.

Hérédité : supposons que (P_j) est vraie pour $j \geq 2$ et montrons que (P_{j+1}) est vraie. (P_{j+1}) s'écrit $\dfrac{4}{4j+3} = \dfrac{1}{j+1} + \dfrac{1}{(j+1)(4j+3)}$. La relation entre $\dfrac{4}{4j-1}$ et $\dfrac{4}{4j+3}$ est la suivante : $\dfrac{4}{4j+3} = \dfrac{4}{4j-1} - \dfrac{16}{(4j+3)(4j-1)}$. Ce qui donne :

1. Notons que pour démontrer ces relations, une preuve par récurrence n'est pas nécessaire, une réduction au même dénominateur suffit. Cependant, nous faisons l'hypothèse que les élèves, n'identifiant pas la réduction au même dénominateur comme outil de preuve, s'engagent dans un raisonnement par récurrence (comme présenté dans la suite).

$$\begin{aligned}
\frac{4}{4j+3} &= \frac{4}{4j-1} - \frac{16}{(4j+3)(4j-1)} \\
&= \frac{1}{j} + \frac{1}{j(4j-1)} - \frac{16}{(4j+3)(4j-1)} \\
&= \frac{1}{j} + \frac{-12j+3}{j(4j+3)(4j-1)} \\
&= \frac{1}{j} - \frac{3}{j(4j+3)} \\
&= \frac{1}{j+1} + \frac{1}{j(j+1)} - \frac{3}{j(4j+3)} \\
&= \frac{1}{j+1} + \frac{j}{j(j+1)(4j+3)} \\
&= \frac{1}{j+1} + \frac{1}{(j+1)(4j+3)}
\end{aligned}$$

L'hérédité est établie et l'égalité est prouvée par récurrence. □

Les notions mathématiques utiles pour s'engager dans ces procédures sont de nature algébrique : calcul sur les quotients et en particulier la réduction au même dénominateur, utilisation de la quatrième proportionnelle et du produit en croix. Elles ne sont pas de même nature que celles identifiées dans les procédures exploratoires (qui relèvent du domaine numérique). Selon le niveau des élèves, ces notions peuvent être plus ou moins naturalisées. Les connaissances utiles pour avancer dans la recherche par une de ces procédures sont plus variées, plus nombreuses et parfois plus complexes que celles des procédures de type exploratoire. La procédure 3 s'appuie sur des notions d'arithmétique telles que les nombres premiers, l'écriture de la divisibilité, les multiples, des critères de divisibilité, le théorème de Gauss et l'égalité de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ si et seulement si $a = kc$ et $b = kd$ avec k entier relatif. La procédure 4 nécessite des connaissances algébriques sur la résolution de systèmes par combinaison ou substitution et la résolution d'équations du second degré. Les notions de nombres entiers et carrés parfaits sont également importantes. Enfin, la procédure 5 s'appuie sur le raisonnement par récurrence, l'écriture de la divisibilité et le calcul algébrique sur des quotients. Si l'algèbre offre une possibilité de généralisation puissante, elle reste difficile à utiliser, pour les élèves, dans la recherche de cette conjecture et plus particulièrement pour établir des résultats partiels. Cela est lié à la nature du problème dont la résolution selon cette voie se heurte, *a priori*, à des outils complexes telle que la loi de réciprocité quadratique.

Pour conclure, la recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus offre, pour les élèves, de nombreuses pistes de recherche avec des procédures variées. Elle met en jeu de nombreuses notions mathématiques dans le domaine de l'arithmétique, de l'algorithmique et de l'algèbre. Deux types de procédures sont identifiés et distingués selon le premier geste effectué par un sujet engagé dans la recherche, celles de type exploratoire et celles de type opératoire. Au vu des connaissances utiles pour s'engager dans les différentes procédures, il ne semble pas plus difficile, pour les élèves, de choisir l'une ou l'autre des pistes de recherche. Ce qui semble déterminer ce choix est la visée de la recherche : chercher des décompositions effectives de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée ou chercher à établir la vérité de la conjecture pour tout entier naturel n. En revanche, l'avancée dans la recherche du problème sera *a priori* facilitée par l'usage de procédures exploratoires pour deux raisons : d'une part ces pistes de recherche demandent peu de connaissances supplémentaires et elles sont naturalisées dès le collège (contrairement aux connaissances en jeu dans les procédures opératoires), et d'autre part elles permettent de mettre en œuvre une dimension expérimentale. La recherche s'appuie sur un processus dialectique entre la construction et le questionnement des exemples et l'élaboration d'éléments théoriques. Ce ressort de la dimension expérimentale est alors le levier pour avancer plus rapidement dans la recherche de la conjecture, notamment en formulant des conjectures et en élaborant des résultats partiels. Dans les procédures opératoires, la non-disponibilité des connaissances utiles à l'avancement de la recherche peuvent faire obstacle et freiner la recherche des élèves.

7.1.2 Résultats abordables par les élèves en fonction des connaissances mathématiques disponibles

A partir de l'analyse du programme de l'enseignement de spécialité de la classe de terminale scientifique, des analyses des pré-expérimentations et de l'analyse *a priori* des procédures, nous présentons les résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus qui peuvent être attendus des élèves de terminale scientifique engagés dans une recherche sur ce problème.

Le premier résultat partiel qui peut être attendu est le suivant : si l'équation admet des solutions pour un entier naturel n, alors elle admet des solutions pour tout multiple de n. Les connaissances en jeu (multiplication d'une expression fractionnaire par un nombre entier et notion d'égalité) sont *a priori* disponibles et mobilisables par des élèves de terminale scientifique dans la mesure où elles sont apprises au collège. Cependant, l'analyse des pré-expérimentations montre que ces connaissances ne sont pas toujours mobilisées. Le résultat est souvent établi pour certaines valeurs de n (par exemple, remarquer que si n est multiplié par 2 alors les solutions x, y et z le sont aussi) et non généralisé à tout multiple de n. A noter que ce résultat peut apparaître au sein de deux procédures de nature différente :

– exploratoire : à partir d'exemples sur différentes valeurs de n ;

– opératoire : à partir de manipulations algébriques de l'équation initiale.

Une conséquence de ce résultat partiel est la réduction du problème aux nombres premiers, qui repose sur cette propriété multiplicative et sur la propriété *tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier*. Cette réduction est *a priori* accessible aux élèves, dès la classe de troisième, niveau où est introduite la notion de nombre premier. Cependant, les analyses des pré-expérimentations montrent que peu d'élèves (même en terminale scientifique) effectuent la réduction du problème aux nombres premiers. De plus, lorsqu'elle est évoquée, elle se réalise en acte et non à partir des propriétés citées ci-dessus. Deux éléments peuvent expliquer que ce raisonnement soit difficilement mis en œuvre par des élèves. D'une part, la notion de nombre premier n'est étudiée que succinctement, sur des exemples simples. Il est donc probable que cette connaissance, bien que disponible, ne soit pas mobilisée par les élèves dans un contexte de résolution de problèmes de recherche. D'autre part, les élèves ont peu ou n'ont pas l'occasion de rencontrer ce genre de raisonnement dans leur apprentissage des mathématiques.

La recherche de la conjecture, réduite aux nombres premiers, peut amener à faire un choix sur l'écriture des nombres. Grâce à la division euclidienne, un nombre premier n s'écrit nécessairement :

– sous la forme $4k - 1$ ou $4k - 3$, avec k entier naturel.

– sous la forme d'une congruence, $n \equiv 1 \bmod 4$ ou $n \equiv 3 \bmod 4$.

Nous faisons l'hypothèse que la première forme d'écriture sera davantage mobilisée que celle avec les congruences, dans la mesure où la première est travaillée dès le collège. La notion de congruence n'est étudiée qu'en spécialité Mathématiques (terminale scientifique) ; elle risque d'être moins naturalisée pour les élèves. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de la notion de congruences peut apparaître :

– au sein d'une procédure exploratoire, par observation d'essais sur des valeurs de n différentes et impaires. Par exemple $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$ et $\frac{4}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{33}$ donnent $\frac{4}{4k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k(4k-1)} + \frac{1}{2k(4k-1)}$ puis écrire n sous la forme $n \equiv 3 \bmod 4$.
– au sein d'une procédure opératoire par introduction de l'objet : si n est impair alors $n \equiv 1 \bmod 4$ ou $n \equiv 3 \bmod 4$.

Le résultat 1 (l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout entier naturel n non congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840, voir p. 81) semble difficilement accessible à des élèves de terminale scientifique. Cependant la méthode utilisée, qui consiste à éliminer différentes classes de nombres pour lesquelles on sait exhiber des solutions, peut être utilisée et le résultat en lui-même peut être approché. Il est donc possible pour des élèves de trouver certaines classes de nombres pour lesquelles on peut exhiber des solutions. Par exemple, dans les pré-expérimentations, la majorité des élèves démontre qu'il existe des solutions à l'équation pour tout n pair, multiple de 3 et multiple de 5. La démonstration du résultat 1 repose sur le théorème des restes chinois qui n'est au programme que dans l'enseignement supérieur. Cependant, en classe de terminale scientifique spécialité Mathématiques, certains exercices reposent sur ce théorème. Ainsi, il est possible que des élèves l'aient rencontré dans un exercice et l'utilisent, ou il peut également apparaître « en acte ». Enfin, la démonstration de ce résultat est abordable en terminale scientifique et peut faire l'objet d'un problème dans le cadre d'une institutionnalisation [2].

La recherche menée par Thépault (cf. chapitre 4, partie 4.3.1 p. 88), reposant sur une résolution d'équations du second degré par la méthode de la somme et produit des racines d'une fonction polynôme, peut difficilement émerger du travail des élèves de terminale scientifique. En effet, cette méthode de résolution d'équations n'est étudiée en mathématiques que dans l'enseignement supérieur. Dans les travaux des élèves et des étudiants analysés dans les pré-expérimentations, cette méthode n'a pas été utilisée.

Avant 2009, des procédures algorithmiques (par exemple les algorithmes 1 et 2 présentés p. 269) avaient peu de chance d'émerger dans le travail des élèves étant donné que l'algorithmique était absente des programmes de mathématiques du collège et du lycée. Cependant, cette piste de recherche pouvait provenir d'élèves s'intéressant personnellement à ce domaine et sachant programmer sur calculatrice ou ordinateur. Les pré-expérimentations montrent que les collégiens et lycéens n'ont jamais mis en œuvre de procédures algorithmiques. Chez les étudiants, seul celui qui est en licence informatique a programmé un algorithme qui cherche les valeurs de x, y, z pour obtenir un nombre n entier. Avec les programmes actuels de mathématiques de l'enseignement secondaire, les élèves disposant d'une formation à l'algorithmique dès la classe de seconde, il semble possible que leur recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus repose sur la construction d'algorithmes, tel que celui de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour certaines valeurs de n.

Pour conclure, nous identifions plusieurs résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus accessibles aux élèves de terminale scientifique, spécialité Mathématiques :
– trouver des décompositions explicites pour différentes valeurs de n ;
– regrouper ces décompositions selon des classes de nombres (par exemple pour les multiples de 2, les multiples de 3, etc.) ;
– réduire le problème aux nombres premiers à partir d'une liste de nombres pour lesquels ils disposent de décompositions explicites ;

2. Dans l'expérimentation de type laboratoire présentée dans le chapitre suivant, nous avons proposé un tel problème. Cf. annexe G.

– réduire le problème aux nombres premiers à partir de la notion de multiplicativité et de la propriété *tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier* ;
– établir que l'un des termes x, y ou z est un multiple de n, à partir d'exemples ;
– construire un algorithme de vérification ou de construction de solutions ;
– utiliser le tableur pour vérifier que des solutions fonctionnent.

Ces résultats peuvent être trouvés à partir de diverses démarches mettant en œuvre des procédures de nature différente (exploratoire ou opératoire), comme nous l'avons montré dans l'analyse mathématique de la conjecture (chapitre 4).

7.2 Analyse *a priori* des processus de recherche

Dans le chapitre 5, nous avons construit une grille d'analyse des processus de recherche, que nous avons mise à l'épreuve en étudiant les travaux de deux chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus. Les analyses montrent la pertinence de cet outil méthodologique pour étudier les processus de recherche de mathématiciens sur ce problème. L'objectif de cette partie est d'étudier la pertinence de la grille pour analyser *a posteriori* le travail effectif des élèves sur la recherche de la conjecture. Nous reprenons donc la grille qui repose sur l'articulation de deux outils méthodologiques, une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire et une analyse à l'aide de la notion de « geste », pour la confronter à la contingence des pré-expérimentations.

7.2.1 Analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire

L'analyse des travaux des chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus (chapitre 5) a mis en évidence deux visées de la recherche de ce problème : d'une part la quête de la vérité de la conjecture pour tout entier naturel n et d'autre part, la recherche de décompositions effectives pour une valeur de n donnée. Pour chaque visée, nous avons identifié des dimensions organisatrice et opératoire privilégiées. Dans ce paragraphe, en appui sur les analyses des pré-expérimentations, nous faisons l'analyse *a priori* de ces deux pistes de recherche en analysant les dimensions organisatrices et opératoires qui peuvent être mises en jeu dans les raisonnements par les élèves.

La première dimension organisatrice est commune aux deux visées de la recherche. Il s'agit du jeu d'extension/réduction avec la réduction du problème aux nombres premiers. L'analyse des travaux des élèves des pré-expérimentations montre que cette dimension organisatrice n'est pas première dans leur recherche. En effet, elle nécessite des connaissances d'arithmétique peu ou non disponibles selon le niveau des élèves. En classe de terminale scientifique, spécialité Mathématiques, la notion de nombre premier et de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers étant au programme, elle pourrait être attendue. Nous avons relevé que cette réduction intervient le plus souvent en acte, à la suite d'une première phase de recherche (ce point est développé plus loin, p. 280). Cependant nous faisons l'hypothèse qu'elle pourrait être préalable à toute recherche si elle a déjà été utilisée dans la recherche d'un autre problème ou au cours de la résolution d'un exercice d'arithmétique.

a. Quête de la vérité de la conjecture

Cette visée de la recherche est associée à la sous-dimension organisatrice suivante : la simplification du problème par changement de cadre. Si les chercheurs pensent naturellement à simplifier le problème pour tenter de le résoudre, les élèves s'y autorisent peu. En effet, l'enseignement secondaire ordinaire propose peu de problèmes ou exercices de mathématiques laissant des initiatives de ce genre aux élèves. Nous identifions ici une difficulté liée au contrat didactique. Les pré-expérimentations ont, par ailleurs, montré que cette dimension organisatrice est peu exploitée par les élèves dans leur recherche de la conjecture. Concernant le changement de cadre, de nombreux travaux en didactique des mathématiques (par exemple Douady, 1986, 1994 ; Pluvinage, 1993) ont montré son importance pour l'apprentissage des mathématiques et en particulier, en résolution de problèmes :

> Dans les conditions pour qu'un problème soit source et occasion d'apprentissage : [...] le problème s'exprime dans au moins deux cadres. (Douady, 1994, p. 57)

Cependant cette pensée organisatrice ne vit pas ou vit peu dans l'enseignement secondaire en France (Artigue et al., 2002). Trois dimensions opératoires sont associées à ces dimensions organisatrices : l'utilisation de théorèmes-clés en arithmétique, la manipulation de nature algébrique et la forme de représentation des entiers à l'aide de la division euclidienne (le paramètre b étant donné, tout nombre entier n peut s'écrire selon une et une seule des formes $n = bk, n = bk + 1, ..., n = bk + (b - 1)$, k étant un entier). Les pré-expérimentations montrent que les élèves éprouvent des difficultés à exploiter ces dimensions opératoires dans la mise en œuvre de leurs raisonnements. Par exemple, la notation d'un entier à l'aide de la division euclidienne semble difficilement mobilisable avant la classe de terminale scientifique. Cependant, les élèves peuvent se limiter à l'utilisation de l'écriture des multiples sous cette forme, c'est-à-dire pour un paramètre b donné, $n = bk$, k étant un entier, comme l'illustre la production des élèves de collège de la pré-expérimentation 3 (figure 7.2). Précisons également que cette forme de représentation des entiers sera peut être privilégiée par rapport à une notation avec l'outil *congruence*, notion plus complexe à manipuler pour les élèves (et qui n'est étudiée qu'en classe de terminale scientifique, spécialité Mathématiques).

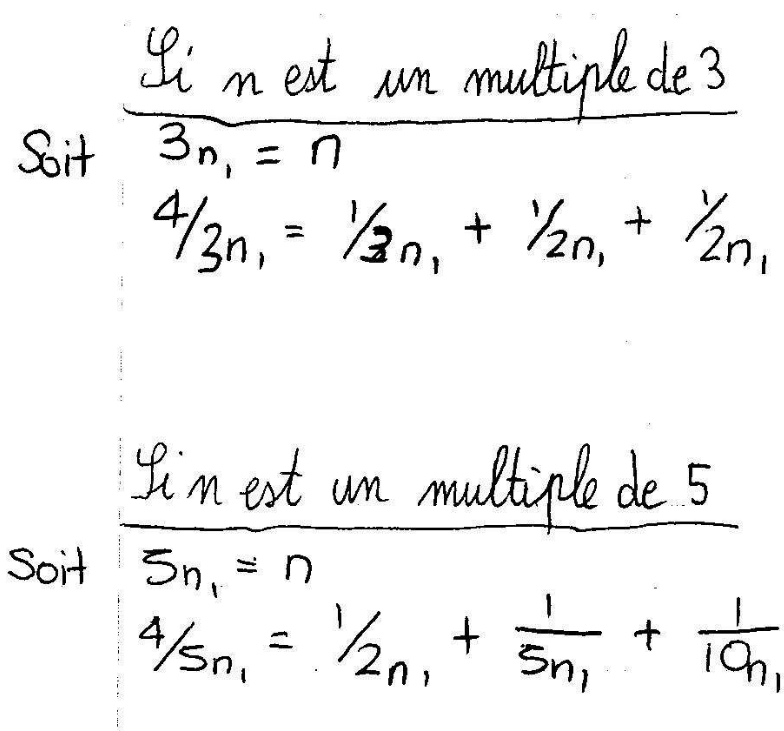


FIGURE 7.2 – Extrait d'une production d'élèves de collège (pré-expérimentation 3).

Les dimensions organisatrices et opératoires identifiées, chez les chercheurs, dans une recherche privilégiant la quête de la vérité de la conjecture, ne sont *a priori* pas celles que l'on trouve dans les travaux des élèves. Cependant ces derniers peuvent s'engager dans une recherche de la conjecture avec la perspective d'en établir la vérité. L'analyse des pré-expérimentations et des procédures envisageables montre que ces recherches s'appuient sur différentes manipulations de l'outil algébrique, l'utilisation de théorèmes-clés d'arithmétique ou sur un raisonnement par récurrence.

b. Recherche de décompositions effectives

Après le jeu d'extension/réduction, la recherche de décompositions effectives pour une valeur de n donnée privilégie deux sous-dimensions organisatrices : la limitation de la recherche et le plongement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La limitation de la recherche qui consiste à réduire le nombre de classes à étudier en trouvant des décompositions pour des familles de nombres est une pensée organisatrice qui peut structurer une recherche menée par des élèves. En effet, comme nous l'avons observé dans les pré-expérimentations, ces derniers peuvent trouver que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour certaines classes de nombres (par exemple les multiples de 2, 3, 5, etc.). Ils diminuent ainsi le nombre de cas à étudier. Cette dimension organisatrice est liée à une autre pensée organisatrice, celle du plongement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cette dernière fait appel à des connaissances arithmétiques qui ne sont pas au programme de l'enseignement secondaire. Dans les travaux des élèves des pré-expérimentations, le passage à cette pensée organisatrice n'a pas été effectué. Cependant, nous faisons l'hypothèse qu'elle peut être suivie si les élèves l'ont déjà rencontrée, éventuellement en acte, dans une activité de recherche [3]. La dimension opératoire associée à ces dimensions organisatrices est la représentation des entiers avec les congruences. Comme nous venons de le préciser, cette écriture est disponible à partir de la classe de terminale scientifique mais les pré-expérimentations montrent qu'elle n'est pas toujours mobilisée.

c. Comparaison des deux visées

L'analyse des pré-expérimentations montre que la dimension organisatrice associée à la recherche de décompositions effectives (limitation de la recherche) est plus facile à approcher par des élèves. Ceci est lié, d'une part aux connaissances en jeu dans les différentes pensées organisatrices, et d'autre part à l'articulation qu'elle entretient avec le caractère expérimental du problème, à savoir faire des essais sur différentes valeurs de n. En effet, la limitation de la recherche est porteuse de ce caractère expérimental puisqu'un moyen simple et efficace de réduire la recherche de la conjecture est de chercher des décompositions effectives pour des valeurs de n données. Comme nous l'avons déjà souligné, cette piste de recherche permet plus facilement aux élèves de s'engager dans une démarche expérimentale et d'articuler ainsi la manipulation des objets mathématiques avec l'élaboration d'éléments théoriques sur la conjecture. Cependant, cette visée de la recherche ne favorise pas toujours le processus d'élaboration de preuves et les recherches des élèves peuvent rester dans l'exhaustion de cas, sans chercher à trouver des éléments de preuves de leurs résultats partiels (voir par exemple les travaux de certains étudiants de la pré-expérimentation 4, p. 248).

Pour conclure, l'analyse globale *a priori* des processus de recherche montre que les élèves peuvent s'engager dans deux types de recherche :

- une recherche dirigée par la quête de la vérité de la conjecture, *a priori* algébrique et peu articulée avec le caractère expérimental du problème ;

3. Par exemple, l'exercice suivant demande une étude modulo 5 : Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $n(n+2)(2n+1)(2n+7)(3n+2)$ est divisible par 5.

– une recherche privilégiant la construction de décompositions, *a priori* de nature empirique, mettant en œuvre une dimension expérimentale mais peu articulée avec la nécessité de la preuve (Grenier & Tanguay, 2008).

Les analyses des pré-expérimentations montrent que la recherche des élèves et des étudiants est effectivement dirigée par une visée privilégiée. Cependant le choix d'une visée n'exclut pas la mise en œuvre de procédures associées à l'autre visée. Des interactions et des articulations sont souvent présentes dans les travaux des élèves comme l'illustrent les deux exemples ci-dessous.

Exemple 1 : Recherche d'un groupe (groupe 1) d'élèves de terminale scientifique de la pré-expérimentation 1.

La direction de la recherche prise par ces élèves est la quête de la vérité de la conjecture, comme l'exprime ci-dessous un élève :

> Il faut le prouver dans le cas général, tu ne vas pas le faire pour chaque [nombre].

Ils cherchent alors à exploiter de nombreux raisonnements (par l'absurde, par disjonction de cas, par récurrence) et diverses connaissances d'arithmétique (théorème de Gauss, équation diophantienne) pour essayer de prouver l'existence de solutions pour tout n. L'analyse de leurs recherches montre qu'ils ont davantage mis en œuvre des procédures opératoires (la procédure 3, transformation de l'équation initiale et la procédure 5, raisonnement par récurrence) mais que c'est l'articulation de ces procédures avec une procédure de type exploratoire (la procédure 1, recherche de régularité entre les décompositions) qui leur a permis, d'une part de formuler le résultat sur l'existence d'une décomposition pour tout n pair, et d'autre part de construire la preuve de ce résultat (cf. M.-L. Gardes, 2010 et M.-L. Gardes, 2012).

Exemple 2 : Recherche d'un groupe d'élèves (groupe 2) de terminale scientifique de la pré-expérimentation 1.

La direction de la recherche prise par ces élèves est la recherche exhaustive de décompositions. Dès le début de leur recherche, ils ont exploité le caractère expérimental du problème en cherchant des décompositions pour une valeur de n donnée. L'analyse de leurs recherches (cf. M.-L. Gardes, 2010) montre qu'ils ont davantage exploité les procédures exploratoires (recherche de régularités entre les décompositions et recherche d'une méthode de décomposition). Cependant ils ont également essayé de transformer l'équation initiale (procédure opératoire 3) et de faire un raisonnement par récurrence (procédure opératoire 5). La mise en œuvre de ces procédures a été abandonnée lorsqu'ils se sont aperçus qu'ils ne disposaient pas des outils mathématiques nécessaires (par exemple pour étudier une équation avec une inconnue et quatre paramètres) ou lorsqu'ils se sont aperçus de la difficulté à mener certain type de raisonnements (par exemple pour faire un raisonnement par récurrence entre le rang n et le rang $n + 2$). Ces difficultés à exploiter des procédures de type opératoire les ont confortés dans leur choix de chercher des décompositions pour une valeur de n donnée par l'exploitation de procédures exploratoires.

7.2.2 Étude de la pertinence de la notion de « geste » pour analyser le travail effectif des élèves

Dans le chapitre 5, nous avons identifié sept gestes de la recherche, que nous avons utilisés pour analyser les processus de recherche de deux chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus. Dans ce paragraphe, nous étudions la pertinence *a priori* de ces gestes pour analyser *a posteriori* le travail de recherche effectif des élèves sur la conjecture. Cette analyse s'effectue à partir de l'analyse des travaux des élèves des pré-expérimentations.

1. Désigner des objets.

L'analyse des travaux des élèves des pré-expérimentations a montré, d'une part que ce geste peut être effectué par les élèves, et d'autre part que son rôle est primordial dans leur recherche, notamment pour mettre en œuvre une démarche expérimentale.

Exemple : Extrait des recherches d'un groupe de trois étudiants, pré-expérimentation 4.

Au bout de 12 minutes de recherche collective, ils trouvent une solution à l'équation $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ pour $n = 2$ en posant $a = 1, b = 2, c = 2$. Ensuite, ils préfèrent trouver « un truc avec littéral pour dire que tout nombre qui correspond à ça marche ». Ils mettent alors en œuvre une procédure opératoire par transformation de l'équation initiale grâce à une réduction au même dénominateur. A partir de la nouvelle équation, un étudiant essaie de prendre des valeurs de a, b et c et de voir s'il peut obtenir une fraction du type $\frac{4}{n}$. L'idée des nombres pairs apparaît : « à tous les coups il faut que n soit un multiple de 2 pour que tu puisses le simplifier. Genre au lieu d'avoir 4 en haut, tu peux avoir 8 ». Cet étudiant essaie ensuite de décomposer $\frac{4}{7}$ avec $\frac{1}{7}$ puis $\frac{1}{\frac{7}{2}}$. Comme $\frac{7}{2} = 3,5$ n'est pas un entier, il n'arrive pas à trouver de décomposition. Il essaie alors avec $\frac{4}{3}$ et trouve $\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Il essaie ensuite de décomposer $\frac{4}{453}$ puis dit : « ça ne serait pas pour tous les entiers pairs ? Parce que dès que t'es impair t'es bloqué ». Il explique aux autres étudiants du groupe que cet exemple lui a permis de se rendre compte que les nombres impairs posent un problème. Il essaie alors avec $n = 568$ et écrit $\frac{1}{568} + \frac{1}{\frac{568}{2}} + \frac{1}{\frac{568}{2}}$ et se rend compte que ça ne marche pas. Il teste ensuite $n = 46$ et écrit $\frac{4}{46} = \frac{1}{46} + \frac{1}{23} + \frac{1}{23}$. Un autre étudiant répond : « Non ça fait 5 en haut ». Cependant l'étudiant est « sûr qu'il y a un moyen là, comme ça là ». Il modifie alors sa décomposition pour $n = 46$: « je vais essayer un truc, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{46}$ et si je fais plutôt $\frac{1}{23} + \frac{1}{46} + \frac{1}{46}$, ça fait $\frac{4}{46}$ ». Puis il écrit tout de suite : « pour tout nombre pair n : $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{1}{2}n} + \frac{1}{n}$ » et demande à ses camarades de « faire ça avec des chiffres au hasard, mais pas 46, 3 ou 4 » car il les a déjà faits.

En s'appuyant sur plusieurs décompositions (pour des valeurs de n pair et impair), l'étudiant réussit à préciser la nature des nombres en jeu et à formuler une conjecture. La désignation des objets en jeu (nature de n, valeur de a, b et c en fonction de n) permet la formulation de la conjecture et par suite la construction de décompositions pour tout nombre n pair. De plus, cela lui permet de comprendre pour quelle raison cette formule ne marche pas pour un nombre n impair : « le problème avec les nombres impairs dès que tu vas diviser par 2, tu vas plus trouver des entiers. Dès que tu restes sur du pair, tu peux avoir de l'entier ». L'exemple $n = 453$ lui a permis d'apercevoir une différence de traitement entre les nombres pairs et les nombres impairs. La désignation des objets en jeu puis la formulation de la conjecture lui ont ensuite permis d'en comprendre la raison. Enfin, l'écriture de cette formule générale permet de vérifier que cette décomposition en somme de trois fractions unitaires donne toujours une fraction égale à $\frac{4}{n}$: « $\frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{1}{2}n} + \frac{1}{n}$ ça revient à $\frac{1+1+2}{n}$ donc ça fait toujours $\frac{4}{n}$ ».

Cet exemple montre deux apports importants de la désignation des objets dans les recherches des élèves. D'une part le geste de désignation des objets mathématiques en jeu se réalise par des allers et retours entre la manipulation de nombreux exemples et la volonté de trouver une formule générale. D'autre part il favorise, en retour, ces va-et-vient entre les expériences et les élaborations théoriques en permettant la formulation d'une conjecture, la construction de décompositions pour d'autres valeurs de n et l'élaboration de preuves. Ceci confirme que ce geste favorise un travail mathématique articulant dialectiquement expériences et éléments théoriques.

Précisons que ce geste est souvent utilisé par les élèves pour spécifier la nature des nombres en jeu, tels que la parité ou la multiplicité. Une connaissance mathématique associée est alors la représentation des entiers à l'aide de la division euclidienne : si n est pair alors il existe k entier relatif tel que $n = 2k$. Certaines analyses de travaux d'élèves et d'étudiants montrent que la mobilisation de cette connaissance peut constituer une difficulté. Par exemple, la figure 7.3 est un extrait de recherche d'un groupe de trois étudiants de la pré-expérimentation 4, qui illustre la difficulté à traduire la parité.

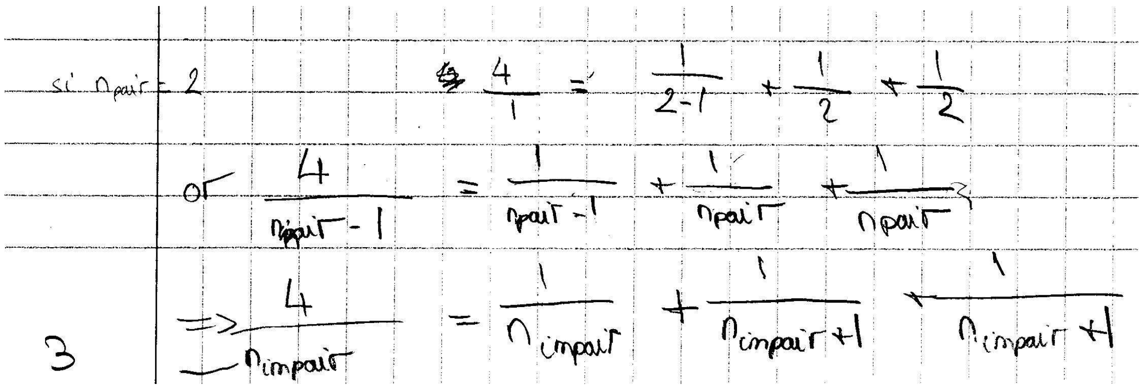


FIGURE 7.3 – Extrait d'une production d'étudiants de CPGE (pré-expérimentation 4).

La conséquence est la présentation d'un résultat faux puisqu'ils pensent avoir démontré la conjecture pour tout nombre n avec l'identité suivante : $\frac{4}{n-1} = \frac{1}{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}$. Dans cette formulation, la parité de n est perdue. Lors du débat, ils expliquent que pour décomposer $\frac{4}{7}$, il faut prendre $n = 8$ mais ils ne comprennent pas tout de suite que $\frac{n-1}{2}$ ne donnera pas un nombre entier.

Pour conclure, deux éléments semblent favoriser l'émergence du geste *désigner des objets* dans la recherche des élèves et étudiants : d'une part l'exploitation de procédures exploratoires qui favorise ensuite la mise en œuvre d'une démarche expérimentale, et d'autre part la mobilisation de connaissances mathématiques telle que l'écriture de la parité ou de la multiplicité d'un entier (grâce à la division euclidienne ou les congruences).

2. Réduire le problème aux nombres premiers.

Ce geste s'appuie sur deux notions d'arithmétique :

- la multiplicativité d'une propriété, à savoir ici, si la conjecture est vraie pour un entier n, elle est vraie pour tout multiple de n ;
- et la propriété suivante : tout entier n supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

Si ces connaissances sont disponibles et mobilisables, ce geste peut s'effectuer au début des recherches des élèves, comme premier geste, comme c'est le cas chez les chercheurs. En revanche, si les connaissances ne sont pas disponibles ou disponibles mais non mobilisées, ce geste peut ne pas être effectué. Cependant il peut être construit au cours de la recherche. En effet, à partir du geste de *construction et questionnement des exemples*, les élèves peuvent constater la multiplicativité, réactiver leurs connaissances sur les nombres premiers et ainsi établir la réduction du problème aux nombres premiers. La réduction est alors construite au cours de la recherche du problème, à partir d'allers et retours entre les manipulations des objets mathématiques (les décompositions pour différentes valeurs de n) et les élaborations théoriques locales (l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n multiple de 2, 3, 5, etc.).

Exemple : A partir de nombreux exemples de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour différentes valeurs de n, un groupe d'élèves de terminale scientifique (pré-expérimentation 1) a émis trois conjectures : l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n multiple de 2, l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n multiple de 3 et l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n multiple de 5. Ils font alors le lien avec les nombres premiers.

E1 : On a trouvé pour 2, 3, et 5. On a trouvé pour 2, 3 et 5

P : Vous avez trouvé quoi pour 2, 3 et 5 ?

E1 : Bah que tous les nombres divisibles par 2 peuvent vérifier ça, tous les nombres divisibles par 3 peuvent *inaudible* et tous les nombres divisibles par 5 peuvent *inaudible* mais on n'arrive pas à continuer enfin pour euh, parce qu'après on va aller loin en fait, si on veut faire avec tous les nombres premiers ça

E2 : Ca risque de prendre un certain temps.

E1 : Voire même un temps certain.

Comme l'illustre cet exemple, les analyses des travaux des élèves et étudiants des pré-expérimentations montrent que ce geste est rarement premier et spontané mais, lorsqu'il apparaît, relève souvent d'une construction au cours de la recherche.

3. Introduire un paramètre.

Dans les travaux des élèves des pré-expérimentations, nous n'avons pas relevé ce geste dans leur recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Si certains ont introduit un nouveau paramètre, il s'agit en fait d'un changement de nom de variable, comme en témoigne un extrait de production (figure 7.4) d'un groupe d'étudiants (pré-expérimentation 5). Ils ont remplacé a par X dans une équation du second degré. Il semble que ce soit pour faciliter l'étude de cette équation en identifiant que a va jouer le rôle de d'inconnue et que b, c et n seront des paramètres.

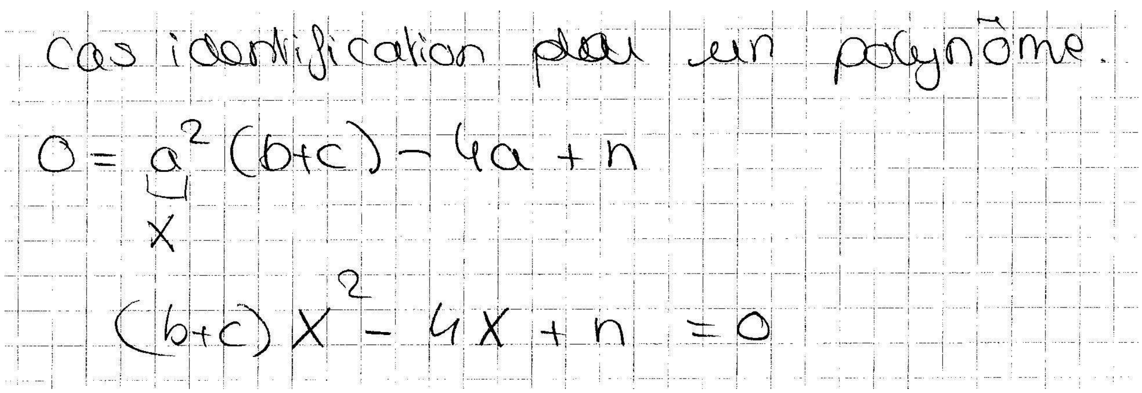


FIGURE 7.4 – Extrait d'une production d'étudiants de licence (pré-expérimentation 5).

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, ce geste s'effectue dans l'espace combinatoire et consiste en une modification des écritures mathématiques, sans renvoi explicite aux objets qu'il désigne. Dans le travail des chercheurs, il est effectué dans des procédures algébriques (cf. les recherches de Rosati, Yamamoto ou Schinzel, chapitre 4, partie 4.2) et dans des procédures algorithmiques (cf. travail de Mizony, chapitre 4, partie 4.3.2). L'analyse *a priori* des procédures montre que les procédures opératoires et algorithmiques sont difficilement accessibles et exploitables par des élèves et des étudiants car elles nécessitent la mobilisation de connaissances et d'outils mathématiques non naturalisés ou en cours de naturalisation. L'analyse des pré-expérimentations confirme cette analyse et met en évidence la difficulté des élèves et étudiants à manipuler certains outils algébriques (ce point est détaillé dans l'étude du geste *transformation de l'équation initiale*, p. 287). Ce n'est donc pas étonnant que ce geste ne soit pas présent dans leurs recherches. La résolution d'équations du second degré par la méthode de somme et produit des racines, la notion de résidu quadratique, l'utilisation du théorème des restes chinois, des connaissances en algorithmique, des connaissances de logiciels de programmation et l'utilisation de calculatrice à calcul formel semblent être des éléments de nature à favoriser l'émergence de ce geste dans l'exploitation de procédures algébriques ou algorithmiques.

4. Construire et questionner des exemples.

L'exploitation des exemples est le premier geste des procédures exploratoires. Nous avons relevé, dans les travaux des élèves des pré-expérimentations, deux types d'utilisation des exemples : soit comme produit fini, soit comme produit à construire.

Exemple 1 : Dans un groupe de terminale scientifique (pré-expérimentation 1), les élèves s'appuient sur les deux décompositions suivantes : $\frac{4}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ et $\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ pour chercher des régularités. Ils n'expliquent pas comment ces décompositions ont été trouvées. Un élève dit alors : « Bah ça doit être facile, ça fait 2, 2, 3 et 4, 4, 6 ». Un autre répond : « Bah oui, c'est multiplié par 2. 4, 4, 6 c'est multiplié par 2. Si n est multiplié par 2, les solutions aussi ». Quelques minutes plus tard, ils écrivent l'identité suivante : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.

Exemple 2 : Dans un autre groupe de terminale scientifique (pré-expérimentation 1), les élèves cherchent à trouver une méthode de décomposition à partir de la décomposition pour $n = 4$ suivante : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

> E1 : Il y a peut être un moyen de faire quelque chose puisque $\frac{1}{6}$ c'est $\frac{1}{2}$ fois $\frac{1}{3}$.

Ils essaient alors de décomposer $\frac{4}{5}$:

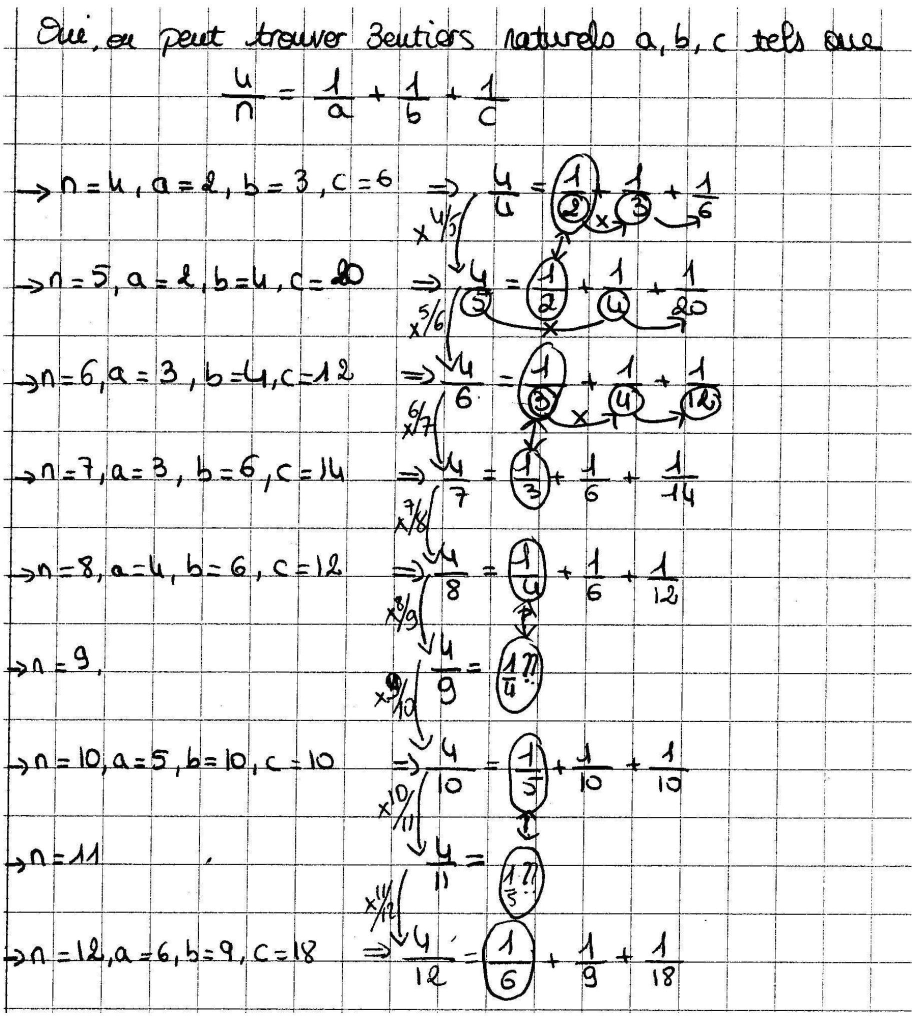
> E1 : $\frac{4}{5}$, je vais enlever $\frac{1}{10}$ pour voir si ça marche, alors il reste $\frac{7}{10}$. Si j'enlève $\frac{1}{3}$ ça fait quoi ? [...] Euh... ça ne marche pas donc, si j'enlève $\frac{1}{4}$ [...] Ouais, non, aah, on a enlevé $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}$.
> E2 : A chaque fois il y a un truc de multiplications : $2 \times 3 = 6; 2 \times 5 = 10$.

Ils réitèrent leur méthode pour décomposer $\frac{4}{6}$ et trouvent $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$; ce qui les amènent à expliciter leur processus :

> E2 : On a trouvé un truc pour les nombres pairs en fait, si on divise par 2, qu'on rajoute 1 et qu'on multiplie les deux, ça fait le bon truc.

Cette description donnera plus tard l'identité suivante : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}\times(\frac{n}{2}+1)}$.

Dans ces deux extraits, les élèves ont recours au geste de *construction et questionnement des exemples* mais l'exploitation des exemples est différente. Dans l'exemple 1, l'identité pour les nombres pairs est obtenue en observant deux décompositions particulières alors que dans l'exemple 2, elle est formulée grâce à la détermination d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée. Les élèves, dans l'exemple 1, trouvent plusieurs décompositions pour une valeur de n donnée et les utilisent ensuite comme produit fini pour les questionner et les mettre en relation. Dans l'exemple 2, en revanche, les élèves cherchent une méthode de construction d'exemples par le questionnement, à partir d'un seul exemple utilisé comme produit fini. La première conséquence de ces deux types d'exploitation des exemples est la formulation d'identités différentes (même si la conjecture sous-jacente est identique, à savoir que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tous les multiples de 2). La seconde est leur influence sur la suite des recherches. Les élèves, dans l'exemple 2, ont eu plus de facilités à réutiliser leur démarche de recherche en adaptant leur méthode de construction des exemples pour les multiples de 3 puis de 5. Chercher à construire les exemples par le questionnement semble ainsi faciliter la production de résultats partiels sur la conjecture. Pour étayer cette hypothèse, nous avons relevé, dans une production d'élèves de terminale scientifique (pré-expérimentation 2), la difficulté à questionner de nombreux exemples utilisés comme produit fini. L'extrait de la figure 7.5 est la production finale du groupe et montre que les élèves ont essayé de trouver différentes régularités en confrontant de nombreux exemples : régularité sur les dénominateurs (pour les trois premiers exemples), régularité entre les décompositions, régularité de la première fraction unitaire (qui pose problème pour $n = 9$ et $n = 11$). Ce questionnement des exemples ne leur a pas permis d'aboutir à la formulation d'un résultat partiel (ou même d'une conjecture) sur le problème pour une classe de nombres donnée. D'après les échanges au sein du groupe (échanges enregistrés), nous faisons l'hypothèse que cette difficulté provient en partie du manque de construction de ces exemples qu'ils ont trouvés par tâtonnements.


Oui, on peut trouver 3entiers naturels a, b, c tels que

$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

→ $n=4, a=2, b=3, c=6 \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

$\times 4/5$

→ $n=5, a=2, b=4, c=20 \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

$\times 5/6$

→ $n=6, a=3, b=4, c=12 \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

$\times 6/7$

→ $n=7, a=3, b=6, c=14 \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}$

$\times 7/8$

→ $n=8, a=4, b=6, c=12 \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$\times 8/9$

→ $n=9$, $\frac{4}{9} = \frac{1??}{4}$

$\times 9/10$

→ $n=10, a=5, b=10, c=10 \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$

$\times 10/11$

→ $n=11$ $\frac{4}{11} = \frac{1??}{5}$

$\times 11/12$

→ $n=12, a=6, b=9, c=18 \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$

Figure 7.5 – Extrait d'une production d'élèves de terminale scientifique (pré-expérimentation 2).

L'analyse des pré-expérimentations a également mis en évidence, dans le travail des élèves et des étudiants, le rôle primordial de ce geste dans le passage à des procédures mettant en œuvre une démarche expérimentale. La construction et le questionnement des exemples s'effectuent par des allers et retours entre la recherche de décomposition pour certaines valeurs de n et la volonté de généraliser pour tout entier n. Ce geste favorise ainsi le processus dialectique entre manipulation des objets mathématiques en jeu et élaboration d'éléments théoriques, comme l'illustre l'exemple 3.

Exemple 3 : Extrait d'une recherche d'étudiants de la pré-expérimentation 4.

Après avoir montré que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n pair grâce à l'identité $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$, le groupe cherche à montrer qu'il existe des solutions pour tout n impair. Pour cela, ils s'appuient sur l'identité pour les nombres pairs qu'ils essaient de modifier en prenant comme première fraction unitaire $\frac{1}{n+1}$ au lieu de $\frac{1}{n}$. Ils essaient sur un exemple.

> E1 : Bah j'ai réussi à trouver $\frac{1}{11}$, c'est $\frac{1}{12} + \frac{1}{264} + \frac{1}{264}$. [...] $\frac{1}{n}$ est égal à $\frac{1}{n+1}$ plus.
>
> E3 : $(n+1) + (n+1) \times 2$. C'est $(n+1) \times 2$ parce que $(n+1)$ enfin quand tu prends 11 ça fait 234 euh 232.
>
> [...]
>
> E2 : J'ai trouvé grâce à toi, pour les nombres impairs, ça fait $\frac{1}{9}$ plus le, là en fait, ça fait le nombre pair au dessus [...] Ça fait $\frac{1}{10}$.
>
> E1 : Oui ça j'ai trouvé ça déjà.
>
> E3 : $n+1$.
>
> E2 : Plus $\frac{1}{9\times10\times2} + \frac{1}{9\times10\times2}$.
>
> E3 : $(n+1) \times 2$ tu fais ?

Dans ce premier extrait, à partir d'un exemple, les étudiants E1 et E3 essaient de déterminer une formule algébrique alors que l'étudiant E2 essaie de construire, par analogie, un autre exemple. Dans la suite, ce dernier se rend compte que leurs exemples sont des décompositions du type $\frac{1}{n}$ et non $\frac{4}{n}$: « Oui, 11 ça fait $\frac{1}{11}$ ça fait que tu n'as plus 4 en fait [...] il est passé où ton 4 ? »

Ils reprennent ensuite leur recherche en étudiant la décomposition de $\frac{4}{11}$.

> E2 : Et si on fait $\frac{4}{12} + \frac{4}{264} + \frac{4}{264}$.
>
> [...]
>
> E1 : Non, il te faut un 4 au début et que des 1 après.
>
> E2 : Ah oui.
>
> E1 : Alors ensuite, $\frac{4}{11} - \frac{1}{12}$, ça divisé par 2, alors attends, il faut que j'écrive ma logique sinon je vais la reperdre. $\frac{4}{n} - \frac{1}{n+1}$ ensuite sur 2, fois n non ce n'est pas ça.
>
> [...]
>
> E2 : Si là on prend notre 4, en fait $\frac{4}{11}$ ça te fait $\frac{1}{\frac{12}{4}} + \frac{1}{\frac{264}{4}} + \frac{1}{\frac{264}{4}}$ donc est égal à $\frac{1}{3} + \frac{1}{66} + \frac{1}{66}$.

L'étudiant E1 essaie toujours de formaliser « sa logique », à l'aide d'un exemple, pour trouver une méthode de décomposition pour tout nombre impair. L'étudiant E2 a trouvé une décomposition pour $n = 11$ et veut ensuite tester sa méthode sur un autre exemple.

> E1 : Et tu as essayé pour d'autres chiffres ?
>
> E2 : Je vais essayer pour celui là maintenant [...]. Donc attends, 4, on va faire pour $\frac{4}{231}$ ok ?
>
> [...]
>
> E1 : 1 divisé par 232.
>
> E2 : Donc ça fait 1 divisé par.
>
> E3 : En fait tu fais $(n+1)$.

E2 : 232 divisé par, euh, il faut que je mette entre parenthèses, divisé par 4, j'essaye hein. Là tu avais fait $11 \times 12 \times 2$ c'est ça pour 264 ? Ouais. (Il tape sur sa calculatrice.)

[...]

E3 : Il avait fait $(n + 1) \times 2$ [...]. Mais si j'avais trouvé, il suffit, $\times 4$ c'était, $\times 2$ et $\times 2$.

E2 : $\frac{1}{\frac{231 \times 232 \times 2}{4}}$ (il tape sur sa calculatrice) j'ai trouvé, c'est ça, ma formule est juste, ça fait égal à $\frac{1}{\frac{232}{4}} + \frac{1}{\frac{231 \times 232 \times 2}{4}} + \frac{1}{\frac{231 \times 232 \times 2}{4}}$.

L'étudiant E1 n'arrivant pas à établir une formule générale, revient sur les exemples, en collaboration avec l'étudiant E2. Après avoir trouvé une décomposition pour $n = 231$, les rôles s'inversent, l'étudiant E1 voudrait faire un autre exemple pour comprendre alors que l'étudiant E2 veut simplifier et formaliser.

E2 : En fait il faut prendre le pair que t'as juste au-dessus et après tu divises par 4.

E3 : Vas-y attends, et en mettant la formule ça fait quoi après ? Ça fait n fois.

E2 : Attends je, euh, ça fait $\frac{4}{n}$.

E3 : Égal $\frac{1}{\frac{n+1}{4}}$.

E2 : Égal $\frac{1}{\frac{n+1}{4}}$ oui.

E3 : Plus 1 sur.

E2 : Égal à 1 sur, non plus 1 sur.

E3 : Ouais plus, 1 sur.

E2 : $\frac{1}{\frac{n(n+1) \times 2}{4}}$, égal à 1 euh, plus, et après on va simplifier.

E3 : Bah tu ne mettrais pas de $\times 2$ tu ferais sur 2.

E2 : Bah oui c'est ce que je vais faire mais je vais le simplifier après parce que c'est comme ça qu'on a trouvé en fait, faut le noter comme on l'a trouvé et après.

E3 : 1 sur, plus encore $n(n + 1) \times 2$?

[...]

E2 : Ouais parce que on a fois 2 et divisé par 4 donc.

E3 : On a enlevé le $\times 2$.

[...]

E2 : Voilà on a (inaudible) le truc.

[...]

E2 : Non mais c'est toi (étudiant E1) qui m'a mis sur l'idée avec le 11 là.

E2 : On est fort quand même à trois.

Finalement le groupe réussit à formuler une identité simplifiée : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{4}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ qu'ils vérifient ensuite avec $n = 231$.

Les extraits des échanges montrent que les allers et retours entre les expériences sur des exemples et les tentatives d'écriture d'une formule générale sont porteurs de la formulation de l'identité simplifiée [4].

Le geste de *construction et questionnement des exemples* est donc primordial, d'une part pour l'engagement dans une procédure exploratoire, et d'autre part pour la mise en œuvre

4. Dans le paragraphe suivant (*Effectuer des contrôles locaux*), nous montrons que les étudiants vont formuler par la suite un résultat faux à partir de cette identité.

d'une démarche expérimentale. Il permet d'avancer dans les recherches et d'élaborer des résultats partiels sur le problème. Les analyses des pré-expérimentations montrent que ce geste a une place particulière dans la recherche des élèves et des étudiants. Soit ces derniers l'utilisent tout au long de leur recherche (pour s'engager dans le problème puis pour établir des résultats), soit ils refusent d'effectuer ce geste de nature empirique. Dans ce cas, ils préfèrent exploiter les procédures opératoires qui reposent sur la manipulation d'outils algébriques dont ils mettent en évidence la puissance de généralisation.

> Mais là ce que j'ai trouvé c'est pour dire qu'à partir de 2 c'est possible [...] mais le problème après c'est qu'il faut réussir à comprendre, il faut avoir un truc littéral pour dire que tout nombre qui correspond à ça marche. (Étudiant de la pré-expérimentation 4)

Cependant, les difficultés à mettre en œuvre les procédures algébriques conduisent le plus souvent les élèves et les étudiants à revenir à des procédures exploratoires reposant sur l'exploitation des exemples (M.-L. Gardes, 2012).

5. Effectuer des contrôles locaux.

Le principal contrôle local à effectuer dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus est le retour à la nature des nombres en jeu dans le problème. Ce geste est d'autant plus important à réaliser dans les procédures opératoires liées à l'utilisation de l'outil algébrique que la référence aux objets mathématiques manipulés est secondaire et peut être perdue. Les analyses des travaux des élèves des pré-expérimentations (notamment celles de la pré-expérimentation 1, cf. (M.-L. Gardes, 2010)) montrent que les élèves portent souvent une attention particulière à la nature des nombres en jeu au cours de leurs recherches. Nous donnons ci-dessous deux exemples.

Exemple 1 : Extrait de la recherche d'élèves de terminale scientifique (pré-expérimentation 1).

> E1 : n^2 est égal à 16 donc n est égal à
>
> E2 : à 4.
>
> E1 : à -4 ou à 4.
>
> E2 : Non à 4 parce qu'on n'a pas le droit à -4.
>
> E3 : Non à 4 puisque n est un entier naturel.
>
> E1 : Oui oui.

Les démonstrations des résultats partiels des élèves (par exemple l'équation a des solutions pour tout entier n pair) reposent souvent sur un raisonnement sur la nature des nombres en jeu.

Exemple 2 : Extrait de la recherche d'élèves de terminale scientifique (pré-expérimentation 1), phase d'élaboration de la preuve du résultat pour n pair où $a = \frac{n}{2}, b = a + 1, c = a \times b$.

> E1 : n il appartient à $\mathbb{N}$, n il appartient aux naturels, ça un naturel divisé par un naturel, ça reste un naturel.
>
> E2 : Ben non.
>
> E1 : Ben euh.
>
> E2 : $\frac{4}{7}$.
>
> E1 : Effectivement, mais si n il appartient, il appartient.
>
> (rires)

E1 : Mais ce n'est pas ce que je voulais dire en fait, c'est pour ça. n c'est un multiple de 2, dans ce qu'on a dit.

E2 : E1 vient d'inventer un monde où il n'y a pas de fractions, ouh.

[...]

E1 : n est un multiple de 2, donc là, a c'est égal à $\frac{n}{2}$ donc a c'est un naturel forcément ; b c'est $\frac{n}{2}+1$ donc ça marche aussi ; et c c'est $a \times b$, quand tu multiplies deux naturels, c'est forcément un naturel. Il n'y a pas besoin de faire par récurrence.

Comme le précisent les élèves, le retour à la nature des nombres en jeu dans la construction de l'identité leur permet de démontrer facilement le résultat, sans avoir recours à un raisonnement par récurrence. La mise en œuvre d'un tel raisonnement est en effet plus complexe car la propriété de récurrence est entre le rang n et le rang $n+2$ et non entre le rang n et le rang $n+1$ comme ils en ont l'habitude. Ce geste facilite ainsi l'avancée dans la recherche du problème et en particulier, l'élaboration de résultats partiels sur la conjecture. Dans (M.-L. Gardes, 2012), nous avons montré que la perte de familiarité des objets en jeu dans le problème est une difficulté liée à l'utilisation d'outils algébriques en théorie des nombres. L'exemple 3 montre que le non retour à la nature des nombres peut conduire les étudiants à formuler un résultat faux.

Exemple 3 : Extrait de la recherche d'un groupe d'étudiants de la pré-expérimentation 4.

Le groupe présente le résultat suivant[5] : pour tout nombre impair $n \geq 3$, on a $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{4}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$. Cette identité a été formulée à partir des exemples ($n = 11$ et $n = 231$) et vérifiée sur un exemple ($n = 231$). Lors de la formulation de la conjecture, ils n'ont pas contrôlé l'écriture algébrique en questionnant la nature des nombres en jeu. Lors du débat en classe entière, pour prouver leur résultat, ils expliquent qu'un nombre pair multiplié par un nombre impair est un nombre pair donc $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier. Mais ils ne spécifient rien sur $\frac{n+1}{4}$. Les étudiants ont des difficultés à comprendre que l'identité est bien vraie mais qu'elle ne permet pas de prouver leur résultat en raison de la nature des nombres en jeu. Pour expliquer cette difficulté, nous faisons l'hypothèse, d'une part que la parité est une notion naturalisée pour les étudiants, et d'autre part que l'expression $\frac{n(n+1)}{2}$ est dans leur milieu objectif. Ils ont pu, par exemple, l'étudier comme la somme des termes d'une suite arithmétique. Vérifier que c'est un entier ne leur pose donc pas de difficulté. Le fait qu'ils ne se posent pas la question de la nature de $\frac{n+1}{4}$ en fonction de n peut s'expliquer par la manière dont ils ont formulé et testé l'identité. Comme ils se sont appuyés sur des nombres congrus à 3 modulo 4 (11 et 231), l'expression $\frac{n+1}{4}$ est de fait un entier. La notion de divisibilité par 4 ne semble pas naturalisée chez ces étudiants. Cet exemple montre que la difficulté du retour à la nature des nombres en jeu est en partie liée à la connaissance des objets mobilisés.

6. Transformer l'équation initiale.

La plupart des élèves et des étudiants essaient, dans leur recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, de transformer l'équation initiale. Ce geste s'effectue au sein de procédures opératoires, par manipulations algébriques, comme l'illustrent les deux exemples suivants.

5. Nous reprenons et poursuivons ici l'exemple du paragraphe précédent p. 284.

Exemple 1 : se ramener à la résolution d'un système de deux équations (figure 7.6).

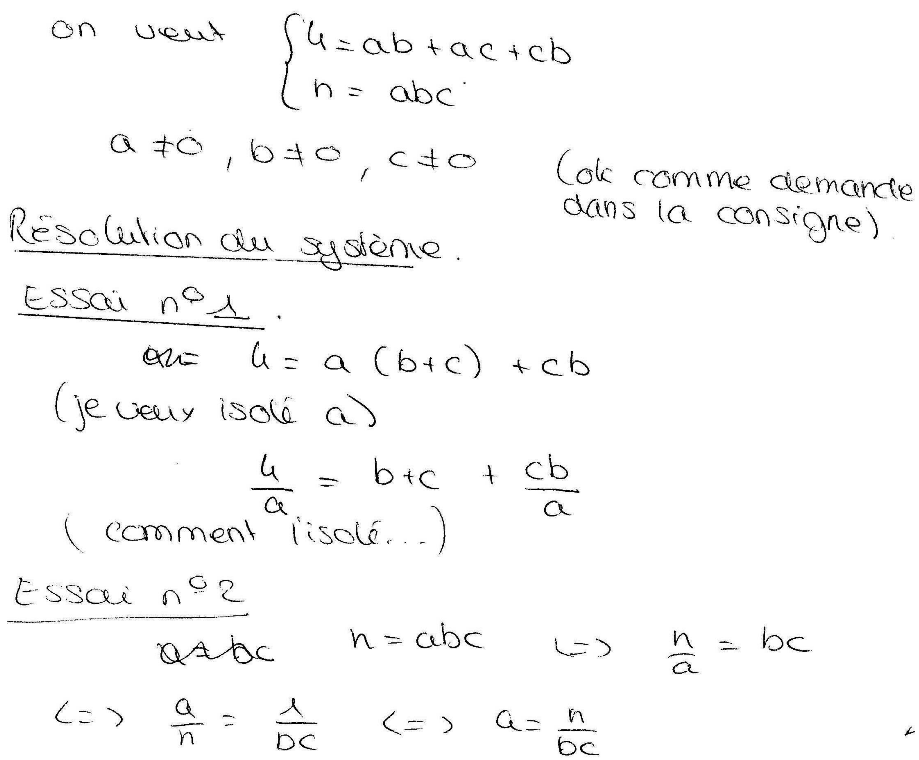


FIGURE 7.6 – Extrait de la production d'une étudiante de licence de mathématiques en troisième année (pré-expérimentation 5).

L'étudiante abandonne cette transformation de l'équation initiale car elle n'arrive pas à résoudre le système. Elle ne se rend pas compte, d'une part qu'elle a commis une erreur en posant le système (elle traduit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ par $a = c$ et $b = d$), et d'autre part que la résolution du système est difficile compte tenu du nombre d'inconnues et d'équations (elle ne dispose par ailleurs pas de technique pour résoudre ce type de système). Cela révèle des difficultés de mobilisation de connaissances d'arithmétique (comme l'égalité de deux fractions) et algébriques (comme les systèmes d'équations) acquises dans les classes antérieures.

Exemple 2 : se ramener à la résolution d'une équation du second degré (figure 7.7).

Cet élève cherche à simplifier le problème en exprimant a en fonction de n, b, c puis en posant $b = c$. Il arrive alors à la résolution d'une équation du second degré en b. Outre les erreurs de calcul et de raisonnement[6], la difficulté est d'exploiter l'équation du second degré en b avec comme paramètre n : quelles conditions poser sur le discriminant, quelles informations donnent les solutions etc. Cette étude demande aux élèves la mobilisation de connaissances algébriques et la mise en œuvre d'un raisonnement qui *a priori* ne sont pas disponibles. En effet l'étude d'équation avec paramètres n'est pas ou est peu travaillée dans l'enseignement secondaire.

6. Il isole a et n à partir de la même équation.

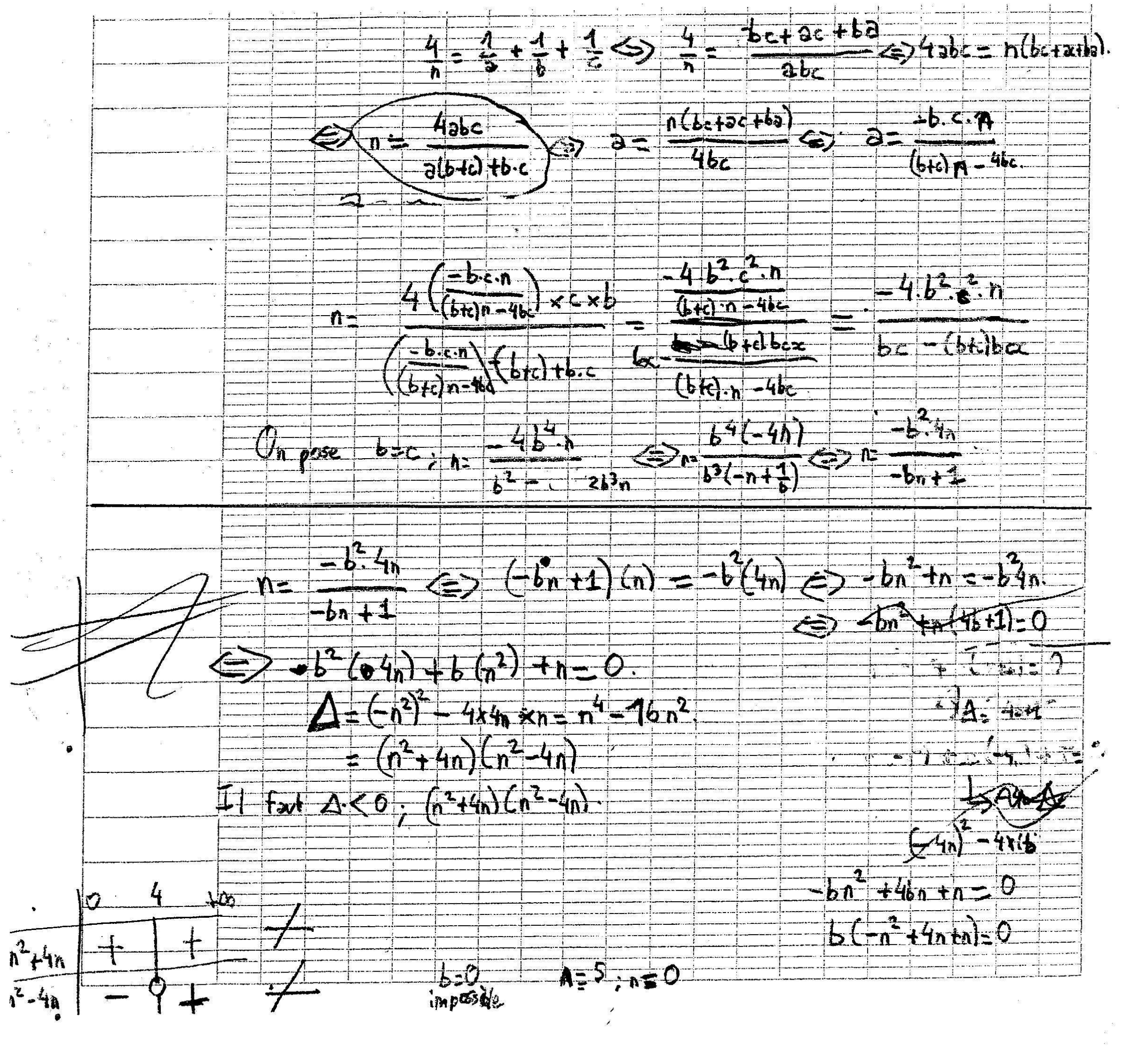
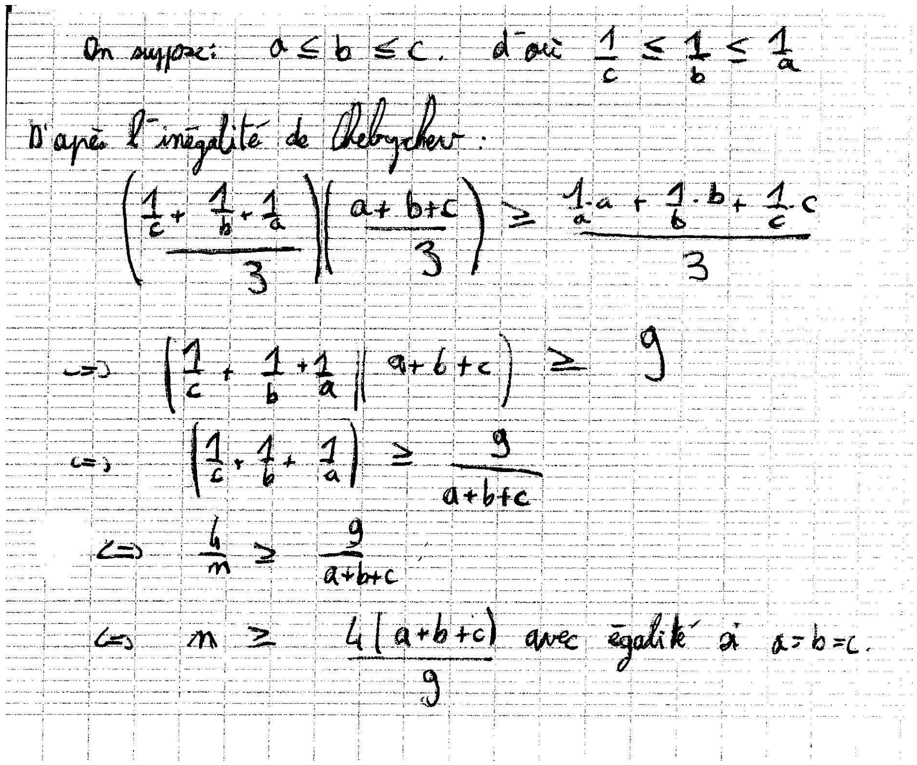


FIGURE 7.7 – Extrait de la production d'un élève de terminale scientifique (pré-expérimentation 2).

Ces deux exemples illustrent le fait que certains élèves cherchent souvent à transformer l'équation initiale mais qu'ils rencontrent des difficultés dans la réalisation de ce geste ou dans son exploitation. Le recours à ce geste peut s'expliquer par la volonté de traiter le problème dans un cadre général, l'algèbre est alors un outil pertinent et puissant. Comme nous l'avons déjà signalé, les élèves semblent conscients de la performance de l'outil algébrique pour traiter des problèmes généraux et pour prouver des énoncés universels. Sur la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, les élèves ont du mal à effectuer ce geste car les connaissances mathématiques nécessaires sont peu ou ne sont pas disponibles. Cela entraîne des erreurs de calcul et des difficultés à mener certains raisonnements. La pré-expérimentation 3 avec des élèves d'un club de mathématiques (cf. exemple 3 ci-dessous) montre que ces difficultés sont en partie levées grâce à leur expérience de résolution de problèmes de recherche et à la mobilisation de leurs connaissances mathématiques.

Exemple 3 : utiliser l'inégalité de Tchebychev pour établir un résultat partiel (figure 7.8).



On suppose : $a \leq b \leq c$. d'où $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

D'après l'inégalité de Tchebychev :

$$\left(\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{3}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{\frac{1}{a}\cdot a+\frac{1}{b}\cdot b+\frac{1}{c}\cdot c}{3}$$

$$\iff \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)(a+b+c) \geq 9$$

$$\iff \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\iff \frac{4}{n} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\iff n \geq \frac{4(a+b+c)}{9}$$ avec égalité à $a=b=c$.

FIGURE 7.8 – Extrait de la production d'élèves de lycée (pré-expérimentation 3).

Ces élèves ont utilisé l'inégalité de Tchebychev [7] pour transformer l'équation initiale du problème en inéquation et démontrer que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tous les multiples de 4. Le geste de *transformation de l'équation initiale* n'a pas posé de difficulté et a permis une avancée dans la recherche du problème. Cependant, on peut noter qu'ils ont eu recours à un outil puissant et complexe pour mettre au jour un résultat qui peut être établi avec des outils plus simples (par exemple grâce à l'étude du cas particulier $a = b = c$ et de la notion de multiples).

7. Implémenter un algorithme.

Comme nous l'avons déjà précisé, l'algorithmique a été récemment introduite dans les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire. Les élèves des pré-expérimentations n'avaient donc pas ou avaient peu travaillé ce domaine au cours de leur enseignement de mathématiques. De fait, aucune procédure faisant appel à de l'algorithmique n'a été relevée dans les travaux des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus. En revanche, dans la pré-expérimentation 5, un étudiant suivait un cursus en informatique et le groupe a construit et implémenté un algorithme « qui trouve des solutions ». Cette piste de recherche a constitué un élément important dans leur recherche. D'une part, cela leur a permis de mettre au jour des erreurs de raisonnement commises dans l'exploitation de procédures opératoires, comme en témoigne un extrait de leur production finale :

> $\forall a, b = c$ (permutation près) « à la main » nous avions exclu ce cas, mais avec l'algo, on trouve des solutions ($a = 42, b = c = 63, n = 72$).

7. Si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ et $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$. De même, si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.

D'autre part, cela leur a permis de relancer la recherche du problème dans une phase de découragement. L'algorithme était une piste évoquée à la fin de la seconde séance et ils sont arrivés à la troisième séance avec un algorithme programmé. A la fin de l'expérimentation, ils auraient aimé avoir une séance supplémentaire pour exploiter davantage cette piste de recherche. En effet, ils précisent que l'algorithme leur a donné « des résultats mais pas de solutions ». Ce qu'ils expriment est le fait que l'algorithme leur a donné des décompositions pour certaines valeurs de n données mais pas de solution générale pour le problème. Nous faisons l'hypothèse que cela vient de leur interprétation du problème où ils cherchent a, b, c qui donnent un entier naturel n. L'algorithme est implémenté de cette manière : a, b, c varient entre 1 et 100, n entre 1 et 500 et le programme donne les valeurs de a, b, c, n pour lesquelles $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Ce programme est donc assez lent (en temps de calcul), pas très efficace pour trouver de nombreuses décompositions et surtout, ne permet pas de comprendre comment trouver des décompositions. Il permet donc aux étudiants de se rendre compte des erreurs effectuées dans leurs procédures opératoires mais il ne leur permet pas de s'engager dans une démarche expérimentale par des allers et retours entre les exemples trouvés par l'algorithme et l'élaboration d'éléments théoriques locaux.

Cet exemple montre à la fois les apports et les difficultés engendrées par ce geste dans la recherche des étudiants. Comme l'illustre bien les travaux de Mizony sur la conjecture (cf. chapitres 4 et 5), l'implémentation d'un algorithme est une piste de recherche pertinente et efficace pour avancer dans la recherche du problème dans la mesure où cela permet, d'une part de mettre en œuvre une démarche expérimentale en utilisant cet outil pour élaborer des allers et retours entre l'expérience et les concepts mathématiques sous-jacents, et d'autre part de trouver des résultats partiels sur la conjecture. Cependant, ce geste doit s'appuyer sur une connaissance approfondie du problème, des questions qui se posent et des objets mathématiques en jeu afin de construire un algorithme pertinent et efficace pour la résolution d'une question. Pour l'implémentation, cela nécessite que l'outil utilisé soit naturalisé afin de ne pas apporter de difficulté supplémentaire. Dans les années à venir, l'algorithmique prenant davantage de place dans les programmes de mathématiques, nous faisons l'hypothèse que cela favorisera l'émergence de ce geste dans la recherche des élèves et des étudiants sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Conclusion.

Cette analyse *a priori* montre la pertinence de la notion de « geste » pour étudier les processus de recherche d'élèves et d'étudiants engagés dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus. Cette notion permet en effet de prendre en compte la mise en œuvre d'une démarche expérimentale au sein de la recherche du problème, ainsi que les aspects dialectiques de l'activité de recherche mathématique, entre mobilisation, acquisition de connaissances et développements d'heuristiques.

Cette analyse met également en évidence les apports de l'utilisation de ces gestes par les élèves et les étudiants dans les recherches ainsi que les difficultés rencontrées dans leur exploitation. Certains gestes sont primordiaux dans la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus par des élèves et étudiants car ils permettent et favorisent la mise en œuvre d'une démarche expérimentale, porteuse d'avancées pour la recherche du problème (liens effectués entre différentes pistes de recherche, formulation de conjecture, élaboration de résultats partiels, etc.). Ces gestes sont les suivants : *désigner des objets*, *construire et questionner des exemples*, *effectuer des contrôles locaux*. Concernant le geste de *réduction du problème aux nombres premiers*, nous avons pu observer qu'il n'est pas souvent effectué par les élèves et les étudiants. Lorsqu'il apparaît, il n'est ni premier, ni spontané mais construit au cours de la recherche ou utilisé en acte par des va-et-vient entre des manipulations de décompositions pour certaines valeurs de n et l'utilisation de la propriété multiplicative *si l'équation a une solution pour un entier naturel n, elle a une solution pour tout multiple de n.* Grâce à cette propriété, le geste de *réduction du problème*, qu'il soit spontané, construit ou en acte permet aux élèves d'avancer dans la recherche de la conjecture en limitant la recherche à l'étude de certaines classes de nombres. Notons que ce geste est construit au cours de la recherche du problème et pour les besoins de sa résolution, il leur permet de (re)construire des connaissances d'arithmétique, notamment sur les nombres premiers. Le geste de *transformation de l'équation initiale*, davantage lié aux procédures opératoires, est souvent effectué par les élèves. Cependant il est peu productif. Cela semble s'expliquer par la nature du problème et les connaissances mathématiques (notionnelles et heuristiques) à mobiliser qui ne sont *a priori* pas à leur portée. Enfin, les analyses ont montré que deux gestes sont peu effectués par les élèves et les étudiants, le geste *introduire un paramètre* et le geste *implémenter un algorithme*. Ces deux gestes émergent au sein de procédures opératoires et algorithmiques. Or, ces deux types de procédures sont difficilement exploitées par les élèves et les étudiants, par non mobilisation ou par absence de connaissances notionnelles en algèbre, en algorithmique et en programmation.

Au vu de ces analyses, une hiérarchisation des gestes dans la recherche des élèves se dessine, avec des gestes souvent utilisés et favorisant une recherche productive sur la conjecture, un geste souvent utilisé mais peu productif et des gestes peu ou non exploités. Pour favoriser une recherche riche et productive des élèves et des étudiants, il est donc important de construire un milieu qui permette l'émergence de tous les gestes, avec une attention particulière aux gestes liés à la mise en œuvre d'une démarche expérimentale et à la construction de connaissances qui semblent davantage efficaces pour la recherche des élèves.

Dans le paragraphe suivant, nous décrivons un milieu matériel initial qui, dans un premier temps, permet de dévoluer la recherche du problème aux élèves et qui, dans un second temps, évolue pour maintenir la dévolution tout au long de la séance et pour favoriser l'avancée dans la recherche avec la production de résultats partiels.

7.3 Caractérisation du milieu matériel initial

Dans les chapitres 6 et 7, nous avons identifié cinq éléments importants pour caractériser un milieu matériel favorisant l'engagement dans la recherche du problème et la dévolution de la recherche du problème aux élèves :

1. Une organisation didactique spécifique prenant en compte divers aspects du travail du mathématicien (temps ouvert, accès à la documentation, diversité des échanges, jubilation dans le processus de création) ;
2. Des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques permettant la manipulation des objets mathématiques en jeu dans le problème ;
3. Une représentation de l'activité de recherche mathématique ;
4. Une formulation de l'énoncé incitant à l'action ;
5. Des outils technologiques (calculatrice avec calcul fractionnaire et ordinateur) mis à disposition.

Les analyses des pré-expérimentations, réalisées au chapitre 6, confirment que ces éléments suffisent à réaliser la dévolution de la recherche liée au problème aux élèves sur un temps court (environ une heure). Cependant, elles mettent en évidence l'insuffisance de ce milieu pour maintenir la dévolution tout au long de la recherche (deux heures et plus) et pour assurer l'avancée de la recherche et en particulier la production de résultats partiels. Nous identifions deux raisons majeures pour expliquer ce phénomène. La première est liée au contrat didactique mis en place au sein de la classe. Transmettre une certaine représentation de l'activité de recherche mathématique ne suffit pas pour mener une recherche effective sur un problème ouvert (au sens de Arsac et Mante). Par exemple, savoir qu'un problème peut se chercher longtemps avec des phases de recherches infructueuses ne permet pas de se rendre compte de la dimension affective de la recherche mathématique (par exemple les sentiments de découragement ou de joie) et de la manière de réagir face aux échecs. Trouver des leviers pour persévérer dans la recherche, tels que le changement de point de vue ou le recours à de la documentation, sont alors des difficultés pour les élèves. Avoir une représentation de l'activité de recherche mathématique sans mettre en œuvre une pratique régulière de résolution de problèmes de recherche peut donc constituer un obstacle pour recevoir certaines rétroactions du milieu. Nous avons, par exemple, observé les difficultés de certains élèves à reconnaître la valeur de leurs résultats partiels et par suite, leur utilisation dans leurs recherches ultérieures. Le processus dialectique entre mobilisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques est plus difficilement mis en œuvre et l'avancée du problème s'en trouve freinée. La seconde raison est le manque de connaissances mathématiques notionnelles ou liées à l'activité de recherche. Le manque ou la non mobilisation de certaines notions mathématiques (multiple, nombre premier, parité) peut constituer un obstacle pour trouver des résultats partiels sur la conjecture (par exemple passer de la décomposition pour $n = 2$ au résultat partiel suivant : il existe une décomposition pour tout n multiple de 2). Le manque de connaissances mathématiques liées à l'activité de recherche peut être un frein pour la phase d'élaboration de preuves. Par exemple, penser que des exemples suffisent pour prouver une proposition universelle ne permet pas d'entrevoir la nécessité d'une démonstration et par suite, d'entrer dans une démarche de preuve. Ces aspects, liés à la mobilisation de connaissances mathématiques, sont très importants car ils ont un effet sur le ressenti des élèves en situation de résolution de problèmes de recherche. Ayant des difficultés à trouver des résultats ou à construire de nouvelles connaissances sur le problème en jeu, ils ne perçoivent pas l'intérêt de telles activités pour leur apprentissage des mathématiques d'une part, et pour leur préparation aux examens d'autre part.

Cette analyse confirme l'importance d'identifier des éléments supplémentaires, notamment des connaissances mathématiques et une pratique d'activité de recherche, permettant au milieu initial d'évoluer et de garantir une dévolution de la recherche sur un temps long ainsi que des avancées productives. L'analyse *a priori* a mis en évidence l'importance de tels éléments pour l'émergence des gestes de la recherche. Nous faisons l'hypothèse que les éléments suivants favorisent la dynamique du milieu :

- des connaissances mathématiques notionnelles dans plusieurs domaines : en arithmétique (notions de multiple, critères de divisibilité, parité, nombre premier, congruences, le théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers), en algèbre (résolution d'équations du second degré avec paramètres, résolution d'équations avec la méthode des somme et produit des racines d'un polynôme, résolution de systèmes d'équations linéaires à paramètres) et en algorithmique, programmation (instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie), boucle et itérateur, instruction conditionnelle, langage de programmation).
- des connaissances mathématiques heuristiques sur la preuve (savoir que des exemples ne permettent pas de prouver une propriété universelle, qu'un exemple peut prouver un énoncé existentiel), sur l'existence et la valeur de résultats partiels, sur différents raisonnements (par exemple sur le raisonnement plausible (Pólya, 1945)).
- une culture mathématique générale : avoir des notions d'histoire et d'épistémologie des

mathématiques sur le développement des mathématiques, sur le rôle des problèmes, sur la construction des concepts, savoir qu'il existe des problèmes qui résistent longtemps et que d'autres sont toujours des conjectures, etc.
– une pratique régulière et fréquente d'activités de recherche mathématique : accepter de ne pas trouver de résultats, réagir dans les phases de recherches infructueuses, accepter de ne trouver que des résultats partiels et en reconnaître la valeur, explorer de nombreuses pistes, changer de cadre, étudier et questionner des cas particuliers, étudier pourquoi une piste échoue, etc.

Nous faisons l'hypothèse que ces deux derniers éléments permettent aux élèves d'acquérir une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes, qui semble importante pour mener une recherche effective et productive sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Pour résumer, nous identifions cinq éléments qui caractérisent un milieu favorisant une dévolution de la recherche et la production de résultats partiels sur la conjecture : des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques, une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes, une organisation didactique spécifique (avec un scénario sur plusieurs séances de recherche), un énoncé du problème incitant à l'action et la disponibilité de calculatrices programmables et d'ordinateurs. Nous faisons l'hypothèse que ces éléments assurent :

– la présence d'un milieu antagoniste où les élèves peuvent et savent interpréter les rétroactions spécifiques à ce type d'activité ;
– la dimension adidactique de la situation de recherche sur un temps long ;
– un accès à des savoirs mathématiques telles que certaines notions d'arithmétique (relatives aux nombres premiers, aux congruences, à l'algorithmique par exemple) et certaines heuristiques de la recherche mathématique (exploration de différentes pistes de recherche, réduction du problème, questionnement des exemples, implémentation d'un algorithme, etc.).

Ces trois aspects font référence aux trois critères (un milieu porteur de déséquilibres, un milieu qui développe l'autonomie des élèves et un milieu favorisant l'accès à des savoirs mathématiques) que nous avons retenus dans le chapitre 2, pour définir un milieu antagoniste de type expérimental favorisant les aspects dialectiques de l'activité de recherche mathématique.

7.4 Conclusion

L'analyse *a priori* de la situation expérimentale de type laboratoire autour de la conjecture d'Erdös-Straus s'est effectuée en trois temps.

Dans un premier temps, nous avons déterminé différentes procédures mathématiques qui pourraient être mises en œuvre par des élèves de terminale scientifique engagés dans l'étude de la conjecture afin d'établir des résultats partiels. Ces procédures sont nombreuses et de natures différentes. Nous les avons classées en deux catégories selon le premier geste de la recherche effectué : des procédures exploratoires qui s'effectuent à partir de la construction d'exemples et des procédures opératoires qui s'appuient sur des manipulations algébriques. Nous faisons l'hypothèse que les procédures exploratoires sont plus efficaces pour avancer dans l'étude de la conjecture et en particulier, pour la production de résultats partiels. D'une part, elles favorisent une démarche de type expérimentale en appui sur la manipulation des objets mathématiques en jeu, et d'autre part elles font appel à des connaissances mathématiques (notionnelles et heuristiques) disponibles et mobilisables par des élèves de terminale scientifique. Nous avons également relevé un lien privilégié entre les deux visées de la recherche que nous avons identifiées et la nature des procédures. Les procédures exploratoires sont associées à une étude de la conjecture par recherche de décompositions effectives alors que les procédures opératoires sont privilégiées dans la quête de la vérité de la conjecture.

Dans un second temps, nous avons affiné l'analyse *a priori* des processus de recherche des élèves en mettant à l'épreuve notre grille d'analyse. L'analyse globale des processus de recherche en termes de dimensions organisatrice et opératoire montre que les élèves sont susceptibles de s'engager dans deux types de recherche : une recherche dirigée par la quête de la vérité de la conjecture, de nature algébrique et peu articulée avec le caractère expérimental du problème et une recherche privilégiant la construction de décompositions, de nature expérimentale mais peu articulée avec la phase d'élaboration d'une preuve. Même si une démarche est privilégiée par les élèves, des articulations et des interactions entre les deux types de recherche peuvent se réaliser et permettre des avancées dans l'étude de la conjecture. L'analyse à une échelle plus locale, à l'aide de la notion de « geste », a montré que cet outil est pertinent pour étudier le travail de recherche effectif des élèves et des étudiants. Il permet en effet de mettre en évidence trois éléments essentiels des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans l'étude de la conjecture :

- l'origine des avancées de la recherche ;
- les ressorts de la dimension expérimentale ;
- l'apport d'un travail dialectique entre la mobilisation de connaissances et le développement d'heuristiques.

Notons que nous avons identifié que les gestes associés à des procédures opératoires (*introduire un paramètre* et *implémenter un algorithme*) sont moins présents dans les recherches des élèves. Nous l'expliquons par la difficulté des élèves à mobiliser certaines connaissances en algèbre, algorithmique ou programmation.

Dans un troisième temps, nous avons affiné la construction d'un milieu antagoniste de type expérimental favorisant les aspects dialectiques de l'activité de recherche mathématique. Nous avons ainsi déterminé cinq éléments pour caractériser un milieu favorisant une dévolution de la recherche aux élèves pendant un temps long d'une part, et leur permettant d'avancer dans l'étude du problème avec la production de résultats partiels d'autre part. Ces éléments sont les suivants : des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques, une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes, une organisation didactique spécifique, un énoncé du problème incitant à l'action et la disponibilité de calculatrices programmables et d'ordinateurs.

Ces analyses clôturent l'élaboration du modèle de milieu expérimental *a priori* (au sens de Bloch) de la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans le chapitre suivant (chapitre 8), nous présentons la construction d'une expérimentation de type laboratoire avec des élèves de terminale scientifique pour mettre à l'épreuve cette situation didactique. Nous décrivons son organisation didactique et le choix des variables didactiques effectué, puis nous détaillons l'élaboration du milieu matériel initial des élèves.

Chapitre 8

Construction de l'expérimentation en laboratoire avec des élèves de terminale scientifique

Sommaire

L'objectif de notre recherche est l'analyse des processus de recherche d'élèves et de chercheurs engagés dans une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Les chapitres précédents ont montré les potentialités de ce problème pour réaliser cette étude. L'analyse *a priori* de la situation expérimentale de type laboratoire autour de la conjecture d'Erdös-Straus (chapitre 7) a mis en évidence l'importance de construire un milieu matériel initial spécifique, pour favoriser une recherche effective et riche du problème par des élèves. L'objectif principal de cette expérimentation est de construire et mettre en œuvre une situation didactique autour de la conjecture d'Erdös-Straus avec ce milieu spécifique afin de mener une analyse détaillée des processus de recherche des élèves engagés dans la recherche de la conjecture. Nous avons choisi de faire une expérimentation de type laboratoire, c'est-à-dire sur un petit nombre d'élèves et dans un contexte hors-classe, afin de neutraliser certains paramètres dûs à la classe (par exemple le rôle de l'enseignement, le temps didactique contraint) et nous focaliser sur d'autres paramètres intervenant dans les processus de recherche (par exemple l'influence du bagage mathématique, de la pratique régulière d'activités de recherche ou encore les effets de la recherche individuelle sur la recherche collective). Une attention particulière sera portée à l'observation et l'analyse de l'évolution du milieu effectif des élèves tout au long de la recherche. Cette expérimentation permettra donc d'affiner, en retour, notre analyse *a priori* de la situation didactique créée autour de la conjecture d'Erdös-Straus, en vue de l'insérer à nouveau dans un contexte d'enseignement ordinaire.

Dans un premier paragraphe, nous décrivons le contexte spécifique dans lequel s'est déroulée l'expérimentation. Dans un second paragraphe, nous détaillons l'organisation didactique de la situation et en particulier le scénario proposé aux élèves. Dans un troisième paragraphe, nous présentons les choix des valeurs des variables didactiques de la situation. Le quatrième paragraphe est consacré au milieu. Après avoir détaillé une partie des enseignements suivis par les élèves de terminale scientifique engagés dans l'expérimentation, nous décrivons le milieu matériel initial des élèves, puis nous en détaillons l'évolution attendue au cours des différentes séances de recherche sur la conjecture. Enfin, dans un cinquième paragraphe, nous décrivons les différents supports prévus pour le recueil de données.

8.1 Le contexte

L'expérimentation s'est déroulée dans un lycée de Saône et Loire, le lycée Henri Parriat de Montceau-les-Mines. Cet établissement, classé « Ambition réussite » par le Ministère de l'Education Nationale, doit veiller à « apporter tout son appui aux élèves dont les familles ne disposent pas de suffisamment d'informations et de moyens pour faciliter le parcours scolaire ou universitaire de leurs enfants »(extrait du B.O n° 14 du 5 avril 2007). Pour cela, un des objectifs est d'« ouvrir les voies de l'excellence à ceux qui n'ont pas la chance d'évoluer dans un environnement familial économiquement fort ou culturellement porteur » (Ibid.). C'est dans ce cadre que ce lycée a mis en place, pour les élèves de terminale scientifique volontaires, un parcours « Excellence » en mathématiques. Dix élèves, suivant par ailleurs l'enseignement de spécialité Mathématiques, se sont inscrits pour suivre ce parcours. C'est dans ce parcours que notre expérimentation a eu lieu. Ce dispositif leur offre deux heures hebdomadaires supplémentaires de mathématiques, dispensées par leur enseignant de spécialité. Ce dernier est expérimenté et a un DEA (diplôme d'études approfondies) en didactique des mathématiques. Il s'est particulièrement intéressé, dans ses recherches, à la mise en place de problèmes de recherche en classe ordinaire et à ses effets à long terme (D. Gardes, 1998 ; D. Gardes & Bridenne, 2003). Le contrat didactique qu'il instaure au sein de sa classe, dans les cours de spécialité et dans le parcours « Excellence », inclut ainsi une forte dimension liée à l'activité de recherche mathématique [1]. Enfin, précisons que nous avons l'habitude de travailler avec cet enseignant, notamment pour la mise en œuvre de situations didactiques en classe. Les pré-expérimentations 1, 2 et 4 ont été réalisées dans ses classes.

8.2 Description de l'organisation didactique

Dans le chapitre 6, nous avons fixé deux organisations didactiques pour construire et mettre en œuvre une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus (cf. tableau 6.21 p. 262). Pour cette expérimentation, nous rappelons que nous avons choisi l'organisation didactique composée de plusieurs séances de recherche. Le scénario que nous proposons compte sept séances. Le tableau 8.1 présente les différents éléments de cette organisation :

1. Nous analysons en détail ce paramètre dans le paragraphe 8.4 (p. 304) qui traite de la description du milieu.

Scénario	Une séance de recherche individuelle. Quatre séances de recherche collective par groupes dont une avec rédaction d'une affiche. Une séance de mise en commun et de débat en classe entière. Une séance particulière pour la synthèse.
Accès à tout type de documents	Oui
Accès à Internet	Limité aux séances de recherche en classe et à la consultation de documents informatifs.
Outils pour assurer une continuité des recherches	Rédaction d'une synthèse à la fin de chaque séance de recherche et tenue d'un cahier de bord personnel.

FIGURE 8.1 – Tableau des choix effectués pour l'organisation didactique de la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus pour l'expérimentation de type laboratoire.

En ce qui concerne l'accès à la documentation, nous avons autorisé la consultation de tout type de documents (manuels scolaires, cours de mathématiques, ouvrages, dictionnaires, etc.). Nous avons limité l'accès à Internet pendant les séances en classe (à la consultation d'encyclopédies et de dictionnaires en ligne) et nous avons demandé aux élèves de ne pas le consulter en dehors des séances de recherche. Nous verrons que ce « contrat » passé avec les élèves a été respecté et qu'aucun élève n'a été sur Internet durant l'expérimentation afin de chercher des informations sur la conjecture (dont ils connaissaient le nom).

Ci-dessous, nous détaillons chaque séance du scénario en précisant sa forme, ses objectifs et les consignes données aux élèves.

Séance 1 : Dans un premier temps, nous présentons le déroulement de l'expérimentation aux élèves en mentionnant le nombre et la nature des séances ainsi que les dates de ces séances. Ensuite, cette première séance est consacrée à la recherche individuelle du problème puis à la formation de groupes de trois ou quatre élèves. Elle se termine par une mise en commun, au sein du groupe, des travaux de recherche individuelle. Les consignes données aux élèves sont les suivantes :

1. **S'engager individuellement** dans la résolution du problème (environ 1h).

2. **Préparer une synthèse** de votre recherche à exposer aux autres élèves de votre groupe lors de la prochaine séance (environ 15 minutes).

3. **Mettre en commun** les différentes synthèses individuelles de la première séance (environ 30 min).

La recherche individuelle est nécessaire et importante pour que le sujet entre en relation avec l'objet d'étude directement (sans intermédiaire, qui pourrait être l'enseignant ou une autre personne), s'approprier la problématique, réfléchir aux premières idées, premières conjectures, premières pistes de recherche. La première mise en commun au sein du groupe permet d'amorcer le travail de groupe et de préparer les prochaines séances de recherche collective sur le problème.

Séances 2 à 4 : Ces séances sont consacrées aux phases de recherche collective au sein d'un groupe de trois ou quatre élèves. Les consignes sont les suivantes :

> 1. **Reprendre en groupe** la recherche du problème (environ 1h30).
>
> 2. **Rédiger une synthèse** de vos recherches dans le cahier de bord du groupe qui servira pour la poursuite du travail collectif la semaine suivante (environ 30 min).

L'objectif est de favoriser les échanges entre pairs, la confrontation des idées de chacun afin de faire avancer plus rapidement la recherche d'une part et d'encourager la communication et le débat d'autre part.

Séance 5 : L'objectif de cette séance, pour les élèves, est la production d'une affiche présentant les résultats obtenus et d'un écrit détaillant leurs démonstrations.

> 1. **Reprendre en groupe** la recherche du problème (environ 1h15).
>
> 2. **Rédiger une affiche** commune pour le groupe qui servira de support pour le débat en classe entière. Cette affiche rendra compte de l'état de vos recherches. Préciser ainsi les résultats démontrés et leurs preuves, ceux restés à l'état de conjectures, les pistes qui seraient à développer etc. (environ 45 minutes).

Ce travail doit permettre aux élèves de préparer le débat en dressant la liste des solutions, conjectures, résultats élaborés par le groupe. L'affiche sera un support pour la présentation lors du débat. La rédaction écrite vise à obliger chaque groupe à un bilan précis de ses recherches mais également, à faire prendre conscience de la nécessité d'une bonne rédaction. Ce travail demande également aux élèves une exigence de démonstration qui leur permet de discuter de la validité de leurs résultats. Il y a donc un enjeu de preuve, de consolidation et structuration de leurs résultats.

Séance 6 : La sixième séance est consacrée à la mise en commun et au débat en classe entière à partir des productions de chaque groupe, rédigées à la séance précédente. Les consignes, pour les élèves, sont les suivantes :

1. **Présenter ses recherches** aux autres groupes.

2. **Débat** sur la validation des différents résultats.

3. **Rédaction** d'une synthèse par la classe.

Cette séance a pour objectif la communication des résultats en les soumettant au débat dans la classe. Il s'agit de faire sentir aux élèves la nécessité d'une preuve pour convaincre les autres et donc de leur faire prendre conscience des problèmes de vérité d'un énoncé. Les élèves sont amenés à discuter du vrai et du faux et à tester la validité de leurs preuves.

Séance 7 : Il s'agit d'une séance de synthèse incluant une phase d'institutionnalisation avec un travail sur des notions ou des raisonnements mathématiques utilisés par les élèves au cours de leur recherche. Cette phase d'institutionnalisation permet au professeur et aux élèves de reconnaître et légitimer les connaissances (mathématiques ou non) mises en jeu dans la situation didactique, même s'ils les voient de façon différente. Sur la conjecture d'Erdös-Straus cela peut, par exemple, porter sur une notion d'arithmétique telle que les congruences ou sur une heuristique particulière, comme la réduction du problème aux nombres premiers. Dans la phase de synthèse, le professeur apporte aux élèves de plus amples connaissances sur le problème qu'ils ont cherché ou plus généralement sur une notion, un concept, un outil, une démarche utilisés au cours de leur recherche. Pour cette expérimentation, le problème de recherche proposé aux élèves étant non résolu, les objectifs de la phase de synthèse sont, d'une part de leur apporter des informations sur l'avancée des travaux des mathématiciens, et d'autre part de valoriser leurs recherches en les mettant en perspective avec les travaux des chercheurs. Précisons que le contenu de cette séance de synthèse et d'institutionnalisation est pensé en amont, grâce à l'analyse *a priori*, mais se réalise au fur et à mesure de l'expérimentation, à partir des travaux de recherche des élèves [2].

8.3 Choix des variables didactiques

Dans le chapitre 6, nous avons fixé un certain nombre de valeurs des variables didactiques pour construire une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Le tableau 6.22, p. 263 résume les deux choix possibles, en fonction de la valeur de la variable didactique 1 (statut épistémique du problème). Pour cette expérimentation, nous rappelons que nous avons choisi d'indiquer aux élèves le statut épistémique de la conjecture. Le tableau 8.2 rappelle l'ensemble des choix des variables didactiques que cela implique.

2. Nous explicitons en détail la construction de cette séance dans le chapitre suivant, paragraphe 9.3.5.

V1 - Statut épistémique du problème	Indiqué aux élèves
V2 - Lettres pour désigner les solutions	a, b, c
V3 - Syntaxe de l'énoncé V3a - (prédicative, opératoire) V3b - (interrogatif, affirmatif)	 Hybride (prédicative, opératoire) Affirmatif
V4 - Indication sur le domaine d'exploration V4a - pour n V4b - pour a, b, c	 $n \geq 2$ a, b, c entiers naturels non nuls
V5 - a, b, c non nécessairement distincts	Non précisé
V6 - Séance préalable	Non
V7 - Outils technologiques V7a - disponibilité d'une calculatrice V7b - disponibilité d'un ordinateur	 Oui Oui
V8 - Aides écrites	Non

FIGURE 8.2 – Tableau des choix des variables didactiques pour l'expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique.

Le choix d'indiquer aux élèves le statut épistémique du problème a été fait en concertation avec l'enseignant. Connaissant bien ses élèves, leur niveau en mathématiques, leur pratique et leur culture mathématiques (nous décrivons ces éléments présents dans le milieu dans le paragraphe suivant 8.4), cette variable ne constituait pas, selon lui, un obstacle à l'engagement dans la recherche du problème. Nous avons présenté le problème aux élèves en l'intitulant *La conjecture d'Erdös-Straus*, sous la forme de l'énoncé 1 présenté p. 258, à savoir :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut trouver trois entiers naturels non nuls a, b et c tels que $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

Précisons que les calculatrices mises à disposition sont des calculatrices programmables de type TI-89. En ce qui concerne les ordinateurs, nous avons précisé que tout logiciel était autorisé.

La page suivante présente la page de garde du cahier de bord personnel des élèves avec le déroulement prévu de l'expérimentation, le matériel autorisé, celui non autorisé et l'énoncé du problème.

La conjecture d'Erdös-Straus

Déroulement :

Séance 1 : mardi 13 mars 2012
Travail individuel et rédaction d'une synthèse.

Séances 2 et 3 : mardi 20 mars 2012 et mardi 27 mars 2012.
Travail collectif.

Séance 4 : mardi 3 avril 2012.
Travail collectif puis rédaction d'une synthèse sur une affiche.

Séance 5 : mardi 10 avril 2012
Débat sur les affiches et rédaction d'une synthèse collective.

Séance 6 : mardi 17 avril 2012
Retour sur la synthèse collective.

Matériel autorisé : tous les documents sont autorisés (cours, manuel…) ainsi que les calculatrices et les ordinateurs (tout logiciel).

Matériel non autorisé entre les séances : Internet.

Enoncé :

> Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut trouver trois entiers naturels non nuls a, b et c tels que
>
> $$4/n = 1/a + 1/b + 1/c.$$

8.4 Le milieu

L'analyse *a priori* de la situation didactique construite autour de la conjecture d'Erdös-Straus ainsi que l'analyse des pré-expérimentations a permis d'identifier plusieurs caractéristiques d'un milieu favorisant, d'une part une dévolution de la recherche sur un temps long, et d'autre part des avancées dans la recherche du problème en termes de production de résultats partiels. Un objectif de cette expérimentation en laboratoire est de construire une situation didactique avec la présence d'un tel milieu pour les élèves afin d'analyser finement les processus de recherche mis en œuvre. Dans cette partie, nous décrivons précisément le milieu de cette expérimentation de type laboratoire. Pour cela, nous nous appuyons sur les deux types d'enseignement dispensés par l'enseignant de mathématiques à ces élèves. Il s'agit, d'une part d'un enseignement institutionnel (la spécialité Mathématiques), et d'autre part d'un enseignement spécifique et facultatif (le parcours « Excellence »). Dans un premier paragraphe, nous présentons les spécificités de l'enseignement de spécialité reçu par ces élèves et nous étudions le contenu du programme du parcours « Excellence ». Dans un second paragraphe, nous montrons en quoi ces enseignements semblent assurer la présence d'un milieu initial riche et potentiellement productif pour les élèves. Nous décrivons ensuite l'évolution attendue du milieu au cours des séances de recherche sur le problème. Précisons que l'analyse des effets de ce milieu sera traitée dans le chapitre suivant (chapitre 9) à partir de l'étude des travaux des élèves.

8.4.1 L'enseignement de spécialité Mathématiques et le parcours « Excellence »

Pour l'enseignant de mathématiques des élèves, ces deux types d'enseignement ne se différencient que par leur statut institutionnel. Il dispense le même type d'enseignement dans ces deux cours, à savoir un enseignement centré sur la résolution de problèmes. Le parcours « Excellence » s'inscrit dans la continuité de l'enseignement de spécialité Mathématiques, ce qui le légitime. Dans la suite de ce paragraphe, nous décrivons les spécificités de chaque enseignement (dues à leur statut institutionnel) en mettant en évidence leurs similarités et leurs articulations.

L'enseignement de spécialité Mathématiques.

L'enseignement de spécialité Mathématiques représente deux heures de cours hebdomadaires. Le programme est scindé en deux thèmes, *Arithmétique* et *Matrices et suites*[3] (BO n° 8 du 13 octobre 2011). L'enseignement de spécialité dispensé aux élèves de cette expérimentation est un enseignement centré sur la résolution de problèmes. Comme le préconise le nouveau programme, les notions sont introduites par des résolutions de problèmes.

> L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. (BO n° 8 du 13 octobre 2011, p. 18)

Par exemple, l'enseignant introduit la notion de congruences par le problème suivant :

> Quel jour de la semaine était le 14 Juillet 1789 ? Quel jour de la semaine sera le 1 janvier 3000 ?
>
> (On rappelle que les années finissant par 100 ne sont pas bissextiles sauf celles divisibles par 400).

3. Dans les anciens programmes les deux thèmes étaient *Arithmétique* et *Similitudes*.

Les élèves ont l'habitude d'aborder l'activité mathématique par la résolution de problèmes. Les cours en classe sont ponctués de situations de recherche de problèmes sous diverses formes (débat scientifique, travaux en groupes) et les devoirs à la maison (environ 12 sur l'année scolaire, cf. annexe B8 pour un exemple de sujet) ainsi que chaque devoir surveillé (environ 6 sur l'année scolaire) comptent au moins un problème ouvert (au sens de Arsac & Mante, 2007).

Exemple :

1. Déterminer l'exposant du facteur 3 dans la décomposition de 100!.
2. Déterminer une formule donnant l'exposant du facteur 3 de $n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Notons également que l'enseignant insiste sur l'importance du raisonnement en mathématiques et particulièrement en arithmétique. Le premier chapitre du cours de spécialité s'intitule *Les différents types de raisonnement* et présente les raisonnements par contraposée, par condition nécessaire et suffisante, par l'absurde, par disjonction de cas et par récurrence (cf. annexe B1). Précisons enfin que l'enseignant, dans son enseignement de l'arithmétique, présente aux élèves différents types de problèmes :

- des problèmes qui ont résisté longtemps. Par exemple, en présentant un petit historique de la démonstration du théorème de Fermat, l'enseignant met en évidence le nombre de mathématiciens qui ont cherché à le résoudre, le fait qu'ils étaient convaincus de sa vérité mais qu'ils cherchaient à la démontrer, la longueur de la démonstration et les outils mathématiques qu'elle mobilise et qu'elle a aussi permis de développer, le peu de mathématiciens qui sont capables de comprendre cette démonstration, etc. ;
- des problèmes d'énoncés simples mais dont la résolution mobilise des concepts et des outils mathématiques complexes, parfois de divers domaines (citons par exemple le postulat de Bertrand[4]) ;
- des problèmes non résolus (par exemple la conjecture des nombres premiers jumeaux[5]).

En apportant des éléments historiques et épistémologiques sur ces différents types de problèmes, il veut montrer aux élèves le rôle de la résolution de problèmes dans le développement des mathématiques et mettre en évidence que les mathématiques sont une science vivante et une activité humaine.

Le programme du parcours « Excellence ».

Le programme du parcours « Excellence » n'est pas imposé par les institutions, il a été élaboré par l'enseignant. La figure 8.3 donne le planning prévisionnel des 19 premières séances de l'année. Les sept séances suivantes ont été consacrées à notre expérimentation et les quatre semaines restantes ont fait l'objet de révisions pour l'examen (baccalauréat), notamment à partir d'un travail sur les démonstrations de théorèmes du cours à connaître.

4. Le postulat de Bertrand, appelé aussi théorème de Tchebychev, affirme qu'entre un entier et son double existe toujours un nombre premier.

5. Une paire de nombres premiers jumeaux est une paire de nombres premiers séparés par une valeur de 2, comme 5 et 7, 11 et 13. La conjecture des nombres premiers jumeaux est la suivante : *il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.* A noter les travaux récents de Yitang Zhang (Zhang, 2013) qui prouvent qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux dont l'écart entre les deux nombres de la paire est, non pas égal à 2, mais inférieur à 70 millions.

3 semaines d'exercices-ouverts (exos 1 à 5)
2 semaines d'apprentissage de la [calculatrice] TI 89 avec comme support les exercices TI
2 semaines sur l'introduction des nombres complexes (diaporama)
2 semaines sur le problème 1 (équation du 3^{e} degré)
2 semaines sur le problème 2 (exercices avec paramètres et conjectures à l'aide de GeoGebra)
4 semaines d'exercices-ouverts (exos 6 à14)
2 semaines sur la quadrature du cercle (non terminée)
2 semaines sur l'exo 1 du concours général 2011

FIGURE 8.3 – Prévisions de l'enseignant pour le parcours « Excellence » en mathématiques.

L'objectif de l'enseignant pour ce parcours « Excellence » en mathématiques est double : d'une part les préparer aux études supérieures (université, classe préparatoire, école d'ingénieurs) et d'autre part développer leur culture mathématique, en particulier par la pratique d'activités de recherche. Les activités proposées sont variées tant en ce qui concerne le type d'activités (activité de recherche, apprentissage de techniques, activité de découverte, etc.) qu'en ce qui concerne la forme (recherche individuelle, collective, sous la direction de l'enseignant avec un élève au tableau, « conférence » de l'enseignant). Les exercices-ouverts et les problèmes 1 et 2 (cf. annexes B2 et B4) permettent de travailler à la fois des notions et des démarches de recherche. Les exercices avec la calculatrice (cf. annexe B3) sont davantage centrés sur l'apprentissage de techniques. Les activités sur l'introduction des nombres complexes (cf. annexe B5) et sur la quadrature du cercle (cf. annexe B6) ont pour objectifs de développer une culture et une curiosité mathématiques et d'apporter des notions d'épistémologie des mathématiques. Nous détaillons ci-dessous ces différentes activités.

Les exercices-ouverts sont des exercices de type problème-ouvert (Arsac & Mante, 2007). L'enseignant les propose dans le but de faire chercher les élèves et de leur montrer différentes démarches. Les exercices sont très divers, tant sur la forme de l'énoncé (mathématisé ou pas) que sur le domaine ou les notions mathématiques en jeu. Nous donnons ci-dessous deux exemples (cf. annexe B2 pour la liste complète).

> *Exercice-ouvert 1* : Les « bêtes à mauvais caractère » sont des animaux qui ne peuvent cohabiter que sous une condition : être éloignés les uns des autres d'au moins huit mètres. Peut-on faire cohabiter 10 « bêtes à mauvais caractère » dans un enclos rectangulaire de 18 mètres de longueur et 15 mètres de largeur ?

Après une recherche individuelle puis une résolution collective du problème, l'enseignant invite les élèves à prendre du recul sur le travail effectué en se posant la question des apports de cet exercice en termes d'apprentissage. Pour cet exercice sont en jeu la modélisation d'une part, puis le principe des tiroirs [6] de Dirichlet d'autre part. Sur cet exercice, l'enseignant met

6. Le principe des tiroirs dit ceci : Si vous avez $n+1$ paires de chaussettes et n tiroirs, il y a au moins un tiroir où il y a deux paires de chaussettes.

également en évidence qu'un exercice avec un énoncé simple peut être un exercice difficile, et que la difficulté d'un exercice n'est pas toujours liée à la mobilisation d'outils élaborés.

Exercice-ouvert 2 : A quoi est égal le nombre $E = \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$?

(La réponse doit être justifiée sans l'aide de la calculatrice).

Cet exercice est différent du précédent dans le type de formulation de l'énoncé puisqu'il est déjà mathématisé. L'objectif ici est d'illustrer une démarche particulière pour montrer que deux nombres sont égaux. Grâce à la calculatrice, les élèves trouvent $E = 4$, la question devient donc : comment montrer que l'expression est égale à 4 ? A partir de cet exercice, l'enseignant institutionnalise ensuite différentes démarches pour montrer que deux nombres sont égaux et insiste sur la variété de ces démarches.

Dans le cadre du parcours « Excellence », le lycée prête à chaque élève une calculatrice TI-89. L'enseignant a prévu, dans le programme, des exercices pour apprendre le calcul formel sur ce type de calculatrice. Les exercices portent sur des calculs de dérivées, de limites, des résolutions d'équations et d'inéquations et sur des études de fonctions (cf. annexe B3). Pour l'enseignant, ces exercices ont pour but, d'une part de montrer que l'enjeu des mathématiques n'est pas que l'enseignement du calcul, et d'autre part de présenter la calculatrice TI-89 comme un outil de contrôle et d'aide à la formulation de conjectures. On notera, par exemple, que les exercices proposés montrent que tous les calculs demandés au niveau terminale peuvent être vérifiés avec ce type de calculatrice.

L'activité d'introduction des nombres complexes se situe à l'articulation de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques (cf. annexe B5). L'objectif de l'enseignant est de montrer qu'à la base d'un concept mathématique, il y a un problème qui se pose. Il revient sur la naissance du concept tout en faisant référence à des visions contemporaines. A travers différents textes historiques, il met en évidence la dimension humaine et vivante des mathématiques, en insistant sur les débats qui ont agité la communauté mathématique au sujet des nombres complexes et sur le temps d'acceptation de cette notion. Cette activité est liée aux autres activités de son programme, notamment à l'exercice-ouvert 2 (qui fait intervenir les formules de Cardan) et au problème 1 (étudié la semaine suivante) sur les équations du troisième degré dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'étudier l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cf. annexe B4).

Le problème 2 propose trois exercices avec paramètre (cf. annexe B4). L'enseignant a choisi de proposer ce type d'exercices (qui ne sont plus étudiés en lycée) car il les juge importants pour travailler le raisonnement en mathématiques, par exemple le raisonnement par disjonction de cas selon la valeur du paramètre. De plus, il les couple avec l'utilisation du logiciel GeoGebra, outil d'aide à la formulation de conjectures. L'étude de cas particuliers à traiter différemment est une démarche également mise en évidence.

Exemple d'exercice avec paramètre : Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation

$$(E_m) : (m-2)x^2 + 2(m-1)x + m + 1 = 0.$$

Discuter, suivants les valeurs de m, l'existence et le signe des solutions de cette équation.

L'activité sur la quadrature du cercle s'ancre aussi à l'articulation de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques (cf. annexe B6). Elle a pour but premier de développer la culture mathématique des élèves : comprendre l'expression utilisée dans le langage courant, comprendre le rôle central des problèmes en mathématiques, connaître le problème mathématique qui a résisté le plus longtemps, découvrir le cheminement des idées et la création des objets mathématiques. Cette activité permet également de montrer aux élèves divers aspects de la recherche mathématique tels que l'aspect erratique et non linéaire de la recherche, le rôle des pistes infructueuses, l'importance de déplacer ou reformuler un problème ou encore le fait que la recherche est liée aux outils d'une époque. Notons qu'elle met particulièrement en évidence l'importance du changement de cadre dans la résolution d'un problème : il s'agit d'un problème géométrique qui se résout analytiquement par une propriété algébrique du nombre π. De plus, cela suscite la curiosité des élèves, dans la mesure où ils découvrent des mathématiques qu'ils ne connaissent pas encore (par exemple les séries et les décompositions en séries). Il s'agit, pour l'enseignant, de montrer les mathématiques comme une science vivante, en voie de développement et non une science achevée.

Enfin, les séances consacrées au problème du concours général[7] de 2011 a pour objectif de préparer quelques élèves à ce concours. Notons que le sujet (cf. annexe B7) a été choisi par l'enseignant en accord avec ses objectifs, puisqu'il a proposé un sujet où le premier exercice a toutes les caractéristiques d'un problème-ouvert : énoncé simple, facile d'accès mais dont on ne sait pas comment le résoudre (cf. figure 8.4).

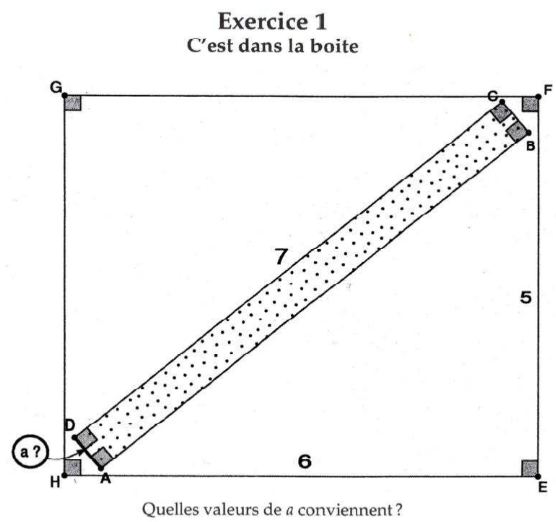


FIGURE 8.4 – Extrait du sujet du concours général des lycées de la composition de mathématiques, année 2011.

Pour conclure, les deux enseignements (la spécialité Mathématiques et le programme du parcours « Excellence ») montrent clairement des conceptions fortes et affichées par l'enseignement, sur l'épistémologie des mathématiques d'une part et sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques d'autre part.

8.4.2 Milieu matériel initial des élèves et évolution attendue

Rappelons que nous avons identifié cinq éléments pour caractériser un milieu matériel favorisant une recherche effective et riche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus (cf. Caractérisation du milieu, p. 292) : des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques, une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes, une organisation didactique spécifique (scénario sur plusieurs séances de recherche), un énoncé incitant à l'action et la

7. Le concours général a pour fonction de distinguer les meilleurs élèves ou apprentis et de valoriser leurs travaux. Il évalue les candidats sur des sujets conformes aux programmes officiels, mais dans le cadre d'épreuves plus exigeantes et plus longues que l'examen du baccalauréat (extrait du site du ministère de l'éducation nationale http ://eduscol.education.fr/pid23173/concours-general-des-lycees-et-des-metiers.html).

disponibilité de calculatrices programmables et d'ordinateurs. Les trois derniers éléments ont été pris en compte dans la construction de la situation didactique de cette expérimentation. Dans ce paragraphe, à partir des éléments du contexte spécifique dans lequel s'est déroulée l'expérimentation et en particulier, de l'analyse des contenus des enseignements de spécialité Mathématiques et du parcours « Excellence », nous analysons la présence ou non, d'une part des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques, et d'autre part d'une pratique distanciée d'activités mathématiques de recherche.

Les élèves suivent l'enseignement de spécialité Mathématiques où est enseignée l'arithmétique. Les notions de fractions, multiples et diviseurs, nombres premiers, parité, congruences, le calcul fractionnaire, les critères de divisibilité et des théorèmes d'arithmétique tels que la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, le théorème de Gauss ou le théorème de Bézout sont des savoirs qui ont été travaillés en cours. Nous faisons l'hypothèse que ce sont des connaissances présentes dans le milieu initial des élèves et disponibles. De plus, leur mobilisation dans ce type d'activité est probable étant donnée leur habitude de la résolution de problèmes ouverts. En algèbre, les élèves ont déjà travaillé la résolution d'équations du second degré avec des paramètres (cf. le problème 2, annexe B4) ou la résolution d'équation du troisième degré avec une méthode qui s'apparente à celle de la somme et produit des racines d'un polynôme (cf. question 3 du problème 1, annexe B4). En algorithmique et programmation, les élèves disposent *a priori* des connaissances enseignées depuis la classe de seconde, à savoir :

> Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).
>
> Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :
> – d'écrire une formule permettant un calcul ;
> – d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ; ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.
>
> Boucle et itérateur, instruction conditionnelle.
>
> Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :
> – programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
> – programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle. (Extrait des programmes de mathématiques de seconde (2009), première scientifique (2010) et terminale scientifique (2011)).

Ce domaine des mathématiques étant nouveau dans les programmes de mathématiques et n'ayant pas été beaucoup travaillé par l'enseignant, nous faisons l'hypothèse que ces connaissances peuvent être difficilement mobilisables par les élèves dans un contexte de résolution de problèmes.

Précisons également que les élèves, ayant suivi un apprentissage spécifique dans le cadre du parcours « Excellence », disposent *a priori* des connaissances nécessaires pour maîtriser l'utilisation de calculatrices programmables de type TI-89.

En ce qui concerne les connaissances heuristiques, elles sont travaillées à la fois dans le cours de spécialité Mathématiques et à la fois dans le parcours « Excellence », à travers la résolution de différents types d'exercices (cf. les exercices-ouverts, annexe B2 ou les exercices avec paramètres du problème 2, annexe B4). Ces activités permettent aux élèves de connaître : la notion de statut épistémique d'une conjecture, le rôle des exemples et des contre-exemples dans l'élaboration d'une preuve, différents types de raisonnements, la valeur des résultats partiels, etc.

Mises à part les connaissances en algorithmique et programmation, le milieu matériel des élèves contient *a priori* les connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques identifiées dans les analyses précédentes.

Dans ses enseignements et particulièrement au sein du parcours « Excellence », l'enseignant a élaboré un programme axé sur le développement d'une culture mathématique. Les différentes activités mathématiques qu'il propose permettent *a priori* aux élèves d'acquérir, d'une part une vision plus large et vivante de ce que sont les mathématiques, et d'autre part une expérience de l'activité de recherche mathématique. Les activités à l'articulation de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques mettent, par exemple, l'accent sur le rôle des problèmes en mathématiques. Les élèves peuvent appréhender différents aspects d'une recherche mathématique : les phases infructueuses, la diversité des approches, les différents cadres utilisés, les liens effectués entre différents domaines, etc. Les activités de recherche de problèmes leur permettent ensuite de découvrir différentes démarches pour aborder ou résoudre un problème. Ils prennent ainsi en charge leur recherche avec production de résultats et de preuves. Nous faisons ainsi l'hypothèse que cet enseignement permet aux élèves d'acquérir une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes, d'une part grâce à la construction d'une représentation de l'activité mathématique en général, et d'autre part grâce à la pratique régulière et fréquente de résolution de problèmes de recherche.

Quant à l'évolution du milieu, nous faisons l'hypothèse que la pratique régulière par les élèves de la résolution de problèmes va favoriser la dévolution du problème sur l'ensemble des séances de recherche (séances 1 à 5), notamment grâce à la persévérance, la richesse des points de vue et le plaisir de chercher. Couplée à leur bagage mathématique riche, nous supposons que cette expérience de recherche de problèmes leur permettra d'établir des résultats partiels rapidement, dès la fin de la première séance de recherche, lors de la première mise en commun au sein du groupe. Nous attendons en particulier deux résultats : la multiplicativité (si l'équation a des solutions pour un entier n, elle en a pour tout multiple de n) et la réduction aux nombres premiers (il suffit d'étudier la conjecture pour tout nombre n premier). Ces premiers résultats sont essentiels pour la dévolution de la recherche d'une part, et pour l'avancée dans la recherche d'autre part. En effet, l'exploitation de ces résultats et de leurs preuves ouvre des pistes multiples de recherche telles que l'étude de certaines classes de nombres, la distinction des nombres premiers modulo 4, la formulation de résultats pour les nombres premiers congrus à 3 modulo 4. Nous espérons que l'ensemble des résultats trouvés par les élèves ne reste pas à l'état de conjecture, vérifiée expérimentalement, mais que les élèves entreront dans une démarche d'élaboration de preuves. Leur culture mathématique devrait les y inciter. Concernant la recherche en elle-même, nous pensons que le milieu initial des élèves favorisera l'exploration de différentes pistes de recherche, éventuellement des changements de cadres, la recherche de liens entre ce problème et d'autres problèmes déjà résolus ou avec certains cours de mathématiques, et sera en retour enrichi. Ayant été travaillée dans certaines activités du parcours « Excellence », nous espérons que l'étude de cas particuliers vivra dans la recherche des élèves et favorisera la mise en œuvre de démarches de type expérimental.

A l'analyse du contexte spécifique dans lequel s'est déroulée l'expérimentation, il semble clair que les différents éléments caractéristiques d'un milieu favorisant une dévolution du problème sur un temps long et des avancées significatives dans la recherche sont *a priori* présents dans le milieu initial de ces élèves de terminale scientifique. Le tableau 8.5 résume les éléments du milieu matériel des élèves pour cette expérimentation de type laboratoire.

Organisation didactique	Scénario 4 (cf. p221) avec 7 séances de deux heures, tout type de document autorisé et accès à Internet limité à la consultation de documents informatifs (dictionnaire, encyclopédie) et uniquement pendant les séances de recherche.
Connaissances mathématiques et heuristiques	Disponibles et mobilisables.
Représentation de l'activité mathématique	Pratique distanciée d'activités mathématiques de recherche grâce à la pratique régulière et fréquente de résolutions de problèmes de recherche et à une culture mathématique approfondie (notions d'histoire et d'épistémologie des mathématiques).
Énoncé	Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut trouver trois entiers naturels non nuls a, b, c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
Outils technologiques	Calculatrices programmables de type TI-89 et ordinateurs.
Éléments particuliers	Synthèse écrite à la fin de chaque séance et tenue d'un cahier de bord personnel.

FIGURE 8.5 – Tableau des éléments du milieu matériel des élèves de l'expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique.

8.5 Le recueil des données

L'objectif de cette expérimentation étant l'analyse des travaux de recherche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus, les premières données à recueillir sont toutes les traces écrites des recherches des élèves. L'expérimentation se déroulant sur plusieurs séances, espacées les unes des autres, le cahier de bord que nous avons proposé aux élèves pour consigner tous leurs travaux, s'est révélé un outil performant et efficace pour le recueil de données. Il permet d'avoir dans un seul document l'ensemble des productions (brouillons et synthèses) de chaque élève tout au long de l'expérimentation. Nous pouvons ainsi voir la continuité de leurs recherches au fil des séances, ainsi qu'une vision globale des processus mis en œuvre. De plus, le croisement des contenus des cahiers de bord de chaque élève permet de recueillir des éléments supplémentaires sur les différentes pistes de recherche suivies ou abandonnées, sur les synthèses collectives et sur les échanges au sein d'un groupe.

Un second recueil de données est obtenu par la rédaction d'une production finale et unique par groupe. Il s'agit d'une affiche (ou plusieurs) décrivant l'état des recherches, c'est-à-dire les résultats obtenus avec leurs démonstrations, les résultats restés à l'état de conjecture et les pistes restant à explorer. Ce bilan de la recherche, rédigé par chaque groupe, nous permet de recueillir ce que les élèves retiennent de la recherche du problème, les résultats qu'ils identifient comme pertinents et qu'ils souhaitent présenter et soumettre aux autres groupes ainsi que les démonstrations qu'ils ont effectuées. Ces données complètent celles des productions recueillies au fil des séances car elles mettent en évidence les éléments pointés comme centraux par les élèves eux-mêmes, à l'issue de l'expérimentation. Ils réalisent une certaine hiérarchisation des pistes de recherche suivies, des résultats établis ou des conjectures formulées, qui n'est pas toujours visible dans les cahiers de bord.

Les travaux de Battie (2007) montrent « les limites d'une analyse qui ne prendrait en compte que les productions écrites des élèves » pour analyser les raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes d'arithmétique. Par exemple l'aspect non linéaire de la recherche des élèves et les fragilités de leur raisonnement ne sont pas visibles dans leurs productions écrites, mais sont révélés par une analyse (en termes de dimensions organisatrice et opératoire) de leurs échanges au sein du groupe pendant les phases de recherche.

> Notre outil offre en effet un accès à la dynamique du processus de production d'une preuve arithmétique, processus où dimensions organisatrice et opératoire du produit fini se construisent et interagissant de façon complexe : à tout moment de la recherche, l'une comme l'autre de ces dimensions est susceptible de commander « ce qui se passe » dans l'autre. (Battie, 2007, p. 38)

Notons que nous avons également pointé cette différence entre production écrite et recueil de l'activité effective dans nos analyses des travaux de deux chercheurs (cf. chapitre 5), Thépault, dont nous ne disposons que de données *a posteriori* recueillies à la fin de ses recherches, et Mizony, dont nous avons suivi régulièrement et « en direct » les avancées dans la recherche de la conjecture. Pour l'analyse des processus de recherche mis en œuvre par un sujet engagé dans la recherche d'un problème, il est donc nécessaire d'avoir accès à son activité de recherche effective. Les informations recueillies permettront notamment d'étudier en détail les aspects dialectiques de l'activité de recherche mathématique que nous avons identifiés dans notre analyse épistémologique. Nous avons donc enregistré l'intégralité des échanges au sein des trois groupes d'élèves, à toutes les séances. Un double enregistrement numérique a été réalisé, avec une caméra (son et image) et avec un dictaphone (son uniquement). Nous avons également enregistré et filmé les séances de débat et d'institutionnalisation qui se sont déroulées en classe entière.

Afin de recueillir des éléments complémentaires sur le vécu des élèves dans cette expérimentation longue de recherche d'un problème non résolu, nous avons élaboré un questionnaire découpé en quatre parties (cf. annexe F1) :

- des questions portant sur l'activité de recherche mathématique, afin de recueillir des informations sur leur représentation de l'activité mathématique ;
- des questions sur le fait que ce soit un problème non résolu, afin de comprendre comment ce paramètre a influencé leur recherche ;
- des questions sur l'organisation des séances, afin de savoir si le protocole n'était pas trop long, s'ils ne se sont pas découragés, s'ils préfèrent le travail individuel ou collectif ou encore ce qu'ils pensent des séances de mise en commun ;
- des questions relatives à leur travail effectué pendant cette recherche, les apports en terme de connaissances mathématiques notionnelles, heuristiques, son influence sur leur apprentissage des mathématiques.

Les élèves ont répondu par écrit à ce questionnaire lors de la dernière séance de l'expérimentation, avant les phases d'institutionnalisation et de synthèse.

8.6 Conclusion

Pour conclure, le tableau de la figure 8.6 résume les éléments importants du protocole expérimental pour la situation de type laboratoire effectuée avec des élèves de terminale scientifique.

Public concerné	10 élèves de terminale scientifique suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques et un parcours « Excellence ».
Enseignant	Expérimenté, disposant d'une formation en didactique et en particulier, d'une réflexion personnelle approfondie sur l'épistémologie, l'apprentissage et l'enseignement des mathématique.
Durée de l'expérimentation	Environ 2 mois (du 13 mars au 22 mai 2012).
Scénario	Sept séances de deux heures, une séance de recherche individuelle, quatre séances de recherche collective, une séance de mise en commun et débat et une séance d'institutionnalisation et synthèse.
Matériel à disposition	Tout type de documents, calculatrices programmables et ordinateurs. Internet limité aux séances de recherche en classe.
Énoncé proposé	Syntaxe hybride (prédicative, opératoire) et forme affirmative. Le nom de la conjecture est mentionné et le statut épistémique de la conjecture est indiqué.
Recueil de données	Cahier de bord de chaque élève, productions finales écrites sur affiche et sur feuille de chaque groupe, enregistrement des échanges au sein de chaque groupe, film du débat en classe entière. Questionnaires élèves.

FIGURE 8.6 – Différents éléments du protocole de l'expérimentation de type laboratoire.

Dans le chapitre suivant (chapitre 9), nous présentons la mise en œuvre de cette expérimentation en laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Nous analysons en détail les processus de recherche effectifs des élèves à partir de notre grille d'analyse élaborée dans le chapitre 5 et affinée dans les chapitres 6 et 7.

Chapitre 9

Analyse *a posteriori* de l'expérimentation en laboratoire

Sommaire

Dans ce chapitre, nous réalisons la mise à l'épreuve de la situation didactique autour de la conjecture d'Erdös-Straus, élaborée dans les chapitres précédents (chapitres 6 et 7). Cette confrontation à la contingence (au sens de Bloch) se réalise par la mise en œuvre de l'expérimentation de type laboratoire, construite au chapitre précédent (chapitre 8), et que nous avons menée avec des élèves de terminale scientifique. Dans le cadre d'analyse des modèles de milieu de Bloch (2002), cette phase correspond à la première fonction de la confrontation à la contingence, c'est-à-dire le test des prédictions conduites dans le modèle expérimental *a priori*. Le premier objectif est de décrire la situation telle qu'elle s'est jouée expérimentalement. Cela fait l'objet de la première partie (9.1) où nous détaillons le déroulement des six séances de recherche et celui de la séance de synthèse. Dans une seconde partie (9.2), nous décrivons notre corpus et nous explicitons la méthodologie que nous avons choisie pour analyser les données recueillies. Le second objectif d'une confrontation au terrain expérimental est l'interprétation du modèle expérimental *a priori* par rapport à l'expérimentation. Il s'agit ici de l'analyse *a posteriori* des travaux de recherche effectifs des élèves sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans la troisième partie (9.3), nous effectuons l'étude des processus de recherche mis en œuvre par les élèves, à partir des itinéraires détaillés de leurs recherches. Ce découpage nous permet d'analyser finement leurs recherches grâce à notre premier outil méthodologique développé dans le chapitre 5, à savoir une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire.

9.1 Déroulement des séances

Dans ce paragraphe, nous présentons le déroulement effectif des sept séances qui ont composé l'expérimentation. Nous décrivons en particulier les régulations effectuées par l'enseignant au cours des séances.

L'expérimentation s'est déroulée sur trois mois [1], de mars à mai 2012 :

- Séance 1 : mardi 13 mars 2012, séance de recherche individuelle et mise en commun au sein d'un groupe (environ 1h45) ;
- Séance 2 : mardi 20 mars 2012, séance de recherche collective par groupes (environ 1h30) ;
- Séance 3 : mardi 27 mars 2012, séance de mise en commun en classe puis recherche collective par groupes (environ 1h35) ;
- Séance 4 : mardi 10 avril 2012, séance de recherche collective par groupes (environ 1h45) ;
- Séance 5 : mardi 17 avril 2012, séance de recherche collective par groupes et rédaction d'une affiche (environ 1h45) ;
- Séance 6 : mardi 15 mai 2012, séance de mis en commun au sein de la classe et débat (environ 1h40) ;
- Séance 7 : mardi 22 mai 2012, séance de synthèse et d'institutionnalisation (environ 2h).

Pour des raisons d'emploi du temps [2], nous n'avons pas pu être présente lors des séances 1 à 3. Nous avons donc convenu, avec l'enseignant, qu'il animerait ces séances, à la manière d'un dispositif Problème-ouvert (Arsac & Mante, 2007). Nous avons ensuite animé ensemble les séances 4 à 7. Nous reprenons ci-dessous le déroulement de chaque séance en détail.

Séance 1

Après une présentation de l'expérimentation (durée, nature et dates des séances) et plus particulièrement de la première séance (environ cinq minutes), l'enseignant a demandé aux élèves de former deux groupes de trois élèves et un groupe de quatre élèves. Il a ensuite distribué les cahiers de bord personnels en précisant leur fonction : écrire et consigner toute trace de recherche dans ce cahier, les recherches personnelles, les recherches collectives en groupe ainsi que les mises en commun en classe entière. La recherche individuelle a duré environ 45 minutes. En observant qu'au bout de ce laps de temps, les élèves avaient avancé dans leurs recherches et qu'ils commençaient à ne plus être productifs, l'enseignant a fait le choix de réduire le temps de recherche individuelle d'un quart d'heure. Après la rédaction de leur synthèse (environ 15 minutes), les élèves ont mis en commun leurs recherches individuelles au sein du groupe. Cette phase a duré entre cinq et dix minutes selon les groupes. Elle a donc été plus courte que ce que nous avions prévu (à savoir, trente minutes). La séance s'est terminée par une phase de recherche collective au sein du groupe d'environ trente minutes. Cette phase de recherche, non prévue au départ dans cette première séance, s'est imposée naturellement à la suite de la mise en commun. L'enseignant n'a pas explicitement invité les élèves à cette phase de recherche. Cependant, lorsqu'il a observé que les élèves commençaient à chercher ensemble, il a demandé de marquer une séparation, dans leur cahier de bord, entre les recherches individuelles et les recherches collectives.

1. Initialement, elle devait se dérouler du 13 mars au 17 avril. Des modifications de planning sont apparues au cours du déroulement de l'expérimentation, en raison d'un examen blanc (le 3 avril), de l'ajout d'une séance de recherche (la séance 4) et des vacances scolaires.

2. Nous dispensions des cours à l'université.

Les objectifs de cette première séance, à savoir permettre la dévolution de la situation de recherche aux élèves, amorcer le travail de groupe et préparer les prochaine séances de recherche, ont été atteints.

Séance 2

Dans une courte présentation (environ deux minutes), l'enseignant reprend les consignes de la séance (recherche collective par groupes et rédaction d'une synthèse), rappelle que toutes les recherches doivent être consignées dans le cahier de bord, précise que la synthèse collective du groupe peut être écrite dans un seul cahier et rappelle également que la calculatrice, l'ordinateur et tout document sont autorisés. La phase de recherche collective par groupes a duré une heure et quinze minutes et la phase de synthèse un quart d'heure.

L'objectif principal de cette séance, à savoir favoriser les échanges entre pairs pour faire avancer la recherche plus rapidement, a été atteint. La dévolution de la recherche du problème s'est maintenue.

Séance 3

L'enseignant débute la séance en annonçant aux élèves une modification dans ce qui est prévu. Il leur propose de faire une mise en commun des travaux de groupes au sein de la classe.

> Bien alors, euh, cette séance il va y avoir un petit changement dans le programme qui était prévu. Je vais vous laisser 5-10 minutes entre vous, dans le groupe [inaudible] et après vous ferez une présentation à tout le monde, de vos résultats. Donc je vous laisse encore une dizaine de minutes pour, normalement vous avez fait une synthèse la dernière fois de ce que vous avez trouvé. Donc je vous laisse 10 minutes pour se remettre tout ça en tête et savoir ce que vous allez dire aux autres groupes. [...] L'objectif est de montrer aux autres ce que vous avez trouvé et les questions qui restent en suspens.

L'enseignant a fait ce choix car, lors de discussions informelles entre les élèves (discussions pendant la recherche ou à la fin des séances), il a perçu leur envie de connaître les résultats des autres groupes. De plus, les recherches des trois groupes étant différentes, il a fait l'hypothèse que la confrontation des travaux enrichirait la recherche de chacun. L'appropriation éventuelle de résultats venant d'un autre groupe permettrait d'apporter de nouveaux éléments à la recherche des élèves, de la relancer, d'étudier d'autres pistes ou de les articuler avec les leurs. La séance s'est donc déroulée comme suit : une phase en groupes pour préparer la présentation des résultats (environ quinze minutes), une phase de présentation pour chaque groupe suivie de questions éventuelles des autres groupes (une dizaine de minutes par groupe) et une phase de recherche collective par groupes de quarante minutes. Comme la phase de recherche collective par groupes a été plus courte que prévue (en raison de la mise en commun), l'enseignant n'a pas demandé impérativement aux élèves de faire la synthèse de la séance. Il a préféré privilégier un temps de recherche collectif plus long. Cependant, il a précisé aux élèves que lors de la prochaine séance, ils devront s'appuyer sur les recherches de cette séance.

Dans l'analyse des travaux de recherche des trois groupes (partie 9.3), nous vérifierons si l'objectif de l'enseignant lors de cette séance (à savoir confronter les travaux des trois groupes pour enrichir la recherche de chacun) a été atteint. Nous étudierons notamment si les groupes se sont approprié les recherches des autres.

Séance 4

Rappelons qu'à partir de cette séance, nous avons co-animé toutes les séances avec l'enseignant. Initialement nous n'avions prévu que deux séances de recherche collective par groupes avant la séance de rédaction d'une affiche. A la fin de la séance 3, en observant l'avancée des recherches des trois groupes, l'enseignant a fait l'hypothèse qu'une séance supplémentaire de recherche collective par groupes leur permettrait d'approfondir encore leur piste de recherche et de produire des résultats partiels sur la conjecture. Après une courte présentation de la séance et des séances suivantes (séance de rédaction d'une affiche, séance de mise en commun et de débat, et séance de synthèse), nous avons invité les élèves à reprendre la recherche du problème en groupes pendant une heure vingt. La phase de rédaction d'une synthèse a duré une vingtaine de minutes.

Séance 5

A la suite de l'ajout d'une séance, nous avons un peu modifié les consignes de cette séance par rapport à ce qui était prévu (une heure quinze de recherche collective et 45 minutes pour la rédaction d'une affiche). Nous avons laissé une demi-heure aux élèves pour reprendre l'ensemble de leurs travaux de recherche par groupes, puis nous leur avons demandé de présenter les résultats seuls sur une affiche et d'en rédiger les preuves sur une feuille distincte. Cette phase a duré une heure dix. Nous avons fait le choix de demander deux types de productions : d'une part l'affiche, qui ne comprend que les résultats et servira de support pour la phase de mise en commun et de débat, et d'autre part la rédaction des preuves sur une feuille distincte, qui permet de ne pas surcharger l'affiche et de détailler les démonstrations des résultats. L'enjeu de preuve et de structuration des résultats est davantage mis en évidence. Ce choix a, en particulier, été motivé par l'analyse des pré-expérimentations où les élèves et les étudiants ont parfois des difficultés à entrer dans une démarche de preuves (cf. par exemple la pré-expérimentation 4 p. 248).

Séance 6

En raison des congés scolaires, quatre semaines se sont écoulées entre la séance de production des affiches et des preuves et cette séance. Quinze minutes ont donc été laissées aux élèves pour reprendre leurs productions, se remémorer leurs travaux. Chaque groupe a ensuite présenté ses recherches (trente minutes pour le groupe 2, vingt minutes pour le groupe 1 et vingt minutes pour le groupe 3). Chaque présentation a été suivie d'un temps de questions-réponses entre le groupe présentant ses travaux et les autres groupes. Par rapport aux consignes prévues, nous n'avons pas eu le temps d'effectuer la rédaction d'une synthèse par la classe.

Séance 7

Nous avons découpé cette séance en trois parties. Dans un premier temps, nous avons demandé aux élèves de répondre à un questionnaire sur cette expérimentation, avec des questions portant sur leur travail, sur le fait que le problème était non résolu, sur l'organisation et sur ce qu'ils avaient appris (cf. annexe F1). Dans un second temps, nous avons proposé une séance de travail sur des notions rencontrées au cours de leurs recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus. Le contenu de l'institutionnalisation s'est dessiné au cours de l'expérimentation. Nous avons en effet construit les énoncés des exercices à partir des recherches des élèves (cf. annexe G). Dans un troisième temps, nous avons mis en perspective leurs recherches avec les travaux de différents mathématiciens sur la conjecture d'Erdös-Straus et nous leur avons montré l'état actuel des recherches sur ce problème (cf. annexe H).

Conclusion

Dans le tableau 9.1 (cf. p. 320), nous résumons le déroulement de chaque séance selon trois critères : la gestion de la séance, la nature et la durée des différentes phases de recherche composant les séances. Afin de mener une analyse des travaux des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus (cf. partie 9.3), nous avons construit leur itinéraire de recherche [3]. Ce tableau donnera des points de repère pour suivre ces itinéraires en situant une phase de recherche au sein d'une séance.

9.2 Description du corpus et méthodologie d'analyse des données

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent (chapitre 8, partie 8.5), nous avons recueilli quatre types de données pour chacun des groupes :

- les traces écrites des recherches de chaque élève consignées dans un cahier de bord personnel ;
- les enregistrements audio et vidéo des échanges au sein du groupe pour chaque séance ;
- les productions finales des groupes (affiches et démonstrations des résultats) ;
- les réponses de chaque élève à un questionnaire.

Dans ce paragraphe, nous détaillons le contenu de chaque type des données recueillies et nous explicitons la méthodologie d'analyse de ces données.

Les cahiers de bord

Chaque élève disposait d'un cahier de bord personnel dans lequel il devait consigner toutes les traces de ses recherches sur le problème. Ce cahier contient donc :

- les brouillons de la recherche individuelle (séance 1) ;
- la synthèse de la recherche individuelle (séance 1) ;
- les brouillons des recherches collectives au sein du groupe (séance 1 à 5) ;
- les synthèses des recherches collectives au sein du groupe (séances 2 et 4) ;
- les préparations des mises en commun (séances 3 et 6) ;
- les prises de notes sur les travaux des autres groupes lors des mises en commun (séances 3 et 6).

Tous les cahiers de bord ne contiennent pas l'ensemble de ces éléments. Les synthèses des recherches collectives au sein du groupe ne sont écrites que dans un cahier de bord d'un élève du groupe. Certains élèves n'ont pas pris de notes pour la présentation de leurs résultats ou sur les travaux des autres groupes lors des mises en commun. L'intégralité des cahiers de bord de chaque élève figure dans les annexes suivantes : annexes C3, C4 et C5 pour les élèves du groupe 1, annexes D4, D5, D6 et D7 pour les élèves du groupe 2 et annexes E4, E5 et E6 pour les élèves du groupe 3.

Nous avons analysé chaque cahier de bord en deux temps. Dans un premier temps, nous avons consulté chaque cahier en lien avec les autres cahiers du groupe. Le but de cette

3. Ce terme est défini p. 323.

Séances animées par l'enseignant uniquement		
Séance 1	Recherche individuelle	45 minutes
	Mise en commun dans le groupe	entre 5 et 10 minutes selon les groupes
	Recherche collective en groupe	30 minutes
Séance 2	Recherche collective en groupe	1h15
	Rédaction d'une synthèse des recherches	15 minutes
Séance 3	Préparation de la mise en commun	15 minutes
	Mise en commun au sein de la classe, présentation de chaque groupe	10 minutes par groupe
Séances co-animées par l'enseignant et la chercheuse		
Séance 4	Recherche collective	1h20
	Rédaction d'un synthèse des recherches	20 minutes
Séance 5	Préparation de la rédaction des affiches et des preuves	30 minutes
	Rédaction des affiches et des preuves	1h10
Séance 6	Préparation de la mise en commun	15 minutes
	Présentation du groupe 2	30 minutes
	Présentation du groupe 1	20 minutes
	Présentation du groupe 3	20 minutes
Séance 7	Questionnaire	20 minutes
	Insitutionnalisation : travail sur des exercices issus de leurs recherches	1h
	Synthèse sur l'état actuel des recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus	30 minutes

FIGURE 9.1 – Tableau synthétique du déroulement des séances de l'expérimentation menée en laboratoire.

première étude était de prendre connaissance des différentes pistes de recherche étudiées par le groupe et d'identifier la visée générale de leur recherche. Pour ce travail, nous nous sommes également appuyée sur les observations effectuées pendant les séances de recherche [4]. Dans un second temps, nous avons étudié le contenu des cahiers en lien avec les enregistrements audio et vidéo afin d'analyser en détail le travail de recherche effectif des élèves sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus (cf. partie suivante 9.3). Dans nos analyses, nous nous référons aux cahiers de bord des élèves en renvoyant aux annexes. Nous avons parfois sélectionné quelques passages que nous avons extraits pour illustrer nos propos.

Les enregistrements audio et vidéo des échanges

Chaque groupe a été filmé (avec une caméra numérique) et enregistré (avec un enregistreur audio numérique) lors de chaque séance. Nous disposons donc de cinq enregistrements audio et vidéo pour chaque groupe ainsi que d'un enregistrement de la séance de mise en commun et de débat en classe entière. Le contenu des cinq enregistrements pour chaque groupe est le suivant :

– Enregistrement 1 : mise en commun des recherches individuelles [5] puis premières recherches collectives au sein du groupe (séance 1).
– Enregistrement 2 : recherches collectives au sein du groupe puis rédaction de la synthèse (séance 2).
– Enregistrement 3 : préparation de la mise en commun, présentation des travaux du groupe au tableau, réactions du groupe lors du passage des autres groupes au tableau et suite des recherches collectives au sein du groupe (séance 3).
– Enregistrement 4 : recherches collectives au sein du groupe puis rédaction de la synthèse (séance 4).
– Enregistrement 5 : préparation des affiches, rédaction des affiches et des preuves (séance 5).

Nous avons enregistré la séance de mise en commun et de débat au sein de la classe (séance 6) avec deux caméras numériques et un enregistreur audio numérique.

Les données recueillies étant nombreuses, nous n'avons pas pu transcrire l'ensemble des enregistrements. Nous les avons tous écoutés au moins à trois reprises. La première écoute a permis de construire les itinéraires de recherche [6] de chaque groupe puis lors de la seconde écoute, nous avons procédé à des zooms afin de sélectionner et extraire des passages pertinents pour illustrer nos analyses. Une troisième écoute a été nécessaire pour transcrire ces passages. Ces écoutes ont été effectuées en lien avec les productions écrites des élèves (cahiers de bord et productions finales).

Précisons que le double enregistrement, audio et vidéo, apporte une complémentarité pour l'analyse de ces données. Les enregistrements audio donnent accès aux échanges entre les élèves au sein du groupe et sont de meilleure qualité pour transcrire ces interactions. Les enregistrements vidéo complètent l'enregistrement audio puisque, grâce aux images, nous pouvons déterminer quel élève parle et à quel(s) interlocuteur(s). Ils donnent accès à la gestuelle des élèves pendant les séances de recherche, c'est-à-dire aux objets qu'ils désignent (par exemple une prise de note dans un cahier de bord), aux outils qu'ils utilisent (par exemple leur calculatrice) et à ce qu'ils font lors de minutes de silence (regarder en l'air, écrire dans leurs cahiers, taper sur leur calculatrice, etc.), et lors des séances de mise en commun, ils permettent d'avoir accès aux écrits des élèves lors de leur passage au tableau. Nous avons

4. Pour les séances 1 à 3, nous nous appuyons sur les observations et prises de notes de l'enseignant et pour les séances 4 à 6, sur nos observations et prises de notes ainsi que celles de l'enseignant.

5. Nous n'avons pas enregistré la phase de recherche individuelle dans la mesure où le travail est privé et les élèves ne parlent pas.

6. Nous définissons ce terme dans le paragraphe 9.3.

donc analysé les enregistrements en articulant les données audio et vidéo.

Les productions finales

Pour la séance de mise en commun et de débat au sein de la classe (séance 6), nous avons demandé aux élèves deux types de production finale et commune pour le groupe : une ou plusieurs affiche(s) présentant leurs résultats et des preuves de ces résultats rédigées sur une feuille distincte. Chaque groupe a produit trois affiches recensant leurs résultats et une feuille comportant une ou plusieurs preuve(s) de ces résultats. Les photos des affiches et les photocopies des démonstrations sont dans les annexes suivantes : annexes C1 et C2 pour le groupe 1, annexes D1 et D2 pour le groupe 2 et annexes E1 et E2 pour le groupe 3.

Nous avons étudié les productions finales de chaque groupe à deux reprises. Dans un premier temps, nous les avons consultées lors de l'écoute des échanges entre les élèves aux séances 5 (rédaction des productions finales) et 6 (séance de débat) afin d'analyser l'activité des élèves lors de ces phases de recherche. Dans un second temps, nous les avons examinées pour préparer la séance de synthèse sur la conjecture d'Erdös-Straus et construire les énoncés des exercices pour la phase d'institutionnalisation (cf. paragraphe 9.3.5).

Les réponses au questionnaire

Lors de la séance de synthèse et d'institutionnalisation, nous avons demandé aux élèves de répondre à un questionnaire afin de recueillir comment ils ont vécu cette expérimentation de recherche d'un problème non résolu sur un temps long. Le questionnaire est en annexe F1 et les réponses des élèves en annexe F2 pour le groupe 1, annexe F3 pour le groupe 2 et annexe F4 pour le groupe 3. Nous avons exploité les réponses des élèves à ce questionnaire en complément des autres données recueillies. Nous les avons particulièrement utilisées pour étayer nos analyses concernant les effets du milieu objectif des élèves sur leurs recherches (cf. paragraphe 10.2).

Conclusion

Les quatre types de données recueillies sont complémentaires pour mener l'analyse de l'activité effective des élèves en situation de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Comme nous l'avons déjà précisé dans le paragraphe 8.5, les productions écrites des élèves (cahiers de bord et productions finales) ne sont pas suffisantes pour analyser les processus de recherche dans la mesure où elles ne rendent pas visible l'aspect non linéaire de la recherche des élèves [7], ni le cheminement de leurs idées ni la construction de leurs raisonnements. L'analyse des échanges entre les élèves permet alors d'avoir accès à leurs processus de recherche effectifs lors de l'étude du problème et notamment, aux aspects dialectiques de la recherche mathématique, que nous avons identifiés dans nos analyses mathématique et épistémologique (partie II) et dans l'analyse *a priori* (partie III, chapitres 6 et 7). Les cahiers de bord et les productions finales constituent alors un support essentiel pour comprendre les pistes de recherche étudiées, les expressions mathématiques examinées, les conjectures formulées ou les résultats mentionnés par les élèves dans leurs interactions.

La méthodologie d'analyse des données que nous avons choisie se compose de trois étapes. Premièrement, une première analyse des cahiers de bord des élèves afin d'avoir une vision

7. Certains élèves n'ont par exemple pas respecté les dates inscrites dans le cahier de bord pour consigner leurs recherches et ont parfois complété une piste de recherche d'une séance à l'autre sans le rendre visible dans leurs écrits.

d'ensemble de la nature des recherches d'un groupe. Deuxièmement, une première écoute des enregistrements audio et vidéo, avec en support la consultation des cahiers de bord et des productions finales, pour construire les itinéraires de recherche de chaque groupe. Troisièmement, une seconde écoute des enregistrements audio et vidéo, en procédant à des zooms pour sélectionner les passages pertinents, permettant d'illustrer nos analyses des processus de recherche des élèves. Cette seconde écoute s'est effectuée avec comme support les cahiers de bord des élèves pour l'analyse des séances de recherche, les productions finales de chaque groupe pour l'analyse de la séance de débat, et les réponses au questionnaire pour l'analyse du milieu objectif des élèves.

A partir de ces données, nous avons construit les itinéraires de recherche de chaque groupe afin d'analyser les processus de recherche effectifs mis en œuvre par les élèves dans leur étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Cela fait l'objet de la partie suivante.

9.3 Analyse des travaux des élèves à partir des itinéraires de recherche

Les recherches des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus se sont déroulées sur six séances. Afin d'analyser l'ensemble de leurs travaux, nous avons construit leur itinéraire de recherche. Nous utilisons ce terme dans le sens « chemin parcouru pour aller d'un lieu à un autre » (définition du TLFi[8]). Un itinéraire de recherche se définit par le cheminement de la recherche entre la découverte du problème et l'élaboration de résultats. Nous avons défini plusieurs niveaux de granularité pour décrire l'itinéraire de recherche suivi par les élèves. Au premier niveau, nous avons scindé l'itinéraire de recherche en deux parties. La première partie débute par les recherches individuelles des élèves sur le problème et se termine à la première mise en commun. Il s'agit des séances 1 et 2. La seconde partie commence à l'issue de la première mise en commun et se termine par la préparation de la seconde mise en commun. Il s'agit de la fin de la séance 3 et des séances 4 et 5. Nous avons effectué ce découpage avant et après la première mise en commun car cette phase de recherche marque un tournant dans les recherches des élèves. Les analyses de leurs travaux (effectuées dans les paragraphes suivants) montrent effectivement qu'avant cette phase, les élèves sont principalement à la recherche d'une piste d'exploration du problème et qu'après, ils choisissent une piste de recherche et approfondissent son étude. La première phase de mise en commun des travaux des trois groupes constitue donc une étape intermédiaire dans leur itinéraire de recherche Notons que la seconde phase de mise en commun est l'étape finale. A un second niveau, nous avons découpé chaque partie de l'itinéraire de recherche en trois phases, selon la nature de la phase de recherche dans laquelle les élèves sont engagés : recherche individuelle, recherche collective par groupe, préparation d'une mise en commun, rédaction des affiches et des preuves. Enfin, à un troisième niveau, nous avons divisé chaque phase en épisodes. Les critères qui définissent la trame des épisodes sont les suivants : changement de piste de recherche, apparition d'une nouvelle idée au sein d'une piste de recherche ou intervention des animateurs de la séance. Le tableau de la page suivante présente les différents niveaux de granularité de l'itinéraire de recherche de chaque groupe.

8. Trésor de la Langue Française informatisé.

	Groupe 1 (3 élèves)	**Groupe 2** (4 élèves)	**Groupe 3** (3 élèves)
Première partie de l'itinéraire			
Phase 1 : recherches individuelles (séance 1).			
Phase 2 : recherches collectives en groupe (séances 1 et 2).	7 épisodes, épisodes 1 à 7.	12 épisodes, épisodes 1 à 12.	10 épisodes, épisodes 1 à 10.
Phase 3 : préparation de la mise en commun (séance 3).	1 épisode, épisode 8.	1 épisode, épisode 13.	1 épisode, épisode 11.
Etape intermédiaire : première mise en commun.			
Présentation des travaux.	12 minutes	15 minutes	8 minutes
Seconde partie de l'itinéraire			
Phase 1 : recherches collectives en groupe (séances 3 et 4).	9 épisodes, épisodes 9 à 17.	8 épisodes, épisodes 14 à 21.	6 épisodes, épisodes 12 à 17.
Phase 2 : rédaction des affiches et des preuves (séance 5).	1 épisode, épisode 18.	3 épisodes, épisodes 22 à 24.	1 épisode, épisode 18.
Phase 3 : préparation de la mise en commun (séance 6).	1 épisode, épisode 19.	1 épisode, épisode 25.	1 épisode, épisode 19.
Etape finale : seconde mise en commun			
Présentation des travaux.	30 minutes	20 minutes	20 minutes

Dans cette partie, nous analysons les itinéraires de recherche des trois groupes en suivant ces différents niveaux de granularité. Dans un premier paragraphe, nous détaillons la première partie de l'itinéraire des recherches des trois groupes grâce au découpage en phases puis en épisodes. Dans un second paragraphe, nous analysons l'étape intermédiaire des itinéraires, c'est-à-dire la première mise en commun des travaux en classe entière. Dans un troisième paragraphe, nous développons la seconde partie de l'itinéraire des recherches des trois groupes, grâce au découpage en phases puis en épisodes. Dans un quatrième paragraphe, nous analysons l'étape finale des itinéraires, c'est-à-dire la seconde séance de mise en commun et de débat au sein de la classe. Enfin, le cinquième paragraphe est consacré à la séance de synthèse et d'institutionnalisation : nous présentons sa construction puis son déroulement effectif avec les élèves.

9.3.1 Première partie de l'itinéraire des recherches des trois groupes

Nous avons scindé la première partie de l'itinéraire de recherche des trois groupes en trois phases. La première correspond à la phase de recherche individuelle du problème qui s'est déroulée lors de la séance 1. La seconde phase est celle des recherches en groupes qui ont eu lieu lors des séances 1 et 2. La troisième phase correspond à la préparation de la première mise en commun qui s'est déroulée à la séance 3. Dans ce paragraphe, nous analysons successivement la première partie des itinéraires de recherche des trois groupes.

A. Itinéraire de recherche du groupe 1 - Première partie.
Nous analysons ci-dessous les trois phases de recherche qui constituent la première partie de l'itinéraire de recherche du groupe 1.

Première phase de recherche : les recherches individuelles.
Nous analysons successivement les trois recherches individuelles des élèves de ce groupe.

Recherche individuelle de l'élève E11 (cf. annexe C3, p. 47-50).
L'élève E11 a débuté ses recherches en transformant l'écriture de l'équation initiale (procédure opératoire 3) par réduction au même dénominateur et par un produit en croix. Il obtient l'équation suivante :

$$4 = \frac{n(ac + bc + ab)}{abc}. \tag{9.1}$$

Il choisi d'étudier cette équation dans deux cas particuliers : lorsque a, b, c sont égaux et lorsque a, b sont égaux et distincts de c. Dans le premier cas, il pose $a = b = c = x$ et effectue ces changements de variables dans (9.1). Comme il fait une erreur de calcul ($abc = x$ au lieu de $abc = x^3$), en étudiant l'équation simplifiée obtenue, il conclut qu'il n'y a pas de solution où a, b, c sont égaux. Dans le second cas, il pose $a = b = x$ et $c \neq x$ et effectue ces changements de variables dans (9.1). Il commet également une erreur de calcul ($ab = 2x$ au lieu de $ab = x^2$) et en étudiant l'équation simplifiée dans deux sous-cas ($n = 2k$ et $n = 2k+1$), il conclut qu'il n'y a pas de solution où a, b, c sont égaux deux à deux. La conclusion de sa première partie de recherche est l'ajout d'une condition à l'énoncé de la conjecture d'Erdös-Straus proposé : a, b, c sont des entiers naturels distincts non nuls.

Cet élève a étudié la conjecture comme les étudiants de la pré-expérimentation 5 (cf. partie 6.3), c'est-à-dire par une étude algébrique d'une équation équivalente à l'équation initiale, en recherchant des conditions sur les solutions a, b, c pour trouver une valeur de n entière. Ce type de raisonnement peut faire référence à l'étape de l'analyse dans un raisonnement par analyse-synthèse : on suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des conditions nécessaires pour que cet objet existe. La difficulté à mobiliser le calcul littéral le conduit, comme les étudiants de la pré-expérimentation 5, à établir des résultats partiels faux sur la conjecture d'Erdös-Straus. Cependant, contrairement aux étudiants qui ne se rendent compte de leurs erreurs qu'à la troisième séance de recherche, cet élève effectue des essais de décomposition pour des valeurs de n données. En remplaçant n par 2 dans l'équation (9.1), il arrive à trouver une solution pour décomposer $\frac{4}{2}$: $a = 1, b = 2, c = 2$. Il conclut que ses premières démonstrations sont fausses. L'articulation entre procédures opératoires (transformation de l'équation initiale puis étude d'une équation par utilisation d'outils algébriques) et procédure exploratoire (faire des essais pour des valeurs de n données) a permis à l'élève d'avancer dans son étude de la conjecture en formulant un premier résultat partiel : a, b, c peuvent avoir la même valeur. Cependant, il reste confronté à l'étape de l'élaboration d'une preuve. En effet, il reprend l'étude du premier cas particulier $a = b = c = x$, corrige son erreur de calcul mais effectue un raisonnement faux et conclut à nouveau qu'il n'existe pas de solution où $a = b = c$. Il réussira à corriger sa démonstration à la suite de la mise en commun de ses travaux avec le groupe (cf. épisode 1 ci-dessous), puisque l'élève E13 a trouvé une solution où $a = b = c$. Cet élève a articulé les aspects sémantiques et syntaxiques dans ses recherches. Le recours à l'exemple lui permet de vérifier, puis de modifier ses raisonnements algébriques. L'expérience a été utilisée comme un moyen d'adéquation entre les exemples et la théorie.

Recherche individuelle de l'élève E12 (cf. annexe C4, p. 61-64).
L'élève E12 a débuté ses recherches par construction et questionnement d'exemples (procédure exploratoire) pour les premières valeurs de n. Pour $n = 2, n = 3$ et $n = 4$, elle a trouvé des solutions. Elle précise dans la marge que $\frac{4}{n} \geq 1$. Pour $n = 5$, elle ne trouve pas de solution et indique dans sa synthèse deux éléments particuliers pour ce cas : 5 est un nombre premier et $\frac{4}{5} < 1$. L'élève a également utilisé la procédure opératoire 3 pour transformer l'équation initiale en différentes formes : $\frac{4}{n} = \frac{ab+bc+ac}{abc}$ par réduction au même dénominateur, $4abc = n(bc + ac + ab)$ par produit en croix puis $n(bc + ac + ab) - 4abc = 0$ par soustraction. Selon ses brouillons, il semble qu'elle ait utilisé ces différentes formes pour tenter de trouver une décomposition de $\frac{4}{5}$ (on peut observer des flèches entre ces équations et certains essais, p. 61). Enfin, à partir de ses essais pour $n = 2, n = 3$ et $n = 4$ et par recherche de régularités (procédure exploratoire 2), elle a formulé une conjecture : a, b ou c (ou plusieurs) divise n. Elle tente alors de démontrer cette conjecture en étudiant l'équation $4abc = n(ab + bc + ac)$ à l'aide de la divisibilité, de la parité et du théorème de Gauss. Lors de la présentation de ses travaux aux autres élèves, elle ajoute qu'elle a trouvé une régularité entre les décompositions pour $n = 2, n = 3$ et $n = 4$: « $ab + bc + ac$ est multiplié par 2 à chaque fois ».

Cette élève a cherché à articuler les procédures opératoire (étude de l'équation initiale sous différentes formes) et exploratoire (recherche d'exemples et de régularités entre les exemples) mises en œuvre au cours de sa recherche. A la lecture de ses productions individuelles et à l'écoute de la présentation de ses travaux, nous faisons l'hypothèse qu'elle a cherché à étudier la conjecture par des allers et retours entre des essais sur différentes valeurs de n, des recherches de régularités, des formulations de conjectures et une tentative d'élaboration de preuves. Sa démarche de recherche semble être expérimentale.

Recherche individuelle de l'élève E13 (cf. annexe C5, p. 90-93).
L'élève E13 explique les différentes étapes de ses recherches dans sa synthèse. Dans un premier temps, il a cherché des décompositions pour des valeurs de n données. Il en a trouvé pour $n = 2, n = 3$ et $n = 4$. Selon ses brouillons, il a étudié ces exemples pour chercher des régularités (procédure exploratoire 2). Il remarque par exemple que pour $n = 4$, $a = b = c = 3$ et à la suite de l'étude du cas $n = 3$, il repère que la somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ est inférieure à

3. Cependant, il écrit que « n'ayant pas vu de lien entre n et a, b, c, il [j'ai] a abandonné cette piste ». Dans un second temps, il a cherché à étudier la conjecture d'Erdös-Straus à partir d'une équation équivalente à l'équation initiale : il a isolé n par réduction au même dénominateur puis par un produit en croix (procédure opératoire 3). Il indique que cette piste de recherche n'a pas abouti. Il a également fait une étude de la fonction $\frac{4}{x}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à l'aide d'un tableau de variation. A partir de la décroissance de la fonction, il conjecture que « plus n est grand, plus a, b et c seront grands ». Comme ces études ont été, selon lui, infructueuses, il est revenu, dans un dernier temps, sur sa première idée, c'est-à-dire l'exploitation des exemples. La recherche de régularités entre les différentes décompositions qu'il a trouvées pour des valeurs de n données l'a conduit à regarder la valeur de $a+b+c-n$ et il a formulé la conjecture suivante : $a+b+c-n = n+1$. Cependant, dans la synthèse, il précise « je pense que cette conjecture est fausse ! ».

Cet élève a utilisé tour à tour des procédures exploratoire (étude d'exemples par recherche de régularités) et opératoire (étude d'une équation équivalente à l'équation initiale). A la lecture de ses brouillons et de sa synthèse, nous faisons l'hypothèse qu'il n'a pas cherché à les articuler. En effet, l'étude algébrique de l'équation initiale s'est effectuée dans un cadre général par utilisation du calcul littéral et sans lien avec les exemples trouvés auparavant. En revanche, ses recherches par construction et questionnement d'exemples semblent articuler expériences et théorie. A partir de l'étude des exemples, il cherche à repérer des régularités puis à formuler des conjectures. Cette démarche pourrait s'inscrire dans une démarche de recherche de type expérimental.

Les élèves de ce groupe ont tous utilisé les deux types de procédures, opératoire et exploratoire, dans leur étude individuelle de la conjecture d'Erdös-Straus. Les élèves E11 et E12 ont essayé d'articuler ces deux types de procédures dans leur recherche. Cela a été productif pour l'élève E11 qui a pu mettre en évidence une erreur de calcul et tenté de corriger sa démonstration. Les recherches des élèves E12 et E13 semblent relever d'une démarche de type expérimental lorsqu'ils cherchent à étudier des exemples pour des valeurs de n données afin de repérer des régularités et formuler des conjectures. Ces recherches s'inscrivent plutôt dans une visée de recherche de décompositions effectives pour l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

Les premières recherches collectives du groupe vont s'appuyer sur l'ensemble des pistes de recherches évoquées dans les recherches individuelles et plus particulièrement, sur des conjectures formulées par les élèves E12 et E13 à partir de l'observation de leurs exemples.

Deuxième phase de recherche : les premières recherches collectives en groupe.
Les premières recherches collectives par groupes se sont déroulées lors des séances 1 et 2. Nous avons découpé cette phase en sept épisodes, numérotés de 1 à 7. Les épisodes 1 et 2 se sont déroulés pendant la séance 1 et les épisodes 3 à 7 pendant la séance 2. Ci-dessous, nous analysons successivement ces épisodes.

Épisode 1 : Étude des différentes pistes de recherche développées dans les recherches individuelles.
L'élève E11 présente aux deux autres élèves ses recherches en insistant sur un résultat :

> E11 : J'ai réussi à démontrer que a, b, c ne peuvent pas être égaux.

L'élève E13 n'est pas d'accord et propose un contre-exemple : pour $n = 4$, $a = b = c = 3$. Si les élèves E12 et E13 sont convaincus que le contre-exemple prouve que a, b et c peuvent être égaux, l'élève E11 a besoin de reprendre sa démonstration théorique, d'une part pour se convaincre de ce résultat, et d'autre part pour comprendre l'erreur qu'il a commise dans son raisonnement et la corriger pour obtenir une conclusion cohérente avec l'existence du contre-exemple. Il cherche l'adéquation entre son résultat théorique et l'exemple proposé pour $n = 4$.

Les élèves discutent ensuite des recherches individuelles de E12 et E13, qui se sont appuyées sur la recherche d'exemples et la formulation de conjectures. Ils décident d'étudier les deux conjectures suivantes, formulées à partir de leurs trois exemples $n = 2, n = 3$ et $n = 4$.

- Conjecture de E12 : entre la décomposition pour n et celle pour $n+1$, $ab+bc+ac$ est multiplié par 2.
- Conjecture de E13 : $a+b+c-n = n+1$.

Ils testent à nouveau ces conjectures sur leurs trois exemples puis cherchent une décomposition pour une autre valeur de n afin de les vérifier. L'élève E11 propose de faire une expérience cruciale, « on va essayer pour une grosse valeur », ce que rejette l'élève E13 qui préfère étudier le cas $n = 5$. Pour déterminer une décomposition pour $n = 5$, les élèves semblent adopter deux méthodes différentes. Les élèves E11 et E12 cherchent une décomposition à partir de la conjecture de E13 : ils essaient des valeurs de a, b, c tels que $a + b + c = 11$. L'élève E13 cherche à décomposer $\frac{4}{5}$ à partir de son écriture décimale. C'est lui qui réussit à trouver une décomposition :

> E13 : J'ai trouvé pour $n = 5$ le truc, l'exemple, j'ai trouvé, ça fait $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ et ça ne marche pas du coup le 11.
>
> [...]
>
> E13 : Fais voir si on essaye ton truc, ça fait quoi [...] $2 \times 5 + 5 \times 10 + 10 \times 2$ [il calcule $ab + bc + ac$] ça fait 80.
>
> E12 : Ça ne marche pas [selon sa conjecture, il faudrait que ce soit égal à 64].

Avec cette décomposition pour $n = 5$, les élèves invalident les deux conjectures sans prendre en compte la possibilité qu'il puisse y avoirs plusieurs décompositions possibles. La non-unicité d'une décomposition pour une valeur de n donnée est pourtant mise en évidence par l'élève E12 :

> E12 : Avec E13 on n'avait pas décomposé de la même manière et à mon avis ça ne marche pas avec l'autre manière. [...] C'est peut-être juste parce que là j'ai pris que des nombres qui marchaient.

Les élèves ne cherchent cependant pas à trouver une autre décomposition pour $n = 5$, qui pourrait vérifier l'une des conjectures. Ils les abandonnent définitivement.

Les élèves cherchent alors une nouvelle approche pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus à partir de leurs recherches individuelles. Plusieurs idées sont discutées :

- étude de régularités (procédure exploratoire 2) : pour $n = 5$, $c = a \times b$, pour $n = 2, n = 3$ et $n = 4$, $a = b$ et $\frac{4}{n} \geq 1$;
- étude de la condition $0 < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 3$;
- étude de la parité de a, b, c lorsque n n'est pas divisible par 4 à partir de l'équation $4abc = n(ab + bc + ac)$ (procédure opératoire 3).

Comme les élèves ne parviennent pas à déterminer l'utilité ou la faisabilité de ces pistes de recherche, elles ne sont qu'évoquées et pas exploitées. L'élève E13 propose d'étudier en détail leurs exemples :

> E13 : Je pense qu'il faut trouver un lien entre les essais là [...] il n'y a que ça de vrai.
>
> [...]
>
> E12 : Oui moi je crois qu'il faut trouver un lien aussi, il faut faire plein d'essais mais c'est un peu pénible des fois à trouver.

Les élèves vont suivre cette direction de recherche, l'étude de régularités entre des décompositions (procédure exploratoire 2), pour étudier le problème. Cela va leur permettre de formuler une première conjecture.

Épisode 2 : Formulation d'une conjecture pour $n = 2^b$ avec $b \geq 2$.
L'élève E13 a étudié en parallèle l'équation initiale en posant $a = b = c = x$ (ce qui lui donne $n = \frac{4x}{3}$) et quelques essais (notamment pour $n = 4$) et il repère que « si x est congru à 0 modulo 3, on aura n qui est divisible par 4 ». Il précise que « d'après les essais c'est cohérent ». Cette étude est similaire à celle effectuée par les étudiants de la pré-expérimentation 5 (cf. p. 250). Nous avions relevé que la difficulté à mener ce type de raisonnement (déterminer des conditions sur a, b, c pour obtenir une valeur de n entière) pour les étudiants était de repérer que la « réciproque » de cette propriété permettait de trouver un résultat partiel pour la conjecture d'Erdös-Straus. Dans ce groupe, cela n'a pas été une difficulté pour les élèves puisqu'ils évoquent rapidement que la « réciproque » de cette propriété permettrait de trouver des solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour n multiple de 4 :

> E12 : Ça veut dire que peut-être à chaque fois qu'on a un multiple de 4...
>
> E13 : Dès qu'on a un multiple de 4, on a une solution telle que ce soit les trois mêmes.
>
> E12 : On essaie ?

Les élèves cherchent alors à mettre à l'épreuve cette conjecture sur des exemples. Pour $n = 8$, ils cherchent trois fractions unitaires dont la somme est égale à $\frac{1}{2}$ et l'élève E13 trouve $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$. Il formule alors la conjecture en ces termes (cf. annexe C5 p. 92) :

> Conjecture 1 : Quand $n \equiv 0[4]$, il y a une solution $a = b = c$ telle que $a, b, c \equiv 0[3]$.

Les élèves E11 et E13 construisent un autre exemple à partir de la conjecture 1 et de la décomposition pour $n = 8$, pour la vérifier à nouveau :

> E11 : $n = 12$ [...] donc si tu rajoutes 3 [à la valeur de a, b, c pour $n = 8$], ça fait $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$.

Les élèves E11 et E13 semblent alors convaincus que la conjecture 1 est vraie. Parallèlement, à partir des décompositions pour $n = 4$ et $n = 8$, l'élève E12 remarque une autre régularité (régularité de type 2, p. 268) :

> E12 : Bah oui tu divises juste le dénominateur par 2 à chaque fois par rapport au précédent.

L'observation et l'étude de cette régularité va la conduire à formuler une autre conjecture :

> E12 : Si $n = 2^b$, je dirai que tu as $\frac{4}{n} = 3 \times \frac{1}{3\times(b-1)}$.

L'élève E11 vérifie son identité avec $n = 32$. Comme $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ ne donne pas $\frac{4}{32}$, l'élève E12 repère qu'elle a fait une erreur dans l'écriture de l'identité et la reprend. Elle écrit une nouvelle conjecture et l'explique à ses camarades.

> Conjecture 2 : Si $n = 2^b$ alors $\frac{4}{n} = 3 \times \frac{1}{3\times 2^{b-2}}$.
>
> E12 : Ah j'ai trouvé alors on réessaye pour 32 [...] on devrait avoir $3 \times \frac{1}{3\times 2^3}$ [...] Essaye $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24}$ [...]. Parce que, à chaque fois tu redivises par 2, le premier ça fait $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, le deuxième tu fais $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ et après tu fais $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ etc. [...] Si tu as 2^b il faut que tu fasses $\frac{1}{3\times 2^{b-2}}$. [...] On a trouvé pour tous les multiples de 4 déjà.

Elle pense au départ que cette identité permet de trouver une solution pour tous les multiples de 4 puis elle se rend compte qu'ils ne l'ont testée que pour des puissances de 2.

E12 : Ah mais attends, on a essayé que pour des, est-ce que ça marche, je ne sais pas moi pour 24 ? [...] Je pense que ça ne marche que pour les puissances de 2.

Le cas $n = 24$ n'étant pas décomposé avec son identité, elle énonce la conjecture 2 suivante : si n est une puissance de 2 alors il existe une solution telle que $a = b = c$. L'élève E13 ne comprend pas pourquoi l'élève E12 a restreint le domaine de validité de la conjecture 1.

E13 : Bah pourtant, imagine, si x c'est congru à 0 modulo 3, ça voudrait dire que 4 il divise n.

E12 : Oui 4 divise n mais ça ne veut pas dire que ça marche pour tous les multiples [...] c'est-à-dire que c'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Les élèves ne questionnent pas les exemples à partir de la même régularité. L'élève E12 utilise la propriété de multiplicativité *si n est multiplié par 2, alors les solutions le sont aussi* et les élèves E11 et E13 étudient la propriété *si x est congru à 0 modulo 3, alors n est divisible par 4*. Les élèves E11 et E13 reprennent l'étude des différents exemples afin de comprendre ce que veut dire l'élève E12. L'étude du cas $n = 12$, non étudié par l'élève E12, semble leur poser un problème mais ils n'arrivent pas à l'expliciter. Finalement l'élève E13 comprend, d'une part que l'élève E12 discute de la validité de la réciproque de la propriété *si x est congru à 0 modulo 3, alors n est divisible par 4* et d'autre part que c'est la réciproque et non la propriété qui permet d'étudier la conjecture d'Erdös-Straus pour certaines valeurs de n.

E13 : Là je suis en train de dire que quand [...] on a les trois mêmes nombres et qu'ils sont multiples de 3, [...] ça peut s'écrire $\frac{4}{n}$ c'est tout [...] et ça ne veut pas dire qu'on a [l'inverse].

E12 : Et par contre dès que n est égal à 2 exposant quelque chose, ça marche.

E13 : Ça c'est démontré ou c'est comme ça ? C'est comme ça.

E12 : Mais ça, j'en suis sûre par contre, on ne l'a pas démontré mais je pense qu'on peut le démontrer. [...] Bah oui, c'est logique, parce que là au départ, tu sais que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ça fait 1. Après si tu, si n tu le multiplies par 2 ça veut dire que le résultat tu le divises par 2 donc ça veut dire que chacun des termes tu le divises par 2, c'est logique.

E11 : Sauf que là tu n'as pas de rapport $\frac{1}{2}$ entre les deux résultats, c'est ça le souci. [...] 0,5 fois $\frac{1}{2}$ ça, ça fait 0,25 et 0,5 sur 0,33. [Il fait référence aux cas $n = 8$ (c'est-à-dire $\frac{4}{8} = 0,5$) et $n = 12$ ($\frac{4}{12} = 0,33$) où les solutions sont respectivement $a = b = c = 6$ et $a = b = c = 9$].

E12 : J'y comprends rien avec ce que tu as fais, avec vos zéro machin, fais des fractions c'est plus simple.

Si l'élève E13 semble comprendre le raisonnement de l'élève E12, l'élève E11 tente de lui expliquer que le cas $n = 12$ a une solution où $a = b = c$ mais qu'il ne vérifie pas la conjecture 2. Ce cas particulier n'est pas un contre-exemple à la conjecture 2 mais son étude permet de ne pas abandonner la conjecture 1. Les élèves E11 et E12 semblent ne pas se comprendre, d'une part parce que l'un raisonne avec les écritures fractionnaires et l'autre avec les écritures décimales, et d'autre part parce que l'élève E12 ne semble pas avoir pris connaissance du cas $n = 12$ traité par les élèves E11 et E13. Finalement, l'élève E11 pense avoir fait une erreur de calcul et tous les élèves sont d'accord avec la conjecture 2 et mettent de côté la conjecture 1. En ce qui concerne l'étape de l'élaboration de la preuve, notons que l'élève E12 explicite le processus de calcul sous-jacent à la propriété de multiplicativité qui pourrait conduire à la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence. Elle ne semble pas penser à une vérification de type algébrique, c'est-à-dire vérifier que $3 \times \frac{1}{3 \times 2^{b-2}} = \frac{4}{n}$ quand $n = 2^b$.

A la fin de la première séance, les élèves ont démontré que les dénominateurs a, b, c ne sont pas nécessairement distincts et ils ont établi le résultat suivant : l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour toutes les puissances de 2. L'articulation entre procédure opératoire (étude de l'équation initiale en posant $a = b = c = x$) et exploratoire (questionnement d'exemples) a permis aux élèves de mettre en œuvre une démarche de type expérimentale qui s'est révélée productive pour formuler des conjectures. Les élèves projettent donc de continuer l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus dans cette voie : « faire plein d'exemples » pour trouver des liens, puis formuler des conjectures plus générales.

Épisode 3 : Formulation d'une conjecture pour n pair.
Entre les deux séances de recherche, l'élève E12 a trouvé un résultat partiel sur la conjecture d'Erdös-Straus. Elle l'explique aux deux autres élèves :

> E12 : Moi j'ai trouvé pour tous les nombres pairs je pense. Tu veux trouver $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{n}$. $\frac{4}{n}$ tu peux l'écrire $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ et c'est égal à $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}$ vous êtes d'accord tous les deux ? Si n est pair, ça tu peux le simplifier, ça ça s'écrit 1 sur quelque chose. Si t'as $n = 2k$, $\frac{4}{n}$ ça va être égal à $\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{2}{2k}$ donc ça va faire $\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$. Ça marche. Pour tous les pairs ça va faire ça.

Dans la première partie de ses explications, l'élève E12 précise de quelle manière elle a trouvé le résultat et dans la seconde partie (lorsqu'elle pose $n = 2k$), elle explicite la preuve de ce résultat. D'après ses premières explications, l'élève E12 a déterminé l'identité permettant de formuler la conjecture grâce à des manipulations algébriques à partir de l'équation initiale (procédure opératoire) et les exemples ne sont intervenus que dans l'étape de vérification de la conjecture. Cette démarche de recherche, de nature théorique, est *a priori* différente de celle qu'elle a mise en œuvre à la séance 1 qui était expérimentale. Cependant, comme nous l'avons mis en évidence dans l'étude épistémologique (cf. chapitre 5), le chercheur se nourrit de l'ensemble des pistes de recherches explorées pour résoudre un problème. Nous faisons donc l'hypothèse que l'ensemble des recherches menées à la séance 1, notamment l'articulation des procédures opératoire et exploratoire, l'étude de plusieurs exemples et la mise en œuvre d'une démarche expérimentale, a contribué à l'élaboration de ce résultat. En ce qui concerne la preuve du résultat, nous faisons l'hypothèse que l'élève a choisi de traduire n pair par $n = 2k$ dans sa démonstration car cette notation lui permet d'établir qu'elle obtient une fraction unitaire lorsque n est pair.

Pour éclairer ses explications, elle les illustre avec des exemples (pour $n = 2, n = 4$ et $n = 6$). Les élèves E11 et E13 ne cherchent pas à valider le résultat en étudiant la démonstration proposée par l'élève E12, ils préfèrent le mettre à l'épreuve sur d'autres exemples.

> E13 : Tu veux dire que dès que t'as un nombre pair, tu auras deux les mêmes, par exemple si on prend 10.
> E12 : 10, ça va faire $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$.
> E13 [vérifie que cette somme est égale à $\frac{4}{5}$] : Oui ça marche ça, fais voir 12 [...] J'ai envie de dire c'est facile, c'est bon, c'est ça.

Il semble que la confrontation entre la théorie et les expériences leur permette d'une part de se convaincre du résultat et d'autre part, de le valider. Cette validation pragmatique leur suffit et ils ne voient pas la nécessité, à ce moment des recherches, d'effectuer une preuve intellectuelle (au sens de Balacheff) comme celle qui relève d'un calcul sur les énoncés proposée par l'élève E12. Cette dernière précise enfin que le résultat trouvé précédemment (pour n une puissance de 2) est inclus dans le cas pour n pair.

Épisode 4 : Étude de la conjecture d'Erdös-Straus pour n impair.

A la suite du résultat trouvé pour n pair, les élèves se penchent sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus pour n impair. Leur première idée est d'écrire une identité du même type que celle trouvée pour n pair. A partir de la décomposition pour $n = 3$ où $a = b = 2$ et $c = 3$, l'élève E11 propose l'identité suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}. \tag{9.2}$$

Afin de vérifier si cette identité permet de déterminer une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour n impair, les élèves E11 et E12 optent pour deux méthodes différentes.

> E11 : Il faut essayer de faire un autre essai, pour un autre n impair, si on prend 5.
>
> E12 : Attends déjà si tu mets tout au même dénominateur ça te donne quoi ?
>
> E11 : $\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1}$ [...] Attends on va essayer avec 5 déjà, voir si ça marche pour un autre chiffre.
>
> E12 : Oui on va déjà voir pour 5 [...] si ça ne marche pas pour un autre chiffre, ce n'est pas la peine de s'embêter avec ça.

L'élève E11 propose une validation pragmatique grâce à un exemple alors que l'élève E12 voudrait utiliser le calcul littéral comme outil de validation. Cependant, l'insistance de l'élève E11 et la possibilité que le cas $n = 5$ ne vérifie pas l'identité semblent la faire changer d'avis et opter pour un test de l'identité par l'exemple. Les élèves remplacent donc n par 5 dans l'identité (9.2), calculent la somme des trois fractions unitaires et regardent s'ils obtiennent $\frac{4}{5}$. Comme ce n'est pas le cas, les élèves rejettent l'identité (9.2).

Cette piste de recherche ayant échoué, les élèves cherchent d'autres approches pour étudier le problème dans le cas où n est impair. Pendant une vingtaine de minutes, chaque élève développe sa piste de recherche tout en interagissant avec les autres. Ils s'expliquent leurs idées, demandent des conseils ou des vérifications. Nous détaillons ci-dessous les différentes pistes de recherche.

Piste de recherche de l'élève E11.

L'élève E11 cherche à exploiter la non-unicité des décompositions à partir de procédures exploratoires (recherche de régularités entre des décompositions et recherche d'une méthode de décomposition) pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Il voudrait effectivement trouver une méthode pour déterminer plusieurs solutions pour une valeur de n donnée.

> E11 : Moi je voudrais voir comment tu peux trouver plusieurs solutions à partir d'un truc.

Sa première idée est de chercher à décomposer une fraction unitaire en somme de deux fractions unitaires mais l'élève E12 pense qu'il s'agit d'étudier le problème inverse :

> E12 : Mais le problème c'est le contraire, on peut toujours l'exprimer avec quatre fractions et on doit l'exprimer avec 3.

Cette idée n'est donc pas étudiée et il en propose une seconde :

> E11 : Il faut essayer de trouver un rapport entre deux résultats pour le même, un rapport entre les fractions [...] ça permettrait de voir s'il y a d'autres façons de l'écrire.

A partir de la décomposition pour $n = 5$ qu'ils ont trouvée ($a = 2, b = 5$ et $c = 10$), il essaie de trouver une méthode pour déterminer une autre décomposition. Il propose de conserver une des trois fractions unitaires et de chercher les deux autres grâce à l'équation $\frac{4}{n} - \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab}$ où les entiers n et c sont fixés et les entiers a et b sont les inconnues (cf. annexe C3 p. 52).

E11 : On en garde un [...] et les autres on les remplace par a et b et [...] voir est-ce qu'on peut trouver des a et b différents de ce qu'on a là.

Avec l'élève E13, il étudie les trois cas pour $n = 5$. Il conclut que sa méthode « permet de vérifier si avec les trois [valeurs de a, b, c] on a une unique solution ou pas [...] mais ça ne permet pas de trouver [d'autres solutions] ».

Piste de recherche de l'élève E12.

L'élève E12 cherche à formuler une conjecture à partir de l'étude des exemples et de la recherche de régularités. Sur la décomposition pour $n = 5$ (où $a = 2$, $b = 5$ et $c = 10$), elle repère que $c = a \times b$ et écrit l'égalité suivante :

$$\frac{a+b+1}{ab} = \frac{4k}{nk}, \tag{9.3}$$

où k est un entier naturel. Elle teste cette égalité sur la décomposition pour $n = 3$ où $a = b = 2$ et $c = 3$. Cet exemple ne vérifie pas l'égalité et elle fait l'hypothèse que cela vient du fait que la condition $c = a \times b$ n'est pas vérifiée. Elle cherche alors à trouver une décomposition pour $n = 7$ qui vérifierait l'égalité (9.3) et la condition $c = a \times b$. Après plusieurs essais, elle trouve une décomposition pour $n = 7$ ($a = b = 28$, $c = 2$) mais elle ne vérifie ni l'égalité ni $c = a \times b$. Elle précise qu'elle a trouvé cette décomposition en effectuant des calculs avec sa calculatrice, sans méthode.

E12 : Alors après la logique du truc, il y en a encore deux pareils [$a = b$].

Nous faisons cependant l'hypothèse qu'elle s'est appuyée sur l'égalité (9.3) en cherchant à décomposer $\frac{4k}{7k}$ avec différentes valeurs de k (notamment $k = 2$ puis $k = 4$). Comme elle ne repère pas de « logique » entre les décompositions qu'elle obtient pour des valeurs de n impair, elle continue à étudier des exemples. Pour $n = 9$, elle tente à nouveau de s'appuyer sur l'égalité (9.3) et cherche à décomposer $\frac{8}{18}$ ($k = 2$).

E12 : Pour 9, on veut $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$, 18 il a plein de diviseurs, ça peut être bien ça. [...] Je pense qu'il faut partir d'une histoire de diviseurs, tu prends un multiple du nombre [de n], tu cherches ses diviseurs et il faut qu'il y ait deux de ses diviseurs plus 1 [a+b+1] [...] plus 1 ou pas plus 1 d'ailleurs, pas forcément.

Elle applique cette technique pour trouver une décomposition de $n = 9$ et parvient à trouver que $\frac{3}{18} + \frac{2}{18} + \frac{3}{18} = \frac{8}{18}$, c'est-à-dire qu'une solution pour $n = 9$ est $a = b = 6$ et $c = 9$. Elle modifie alors l'égalité (9.3) par l'égalité (9.4) suivante :

$$\frac{4k}{nk} = \frac{d+e+f}{nk}, \tag{9.4}$$

où k est un entier naturel et d, e, f sont des entiers tels que $d = \frac{nk}{a}$, $e = \frac{nk}{b}$ et $f = \frac{nk}{c}$. La condition $c = a \times b$ n'en est plus une. Les allers et retours entre l'étude de différents exemples et l'équation (9.3) a donc permis à l'élève E12 d'élaborer un début de méthode pour déterminer une décomposition pour une valeur de n donnée.

Piste de recherche de l'élève E13.

L'élève E13 fait l'hypothèse que « pour la démonstration dès que ce n'est pas pair, ça doit être complètement autre chose ». Il semble que cette hypothèse le conduise à étudier la conjecture d'Erdös-Straus sous une autre visée. En effet, au début des recherches, il a étudié de nombreux exemples afin de chercher des régularités et formuler des conjectures. Pour l'étude du cas n impair, il semble se détacher de la manipulation des exemples pour mener une étude plus générale. Nous avons peu de traces de ses recherches pendant cette période (il parle peu et efface à plusieurs reprises ses écrits dans son cahier de bord), mais il semble qu'il cherche à changer de cadre. Il évoque l'utilisation des nombres complexes :

> E13 : Je vais peut-être passer par les nombres complexes [...] je vais essayer [...] il faut tenter hein.

Son cahier de bord ne comporte pas de traces de cette recherche et il ne précise pas dans quel but il veut les utiliser. Dans les enregistrements, on entend, quelques minutes après, qu'il pense que « c'est n'importe quoi » et il abandonne. Par la suite, il aide à plusieurs reprises les élèves E11 et E12 à chercher des décompositions pour des valeurs de n données mais semble également faire d'autres recherches (qui ne sont pas identifiables dans notre corpus).

Le suivi de ces différentes pistes de recherche est interrompu par l'élève E12 qui a soudainement une idée :

> E12 : Attends, pour 3, je suis sûre qu'il y a un truc là. Non pour les multiples de 3 je suis sûre qu'il doit y avoir quelque chose.

Cette idée conduit à la formulation d'une conjecture, objet de l'épisode suivant.

Épisode 5 : Formulation d'une conjecture pour $n \equiv 0[3]$.

L'élève E12 explique à ses camarades ce qu'elle vient de trouver :

> E12 : Ah si, si si, ça marche [...]. Tu vas avoir $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, pour n congru à 0 modulo 3, c'est égal à $\frac{3}{n} + \frac{1}{n}$ vous êtes d'accord ? Et ça c'est égal à $\frac{3}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$. Ça va faire $\frac{2}{2n}$ donc $\frac{1}{n}$ ça. [...] Et si $n = 3k$, ça veut dire que ça, ça va pouvoir se simplifier donc ça va donner $\frac{1}{k} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{6k}$. Ça marche pour les multiples de 3.

L'élève E12 a utilisé la même méthode pour trouver ce résultat que celle utilisée pour trouver celui pour n pair, à savoir des manipulations algébriques à partir d'une décomposition de $\frac{4}{n}$. De la même manière, ses explications illustrent, d'une part le processus de calcul effectué pour trouver l'identité, et d'autre part une preuve du résultat. L'élève E13 vérifie sur l'exemple pour $n = 9$ et évoque la limite de cette méthode :

> E13 : Est-ce qu'on peut faire congru à 4 ?
>
> E12 : Mais congru à 4 on s'en fout, c'est des nombres pairs, on a déjà fait.
>
> E13 : Ouais, congru à 5. C'est gênant parce que t'en as plus assez de $\frac{1}{n}$.
>
> E12 : Tu en as plus assez oui voilà c'est ça le problème, ça marche bien jusqu'à 4 quoi et après ça pose problème.

A la suite de l'élaboration de ce résultat, les élèves effectuent en acte la réduction du problème à l'étude des nombres premiers.

> E13 : Bon on a fait déjà pour beaucoup de nombres j'ai envie de dire.
>
> E12 : Bah oui il n'en reste plus beaucoup (rires).
>
> E13 : On peut les négliger.
>
> [...]
>
> E13 : Après tu as tous les nombres premiers j'ai envie de dire.

E12 : Bah oui après il faut faire tous les nombres premiers [...] Bon maintenant, il va falloir trouver des nombres qui ne soient pas des multiples de 2 et pas des multiples de 3.

La réduction aux nombres premiers est effectuée en acte, à partir des deux résultats qu'ils ont obtenus, à savoir l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour n multiple de 2 et pour n multiple de 3. Pour le moment, la réduction n'est pas explicitée ni justifiée. Les élèves sont conscients que cette pensée organisatrice permet d'éliminer des cas à étudier mais qu'il en reste toujours une infinité à traiter. L'élève E12 semble vouloir continuer l'étude de la conjecture par recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données (n premier différent de 2 et 3) en s'appuyant sur la construction et le questionnement d'exemples.

Épisode 6 : Étude en parallèle de trois pistes de recherche différentes.

Comme dans l'épisode 4, chaque élève va développer une piste de recherche. Les interactions sont moins nombreuses (il se passe parfois de longues minutes de silence) et moins riches (les élèves ne s'expliquent pas toujours leurs pistes respectives, parfois ils ne demandent que des vérifications ou des informations sur des éléments étudiés auparavant). Notons qu'au cours des recherches, les élèves sont conscients de travailler « chacun dans leur coin » :

E12 : On est chacun dans notre truc, là.

E13 : Complètement.

Nous détaillons ci-dessous la piste de recherche de chaque élève.

Piste de l'élève E11 (cf. annexe C3 p. 53).

L'élève E11 cherche à formuler une conjecture pour tout n multiple de 5. Pour cela, il essaie de déterminer une solution pour $n = 10$ à partir de l'articulation de trois éléments (de nature opératoire et exploratoire) : la décomposition trouvée pour $n = 5$ (à savoir $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$), la condition $c = a \times b$ repérée sur cette décomposition et l'équation $\frac{4}{n} = \frac{ab+bc+ac}{abc}$ issue de l'équation initiale par transformation d'écriture. Dans l'équation $\frac{4}{n} = \frac{ab+bc+ac}{abc}$, il pose $n = 10$ et remplace c par ab. Il obtient l'équation suivante :

$$2c^2 = 5(ab + ac + bc). \tag{9.5}$$

Comme 2 et 5 sont premiers entre eux, il applique le théorème de Gauss et déduit que 5 divise c^2. Comme 5 est premier, il écrit que 5 divise c puis que 5 divise ac et bc. Il étudie alors l'équation (9.5) pour trois valeurs de c (5, 10 et 15) et obtient un système pour déterminer les valeurs de a et b (par exemple $a+b = 5$ et $ab = 15$). Avec les valeurs de c choisies, les systèmes ne donnent aucune solution pour a et b. Cela lui permet cependant d'écrire deux conditions générales pour déterminer les valeurs de a et b à partir de la valeur de c : $a + b = \frac{2c^2-5c}{5c}$ et $ab = c$. En expliquant à l'élève E12 ce qu'il a fait, cette dernière pointe la limite de son raisonnement :

E12 : Il faudrait qu'on ait la valeur de c parce que s'il faut la chercher à tous les coups.

E13 : Au moins ça pourrait permettre de vérifier des solutions [...] Si tu as c, tu as forcément a et b par cette condition là et par celle là.

Ces recherches de l'élève E11 s'inscrivent dans la continuité de ses recherches individuelles : il cherche des conditions sur les solutions a, b, c afin de déterminer des valeurs de n pour lesquelles l'équation d'Erdös-Straus a des solutions. Il éprouve des difficultés à exploiter cette piste de recherche car elle conduit à l'étude d'équation du second degré avec paramètre (cf. procédure opératoire 3, transformation 3, p. 270). Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse *a priori*, les élèves ne disposent pas des outils mathématiques nécessaires pour résoudre de telles équations. De plus, cette approche (par étude de la condition $c = a \times b$) n'est pas la plus pertinente ni la plus efficace pour déterminer une décomposition pour une valeur de n donnée. Elle est en revanche intéressante pour formuler une conjecture à partir de plusieurs décompositions pour des valeurs de n données (cf. procédure exploratoire 1, régularité 1 p. 267). L'élève E11 semble s'en rendre compte et essaie finalement de trouver une décomposition pour $n = 10$ d'une autre manière. Il fait l'hypothèse que s'il trouve une décomposition, cela lui permettra de voir si la régularité $c = a \times b$ se vérifie pour tout n congru à 0 modulo 5.

Piste de l'élève E12 (cf. annexe C4 p. 66-69).

L'élève E12 reprend ses recherches sur l'élaboration d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ à l'aide des notions de multiples et diviseurs (cf. épisode 4).

> E12 : Il faut chercher un multiple, je suis sûre que tu peux faire un lien entre le haut et le bas. [...] La somme du haut c'est que des nombres qui sont des diviseurs du nombre du bas. [...] Il faut que tu trouves trois nombres qui soient diviseurs d'un nombre du bas.

Elle reprend l'équation $\frac{4}{n} = \frac{ab+bc+ac}{abc}$ trouvée au début de ses recherches en ajoutant un coefficient multiplicateur k, ce qui donne : $\frac{4k}{kn} = \frac{ab+bc+ac}{abc}$. Elle transforme cette équation par produit en croix, puis en isolant n (procédure opératoire 3, transformations 1 et 2, p. 270).

> E12 : On ne s'en sort pas, on retombe sur la même chose en fait.

Elle reprend alors l'étude de ses différents exemples et exhibe un système de 4 équations :

$$\begin{cases} ab = \frac{kn}{c} \\ ac = \frac{kn}{b} \\ bc = \frac{kn}{a} \\ ab + bc + ac = 4k. \end{cases}$$

En réfléchissant à sa résolution, elle conclut que « ça n'a pas de sens » et elle fait l'hypothèse qu'elle va « retomber sur la même chose et que ça ne marchera pas ». Nous relevons qu'elle éprouve des difficultés à décrire et formaliser sa technique de décomposition. Elle remarque des régularités qu'elle ne parvient pas à écrire à l'aide du calcul littéral. Elle revient alors une nouvelle fois à l'étude d'un exemple et cherche à construire une solution pour le cas $n = 11$, avec cette décomposition.

> E12 : Je vais essayer pour 11, il faut trouver un multiple de 11 qui a plein de diviseurs.
>
> [...]
>
> E12 : J'ai trouvé pour 11. Il faut que quatre fois la somme des trois diviseurs, non ce n'est pas ça, il faut que la somme des trois diviseurs soit $4k$; que $4k$ ce soit la somme de trois de ses diviseurs obligatoirement.

La mise à l'épreuve de sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs lui a permis de trouver une solution pour le cas $n = 11$ puis de formuler la condition qu'elle n'arrivait pas à écrire. Dans son cahier de bord, lors des recherches de groupe, elle écrit $\sum 3div = 4 \times k$. Cette expression n'est pas encore écrite uniquement formellement. Dans la synthèse, elle écrira cette condition sans notation algébrique et dans le langage naturel. Comme nous l'avons identifié dans l'analyse *a priori*, l'articulation des aspects syntaxiques et sémantiques par allers et retours entre étude d'exemples et tentatives de formulation d'une condition générale a permis à l'élève de progresser dans l'élaboration de sa méthode de décomposition avec multiples et diviseurs. Cette étude de la conjecture d'Erdös-Straus s'inscrit dans la continuité de ses recherches individuelles : elle cherche à déterminer des relations permettant de trouver des solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour des valeurs de n données en mettant en œuvre une démarche de recherche expérimentale (au sens où nous l'avons définie, cf. p. 34).

Piste de l'élève E13 (cf. annexe C5 p. 95-98).

L'élève E13 suit une première piste de recherche : l'étude de l'équation initiale lorsque $a = n$.

> E13 : J'essaie d'imaginer, quand il y a un des a ou des b qui est égal à n, ce que ça peut faire.

Il pose $\frac{3}{n} = \frac{b+c}{bc}$ et cherche à résoudre cette équation (cf. annexe C5, p. 95-96). Cette étude conduit à l'exploitation de la procédure opératoire 4, *étude d'une équation du second degré*, par la méthode utilisée par Thépault[9] (cf. chapitre 4, paragraphe 4.3.1). Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse *a priori*, l'élève éprouve des difficultés pour résoudre cette équation car il ne dispose pas de la méthode de la somme et du produit des racines. Cette étude est donc mise de côté. L'élève examine alors une approche géométrique du problème (cf. annexe C5 p. 96-98) en le modélisant par des rapports de longueurs dans un triangle rectangle. La figure 9.2 illustre cette modélisation.

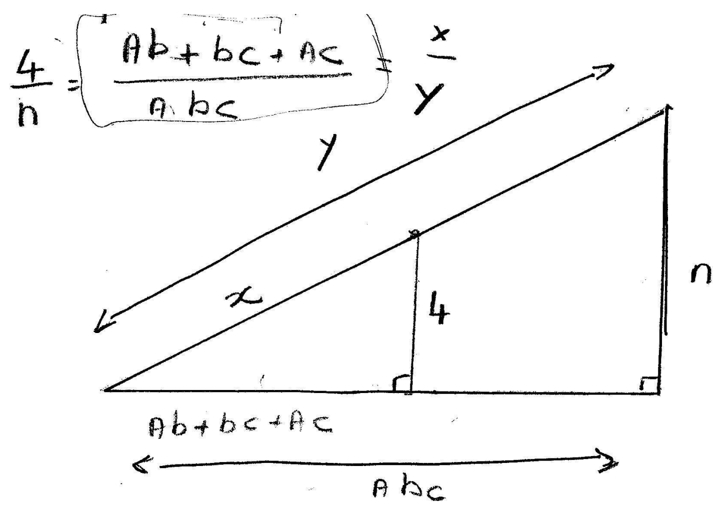


FIGURE 9.2 – Modélisation géométrique de l'équation d'Erdos-Straus par l'élève E13.

Nous faisons l'hypothèse qu'il a eu l'idée de cette modélisation en étudiant l'équation $\frac{4}{n} = \frac{ab+ac+bc}{abc}$, qui lui a rappelé les rapports de longueurs dans le théorème de Thalès. Afin d'obtenir de nouvelles relations, il a pensé au théorème de Pythagore, ce qui l'a conduit à choisir un triangle rectangle. En appliquant le théorème de Pythagore sur les deux triangles rectangles de la figure 9.2, il obtient deux nouvelles équations :

$$x^2 = (ab + bc + ac)^2 - 4^2 \tag{9.6}$$

$$y^2 = (abc)^2 - n^2 \tag{9.7}$$

9. Thépault ne pose pas $a = n$ et l'équation obtenue est $\frac{4z-n}{zn} = \frac{x+y}{xy}$.

Notons que ces deux équations sont fausses puisque ce sont x et y les hypoténuses et non $ac+bc+ac$ et abc. En remplaçant x^2 et y^2 dans $\frac{16}{n^2} = \frac{(ab+ac+bc)^2}{(abc)^2} = \frac{x^2}{y^2}$, il obtient $n = \sqrt{\frac{16((abc)^2-n^2)}{a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2+n(ab+bc+ac)}}$. Cette relation est fausse, il s'en rend compte en la testant sur un exemple. Dans l'épisode 8 (préparation de la mise en commun), l'élève corrigera ses erreurs de calculs et obtiendra la relation suivante : $n = \frac{4\sqrt{(abc)^2+n^2}}{\sqrt{(ab+bc+ac)^2+4^2}}$. Pour écrire cette relation, l'élève a effectué trois pages de calculs. Nous avons relevé plusieurs difficultés, d'une part pour écrire le théorème de Pythagore, et d'autre part pour manipuler certaines propriétés du calcul littéral. Par exemple, il écrit à partir des équations (9.6) et (9.7) que $x = \sqrt{(ab+bc+ac)-4}$ et $y = \sqrt{abc-n}$. Il demande également à ses camarades si $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Cependant, la dernière relation qu'il obtient à la fin de l'exploration de cette piste de recherche est juste. Notons néanmoins qu'il n'a pas isolé n et qu'il ne remarque pas que n apparaît dans les deux membres de l'égalité. Les deux pistes de recherche étudiées par cet élève s'inscrivent dans la continuité de ses recherches, en marge du groupe, menées lors de l'épisode 4. Il continue à explorer la conjecture d'Erdös-Straus pour n impair dans un cadre, soit plus général, soit dans un autre domaine des mathématiques que l'arithmétique. L'analyse des travaux de cet élève confirme notre analyse *a priori*, ces études se révèlent parfois complexes à conduire pour les élèves car elles nécessitent des outils algébriques et/ou géométriques non disponibles ou non mobilisables.

Ces recherches sont interrompues par l'enseignant qui rappelle aux élèves qu'ils doivent rédiger une synthèse de leurs travaux.

Épisode 7 : Rédaction de la synthèse des recherches.
Comme les élèves ont effectué des recherches individuellement, l'élève E12 demande à l'enseignant si chacun peut écrire la synthèse de ses travaux. L'enseignant répond en insistant qu'il s'agit d'abord d'une synthèse des travaux du groupe et qu'ils pourraient ensuite mentionner d'autres pistes ou résultats de recherches, étudiés individuellement. L'élève E11 pointe l'importance d'une synthèse commune pour justement mettre en commun les différentes pistes explorées dans l'épisode 6. Leur synthèse (cf. annexe C4 p. 70-71) contient donc une première partie avec les résultats trouvés par le groupe (solutions pour $n \equiv 0[2]$ et pour $n \equiv 0[3]$) puis une seconde partie avec les pistes de recherches développées par chaque élève. Cependant pour rédiger la synthèse, les élèves ne mentionnent que les conclusions de leurs recherches et ne détaillent pas leurs démarches de recherches. A la fin de la séance, ils évoquent le problème d'une étude de la conjecture d'Erdös-Straus par recherche de décompositions effectives pour une valeur de n donnée, n premier.

Troisième phase de recherche : la préparation de la première mise en commun.
Cette phase de recherche s'est déroulée au début de la séance 3. L'enseignant a donné comme consigne aux élèves de préparer une présentation de leurs recherches qu'ils exposeront ensuite devant les deux autres groupes. Nous analysons cette phase de recherche dans l'épisode 8 ci-dessous.

Épisode 8 : Préparation de la mise en commun.
Au début de la séance, l'élève E12 énonce la propriété de multiplicativité : « à chaque fois que tu as montré pour un nombre premier, tu as trouvé pour tous ses multiples ». Elle l'explique aux deux autres élèves à partir d'un cas particulier, $n = 3$, qui joue le rôle d'exemple générique (Balacheff, 1987) :

E12 : Quand tu as trouvé pour un nombre, par exemple, je ne sais pas, pour 3, tu as trouvé pour tous ses multiples. [...] Par exemple, tu as trouvé pour 3 [...] après si tu veux trouver par exemple pour $\frac{4}{9}$, tu n'as plus qu'à faire, ce que tu as trouvé ici fois $\frac{1}{3}$. En fait la distributivité, ça va faire que chaque dénominateur il faut le multiplier par 3. C'est tout et t'as trouvé comme ça.

Sur son cahier de bord (cf. annexe C4 p. 73), l'élève E12 rédige une preuve de ce résultat. Le passage de la preuve pragmatique par exemple générique à une preuve qui relève d'un calcul sur les énoncés s'est effectué grâce au passage à l'écrit. L'élève conclut que l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus se réduit à l'étude des nombres premiers.

E12 : Il faut montrer que ça marche pour tous les nombres premiers.

Elle effectue cette réduction en appui sur la propriété de multiplicativité qu'elle vient de prouver. Elle ne mentionne pas l'autre propriété essentielle, à savoir que tout nombre entier admet au moins un diviseur premier. Cela confirme notre analyse *a priori*, les élèves effectuent la réduction du problème aux nombres premiers grâce à l'identification de la propriété de multiplicativité et l'utilisation en acte de la seconde propriété. Ils n'identifient pas la nécessité de l'énoncer. Cela ne constitue cependant pas un obstacle pour effectuer la réduction du problème aux nombres premiers. En lien avec ce nouveau résultat, les élèves font un bilan de leurs recherches :

E12 : En fait on a pour tous les nombres jusqu'à 11 et tous leurs multiples. [...] Il manque que les nombres premiers supérieurs à 11.

Les élèves reprennent ensuite la synthèse de la séance 2 afin de préparer leur présentation. Chacun revient sur la piste de recherche qu'il a développée (cf. épisode 6). L'élève E11 remarque que ce qu'il a fait est « obsolète depuis que E12 a démontré ce résultat [la propriété de multiplicativité] ». En effet, il cherchait à montrer que l'équation d'Erdös-Straus avait des solutions pour tout multiple de 5. Comme ils ont une solution pour $n = 5$, le résultat trouvé par l'élève E12 assure l'existence de solutions pour tout multiple de 5. Il décide donc de ne pas présenter cette piste de recherche lors de la présentation. L'élève E13 reprend l'étude de la modélisation géométrique du problème et refait ses calculs. En expliquant aux autres élèves ce qu'il a fait, il doute de la pertinence de cette méthode pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus :

E13 : J'en déduis n et n ça fait tout ça $[n = \frac{4\sqrt{(abc)^2+n^2}}{\sqrt{(ab+bc+ac)^2+4^2}}]$ mais ça ne sert à rien [...] ça fait une relation en plus mais c'est nul.

Pour l'élève E11, cela revient à l'étude de l'équation initiale et « on tourne en rond ». Pour l'élève E12, ne prendre que des triangles rectangles semble être une condition trop forte. L'élève E13 décide tout de même de présenter cette piste de réflexion lors de la mise en commun. Enfin, l'élève E12 reprend l'étude de sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs et l'explique aux autres élèves :

E12 : Si t'as $\frac{4}{n}$, t'es d'accord que ça, c'est égal à ça $[\frac{4k}{kn}]$, tu multiplies par k et bien j'ai trouvé avec des essais que, il faut que $4k$ soit la somme de trois des diviseurs de kn.

L'élève E11 voudrait comprendre la mise en œuvre de ce procédé pour trouver une décomposition pour une valeur de n donnée. L'élève E12 lui montre l'exemple trouvé pour $n = 11$. Elle est consciente que ce résultat est à l'état de conjecture mais qu'il est efficace pour trouver des décompositions et étudier la conjecture d'Erdös-Straus dans une visée de recherche de décompositions effectives.

E12 : Mais il faudrait montrer que ça on l'a toujours. Si ça, on l'a toujours c'est bon.

Elle décide de la présenter aux autres groupes lors de la mise en commun. La préparation de la présentation de leurs travaux leur a permis d'une part d'établir un résultat partiel à partir d'une idée de l'élève E12, et d'autre part de s'expliquer mutuellement les différentes pistes de recherches qu'ils ont exploitées lors de la séance 2. Ils ont ainsi fait un bilan de leurs premières recherches collectives sur la conjecture d'Erdös-Straus. Il semble que leur perspective de recherche pour les séances suivantes soit l'exploitation de la méthode de décomposition de l'élève E12 avec les multiples et les diviseurs. En effet, juste avant la présentation de leurs travaux, les élèves E11 et E12 cherchent une manière d'exploiter cette piste de recherche.

Conclusion des analyses de la première partie des recherches du groupe 1.
Les résultats obtenus et démontrés par le groupe 1 au cours des deux premières séances de recherche sont les suivants[10] :

- L'équation d'Erdös-Straus a une solution[11] pour $n = 2^b, b \geq 2$: $\frac{4}{n} = \frac{1}{3\times 2^{b-2}} + \frac{1}{3\times 2^{b-2}} + \frac{1}{3\times 2^{b-2}}$.
- L'équation d'Erdös-Straus a une solution pour $n \equiv 0[2]$: si $n = 2k$ alors $\frac{4}{2k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$. Donc $a = 2k, b = 2k, c = k$.
- L'équation d'Erdös-Straus a une solution pour $n \equiv 0[3]$: si $n = 3k$ alors $\frac{4}{3k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{6k}$. Donc $a = k, b = 6k, c = 6k$.
- Si l'équation a des solutions pour un nombre n alors elle a des solutions pour tous ses multiples.

La réduction du problème aux nombres premiers est effectuée à partir du dernier résultat, sans énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique (tout entier a au moins un diviseur premier). Les élèves projettent éventuellement d'étudier plus en détail deux pistes de recherche, la modélisation géométrique proposée par l'élève E13 et la technique de décomposition avec multiples et diviseurs de l'élève E12.

Pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus et établir ces résultats partiels, les élèves ont exploité les deux types de procédures, exploratoire et opératoire. Lors de la première séance, ils ont surtout mis en œuvre des procédures exploratoires (procédure exploratoire 1, *recherche de régularités entre les décompositions*) à partir de l'étude d'exemples. Leur but était de disposer d'un grand nombre d'exemples pour déterminer des liens entre les décompositions. Le premier résultat a ainsi été trouvé dans une dialectique entre la manipulation d'exemples, la recherche de régularités et la tentative de formulation d'une conjecture. En s'appuyant sur le questionnement des exemples et l'observation d'une régularité, les élèves ont formulé différentes conjectures (cf. épisode 1). Afin de les valider, ils ont cherché à les mettre à l'épreuve sur de nouveaux exemples. Nous avons relevé deux types de construction des exemples : soit trouver par tâtonnements et à la calculatrice trois fractions unitaires dont la somme donne $\frac{4}{n}$, soit déterminer à partir de la conjecture les valeurs de a, b, c qui doivent être solutions. Cela entraîne deux types de vérification de la conjecture : dans le premier cas, il s'agit de vérifier la conjecture en remplaçant les valeurs de a, b, c obtenues par tâtonnements pour la valeur de n donnée, dans le second cas, il s'agit de vérifier que les valeurs de a, b, c données par la conjecture sont effectivement solutions de l'équation d'Erdös-Straus. Notons que dans les deux cas, les élèves utilisent l'exemple pour renforcer ou rejeter la conjecture, en suivant

10. Nous les reprenons avec leurs notations, cf. annexe C4 p. 63 et 70.
11. Ce premier résultat est ensuite considéré par les élèves comme un cas particulier du second résultat.

le raisonnement : si la conjecture est vraie alors elle est vérifiée pour cette valeur de n. Ce raisonnement est valide pour le second cas, l'exemple choisi joue alors le rôle de test et le contre-exemple sert à rejeter la formule proposée. En revanche, dans le premier cas, le rôle de l'exemple n'est pas le même. Si la décomposition, trouvée par tâtonnements pour la valeur de n choisie, ne vérifie pas la conjecture, cela ne l'invalide pas puisqu'il y a non-unicité des décompositions. Or, les élèves considèrent que c'est un contre-exemple et rejettent la conjecture. Ils ne cherchent pas une autre décomposition pour la même valeur de n. La non-unicité d'une décomposition pour une valeur de n donnée a pourtant été mise en évidence et exploitée au cours de leurs recherches. Les résultats suivants, pour n multiple de 2 et n multiple de 3, ont été formulés par l'élève E12 à partir de manipulations algébriques sur l'équation initiale, vérifiés à l'aide d'exemples puis prouvés par utilisation du calcul littéral. Nous faisons l'hypothèse que l'élève a élaboré ces résultats grâce à l'articulation de ses recherches, d'une part axées sur l'exploitation de procédures exploratoires (étude et construction d'exemples par recherche de régularités), et d'autre part centrées sur la mise en œuvre de procédures opératoires (procédure opératoire 3, *transformation de l'équation initiale*). Les travaux de cette élève s'inscrivent en effet dans une démarche de recherche de type expérimental, entre manipulation des objets mathématiques en jeu et élaboration d'éléments théoriques rendant compte de propriétés de ces objets. Dans la suite des recherches, elle essaie par exemple de déterminer une méthode de décomposition avec des multiples et des diviseurs (procédure exploratoire 2) par des allers et retours entre la construction de décompositions par un procédé de calcul et tentative de formulations à l'aide du calcul littéral de ce procédé. Comme nous l'avons relevé chez les chercheurs (cf. analyse mathématique et épistémologique, partie II), nous faisons l'hypothèse que les résultats trouvés par cette élève sont les fruits de l'ensemble de ses recherches individuelles et collectives au sein du groupe. Pour l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus dans le cas où n est impair, les élèves E11 et E13 ont davantage exploité des procédures opératoires (procédure opératoire 3, *transformation de l'équation initiale* et procédure opératoire 4, *étude d'une équation du second degré*). Nous faisons l'hypothèse qu'ils axent leurs recherches sur la mise en œuvre de ce type de procédures car l'exploitation de procédures exploratoires s'est révélée moins efficace et productive que pour l'étude du cas où n est pair. Ils cherchent alors une approche plus générale de la conjecture d'Erdös-Straus. Ce changement de point de vue entraîne le choix d'une dimension organisatrice particulière, celle du changement de cadre. Les élèves ont tenté de formuler et étudier le problème dans un cadre algébrique ou dans un cadre géométrique. Notons cependant que les élèves n'étudient pas ces pistes de recherche en déconnexion avec le caractère expérimental du problème. L'exemple ne joue parfois que le rôle de vérificateur (notamment dans la modélisation géométrique du problème) mais le plus souvent, il est utilisé pour articuler les aspects syntaxiques et sémantiques d'un raisonnement (cf par exemple l'épisode 6). Dans ce cas, il joue un rôle central dans la progression des élèves sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

L'analyse des processus de recherche à partir des procédures mises en œuvre (cf. figure 7.1 p. 267) montre que les élèves n'ont pas choisi d'inscrire leurs recherches dans une visée particulière pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Ce qui semble les conduire à privilégier une étude par recherche de décompositions pour des valeurs de n données, c'est l'efficacité des procédures exploratoires pour trouver des résultats partiels. Nous faisons l'hypothèse que, pour ces élèves, l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus consiste, à leur niveau, non pas à prouver sa vérité mais à trouver des résultats partiels ou à formuler des conjectures. Ainsi, même s'ils sont conscients de l'inconvénient de cette démarche de recherche qui réduit les cas à étudier mais pas en nombre fini, ils ne la rejettent pas et projettent de la poursuivre. La première dimension organisatrice suivie par les élèves est celle de la disjonction de cas, pour

n pair et pour n impair. Cette pensée organisatrice s'est révélée à la suite de l'élaboration du résultat prouvant l'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus pour n pair. Les élèves ont alors continué leurs recherches par l'étude du cas n impair. Les recherches des élèves E11 et E13 se sont inscrites dans une dimension organisatrice particulière, celle de changement de cadre alors que l'élève E12 a cherché à exploiter les ressorts de la dimension expérimentale. Ce sont ses recherches qui leur ont permis de réduire le problème à l'étude des nombres premiers, dans un premier temps grâce au résultat pour les nombres multiples de 3 puis dans un second temps grâce à la propriété de multiplicativité. La suite de leurs recherches va alors se situer sous la pensée organisatrice du jeu d'extension/réduction. Ces analyses confirment notre analyse *a priori*, la dimension organisatrice de disjonction de cas, la dimension opératoire associée de la représentation d'un entier à l'aide de la division euclidienne et la mise en œuvre d'une démarche expérimentale favorisent l'avancée des élèves dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus et notamment, dans la production de résultats partiels. La dimension organisatrice de changement de cadre (résolution d'équation algébrique ou représentation géométrique) est difficile à suivre pour les élèves, notamment en raison des dimensions opératoires associées (manipulation de l'outil algébrique, utilisation de théorèmes-clés en arithmétique, algèbre ou géométrie) qu'ils ne maîtrisent pas suffisamment. L'exploitation de ces pistes de recherche ne leur permet donc pas facilement d'établir des résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus.

B. Itinéraire de recherche du groupe 2 - Première partie.

Nous analysons ci-dessous les trois phases de recherche qui constituent la première partie de l'itinéraire de recherche du groupe 2.

Première phase de recherche : les recherches individuelles.
Nous analysons successivement les trois recherches individuelles des élèves de ce groupe.

Recherche individuelle de l'élève E21 (cf. annexe D4, p. 120-122).
Cet élève a d'abord tenté de démontrer que a, b, c ne pouvaient pas être égaux. Pour cela, il a posé $x = a = b = c$ puis remplacé a, b et c par x dans l'équation initiale. Il trouve $\frac{3}{x} = \frac{4}{n}$ et en déduit que cette égalité est fausse. Ensuite, il a écrit quelques exemples de décompositions, pour des valeurs de n données : $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 8$. La décomposition trouvée pour $n = 4$, à savoir $\frac{4}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ lui permet de se rendre compte que son premier résultat est faux : dans cet exemple, les trois fractions unitaires sont égales. Il précise, dans sa synthèse, qu'avec les exemples, il voulait établir un lien entre a, b et c, mais que cette idée s'est révélée être « sans succès ». Il a alors écrit l'équation initiale sous deux formes différentes en réduisant au même dénominateur : $\frac{4}{n} = \frac{bc+ac+ab}{abc}$ puis $4 = \frac{(bc+ac+ab)n}{abc}$. Enfin, il a cherché un lien entre abc et n et un lien entre $bc + ac + ab$ et 4 à l'aide des congruences.

Cet élève a exploité deux types de procédures :

- la procédure opératoire 3 : transformation de l'équation initiale par réduction au même dénominateur ;
- la procédure exploratoire 1 : recherche de régularités entre les décompositions, à partir de quatre exemples (pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 8$).

Lors de la présentation de sa recherche aux autres membres du groupe, l'élève explicite pour quelle raison il a exploité ces procédures : il cherche à prouver la vérité de la conjecture en montrant qu'il existe un lien entre n et a, b, c. Il semble que la seule articulation effectuée entre les deux procédures soit l'infirmation, par un exemple, de son premier résultat (il n'est pas possible d'avoir $a = b = c$) obtenu par manipulations algébriques. Dans sa recherche, l'élève E21 a utilisé deux fonctions différentes de l'exemple : le recours aux exemples l'a aidé, d'une part à rechercher des régularités (recherche par ailleurs infructueuse), et d'autre part à identifier qu'un résultat singulier était en contradiction avec un résultat théorique énoncé précédemment.

Recherche individuelle de l'élève E22 (cf. annexe D5, p. 131-134).
Cet élève a débuté la recherche du problème en le reformulant avec des quantificateurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \exists (a,b,c) \in \mathbb{N}^*, \frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}?$$

Il a ensuite transformé l'équation initiale sous plusieurs formes par manipulations algébriques. La première forme, obtenue par réduction au même dénominateur et produit en croix, est $4abc = n(ab+bc+ac)$. Il précise qu'elle ne contient que des entiers et que « c'est plus facile pour utiliser l'arithmétique et la divisibilité ». Il a alors tenté d'écrire des relations de divisibilité : $4|n(bc+ac+ab)$ et $n|4abc$. La seconde forme obtenue est $\frac{8}{n} = \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{abc}$. A partir de cette équation, il a écrit d'autres transformations mais, selon lui, « sans réel intérêt ». La seconde piste suivie est la tentative de faire un raisonnement par l'absurde. La difficulté qu'il éprouve est de « trouver la supposition initiale ». Il s'est posé les questions suivantes : comment prouver une existence ? Comment prouver une appartenance à $\mathbb{N}$? Enfin, il s'est demandé s'il était possible, si elle existe, de trouver une décomposition de $\frac{4}{n}$ à partir de l'entier n précédent et de faire un raisonnement par récurrence.

Cet élève semble convaincu que la conjecture est vraie et il cherche à trouver un moyen de la prouver. Pour cela, il a exploité des procédures opératoires :
- la procédure opératoire 3 : transformation de l'équation initiale effectuée par réduction au même dénominateur puis par règle de trois ;
- la procédure opératoire 5 : effectuer un raisonnement par récurrence.

Dans la présentation de ses recherches aux autres membres du groupe, il évoque également le raisonnement par l'absurde, qu'il souhaitait mettre en œuvre pour prouver l'existence d'un triplet solution (a,b,c) pour tout entier naturel n. Notons enfin que dans son cahier de bord, quelques décompositions pour une valeur de n donnée ($n=2$ et $n=3$) sont écrites mais elles sont barrées. Comme il n'en parle pas lors de la mise en commun, nous n'avons pas d'éléments pour savoir comment il les a trouvées et pourquoi il les a écrites.

Recherche individuelle de l'élève E23 (cf. annexe D6, p. 143-149).
Cet élève a d'abord transformé l'équation initiale pour isoler n. Son objectif était de simplifier l'écriture de l'équation initiale pour « tenter une vérification des premiers termes ». Il abandonne rapidement cette première piste de recherche car « la vérification [lui] paraît difficile ». La seconde piste suivie par cet élève est l'étude des cas particuliers où $a=b=c$ puis où $a=c$. Il a fait deux pages de calculs mais, lors de la présentation de ses travaux, explique aux autres que « les deux pages de développement avec les congruences ne donnent rien ». Enfin il évoque une troisième piste de recherche qui est l'étude de l'équation initiale pour $n=2$, c'est-à-dire étudier l'équation suivante :

$$2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{9.8}$$

Son but est de « déduire une règle générale de l'égalité en isolant ou éliminant un des entiers naturels a, b ou c ». Il a par exemple isolé c en écrivant $c = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ puis il l'a réinjecté dans l'équation (9.8). Selon lui, les résultats semblent uniquement compliquer l'écriture de l'équation initiale. Les autres élèves du groupe réagissent à sa dernière piste de recherche en évoquant une impasse :

E21 : Est-ce que tu peux exprimer c et le réinjecter dans la même égalité ?

E22 : Oui mais tu arriveras à une impasse. [...] Il faudrait avoir deux équations à la limite pour que ça marche [...] pour que ça te mène à quelque chose.

Cet élève a mené une recherche du problème par diverses manipulations algébriques de l'équation initiale. En exploitant la procédure opératoire 3 qui consiste en des transformations de l'équation initiale, il a cherché une écriture qui lui semblait plus simple pour explorer le problème. Ses différents essais sont restés infructueux. Ses écrits ne contiennent aucune décomposition pour une valeur de n donnée. Il n'a *a priori* pas exploité le caractère expérimental du problème. Sa recherche semble guidée par une dimension organisatrice particulière : la simplification du problème. Il semble en effet chercher une méthode générale par simplification en diminuant le nombre d'inconnues dans l'équation initiale de deux manières différentes : soit en ajoutant des relations ($a = b$ ou $a = b = c$), soit en fixant une valeur de n ($n = 2$). Dans ce cas, $n = 2$ joue pour lui le rôle d'exemple générique.

Recherche individuelle de l'élève E24 (cf. annexe D7, p. 163-165).
Cet élève a étudié la décomposition de $\frac{4}{n}$ uniquement pour trois valeurs particulières de n. Il obtient les résultats suivants[12] :

- si $n = 4$ alors $a = b = c = 3$;
- si $n = 8$ alors $a = b = c = 6$;
- si $n = 12$ alors $a = b = c = 9$.

A partir de ces exemples, il formule une conjecture :

Conjecture : $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ VRAI si $n = 4k$ et $a = b = c = 3k$ pour $k > 0$.

Il trouve ensuite une solution pour $n = 2$ ($a = 1$ et $b = c = 2$) et une autre pour $n = 4$ ($a = 2$ et $b = c = 4$). Il formule la conjecture suivante :

Conjecture : $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ VRAI si $n = 2k'$, $a = k'$ et $b = c = n = 2k'$ pour $k' > 0$.

Il précise que cette conjecture est formulée pour n pair. Pour la suite de ses recherches, son cahier de bord mentionne une solution pour $n = 3$ et lors de la présentation de sa recherche, il indique aux autres élèves qu'il n'a pas réussi à trouver de formule pour les nombres impairs. Dans sa synthèse, il regroupe ses deux conjectures et écrit :

Pour n pair ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) : il semble que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ soit vraie si $a = k$ ($k \in \mathbb{N}$) et $b = c = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Enfin, lors de la présentation de ses travaux aux autres élèves, il met en évidence l'existence de plusieurs décompositions pour une même valeur de n.

Cet élève a exploité le caractère expérimental du problème (faire des essais sur des valeurs de n données) et semble avoir mis en œuvre uniquement des procédures exploratoires. Le corpus recueilli sur ses recherches (cahier de bord et présentation de sa recherche au groupe) ne permet pas de savoir quelle procédure exploratoire il a utilisée. En effet, nous ne pouvons pas identifier comment ses décompositions pour une valeur de n donnée ont été obtenues. Elles peuvent avoir été trouvées par tâtonnement (à la main ou à la calculatrice) ou par recherche d'une méthode de décomposition en étudiant le cas où $a = b = c$ (pour $n = 4$, $n = 8$ et $n = 12$) puis le cas où $b = c$ (pour $n = 2$ et $n = 4$). Nous faisons cependant l'hypothèse que les conjectures ont été formulées en observant des régularités entre les décompositions trouvées (procédure exploratoire 1). Par exemple pour la première conjecture (pour n multiple de 4), l'élève a repéré que les trois dénominateurs étaient égaux et que n, a, b et c pouvaient

12. Ce sont ses notations.

s'exprimer avec le même paramètre k. La recherche de cet élève s'inscrit dans une visée de recherche de décompositions effectives.

L'analyse à l'aide du diagramme des procédures (cf. figure 7.1 p. 267) montre que trois élèves sur quatre ont mené une recherche s'inscrivant dans une quête de la vérité de la conjecture. Les procédures exploitées sont majoritairement opératoires. Les élèves ont tenté de transformer l'équation initiale, sous différentes formes, en espérant obtenir une équation plus facilement exploitable, avec des outils arithmétiques par exemple. Un élève a essayé d'utiliser des exemples pour déterminer des liens entre n et a, b, c mais toujours dans une optique de déterminer l'existence d'une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires pour tout entier n. C'est la seule articulation effectuée entre les deux types de procédures, exploratoire et opératoire. Notons que ces pistes de recherche se sont révélées infructueuses en termes de productions de résultats pour ces élèves. Le quatrième élève a exploré le problème par recherche de décompositions effectives. Il a exploité plusieurs procédures opératoires. Cela lui a permis de formuler des conjectures sur le problème (conjectures d'existence d'une décomposition pour les nombres multiples de 4 puis pour les nombres pairs). Il a également montré la non unicité des décompositions pour une valeur de n donnée.

Les premières recherches collectives du groupe sur le problème vont s'appuyer sur son travail. Les élèves vont chercher à démontrer la conjecture pour les nombres pairs puis vont mener une recherche par disjonction de cas pair/impair.

Deuxième phase de recherche : les premières recherches collectives en groupe.
Les premières recherches collectives en groupes se sont déroulées lors des séances 1 et 2. Nous avons découpé cette phase en 12 épisodes. Les épisodes 1 à 3 se sont déroulés pendant la séance 1 et les épisodes 4 à 12 pendant la séance 2. Ci-dessous, nous analysons successivement ces épisodes.

Épisode 1 : Preuve de la conjecture établie par l'élève E24 sur l'existence d'une décomposition pour tout n pair.
La conjecture établie par l'élève E24 sur l'existence d'une décomposition pour tout n pair est la suivante :

> Pour n pair ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) : il semble que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ soit vraie si $a = k$ ($k \in \mathbb{N}$) et $b = c = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

L'élève E21 propose de remplacer les valeurs trouvées par l'élève E24 pour n pair dans l'équation initiale, c'est-à-dire remplacer n par $2k$, a par k et b, c par $2k$. Ils écrivent donc $\frac{4}{2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$. Ils se posent alors la question de la preuve de ce résultat. L'élève E22 pense tout de suite que c'est facile : « il suffit de montrer l'égalité des deux ». Il essaie de le démontrer mais pense qu'il est peut être allé un peu vite. L'élève E21 précise alors que cette identité donne une information supplémentaire : « deux [dénominateurs] sont égaux et un autre est la moitié ». Ils écrivent alors l'identité sous cette forme : $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$. C'est à partir de cette identité qu'ils prouvent la conjecture. Ils la réduisent au même dénominateur pour la vérifier et précisent qu'elle prouve que si n est pair, alors une décomposition existe. Notons qu'ils n'écrivent pas explicitement que $\frac{n}{2}$ est un entier naturel si et seulement si n est pair. Cette équivalence leur semble évidente. Dans cette phase d'élaboration de preuve, les élèves ne se sont pas servis des exemples qui ont permis à l'élève E24 de formuler la conjecture. En revanche, ils ont utilisé un exemple ($n = 24$) comme moyen de contrôle de leur conjecture et de sa preuve. On peut se demander si cette vérification n'est pas l'indicateur d'un doute sur la validité de leur démonstration. Après avoir établi ce résultat partiel sur la conjecture d'Erdös-Straus, les élèves concluent qu'il reste à prouver la conjecture pour « tous les nombres impairs » et en riant précisent : « on a enlevé une infinité et il reste une infinité ». Ils sont donc conscients d'avoir réduit le nombre de cas à étudier mais pas en nombre fini.

Épisode 2 : Recherche d'une conjecture pour les nombres impairs. Utilisation du théorème de Gauss pour déterminer une relation de divisibilité si n est impair. Après avoir prouvé l'existence de solutions pour tout n pair, les élèves cherchent à formuler une conjecture analogue pour les nombres impairs. Ils cherchent à écrire une décomposition de $\frac{4}{2k+1}$ en somme de trois fractions unitaires à partir de l'équation initiale. Ils n'évoquent pas la possibilité de construire des exemples pour des valeurs impaires de n afin de les étudier comme une aide à la formulation de conjecture. Avant de s'engager dans cette piste de recherche, ils évoquent la probable difficulté à trouver cette formule en faisant référence au statut épistémique de la conjecture :

> E21 : On ne trouvera pas sinon c'est qu'on a fait une erreur.
>
> [...]
>
> E22 : En fait, je pense que c'est plus dur à conjecturer [...] je pense que ce n'est pas trivial, à mon avis ce n'est pas trivial.
>
> [...]
>
> E21 : En plus, si ça se trouve il n'y en a pas une infinité [de formules] mais au fur et à mesure que n est grand il y en a de plus en plus.

Cette prise de recul quant à la faisabilité de l'étude envisagée leur permet de circonscrire leur recherche et de ne pas s'engager dans une piste de recherche *a priori* trop difficile ou infructueuse.

L'élève E21 revient sur l'identité pour les nombres pairs et la vérifie à nouveau pour $n = 826$. Ce recours à une expérience cruciale (Balacheff, 1987) confirme que pour certains élèves du groupe, la preuve ne suffit pas à les convaincre de la vérité de la conjecture pour les nombres pairs.

> E21 : Ça marche.
>
> E22 : Mais de toutes façons, on l'a prouvé.

L'élève E22 propose de restreindre la recherche d'une identité pour les nombres impairs aux nombres impairs divisibles par 3. Il s'ensuit une discussion sur l'intérêt de suivre cette piste de recherche :

> E21 : Si on part sur cette piste, si on arrive à démontrer pour un autre, pour $n = 3$ par exemple, après il faudra démonter pour 5, pour 7 [...] Ça ne nous aidera pas à trouver [l'existence d'une décomposition pour tout n entier naturel].
>
> E22 : Mais on aura déjà enlevé un certain nombre de cas.
>
> E21 : Oui mais il en restera toujours une infinité.
>
> E22 : Oui mais on aura enlevé une infinité quand même.

L'idée d'étudier certains nombres impairs, par exemple les multiples de 3, est discutée au sein du groupe car si cette piste limite la recherche, elle ne permet pas de la réduire à l'étude d'un nombre fini de cas. Certains élèves ne voient donc pas l'intérêt de s'intéresser à cette piste de recherche. Ils n'identifient pas à ce moment de la recherche l'intérêt de la réduction aux nombres premiers pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus et en particulier, en quoi travailler avec les nombres premiers pourrait leur donner des outils théoriques supplémentaires pour explorer le problème. Les élèves optent alors pour une exploitation algébrique et arithmétique de l'équation initiale avec le théorème de Gauss pour traiter le cas des nombres impairs. Ils essaient d'exploiter l'équation $4abc = n(ab + ac + bc)$ issue de l'équation initiale par transformation d'écriture. Ils remarquent que n est premier avec 4 puisque n est impair et appliquent le théorème de Gauss. Ils déterminent alors la condition suivante : $ab+ac+bc$ est divisible par 4. Cette étude sera la base de la construction de leur résultat principal sur la conjecture d'Erdös-Straus (cf. épisode 15).

Épisode 3 : Recherche d'un exemple pour vérifier la relation de divisibilité dans le cas n impair.

Après avoir déterminé une relation de divisibilité pour les nombres impairs à partir de l'application du théorème de Gauss, les élèves cherchent à vérifier cette relation sur un exemple. Ils la testent avec l'exemple de l'élève E24 : $n = 3$, $a = b = 2$ et $c = 3$. Parallèlement, l'élève E22 calcule la proportion de nombres qu'ils auront traités s'ils trouvent une identité pour les nombres multiples de 3 :

> E22 : On aura prouvé pour les $\frac{2}{3}$ des nombres.
>
> E21 : On va tendre vers la résolution.
>
> E22 : Ça me paraît être une bonne démarche (rires). [...] Non mais là on a avancé.
>
> E23 : Un peu plus que quand on était tout seul.

L'élève E21 explique ensuite qu'il aimerait bien trouver d'autres exemples pour n impair que $\frac{4}{3}$, où deux dénominateurs sont égaux. Le groupe commence donc à chercher une décomposition pour $\frac{4}{5}$. Ils remarquent que pour cette valeur de n, ils « franchissent le cap des $n < 1$ » et qu'il ne faut pas de fraction unitaire égale à 1. L'élève E22 doute toujours de la pertinence de l'étude de cas particuliers et évoque la possibilité que la conjecture soit fausse :

> E22 : Le problème majeur c'est qu'on ne sait pas si ce qu'on cherche existe. $\frac{4}{5}$ si ça se trouve, il n'existe pas. On cherche à prouver l'existence mais est-ce que ce n'est pas plutôt l'inexistence ? [...] Il faudrait pouvoir trouver un moyen de conjecturer à l'avance [l'existence ou la non existence]. Je suis sûr qu'il y a déjà des mecs qui ont fait tourner des ordinateurs pour avoir des très grandes valeurs, pour conjecturer tu vois.
>
> E21 : $\frac{4}{5}$ c'est tellement petit que c'est forcé, qu'il y a une décomposition qui a été trouvée.
>
> E22 : Il y a des conjectures comme ça où on a prouvé jusqu'à une très grande valeur, on est presque sûrs que c'est vrai mais on ne sait pas, on n'a pas réussi à prouver. C'est la conjecture de Riemann je crois.

Le groupe achève la séance 1 sur l'idée de trouver une décomposition pour $n = 5$ tout en ayant un doute sur la pertinence de cette piste de recherche comme l'exprime l'élève E21 : « Je ne sais même pas si c'est une bonne piste ». Cette piste de recherche ne semble pas les satisfaire car elle ne permettra pas d'établir l'existence pour tout nombre entier naturel n d'une décomposition. Nous faisons l'hypothèse que la quête de la vérité de la conjecture est la visée privilégiée par ce groupe, la recherche de décompositions effectives étant très discutée.

A la fin de la première séance, les élèves ont un résultat partiel sur la conjecture d'Erdös-Straus (il existe une décomposition pour tout n pair) et une relation de divisibilité si n est impair. Leur visée de la recherche semble guidée par la quête de la vérité. En effet, ils cherchent à prouver l'existence d'une décomposition pour tout entier n et l'étude de cas particuliers ne leur semble pas une piste pertinente pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Ils exploitent davantage des procédures opératoires par manipulations algébriques (notamment par transformation de l'équation initiale) et utilisation d'outils arithmétiques (divisibilité, théorème de Gauss). L'exemple a été utilisé comme une aide à la formulation de conjectures par un élève mais au sein du groupe il est davantage exploité pour vérifier des résultats théoriques.

Épisode 4 : Étude d'une décomposition pour tout n multiple de 3.
La seconde séance de recherche collective du groupe débute par un débat sur l'utilité d'un résultat trouvé par l'élève E22 entre les deux séances de recherche.

> E22 : J'ai trouvé pour les multiples de 3.
>
> E21 : Ça sert à rien.
>
> E22 : Oui mais c'est toujours quelque chose.
>
> E21 : On tend vers la résolution du problème.
>
> E22 : Comme le fait d'avoir résolu pour les nombres entiers pairs, c'est toujours ça.
>
> E21 : C'était en deux coups alors que là si on fait les multiples de 3, de 5, on n'y arrivera jamais.
>
> E23 : Ta démarche peut quand même nous servir.
>
> E22 : Oui voilà.
>
> E21 : Juste, la conclusion nous intéresse pas.

L'élève E21 est très critique face à la pertinence d'étudier ce cas particulier pour l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Il semble de plus en plus convaincu que ce n'est pas une bonne piste à suivre. Les autres semblent d'accord mais pensent tout de même que cela peut apporter des éléments intéressants, notamment dans la démarche mise en œuvre. L'élève E22 explique alors son identité $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ pour les nombres impairs multiples de 3 :

> E22 : $\frac{1}{\frac{n}{3}}$ ça fait $\frac{3}{n}$, reste $\frac{1}{n}$, ce qui fait $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$.

Comme ce résultat a été trouvé entre les deux séances de recherche, nous ne disposons que des explications *a posteriori* de l'élève pour savoir comment il a élaboré ce résultat. D'après ses explications, il a trouvé l'identité pour tout n multiple de 3 en cherchant une analogie avec celle formulée pour tout n pair. Il explique avoir trouvé la première fraction $\frac{3}{n}$ et cherché ensuite les fractions unitaires à ajouter pour avoir $\frac{4}{n}$. Il ne mentionne pas l'exploitation d'exemples. Nous faisons l'hypothèse qu'il a déterminé la fraction $\frac{3}{n}$ par analogie avec la fraction $\frac{2}{n}$ dans l'identité pour n pair. Il a ensuite utilisé l'égalité suivante : $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$. Notons que comme dans l'élaboration de la preuve de la conjecture pour tout n pair, la vérification de l'identité par réduction au même dénominateur semble leur suffire pour prouver l'existence d'une décomposition pour tout nombre impair multiple de 3. Ils n'éprouvent pas la nécessité de mentionner et d'expliciter l'équivalence « $\frac{n}{3}$ est un entier si et seulement si n est multiple de 3 ». A la suite de l'écriture de cette identité, l'élève E21 remarque qu'il y a encore deux dénominateurs égaux. Il semble alors faire l'hypothèse qu'il existe une solution générale avec deux dénominateurs égaux et voudrait chercher une méthode générale s'appuyant sur cette forme de solution.

Épisode 5 : Réduction de la recherche du problème aux nombres premiers congrus à 1 et 5 modulo 6.
A partir de leurs deux résultats (existence d'une décomposition pour n pair et pour n multiple de 3), l'élève E22 réduit le nombre de cas à étudier aux nombres impairs modulo 6 en appliquant en acte le théorème des restes chinois : « Il nous manque $n \equiv 1[6]$ et $n \equiv 5[6]$, le reste est démontré ». Ce raisonnement lui semble assez naturel et il explique aux autres élèves qu'il l'a fait par observation. Il écrit les nombres de 1 à 6 puis explique : « 2, 4, 6 sont des

multiples de 2, ils sont déjà faits et 3 est un multiple de 3 donc déjà fait. Il reste 1 et 5 ». Il précise qu'il s'agit juste d'une observation et que ce n'est pas forcément comme ça qu'il faut prendre le problème. Ce résultat réintroduit le doute quant à la pertinence de suivre la piste de recherche par étude de classes de nombres. Les élèves sont conscients que la réduction ne permet pas de limiter la recherche à un nombre fini de cas et pensent qu'il restera toujours un cas à étudier.

> E22 : Je voudrais observer, jusque là on utilisait une méthode constructive mais je ne sais pas si c'est la meilleure solution. On ne peut pas résoudre par un raisonnement constructif pour tout.
>
> E21 : Ou alors on arrivera pour un seul cas, $n \equiv 1[6]$, et il nous restera toujours l'autre.
>
> E22 : On nous demande de prouver l'existence, pas de les construire, limite ici on en fait trop.
>
> E21 : Efficace quand même votre technique car on prouve quand même que ça existe.
>
> E23 : Je propose de faire des raisonnements constructifs le plus possible car, bon, j'ai essayé au début d'autres méthodes et ça donne rien.

L'élève E22 provoque une discussion d'ordre méta-mathématique sur la différence entre une preuve constructive et une preuve d'existence non constructive. Ces commentaires relèvent de leur visée de la recherche, à savoir une quête de preuve de la vérité de la conjecture d'Erdös-Straus. Notons que la position de l'élève E21 évolue puisqu'il reconnaît qu'une étude de cas particuliers permet de prouver l'existence de solutions pour certaines valeurs de n données. A l'issue de cette discussion, l'élève E23 propose de faire deux groupes qui chercheraient dans des voies différentes : recherche d'une formule générale et étude de cas particuliers. Les autres ne semblent pas approuver cette proposition.

Épisode 6 : Recherche d'une décomposition pour $n = 5$.
L'élève E21 revient sur la recherche d'une décomposition pour $n = 5$. Les élèves essaient alors de trouver une formule par analogie avec les formules trouvées pour n pair et n multiple de 3 en essayant comme première fraction unitaire $\frac{1}{\frac{n}{5}}$. Comme cela ne marche pas, ils pensent qu'ils ne pourront pas trouver de solution avec cette méthode car à partir de $n = 5$, la fraction $\frac{4}{n}$ est strictement inférieure à 1. L'élève E21 réinterroge alors la méthode consistant à étudier des cas particuliers :

> E21 : A chaque fois on va en éliminer, éliminer et on n'y arrivera jamais, il faut trouver quelque chose de plus général.

Il suggère de trouver une piste de recherche plus générale et plus efficace, pour essayer de prouver l'existence d'une décomposition pour tout entier n, que l'étude de cas particuliers. Selon lui, le problème de cette étude semble être le traitement de sous-classes. Au début, la disjonction de cas se fait sur la parité de n, le cas n pair est traité et l'étude du cas n impair conduit à une nouvelle disjonction de cas. Certains cas sont facilement traités mais d'autres résistent. Il réalise alors que l'étude de cas particuliers ne repose pas sur une disjonction de cas puisqu'il existera toujours un sous cas non traité et donc, un nombre infini de cas à étudier. Cependant il insiste à nouveau pour trouver une solution pour $n = 5$ car il fait l'hypothèse qu'une décomposition pour $n = 5$ pourrait être généralisée à « d'autres choses » à partir de l'équation $\frac{4}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. L'élève E23 veut décomposer 5 en somme de deux entiers $(5 = 1 + 4 = 2 + 3)$ et étudier tous les cas possibles pour trouver une décomposition de $\frac{4}{5}$. Nous faisons l'hypothèse que la difficulté qu'ils éprouvent à déterminer une décomposition de

$\frac{4}{5}$ est liée à la réticence à s'engager dans une recherche par étude de décompositions effectives. L'élève E21 se pose la question de savoir si la conjecture est vraie ou fausse parce que « en général, les scientifiques ils ne se trompent pas quand ils pensent que c'est faux ou quand ils pensent que c'est vrai ». L'élève E22 dit qu'il ne veut pas chercher un exemple, il veut chercher à prouver l'existence. Il précise que si les scientifiques savent si une conjecture est vraie ou fausse, parfois, c'est par l'utilisation d'algorithmes :

> E22 : Oui mais des fois s'ils pensent que c'est vrai, c'est parce qu'ils ont fait tourner des algorithmes par exemple. La conjecture des nombres premiers jumeaux par exemple, s'ils pensent que c'est vrai c'est qu'ils ont fait des algorithmes et qu'ils en ont trouvé des milliards.

Dans cet épisode, les élèves ont ainsi eu de nombreuses discussions métamathématiques sur la preuve ou sur l'apport de l'étude d'exemples, réflexions liées à des connaissances mathématiques non scolaires.

Épisode 7 : Évocation de la construction d'un algorithme et utilisation du logiciel de calcul formel DERIVE.

Les élèves cherchent une piste plus générale et plus efficace pour étudier l'existence d'une décomposition pour tout entier n. Ils évoquent la construction d'un algorithme avec une implémentation sur un logiciel de programmation (Algobox). Leur idée est la suivante :

> E21 : On pose $a = 1$, et après on essaye $b = 2$, $c = 2$, $b = 3$, $c = 3$ et après tu peux changer, et après tu fais une boucle. Si cette boucle ne marche pas au bout de tant de termes, tu essaies la boucle avec b, tu vois tu essayes un truc comme ça.
>
> [...]
>
> E22 : Je ne vois pas de façon algorithmique de [inaudible] ça car il y a trois variables, il y a trois choses qui peuvent prendre des valeurs.

Cette piste de recherche ne sera pas suivie car ils font l'hypothèse, d'une part qu'ils ne disposent pas des connaissances nécessaires en algorithmique et en programmation pour implémenter cet algorithme, et d'autre part que le logiciel de programmation Algobox n'est pas performant pour l'implémentation d'un tel algorithme. L'élève E21 insiste alors de nouveau pour étudier le cas $n = 5$ car il aimerait bien savoir s'il existe une décomposition pour ce cas particulier. Il évoque l'utilisation d'un logiciel de calcul formel sur ordinateur (DERIVE) pour trouver une décomposition de $\frac{4}{5}$. Après quelques discussions, ils décident d'utiliser le logiciel « juste pour voir s'il y a une solution ou pas » mais doutent quand même de son efficacité :

> E23 : Moi, j'ai bien peur que la solution soit très compliquée, que ce soit un ensemble.
>
> E21 : Oui j'ai peur que ce soit un ensemble et qu'il y en ait trop.
>
> E22 : Je ne pense pas qu'il y ait de façon théorique de résoudre ces équations.
>
> E21 : Oui je ne pense pas non plus
>
> E22 : Je ne sais pas si la résolution de ces équations est théorisée.

Les élèves demandent au logiciel de résoudre en nombres entiers l'équation suivante : $\frac{4}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (voir annexe D3). L'utilisation du logiciel leur pose quelques difficultés notamment pour trouver la commande de résolution de l'équation en nombres entiers. Notons que la nature des nombres en jeu n'est donc pas oubliée. Comme le logiciel ne résout pas l'équation, les élèves abandonnent l'idée de trouver une solution pour le cas $n = 5$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Épisode 8 : Retour sur la recherche d'une décomposition pour $n = 5$.

A la suite des pistes de recherche infructueuses reposant sur des méthodes algorithmiques et formelles, l'élève E22 maintient qu'il ne veut pas étudier de cas particuliers et qu'il faut directement chercher une preuve de l'existence ou de l'inexistence d'une décomposition pour tout n. Il émet l'hypothèse que la conjecture peut être fausse et que personne n'a réussi à la prouver. Parallèlement, l'élève E21 prend sa calculatrice et cherche à nouveau une décomposition de $\frac{4}{5}$. Pour cela, il passe à l'écriture décimale de la fraction et essaie différentes décompositions de 0,8 en somme de trois décimaux.

> E21 : $0,3 + 0,3 + 0,2 = 0,8$, il faut donc trouver une fraction égale à 0,3 et une autre égale à 0,2. Ça existe $\frac{3}{10}$ mais il faudrait une fraction unitaire et $\frac{1}{\frac{10}{3}}$ ne marche pas car ce n'est pas un entier.

Il essaie alors $0,4 + 0,2 + 0,2$ puis $0,5 + 0,2 + 0,1$ et annonce :

> E21 : Ça y est j'ai trouvé $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$.

La décomposition a été trouvée par manipulations des nombres en jeu dans le problème, écrits sous forme décimale. Il semble que cette écriture soit davantage naturalisée et plus facile à manipuler pour eux que l'écriture sous forme fractionnaire :

> E22 : Vous passez sous la forme décimale ? Finalement c'est comme faire avec les fractions sauf que.
>
> E21 : Oui mais on est plus habitué à le faire, c'est plus instinctif.

Vu la culture mathématique et l'ensemble des connaissances mathématiques mobilisées par ces élèves au cours de leur recherche, ce passage à l'écriture décimale pour éviter de manipuler des fractions et de faire du calcul fractionnaire est surprenant. Nous faisons l'hypothèse que cela peut être lié aux contenus des programmes de mathématiques (de 2009) du secondaire, où la manipulation des fractions et le calcul fractionnaire sont peu retravaillés au lycée.

Sur cette décomposition trouvée pour $n = 5$, l'élève E23 remarque que le troisième dénominateur est le produit des deux premiers. Les élèves veulent essayer de décomposer $\frac{4}{7}$ pour voir si dans la décomposition, cette régularité ($c = a \times b$) revient. L'élève E21 se rend compte que 7 et 5 ne sont pas congrus modulo 6 et il pense que cette régularité peut changer d'une congruence à l'autre. L'élève E22 propose donc d'essayer le prochain multiple de 5 où « on n'a pas de solutions ». Ils trouvent alors une décomposition de $n = 25$ en appliquant la propriété de multiplicativité en acte : ils multiplient les dénominateurs de la décomposition pour $n = 5$ par 5. L'élève E22 écrit une identité pour tout n multiple de 5 : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2n}{5}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$. Il pense qu'ils ont étudié le cas où $n \equiv 5[6]$ et précise qu'ils « entrent dans les modulo 30 ». Cependant, les élèves sont conscients de ne pas avoir beaucoup avancé dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus et le débat sur la pertinence de cette piste de recherche est à nouveau relancé :

> E23 : Le problème si on fait ça, c'est qu'on va avoir des millions de cas à faire.
>
> E22 : Oui parce que pour $\frac{4}{7}$ on va trouver ça aussi.

A la suite de cette étude, les élèves sont dépités et ne savent plus comment continuer.

Épisode 9 : Recherche d'une autre approche pour explorer le problème et discussion autour de la mise en œuvre d'un raisonnement par l'absurde.

Dans cet épisode, les élèves cherchent une autre approche du problème pour étudier l'existence d'une décomposition pour tout entier n. Ils reprennent l'idée d'un raisonnement par l'absurde, évoqué par l'élève E22 dans sa recherche individuelle, pour essayer de prouver l'existence ou l'inexistence d'une décomposition pour tout entier naturel n. Les élèves discutent de la formulation de l'hypothèse de départ :

> E21 : Il faudrait dire, il existe toujours quelque soit n, des entiers a, b, c tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{n}$. On part de ça comme hypothèse et après on montre que c'est absurde.
>
> E23 : Ça c'est pour montrer que c'est faux.
>
> E22 : Euh non, c'est plutôt, l'hypothèse ce serait plutôt il n'existe pas. Le problème c'est que partir comme ça, ça fait bizarre de faire un raisonnement par l'absurde avec il n'existe pas. [...] Si tu prouves qu'il n'existe pas pour un n, tu n'as pas prouvé pour tous les n finalement. Je pense que dans l'articulation logique, ça pose des problèmes.
>
> E21 : Non, je ne suis pas sûr parce que si tu dis il n'existe pas d'entiers a, b, c tels que ça, ça, ça, est égal à $\frac{4}{n}$, si tu prouves que c'est absurde, par exemple, comme on avait montré qu'il y avait une infinité de nombres premiers, eh ben tu montres que, à un moment tu peux montrer que c'est illogique, enfin je ne sais pas comment expliquer. [...] Je pense qu'on n'y arrivera pas mais ce n'est pas complètement stupide de raisonner comme ça.
>
> [...]
>
> E22 : Si on veut prouver que ça existe, il faut prouver que la non existence est absurde pour tous les n.
>
> E21 : On n'y arrivera jamais parce qu'on va se retrouver dans le même cas qu'avant, on va avoir une équation et prouver que ça n'existe pas, on va devoir prouver pour certains cas que ça n'existe pas. A mon avis on va se retrouver exactement dans la même démarche de résolution de problème.

L'élève E22 évoque une autre contradiction possible :

> E22 : Si on prouvait que si on ne peut pas les écrire comme ça alors n n'est pas un entier par exemple, un raisonnement par l'absurde comme ça. [...] Si on peut le décomposer comme ça alors n n'est pas entier.

Il propose de supposer que « soit $n \in \mathbb{N}$, n ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ». La contradiction serait de montrer que n n'est pas un entier. Mais la mise en œuvre d'un tel raisonnement leur pose toujours des difficultés :

> E22 : Oui mais si on dit qu'il ne peut pas s'écrire comme ça mais du coup on part de quoi ?
>
> E21 : Oui c'est ça le problème.
>
> E22 : Si on veut prouver que c'est faux, on sait de quoi partir mais si on veut prouver que c'est vrai c'est plus dur. [...] Prouver que quelque chose est impossible marche bien, trouver que quelque chose est possible c'est plus compliqué.
>
> E21 : Répondre à la question inverse revient au même que répondre à la question de départ donc ça nous avancera à rien.

A la suite de cette discussion, la piste du raisonnement par l'absurde est abandonnée. La difficulté rencontrée par les élèves pour conduire un raisonnement par l'absurde est liée à un problème de logique dû à l'alternance des quantificateurs et à la négation d'une propriété. La négation de « pour tout n, $P(n)$ » est « il existe n, non $P(n)$ ». Les propositions des élèves « il existe a, b, c pour tout n » ou « pour tout n, n ne peut pas s'écrire ... » ne sont pas la négation de la conjecture d'Erdös-Straus [13]. Les élèves n'ont pas les mots pour exprimer ce qu'ils veulent dire et il leur manque des outils syntaxiques pour contrôler leurs propositions.

13. La négation de la conjecture est il existe n tel que $\frac{4}{n}$ ne peut pas s'écrire en somme de trois fractions unitaires.

Ces remarques confirment nos analyses *a priori* dans lesquelles nous avions mis en évidence ces difficultés dans la construction d'un raisonnement par l'absurde par les élèves ou les étudiants (cf. par exemple l'analyse de la pré-expérimentation 1 dans (M.-L. Gardes, 2009) ou (M.-L. Gardes, 2010)).

A la suite de l'abandon du raisonnement par l'absurde, les élèves évoquent d'autres pistes possibles. L'élève E24 propose d'étudier l'équation initiale en posant $m = b = c$. Cette idée provient des identités formulées pour n multiple pair et n multiple de 3 où deux dénominateurs des fractions unitaires sont égaux. L'élève E21 pense que c'est une méthode décourageante car il y a moins d'inconnues mais plus de lettres. Cette piste ne sera donc pas suivie. L'élève E22 propose de « détourner » le problème initial pour le transformer en problème de géométrie ou d'analyse ou d'autre chose, par exemple avec des complexes. L'élève E23 pense que « ça complique beaucoup » et l'élève E21 fait l'hypothèse qu'ils n'ont pas le niveau pour transformer le problème et ensuite, en exploiter la transformation. Cette piste de recherche par changement de cadre ne sera pas suivie car les élèves ne pensent pas avoir les connaissances nécessaires pour s'engager dans une telle direction.

> E22 : Si on transforme ça en analyse ou en problème géométrique, ce n'est pas quelque chose qu'on arrivera à, parce que si il y a des mecs qui ont essayé comme ça ils avaient des outils quand même beaucoup plus élevés que les nôtres.

Ils pensent en revanche qu'ils peuvent disposer des outils arithmétiques pour exploiter une piste dans ce domaine :

> E22 : Alors que dans l'arithmétique normalement on peut s'en sortir [...] Si on reste du côté de l'arithmétique, on sait qu'on a une chance non nulle de s'en sortir avec un truc pas trop, qui nécessite pas trop de connaissances.

Enfin, notons que les élèves gardent toujours en mémoire que la conjecture d'Erdös-Straus n'est pas résolue mais cela ne les décourage pas :

> E21 : On a quasi aucune chance d'y arriver mais il ne faut pas qu'on se dise, vu que les autres n'y sont pas arrivés ça sert à rien qu'on essaye, justement il faut essayer de voir comment est-ce qu'on peut apporter une pierre au problème.

Épisode 10 : Réduction de la recherche du problème aux nombres premiers modulo 30.

A la suite des diverses pistes infructueuses ou trop difficiles à mettre en œuvre évoquées à l'épisode précédent, les élèves reviennent sur l'étude des cas particuliers. L'élève E21 réinterroge la validité de l'identité écrite pour n multiple de 5. Il a besoin d'écrire $\frac{1}{\frac{2n}{5}} = \frac{5}{2n}$ puis $\frac{5}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{6}{2n}$ et $\frac{6}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{8}{2n}$. Puis, comme ils ont des solutions pour n congru à 0 modulo 2, 3 et 5, ils réduisent le problème à l'étude de cas modulo 30. Ils restent cependant sceptiques quant à l'issue de cette piste de recherche :

> E21 : Parce que les autres méthodes ne donnent rien, on fait modulo 30 et après si ça donne encore des sous-cas, on arrête.

Ils sont conscients qu'ils « englobent des trucs plus grands » mais qu'il restera toujours des cas à étudier. Ils pensent même qu'ils multiplient les cas à étudier : « même s'il reste trois cas modulo 30 ensuite ça multipliera les cas, dans un modulo 2600 (rires) ». Les élèves étudient la liste des cas modulo 30. Ils écrivent donc les nombres de 1 à 30 et éliminent ceux qu'ils ont déjà traités. La liste des classes restantes est 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Le théorème des restes chinois est à nouveau appliqué en acte, pour réduire le nombre de classes à étudier modulo 30. L'élève E22 évoque même la réduction suivante : « on va trouver pour 7 et passer à 210 ». Ils effectuent également en acte une réduction du problème aux nombres premiers. Cette réduction semble être effectuée à partir de l'observation de la liste des classes restantes modulo 30 qui ne sont que des nombres premiers. Nous faisons l'hypothèse que si elle n'est pas explicitée, c'est que les élèves ne la jugent pas pertinente pour mener leurs recherches sur la quête de la vérité de la conjecture. Ils associent l'étude des nombres premiers à une étude de la conjecture par recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données.

> E21 : On n'a aucune chance.
>
> E23 : A chaque fois on va retomber sur des nombres premiers, à chaque fois on sera obligé de refaire des cas, on va tourner en rond comme des idiots.
>
> E21 : C'est ce qu'on disait à la séance d'avant [...] on trouvera toujours des sous-cas, ça c'est certain.

Dans nos analyses *a priori*, nous avons identifié que cette dimension organisatrice est la première suivie par les chercheurs, indépendamment de la visée de la recherche privilégiée. Les élèves de ce groupe n'identifient pas les apports potentiels, en termes d'outils théoriques, de l'étude des nombres premiers pour la quête de la vérité de la conjecture. Cette piste de recherche ne sera plus évoquée dans la suite de leurs travaux.

Épisode 11 : Recherche d'une autre approche pour explorer la conjecture d'Erdös-Straus.

A la suite de l'abandon définitif de la piste de recherche par l'étude de cas particuliers, les élèves cherchent une autre approche pour explorer le problème et chacun propose une piste à explorer pour continuer leurs recherches. L'élève E22 relance l'idée d'une piste analytique à partir d'une écriture équivalente à l'équation initiale, forme qu'il a écrite pendant sa recherche personnelle, avec le carré de la somme et la somme des carrés : $\frac{8}{n} = \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{abc}$. L'élève E21 pense qu'ils peuvent encore utiliser l'arithmétique mais « sous une autre forme que les modulo 30 ». L'élève E23 évoque les suites et un raisonnement par récurrence mais l'élève E21 pense qu'il est difficile de « trouver un lien logique entre chaque terme et le suivant ». L'élève E22 revient également sur la relation de divisibilité qu'ils avaient trouvée dans l'épisode 2 (si n est premier avec 4 alors $ab + ac + bc$ est divisible par 4) et précise que « c'est positif car on n'a plus de fraction ». Les pistes proposées s'appuient sur l'exploitation de procédures opératoires (les procédures 3 et 5, transformation de l'équation initiale et raisonnement par récurrence) par manipulations algébriques et utilisation d'outils arithmétiques. Elles semblent être en accord avec leur objectif, à savoir la quête de la vérité de la conjecture. Cependant, ils n'arrivent pas à trouver une piste qui leur paraît pertinente et à leur portée. Leurs discussions sont interrompues par l'enseignant qui rappelle aux élèves qu'ils faut rédiger une synthèse de leurs recherches.

Épisode 12 : Rédaction de la synthèse des recherches.

Pour rédiger la synthèse de leurs travaux, les élèves reviennent sur les différentes pistes qu'ils ont mises en œuvre et sur celles dont ils ont étudié la faisabilité au cours de nombreuses discussions. Ils pensent qu'ils n'ont pas avancé dans leur objectif d'étudier le problème en montrant l'existence d'une décomposition pour tout entier n mais sont conscients que le travail fourni n'est pas inutile pour eux.

> E22 : On vient de prouver que ce qu'on a fait aux deux premières séances, c'est inutile à part que ça nous a fait réfléchir.

Ce constat ne les décourage pas pour mener leurs recherches et au contraire, ils continuent à chercher une autre approche pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Ils évoquent alors de nombreuses idées dans des domaines mathématiques différents.

E22 : Si on fait un repère avec des complexes dedans [...] avec des vecteurs peut-être.

E21 : Moi le problème ne me fait absolument pas penser à des vecteurs.

E23 : Moi non plus.

[...]

E21 : Une suite mais ça paraît hallucinant parce que trouver une relation entre a, b, c et n, à chaque n, il faut trouver des nouvelles valeurs de a, b, c.

E22 : Ce n'est pas parce qu'il y a écrit n que [...] On ne peut pas faire une suite, il y a trois variables.

[...]

E21 : Une fonction.

E23 : Une fonction avec des entiers naturels, ça me paraît un peu...

E21 : Ça existe, tu sais la fonction partie entière, où tu as à chaque fois un point.

E22 : Changer de champ d'application me paraît un peu suicidaire.

E21 : Le problème c'est qu'on n'est absolument pas habitué à travailler avec des fonctions avec des naturels.

E22 : Bah une fonction non continue, ce n'est pas une fonction avec des naturels la fonction partie entière, c'est avec des réels, elle est définit sur $\mathbb{R}$.

E21 : Oui c'est vrai alors que là c'est défini sur $\mathbb{N}$.

E22 : C'est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$.

E23 : Je pense que ça marche aussi dans $\mathbb{C}$.

E22 : Bah non, il n'y a même pas de notion d'ordre dans $\mathbb{C}$, c'est pas un ensemble bien ordonné, tiens c'est intéressant ça, la théorie des ensembles.

L'élève E22 conclut que s'ils changent de champ d'application, ils ne s'en sortiront pas. L'élève E21 pense qu'il faut qu'ils explorent le problème avec des outils arithmétiques et qu'ils ne sont « absolument pas habitués à transformer de l'analyse en géométrie ». L'élève E22 revient cependant sur une piste géométrique. Il écrit l'équation suivante : $8(abc) = n[(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)]$.

E22 : J'ai 8 fois le volume d'un parallélépipède rectangle égal à quelque chose qu'il faut comprendre à quoi ça correspond.

[...]

E22 : Là c'est la somme des aires des faces et là un truc non identifié.

L'élève E23 évoque l'utilisation du logiciel GeoGebra pour avoir une représentation géométrique en 3D. Puis ils lancent d'autres idées : utilisation des barycentres, du théorème de Bézout et des primitives et intégrales.

E21 : Pour les intégrales, il y a la notion de courbe ou de surface, si on n'arrive pas à traduire le problème géométriquement, alors les intégrales nous servent à rien.

E23 : Si on en fait une fonction, ce sera une fonction ponctuelle, tu n'auras jamais une belle courbe.

E21 : Et les intégrales c'est un outil très puissant que les mathématiciens maîtrisent énormément et nous on ne le maîtrise pas, donc ce n'est pas la peine de se lancer là-dedans.

L'élève E22 fait l'hypothèse qu'un changement de champ d'application est pertinent et étaye ses propos en évoquant le problème de la quadrature du cercle, problème géométrique au départ, qui est devenu un problème algébrique à la fin : « est ce que π est transcendant ? ». L'élève E21 fait l'inventaire des notions qu'ils maîtrisent au lycée : les fonctions, la géométrie, les suites, les probabilités, les limites.

Ces discussions entre les élèves sur la recherche d'une nouvelle approche pour explorer le problème entrent en résonance avec les discours des chercheurs sur le processus de découverte (cf. chapitre 5). Les élèves cherchent à faire des liens entre des notions ou des domaines mathématiques pour enrichir leur connaissance du problème et avancer dans l'élaboration d'une preuve de la conjecture. Les échanges sont également riches du point de vue des heuristiques. En référence à Pólya (1945), ils cherchent à faire varier le problème en l'explorant sous différents angles. La faisabilité des différentes pistes de recherches évoquées est discutée en fonction de la disponibilité de leurs connaissances mathématiques.

A la fin de la séance, les élèves conservent deux pistes géométriques à explorer lors de la séance suivante. La première est une idée de l'élève E22 qui revient sur sa représentation géométrique et transforme à nouveau l'équation pour obtenir : $4(abc) = n(ab + bc + ac)$.

> E22 : Si tu prends un parallélépipède rectangle de côtés a, b, c, ça $[4abc]$ c'est le volume, quatre fois le volume et ça $[n(ab+bc+ac)]$ c'est, euh, la somme des aires des côtés fois n.

La seconde idée est proposée par l'élève E21 : construire une courbe en 3D.

> E21 : Pour faire une courbe en 3D, genre un plan a, b, c et après n s'exprime en fonction de ces trois trucs. [...] Ça permet de prendre en compte toutes les solutions, par exemple n peut s'exprimer en fonction de a, b, c dans plusieurs cas et après...
>
> E23 : Mais n serait plusieurs courbes pas nécessairement continues.
>
> E21 : Oui plusieurs courbes en relief [...] Je ne sais pas trop ce que ça ferait mais ça doit être possible.

Les élèves discutent alors du problème de continuité d'une telle surface.

Troisième phase de recherche : la préparation de la première mise en commun. Cette phase de recherche s'est déroulée au début de la séance 3. L'enseignant a donné comme consigne aux élèves de préparer une présentation de leurs recherches, qu'ils exposeront ensuite devant les deux autres groupes. Nous analysons cette phase de recherche dans l'épisode 13 ci-dessous.

Épisode 13 : Les élèves préparent leur présentation pour la mise en commun au sein de la classe.
Les élèves décident de présenter leurs résultats pour n congru à 0 modulo 2, n congru à 0 modulo 3 et n congru à 0 modulo 5, ainsi que la réduction du nombre de cas à étudier modulo 30. Ils veulent préciser pour quelles raisons ils ont étudié ces cas particuliers : d'une part pour « voir si des choses se répètent » (c'est-à-dire rechercher des régularités pour trouver des liens entre n, a, b et c) et d'autre part pour savoir « ce qu'on devait démontrer » (c'est-à-dire se faire une idée sur la vérité ou non de la conjecture). Ils précisent que l'étude de cas modulo 30 est fastidieuse et qu'ils sont donc « partis sur d'autres approches même si c'était absurde ». Ils décident de présenter les pistes non abouties et les problèmes qu'elles posent :

– le raisonnement par l'absurde : « c'est difficile de montrer l'existence, si on nie l'hypothèse de départ, on commence de quoi, on n'a rien » ;
– la piste géométrique avec le parallélépipède rectangle : ils ne savent pas ce que cela peut apporter mais ils trouvent intéressant le rapport entre le volume et la sommes des aires ;

– la piste géométrique avec la courbe en 3D : ils ne voient pas comment modéliser une telle courbe ;
– le raisonnement par récurrence : « le problème c'est de trouver un lien logique entre n et le n d'après, il n'y a pas de liens successifs entre deux rangs ». Ils pensent que la difficulté provient aussi du nombre des paramètres a, b et c.

La préparation de la mise en commun permet aux élèves de faire une synthèse de leurs travaux sur les deux premières séances. Ils confirment qu'ils abandonnent la piste de l'étude des cas particuliers et qu'ils cherchent toujours une autre piste de recherche, correspondant à leur visée : la quête d'une preuve de la vérité de la conjecture d'Erdös-Straus.

Conclusion des analyses de la première partie des recherches du groupe 2.
Les résultats obtenus et démontrés par le groupe 2 au cours des deux premières séances de recherche sont les suivants :

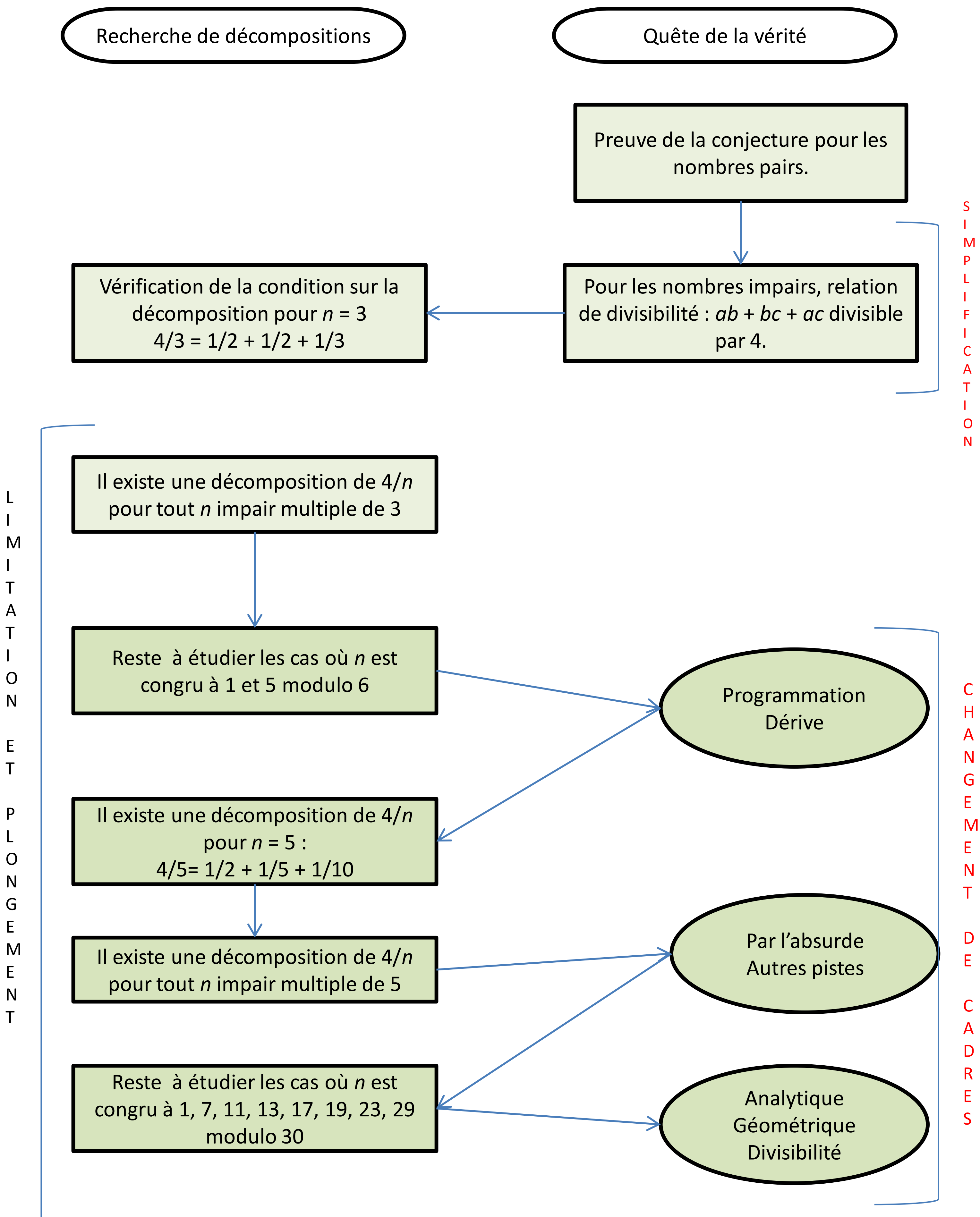
– Il existe une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires pour tout n congru à 0 modulo 2 : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.
– Il existe une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires pour tout n congru à 0 modulo 3 : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$.
– Il existe une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires pour tout n congru à 0 modulo 5 : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2n}{5}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}$.
– Il reste à étudier les cas où n est congru à 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 modulo 30.
– Si n premier avec 4, alors $ab + bc + ac$ est divisible par 4.

Pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus et établir ces résultats partiels, les élèves ont surtout mis en œuvre des procédures opératoires, exploitées par des manipulations algébriques (transformations d'écriture, tentatives de résolution d'équations) et par l'utilisation d'outils d'arithmétique (divisibilité, congruences, théorème de Gauss). La procédure 3, *transformation de l'équation initiale*, a été utilisée de nombreuses fois, pour essayer, d'une part de trouver une équation plus simple à étudier, et d'autre part de changer de cadre. Les élèves ont évoqué la procédure 5, *raisonnement par récurrence*, mais ne l'ont pas mise en œuvre. Ils ont jugé qu'une propriété d'hérédité était difficile à formuler. La procédure 2, *recherche d'une méthode de décomposition*, que nous avons décrite comme une procédure exploratoire, a été exploitée par ces élèves dans un travail opératoire, par analogie et manipulations algébriques. Ils ont, par exemple, cherché à construire une méthode de décomposition pour n impair multiple de 3 et n multiple de 5 en cherchant la première fraction unitaire sous la forme $\frac{1}{\frac{n}{3}}$ et $\frac{1}{\frac{n}{5}}$, puis ensuite en cherchant à déterminer les fractions unitaires à ajouter pour obtenir $\frac{4}{n}$. Si cette méthode leur a permis de trouver une décomposition pour tout n multiple de 3, elle s'est avérée infructueuse pour n multiple de 5. Les élèves n'ont pas cherché à l'adapter ou la modifier pour l'étude de ce cas particulier. L'existence d'une décomposition pour tout n multiple de 5 a été prouvée à l'aide de la construction et l'étude de deux exemples : $n = 5$ et $n = 25$. Les élèves ont remarqué deux types de régularités : sur les identités obtenues pour n congru à 0 modulo 2 et n congru à 0 modulo 3, deux dénominateurs sont égaux et sur l'identité pour n congru à 0 modulo 5, le produit de deux dénominateurs donnent le troisième. Ces régularités ont été observées *a posteriori* sur les identités et n'ont pas été exploitées pour formuler les identités. La procédure exploratoire 1 *recherche de régularités entre les décompositions* n'a donc pas été mise en œuvre par les élèves.

L'analyse des processus de recherche à partir de l'analyse des procédures mises en œuvre (figure 7.1 p. 267) permet de mettre en évidence la direction de recherche privilégiée par les élèves dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Rappelons que nous avons identifié deux visées dans l'étude de la conjecture (cf. chapitre 5) : la quête de la vérité et la recherche de décompositions effectives. La première visée privilégie la recherche d'une preuve d'existence (ou de non-existence) d'une décomposition pour tout entier naturel n et la seconde visée est associée à la recherche d'une preuve constructive d'existence de décompositions pour des valeurs de n données. Ce groupe inscrit ses recherches dans une quête de la vérité de la conjecture. Ce choix va guider l'ensemble des recherches des élèves. Au cours de la première séance, l'analyse des travaux montre que ce choix est effectué rapidement. Le premier indice révélateur est la nature des recherches individuelles des élèves. Ils ont majoritairement exploité des procédures opératoires dans le but de simplifier le problème, de trouver des liens entre n et a, b, c ou de prouver l'existence d'une décomposition pour tout n. Le second indice se révèle dans les discussions des élèves sur le nombre de cas à étudier qui reste infini (épisodes 1 et 2, « Oui mais il en restera toujours une infinité ») et sur la pertinence de suivre une recherche axée sur l'étude de cas particuliers pour étudier la conjecture (épisode 3, « On va tendre vers la résolution »). Au cours de la seconde séance, la navigation des recherches entre une étude de la conjecture par recherche d'une méthode générale et une étude de cas particuliers leur permet d'affirmer et de confirmer ce choix. Étudier le problème dans une perspective de quête de la vérité conduit les élèves à exploiter le problème dans un cadre général en utilisant des outils algébriques. La difficulté à déterminer une méthode pertinente et à leur portée les contraint à étudier successivement des cas particuliers. Cette piste de recherche, certes productive en termes de résultats partiels sur la conjecture, est constamment remise en cause car elle ne permet pas de mener une étude générale de la conjecture. Au fur et à mesure qu'ils y ont recours, ils sont de plus en plus convaincus de son inefficacité pour la quête de la vérité de la conjecture et à la fin de la séance, ils renoncent à continuer de s'engager dans une étude du problème par recherche de décompositions effectives. Ce processus dialectique entre le choix d'une visée de recherche et les processus de recherche mis en œuvre par les élèves s'illustre par l'exploitation des dimensions organisatrices et opératoires. Afin d'étudier la conjecture d'une manière générale, la première dimension organisatrice suivie est une disjonction de cas sur la parité de n. Pour n pair, les élèves ont démontré l'existence d'une décomposition de $\frac{4}{n}$ en exhibant une identité. Ils veulent donc poursuivre leur recherche en étudiant le cas où n est impair. Pour l'étude de ce cas, la dimension organisatrice privilégiée est la simplification du problème. La dimension opératoire associée est la manipulation d'écritures algébriques. Les élèves essaient de transformer l'écriture de l'équation initiale afin d'obtenir une forme qui serait plus simple à étudier. Cette étude leur permet, à la fin de la première séance de recherche, de déterminer une relation de divisibilité : si n est impair alors $ab + bc + ac$ est divisible par 4. Entre les deux séances, un élève ayant trouvé une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour tout n multiple de 3, les élèves débutent leurs recherches par l'étude de ce cas particulier. La dimension organisatrice suivie dans cette étude est une limitation de la recherche par étude de cas. Elle se distingue de la disjonction de cas car elle ne réduit pas la recherche à un nombre fini de cas à étudier. C'est précisément l'infinité de cas à traiter qui conduit les élèves à être réticents à suivre cette pensée organisatrice. Selon eux, suivre un tel raisonnement ne permettra pas d'approcher la quête de la vérité de la conjecture. La dimension opératoire utilisée par les élèves est la représentation des entiers à l'aide de la division euclidienne et des congruences. L'utilisation des congruences permet la mise en œuvre d'une seconde dimension organisatrice, le plongement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les élèves réduisent, en appliquant en acte le théorème des restes chinois, le problème à l'étude de deux classes modulo 6 puis à l'étude de huit classes modulo 30. Si ces dimensions organisatrices sont mises en œuvre, les élèves ne veulent pas les exploiter car ils pensent qu'elles ne sont pas pertinentes pour la quête de la vérité de la conjecture d'Erdös-Straus. A chaque limitation et réduction de la recherche, ils abandonnent donc cette piste pour essayer d'en trouver une autre qui leur permettrait d'étudier le problème d'une manière plus générale. Comme la simplification du problème ne leur a pas permis d'avancer sur l'étude de la conjecture, ils cherchent à suivre une dimension organisatrice de changement de cadre. Ils font l'hypothèse qu'une telle pensée organisatrice est efficace et pertinente pour étudier la conjecture dans un cadre général. Cependant, ils sont conscients de la difficulté qu'ils ont à la mettre en œuvre, d'une part par manque de connaissances pour s'engager dans l'exploration de certaines approches et d'autre part, par leur manque d'habitude à suivre une telle démarche de recherche. De nombreuses idées pour changer de cadre sont évoquées et discutées. Certaines sont suivies mais comme ils ne parviennent pas à les exploiter, ils abandonnent et reviennent à l'étude de cas particuliers, seule piste productrice de résultats partiels. Notons que la dimension organisatrice du jeu d'extension/réduction avec la réduction du problème aux nombres premiers a été effectuée en acte par les élèves (épisode 10) mais elle ne sera pas exploitée ni explicitée. Nous faisons l'hypothèse que les élèves ne s'y intéressent pas car ils ne la jugent pas pertinente pour étudier la vérité de la conjecture dans la mesure où elle est liée à l'infinité des nombres premiers.

Le schéma présenté à la page suivante illustre la navigation des recherches des élèves entre les deux pôles : un pôle associé à la quête de la vérité avec deux dimensions organisatrices (simplification du problème et changement de cadre) et un pôle associé à la recherche de décompositions effectives avec deux dimensions organisatrices (limitation de la recherche et plongement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). A droite, nous avons mentionné les dimensions organisatrices conduites volontairement par les élèves et à gauche, nous avons écrit celles qu'ils ont mises en œuvre mais dont ils doutaient de la pertinence pour l'étude qu'ils souhaitaient mener sur la conjecture. Les flèches indiquent la succession des différentes pistes de recherche explorées. Précisons que ce ne sont pas des flèches d'implication. Dans les rectangles, nous avons écrit les résultats partiels obtenus par les élèves et dans les ellipses, nous avons mentionné les pistes de recherche suivies qui n'ont pas abouti à la production de résultats partiels sur la conjecture.

Schéma de la recherche du Groupe 2 – séances 1 et 2



Avec ce schéma, nous voulons montrer que la navigation entre les deux pôles s'est effectuée, d'une part sous la même visée de recherche (la quête de la vérité), et d'autre part sans interaction entre les deux pôles. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, les élèves ont toujours mené leurs recherches avec la perspective de la quête de la vérité de la conjecture. L'étude de cas particuliers a contribué à suivre définitivement cet objectif. Même si les élèves ont exploité des procédures liées à la recherche de décompositions effectives, leur recherche ne s'est pas effectuée avec cette perspective. Les flèches du schéma montrent bien un retour constant au pôle de la quête de la vérité. Ceci explique aussi pourquoi il n'y a pas eu d'interactions entre les deux pôles. Comme ils considèrent que les deux pôles correspondent à des visées différentes de la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, ils passent d'un pôle à l'autre sans mettre en relation les pistes de recherche évoquées ou les résultats partiels établis. Par exemple, pour l'étude de la conjecture dans le cas où n est impair, ils n'exploitent pas le caractère expérimental du problème en cherchant des décompositions pour certaines valeurs impaires de n. Ils tentent d'étudier ce cas par transformation de l'équation initiale puis à l'aide du théorème de Gauss. La seule articulation que nous ayons relevée entre les deux pôles est l'utilisation d'un exemple pour vérifier la relation de divisibilité obtenue pour n impair. Cette analyse met en évidence la nature de la démarche de recherche de ce groupe. Il s'agit d'une démarche de recherche théorique. Les élèves, par utilisation d'outils algébriques et arithmétiques, tentent d'établir des résultats théoriques partiels contribuant à l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Les exemples sont un moyen de vérifier ces résultats, par confrontation à l'expérience. Les élèves ont également utilisé une fois l'exemple comme une aide à la formulation d'une conjecture (pour n multiple de 3). Mais le rôle des exemples semble restreint à ces deux fonctions (vérificateur de résultats théoriques et aide à la formulation de conjecture) sans interaction avec la phase d'élaboration de preuves. Cela met en évidence que le groupe ne met pas en œuvre de démarche expérimentale au sens où nous l'avons définie, c'est-à-dire par des va-et-vient entre la manipulation des objets mathématiques en jeu et l'élaboration d'éléments théoriques. Notons que, dans le chapitre 5, nous avons montré que la mise en œuvre d'une démarche expérimentale est liée aux dimensions organisatrices et opératoires exploitées. Celles qui sont porteuses d'une dimension expérimentale sont la limitation de la recherche et le plongement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec la représentation des entiers à l'aide de la divisibilité et des congruences. Comme ces deux pensées organisatrices sont mises de côtés par les élèves, cela peut expliquer qu'ils n'exploitent pas le caractère expérimental du problème.

C. Itinéraire de recherche du groupe 3 - Première partie.

Nous analysons ci-dessous les trois phases de recherche, qui constituent la première partie de l'itinéraire de recherche du groupe 3.

Première phase de recherche : les recherches individuelles.

Nous analysons successivement les trois recherches individuelles des élèves de ce groupe.

Recherche individuelle de l'élève E31 (voir annexe E4 p. 181-184).

Cet élève a d'abord utilisé la procédure opératoire 3 pour transformer l'équation initiale et la mettre sous la forme $4 = n(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$. A partir de cette équation, il choisi une dimension organisatrice particulière : une exhaustion de cas. Il a étudié méthodiquement l'équation pour les cas $n = 2$, $n < 2$ et $n > 2$ en cherchant des solutions pour une valeur de n donnée. Pour $n = 2$, il trouve le triplet solution (2, 2, 1). Il montre ensuite qu'il ne peut pas exister de triplet solution où $a = b = c$ et, pour le cas où a, b, c sont distincts deux à deux, il pense qu'il n'existe pas de solution. Pour $n < 2$, il montre que l'équation n'a pas de solution pour $n = 1$

et explique pour quelles raisons les cas $n = 0$ et $n < 1$ sont « impossibles ». A la suite de l'étude de ces deux premiers cas, il conclut qu'une « partie de l'énoncé est juste, il n'existe pas de $n < 2$ tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ». Il étudie alors les premières valeurs où $n > 2$. Pour $n = 3$, il trouve le triplet solution (6, 6, 1). En comparant les décompositions trouvées pour $n = 2$ et $n = 3$, il remarque que $(2n, 2n, 1)$ est un triplet solution[14]. Pour $n = 4$, il remarque que le cas $a = b = c$ est possible et donne le triplet solution (3, 3, 3). Il trouve deux autres solutions : (4, 4, 2) et (2, 3, 6). A partir de la seconde solution, il formule l'expression suivante : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$ et à partir de la troisième solution, il remarque que $c = a \times b$. Pour $n = 5$, il écrit d'abord qu'il « semblerait qu'il n'existe pas de solution », puis il note que c'est faux puisqu'il a trouvé le triplet solution (2, 5, 10). Il précise qu'il retrouve « la structure $c = a \times b$ ». A partir de ses écrits, nous faisons l'hypothèse qu'il étudie chaque cas en cherchant successivement une solution particulière dans le cas où $a = b = c$, où $a = b$ et $a \neq b$ et où a, b, c sont distincts deux à deux. Il semble que ce soit de cette manière qu'il trouve les triplets solutions pour les valeurs de $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$. Après chaque décomposition trouvée, il observe et formule des régularités :

- à partir de l'étude d'une décomposition particulière (régularité 1, p. 267). Par exemple, à partir d'une décomposition pour $n = 4$, il écrit $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$ et à partir d'une autre décomposition pour $n = 4$, il remarque que $c = a \times b$.
- à partir de l'étude comparée de plusieurs décompositions (Régularité 2, p. 268). Par exemple, à partir des décompositions pour $n = 2$ et pour $n = 3$, il écrit $\frac{1}{1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ (sans remarquer, par ailleurs, qu'il commet une erreur pour $n = 2$).

Lors de la présentation de ses travaux aux autres élèves du groupe, il précise qu'il a trouvé une décomposition pour $n = 5$ en s'appuyant sur la régularité $c = a \times b$. Il explique que son objectif était de voir « s'il y a des trucs qui revenaient » et conclut :

> Il y a des petits trucs qui revenaient des fois mais ça ne marchait pas tout le temps.

La démarche de recherche mise en œuvre par cet élève est de type expérimental. A partir d'une méthode assez systématique d'étude de cas ($a = b = c$, $a = b$ et a, b, c distincts deux à deux), il a trouvé des exemples pour des valeurs particulières de n, ce qui lui a permis, par questionnement de ces exemples, d'observer et de formuler des régularités. Ces dernières ont ensuite contribué à la construction de nouveaux exemples. L'étape d'élaboration de preuves n'a pas été abordée.

Recherche individuelle de l'élève E32 (voir annexe E5 p. 198-199).
A la lecture de son cahier de bord et à l'écoute de la brève présentation de ses recherches aux autres membres du groupe (45 secondes environ), cet élève semble avoir eu des difficultés à explorer le problème. Sa recherche individuelle n'est pas très riche. Dans sa synthèse, il note que sa première idée était de faire un raisonnement par l'absurde mais son brouillon ne comporte pas de traces d'exploitation de cette piste. Lors de la présentation de sa recherche aux autres élèves, il ne le mentionne pas et il explique qu'il « est parti de l'équation de base pour essayer de trouver plusieurs écritures possibles, pour voir clair ». Il a alors écrit plusieurs équations équivalentes à l'équation initiale, obtenues grâce à la procédure opératoire 3 (transformation de l'équation initiale), par réduction au même dénominateur, par utilisation de produits en croix et par isolement de n. A partir de l'équation $n = \frac{4abc}{ab+bc+ac}$ et de la nature du nombre n, il a écrit une condition nécessaire de divisibilité : « si n est un entier alors $ab + bc + ac \mid 4abc$ ». Il n'a *a priori* pas cherché de décomposition pour une valeur de n

14. L'élève commet une erreur, ce triplet est une solution pour $n = 3$ uniquement.

donnée. Il conclut la présentation de son travail en expliquant qu'« il ne voit pas comment partir dans la suite ».

Recherche individuelle de l'élève E33 (voir annexe E6 p. 207-209).
Tout d'abord cet élève s'est posé une question sur le nombre de fractions unitaires : pourquoi une décomposition en somme de trois fractions ? Il a essayé d'étudier le cas où $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ en transformant l'écriture pour isoler n. Pour cela, il a réduit le membre de droite de l'équation initiale au même dénominateur, il a effectué un produit en croix puis il a isolé n. Il a utilisé ces mêmes transformations d'écriture pour étudier l'équation initiale. A partir de l'équation $n = \frac{4abc}{ab+bc+ac}$, il s'est demandé si « la parité de a, b et c était importante ». Comme pour l'élève E32, à partir de ses productions et de sa courte présentation aux autres membres du groupe (environ 45 secondes), nous faisons l'hypothèse que cet élève a eu des difficultés à mener une recherche individuelle. D'après son cahier de bord, il a étudié le problème en exploitant la procédure opératoire 3 (transformation de l'équation initiale) et n'a pas cherché à trouver d'exemples de décomposition pour une valeur de n donnée. Notons qu'il a eu l'idée d'étudier le même problème auxiliaire que Mizony (cf. chapitre 5), celui de la décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de deux fractions unitaires. Cependant, lors de la présentation de ses recherches aux autres élèves, il précise que « ça n'a rien donné ».

L'analyse des trois recherches individuelles montre que deux élèves sur trois ont étudié la conjecture d'Erdös-Straus en exploitant la procédure opératoire 3 pour transformer l'équation initiale. Il semble que les élèves aient suivi cette idée dans le but d'enrichir la compréhension du problème en ayant « une vue d'ensemble ». Ce choix n'est *a priori* pas guidé par une visée particulière de la recherche ou la recherche d'une dimension organisatrice à suivre, mais plutôt par l'exploitation d'une dimension opératoire particulière, à savoir des manipulations algébriques de l'équation initiale. A partir des travaux recueillis de ces deux élèves, nous faisons l'hypothèse qu'ils ont été rapidement bloqués dans leur recherche. Comme nous l'avions précisé dans l'analyse *a priori* (p. 247), cette difficulté provient en partie de la mobilisation de procédures syntaxiques sans articulation avec des procédures sémantiques (l'étude de décompositions pour une valeur de n donnée par exemple). Le troisième élève du groupe (E31) a, au contraire, mené une recherche individuelle très productive. Il a choisi une dimension organisatrice particulière (l'exhaustion de cas) pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Il a davantage exploité des procédures exploratoires en mettant en œuvre une dimension expérimentale, ce qui lui a permis de trouver plusieurs exemples pour des valeurs de n données et de formuler quelques conjectures. Les premières recherches collectives du groupe (analysées dans le paragraphe suivant) vont s'appuyer sur ses travaux et en particulier, sur les régularités que l'élève E31 a observées et formulées à partir de des exemples de décompositions trouvées pour $n = 2, n = 3, n = 4$ et $n = 5$.

Deuxième phase de recherche : les premières recherches collectives en groupe.
Les premières recherches collectives par groupe se sont déroulées lors des séances 1 et 2. Nous avons découpé cette phase en 10 épisodes, que nous analysons successivement ci-dessous. Les épisodes 1 à 4 se sont déroulés à la séance 1 et les épisodes 5 à 10 à la séance 2.

Épisode 1 : Détermination d'une piste de recherche pour étudier le problème.
Dans cet épisode, les élèves cherchent une piste à explorer pour étudier la conjecture. De nombreuses idées sont énoncées mais aucune n'est étudiée en détails. L'élève E31 revient sur les régularités qu'il a trouvées à partir de ses exemples et l'élève E33 propose d'étudier le problème avec une dimension organisatrice particulière, une disjonction de cas modulo 4.

E33 : On peut peut-être regarder n en fonction [...] n modulo 4 tu vois, pour voir si on peut écrire a, b ou c avec un truc général.

L'élève E31 précise qu'il n'est pas « allé assez loin dans les cas pour voir s'il y a des choses qui revenaient quand c'était congru à 1, 2 ou 3 modulo 4 ». L'élève E33 se pose la question de la croissance de a, b, c en fonction de n. L'élève E31 propose de diminuer le nombre de variables en posant $a = b$ dans l'équation initiale et d'étudier ce cas particulier. Puis il évoque des conditions de divisibilité : $ab + bc + ac$ est un multiple, soit de 4, soit de abc. Finalement, l'élève E33 propose de trouver des valeurs de a, b, c pour $n = 2$. L'élève E31 donne les valeurs qu'il a trouvées et voudrait étudier « le prochain nombre congru à 2 modulo 4 », c'est-à-dire $n = 6$. Il écrit $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ mais ne continue pas à chercher de décomposition car l'élève E33 a une autre idée. Il propose de remplacer les valeurs de n, a, b, c par $n = 3$, $a = b = 6$ et $c = 1$ dans l'équation $n = \frac{4abc}{ab+bc+ac}$ pour voir « s'il y a un rapport entre $ab + ac + bc$ et abc ». L'élève E33 effectue les calculs (cf. annexe E6, p. 207) et montre que « ça marche », c'est-à-dire que $\frac{4abc}{ab+bc+ac}$ est bien égal à 3. Ne sachant pas comment exploiter cette équation, les élèves abandonnent cette piste de recherche. L'élève E32 en propose une nouvelle :

E32 : Après il faut voir peut-être s'il y a un rapport de proportionnalité non ? Là vous donnez comme ça des nombres à la suite mais quel est le rapport entre chacun ? Entre a, b, c, si par exemple tu augmentes a de pareil, b et c de pareil, est-ce que ça se regroupe ?

Cette idée est à l'origine de la suite des travaux du groupe, basés sur la recherche d'une décomposition pour des valeurs de n données.

A ce stade des recherches, nous faisons l'hypothèse que les élèves ne privilégient aucune visée de la recherche (quête de la vérité ou recherche de décompositions effectives). Les deux types de procédures, opératoire et exploratoire, sont évoqués et ils essaient de les articuler, par exemple en remplaçant les variables n, a, b, c par des valeurs numériques dans une équation équivalente à l'équation initiale.

Épisode 2 : Formulation d'une conjecture pour tout n multiple de 4.
A partir d'une régularité observée par l'élève E31 dans sa recherche individuelle, à savoir que pour $n = 4$, $a = b = c$ donne une solution, l'élève E33 trouve des décompositions pour $n = 8$ et $n = 12$.

E33 : Si tu mets par exemple $\frac{4}{8}$, ça fait $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Donc ça, ça fait $\frac{3}{6}$, ça fait $\frac{1}{2}$ et ça $[\frac{4}{8}]$, ça fait aussi $\frac{1}{2}$.

Pour $n = 12$, il écrit $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et il calcule la somme $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$.

E33 : Ça fait $\frac{3}{9}$ donc $\frac{1}{3}$ ça marche !

L'élève E33 n'explicite pas comment il trouve les décompositions à partir de la décomposition pour $n = 4$. Nous faisons l'hypothèse qu'il met en œuvre la procédure exploratoire 1 en appliquant en acte la propriété de multiplicativité, *si n est multiplié par une entier k alors les solutions a, b, c le sont aussi*, pour deux valeurs particulières de k, $k = 2$ et $k = 3$ (régularité 2). Comme nous l'avons identifié dans l'analyse *a priori*, les élèves utilisent la propriété dans des cas particuliers mais ils ne la généralisent pas à tout entier k. L'élève E31 déduit de ces trois décompositions que pour tous les multiples de 4, « il semblerait que ça marche ». Les élèves essaient alors de formuler cette conjecture à partir des exemples :

E33 : Pour $n = 4k$, $a = b = c$.

E32 : Et tu peux même dire qu'ils s'augmentent chacun de 3 à chaque fois.

E33 : Euh non.

E31 : Ils se multiplient par 3.
E33 : Non, c'est k en fait, c'est fois k en fait.
E32 : C'est $k-1$ même.
E33 : Ça, ça fait $\frac{1}{a\times k}+\frac{1}{b\times k}$. [...] Pour le 8, c'est
E31 : C'est 8, non c'est 2, non c'est 6.
E33 : Non ça n'a rien à voir.
E32 : C'est 3 en bas.
E31 : Oui c'est 3 fois.
E33 : 3 fois la valeur de c.
E31 : 3 fois la valeur de
E32 : de k.
E33 : Non des variables.
E31 : Non pas de k, parce que k il est de combien ?
E32 : Bah ça dépend, là il est de 3 mais là il est de 2. C'est 3×2.
E31 : C'est 3 fois k.
E32 : C'est $\frac{1}{3k}$ à chaque fois.
E31 : Quand $n=4k$, c'est $\frac{1}{3k}$.

La comparaison des trois décompositions a permis aux élèves de déterminer le lien entre la valeur de a, b et c et la valeur de n puis de formuler algébriquement la conjecture énoncée pour tout n multiple de 4. L'élève E31 propose de démontrer cette conjecture par récurrence (procédure opératoire 5) mais avant, l'élève E33 voudrait vérifier si cette conjecture est vraie. L'élève E31 reprend alors les exemples pour vérifier la conjecture et l'élève E32 propose de faire une expérience cruciale (au sens de Balacheff) et d'essayer avec un nombre « extrêmement grand ». Ils testent la conjecture avec $k=10$. L'élève E33 semble alors convaincu et dit :

E33 : Bon on a trouvé un truc qui marche une fois sur quatre, c'est pas si mal, 25% du boulot.

Épisode 3 : Formulation d'une conjecture pour tout n pair.
A la suite de la formulation de la conjecture pour tout n multiple de 4, l'élève E32 propose d'étudier la conjecture d'Erdös-Straus quand n est pair.

E32 : Maintenant, est-ce que quand n est pair, tu trouves des suites assez logiques ? [...] Si tu trouves des trucs pour les pairs, tu peux mélanger les pairs avec les 4, et réussir à rejoindre les 2.

L'élève E33 propose d'étudier les cas où $n=4k+2$, k entier naturel. Il commence par chercher une décomposition pour $n=6$. Notons qu'il précise que le cas $n=2$ est « spécial » car la fraction $\frac{4}{n}>1$. Pour trouver une décomposition pour $n=6$, l'élève E31 passe de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale à l'aide de sa calculatrice. Les élèves cherchent alors une somme de trois fractions unitaires égale à ce nombre décimal.

E31 : $\frac{2}{3}$, ça fait 0.66 et ben ça fait $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$. Ah non, attends, il faut que je note.
E33 : Essaie $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$.
E31 : C'est $\frac{1}{3}$ qu'on doit trouver, c'est ça ?
E33 : Non c'est $\frac{2}{3}$ qu'on doit trouver.
E31 : C'est 0.66, si on met par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, 1 c'est trop grand [inaudible] c'est encore trop grand. [Il tape sur sa calculatrice] On doit trouver 0.66 c'est ça ? C'est encore trop grand. [...] 0.75 c'est trop grand.

E33 : Essaie $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$.

E31 : Il ne faut pas de 3 du tout. 0,65, il faut un tout petit peu plus grand.

E33 : Essaie $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

E31 : Non c'est trop grand ça, ça fait 0.7, il faut $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ plus un autre truc, $+\frac{1}{8}$ par exemple. 0,62, il faut 0.66. Ah il faut plus grand. [...] J'essaie $\frac{1}{6}$?

Nous faisons l'hypothèse que le passage à l'écriture décimale est lié à l'utilisation d'une calculatrice de type collège, sans calcul fractionnaire. L'élève E31 a deux calculatrices sur sa table, une calculatrice programmable TI-89 et une calculatrice de type Casio-Collège. Pour chercher une décomposition particulière, il n'utilise pas la calculatrice programmable qui fait le calcul fractionnaire mais uniquement la calculatrice de type Collège. L'élève E33 le met en garde contre les arrondis et propose de faire les calculs à la main. L'élève E31 semble conscient de l'inconvénient des arrondis et continue ses recherches. Notons que la méthode mise en œuvre par l'élève E31 relève de la procédure exploratoire 2. En effet, il semble vouloir déterminer la valeur de la première fraction unitaire en essayant successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ (« il ne faut pas de 3 du tout »), $\frac{1}{4}$ puis il veut essayer $\frac{1}{6}$. Nous relevons également que les décompositions essayées sont toujours composées de deux fractions unitaires identiques. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une régularité repérée sur les décompositions trouvées par l'élève E31 pour $n = 2$ et $n = 3$ lors de la recherche individuelle. Après de nombreux essais, l'élève E33 pense que leur méthode n'est pas productive et qu'il faudrait faire autrement, mais l'élève E31 trouve une décomposition de $\frac{2}{3}$ au même moment.

E33 : Attends il ne faut pas y aller comme ça, on ne va jamais y arriver.

E31 : $\frac{2}{3}$.

E32 : T'as trouvé ?

E31 : Oui. C'est $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

A partir de cette décomposition, les élèves essaient d'écrire une identité générale :

E31 : Dans ce cas là

E33 : $n = 4k + 2$, on a quoi ?

E31 : En gros, ça fait, 1 sur n.

E33 : $n = 6$, attends, deux secondes, je recopie ce qu'on a mis [la décomposition pour $n = 6$]. Donc on aurait 1 sur n plus 1 sur, euh, k (rires).

E31 : 1 sur $\frac{n}{2}+1$ quoi, tu vois ce que je veux dire, mais je ne sais pas si ça se fait.

E33 : 1 sur quoi ?

E31 : Bah la moitié de n plus 1. Parce que c'est $3+1 = 4$. [...] A mon avis il vaut mieux qu'on en fasse un autre qui soit...

E32 : Genre $n = 10$.

L'élève E31 reprend la méthode qui lui a permis de trouver une décomposition pour $n = 6$. Il écrit $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$ et essaie de trouver une somme de trois fractions unitaires égale à 0,4. L'élève E33 propose tout de suite la décomposition suivante : $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$. Les élèves formulent l'identité suivante :

E31 : Dans ce cas, ça fait $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{n}{2}}$.

E33 : On a un petit problème, il y a en a deux de n et là il n'y en avait qu'un. [...] Essaye avec $n = 14$.

L'identité formulée à partir de cet exemple étant différente de l'identité formulée à partir de l'exemple précédent, les élèves font un troisième exemple.

E31 : $\frac{4}{14}$, ça fait $\frac{2}{7}$, ça fait 0,28.

E33 : Attends, on ne va pas le trouver comme ça. Essaie $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}$. A mon avis ça marche plus comme ça. [...] Allez $\frac{4}{18}$ pour vérifier quand même, [...] $\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}$.

L'élève E31 essaie à nouveau de trouver une décomposition pour $n = 14$ avec sa méthode mais l'élève E33 propose une décomposition rapidement. Il utilise l'identité formulée en remplaçant la valeur de n par 14. Avec ce nouvel exemple, les élèves semblent convaincus que l'identité formulée à l'aide de l'exemple $n = 10$ permet de décomposer $\frac{4}{n}$ pour tout n pair. Face aux décompositions trouvées pour $n = 2$ et $n = 6$ qui ne vérifient pas cette identité, les élèves ne remettent pas en question l'identité formulée pour tout n pair mais ils précisent son domaine de validité : « ça ne marche qu'à partir d'un certain rang ». Ils ne semblent pas envisager qu'il puisse exister plusieurs décompositions pour une valeur de n et considèrent donc ces deux cas comme des cas particuliers de la conjecture formulée pour tout n pair.

E31 : Pour les pairs ça a l'air de marcher.

E32 : Sauf pour $n = 6$ et $n = 2$.

E31 : Oui mais on a trouvé une, quelque chose qui marche bien.

E32 : Oui mais ça marche mais c'est un cas particulier.

[...]

E33 : On a fait 50% du travail.

En ce qui concerne l'étape de l'élaboration de la preuve de la conjecture, l'élève E33 remarque que la somme des trois fractions unitaires est toujours égale à $\frac{4}{n}$: « techniquement, ça me semble évident, ça fait $\frac{4}{n}$, ça marche tout le temps ». Ils ne vérifient pas que a, b et c sont des entiers. Nous faisons l'hypothèse que l'équivalence $\frac{n}{2}$ est un entier si et seulement si n est pair est évidente pour eux. Notons que les élèves semblent toujours garder en mémoire le statut épistémique de la conjecture d'Erdös-Straus, ils postulent par exemple que l'étude du problème pour les nombres impairs risque d'être plus difficile.

E33 : Ça m'a l'air trop simple, à mon avis c'est pour les impairs, ça va pas être pareil.

Episode 4 : Formulation d'une conjecture pour tout n multiple de 3.

Les élèves continuent l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus par une recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données. Pour n impair, ils essaient d'abord d'exploiter la régularité observée sur la décomposition pour $n = 5$, à savoir $c = a \times b$ (régularité 2 de la procédure exploratoire 1, cf. p. 268). L'élève E33 propose de prendre comme valeurs $a = 4$ et $b = 5$. Il calcule $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ et trouve $\frac{4}{8}$. Comme il obtient un nombre pair pour n et qu'ils ont déjà une identité pour n pair, il pense que ce n'est pas une méthode intéressante pour étudier le problème dans le cas où n est impair. L'élève E31 propose une autre piste, essayer de décomposer le cas $n = 9$. Il reprend sa méthode (passer à l'écriture décimale puis chercher une somme de trois fractions unitaires) et cherche, cette fois, à déterminer la valeur de la première fraction unitaire par analogie avec celle trouvée pour $n = 5$ (c'est-à-dire $\frac{1}{5}$). Il conjecture que cette valeur est $\frac{1}{n}$. Il prend donc comme première fraction unitaire $\frac{1}{9}$. Le seconde fraction est alors $\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$. Pour obtenir trois fractions unitaires, l'élève E33 utilise alors la méthode 1 présentée dans l'analyse *a priori* (cf. p. 269), à savoir décomposer $\frac{1}{n}$ à l'aide de l'égalité $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$. L'élève semble l'utiliser spontanément pour $n = 9$.

E33 : $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ ça marche mais il nous faut trois fractions. $\frac{1}{3}$ c'est $\frac{3}{9}$ et $\frac{3}{9}+\frac{1}{9}$ ça fait $\frac{4}{9}$. [...] Il faudrait pouvoir réécrire $\frac{1}{3}$. Bah non mais regarde le $\frac{1}{9}$ tu l'écris $\frac{1}{18}$ et $\frac{1}{18}$.

L'élève E31 remarque que cette décomposition n'est pas du même type de celle trouvée pour $n = 5$ car elle ne vérifie pas $c = a \times b$. Il émet alors l'hypothèse de la non-unicité des décompositions pour une valeur de n donnée. L'élève E33 caractériserait plutôt cet exemple de cas particulier, comme ils l'ont fait pour le cas $n = 6$ et l'identité formulée pour n pair (épisode 3).

> E31 : Ouais mais dans ce cas-là, on n'a pas la petit feinte. A moins que 18, c'est quoi, c'est 6×3 ?
>
> E33 : Non c'est surtout c'est 2×9.
>
> E31 : Ouais mais ça nous aide pas avec le 3. [...] Tu sais c'était encore pour faire la petite multiplication sympa.
>
> [...]
>
> E31 : Mais peut-être qu'il y en a une qui marche quand même, comme le 5, parce que là c'est une solution mais il y en a peut être d'autres.
>
> E33 : Parce que on avait mis tu sais que le 6 il ne fonctionnait pas comme les autres, donc si ça se trouve le 5 il ne fonctionne pas comme les autres de celui là.

L'élève E33 écrit une identité générale issue de la décomposition trouvée pour $n = 9$: $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{3}{n}$. Comme il ne vérifie pas la nature des nombres en jeu, il ne précise pas le domaine de validité de cette identité pour l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. L'oubli est soulevé par les autres élèves lors de la vérification de l'identité pour $n = 13$.

> E33 : $\frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{3}{13}$.
>
> E32 : Ça ne passe pas.
>
> E31 : $\frac{3}{13}$ c'est quoi, en vrai ? [...] Mais le $\frac{3}{13}$ c'est quoi en 1 sur quelque chose ?
>
> [...]
>
> E33 : En fait c'est comme si tu multipliais le n par $\frac{1}{3}$. Donc le $\frac{1}{3}$ tu le remontes. [Il lui explique que $\frac{3}{n} = \frac{1}{\frac{n}{3}}$].
>
> E31 : Oui mais là on n'a pas le droit d'écrire ça. [...] Mais le problème c'est que 13 divisé par 3, ce n'est pas un entier. C'est ça le souci.
>
> E32 : Et là il n'est plus entier.
>
> E33 : Et c'est quoi le problème là ? Je ne vois pas.
>
> E31/E32 : a, b, c doivent être entiers et $\frac{13}{3}$ ce n'est pas un entier, c'est pour ça que ça ne va pas.

Le retour aux exemples permet alors aux élèves d'affiner la conjecture formulée puisqu'ils restreignent son domaine de validité aux nombres impairs multiples de 3.

> E31 : Il faut que ce soient des divisibles par 3. On sait que les nombres divisibles par 3 impairs ça marche. 58% (rires)
>
> E32 : Non on en est à 60% là.

Les élèves vérifient ensuite cette nouvelle conjecture avec une valeur de n multiple de 3 ($n = 15$) puis avec $n = 3$. L'étude de cet exemple a également permis aux élèves de repérer le statut particulier des nombres premiers dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

> E32 : Oh 13 ce n'est pas un nombre premier ?
>
> E31/E33 : Si.
>
> E32 : C'est pour ça qu'on n'arrive pas à le diviser, ça marche pas (rires).
>
> E31 : Ah oui, je n'avais pas fait le rapprochement.
>
> E32 : Peut-être que tous les premiers tu ne peux pas les faire marcher comme ça en fait.
>
> E31 : Est-ce que les nombres impairs non divisibles par 3 sont forcément des nombres premiers ?

E33 : Bah non, par exemple les multiples de 5.

E31 : Ouais, tiens 25.

[...] (5 minutes plus tard)

E33 : Mais un nombre premier, tu ne peux pas l'écrire en fraction, si ?

E32 : Bah non tu ne peux pas [inaudible] c'est pas entier.

E31 : Bah si, 13 c'est $\frac{39}{3}$.

En fin de séance, les élèves résument leurs résultats et se projettent dans la suite des recherches :

E31 : Donc si on résume, pour les multiples de 4 ça marche, pour les pairs ça marche.

E32 : Pour les impairs multiples de 3 ça marche.

E31 : Et après ?

E33 : Il faut qu'on trouve une formule pour le 5, pour les multiples de 5 impairs. On avance plutôt bien.

E31 : C'est pas trop mal

E33 : On a fait plus de la moitié des cas.

E32 : C'est déjà ça.

Les élèves se projettent dans une étude de la conjecture par étude de classes. Ils appliquent la propriété de multiplicativité en acte afin de réduire le nombre de classes à étudier.

Épisode 5 : Formulation d'une conjecture pour n multiple de 5.
La seconde séance de recherche débute par une discussion sur une décomposition trouvée (pour $n = 7$) par un élève entre les deux séances :

E33 : J'ai trouvé $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14}$.

[...]

E31 : Mais le 4 ça correspond à rien par rapport à n, par rapport à 7 tu vois ce que je veux dire ? Pour les autres on a réussi à exprimer n en fonction, non plutôt ce qu'on trouvait en fonction de n alors que là, 4 par rapport à 7 ?

Ils reprennent alors le bilan de la séance précédente et récapitulent leurs résultats :

E31 : Pour les pairs c'était quoi ?

E33 : $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}$. Et vu qu'ils sont pairs, ça fait forcément, 1 sur un entier.

[...]

E33 : Pour les n multiples de 3 impairs. Donc $\frac{4}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{3}{n}$.

Le retour sur leurs résultats permet aux élèves, d'une part de comprendre que le résultat pour n multiple de 4 est un cas particulier du résultat pour n pair, et d'autre part d'expliciter les raisons pour lesquelles les identités trouvées permettent de prouver l'existence d'une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires pour n pair et n multiple de 3. Ils donnent deux justifications : la somme des trois fractions unitaires est égale à $\frac{4}{n}$ et les valeurs de a, b, c sont bien des entiers. Pour n impair non multiple de 3, ils se rappellent avoir trouvé des décompositions pour $n = 9$ et $n = 5$ mais pas pour $n = 13$.

E32 : On n'a pas de décomposition pour $n = 13$. C'est là qu'on a bloqué et qu'on a compris que 13 c'est un nombre premier.

E33 : Oui mais 7 aussi c'est un nombre premier, et 3 aussi, et on a trouvé des solutions.

Les élèves décident de chercher une identité pour tout n multiple de 5 à partir d'un exemple. Ils ne prennent pas $n = 10$ ni $n = 15$ car ces cas sont déjà traités par leurs deux premières identités. Ils cherchent donc à décomposer $\frac{4}{n}$ pour $n = 25$. Rapidement l'élève E31 trouve une solution : $\frac{1}{10} + \frac{1}{25} + \frac{1}{50}$. Nous n'avons pas d'éléments pour savoir comment l'élève E31 a trouvé la décomposition pour $n = 25$ mais cet exemple leur permet ensuite d'exploiter la procédure exploratoire 1 en appliquant la propriété de multiplicativité.

> E31 : Il y a quand même un rapport j'ai l'impression. [...] Mais oui, parce que regarde, par rapport à 5, on multiplie par euh, comme c'est 25, c'est multiplié par 5, on a juste à multiplier par 5 en bas. On avait (2, 5, 10), on multiplie par 5 ça fait 10, multiplié par 5, ça fait 25 et multiplié par 5 ça fait 50. Ça marche.

Rappelons que l'élève E33 l'avait déjà appliquée (en acte) avec d'autres valeurs de k pour trouver des décompositions pour $n = 8$ et $n = 12$ à partir du cas $n = 4$ (voir épisode 2). L'élève E31 cherche à s'assurer de la validité de cette méthode par une expérience cruciale (au sens de Balacheff) en la testant sur un autre exemple. Il veut « un truc qui ne soit pas genre un carré, quelque chose de particulier quoi ». Il propose $n = 35$. L'élève E32 trouve une décomposition à partir de la solution pour $n = 7$, en la multipliant par 5 et l'élève E31 utilise la même méthode mais à partir de la solution pour $n = 5$, en la multipliant par 7.

> E32 : Oui mais on a trouvé pour 7 et 35 c'est 7 donc on trouve au final. Tu multiplies ce qu'il a fait [la décomposition trouvée pour $n = 7$] par 5. Ca fait $\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{70}$.
>
> E31 : Donc ça marche pour tous les multiples de 5.
>
> E32 : Non non c'est les multiples de 7.
>
> E33 : Bah oui c'est un multiple de 7 aussi.
>
> E31 : Bah écoute j'ai multiplié par 5 à chaque fois, par 7 à chaque fois, regarde, il est où ton truc de 5 ?
>
> E33 : Pour 5 c'était $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$.
>
> E31 : Tu multiplies tout par 7, ça fait $\frac{1}{14} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70}$, ça marche.
>
> [...]
>
> E33 : Mais oui mais tu ne peux pas l'exprimer en fonction de n.
>
> E31 : Mais si comme ça, t'es pas d'accord ? [Il a écrit $\frac{4}{5k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{10k}$ (cf. annexe E4, p. 185)]

Dans cet extrait, les élèves explicitent comment ils utilisent la propriété de multiplicativité et ils l'appliquent sans difficulté pour plusieurs valeurs de k. Cependant, comme nous l'avons déjà relevé dans plusieurs pré-expérimentations, cela ne permet pas aux élèves de généraliser la propriété. La formulation de l'identité pour tout n multiple de 5 s'effectue en exploitant une dimension opératoire différente de celle utilisée pour les identités précédentes. Dans ces dernières, les élèves ont exprimé les solutions a, b, c en fonction de n. Pour cette identité, à partir des exemples pour $n = 5$ et $n = 25$, ils ont des difficultés à voir le lien entre les solutions a, b, c et n. Il semble que ce soit la valeur $\frac{2n}{5}$ qui constitue un obstacle. Pour le contourner, un élève traduit n multiple de 5 à l'aide de l'écriture issue de la division euclidienne ($n = 5k$, k entier naturel) et exprime les solutions a, b, c en fonction de k, $a = 2k, b = 5k$ et $c = 10k$. Pour s'assurer de cette écriture, l'élève E33 veut vérifier si « ça marche » sur un autre exemple et l'élève E31 propose d'effectuer à nouveau une expérience cruciale avec « un très grand nombre ». Ils choisissent 10 005. Comme pour la formulation des conjectures précédentes, l'expérience a une double fonction : d'une part une aide à l'écriture d'une identité générale et à la formulation d'une conjecture, et d'autre part un moyen de vérification et de validation par expérience cruciale de la conjecture. Enfin, notons que l'élève E32 remarque que leur étude de la conjecture d'Erdös-Straus s'effectue par l'étude de cas particuliers. L'élève E33 semble réduire intuitivement leur étude à celle des décompositions pour les nombres premiers puisqu'il évoque l'inconvénient de leur démarche en ces termes : « oui mais on n'a pas fini parce que des nombres premiers, il y en a ».

Épisode 6 : Formulation d'une conjecture pour tout n multiple de 7 et questionnement de la démarche de recherche suivie.
Pour la première fois, dans leurs recherches, les élèves évoquent explicitement la phase d'élaboration de preuve de leurs conjectures. L'élève E31 précise qu'ils n'ont pas de preuve de leurs résultats :

> E31 : Mais là on a essayé, mais après il faudra faire une jolie démonstration par récurrence.
>
> E33 : Mais le problème c'est qu'on n'arrive pas à couvrir tous les nombres impairs.

Ils cherchent alors une identité pour n multiple de 7. A partir de l'exemple trouvé par l'élève E33 pour $n = 7$ et par analogie avec l'identité écrite pour n multiple de 5, ils écrivent : $\frac{4}{7k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{14k}$. Comme dans les cas précédents, ils vérifient cette identité par un exemple. Ils prennent $n = 49$ car ce n'est ni un multiple de 3 ni un multiple de 4. A la suite de la formulation de cette nouvelle conjecture pour une valeur de n donnée, une discussion sur la pertinence de leur démarche de recherche anime le groupe :

> E32 : Moi ce que je dis, c'est que le problème n'a pas été résolu pendant je ne sais pas combien d'années.
>
> E31 : C'est qu'on ne sait pas jusqu'où on va s'arrêter, quoi. On s'arrête quand ?
>
> E33 : On se rapproche de 100% mais il nous manquera toujours quelque chose. [...] Ou tu vois, on les fait jusqu'à 100 comme ça.
>
> E31 : Oui mais ça va tous marcher, j'ai envie de dire, je ne vois pas pourquoi ça ne marcherait pas. C'est quoi le souci ?
>
> E33 : On sait que ça marche mais on n'arrive pas à le démontrer.
>
> E32 : Le souci ce n'est pas que ça ne marche pas ou que ça marche, en fait, c'est qu'on n'arrive pas à tout démontrer.
>
> E31 : C'est que les solutions, comment dire, ont des formes différentes.
>
> E33 : Le problème ce serait pour trouver toutes les formes en fait.
>
> E31 : On peut pas, ça va à l'infini.
>
> E33 : Ou alors il faut qu'on arrive à trouver une expression qui permette de trouver tous les nombres premiers.

Les élèves semblent faire l'hypothèse que la conjecture d'Erdös-Straus est vraie pour tout entier n. Ils sont conscients que la recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données ne permettra pas de prouver la conjecture pour tout entier n en raison du nombre de formules *a priori* infini. Notons que l'élève E33 évoque à nouveau la réduction de l'étude aux nombres premiers, sans la justifier.

Épisode 7 : Tentative de preuve de la conjecture pour n pair à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
Sur une proposition de l'élève E31, les élèves s'engagent dans une preuve par récurrence de la conjecture pour tout n pair [15]. L'élève E32 pense qu'ils ont déjà démontré cette conjecture dans le cas où n est un multiple de 4 mais l'élève E31 répond qu'ils ont « juste regardé

15. Si n est pair alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}$.

que ça marchait » et que cela ne suffit pas. Nous faisons l'hypothèse qu'ils font référence à l'intervention[16] de l'élève E33 à l'épisode 2 qui explique que la somme des trois fractions unitaires fait toujours $\frac{4}{n}$. Après une courte discussion pour établir que « $4k+2$ et $4k$ ça fait tous les pairs », l'élève E31 s'engage dans la rédaction du raisonnement par récurrence (cf. annexe E4, p. 186). Il définit la propriété (P_n), $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$ avec n pair, puis il effectue l'initialisation à $n = 2$. Pour prouver l'hérédité de la propriété (P_n), les élèves éprouvent plusieurs difficultés liées à l'écriture de la propriété d'hérédité entre le rang n et le rang $n+2$. Nous décrivons précisément ces difficultés, par ailleurs pointées dans nos analyses *a priori*, à l'aide d'extraits d'échanges entre les élèves dans l'annexe E3. Comme ils ne parviennent pas à conduire le raisonnement par récurrence à son terme, l'élève E33 recentre le problème sur ce qu'ils veulent démontrer et comprend que le raisonnement par récurrence n'est pas nécessaire pour démontrer leur résultat pour n pair.

> E33 : Et en plus, oh regarde, simplement tu vois, tu dois montrer que $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}$? Ça veut dire que $\frac{4}{n} = \frac{1+1+2}{n}$ (rires). Pourquoi, pourquoi on s'embête ?
>
> E31 : C'est gagné, si n est divisible par 2 ça marche.
>
> E33 : Oui.
>
> E31 : Bah voilà, on n'a rien d'autre à prouver, pour les pairs on a prouvé.
>
> [...]
>
> E32 : On a créé une suite, une seconde suite, trois variables, des calculs qui servent à rien.
>
> E33 : Et la récurrence est totalement inutile.

A la fin de cet épisode, les élèves semblent avoir effectué une preuve de leur conjecture pour tout n pair à l'aide de l'identité formulée et de la nature des nombres en jeu, mais nous verrons dans la suite de leur recherche que la preuve rendue à la fin de l'expérimentation s'appuie sur un raisonnement par récurrence (par ailleurs incorrecte, voir épisode 22).

Épisode 8 : Étude de la relation de divisibilité $ab+bc+ac = 4abck$, k entier naturel. Les élèves cherchent une nouvelle approche pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. L'élève E31 compare les différentes identités formulées pour n impair pour voir si la régularité $c = a \times b$ peut se généraliser à tous les cas où n est impair (procédure exploratoire 1, régularité 2). Il se rend compte que la décomposition trouvée pour n multiple de 7 ne vérifie pas cette régularité. L'élève E32 propose alors une piste de recherche différente, de type opératoire : l'étude de l'équation $n = \frac{4abc}{ab+bc+ac}$ et la condition de divisibilité qui en découle : $ab + bc + ac$ divise $4abc$ (procédure opératoire 3, transformations 1 et 2). Il évoque l'existence d'un théorème pour « démontrer toutes les solutions qu'une équation peut avoir » et se demande s'ils ne pourraient pas l'utiliser. Nous faisons l'hypothèse qu'il évoque la méthode de résolution d'équations diophantiennes, qui consiste à déterminer une solution particulière, puis en utilisant le théorème de Gauss, à trouver l'ensemble des solutions. Cette idée ne sera pas suivie car les deux autres élèves semblent ne pas comprendre ce à quoi il fait référence et doutent qu'ils puissent résoudre une équation avec trois inconnues.

> E31 : Et est ce qu'on a la capacité de démontrer que $bc + ac + ab$ divise $4abc$?
>
> E32 : Bien sûr que non, c'est ça le truc, c'est qu'on n'a jamais fait avec trois variables.
>
> E33 : Il faudrait un minimum de trois équations déjà.
>
> E32 : Bah non, on peut faire avec une équation et deux variables y et x, pour les solutions particulières.

16. Techniquement ça me semble évident, ça fait $\frac{4}{n}$, ça marche tout le temps.

E31 : Il faut faire genre un système non ? Quand on fait les droites paramétriques, on exprime une en fonction des autres.

E33 : oui mais on a des points aussi dans les trucs paramétriques [...] Il va falloir qu'on trouve des points dedans, des points de repère [...] sinon on va avoir du mal.

L'élève E31 propose alors de nombreuses idées pour exploiter l'équation par diverses manipulations algébriques :

E31 : Pour prouver qu'ils sont pas égaux, mais qu'il y a un coefficient il n'y a pas 50 solutions, bah si il y a plusieurs solutions d'ailleurs, c'est soit on fait ça moins ça, et ça doit être égal à 0 ou truc comme ça.

[...]

E31 : Moi j'ai envie de factoriser, j'ai envie de faire plein de choses. abc ça vous fait penser à quoi ? [...] Si on met tout ça au carré, ça donne quoi ? J'ai envie de mettre au carré, les intellectuels ils mettent tout le temps au carré.

E33 : Mais balance pas des trucs comme ça au hasard.

Les élèves calculent $(ab+bc+ac)^2$. Ils essaient de faire faire le calcul à la calculatrice programmable mais comme elle renvoie « trop d'arguments », ils l'effectuent à la main en développant $(ab+bc+ac)\times(ab+bc+ac)$. L'élève E33 est sceptique concernant l'étude de cette expression :

E33 : Il faudrait qu'on sache où on va, parce que là on teste un truc mais on ne sait pas où on va.

E32 : Mais c'est pour ça que ça s'appelle un problème ouvert, tu vois.

E31 : Problème ouvert, ça veut pas dire faire n'importe quoi.

E31 : Non mais je parle de cette expression là, on fait un truc mais on ne sait pas où on va, comment veux-tu simplifier pour trouver un truc qui peut nous aider ? C'est pas possible.

L'élève E31 continue de manipuler l'équation avec sa calculatrice programmable et propose encore des idées : essayer de résoudre l'équation initiale à la calculatrice dans le cas où $a = b = c$, reconnaître une forme canonique ou un début de carré dans l'expression $bc+a(b+c)-4abc = 0$, multiplier $ab+bc+ac = 4abck$ par a ou $4a$, remplacer c par ab en référence à la régularité observée sur plusieurs exemples. Notons qu'il cherche à étudier l'équation initiale et ses écritures équivalentes uniquement grâce à l'utilisation d'outils algébriques. Il n'articule pas ces procédures opératoires avec les nombreuses procédures exploratoires mises en œuvre précédemment. Comme nous l'avons pointé dans l'analyse *a priori* (p. 247), l'articulation entre les aspects syntaxiques et sémantiques est une difficulté pour certains élèves dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

Épisode 9 : Réduction de l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus aux nombres premiers.

L'élève E33 propose de revenir à l'étude du cas particulier $n = 13$, dont ils n'ont pas trouvé de décomposition à la séance précédente. L'élève E31 fait l'hypothèse qu'il faudrait montrer que la conjecture est vraie pour tous les nombres premiers.

E31 : Il faudrait montrer que ça marche pour tous les premiers

[...]

E31 : Ce que je voulais dire, c'est en fait, pour tous les nombres qui sont multiples, ça doit marcher. [...] Pour tous les nombres qui sont multiples ça marche, parce que multiples de 2 ça marche, multiples de 3 ça marche, multiples de 5 ça marche, multiples de 7 ça marche et ainsi de suite. A mon avis ce qu'il faut prouver [...] ce que je veux dire c'est qu'il faut que tous les nombres premiers ça marche.

[...]

E31 : Comme tous les multiples de nombres premiers, comme tous les multiples s'écrivent nombre premier fois k, fois quelque chose [...] Donc dans ce cas-là, si on a prouvé que ça marche pour tous les premiers, ça marchera donc pour tous les nombres.

L'élève effectue la réduction du problème à l'étude des nombres premiers à partir :

- de l'observation de la propriété de multiplicativité sur plusieurs cas particuliers ;
- de la décomposition d'un multiple à l'aide de ses facteurs premiers.

Il essaie donc de mobiliser le théorème fondamental de l'arithmétique mais il n'arrive pas à l'énoncer clairement puisqu'il ne dit pas que tout nombre est multiple d'un nombre premier. Nous verrons dans l'épisode 18 que l'absence de cette propriété sera à l'origine de la difficulté à rédiger clairement la réduction du problème à l'étude des nombres premiers. Notons également que la réduction sera admise par le groupe sans être démontrée. Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse *a priori*, la réduction du problème aux nombres premiers n'est pas une dimension organisatrice exploitée spontanément par les élèves. L'analyse des épisodes suivants montre qu'elle est déterminante dans le choix des élèves de continuer d'étudier la conjecture d'Erdös-Straus par recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données.

Épisode 10 : Recherche de solutions pour $n = 13, n = 17, n = 19$.

A la suite de la réduction du problème aux nombres premiers, l'élève E31 écrit la liste des nombres premiers de 1 à 19 et propose aux autres élèves de trouver des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour ces valeurs de n. L'étude du cas $n = 11$ permet à l'élève E33, d'une part de mettre en évidence le rôle que peut jouer la première fraction unitaire, et d'autre part d'esquisser une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée.

E33 : $\frac{4}{11}$, je me suis dit, euh, j'ai comparé à $\frac{4}{12}$ je ne sais plus pourquoi, ça fait $\frac{1}{3}$, moins $\frac{1}{3}$ ça m'a fait $\frac{1}{33}$ et puis $\frac{1}{33}$ c'est $\frac{1}{66} + \frac{1}{66}$.

E31 : Ouais c'est une bonne idée ça, de se référer au nombre pair qui est proche et de lui soustraire un nombre inférieur.

Une fois la première fraction unitaire déterminée, l'élève cherche la seconde fraction unitaire en la soustrayant à $\frac{4}{n}$. S'il trouve une fraction unitaire, il applique la méthode 1 présentée dans l'analyse *a priori* (p. 269), à savoir l'égalité $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$. Les élèves essaient d'utiliser cette méthode pour trouver une décomposition dans le cas où $n = 13$ mais ils n'y parviennent pas.

E33 : Essayons pour le treizième

E31 : $\frac{4}{14}$ ça fait quoi ?

E33 : Alors, $\frac{4}{14}$ ça n'existe pas.

E32 : Ça fait $\frac{2}{7}$.

E31 : Ça n'existe pas ? (rires)

E33 : Enfin ce n'est pas un entier. $\frac{2}{91}$ [$=\frac{4}{13} - \frac{2}{7}$] donc $\frac{1}{91} + \frac{1}{91}$. [...] Ah oui mais $\frac{2}{7}$ ce n'est pas un entier, oups.

E31 : Ça fait $\frac{2}{91}$ mais ce n'est pas ça qu'on veut.

E33 : Mais oui, $\frac{1}{7}$ ça fait $\frac{15}{91}$ [$=\frac{4}{13} - \frac{1}{7}$] donc ce n'est pas intéressant.

Ce cas leur pose des difficultés car $\frac{4}{13} - \frac{1}{7}$ ne donne pas une fraction unitaire. L'égalité $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ ne peut donc pas être utilisée pour déterminer les deux autres fractions unitaires. Ils essaient alors de trouver la première fraction unitaire par tâtonnements avec leur calculatrice (pendant une dizaine de minutes).

E31 : $\frac{4}{13} = 0,30$ [Il fait des calculs] C'est trop grand [Il fait des calculs] C'est trop petit.

E33 : Raté [Essaie différentes décompositions avec sa calculatrice] A ce rythme là, je ne vais pas y arriver.

L'élève E32 évoque alors la possibilité qu'il n'existe pas de solution pour ce cas :

E32 : Et si on arrive à prouver que c'est impossible pour 13 ?

E31 : Oui mais ce n'est pas parce qu'on n'arrive pas nous que c'est impossible.

E32 : C'est pour ça qu'il faudrait trouver un moyen, sur un calcul, à prouver que ce n'est pas possible.

E31 : A mon avis si c'est à 13 qu'il y a une impossibilité, je pense que déjà ils ont trouvé, je pense qu'il y a déjà des mathématiciens qui ont trouvé, genre des algorithmes qui testent comme ça.

E32 : Non parce qu'ils arrivent pas à le démontrer justement en fait.

E31 : Non mais qui testent comme ça, qui lancent des chiffres comme ça et genre ils ne sont peut-être pas allés loin, mais à mon avis les 100 premiers chiffres ils doivent marcher enfin 100, peut être 1000. Tu vois ce que je veux dire ?

E32 : Et si ça ne marche pas mais qu'ils ne trouvent pas le moyen d'y arriver.

Finalement, l'élève E33 trouve une solution pour $n = 13$: $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{2}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$. L'élève E31 remarque alors, en comparant plusieurs exemples, que la première fraction unitaire est $\frac{1}{2}$ puis $\frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{4}$.

E31 : Je ne sais pas si tu vois mais à chaque fois ça alterne, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, pour 5 c'était quoi ? Hé, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. A chaque fois c'est incrémenter de 1.

E33 : Mais c'est normal puisque le, vu que le nombre devient de plus en plus grand, il faut que la fraction, le nombre qui fait la fraction il diminue sinon ça devient négatif.

Ils esquissent alors un début de méthode pour décomposer $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires pour n premier.

E33 : Oh je crois que j'ai trouvé quelque chose d'intéressant. Regarde $\frac{4}{17} - \frac{1}{5}$ donc tu mets $\frac{1}{5}$ de l'autre côté, puis $\frac{3}{85}$, si 85 pouvait être un nombre pair, on aurait déjà la solution, parce que tu aurais pu le décomposer $\frac{1}{85}$ plus $\frac{2}{85}$.

[...]

E33 : Donc c'est $\frac{1}{6}$ plus $\frac{4}{102}$, ah ce n'est pas divisible par 4.

Le problème est de décomposer la seconde fraction en somme de deux fractions unitaires. Ils mettent cet exemple de côté. En fin de séance, l'élève E33 trouve une décomposition pour $n = 19$: $\frac{4}{19} = \frac{1}{5} + \frac{1}{95} = \frac{1}{5} + \frac{1}{190} + \frac{1}{190}$. Au début de la séance suivante, les élèves vont exploiter ces idées et construire une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour des valeurs de n premier.

Troisième phase de recherche : la préparation de la première mise en commun. Cette phase de recherche s'est déroulée au début de la séance 3. Nous l'analysons dans l'épisode 11 ci-dessous. L'enseignant a donné comme consigne aux élèves de préparer une présentation de leurs recherches qu'ils exposeront ensuite devant les deux autres groupes. L'élève E31 est absent, il arrive au cours de la mise en commun. Les élèves E32 et E33 ne discutent pas du contenu de leur présentation pour la mise en commun, mais de l'élaboration d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n premier.

Épisode 11 : Élaboration d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour des valeurs de n premier.

A la fin de la séance précédente, les élèves avaient remarqué une régularité dans la valeur de la première fraction unitaire. Entre les deux séances, l'élève E33 a réfléchi au problème et propose une méthode pour trouver des décompositions pour une valeur de n donnée.

> E33 : Pour 4 sur un nombre premier, par exemple $\frac{4}{17}$, il faut trouver une fraction comme ça, avec le plus petit possible pour que ce ne soit pas négatif.

Il prend un exemple pour illustrer :

> E33 : $\frac{4}{17} - \frac{1}{5} = \frac{3}{85}$, ça fait $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{3}{85}$ après il faut juste séparer ça [$\frac{3}{85}$] en deux fractions. Tu multiplies la fraction par 2, ça fait $\frac{6}{170}$, ça fait $\frac{1}{170} + \frac{5}{170}$ et ça marche. [...] Et après il faudrait trouver ça, il faudrait réussir à le mettre sur un programme.

L'élève E32 évoque l'idée d'implémenter un algorithme sur un ordinateur mais l'élève E33 pense que c'est assez compliqué « car il y a des histoires de sommes et de multiplications ». Il illustre à nouveau sa méthode avec les décompositions trouvées pour $n = 19$ et $n = 13$. Il parvient à expliciter le processus qu'il met en œuvre à l'autre élève mais il est conscient qu'il n'arrive pas encore à le maîtriser.

> E32 : Quand c'est 3 en haut, tu fais fois 2, quand c'est 1 tu fais fois 2.
>
> E33 : Là j'y vais plus à tâtons qu'autre chose.

Il reprend alors son cahier et essaye de formaliser sa méthode. Il écrit : $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{?}{?}$ avec a le plus petit possible.

> E33 : Donc après il faut qu'on arrive à mettre ça sous forme de programme pour voir si ça marche ou alors, de trouver un moyen de pouvoir le démontrer mais ce n'est pas forcément évident.

Pour mieux comprendre comment fonctionne sa méthode, il continue de la tester en cherchant des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour $n = 23$ et $n = 29$. Il cherche par exemple à savoir quels sont les différents cas possibles concernant la seconde fraction. Sur les exemples, il a repéré des régularités sur la seconde fraction : c'est soit une fraction unitaire, soit une fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m pair.

> E33 : Quasiment tout le temps quand on a un 3 en haut, le dénominateur est pair. [...] On arrive à trouver des trucs assez faciles comme ça.
>
> E32 : Quand tu regardes bien quand t'as 1 tu multiplies par 2, quand t'as 3, de toute façon c'est tout le temps pair en fait.
>
> E33 : Il faudrait qu'on puisse montrer qu'il n'y a pas d'autres cas en fait.
>
> E32 : Oui mais comment faire ça ? On n'a pas la méthode pour faire ça nous.
>
> E33 : Peut être qu'on a trouvé quelque chose de révolutionnaire et on ne le sait pas encore.

Les élèves continuent de faire des exemples. En étudiant le cas $n = 457$, ils découvrent un nouveau cas : la seconde fraction est de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair : $\frac{4}{457} = \frac{1}{115} + \frac{3}{52555}$. L'élève E33 reprend la méthode utilisée plus tôt en multipliant la fraction par 2 :

> E33 : Et regarde, si on multiplie par 2, ça fait $\frac{6}{105110}$ et ça tu peux le décomposer en $\frac{1}{105110} + \frac{5}{105110}$, et ça le 105110 il est divisible par 5 et c'est facile. [...] On est bon quand même.

Pour déterminer la valeur de la première fraction unitaire, c'est-à-dire le plus petit nombre a, les élèves procèdent « à tâtons », à la calculatrice. Par exemple, pour le cas $n = 751$, ils testent successivement plusieurs valeurs de a possibles par une sorte de dichotomie :

> E33 : 1 sur 300, trop grand ; 150, trop petit ; 190 trop grand ; 180 trop petit ; 188.

L'élève E33 voudrait trouver « un système pour évaluer le coefficient ».

Les élèves ont eu une discussion sur le rôle de l'exemple dans la phase d'élaboration de preuve :

> E32 : Oui mais là le problème c'est qu'on a trouvé un truc où ça ne marchait pas.
>
> E33 : Ouais mais on a trouvé une solution quand même. [...] Il faut qu'on essaie avec d'autres nombres.
>
> E32 : 10500
>
> [...]
>
> E33 : En plus, le montrer avec un très grand nombre, ça, ça montre rien.
>
> E32 : Ça montre si ça marche tout le temps.
>
> E33 : Mais ça ne prouve rien du tout.
>
> E32 : Si ça prouve mais
>
> E33 : Ça sert à rien d'en prendre des extrêmement grands.

L'élève E32 est dans une démarche de preuve de type *expérience cruciale* (au sens de Balacheff) et l'élève E33 essaie de lui expliquer que ce raisonnement ne permet pas de démontrer que leur méthode prouvera l'existence d'une décomposition pour tout nombre premier n. Cependant, il pense avoir trouvé une piste très intéressante, même s'il a un doute quant à son efficacité pour prouver la conjecture d'Erdös-Straus :

> E33 : Il ne faut pas qu'on montre nos idées, elles sont trop bonnes [...] Si on arrive à démontrer ça, on va gagner beaucoup d'argent. (rires)
>
> E32 : Par l'ordinateur c'est peut-être faisable.
>
> E33 : Mais oui mais ce n'est pas évident, parce qu'en fait on n'est pas sûr de traiter tous les cas en fait. Là on tape au pif [...] on n'a pas de trucs pour trouver tous les nombres premiers. On n'a pas d'équation, on n'a rien.
>
> E32 : Et d'un autre côté les nombres premiers sont infinis.
>
> E33 : Oui mais on peut faire tous les nombres pairs par exemple, on a pu tous les faire.

Conclusion des analyses de la première partie des recherches du groupe 3.
Les conjectures formulées par le groupe 3 au cours des deux premières séances de recherche sont les suivantes :

- si n est pair alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$;
- si n est impair et multiple de 3 alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\frac{n}{3}}$;
- si n est impair et multiple de 5 alors $\frac{4}{5k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{10k}$ (k entier naturel) ;
- si n est impair et multiple de 7 alors $\frac{4}{7k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{14k}$ (k entier naturel).

Seule la première conjecture a été démontrée explicitement par les élèves en vérifiant, d'une part que la somme des trois fractions unitaires est égale à $\frac{4}{n}$, et d'autre part que les valeurs de a, b et c sont entières. Cependant cette élaboration de preuve reste mentale, elle n'est pas écrite explicitement à l'aide du calcul littéral. Pour les élèves, le fait de ne pas avoir écrit cette preuve entraîne un doute sur la validité d'un tel raisonnement. Les autres conjectures (pour n multiple de 3, n multiple de 5 et n multiple de 7) n'ont par exemple pas été démontrées, elles ont uniquement été vérifiées avec plusieurs exemples. Les élèves ne mobilisent donc pas le calcul littéral ni le calcul sur les énoncés comme un outil de validation. Nous faisons l'hypothèse qu'ils ne les identifient pas comme un mode de preuve. Précisons que sur la production finale du groupe (cf. annexe E2), les élèves rendent une démonstration par récurrence (fausse) du résultat partiel pour n pair et non leur preuve sur le calcul des énoncés.

Pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus et en particulier formuler ces conjectures, les élèves ont surtout mis en œuvre des procédures exploratoires par construction et questionnement d'exemples, notamment la procédure exploratoire 1, *recherche de régularités entre les décompositions*. Les élèves ont identifié les deux types de régularités : des régularités de type 1 (cf. p. 267) en étudiant une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée, et des régularités de type 2 (p. 268) en comparant des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour différentes valeurs de n données. Cela leur a permis, d'une part de trouver de nouveaux exemples, et d'autre part d'écrire les identités pour formuler les conjectures. Leur recherche s'est effectuée par des allers et retours entre la manipulation des objets mathématiques en jeu (des décompositions pour des valeurs de n données) et l'élaboration d'éléments théoriques pour rendre compte de propriétés de ces objets. Le schéma présenté à la page suivante illustre cette démarche de recherche de type expérimental mise en œuvre par les élèves.

La démarche de recherche de type expérimental du groupe 3 – Séances 1 et 2

Manipulations des objets mathématiques en jeu. EXPERIENCES	↔	Elaboration d'éléments théoriques sur les objets. THEORIE
$n = 4$; (3, 3, 3)		Régularité : $a = b = c$
$n = 8$; (6, 6, 6)		Régularité : si n est multiplié par 2, alors les solutions le sont aussi.
$n = 12$; (9, 9, 9)		Régularité : si n est multiplié par 3, alors les solutions le sont aussi.
		Conjecture : Si $n = 4k$, alors $a = b = c = 3k$, k entier naturel
$n = 6$; (4, 4, 6)		Régularités : $a = b$; $c = n$.
$n = 10$; (10, 10, 5)		Régularité : si n est pair, alors $a = b = 2n$ et $c = n/2$
$n = 14$; (14, 14, 7) $n = 18$; (18, 18, 9)		**Conjecture** : Si n pair, alors $4/n = 1/n + 1/n + 2/n$ sauf pour $n = 2$ et $n = 6$.
$n = 9$; (18, 18, 3)		Régularité : si n est impair, $a = b = 2n$ et $c = n/3$
$n = 13$; (26, 26, 13/3)		Régularité : si n est impair multiple de 3, $a = b = 2n$ et $c = n/3$
$n = 25$; (50, 50, 25/3) $n = 27$; (81, 81, 9)		**Conjecture** : Si n impair multiple de 3, alors $4/n = 1/2n + 1/2n + 3/n$.
$n = 5$; (2, 5, 10)		Régularité: $a \times b = c$
$n = 25$; (10, 25, 50)		Régularité : si n est multiplié par 5, alors les solutions le sont aussi.
$n = 35$; (14, 35, 70) $n = 10\,005$		**Conjecture** : Si $n = 5k$, alors $4/5k = 1/2k + 1/5k + 1/10k$, k entier naturel.
$n = 7$; (4, 4, 14)		Régularité : si n est multiplié par 7, alors les solutions le sont aussi.
$n = 35$; (20, 20, 70)		
$n = 49$; (28, 28, 98)		**Conjecture** : Si $n = 7k$, alors $4/7k = 1/4k + 1/4k + 1/14k$, k entier naturel.

Le schéma met en évidence les allers et retours caractéristiques de la démarche expérimentale entre les expériences et la théorie. Les élèves s'appuient d'abord sur des exemples de décompositions trouvés pour les premières valeurs de $n \geq 2$. L'étude de ces exemples leur permet d'identifier des régularités, sur une décomposition particulière (par exemple $a = b = c$ ou $c = a \times b$) ou entre des décompositions (par exemple si n est multiplié par 2, les solutions le sont aussi). Par exploitation de ces régularités, de nouvelles décompositions pour une valeur de n donnée sont construites. En retour, le questionnement de ces nouveaux exemples permet de formuler une conjecture pour une classe de nombres. Enfin, un retour aux exemples permet aux élèves de vérifier la formulation de la conjecture et de se convaincre de sa vérité. Nous pouvons relever deux rôles différents du contre-exemple dans l'émergence d'une conjecture. En référence à Lakatos (Lakatos, 1984), les élèves formulent certaines conjectures dans une dialectique de la preuve et de la réfutation. Le contre-exemple $n = 6$ pour la conjecture concernant n pair est rejeté, les élèves le considèrent comme une exception et la conjecture ne sera pas modifiée. En adoptant les termes utilisés par Lakatos, il s'agit d'un « rejet du contre-exemple avec une relégation des monstres » (Lakatos, 1984, p. 18). Le contre-exemple $n = 13$, pour la première conjecture formulée pour les nombres impairs (pour n impair, $a = b = 2n$ et $c = \frac{n}{3}$), est en revanche utilisé pour améliorer la conjecture. Les élèves précisent le domaine de validité de cette conjecture : pour n impair **multiple de 3**. Il s'agit dans ce cas d'une « relégation des exceptions pour améliorer la conjecture » (Lakatos, 1984, p. 31).

A la fin de la seconde séance, grâce à l'étude des exemples, les élèves repèrent une régularité dans la valeur de la première fraction unitaire. Ils cherchent alors à construire une méthode de décomposition (procédure exploratoire 2) de $\frac{4}{n}$ pour n premier en essayant de déterminer cette valeur à partir de nouveaux exemples. L'exploitation de la procédure exploratoire 2 s'effectue également à partir de la construction et du questionnement des exemples, dans une démarche de type expérimental. Nous avons ainsi relevé que les élèves utilisent ce type de procédures pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus pour des valeurs de n données. En revanche, lorsqu'ils utilisent des procédures opératoires, leur objectif est différent : avec la procédure opératoire 3, *transformation de l'équation initiale*, les élèves cherchent à étudier la conjecture d'Erdös-Straus dans un cadre général (par exemple trouver une formule générale permettant de décomposer $\frac{4}{n}$ pour tout n impair) et avec la procédure opératoire 5, *raisonnement par récurrence*, ils abordent l'étape de l'élaboration de preuves. Lorsqu'ils ont utilisé la procédure opératoire 3 par manipulation d'outils algébriques, les élèves n'ont pas cherché à articuler leur recherche avec le caractère expérimental du problème, les conjectures déjà formulées ou les procédures exploratoires. En revanche, lors de l'exploitation de la procédure opératoire 5 (mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence), les élèves se sont servis de leurs exemples. Éprouvant des difficultés d'ordre syntaxique pour écrire la propriété d'hérédité entre le rang n et le rang $n + 2$, ils ont tenté un recours aux aspects sémantiques par un retour aux exemples (cf. annexe E3). L'articulation entre les deux pôles est évoquée dans les recherches des élèves mais elle est peu exploitée.

L'analyse des processus de recherche montre que les élèves n'ont pas choisi d'inscrire leurs recherches dans une visée particulière pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Ce qui les conduit à une étude de décompositions pour des valeurs de n données, c'est le choix de privilégier une dimension organisatrice particulière, celle de la disjonction de cas. L'élève E31 effectue une première disjonction de cas lors de sa recherche individuelle en étudiant les cas $n = 2$, $n < 2$ et $n \geq 2$. Cette étude favorise l'exploitation du caractère expérimental du problème par recherche de décomposition pour $n = 2, n = 1$ et pour les premières valeurs de $n > 2$. Le questionnement de ces exemples entraîne ensuite une seconde disjonction de cas : l'étude de l'équation initiale pour n pair et pour n impair. L'exploitation de procédures exploratoires ayant été productive pour formuler une conjecture pour tout n pair, les élèves mettent en œuvre le même type de démarche pour traiter le cas n impair. Le choix de la dimension organisatrice de disjonction de cas a ainsi inscrit les recherches des élèves dans la visée *recherche de décompositions effectives* par exploitation de procédures exploratoires. Lorsque les élèves découvrent que le cas n impair se décompose en sous-cas, *a priori* en nombre infini, ils prennent conscience de l'inconvénient de cette visée pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus : elle permet une étude du problème pour certaines valeurs de n mais elle ne permettra pas de prouver la vérité de la conjecture pour tout entier naturel n. Ils choisissent donc de changer la direction de leur recherche et d'essayer de prouver la vérité de la conjecture. Pour cela, ils exploitent des procédures opératoires par manipulation d'outils algébriques. Cependant comme ces recherches sont infructueuses en terme d'avancées sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, et notamment en production de conjectures ou résultats partiels, les élèves abandonnent ces pistes de recherche au profit des procédures exploratoires, qui leur ont permis de formuler plusieurs conjectures. Nous faisons l'hypothèse que, pour ces élèves, l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus consiste, à leur niveau, non pas à prouver sa vérité mais à trouver des résultats partiels ou à formuler des conjectures. Ayant réussi à formuler plusieurs conjectures par exploitation de procédures exploratoires, cela les conduit à étudier le problème par recherche de décompositions effectives. Le retour à la construction et au questionnement des exemples va permettre aux élèves de mettre en évidence la propriété de multiplicativité, *s'il existe une décomposition pour tout entier n alors il existe une décomposition pour tout multiple de n*, et d'effectuer ensuite la réduction du problème aux nombres premiers. Leurs recherches vont alors se situer sous la pensée organisatrice du jeu d'extension/réduction. Comme nous l'avons souligné dans l'analyse *a priori*, cette dimension organisatrice favorise, d'une part l'exploitation d'une sous-dimension organisatrice qui est l'étude de classes, et d'autre part le recours à la dimension expérimentale pour étudier le problème. Nous verrons, dans la seconde partie de l'itinéraire de recherche (paragraphe 9.3.3), que la réduction du problème aux nombres premiers conduit les élèves à approfondir l'élaboration d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée (et n premier) pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus.

9.3.2 Étape intermédiaire : première mise en commun des travaux des trois groupes

La séance 3 a débuté par une mise en commun des travaux des trois groupes. Rappelons que cette phase de recherche n'était pas prévue initialement et que l'enseignant la propose aux élèves afin d'enrichir leur milieu. Après un temps de préparation d'une dizaine de minutes, chaque groupe est invité à se présenter au tableau pour exposer ses recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus. L'enseignant rappelle que l'objectif est que « chaque groupe expose ce qu'il a trouvé [...] des pistes ou des premiers résultats ». Il insiste sur l'importance, dans la recherche, de confronter et partager ses idées. Il précise qu'ils peuvent s'approprier les idées des autres pour la suite des recherches de groupes sur le problème.

> P : Après vous vous remettrez à la recherche, ce que vous avez entendu, il ne faut pas se l'interdire, hein, on est bien en travail de recherche. Ce n'est pas parce que ce n'est pas vous qui avez eu cette idée là, hein, que vous allez vous interdire de l'utiliser. Donc bien vous dire que vous êtes en recherche, que vous êtes plusieurs à chercher, on est une communauté de mathématiciens qui cherche, de temps en temps ils se retrouvent pour dire où ils en sont et chacun repart avec ses propres

idées et aussi avec les idées des autres.

Dans cette partie, nous analysons la présentation des travaux des trois groupes. Après chaque présentation, nous détaillons les réactions des deux autres groupes, les questions posées au groupe qui présente ainsi que les discussions en aparté, au sein de leur groupe. L'ordre de passage des groupes a été déterminé selon le numéro du groupe et non selon le contenu de leurs recherches.

A. Présentation du groupe 1.

Les élèves se sont réparti les éléments de leur recherche qu'ils souhaitent exposer aux autres. L'élève E12 présente les deux résultats partiels qu'ils ont trouvés, pour $n \equiv 0[2]$ et pour $n \equiv 0[3]$, en précisant les raisonnements mis en œuvre pour déterminer les deux identités. Ensuite, l'élève E11 explique qu'il a étudié l'équation initiale pour essayer de définir des conditions générales sur les solutions a, b, c. Il espérait ainsi éliminer des cas. Il présente l'étude du cas $a = b = c = x$. Un élève du groupe 2 l'interrompt et lui demande ce que représente x.

> E21 : Excuse-moi, le x c'est quoi, je n'ai pas bien compris.
>
> E11 : C'est une valeur, n'importe laquelle, où on a a, b et c qui sont égaux. On part de l'hypothèse où les trois valeurs sont égales.

Il explique qu'en remplaçant a, b et c par x dans l'équation initiale, il obtient $4 = \frac{3n}{x}$ et qu'il a trouvé une solution pour $n = 4$ et $x = 3$. Il indique qu'il n'a pas réussi à « voir s'il y avait d'autres façons de la résoudre ». L'élève E13 présente ensuite sa représentation géométrique du problème avec l'utilisation des théorèmes de Thalès et de Pythagore. Il précise cependant que cette piste ne lui semble pas pertinente car « elle ne donne qu'une relation en plus ». Enfin, l'élève E12 présente un dernier résultat, la propriété de multiplicativité : *si n a des solutions, alors tout multiple de n a des solutions.* Elle effectue la démonstration au tableau. L'élève E11 précise alors qu'il ne leur manque que les nombres premiers pour démontrer la conjecture d'Erdös-Straus.

> E11 : Donc il nous manque pour tous les nombres premiers.
>
> E12 : Voilà, après il faut chercher pour tous les nombres premiers, il faudrait montrer que pour tous les nombres premiers, on peut trouver une solution et du coup, on aura pour tous les nombres en général.
>
> E11 : Parce qu'on a déjà les multiples des nombres premiers donc avec les autres.

A partir de la propriété de multiplicativité qu'ils ont démontrée, les élèves effectuent la réduction du problème à l'étude des nombres premiers. Le théorème fondamental de l'arithmétique (ou la propriété d'existence d'au moins un diviseur premier pour tout entier n) n'est pas évoqué. Les élèves l'utilisent implicitement, en acte. A l'issue de leur présentation, les élèves des autres groupes ne posent pas de questions.

Réactions du groupe 2 : Les élèves ont pris des notes sur la présentation des travaux du groupe 1. Ils ont écrit les résultats présentés pour tout n pair et pour tout n multiple de 3, l'idée de poser $a = b = c = x$ et l'interprétation géométrique avec un triangle rectangle et les théorèmes de Thalès et de Pythagore. Seuls deux élèves (E24 et E21) notent la propriété multiplicative (s'il existe une décomposition pour n, alors il existe une décomposition pour tout multiple de n) qui permet de réduire le problème aux nombres premiers. L'élève E21 dit qu'il a noté rapidement ce résultat. Il le trouve intéressant mais il précise qu'il ne l'a pas compris. Les élèves discutent ensuite entre eux de l'interprétation géométrique présentée par le groupe 1 et ils pensent qu'il n'est pas nécessaire de se limiter à un triangle rectangle.

Réactions du groupe 3 : Les élèves ont pris des notes sur les travaux présentés par le groupe 1 en sélectionnant certains résultats. Ils n'ont, par exemple, pas écrit les premiers résultats, à savoir l'existence de décompositions pour des valeurs de n données. Les élèves effectuent des liens avec leurs propres travaux. Ils remarquent que les identités proposées par le groupe 1 pour tout n pair et n multiple de 3 sont équivalentes à celles qu'ils ont formulées :

> E33 : On ne l'a pas formulé comme ça mais ça revient exactement au même en fait.

Nous faisons l'hypothèse que c'est pour cette raison qu'ils ne notent pas les premiers résultats présentés par le groupe 1. En revanche, les élèves relèvent la piste de recherche présentée par l'élève E11 où il pose $a = b = c = x$. Ils n'écrivent pas celle de l'élève E13 qui présente une représentation géométrique du problème avec un triangle rectangle et qui utilise les théorèmes de Thalès et de Pythagore. Ils font l'hypothèse que « c'est inutilisable et pas rentable ». Enfin, les élèves notent le dernier résultat présenté, à savoir la démonstration de la propriété de multiplicativité. Notons qu'ils ne semblent pas faire de lien entre ce résultat et leur propre raisonnement, qui les a également conduits à réduire le problème aux nombres premiers. A l'issue de la présentation du groupe, les élèves ne posent pas de questions.

Pendant l'installation du groupe suivant, ils vont discuter du contenu de leur présentation qu'ils veulent adapter à la suite du passage du premier groupe. Ils ont repéré des résultats similaires aux leurs et ne veulent donc pas les présenter à nouveau. Ils projettent de focaliser leur présentation sur la méthode qu'ils viennent d'élaborer pour trouver des décompositions pour une valeur de n donnée.

> E32 : Quand je vais parler, je ne vais pas écrire tout ce qu'ils ont écrit.
>
> E33 : On ne réécrit pas pour les multiples de, les pairs, tout le monde l'a trouvé, c'est évident.
>
> E32 : Les triples ils ont fait aussi.
>
> E33 : Les multiples de 3 aussi, multiples de 5 on peut toujours le mettre mais bon ce n'est pas forcément utile d'épiloguer sur ça. Le 7 je vais m'en servir pour expliquer ce que j'ai trouvé.
>
> E32 : En gros je dis rien quoi.
>
> E33 : Bah si toi t'expliques.
>
> E32 : Ce qu'on a fait avant mais ce qu'on a fait avant c'est ce qu'ils ont écrit eux donc c'est inutile je trouve.
>
> E33 : Au pire, on expliquera tous les deux ce que j'ai fait.
>
> E32 : Après, j'explique qu'on veut trouver un algorithme pour tous les trucs.

La discussion s'oriente sur la pertinence de leur méthode pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus et prouver qu'elle est vraie pour tout entier naturel n :

> E33 : Le problème c'est que pour l'instant on est incapable de trouver comment ça marche en fait.
>
> E32 : On sait que ça marche mais on ne sait pas comment.
>
> E33 : Oui on sait que ça marche mais est-ce que ça marche pour tous les nombres premiers ?
>
> E32 : Non mais ça tu ne peux pas le vérifier sachant qu'ils sont infinis.
>
> [...]
>
> E33 : Genre si tu arrives à montrer sur un nombre à 10 000 chiffres après c'est bon. [Inaudible] avec l'informatique, ça va hyper vite. Mais bon après pour le

démontrer comme ça, ou alors tu admets ces valeurs sur un intervalle. L'ordi travaille sur tout l'intervalle, il balaye tout et c'est bon.

[...]

E33 : Il faut qu'on fasse un algorithme valable et qu'on voie s'il y a des endroits où ça ne marche pas, c'est ça qu'il faut qu'on fasse.

Les élèves sont conscients de l'inconvénient de cette méthode pour prouver la vérité de la conjecture d'Erdös-Straus, mais ils font l'hypothèse que cette méthode est intéressante pour l'étude du problème. Ils évoquent également la pertinence de construire un algorithme pour optimiser la recherche de décompositions effectives sur un intervalle donné. Dans la suite de leurs recherches, ils projettent de construire un algorithme de balayage pour déterminer s'il existe des cas particuliers, c'est-à-dire des cas où la méthode élaborée ne permet pas de trouver une décomposition.

B. Présentation du groupe 2.

Les élèves exposent d'abord leurs résultats partiels. L'élève E24 présente l'identité pour tout n pair puis l'identité pour tout n impair multiple de 3 et l'élève E22 présente celle pour tout n multiple de 5. L'élève E21 précise que les conjectures ont été trouvées « en cherchant à la calculatrice, ensuite on a vu qu'elles marchaient et donc après on les a prouvées ». Notons que les analyses de leurs échanges montrent que c'est le cas pour n pair (conjecture formulée par l'élève E24 lors de la recherche individuelle à partir de $n = 2$ et $n = 4$) et n multiple de 5 (conjecture formulée à l'épisode 8 à partir de $n = 5$ et $n = 25$). En revanche, la conjecture pour tout n multiple de 3, formulée par l'élève E22 entre deux séances de recherche, a *a priori* été trouvée et prouvée par analogie et manipulations algébriques, puis vérifiée par un exemple. Les élèves expliquent ensuite l'objectif de leur étude du problème, à savoir prouver l'existence d'une décomposition pour tout entier n, et précisent pour quelles raisons ils mettent de côté l'étude des cas particuliers. Par exemple, l'élève E21 explique les raisons pour lesquelles ils n'ont pas poursuivi l'étude des cas modulo 30 :

E21 : On a toujours des sous-cas donc on n'y arrivera jamais. On a décidé de changer de raisonnement, de trouver un autre champ d'application.

Il explique alors l'idée de la représentation géométrique avec la courbe en 3D. L'élève E23 présente ensuite les pistes des raisonnements par l'absurde et par récurrence qui n'ont pas abouti et enfin, l'élève E22 expose sa piste géométrique avec le parallélépipède rectangle. Les élèves ont présenté leurs travaux de manière claire et structurée en mettant en avant leur visée de la recherche, les résultats partiels qu'ils ont trouvés et les pistes explorées qui n'ont pas abouti. Nous relevons qu'un résultat n'a pas été présenté : il s'agit de la condition de divisibilité pour n impair ($ab + bc + ac$ est divisible par 4), obtenue à partir de l'application du théorème de Gauss (cf. épisode 2).

Réactions du groupe 1 : Les trois élèves n'ont pas relevé les mêmes éléments de la présentation du groupe 2 sur leur cahier de bord. L'élève E11 n'a rien écrit, il renvoie au cahier de l'élève E13. Ce dernier a uniquement écrit la relation algébrique donnant un lien entre le volume d'un parallélépipède rectangle et l'aire de ses faces [17]. Ses notes montrent qu'il l'a *a priori* vérifiée avec des valeurs données de a, b et c (cf. annexe C5, p. 99). L'élève E12 a noté l'intitulé des différents éléments présenté par le groupe 2 (par exemple démonstration pour $n \equiv 0[2]$ ou essais à partir de courbes, cf. annexe C4, p. 73-74). Elle effectue des liens avec les travaux de son groupe en précisant, par exemple, que la démonstration pour $n \equiv 0[2]$

17. La relation est la suivante : $ab + bc + ac = \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

est différente de la leur alors que celle pour $n \equiv 0[3]$ est identique. Au cours de la présentation, les élèves vérifient certains résultats exposés par le groupe 2. Par exemple l'élève E11 vérifie que l'identité proposée pour $n \equiv 0[3]$ est vraie[18], c'est-à-dire que la somme des trois fractions unitaires est égale à $\frac{4}{n}$. Il repère également une erreur dans l'écriture de l'égalité[19] $ab + bc + ac = \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}$. Il la signale à l'élève qui est au tableau. A l'issue de la présentation, les élèves discutent de l'existence de courbes en 3D et de l'étude du problème par des classes de congruences, modulo un nombre premier[20]. L'élève E12 relève que de nombreuses pistes de recherche ont été abordées pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus : « on a tous des trucs différents » et cela semble l'étonner.

Réactions du groupe 3 : Comme lors de la présentation du groupe 1, les élèves effectuent des liens entre les travaux du groupe 2 et les leurs. Ils remarquent que les premiers résultats (identités pour n multiple de 2 et n multiple de 3) présentés par le groupe 2 sont les mêmes que les leurs, même si la démarche pour les trouver est différente[21]. Lorsque l'élève E31, qui était absent, rejoint le groupe, les élèves E32 et E33 lui expliquent ce qu'ils ont trouvé au début de la séance (une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour des valeurs de n premier). Ils n'écoutent plus la présentation du groupe 2.

> E32 : On a trouvé pour les premiers.
>
> E33 : Enfin pour un grand nombre de premiers.
>
> E32 : Enfin pour un très très grand nombre de premiers.
>
> E33 : Enfin un très grand nombre, on n'en sait rien en fait (rires). [...] Je vais te montrer c'est du tonnerre.
>
> [...]
>
> E33 : Pour les nombres premiers, on essaie de trouver une fraction avec le dénominateur le plus petit possible [...] et le plus proche et après on arrive tout le temps à le décomposer en fait. Pour l'instant, on a toujours réussi, même avec des nombres comme ça [457 ou 751].

L'élève E32 dit qu'ils projettent de construire un algorithme et l'élève E33 illustre sa méthode avec la décomposition pour $n = 457$. Il évoque la difficulté de la preuve de leur méthode :

> E33 : Pour l'instant, sur tous les cas qu'on a fait ça marche, mais il faudrait pouvoir le démontrer. [...] Il faut faire un algorithme sur l'ordinateur, comme ça on voit s'il y a des cas où ça plante.
>
> E32 : Donc maintenant il faut réussir à faire l'algorithme.

A la suite de ces explications, les élèves écoutent à nouveau la présentation des travaux du groupe 2. L'élève E33 se demande si les identités qu'ils présentent sont démontrées mais il ne pose pas la question aux élèves du groupe 2. Sur l'ensemble de la présentation de ce groupe, les élèves ont noté uniquement la relation $\frac{4}{n} = \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}$ qu'ils jugent intéressante pour modéliser le problème. L'élève E31 pose une première question au groupe :

> E31 : Et à partir de ça [l'équation ci-dessus], vous avez rien pu faire ?
>
> E22 : On n'a pas spécialement cherché dans cette voie.

---

18. $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$.

19. L'élève E22 avait oublié de diviser le second membre par 2.

20. Comme les élèves chuchotent, les enregistrements ne permettent pas de comprendre l'ensemble de leurs conversations.

21. Le groupe 2 part de la somme $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$ pour montrer qu'elle est égale à $\frac{4}{n}$ alors que le groupe 3 décompose $\frac{4}{n}$ en $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}$ et montre ensuite que c'est égale à $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$.

E31 : Ça a une bonne tête non ?

E22 : C'était pour faire une jolie transformation.

L'élève E33 est étonné qu'ils n'aient pas trouvé de décompositions pour des valeurs de n impairs et leur pose la question suivante :

E33 : Et vous n'avez pas travaillé plus que ça sur les premiers ?

E22 : Bah de toute façon comme il y a une infinité de nombres premiers, si on les fait un par un, on n'est pas, on n'est pas sorti.

E21 : Et puis on s'est rendu compte que, quand on a fait modulo 30, il nous manquait, il nous manquait 8 cas. On a démontré que pour 22 cas sur les 30.

E22 : S'il faut faire tous les premiers à la suite, on n'a pas fini.

A l'issue de la présentation des deux premiers groupes, les discussions en aparté du groupe 3 mettent en évidence un enjeu de la recherche du problème pour ces élèves :

E33 : C'est peut-être nous qui avons trouvé le truc le plus intéressant [Il fait référence à leur méthode de décomposition pour des valeurs de n premier].

E32 : Chut c'est hyper secret.

E33 : On le dit ou on ne le dit pas ?

[...]

E33 : Le problème c'est qu'on n'a rien tiré d'eux quasiment et que eux ils vont tirer un truc que je trouve plutôt intéressant [i.e. leur méthode de décomposition].

C. Présentation du groupe 3.

Les élèves présentent brièvement les résultats qu'ils ont en commun avec les autres groupes. L'élève E32 mentionne les identités qu'ils ont trouvées pour tout n pair, n multiple de 3 et n multiple de 5 sans les écrire au tableau. Il explique ensuite qu'ils ont trouvé une décomposition pour n multiple de 7 et qu'ils ont commencé une recherche de décompositions pour tout n premier. La réduction du problème aux nombres premiers n'est pas explicitée.

E32 : Après on a essayé d'écrire tous les nombres premiers sauf que ça nous donnait beaucoup de choses différentes.

L'élève E33 explique alors qu'ils ont essayé de trouver des règles pour tout nombre premier et présente sa méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour des valeurs de n premier.

E33 : On a essayé de prendre un nombre au hasard, par exemple 23, qui est premier, et on a essayé de trouver une fraction avec le dénominateur le plus petit possible en bas, et ensuite le décomposer en deux autres fractions.

E32 : En gros, on a fait $\frac{4}{23}$ moins la fraction avec le plus petit dénominateur qu'on avait et au final si c'était supérieur à 0, on savait que $\frac{4}{23}$ est égal à 1 sur ce nombre plus une fraction qu'on peut décomposer en deux.

Un élève du groupe 2 les interrompt et demande si cela a un rapport avec la décomposition pour $n = 7$. L'élève E33 répond que c'est cette sur décomposition qu'il a eu l'idée de chercher la fraction unitaire inférieure la plus proche de $\frac{4}{n}$.

E33 : $\frac{4}{7}$ j'ai vu que ça faisait $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14}$ et j'ai vu que ça faisait $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$ et [...] $\frac{4}{7}$ se rapprochait de $\frac{1}{2}$ en fait et j'ai essayé de travailler comme ça.

Il présente ensuite à l'aide d'exemples les trois cas trouvés pour décomposer la seconde fraction :

- pour $n = 23$, $\frac{4}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{138} = \frac{1}{6} + \frac{1}{276} + \frac{1}{276}$. La seconde fraction est de la forme $\frac{1}{m}$ avec m entier naturel.

- pour $n = 29$, $\frac{4}{29} = \frac{1}{8} + \frac{3}{232} = \frac{1}{8} + \frac{1}{232} + \frac{2}{232}$. La seconde fraction est de la forme $\frac{3}{m}$ avec m pair.
- pour $n = 457$, $\frac{4}{457} = \frac{1}{115} + \frac{3}{52555} = \frac{1}{115} + \frac{1}{105110} + \frac{5}{105110}$. La seconde fraction est de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair multiple de 5.

Un élève du groupe 2 interrompt à nouveau la présentation et demande à l'élève E33 « ce qu'il entend par le plus petit dénominateur possible ». L'élève E33 répond, à l'aide d'un exemple :

> E33 : En fait, si tu veux, là si tu mettais $\frac{1}{114}$ c'est pas possible en fait car $\frac{1}{114}$ est plus grand que $\frac{4}{457}$.
>
> E32 : En gros tu fais ça moins ça et si c'est positif tu peux.
>
> E33 : Ce qui est embêtant c'est pour faire des nombres très très grands parce qu'à la calculatrice c'est difficile de trouver le bon en fait. Ça prend un certain moment, mais avec un algorithme, je pense que ça doit être faisable.

A la suite d'une autre question du groupe 2, l'élève E33 précise leur méthode :

> E21 : Pour synthétiser ce que vous faites, en fait, vous prenez un nombre premier et vous cherchez à voir s'il y a une manière de décomposer tous les nombres premiers d'une certaine manière ? Regarder s'il y a des choses qui reviennent quoi ?
>
> E33 : Voilà, pour l'instant on a trouvé trois cas, soit 1 sur un nombre pair et on arrive à le décomposer assez facilement, [...] soit 3 sur un nombre pair, soit 3 sur un nombre impair. En fait, on arrive tous à les exprimer différemment pour l'instant.

Les élèves présentent ensuite leurs difficultés et leur projet pour la suite des recherches :

> E32 : Donc là on était un peu bloqué parce qu'on se dit que les nombres premiers c'est infini.
>
> E33 : Donc on ne sait pas si c'est les seuls cas pour l'instant qu'il y a en fait.
>
> E32 : Après c'est à vérifier sur un algorithme.
>
> [...]
>
> E33 : Voir si on arrive à avoir toutes les solutions sur un intervalle.

Les élèves explicitent leur méthode par description des processus de calcul et en l'illustrant avec des exemples. La valeur de la fraction unitaire inférieure la plus grande n'est pas désignée. Elle est trouvée par tâtonnement à la calculatrice. De même les différents cas pour décomposer la seconde fraction sont explicités grâce à la description du procédé de calcul mais ils ne sont pas généralisés ni formalisés. Les élèves semblent en être conscients et nous faisons l'hypothèse qu'ils n'ont pas eu le temps d'y réfléchir. En effet, cette méthode est en cours de construction, son élaboration a débuté au début de la séance, à l'épisode 11, comme le précise l'élève E33 :

> E33 : Oui aussi [...] mais on vient de le trouver, on n'a pas cherché plus que ça en fait.

Les élèves projettent de poursuivre l'élaboration de cette méthode pour déterminer des décompositions pour n premier.

Réactions du groupe 1 : Les élèves E11 et E13 ont noté peu d'éléments concernant les recherches présentées par le groupe 3. L'élève E13 n'a rien écrit et l'élève E11 a uniquement noté l'exemple pour $n = 23$. En revanche, l'élève E12 a relevé l'identité pour les multiples de 7, les trois exemples (pour $n = 23$, $n = 29$ et $n = 457$) et les trois formes identifiées pour la seconde fraction (elle a écrit $\frac{1}{nb\ pair}$, $\frac{3}{nb\ pair}$ et $\frac{5}{nb\ impair}$). Comme lors du passage de l'autre groupe, les élèves vérifient certains résultats présentés par les élèves au tableau.

L'élève E13 vérifie par exemple la solution pour $n = 457$ et pense qu'elle est fausse car la troisième fraction ($\frac{5}{10510}$) n'est pas une fraction unitaire. L'élève E12 vérifie alors le calcul et lui explique que le dénominateur est un multiple de 5 donc qu'elle peut s'écrire sous la forme d'une fraction unitaire. A l'issue de la mise en commun, les élèves vont reprendre l'idée principale de la méthode de décomposition présentée par le groupe 3, à savoir déterminer la valeur de la première fraction unitaire et ensuite, chercher une méthode pour décomposer la seconde fraction en somme de deux fractions unitaires (cf. l'analyse de la seconde partie des recherches du groupe 2).

Réactions du groupe 2 : Les élèves prennent des notes sur la présentation des recherches du groupe 3. Ils écrivent le résultat pour n multiple de 7 ainsi que des décompositions pour des valeurs particulières de n : $n = 23$, $n = 29$, $n = 457$. L'élève E22 précise en aparté qu'ils peuvent généraliser à chaque fois pour tous les multiples. Bien qu'il soit réticent à étudier la conjecture d'Erdös-Straus par recherche de décompositions effectives, l'élève E21 est très intéressé par la méthode proposée par le groupe 3. C'est lui qui les interrompt à plusieurs reprises pour avoir des informations supplémentaires sur le fonctionnement de la méthode et en particulier sur les procédés de calcul. Nous faisons l'hypothèse que si cette méthode lui semble pertinente, c'est qu'elle fait écho à son objectif depuis le départ : trouver des liens entre n et a, b, c. A l'issue de la présentation, les élèves du groupe 2 posent de nouvelles questions. L'élève E21 se demande comment ils ont fait pour trouver ces calculs alors qu'eux, ils ont eu des difficultés à trouver une décomposition pour $\frac{4}{5}$.

> E21 : Comment est ce que vous faisiez exactement pour trouver ces grands nombres là, pour décomposer, vous faisiez des tests à la calculatrice ? [Il fait référence à la valeur de a dans la décomposition de $\frac{4}{457}$ qui vaut 115].
>
> E33 : A la calculatrice, en fait.
>
> E21 : Oui à la calculatrice mais enfin.
>
> E33 : En gros, on prend un nombre premier au hasard, par exemple $\frac{4}{457}$ et on essaie de trouver une fraction où quand on fait $\frac{4}{457}$ moins par exemple $\frac{1}{115}$, ça soit positif, si on met $\frac{1}{114}$ ça devient négatif [...] On sait que c'est le nombre entier le plus petit.
>
> E21 : Le $\frac{1}{115}$, vous l'avez trouvé à la calculatrice, en faisant des tests ?
>
> E33 : A tâtons, on n'arrive pas encore à le faire avec des nombres plus grands.

L'élève E22 propose alors une valeur algébrique de a pour décomposer $\frac{4}{n}$ avec la fraction unitaire inférieure la plus proche.

> E22 : En fait, pour le trouver, est-ce qu'on ne pourrait pas juste faire partie entière de $\frac{4}{457}$? Enfin, partie entière[22] de $\frac{n}{4}$?
>
> E33 : Ah oui, ce serait plus logique, il faudrait faire des tests.

L'élève E12 est d'accord avec cette valeur, elle semble également l'avoir testée pendant la présentation des travaux du groupe (avec sa calculatrice). A la fin du passage du groupe 3, l'élève E21 remarque que sur les deux premiers exemples (pour $n = 23$ et $n = 29$), deux dénominateurs sont identiques et l'élève E23 pense que cette piste de recherche est plus facile. Les élèves du groupe 2 se sont donc intéressés aux travaux du groupe 3 et ont essayé de bien les comprendre. Cependant, la suite de l'analyse de leurs recherches montre qu'ils ne s'approprieront pas du tout ces travaux.

22. Il s'agit en fait de $E(\frac{n}{4}) + 1$.

Conclusion.
L'enseignant a proposé cette mise en commun des travaux des trois groupes pour confronter les recherches des élèves. L'objectif était que les élèves exposent et partagent leurs travaux. Cet objectif a été atteint puisque les élèves ont présenté chacun leur tour leurs recherches, se sont écoutés et se sont posé des questions. Chaque groupe s'est intéressé aux présentations des autres et a cherché à comprendre les différents travaux exposés. Ils ont réagi au cours des présentations ou à la fin, en posant des questions. Le fait que les démarches de recherche soient parfois très différentes n'a pas été un frein à la confrontation et au partage des recherches. Nous avons relevé que les élèves ont effectué des liens entre leurs recherches et celles qui leur ont été présentées. Ils ont notamment repéré les résultats identiques et ils ont comparé leurs formulations algébriques et les démarches mises en œuvre pour les trouver. En revanche, nous avons observé que les élèves ne cherchent pas à articuler leurs travaux avec ceux des autres groupes. Par exemple, le groupe 3 dit, à la fin de la séance 3, n'avoir « quasiment rien tiré » des travaux du groupe 2. Nous faisons l'hypothèse que cela est lié aux directions des recherches, qui sont différentes. Le groupe 2 cherche en effet à prouver la vérité de la conjecture par exploitation de procédures opératoires alors que les recherches du groupe 3 s'inscrivent dans la recherche de décompositions effectives par construction et questionnement d'exemples. Les recherches s'inscrivant dans des visées différentes, les élèves ne cherchent pas à s'approprier les pistes de recherche associées, comme en témoigne cette réponse d'un élève du groupe 2 dans le questionnaire :

> E22 : Dans notre groupe, étant engagés sur des voies différentes, nous n'avons pas réellement exploité les avancées des autres groupes.

Les analyses de la seconde partie des recherches collectives (cf. paragraphe suivant) montrent que les seules appropriations de travaux entre les groupes s'effectuent entre les groupes 1 et 3. Cela étaye notre hypothèse, puisque les démarches de recherche des deux groupes s'inscrivent dans la même visée de recherche de décompositions effectives. Les milieux matériels de chaque groupe semblent donc déjà stabilisés lors de la mise en commun. Les travaux des groupes 1 et 3 n'entrent pas dans le milieu objectif du groupe 2 et inversement.

9.3.3 Seconde partie de l'itinéraire des recherches des trois groupes

Nous avons scindé la seconde partie de l'itinéraire de recherche des trois groupes en trois phases. La première correspond aux phases de recherches en groupes, qui se sont déroulées aux séances 3 et 4. La seconde phase est celle de la rédaction de l'affiche et des preuves des résultats, qui a eu lieu pendant la séance 5. La troisième phase est la préparation de la séance de mise en commun et de débat au sein de la classe. Dans ce paragraphe, nous analysons successivement la seconde partie des itinéraires de recherche des trois groupes.

A. Itinéraire de recherche du groupe 1 - Seconde partie.
Nous analysons ci-dessous les trois phases de recherche qui constituent la seconde partie de l'itinéraire de recherche du groupe 1.

Première phase de recherche : les secondes recherches collectives par groupe.
Les secondes recherches collectives par groupe se sont déroulées lors des séances 3 et 4. Nous avons découpé cette phase de recherche en 9 épisodes (numérotés de 9 à 17) que nous analysons successivement ci-dessous. L'épisode 9 s'est déroulé lors de la séance 3 et les épisodes 10 à 17 lors de la séance 4.

Épisode 9 : Élaboration d'une méthode par élimination de cas à étudier.
A la suite de la mise en commun, les élèves ne reprennent pas leurs pistes de recherche étudiées à la séance précédente, ils examinent les travaux du groupe 3. Ils sont intéressés par leur méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur donnée de n premier. A partir des éléments présentés par le groupe 3, ils vont étudier la conjecture d'Erdös-Straus pour n premier en élaborant une méthode de décomposition par élimination de cas à étudier. Trois étapes constituent la construction de cette méthode. Nous les détaillons ci-dessous.

Première étape : détermination de la valeur de a.

L'élève E11 essaie de formaliser le procédé de calcul expliqué par les élèves du groupe 3 pour déterminer la première étape de leur méthode, c'est-à-dire trouver la fraction unitaire inférieure la plus proche de $\frac{4}{n}$.

> E11 : Ce serait assez simple [...] ça fait $\frac{4}{n}$ est égal à 1 sur partie entière de $\frac{4}{n}$ plus 1 sur n fois partie entière de $\frac{4}{n}$.

Pour vérifier cette expression, il la teste sur un exemple. Il prend $n = 457$, exemple donné par le groupe 3 lors de sa présentation. Comme il a écrit partie entière de $\frac{4}{n}$, il trouve 0. Avec l'aide des autres élèves, il cherche à comprendre son erreur et à déterminer la bonne expression pour a.

> E13 : Euh non c'est pas ça, je trouve 0. C'est peut être suivant non plutôt que partie entière précédent. [Il refait les calculs]. Je trouve 1.
> [...]
> E12 : Ah mais c'est bon j'ai compris [elle tape sur sa calculatrice] ça marche [...] si tu fais à le contraire [...]. Par contre au lieu de trouver 115, je trouve 114.
> E13 : Mets suivant, *Ent* [touche de la calculatrice] suivant.
> E12 : Ah oui.
> E13 : Mais pourquoi toi ça marche et moi ça ne marche pas ?
> E12 : Parce que tu fais à l'envers [elle tape sur sa calculatrice]. Oui c'est bon ça donne 115. Donc ce n'est pas $\frac{4}{n}$, c'est $\frac{n}{4}$.
> E13 : Partie entière supérieure ?
> E12 : Oui supérieure, partie entière de machin plus 1.

Le retour aux exemples permet aux élèves, d'une part de déterminer la valeur littérale de a par essais et erreurs, et d'autre part de repérer que le numérateur de la fraction $\frac{4}{n} - \frac{1}{a}$ n'a pas toujours la même valeur.

> E13 : Le problème c'est que, en haut c'est pas forcément la même chose, c'est ça le souci.
> E12 : Je crois qu'il faut faire des essais de toute façon.
> E13 : C'est ce qui nous manque de toute façon.

A partir d'un nouvel exemple ($n = 461$) et d'une tentative d'écriture d'une expression générale, les élèves E11 et E12 cherchent à étudier ce nouveau problème.

Seconde étape : détermination de la valeur du numérateur de la seconde fraction.

L'élève E12 cherche une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour $n = 461$ en prenant comme valeur de a la partie entière supérieure de $\frac{n}{4}$. Parallèlement, l'élève E11 écrit la formule suivante en appui sur les trois exemples proposés par le groupe 3 lors de sa présentation :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{E(\frac{n}{4})+1} + \frac{x}{n(E(\frac{n}{4})+1)} = \frac{1}{E(\frac{n}{4})+1} + \frac{z}{n(E(\frac{n}{4})+1)} + \frac{y}{n(E(\frac{n}{4})+1)}. \tag{9.9}$$

L'élève E11 explique à l'élève E12 son expression, elle émet un doute quant à l'utilité de cette formule :

E12 : Oui donc on se retrouve encore avec trois inconnues et on tourne en rond.

Sur les exemples, elle a repéré que la valeur de x était souvent 3, elle propose donc de chercher à déterminer « quand est-ce que c'est 3 et quand est-ce qu'on a autre chose ». Pour cela, elle remarque que les décompositions pour $n = 29$ et $n = 461$ sont semblables[23] et cherche à trouver un lien entre 29 et 461. De son côté, l'élève E11 a remarqué une autre régularité, entre les décompositions pour $n = 29$ et $n = 457$: $\frac{4}{n}$ se décompose en $\frac{1}{E(\frac{n}{4})+1} + \frac{3}{n(E(\frac{n}{4})+1)}$. Il cherche donc un rapport entre 29 et 457. Comme ils n'arrivent pas, ni l'un ni l'autre, à trouver un lien pertinent entre ces nombres premiers, l'élève E11 propose de refaire des essais et suggère une expérience cruciale (au sens de Balacheff).

E13 : Vas-y je vais prendre un grand n, un grand n nombre premier.

A l'aide de sa calculatrice et de la commande *factor*, il cherche un grand nombre premier. Il trouver 4513. Il calcule la partie entière supérieure de $\frac{4513}{4}$ puis écrit $\frac{4}{4513} = \frac{1}{1129} + \frac{x}{1129 \times 4513}$.

E12 : Pourquoi tu as fait $n \times (E(\frac{n}{4}) + 1)$, t'es sûr, ça marche ça ?

E13 : Ça, ça marche à chaque fois, 138 t'es bien d'accord que c'est 6×23.

E12 : Ah oui, je n'avais pas fait gaffe.

E13 : Et à chaque fois, c'est pour ça que tu as ça [il lui montre l'identité (9.9)].

Les élèves cherchent alors la valeur de x. Par tâtonnements (en essayant $x = 1$, $x = 2$ etc.), l'élève E13 trouve que $x = 3$. Puis en étudiant les exemples, il réussit à trouver un procédé de calcul pour déterminer sa valeur :

E13 : J'ai trouvé, ton x, c'est ce qu'il te manque pour que ce soit divisible par, pour que ça doit divisible par ça. [...] Ce chiffre-là, x, c'est égal à la partie entière, $\frac{4513+x}{4}$ ça te donne ta partie entière. Tu mets $\frac{4513+3}{4} = 1129 = E(\frac{4513}{4}) + 1$.

L'élève E12 écrit ce procédé de calcul pour déterminer x sous forme littérale : $\frac{n+x}{4} = E(\frac{n}{4})+1$. Elle repère alors un problème pour utiliser cette expression, puis a une nouvelle idée pour déterminer la valeur de x :

E12 : Le problème c'est que x, tu ne peux pas le, partie entière c'est bien joli sauf que là, je ne sais pas moi, par exemple partie entière de x plus ça $[E(t+x)]$ et de ça plus $x+1$ $[E(t+x+1)]$ peut être la même.

E11 : Oui mais déjà on peut vérifier que ça soit ça.

E12 : Et bien il faut regarder les congrus modulo 4.

E11 : Donne-moi un autre chiffre premier.

E12 : Eh attends j'ai trouvé, si le nombre premier est congru à 1 modulo 4, là ça sera 1 et s'il est congru à 3 modulo 4, ça sera 3, le x sera 3.

E11 : Et avec un 2 ce n'est pas possible ?

E12 : Non car il serait pair.

E11 : Ça nous donne 1 ou 3, c'est ce qu'on a à chaque fois.

L'élève E12 est contente d'avoir trouvé ce résultat et voudrait le rédiger correctement. Elle demande à l'élève E11 de le vérifier sur un autre exemple. Il prend $n = 89$, calcule la valeur de $E(\frac{89}{4}) + 1$ puis il calcule la valeur de x avec son procédé de calcul.

E13 : Je vais exprimer x, ça fait 4 fois partie entière moins 4513, là ça veut dire que mon x sera égal à 4 fois 23 moins 89. Ça fait 3.

23. La valeur de x vaut 3 et la fraction $\frac{3}{m}$ donne une valeur de m pair, ce qui permet de la décomposer en $\frac{1}{m} + \frac{2}{m}$.

L'élève E12 conclut que son résultat est juste : « ça marche, c'est congru à 3 ». Les élèves pensent avoir trouvé « un bon truc » et l'expliquent à l'élève E13 qui effectue d'autres recherches, individuellement. Les explications de l'élève E11 mettent en évidence l'aspect expérimental de leurs recherches pour trouver ce résultat, par allers et retours entre la construction et le questionnement d'exemples, la recherche de régularités et l'écriture d'expressions littérales pour rendre compte de propriétés des objets en jeu.

> E11 : Là tu as toujours 1 et la partie entière de ça divisé par ça, [...] partie entière supérieure, et l'autre c'était x, et x on voit que c'est toujours 1 ou 3 ça dépend. C'est 1 ou 3, tu pourrais le déterminer après si c'est 1 ou 3, en fonction de sa congruence modulo 4. Et c'est divisible, c'est divisé par n fois cette partie entière là.
>
> E13 : Et ça comment tu le sais ça ?
>
> E12 : Bah ça c'est au pif.
>
> E11 : C'est ce qu'on a remarqué avec nos essais.
>
> E12 : C'est ce qu'on remarque, mais ça c'est que des conjectures en fait.
>
> E11 : Et donc si tu regardes là, sur plusieurs essais, là t'as 4 donc ça, la partie entière de ça sur ça, ça fait 1129 et ça fois ça, ça donne ça. Là j'avais rien au départ [pour x] dont j'ai commencé à 1, 2, 3 et à 3 pim ça marchait, et ça me donnait ce chiffre-là. Et si tu regardes bien, x, donc ce nombre-là, [...] si tu regardes bien c'est égal à la partie entière, donc ça 1129 fois 4 moins ça, euh non, il faut que je revoie mon truc. Ah voilà, c'est 4 fois partie entière moins n.

En écrivant ce résultat sous forme littérale (cf. annexe C4, p. 75-76), les élèves soulèvent un nouveau problème : comment décomposer une fraction de la forme $\frac{x}{z}$ en somme de deux fractions unitaires ?

Troisième étape : étude d'un nouveau problème, décomposer une fraction en somme de deux fractions unitaires.

Les élèves étudient ce nouveau problème par disjonction de cas : quand $x = 1$ et quand $x = 3$. Pour le premier cas, l'élève E12 donne tout de suite une solution en appliquant l'identité $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ (méthode 1 présentée dans l'analyse *a priori* p. 269).

> E12 : Si c'est 1, c'est bon, c'est réglé [...] tu multiplies par 2 au dénominateur et tu en as deux.

Elle écrit ensuite l'identité permettant de décomposer $\frac{4}{n}$ dans le cas où n est congru à 3 modulo 4 (c'est-à-dire $x = 1$) : $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}$ (cf. annexe C4, p. 77). Pour le second cas, l'élève E12 propose de le décomposer en trois sous-cas selon la congruence de z modulo 3. Elle a repéré que si z est un multiple de 3, elle peut réutiliser l'identité $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$.

> E12 : On va avoir trois sous-cas, ça dépend si z est congru à 1, 2 ou 3 modulo 3. S'il est divisible par 3, il n'y a pas de souci parce que tu le réduis à 1 sur quelque chose et après tu le redivises.

Pour l'écrire, elle utilise l'écriture d'un entier à l'aide de la divisibilité. Elle pose $z = 3k$, en déduit que $\frac{3}{z} = \frac{3}{3k} = \frac{1}{k}$ puis que $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$. Comme pour écrire les identités pour n pair et n multiple de 3, l'élève écrit au départ z sous forme d'une congruence ($z \equiv 0[3]$) puis revient à la définition d'une congruence en écrivant $z = 3k$, k entier naturel. Pour écrire l'identité, elle privilégie donc la dimension opératoire de la représentation d'un entier à l'aide de la divisibilité. Pour l'expliquer, nous avançons deux raisons : d'une part les calculs semblent plus faciles à mener pour elle, et d'autre part l'identité qui permet de décomposer $\frac{4}{n}$ comporte trois fractions unitaires exprimées sous la forme $\frac{1}{m}$, m entier naturel et non sous la forme $\frac{1}{\frac{m}{n}}$ avec $\frac{m}{n}$ un entier naturel [24]. Les élèves cherchent ensuite à étudier le cas où $z \equiv 2[3]$. L'élève E12 pense qu'il ne pose pas de problème mais lorsqu'elle essaie de l'écrire, elle se rend compte qu'elle a confondu $z \equiv 2[3]$ et $z \equiv 0[2]$.

> E12 : On pose $z = 2k$, ah non, non non, ça ne va pas [...] ça ne marche pas. C'est s'il est pair que ça marche.
>
> E13 : S'il est congru à 2 modulo 3, il est pair.
>
> E12 : Bah non congru à 2 modulo 3 ça ne veut pas dire congru à 0 modulo 2. 17 il est congru à 2 modulo 3 et il est impair.

Pour z pair, elle semble savoir comment décomposer la fraction $\frac{3}{z}$ en somme de deux fractions unitaires. Nous faisons l'hypothèse qu'elle l'a repéré à partir de deux exemples étudiés précédemment, $n = 29$ et $n = 461$. Elle a alors l'idée d'examiner les cas modulo 6 plutôt que modulo 3, « comme ça on retombe dans le cas où c'est congru à 2 ».

> E12 : Ça marche pour 2, pour 4, pour 6, pour 3 [...] il n'y a que pour 5 que ça ne marche pas, 1 et 5. [...] Si c'est congru à 2 modulo 6 c'est un nombre pair, si c'est congru à 4 modulo 6 c'est un nombre pair, si c'est congru à 3 modulo 6 c'est un multiple de 3 donc ça marche.

Dans le cas où n est congru à 2 ou 4 modulo 6, elle écrit :

> z est pair, $z = 2k$. On a donc $\frac{3}{z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{k}$.

Elle utilise toujours la représentation d'un entier à l'aide de la divisibilité, mais notons qu'elle n'écrit que la décomposition de la fraction $\frac{3}{z}$, elle n'écrit pas celle de $\frac{4}{n}$. A la fin de la séance, les élèves concluent qu'il ne reste à étudier que les cas où z est congru à 1 et 5 modulo 6.

Cette recherche a été menée par les élèves E11 et E12, l'élève E13 n'a presque pas participé. D'après son cahier de bord (cf. annexe C5, p. 99-100), il a essayé d'étudier le problème dans un cadre géométrique, en reprenant la représentation présentée par le groupe 2 à l'aide d'un parallélépipède rectangle. A la fin de la séance, il explique aux autres élèves qu'il n'est pas convaincu qu'étudier la conjecture à l'aide de l'arithmétique soit efficace et que c'est pour cette raison qu'il a voulu faire autre chose. La visée de la recherche privilégiée par l'élève E13 semble être la quête de la vérité de la conjecture alors que les recherches menées par les élèves E11 et E12 s'inscrivent dans une visée de recherche de décompositions effectives. Les élèves E11 et E12 sont conscients des limites de cette démarche de recherche pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus.

> E11 : On ne peut pas démontrer mais on peut déterminer des solutions.

Ils précisent qu'ils n'ont pas démontré leurs résultats. Sur son cahier de bord (cf. annexe C4, p. 75), l'élève E12 indique que la décomposition qu'ils étudient pour n premier $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$ avec $x = 1$ ou $x = 3$ est une conjecture, validée par des essais. Cependant, les élèves jugent que la recherche de décompositions pour n premier est intéressante car elle permet de déterminer des solutions et d'éliminer des cas à étudier. A la fin de la séance, ils sont contents de l'avancée de leurs recherches et reconnaissent l'importance de la mise en commun qui leur a permis d'avancer dans l'étude du problème initial.

> E11 : On a bien avancé là.
>
> E12 : C'est utile de faire régulièrement des trucs comme ça avec les autres.
>
> [...]
>
> E11 : Monsieur, c'est vrai que c'était pas mal la mise en commun car cela nous a permis d'avancer.

24. Dans ce cas, l'identité serait $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{2z}{3}} + \frac{1}{\frac{2z}{3}}$.

E12 : Ah oui c'était bien.

E11 : On part sur l'idée d'un groupe qui n'a rien à voir avec ce qu'on cherchait au départ.

E12 : Ils ont trouvé un bon truc le groupe 3.

P : C'est fait pour ça.

Pour ce groupe, l'objectif de la mise en commun visé par l'enseignant est atteint, elle a permis d'enrichir leur milieu objectif et de les faire progresser dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

Épisode 10 : Reprise des résultats de la séance précédente.
Les élèves débutent la séance 4 en reprenant la méthode par élimination de cas élaborée à la séance 3. L'élève E13, qui n'avait pas participé à la construction de ces résultats, essaie de les comprendre. Pour cela, il va faire plusieurs essais « pour se [me] familiariser » avec la méthode. Il pose alors plusieurs questions aux élèves E11 et E12 pour comprendre comment appliquer le procédé de calcul. La première question posée par l'élève E13 va conduire les élèves E11 et E12 à relever une erreur dans leur définition de la valeur de x.

E13 : Et comment tu sais qu'à chaque fois c'est 1 ou 3 ? [pour la valeur de x].

L'élève E11 répond qu'ils l'ont observé sur des exemples et l'élève E12 pense l'avoir défini autrement mais elle ne s'en souvient plus. Sur un exemple ($n = 9$), l'élève E13 essaie de suivre la méthode pour déterminer une décomposition de $\frac{4}{9}$. Pour déterminer la valeur de x, l'élève E11 lui explique de tester successivement $x = 1$ et $x = 3$:

E11 : $\frac{1}{3} + \frac{1}{27}$ ça fait $\frac{10}{27}$ et $\frac{1}{3} + \frac{3}{27}$ ça fait $\frac{4}{9}$ donc c'est 3.

Notons qu'il n'utilise pas l'expression qu'il avait définie ($x = 4(E(\frac{n}{4})+1)-n$). En feuilletant son cahier de bord, l'élève E12 retrouve leur définition de la valeur de x : si n est congru à 1 modulo 4, alors $x = 1$ et si n est congru à 3 modulo 4, alors $x = 3$. Elle teste cette définition sur $n = 9$. Elle pense qu'elle n'est pas vérifiée car 9 n'est pas premier, donc elle demande aux autres élèves de tester sur $n = 11$.

E12 : Avec 11 normalement ça marche. 11 est congru à 3 modulo 4 donc ça veut dire normalement que tu auras un 3 sur quelque chose. [...] T'as un 1 ? Il y a un souci là, ça devrait pas être un 1, ça devrait être un 3.

E11 : T'es sûre que tu n'as pas inversé ?

[...]

E12 : Oui j'ai inversé parce que là ça fait au moins trois exemples [pour $n = 13, n = 11, n = 17$].

Quelques minutes plus tard, l'élève E12 corrigera la définition de la valeur de x : « je trouve 3 quand n est congru à 1 modulo 4 et 1 quand n est congru à 3 modulo 4 ». Le retour aux exemples pour expliciter le processus de leur méthode a donc permis aux élèves de corriger une erreur commise dans la formulation de leur conjecture. Les autres questions posées par l'élève E13 concernent les procédés de calcul pour décomposer une fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m multiple de 3 et de la forme $\frac{1}{m}$ avec m entier naturel. Les réponses des élèves E11 et E12 montrent qu'ils maîtrisent bien ces procédés de calcul et notamment l'utilisation de l'identité $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$. Ils précisent à l'élève E13 que le cas problématique est la décomposition d'une fraction de la forme $\frac{3}{z}$ avec z congru à 1 ou 5 modulo 6.

Épisode 11 : Étude de la technique de décomposition de l'élève E12 avec multiples et diviseurs.

Pour traiter les deux cas problématiques, l'élève E12 a repris (entre les séances) sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs, étudiée dans l'épisode 6. Elle tente de l'expliquer aux autres élèves.

> E12 : Si tu prends, par exemple si t'as $n = 13$, tu prends le multiple de 4 le plus proche, si le multiple de 4 est trop éloigné enfin, tu prends ou un multiple de 4 ou un multiple de 6 le plus proche, que tu trouves euh non de 4 ou de 12, pardon, et dans ce cas là après tu, non de 8 ou de 12, pas de 4 et 6. Et après tu divises par 2 et ça te donne le nombre par lequel il faut que tu multiplies le haut et le bas. Et après tu peux toujours le décomposer sauf dans un cas, quand n est congru à 1 modulo 24.

Elle illustre ses explications sur deux exemples, $n = 7$ et $n = 11$ qu'elle a déjà faits (cf. annexe C4, p. 78) puis elle construit un exemple en mettant en œuvre sa technique.

> E12 : Par exemple pour 13, 13 tu prends un multiple de 4 qui est juste au-dessus, ça doit être 16. 16 tu le divises par 2, ça te donne 8 donc on prend $k = 8$. Normalement ça, ça devrait marcher. Si tu fais 2×13 c'est-à-dire 26, tu dois trouver 13×8 au dénominateur et au numérateur 4×8, 32. [...] Et quand tu as ça, il faut réussir à faire 32 en fait. Il faut trouver des diviseurs de 13 et de 8 [...] il faut que la somme donne 32. Par exemple 4 et 2 c'est deux diviseurs de 8.

Elle écrit alors la décomposition suivante : $\frac{26+4+2}{13\times 8} = \frac{32}{13\times 8} = \frac{26}{13\times 8} + \frac{4}{13\times 8} + \frac{2}{13\times 8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{13\times 2} + \frac{1}{13\times 4}$.
Comme dans l'épisode 6, l'élève E12 éprouve des difficultés, d'une part à expliciter clairement sa technique autrement qu'en utilisant un exemple générique, et d'autre part à la formuler en utilisant le calcul littéral. Elle pointe également une limite de cette technique : « Le problème c'est que il y a des cas où ça ne marche pas ». L'élève E11 voudrait étudier les cas problématiques en utilisant l'identité $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$, mais l'élève E12 lui explique que ce n'est pas possible et qu'il faut partir sur « un autre truc pour étudier ces cas problématiques ». L'élève E13 propose alors une autre piste de réflexion, utilisant la méthode 2 présentée dans l'analyse *a priori* p. 269.

Épisode 12 : Étude de la méthode 2 pour décomposer $\frac{4}{n}$.
L'élève E13 dit qu'il a trouvé une solution pour décomposer une fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m entier naturel.

> E13 : J'ai trouvé une solution pour, dès que t'as un 3 là. Dès que t'as un 3, tu fais le même que là, tu fais pareil, tu cherche ça, $\frac{3}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, et puis tu fais exactement le même truc, sauf qu'au lieu de 4 là tu mets 3, et moi j'ai trouvé des solutions.

Il propose de réitérer la méthode utilisée pour décomposer $\frac{4}{n}$ en $\frac{1}{y} + \frac{x}{z}$ en posant $y = E(\frac{n}{4}) + 1$. Il cherche donc à décomposer $\frac{3}{n}$ en $\frac{1}{y'} + \frac{x'}{z'}$ en posant $y' = E(\frac{n}{3}) + 1$. Il illustre son explication sur un exemple. Pour $n = 13$, la première décomposition donne $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{3}{52}$. Il a ensuite décomposer $\frac{3}{52}$ en $\frac{1}{18} + \frac{2}{936}$, où $18 = E(\frac{52}{3}) + 1$, puis il la simplifie en $\frac{1}{18} + \frac{1}{468}$. Notons qu'il n'a pas remarqué que, sur cet exemple, la décomposition de $\frac{3}{m}$ pouvait s'obtenir plus rapidement en utilisant l'identité suivante : $\frac{3}{m} = \frac{1}{m} + \frac{2}{m}$, m étant pair. Avec l'élève E12, ils essaient de vérifier cette méthode sur un autre exemple. Ils choisissent $n = 17$. Ils trouvent $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{3}{85}$ puis $\frac{3}{85} = \frac{1}{29} + \frac{2}{2465}$.

> E13 : Je trouve 2 et oui, puis non, ça ne marche pas, c'est pas divisible par 2 ça.
>
> [...]
>
> E12 : Eh mince.
>
> E13 : Pas de chance.

E12 : Ils ne l'avaient pas fait le groupe 3 déjà pour 17, au début ? [Elle cherche dans son cahier de bord.]

[...]

E13 : Et si on refait la même solution, on refait le même truc.

E12 : Oui sauf que là normalement, tu ne peux plus le décomposer en plus, tu as déjà un nombre maximum de fractions.

E13 : Est-ce que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ peut d'écrire $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, on ne sait pas ça, je ne pense pas.

E12 : Là, ça devient compliqué.

Comme le cas $n = 17$ ne vérifie pas la méthode proposée par l'élève E13, les élèves cherchent une autre idée pour étudier les cas problématiques. Comme lors des séances précédentes, le contre-exemple entraîne le rejet de la méthode. Les élèves n'essaient pas d'améliorer leur méthode en déterminant par exemple son domaine de validité. Ils voudraient trouver une méthode de décomposition pour tout z congru à 1 ou 5 modulo 6 et n'envisagent pas de traiter encore des sous-cas.

Épisode 13 : Étude en parallèle de trois pistes de recherche.
A la suite de l'étude infructueuse de la méthode de décomposition en utilisant la méthode 2 pour traiter les cas problématiques, les élèves étudient chacun une piste de recherche différente. Nous avons peu de traces de cet épisode car les élèves n'ont pas beaucoup échangé d'une part, et ils n'ont pas beaucoup écrit ou ils ont effacé d'autre part. Nous présentons ci-dessous ce que nous avons pu recueillir sur ces différentes pistes de recherches suivies.

L'élève E11 a d'abord écrit une synthèse de leurs résultats en les écrivant « au propre » (cf. annexe C3, p. 55). Nous avons relevé qu'il a rencontré des difficultés dans la manipulation des écritures littérales pour écrire certaines identités. Il demande par exemple à l'élève E12 comment décomposer $\frac{3}{6k+2}$ en somme de deux fractions unitaires.

E12 : Ça fait un sur ton truc plus 2 sur ton truc.

E11 : Oui mais moi je veux le faire pour tous.

E12 : Ça fait $\frac{1}{6k+2}$ plus $\frac{2}{6k+2}$ et tu simplifies $\frac{2}{6k+2}$ ça fait $\frac{1}{3k+1}$.

E11 : C'est juste ça que je te demandais.

Pour les cas restants ($z \equiv 1[6]$ et $z \equiv 5[6]$), il pose le problème suivant : comment passer de $\frac{3}{z}$ à $\frac{1}{y}$? Pour étudier ce problème, il voudrait trouver des exemples où $z \equiv 1[6]$ (ou $z \equiv 5[6]$) et chercher s'il y a des relations entre les décompositions. Sur la vidéo, nous le voyons taper sur sa calculatrice, nous faisons l'hypothèse qu'il cherche un nombre premier n qui remplirait la condition $z \equiv 1[6]$ (ou $z \equiv 5[6]$) ou qu'il a trouvé ce nombre premier n et qu'il cherche une décomposition de $\frac{4}{n}$.

L'élève E12 reprend sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs car « ça marchait pour plein de trucs ». Nous faisons l'hypothèse qu'elle essaie de déterminer pour quelles valeurs de n cette technique fonctionnerait. Dans son cahier de bord (cf. annexe C4, p. 80), il semble qu'elle ait étudié le cas où n est congru à -1 modulo 8.

L'élève E13 reprend l'étude de l'équation initiale et isole n. Il obtient donc $\frac{4abc}{ac+bc+ac}$. Il se pose la question suivante : « si je prouve que ça c'est un nombre entier, ça va marcher ou pas ? Est-ce que ça prouve que ça marche pour tout n ? ». Il voudrait essayer d'étudier tous les cas selon la parité de ab, bc et ac. Il demande l'avis des élèves E11 et E12. L'élève E11 lui propose d'essayer déjà sur les exemples qu'ils ont et l'élève E12 est sceptique, elle pense que c'est « une bonne idée mais que c'est difficile ».

Nous pouvons relever que les élèves E11 et E12 continuent leurs recherches en articulant étude d'exemples, formulation de conjectures et tentative de formalisations, alors que l'élève E13 repart sur une recherche dans un cadre général par exploitation d'outils algébriques.

Épisode 14 : Retour sur la technique de décomposition avec multiples et diviseurs de l'élève E12.
L'élève E12 veut à nouveau expliquer sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs aux autres élèves car « ça marche pour plein de trucs ». Elle précise qu'elle ne sait pas comment articuler cette méthode avec leur méthode précédente car les critères sont différents. Elle explique dans un premier temps sa technique à partir de la formulation de sa conjecture (cf. annexe C4 p. 80) :

> E12 : T'as un nombre k, tu trouves toujours $\frac{4k}{nk}$ qui est égal à $\frac{2n}{nk} + \frac{x}{nk} + \frac{y}{nk}$. [...] J'ai trouvé que c'était possible si on prend, si pour k on prend un multiple de 12 ou un multiple de 6 le plus proche possible de n.

Dans un second temps, elle illustre sa technique sur une décomposition déjà trouvée ($n = 11$) puis elle propose de construire une décomposition à partir de cette technique pour $n = 17$.

> E12 : Pour 17, tu prends le multiple de 8 ou le multiple de 12 qui est au-dessus [...] il faut prendre 24. Donc on prend $2k = 24$ et $k = 12$.

En cherchant la valeur de k dans ce cas, elle se rend compte qu'elle a commis une erreur dans la formulation de sa conjecture, ce n'est pas k qui doit être un multiple de 12 ou de 6 mais $2k$. Elle corrige donc cette erreur avant de revenir à la construction de l'exemple.

> E12 : Si on veut $\frac{4}{17}$ c'est égal à $\frac{4\times 12}{17\times 12}$ et il faut qu'on arrive avec des multiples de 12 et de 17 à trouver $\frac{48}{17\times 12}$. Parce que si c'est des multiples, ça va pouvoir se simplifier en 1 sur quelque chose. [...] 2×17 ça fait combien ? 34 donc on a déjà 34 pour arriver à 48 il faut 14 c'est ça.

Elle essaie avec $x = 6$ et $y = 8$, solutions qui ne conviennent pas car 6 et 8 ne sont pas des diviseurs de 12×17. Elle trouve finalement une solution en prenant $x = 2$ et $y = 12$. La décomposition obtenue pour $n = 17$ est la suivante : $\frac{4}{17} = \frac{1}{6} + \frac{1}{17} + \frac{1}{102}$. L'étude de cet exemple lui permet de repérer que $x + y = 4k - 2n$ et qu'elle peut prévoir la valeur de $x + y$.

> E12 : Tu peux prévoir combien tu vas avoir d'écart. Tu peux prévoir le nombre que tu dois trouver ici au total. Entre 17 et 24 il y a combien ? 7 d'écart et tu multiplies par 2, ça te donne 14. Et 12 + 2, 14.

Ces extraits témoignent du caractère expérimental de la démarche de recherche suivie par l'élève E12. La construction de cet exemple s'est réalisée dans un processus dialectique entre manipulation des objets mathématiques en jeu et élaboration d'éléments théoriques rendant compte des propriétés de ces objets. L'élève E12 est consciente que son résultat n'est qu'une conjecture et qu'une des limites est de trouver la « bonne » valeur de k. Les élèves réitèrent la mise en œuvre de la méthode pour trouver une décomposition pour $n = 19$, puis sont interrompus par l'enseignant qui rappelle aux élèves qu'ils doivent rédiger une synthèse de leurs travaux.

Épisode 15 : Rédaction de la synthèse des recherches.
L'élève E12 rédige la synthèse de leurs recherches (cf. annexe C4, p. 82-83). Elle écrit trois éléments :

– la propriété de multiplicativité qui leur permet de réduire l'étude du problème aux nombres premiers ;

– la méthode par élimination de cas qui s'appuie sur l'identité $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$, puis sur deux disjonctions de cas imbriquées (la première selon la congruence de n modulo 4 et la seconde, pour n congru à 1 modulo 4, selon la congruence de z modulo 6) ;
– la technique de décomposition avec multiples et diviseurs.

Parallèlement, les élèves E11 et E13 poursuivent leurs recherches. Sur la décomposition trouvée pour $n = 17$, l'élève E13 a repéré la régularité $c = a \times b$ ($6 \times 17 = 102$) et se demande d'où vient le 6. L'élève E11 a cherché à généraliser cette décomposition et a écrit l'identité suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{E(\frac{n}{4}) + 2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(E(\frac{n}{4}) + 2)}. \tag{9.10}$$

Il teste avec $n = 23$ et s'aperçoit que ce cas ne vérifie pas sa conjecture. Il fait alors l'hypothèse suivante :

> E13 : On n'a peut-être que deux formes d'écriture, soit deux qui sont égaux [c'est-à-dire $a = b$ et $a \neq c$], soit deux dont leur produit fait le troisième [c'est-à-dire $c = a \times b$].

Ils vérifient sur leurs exemples et cela semble se confirmer. Ils cherchent alors à trouver des décompositions vérifiant la condition $c = a \times b$. L'élève E13 essaie « au pif » : il prend deux nombres, les multiplie et regarde si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$ donne une fraction de la forme $\frac{4}{n}$ avec n entier naturel. Il réussit à trouver deux décompositions, pour $n = 16$ et pour $n = 36$. L'élève E11 essaie de déterminer des décompositions d'une autre manière. Comme il a remarqué que a ou b est égal à n, il fixe $a = n$ et choisit une valeur de n. Il cherche alors une valeur de b tel que $\frac{1}{n} + \frac{1}{b} + \frac{1}{nb}$ soit égal à $\frac{4}{n}$. Il essaie avec $n = 19$ et teste successivement plusieurs valeurs de b, sans succès. L'élève E13 lui propose de poser l'équation et de la résoudre (cf. annexe C5, p. 101). Comme il trouve $b = \frac{20}{3}$, les élèves concluent qu'il n'y a pas de solution avec cette condition pour $n = 19$. L'élève E11 essaie alors de déterminer une décomposition pour $n = 19$ avec la méthode d'élimination des cas, il trouve $\frac{1}{5} + \frac{1}{95}$.

> E13 : Donc c'est bon, on tombe sur $\frac{1}{95}$, on peut le diviser par 2. [...] Je suis sûr que ça marche, il faudrait trouver un autre exemple où c'est le même type de problème [...] comme le 17.

Cet exemple lui permet d'affiner sa première hypothèse. Il envisage deux cas de figure :
– Si n est congru à 3 modulo 4 et si n est congru à 1 modulo 4 avec z congru à 0, 2, 3, 4 modulo 6 alors la méthode d'élimination des cas permet de déterminer des solutions à l'équation d'Erdös-Straus et dans ce cas, $a = b$.
– Si n est congru à 1 modulo 4 avec z congru à 1 ou 5 modulo 6, une décomposition de $\frac{4}{n}$ peut-être trouvée grâce à l'identité (9.10) et dans ce cas, $c = a \times b$.

L'élève E11 semble convaincu de la pertinence de cette hypothèse et il continuera de l'étudier à la séance suivante (cf. épisode 18).

Épisode 16 : Bilan de leur recherche et identification des résultats.
Pour préparer le contenu de leurs affiches, les élèves font un bilan de leurs recherches en identifiant les résultats démontrés, ceux restés à l'état de conjectures et les pistes non abouties. L'élève E12 propose de classer les résultats en deux catégories : « quand ça marche tout le temps et quand ça ne marche pas tout le temps ». Dans la première catégorie, les élèves mentionnent deux résultats : la propriété de multiplicativité et la méthode d'élimination de cas (cf. annexe C4, p. 85-86). Le premier résultat est démontré alors que le second reste une conjecture.

> E13 : Et ça [la propriété de multiplicativité] c'est démontré ça ?

E12 : Oui tu multiplies par n, euh par k.

[...]

E11 : Le truc qui nous permet d'avoir beaucoup de résultats avec les nombres premiers, c'est une grosse hypothèse quand même, c'est que ça s'écrit sous cette forme là [$\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$]. Comment démontrer que ça c'est égal à ça ?

Notons que les résultats pour n pair et n multiple de 3 ne sont pas repris. Pour n pair, nous faisons l'hypothèse que les élèves ne le reprennent pas pour deux raisons : d'une part ce cas est évident et résolu rapidement et d'autre part, tous les groupes l'avaient trouvé et présenté lors de la première mise en commun. Ce qu'ils veulent mettre en avant, ce sont leurs avancées sur l'étude des cas problématiques lorsque n est impair. Nous faisons ainsi l'hypothèse qu'ils ne récrivent pas le résultat pour n multiple de 3 car il est traité par les deux résultats mentionnés ci-dessus (propriété de multiplicativité et méthode d'élimination de cas).

L'élève E11 se demande pourquoi la méthode d'élimination des cas se trouve dans la première catégorie, étant donné qu'elle ne marche pas pour certaines valeurs de n (quand n est congru à 1 modulo 4 et z congru à 1 ou 5 modulo 6).

E11 : Et celui-là, ça marche pas non plus, tu le mets dans recherches inabouties aussi ?

E12 : Non parce que celui-ci on sait exactement quand est-ce que ça ne marche pas.

E11 : On a mis des conditions quoi.

E12 : On a réussi à le montrer que là, on avait forcément 1 et forcément 3 [...]. Là on a réussi à le montrer donc ce n'est pas pareil.

Pour l'élève E12 la distinction entre les deux catégories ne se fait pas sur le statut du résultat (s'il est démontré ou à l'état de conjecture), mais sur la détermination des conditions qui assurent l'existence de solutions pour des valeurs de n données. Dans la seconde catégorie, elle mentionne par exemple sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs, car elle sait qu'elle ne donne pas toujours de solutions pour une valeur de n donnée, mais elle n'a pas réussi à déterminer quelles sont ces valeurs. Elle propose également de mettre la méthode proposée par l'élève E13 à l'épisode 12, qui s'appuie sur la méthode 2 décrite dans l'analyse *a priori* (p. 269). Dans son cahier de bord (cf. annexe C4, p. 86), cette méthode est écrite puis barrée. Les échanges entre les élèves révèlent qu'ils s'aperçoivent que cette méthode ne donne pas de solutions supplémentaires à la méthode d'élimination des cas. Ils font l'hypothèse que les deux méthodes permettent de traiter les mêmes classes de nombres.

E12 : Pour 13 ça marchait [la méthode 2] ? [...] Et 13 c'était un cas qui posait problème ou pas ?

[...]

E13 : Par exemple pour 13, le z est congru à [fait des calculs], ça fait 4.

E11 : Donc c'est bon on a la technique, c'est congru à 4 modulo 6.

E12 : Ça veut dire que ça sert à, enfin ça veut pas dire que ça sert à rien, mais si.

[...]

E13 : Et $\frac{3}{52}$ comment tu fais avec votre méthode ?

E12 : Tu fais $\frac{1}{52} + \frac{2}{52}$ et comme 52 c'est divisible par 2, ça va te donner 1 sur je ne sais pas combien.

[...]

E11 : Il est confronté au même problème que nous.

E12 : On retombe sur le même problème [...]. Donc on a deux manières de résoudre, c'est pas mal.

E11 : Et on tombe sur le même résultat, donc au moins ça concorde déjà.

Nous avons montré, dans l'analyse *a priori* (p. 269) que la méthode 2 (avec un critère d'arrêt à trois fractions unitaires) permet de décomposer $\frac{4}{n}$ pour n non congru à 1 et 17 modulo 24. Or leur méthode d'élimination des cas permet également de traiter tous les nombres[25] sauf ceux congru à 1 et 17 modulo 24. Leur hypothèse est donc juste, mais ils ne disposent pas des connaissances nécessaires pour pouvoir la démontrer.

Épisode 17 : Recherche d'une méthode pour étudier les cas où $z \equiv 1[6]$ et $z \equiv 5[6]$.
L'élève E11 propose une nouvelle idée pour décomposer $\frac{3}{z}$ quand z est congru à 1 modulo 6. Il part de la décomposition $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{3}{z}$ avec $z = 6k + 1$. Il écrit $\frac{3}{6k+1}$ en somme de trois fractions unitaires $\frac{1}{6k+1} + \frac{1}{6k+1} + \frac{1}{6k+1}$. Cela donne donc $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{1}{6k+1} + \frac{1}{6k+1} + \frac{1}{6k+1}$. Son idée est alors de trouver une fraction unitaire égale à $\frac{1}{y} + \frac{1}{6k+1}$. Il tente de l'expliquer à l'élève E12 :

E11 : Je pense à un truc, 1+1+1 [...] et tu essaies d'associer l'un de ces 1 sur quelque chose avec le troisième. T'es d'accord que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ peut être égal à $\frac{1}{z}$. [...] Celui là tu le décomposes en $\frac{1}{6k+1} + \frac{1}{6k+1} + \frac{1}{6k+1}$ [...], le troisième qu'on avait avant, tu associes ça, genre lui avec ton $\frac{1}{6k+1}$ [...]. Et c'est pour ça qu'on trouverait des résultats où tu en as deux qui sont égaux, ça veut dire qu'ils viennent de là.

[...]

E11 : C'est une conjecture mais je pense qu'il y a tout le temps une solution. [...] C'est qu'une hypothèse, je n'ai pas fait les calculs mais ça paraît plausible.

L'élève E12 est sceptique et lui propose de faire un essai pour un nombre qui pose problème. L'élève E13 propose $n = 17$. L'élève E11 écrit $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{3}{85} = \frac{1}{5} + \frac{1}{85} + \frac{2}{85}$ puis calcule $\frac{1}{5} + \frac{1}{85}$.

E11 : Ca donne $\frac{18}{85}$ donc ça ne marche pas.

La poursuite de cette piste de recherche est interrompue par la distribution des affiches par l'enseignant. Elle ne sera pas reprise par la suite.

Deuxième phase de recherche : rédaction des affiches et des preuves.
Cette phase du travail s'est déroulée lors de la séance 5. Nous l'analysons dans l'épisode 18 ci-dessous.

Épisode 18 : Rédaction des affiches et des preuves de leurs résultats.
Les élèves se partagent la rédaction des affiches, chacun en écrit une partie à partir des notes écrites par l'élève E12 à l'épisode précédent (cf. annexe C4, p. 85-86, et annexe C1). Puis pendant que l'élève E12 écrit les démonstrations de leurs résultats sur une feuille distincte, les élèves E11 et E13 poursuivent les recherches sur le problème.

L'élève E12 rédige les preuves de leurs résultats (cf. annexe C2) à partir de la synthèse écrite à la séance précédente (cf. annexe C4, p. 82-83). Elle démontre la propriété de multiplicativité de la même manière qu'elle l'avait présentée lors de la première mise en commun.

25. Dans cette méthode, les cas problématiques sont les cas n congru à 1 modulo 4, c'est-à-dire pour n congru à 1, 5, 13, 17 modulo 24.
- si $n \equiv 1[24]$ alors $z \equiv 1[6]$. La méthode d'élimination des cas ne donne pas de solution.
- si $n \equiv 5[24]$ alors $z \equiv 2[6]$. La méthode d'élimination des cas donne une solution.
- si $n \equiv 13[24]$ alors $z \equiv 4[6]$. La méthode d'élimination des cas donne une solution.
- si $n \equiv 17[24]$ alors $z \equiv 5[6]$. La méthode d'élimination des cas ne donne pas de solution.

En ce qui concerne la méthode d'élimination des cas, elle indique qu'ils ont conjecturé, à l'aide des essais la valeur de x en fonction de la congruence de n modulo 4. La preuve la plus simple pour démontrer ce résultat est d'écrire l'entier n modulo 4 en revenant à la définition d'une congruence (par exemple $n = 4k+1$, k entier naturel), puis de constater que $E(\frac{n}{4}) = k$ quand n est congru à 1, 2 ou 3 modulo 4. Il est alors facile de démontrer que la valeur de x (qui est égale à $4 \times (E(\frac{n}{4})+1) - n$) vaut 1 si n est congru à 3 modulo 4 et 3 si n est congru à 1 modulo 4. Nous faisons l'hypothèse que c'est l'expression de y sous forme d'une partie entière qui constitue un obstacle pour effectuer cette démonstration. Ils ne voient pas comment l'exprimer autrement. Le passage de la représentation d'un entier à l'aide d'une écriture modulaire à celle issue de la divisibilité ne semble pas constituer de difficulté pour eux. En effet, pour démontrer les différentes identités obtenues dans leur méthode d'élimination des cas, ils utilisent cette notation. Comme nous l'avons déjà souligné, il semble qu'ils aient utilisé cette notation, d'une part pour faciliter leurs calculs, et d'autre part pour mettre en évidence la nature des fractions dans les décompositions. Les élèves identifient le statut de leurs résultats (démontrés ou conjecturés) et sont conscients qu'ils n'ont pas beaucoup de démonstrations. Cependant, ils ne cherchent pas à élaborer davantage de preuves, ils préfèrent continuer à étudier le problème pour leurs cas problématiques.

L'élève E11 reprend ses recherches débutées à l'épisode 15 sur les différentes formes d'écriture. Il aimerait demander au groupe 3 leurs exemples, afin de les étudier pour observer si effectivement il n'y a que deux formes d'écriture : soit $a = b$ et $a \neq c$, soit $c = a \times b$. Il demande à l'élève E12 ce qu'elle en pense.

> E11 : Tiens regarde.
>
> E12 : Oui mais en fait maintenant il faudrait qu'on détermine quand est ce qu'on a ça. C'est ça le problème.

Pour la première forme (quand $a = b$), à partir de la méthode d'élimination des cas et de la technique de décomposition avec multiples et diviseurs, les élèves déterminent deux conditions : $n \equiv 0[2]$ et $n \equiv -1[12]$. Pour la seconde forme (quand $c = a \times b$), l'élève E11 revient aux exemples $n = 5$ et $n = 17$ qui vérifient cette condition, afin de trouver une relation de congruence entre eux. L'élève E13 trouve qu'ils sont tous les deux congrus à 2 modulo 3.

> E11 : Il faut qu'on essaye un autre nombre congru à 2 modulo 3.
>
> E13 : Pourquoi tu fais ça ?
>
> E11 : Pour voir si, forcément si n est congru à 1 modulo 3 et n premier, on retrouve tout le temps cette forme-là. Je regarde les conditions des formes particulières d'écriture, j'essaie de définir quand est-ce que ça marche.

Il cherche une décomposition de cette forme pour $n = 23$. Il tombe sur une décomposition pour $n = 69$.

> E11 : J'ai une solution pour $\frac{4}{69}$, ça n'a rien à voir.
>
> E13 : Mais 69 ce n'est pas un nombre premier.
>
> E11 : Oui je sais, mais ça me permet quand même de trouver [...] Je m'en fous moi ce que je veux c'est le rapport entre les nombres pour que ça te donne cette forme-là. Donc je trouve 5, 17, 69 sous la même forme, avec $c = a \times b$. Quel rapport entre 5, 17 et 69 ? 69 il est congru à combien modulo 3 ? 69 c'est congru à 0 modulo 3 donc ce n'est pas bon, ce n'est pas ça.

L'élève E11 écarte la condition n premier pour déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lequel il existe une décomposition où $c = a \times b$. Il met alors de côté la congruence modulo 3 et examine la congruence modulo 4.

E11 : Ça marcherait pour tous ceux qui sont congrus à 1 modulo 4. Je rétrécis, je rétrécis de plus en plus. Au début je suis parti de 2 modulo 3, j'ai rétréci à 1 modulo 4, à chaque fois j'étoffe mon nombre de solutions que j'ai, ça permet d'affiner quand même le modulo qu'il faut.

E12 : Ce n'est sûrement pas le cas de tous.

E11 : Non c'est pour ça qu'il faut que je continue [...] ça serait une des conditions ça t'enlève quand même pas mal de cas.

L'élève pense avoir éliminé des cas en passant de la congruence modulo 3 à la congruence modulo 4 car nous faisons l'hypothèse qu'il n'a pas repéré (ou il a oublié) que son étude se situe dans le cas où n est congru à 1 modulo 4. Au départ il est donc parti de n congru à 1 modulo 4 et n congru à 2 modulo 3. En ôtant la condition n congru à 2 modulo 3, il ne réduit donc pas le nombre de cas, il l'augmente. Il continue de chercher à définir des conditions d'existence de cette forme d'écriture mais comme il étudie des décompositions pour n pair, n impair et n premier, il ne parvient pas à trouver. Sur l'affiche, il note « les conditions restent à définir ». Notons que ces recherches s'inscrivent dans la continuité de ses recherches individuelles, où il a étudié successivement les cas où a, b, c sont tous égaux, égaux deux à deux et distincts deux à deux, afin de déterminer des conditions sur ces solutions.

De son côté, l'élève E13 poursuit ses recherches dans un cadre géométrique. Il cherche à modéliser le problème avec des intégrales et un calcul d'aire sous une courbe.

E13 : Je fais des calculs de primitives. La primitive de ça, c'est $\frac{\ln(6k+1)}{2}$ mais qu'est-ce qu'on en fait ?

[...]

E13 : A quoi ça peut être utile de calculer l'aire sous la courbe ?

Comme il n'explique pas ce qu'il fait aux autres élèves, nous n'avons pas d'éléments pour comprendre ce qu'il a essayé de faire.

A la fin de la séance, l'élève E12 vérifie qu'avec sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs, elle réussit à décomposer tous les nombres premiers jusqu'à 73. Elle effectue les calculs pour $n = 23, 29, 31, 37, 41$ (cf. annexe C4, p. 84). Elle semble toujours confrontée à la même difficulté pour l'exprimer dans un cadre général.

E11 : Tu sais l'exprimer sous forme d'une formule ?

E12 : Pas trop, c'est super pénible car à chaque fois tu prends la moitié du multiple d'après [...] c'est un peu la galère, et après tu regardes à combien il est. Par exemple, je ne sais pas pour 41, tu prends le multiple d'après c'est 48. Tu vois que entre 41 et 48 il y a 7, ça veut dire qu'il va falloir que dans le nombre 48, il y ait deux diviseurs de 48 qui ajoutés fasse 2 fois 7, autrement dit 14 et pour le premier nombre et le numérateur, tu mets $2n$.

L'élève E12 recourt à un exemple générique, afin de décrire le procédé de sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs. Notons enfin qu'elle a repéré une similitude entre cette technique et la méthode d'élimination des cas et qu'elle souhaiterait l'étudier.

E12 : Ça veut dire que la moitié du multiple de 8 ou de 12 supérieur, ça correspond à la partie entière ? [...] Et après on va se pencher sur ce truc car ça devient très intéressant.

Au cours de cette séance, l'élève n'a pas eu le temps de comparer les deux méthodes. Cette piste de recherche ne sera donc pas étudiée.

Troisième phase de recherche : préparation de la mise en commun.

La préparation de la mise en commun et du débat en classe entière s'est déroulée au début de la séance 6. Nous l'analysons dans l'épisode 19 ci-dessous.

Épisode 19 : Préparation de la mise en commun et du débat.
Pour préparer la présentation de leurs travaux aux autres groupes, les élèves se partagent les différents éléments à exposer. Ils choisissent les résultats qu'ils veulent expliquer en fonction de leur implication dans leur élaboration. L'élève E13 va présenter les deux premiers éléments de l'affiche 1, à savoir la propriété de multiplicativité et le début de la méthode d'élimination des cas (cf. affiche 1, annexe C1). Comme il n'a pas autant participé à l'élaboration de ces résultats que les deux autres élèves, il leur demande quelques conseils pour prévoir son discours. Il note par exemple la démonstration de la propriété de multiplicativité sur son cahier de bord (cf. annexe C5, p. 106). L'élève E11 explicitera la suite de la méthode d'élimination des cas en présentant les différents cas en fonction de la congruence de z modulo 6. Il exposera également sa conjecture sur l'existence de formes particulières d'écritures. Enfin, l'élève E12 expliquera sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs. Elle prépare quelques exemples pour pouvoir l'illustrer. Si les élèves décident de se partager la présentation de leurs résultats, ils s'autorisent néanmoins à intervenir à tout moment pour ajouter un point qu'ils jugent important à présenter.

Conclusion de la seconde partie des recherches du groupe 1.
A partir de l'identification de la propriété de multiplicativité, les élèves ont réduit l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus de n entier naturel à n premier. Le principal résultat construit par les élèves lors des séances 3 et 4 est une méthode d'élimination de cas pour étudier la conjecture pour des valeurs de n premier. Le schéma présenté aux pages suivantes résume les quatre étapes qui ont jalonné la construction de la méthode. Pour chaque étape, nous mentionnons les différents éléments qui sont à l'origine des raisonnements mis en œuvre et qui conduisent à la formulation de conjectures ou à l'écriture d'identités. Ce schéma permet de mettre en évidence la nature expérimentale de leur démarche de recherche, qui s'appuie à la fois sur l'étude d'exemples et sur des manipulations d'identités algébriques.

Méthode d'élimination de cas – Groupe 1

Première étape : déterminer la valeur de la première fraction unitaire $1/y$.

Idée du groupe 3
La valeur de y est le plus petit entier tel que $1/y$ soit la fraction inférieure la plus proche de $4/n$.

Valeur proposée par le groupe 2 :
$y = E\left(\frac{n}{4}\right)$

Étude d'un exemple
$n = 457$.

$$y = E\left(\frac{n}{4}\right) + 1$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{E\left(\frac{n}{4}\right) + 1} + \frac{x}{n\left(E\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right)}$$

Deuxième étape : déterminer la valeur de x.

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{E\left(\frac{n}{4}\right) + 1} + \frac{x}{n\left(E\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right)}$$

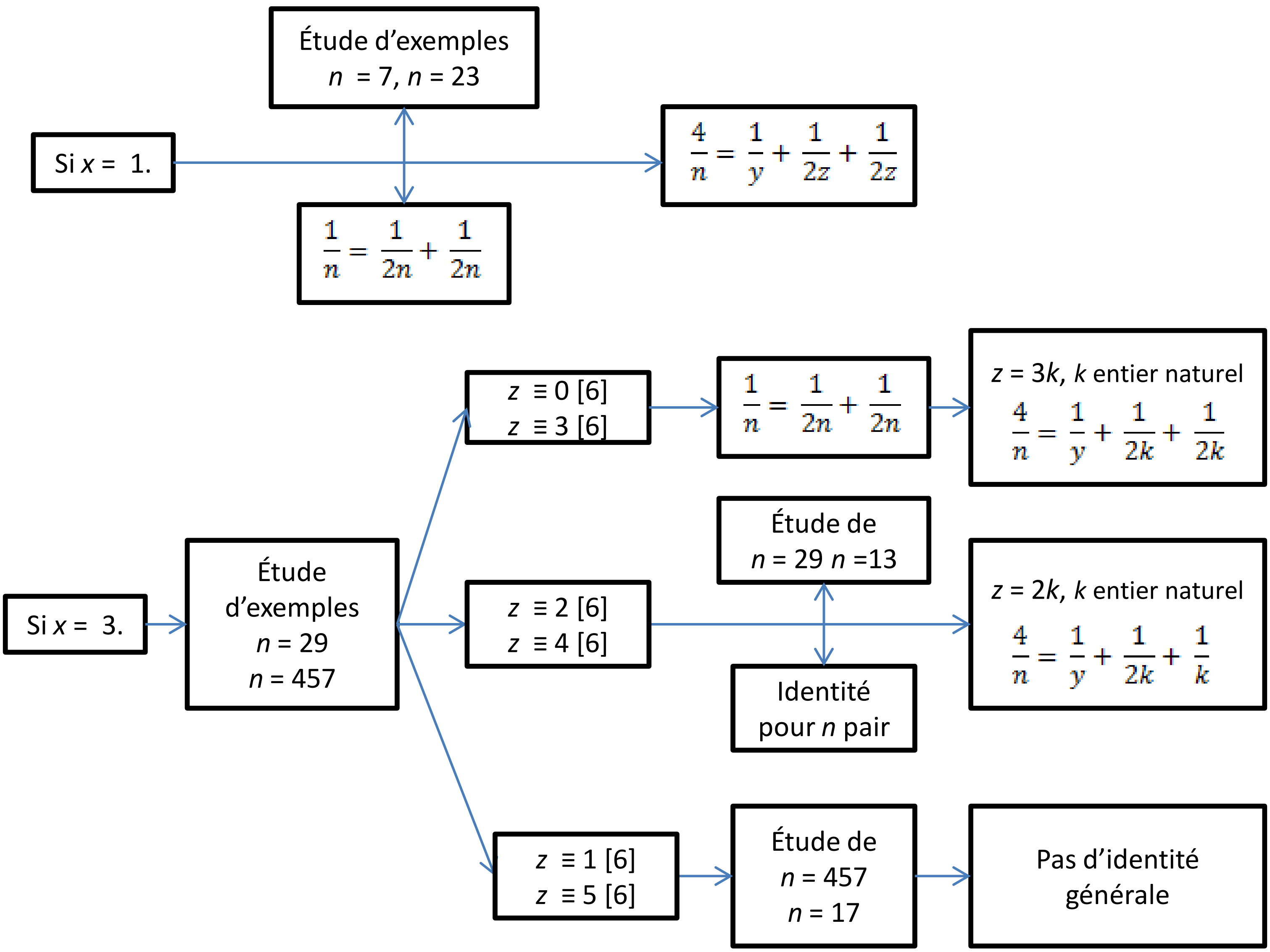
Étude d'exemples
$n = 29$, $n = 457$
Construction d'exemples
$n = 461$, $n = 4513$
$x = 1$ ou $x = 3$

Calcul de la valeur de x grâce à l'expression :
$\frac{n+x}{4} = E\left(\frac{n}{4}\right) + 1$

$x = 1$ si $n \equiv 3$ [4]
$x = 3$ si $n \equiv 1$ [4]

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{E\left(\frac{n}{4}\right) + 1} + \frac{x}{z}$$, avec $x = 1$ si $n \equiv 3$ [4] et $x = 3$ si $n \equiv 1$ [4]

Troisième étape : décomposer x/z en somme de deux fractions unitaires.



Quatrième étape : étudier les cas où $z \equiv 1[6]$ et $z \equiv 5[6]$.

Étude de plusieurs méthodes :

- **Technique de décomposition avec multiples et diviseurs** ;
- Méthode par itération (méthode 2) ;
- Différentes formes d'écritures ;
- Représentations géométriques.

Tous les nombres premiers inférieurs à 100 sont décomposés avec la méthode d'élimination des cas et la technique de décomposition avec multiples et diviseurs.

Cette méthode porte uniquement sur l'étude des nombres premiers. Elle se situe sous la dimension organisatrice du jeu d'extension/réduction. La sous-dimension organisatrice privilégiée par les élèves pour construire cette méthode est la limitation du nombre de cas à étudier par l'élimination de cas. Pour cela, ils effectuent deux disjonctions de cas lors de la troisième étape de la méthode, selon la congruence de n modulo 4 puis selon la congruence de z modulo 6. Le choix de ces cas a été induit par l'étude de quelques décompositions pour des valeurs de n données, articulée avec la tentative de déterminer des identités générales prouvant l'existence de décompositions. Les élèves ont mis en œuvre des procédures de type exploratoire par recherche de régularités et recherche de méthodes de décomposition pour des valeurs de n données. Leurs recherches se sont appuyées sur quelques exemples qu'ils ont considérés comme représentatifs d'une classe de nombres, c'est-à-dire en tant qu'exemples génériques (au sens de Balacheff). Les élèves choisissent comme exemple générique celui qui leur a permis d'écrire l'identité générale pour la classe de nombre étudiée. Par exemple, le cas $n = 23$ est pris comme représentant du cas $x = 1$ et le cas $n = 29$ comme représentant du cas $x = 3$ et z pair. L'exemple joue ainsi plusieurs rôles dans l'élaboration de la méthode :

- il constitue une aide à l'identification des différents cas à traiter ;
- il participe à la formulation des identités pour une classe de nombres ;
- il constitue un moyen de vérifier ces identités ;
- il est parfois utilisé comme outil de validation.

Les élèves ont effectivement eu recours à l'exemple comme outil de validation lorsqu'ils n'ont pas réussi à valider leurs résultats grâce au calcul littéral. Par exemple lors de la seconde étape de leur méthode, ils n'ont pas réussi à prouver le résultat sur la valeur de x en fonction de la congruence de n modulo 4. Ce résultat a été élaboré, vérifié puis validé grâce à l'étude de quelques exemples car ils n'ont pas réussi à mobiliser les outils algébriques pour le prouver. Comme nous l'avons signalé plus haut, nous faisons l'hypothèse que cette difficulté est liée à leur maîtrise non naturalisée de la notion de partie entière. Pour écrire et démontrer les différentes identités (pour $x = 1$, pour $x = 3$ et z multiple de 3 et pour $x = 3$ et z pair), les élèves ont privilégié la dimension opératoire de la représentation des entiers à l'aide de la divisibilité (sans les congruences). Le passage de la représentation d'un entier avec l'écriture modulaire à la représentation en revenant à sa définition n'est pas une difficulté pour les élèves. Cependant, nous faisons l'hypothèse qu'ils maîtrisent davantage la seconde notation et que pour cette raison, ils l'utilisent pour formuler et prouver les identités.

Dans la quatrième étape de leur méthode d'élimination de cas, les élèves ont étudié différentes pistes de recherche pour examiner les cas problématiques. Celle qui se révèle la plus efficace est la technique de décomposition avec multiples et diviseurs élaborée par l'élève E12 à partir de la construction d'exemples. Comme elle ne parvient pas à déterminer pour quelles valeurs de n cette technique permet de déterminer une décomposition de $\frac{4}{n}$, elle éprouve des difficultés à la formaliser et à l'expliciter. Pour cela, elle a besoin de recourir à une description des procédés de calculs à l'aide d'un ou plusieurs exemples génériques. La méthode d'élimination des cas et cette technique a permis aux élèves de trouver une solution à l'équation d'Erdös-Straus pour tout n premier inférieur à 100.

Lors de la phase de rédaction des affiches et des preuves, les élèves ont identifié plusieurs résultats qu'ils ont classés en deux catégories : ceux dont ils ont réussi à déterminer pour quelles valeurs de n ils étaient valables et ceux dont cette condition reste à déterminer. La première catégorie contient deux résultats, la propriété de multiplicativité et la méthode d'élimination des cas et la seconde catégorie contient la technique de décomposition avec multiples et diviseurs et la piste des différentes formes d'écriture. Les élèves sont conscients qu'ils n'ont démontré que la propriété de multiplicativité et les identités dans la méthode d'élimination des cas. Cependant lors de la rédaction des preuves, ils ne cherchent pas à en élaborer d'autres. Nous avançons deux raisons pour l'expliquer : d'une part ils ne semblent pas savoir comment aborder cette étape de l'élaboration de preuves pour certains résultats (pour prouver la valeur de x en fonction de la congruence modulo n ou pour la technique de décompositions avec multiples et diviseurs) et d'autre part ils semblent préférer étudier les cas problématiques. Nous faisons l'hypothèse qu'à ce moment des recherches, les élèves ont oublié le statut épistémique du problème, comme en témoigne cette citation de l'élève E11 :

> E11 : C'est pas démontré mais je suis sûr que c'est vrai pour tous les nombres premiers.

Comme ils ne doutent pas de l'existence de solutions pour ces cas problématiques, ils font l'hypothèse qu'ils peuvent réussir à les résoudre. Ainsi, même si la nécessité de la preuve est reconnue par le groupe, l'étape d'élaboration des preuves reste peu abordée et semble constituer une étape difficile pour les élèves. Cela fait écho aux recherches menées par Grenier et Tanguay (2008) sur les relations entre activités de définition, construction et preuve en géométrie.

B. Itinéraire de recherche du groupe 2 - Seconde partie.

Nous analysons ci-dessous les trois phases de recherche qui constituent la seconde partie de l'itinéraire de recherche du groupe 2.

Première phase de recherche : les secondes recherches collectives par groupes.

Les secondes recherches collectives par groupes se sont déroulées lors des séances 3 et 4. Nous avons découpé cette phase de recherche en 8 épisodes (numérotés de 14 à 21) que nous analysons successivement ci-dessous. L'épisode 14 s'est déroulé lors de la séance 3 et les épisodes 15 à 21 lors de la séance 4.

Épisode 14 : Reprise de l'étude de la piste arithmétique utilisant le théorème de Gauss évoquée dans l'épisode 2.

Les élèves débutent leur recherche collective par la reprise des synthèses des séances précédentes et sur les notes prises lors de la mise en commun. L'élève E21 évoque la propriété multiplicative présentée par le groupe 1 :

> E21 : Ça, ça sert à quoi déjà ?
>
> E24 : C'est pour les nombres premiers non ?
>
> E21 : C'est vrai pour tous les nombres premiers ?
>
> E23 : Non, dès que tu trouves pour un nombre premier, ça marche pour tous ses multiples, du coup il faut faire pour tous les premiers.
>
> E22 : Bien sûr oui.
>
> E21 : Ok, finalement, ce n'est pas intéressant.

L'élève E21 revient alors sur les travaux du groupe 3 :

> E21 : Moi je trouve que c'est bien, effectivement il y a peut être des choses qui se répètent mais le problème, c'est que trouver quelque chose qui se répète ça ne va pas forcément être évident.

Les élèves décident de ne pas utiliser les travaux des autres groupes car leur méthode est liée à l'infinité des nombres premiers et ne correspond pas à leur visée de la recherche. L'élève E22 propose alors d'exploiter l'équation $4(abc) = n(ab + ac + bc)$ avec le théorème de Gauss. Ils débutent une étude de cette équation que nous détaillons ci-dessous.

Première étape : détermination de quatre cas à étudier par disjonction de cas.

La première étape de leur raisonnement est la suivante : si n est premier avec 4, d'après le théorème de Gauss, 4 divise $ab+bc+ac$ et n divise abc. L'élève E22 propose de chercher toutes les valeurs possibles de a, b et c pour avoir $ab+bc+ac$ congru à 0 modulo 4. Il pense qu'il n'y a pas beaucoup de cas à étudier. L'élève E21 précise en plus qu'il y a des symétries entre a, b et c. Ils identifient 4 cas :

Cas 1 : $ab+bc+ac \equiv 1+3+0[4]$
Cas 2 : $ab+bc+ac \equiv 2+2+0[4]$
Cas 3 : $ab+bc+ac \equiv 0+0+0[4]$
Cas 4 : $ab+bc+ac \equiv 1+1+2[4]$

Seconde étape : étude des cas 1, 2 et 3.

L'élève E23 étudie les quatre cas et en élimine trois :

> E23 : Si ab ou ac ou bc est congru à 0 modulo 4, alors nécessairement abc est congru à 0 modulo 4. Il reste donc un seul cas : $1, 1, 2$. [c'est-à-dire le cas 4 : $ab+bc+ac \equiv 1+1+2[4]$].

Troisième : Étude du quatrième cas.

L'étude du cas 4, revient à étudier les possibilités d'avoir $ab \equiv 1[4], bc \equiv 1[4]$ et $ac \equiv 2[4]$. L'élève E23 pense qu'il n'y a qu'une manière d'avoir $ab = 1[4]$ ($a = b = 1$) mais l'élève E21 rappelle qu'ils travaillent modulo 4 et qu'il y a sûrement d'autres solutions. Il trouve par exemple $a = b = 3$. L'élève E22 a alors une « illumination » :

> E22 : On peut déduire que $abc \equiv c[4]$ ou $abc \equiv a[4]$ ou $abc \equiv 2b[4]$ donc $a \equiv c \equiv 2b[4]$ avec $ab \equiv 1[4]$, $bc \equiv 1[4]$ et $ac \equiv 2[4]$.

Parallèlement, l'élève E23 fait un tableau de congruences pour étudier toutes les valeurs possibles de a et b telles que $ab \equiv 1[4]$.

Les élèves étudient donc l'équation à l'aide d'un raisonnement par disjonction de cas (dimension organisatrice) sur quatre relations de congruences. Les dimensions opératoires mises en œuvre reposent sur des manipulations de relations de congruences (multiplication de congruences, tableaux de congruences, systèmes de congruences). Même s'ils semblent conscients que l'étude qu'ils veulent mener est réduite à un nombre fini de cas, les élèves ne veulent pas s'engager dans cette piste de recherche tant qu'ils n'en perçoivent pas l'intérêt pour l'étude du problème initial. Ils prennent régulièrement une certaine distance sur leurs recherches afin de les recentrer sur l'étude du problème initial, comme l'illustrent les deux extraits suivants.

Extrait 1

Avant de se lancer dans l'étude des différents cas, l'élève E21 se demande ce qu'ils veulent faire et ce que cela va leur apporter pour l'étude du problème initial.

> E21 : Pour tout n, est-ce qu'on peut le décomposer sous une des formes où $ab+bc+ac \equiv 0[4]$? Mais on ne saura jamais à quelle forme ça correspond.
>
> E22 : On ne veut pas trouver comment le décomposer, on veut juste prouver qu'on peut le décomposer. La façon, on s'en fiche.
>
> [...]
>
> E21 : Ok mais comment si on trouve que n peut se décomposer en une des ces quatre formules-là, comment on peut revenir à l'équation de départ, sachant qu'on

a des congruences ? Les congruences c'est vachement compliqué. [...] Est-ce qu'on prouve notre problème ?

L'élève E21 ne voit pas comment il peut se servir des relations de congruences qu'ils ont écrites pour l'étude du problème initial. Il ne sait pas non plus si leurs relations sont conjecturées ou démontrées. L'élève E23 est également sceptique car il pense que « raisonner par modulo » revient à raisonner sur les nombres premiers « donc c'est infini ». L'élève E22 précise que ça n'a rien à voir « car ici ce sont des modulo n ». Il pense qu'il y a un truc intéressant à creuser.

Extrait 2
Après l'élimination des cas 1, 2 et 3 et l'étude du cas 4, l'élève E21 revient sur l'utilité de cette piste de recherche pour l'étude du problème initial : « Pourquoi on fait ça ? ». L'élève E22 pense que ce serait « fantastique » s'ils arrivaient à trouver que $abc \equiv 0[4]$ dans les quatre cas. Mais les élèves se posent la question de ce qu'ils vont en déduire :

E21 : Admettons qu'on arrive à le prouver, on prouverait que abc est divisible par 4 et je ne vois pas forcément

[...]

E22 : Qu'est ce qu'on en déduit ?

E21 : Pourquoi est-ce qu'on travaille là-dessus ? A quoi ça va nous servir ?

[...]

E21 : Je sais à quoi ça va nous servir, si on prouve que $ab + bc + ac \equiv 0[4]$ et $abc \equiv 0[4]$ ça pourra peut-être vachement nous aider dans la recherche d'une formule générale qui marche pour tout [...] Vu qu'on cherche une formule qui marche tout le temps, si on a des informations sur ce que doit être a, ce que doit être b, ce que doit forcément être c, on avancera peut être dans la formule générale qu'on veut trouver.

Les élèves E22 et E23 pensent que le dernier cas à traiter est faisable, grâce au tableau de congruences de l'élève E23 et à la relation de congruences de l'élève E22 ($a \equiv c \equiv 2b[4]$). Ils semblent avoir convaincu l'élève E21 de l'utilité de cette étude puisque celui-ci pense « qu'il faut repartir sur cette piste pour la prochaine fois ». Cependant il ne croit pas que abc puisse toujours être congru à 0 modulo 4. Il mentionne un contre-exemple : $ab+bc+ac = 12$, $abc = 3$ et dans ce cas 4 ne divise pas abc. Il ne remarque pas qu'il n'existe pas de valeurs de a, b et c entières qui vérifient ces deux équations. L'élève E22 répond :

E22 : On ne cherche pas à prouver qu'on a toujours abc congru à 0 modulo 4, on cherche une vue d'ensemble pour tous les cas et dans pas mal de cas, on sait déjà que c'est vrai.

Remarquons enfin que cette séance confirme que les élèves ont abandonné la recherche de décompositions effectives. Ils sont satisfaits d'avoir trouvé une piste de recherche plus générale et en accord avec leur visée. Ils ont ainsi l'impression d'avoir bien avancé contrairement à la séance précédente où ils ont étudié le problème modulo 30.

E22 : Là on fait des choses quand même.

E21 : On a beaucoup plus avancé que la dernière fois, la dernière fois on avait fait des hypothèses marrantes (rires).

Épisode 15 : Poursuite de l'étude de la piste de recherche débutée lors de la séance précédente.
Les élèves débutent la séance en reprenant la synthèse de la séance précédente. Ils décident

de continuer l'étude des quatre cas où $ab+bc+ac \equiv 0[4]$. Les trois premiers cas étant traités, c'est-à-dire qu'ils ont montré que dans ces trois cas là, $abc \equiv 0[4]$, ils étudient en détail le cas 4, $ab+bc+ac \equiv 1+2+1[4]$. L'élève E22 rappelle qu'il avait établi la relation de congruence suivante : $a \equiv c \equiv 2b[4]$. A partir des tableaux de congruences de l'élève E23, ils déterminent toutes les valeurs possibles de a, b, c satisfaisant le cas 4 :

> $ab \equiv 1[4] \iff (a \equiv b \equiv 1[4])$ ou $(a \equiv b \equiv 3[4])$.
> $bc \equiv 2[4] \iff (b \equiv 2[4]$ et $c \equiv 1[4])$ ou $(b \equiv 1[4]$ et $c \equiv 2[4])$ ou $(b \equiv 3[4]$ et $c \equiv 2[4])$ ou $(b \equiv 2[4]$ et $c \equiv 3[4])$.

Avec la condition $c \equiv 2b[4]$, ils éliminent deux cas parmi les quatre cités ci-dessus. Il reste $b \equiv 1[4]$ et $c \equiv 2[4]$ et $b \equiv 3[4]$ et $c \equiv 2[4]$. Avec la condition $a \equiv c[4]$, l'élève E22 montre qu'il y a une contradiction :

> E22 : On a prouvé que $c \equiv 2[4]$ mais aussi que c ne peut pas être congru à 2.

Il se demande alors si « la conjecture qu'on a faite [à savoir $ab+bc+ac \equiv 1+2+1[4]$] est bonne car je ne trouve pas de cas qui convient ». Il décide de réécrire au propre ce qu'ils ont fait (cf. annexe D5, p. 139). Les élèves refont le raisonnement et montrent en fait que ce cas est impossible. Ils concluent que $ab+bc+ac \equiv 0[4]$ implique $abc \equiv 0[4]$ (sous la condition n premier avec 4).

L'élève E22 veut alors vérifier ce résultat avec un exemple :

> E22 : La partie la plus terrible, c'est l'expérience. On a trouvé des triplets (a, b, c), voyons voir s'ils sont toujours congrus à 0 modulo 4.

Ils cherchent dans leur cahier de bord les exemples qu'ils avaient trouvés. Pour $n = 8$, ils ont le triplet $(6, 6, 6)$.

> E21 : $6 \times 6 \times 6$ déjà.
> E22 : C'est bon
> E21 : Ça marche ? (Il prend sa calculatrice).
> E22 : Il suffit de regarder s'il y a deux nombres pairs.

Pour $n = 4$, ils ont le triplet $(3, 3, 3)$ et $3 \times 3 \times 3 = 27$ n'est pas congru à 0 modulo 4. Les élèves sont déçus par ce contre-exemple et cherchent une erreur dans leur raisonnement. C'est l'élève E23 qui la trouve :

> E23 : On ne traite pas les cas où n est pair, on l'a déjà fait au tout début avec les congruences.
> E22 : Ah oui parce que, oui bien sûr, $(3, 3, 3)$ c'est pour quel n ?
> E21 : 4
> E22 : C'est bon, on a fait la supposition que n est premier avec 4.

Ils se rendent compte qu'ils ont choisi un exemple qui ne remplit pas les conditions de leur résultat théorique. Ils vérifient alors avec les exemples présentés par le groupe 3 lors de leur présentation : $\frac{4}{257}$, $\frac{4}{29}$ et $\frac{4}{23}$.

Épisode 16 : Formulation de deux conséquences du résultat trouvé à l'épisode 15.

Le résultat élaboré au cours de l'épisode 15 est le suivant : si n est premier avec 4 alors $ab+bc+ac$ et abc sont congrus à 0 modulo 4. L'élève E22 évoque alors un problème :

> E22 : Je cherche quelque chose d'absurde et j'ai l'impression d'avoir un truc absurde. [...] n divise $4abc$ et n est premier avec 4 donc (avec le théorème de Gauss), n divise abc. Sauf que abc est un multiple de 4. n divise un multiple de 4 alors qu'il est premier avec 4.

Il pense que n divise un multiple de 4 et n est premier avec 4 est une contradiction. Mais l'élève E21 explique, avec un exemple, que « ça peut marcher : 12 est un multiple de 4 et divisible par 3 ». L'élève E22 comprend son erreur et conclut que abc est divisible par 4 et ajoute qu'il ne peut pas être une puissance de 4 :

> E22 : n divise abc. Si abc a dans sa décomposition en facteurs premiers que des 4 alors n forcément divise 4 alors qu'il est premier avec 4, c'est absurde.

En revenant à l'équation $4abc = n(ab+bc+ac)$, l'élève E21 démontre une seconde conséquence du premier résultat, à savoir $ab + bc + ac$ est divisible par 16 :

> E21 : abc est divisible par 4 donc $4abc$ est divisible par 16. Comme n est premier avec 4, $ab + ac + bc$ est divisible par 16.
>
> E22 : Oui n premier avec 4 entraîne n premier avec 16 forcément.

Il vérifie ce résultat avec des exemples et l'élève E22 rédige au propre les résultats obtenus :

Si n est premier avec 4 alors

$$\begin{cases} abc \equiv 0[4] \\ n \mid abc \\ abc \ \text{ n'est pas une puissance de } \ 4 \\ 16 \mid ab + bc + ac. \end{cases} \tag{9.11}$$

L'élève E21 se demande à quoi servent ces résultats et comment ils vont revenir au problème initial qui était $\frac{4}{n} = \frac{ab+bc+ac}{abc}$.

Cet épisode met en évidence la construction de connaissances sur le problème au cours de la recherche. Pour cela, les élèves mobilisent leurs connaissances en arithmétique : divisibilité, théorème des nombres premiers, théorème de Gauss. Notons qu'ils n'expriment pas toujours la divisibilité à l'aide des congruences. Dans la rédaction de leurs résultats (ci-dessus), deux relations sont exprimées avec le symbole | et une troisième est écrite avec les congruences. Il semble que ces écritures proviennent de la manière dont les relations ont été trouvées ou exploitées. En effet $abc \equiv 0[4]$ a été trouvée par un raisonnement par disjonction de cas et les cas à étudier étaient des congruences. Les relations $n \mid abc$ et $16 \mid ab + bc + ac$ proviennent de l'application du théorème de Gauss à partir de $4abc = n(ac + bc + ac)$, et les élèves n'ont pas utilisé les congruences pour écrire toutes les relations de divisibilité obtenues en supposant que n est premier avec 4. Notons également que le statut des exemples est toujours le même : vérifier ou infirmer un résultat théorique.

Épisode 17 : Discussion sur la relation logique entre n premier avec 4 et n congru à 1 modulo 2.

Les élèves E21 et E22 ne sont pas d'accord sur la formulation de la condition de leur résultat. L'élève E21 voudrait écrire $n \equiv 1[2]$ alors que l'élève E22 voudrait écrire n est premier avec 4.

> E21 : C'est toujours dans le cas où $n \equiv 1[2]$.
>
> E22 : Non on est dans un cas plus précis là, on est dans le cas où n est premier avec 4. [...]
>
> E21 : Si $n \equiv 1[2]$ alors n est premier avec 4 forcément.
>
> E22 : Euh oui

E21 : Parce que c'est ça le plus important [...]

E22 : Il y a des choses qui sont congrues à 1 modulo 2 mais qui ne sont pas congrues à 1 modulo 4. C'est congru à 1 ou 3 modulo 4.

E21 : Mais on s'en fout. [...]

E22 : Je préfère dire que dans le cas où n est premier avec 4.

E21 : Non non surtout pas, on a déjà prouvé que ça marchait pour n congru à 0 modulo 2 [...] et maintenant ce qui nous intéresse c'est le cas où n est congru à 1 modulo 2. Et donc il faut se placer dans ce cas-là, on ne va pas se placer dans le cas où n est premier avec 4 ça ne fait pas avancer le problème. Si, ça peut avancer le problème mais moins bien.

E22 : Oui mais on a démontré déjà pour tous ceux premiers avec 4 et tous les nombres premiers avec 4 sont impairs.

E21 : C'est exactement la même chose en fait.

E22 : Mais comme c'est l'hypothèse qu'on a faite pour utiliser Gauss, je préfère l'utiliser comme ça, c'est plus clair.

E21 : Je ne préfère pas utiliser ça parce que...

E22 : On est obligé de le dire dans le raisonnement à un moment ou un autre.

E21 : Est-ce que si n est premier avec 4, ça veut forcément dire que $n \equiv 1[2]$?

E22 : Dans un sens ça marche et pas dans l'autre. [...]

Selon l'élève E22 il y a une implication mais pas une équivalence, ils cherchent donc dans quel sens est l'implication. Finalement, l'élève E21 montre que c'est équivalent. Cette discussion est riche en mobilisation de connaissances d'arithmétique et de logique. Les élèves parviennent à construire une connaissance nouvelle : n premier avec 4 est équivalent à n congru à 1 modulo 2. Dans la discussion, on s'aperçoit à un moment donné que l'élève E22 confond n premier avec 4 avec n congru à 1 modulo 4. Il semble que ce soit cette confusion qui l'entraîne à dire qu'il n'y a qu'une implication puisqu'il sait que n congru à 1 modulo 2 n'est pas équivalent à n congru à 1 modulo 4. Prouver qu'il y a équivalence entre les deux écritures ne permet cependant pas aux élèves E21 et E22 de se mettre d'accord sur la condition à écrire. Comme les deux formes équivalentes ne portent pas les mêmes significations, chacun maintient son argumentaire, l'un en faveur de n premier avec 4 pour appliquer le théorème de Gauss et l'autre en faveur de $n \equiv 1[2]$ pour mettre en évidence la disjonction de cas pair/impair.

Épisode 18 : Discussions sur l'utilité de leur résultat pour l'étude du problème initial.

L'élève E21 rappelle que leur objectif est de « trouver une formule qui marche pour tous, [...] comme on avait trouvé pour n pair ». L'élève E22 revient sur la preuve de l'existence par méthode constructive :

E22 : Il y a un petit truc qui me dérange conceptuellement dans cette approche, parce que là on cherche une formule alors qu'on veut juste prouver l'existence et c'est déjà dur de prouver l'existence, nous on veut faire la démonstration constructive en plus tu vois, donc c'est l'étape supplémentaire. Prouver l'existence, tu peux prouver l'existence sans prouver comment c'est possible à chaque fois. C'est peut-être trop ambitieux par rapport à notre but en fait.

L'élève E21 se demande alors si « ça [leur résultat (9.11)] peut les aider à prouver l'existence ».

E22 : On a, si a, b, c existent alors on peut écrire ça $[\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}]$. On peut écrire ça $[4abc = n(ab + bc + ac)]$, alors on peut dire qu'il y a ça $[abc \equiv 0[4], n \mid abc$, abc n'est pas une puissance de 4 et $16 \mid ab + bc + ac]$.

E21 : Pour les conditions d'existence, je pense que ça peut nous aider quand même.

E22 : Oui oui bien sûr.

L'élève E22 propose alors de traduire la divisibilité avec la division euclidienne et de remplacer abc par $4k$ ($k \in \mathbb{N}$) et $ab + bc + ac$ par $16k'$ ($k' \in \mathbb{N}$) dans l'équation $4abc = n(ab + bc + ac)$. L'élève E21 trouve cette piste de recherche « sympa » mais reste sceptique, il ne voit pas ce qu'ils vont obtenir pour avancer dans la recherche de la formule générale.

Cet épisode illustre la prise de distance que les élèves effectuent régulièrement sur leur recherche. L'élève E21 se pose toujours la question de l'utilité de leurs résultats ou des pistes qu'ils veulent explorer et l'élève E22 tient à prouver l'existence sans faire une preuve constructive, qu'il juge trop difficile. Cette prise de recul, qui est une des fonctions de la phase de vérification, finition et continuation du processus de découverte (cf. chapitre 5), semble permettre aux élèves, d'une part de faire le point sur les avancées effectuées et d'autre part, de relancer leur recherche vers une piste qui leur semble pertinente.

Épisode 19 : Étude des relations de divisibilité trouvées dans l'épisode 16 en traduisant la divisibilité à l'aide de la division euclidienne.

En utilisant l'écriture d'un entier à l'aide de la division euclidienne, les élèves cherchent à écrire des équations algébriques pour traduire les relations de divisibilité qu'ils ont obtenues (cf. (9.11)). Les élèves commencent à traduire $n \mid abc$ par[26] : il existe k entier naturel tel que $n = abck$, et la relation $16 \mid ab+bc+ac$ par : il existe k' entier naturel tel que $ab+cb+ac = 16k'$. En remplaçant n et $ab + bc + ac$ dans $4abc = n(ab + bc + ac)$, ils écrivent $kk' = \frac{1}{4}$. Ils se demandent s'ils ne se sont pas trompés car « il n'y a plus beaucoup d'entiers ». L'élève E21 se demande si la relation $16 \mid ab+bc+ac$ existe forcément. Il teste avec un exemple $n = 125$, $a = 50$, $b = 125$ et $c = 250$. Grâce à cet exemple, l'élève E22 comprend l'erreur qu'ils ont commise :

E22 : C'est pas $n = abck$ c'est $abc = nk$.

Ils recommencent donc des manipulations d'écriture en remplaçant abc par nk et $ab+bc+ac$ par $16k'$ dans $4abc = n(ab + bc + ac)$. Ils écrivent les systèmes suivants :

$$\begin{cases} ab + bc + ac = 16k' \\ abc = nk \\ k = 4k' \end{cases} \tag{9.12}$$

$$\begin{cases} ab + bc + ac = 16k' \\ abc = 4nk' \end{cases} \tag{9.13}$$

L'élève E22 vérifie ces systèmes en les testant sur l'exemple $n = 125$, $a = 50$, $b = 125$ et $c = 250$ puis il se rend compte que ces systèmes ne sont qu'une nouvelle formulation de leur résultat précédent :

E22 : $\frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{16k'}{4nk'} = \frac{4}{n}$. [...] J'ai prouvé que $\frac{4}{n} = \frac{4}{n}$, au moins c'est cohérent. (rires)

E21 : On retombe exactement sur la même chose donc ça ne sert à rien.

26. Les élèves ne se rendent pas compte tout de suite de l'erreur commise en effectuant cette traduction.

E22 : Dommage, je trouvais ça intéressant.

E21 : Je trouvais ça sympa car on pouvait exprimer abc et $ab+bc+ac$ sous la même inconnue. Mais le problème, c'est que c'était déjà fait (avec les congruences).

L'élève E23 a effectué d'autres calculs en traduisant la relation de divisibilité $4 \mid abc$ à l'aide de la division euclidienne par $4k'$ et en utilisant $ab + bc + ac = 16k$. Il trouve $n = \frac{k'}{k}$ en remplaçant abc par $4k'$ et $ab+bc+ac$ par $16k$ dans $4abc = n(ab+bc+ac)$. L'élève E22 pense que c'est faux et l'élève E21 remarque la confusion dans les paramètres k et k' :

E21 : Attention, ce ne sont pas les mêmes variables [i.e. ce n'est pas le même k entre $abc = nk$ et $abc = 4k$]

Il propose d'écrire $abc = 4q$, $abc = nk$ et $ab + bc + ac = 16k'$. La relation de l'élève E23 est donc $n = \frac{q}{k'}$. L'élève E22 la vérifie sur l'exemple $n = 125$, $a = 50$, $b = 125$ et $c = 250$. Il se demande si ce n'est pas évident et surtout, si c'est important. L'élève E21 trouve cette relation intéressante car elle a moins d'inconnues (seulement deux, q et k') et qu'ils ont trouvé une formule générale pour tout n. Cependant, il s'interroge sur la manière de l'exploiter car elle est plus abstraite : « il n'y a plus que deux inconnues mais on ne voit plus les liens entre n et a, b et c ». Les élèves semblent prendre conscience de l'équivalence des diverses formes d'écriture de la divisibilité : avec le signe $\mid$, à l'aide de la division euclidienne ou avec les congruences. Ils font l'hypothèse qu'une écriture peut être plus simple à manipuler et exploiter qu'une autre, en fonction du problème.

Épisode 20 : Rédaction de la synthèse de leurs travaux de recherche.
L'enseignant demande aux élèves de rédiger la synthèse de leurs recherches en précisant spécifiquement les résultats obtenus par rapport à la question qu'on leur pose. Cela soulève un débat au sein du groupe :

E22 : La question en elle-même, on ne sait pas où on en est. [...] Parce que là, la question, on l'a un peu perdue de vue.

E21 : Non non.

E22 : Si, si.

E23 : Mais c'est de la recherche, on ne peut pas dire, hop ça fait ça.

E21 : Là peut-être qu'on la perd de vue [avec l'équation $n = \frac{q}{k'}$] mais ce que je trouve intéressant c'est d'exprimer n, c'est de trouver une formule où n marche tout le temps. On ne la perd pas de vue par rapport à avant [avec les relations de divisibilité]. Maintenant c'est n, essayer de l'exprimer en fonction de a, b, c, c'est ça qui est important tu vois et après il ne faut pas oublier que ça [k', q] c'est lié à a, b, c, donc c'est comme si on cherchait une relation entre n, a, b et c. Parce que notre question de départ, c'est chercher une relation entre n et a, b, c.

E22 : Non non, la question de départ, c'est pas ça. La question de départ c'est trouver...

E21 : Oui, mais si on trouve une relation entre n et a, b, c, alors on prouvera l'existence.

E22 : Ou si la relation ne marche pas dans certains cas on prouvera que c'est pas possible dans certains cas.

L'élève E22 pense que l'écriture des deux systèmes (9.12) et (9.13) n'a pas permis d'avancer. Il place « la limite de l'utilité de leurs résultats » aux quatre relations de divisibilité (9.11). Pour lui, les systèmes ne servent à rien, mais l'élève E21 n'est pas d'accord, il pense que ça pourra peut-être servir à quelque chose plus tard. Les élèves ont des difficultés à effectuer un lien entre leurs résultats (en particulier les relations de divisibilité ou les systèmes) avec le problème initial. L'élève E22 pense qu'ils se sont éloignés du problème car il ne voit pas comment leurs résultats permettent d'approcher une preuve d'existence d'une décomposition pour tout entier n. Au contraire, l'élève E21 pense que leurs résultats peuvent servir pour l'étude du problème initial car ils expriment des relations entre n, a, b et c. Ces relations peuvent les aider à déterminer une formule générale « qui marche pour tout n ». Si la visée de ces deux élèves est la quête de la vérité de la conjecture, leur méthode pour y parvenir est différente : l'un veut prouver l'existence d'une décomposition sans preuve constructive, alors que l'autre veut prouver l'existence en exhibant une formule générale pour tout n.

Au cours de la rédaction de la synthèse, les élèves réinterrogent la pertinence des pistes géométriques évoquées précédemment. L'élève E21 pointe l'intérêt de la représentation géométrique avec un parallélépipède rectangle car elle « met en relation des distances ». Concernant l'idée de la courbe en 3D, il voudrait l'illustrer avec un dessin.

> E21 : Si je savais me servir d'un logiciel en 3D, j'aimerais vraiment voir ce que ça fait, ce que ça peut donner.

Les élèves évoquent une difficulté majeure pour suivre cette piste de recherche : la modélisation d'une surface non continue sachant que pour une valeur de n donnée, il y a plusieurs valeurs de a, b et c. L'élève E21 pense que finalement, suivre cette piste de recherche revient à étudier des cas particuliers :

> E21 : Mais j'y pense, la courbe en 3D, c'est quasiment la même chose que de trouver des exemples, tu trouves des exemples et tu regardes s'il y a une solution, mais on pourra peut être mieux l'observer avec une courbe. [...] Le problème c'est que ça ne démontrera rien non plus.

Il évoque également leur manque d'outils pour suivre cette piste :

> E21 : A moins que, nous on ne sait pas, peut-être qu'il y a des outils pour travailler avec une courbe en 3D.

Les élèves font l'hypothèse qu'il existe des travaux sur l'étude de nuages de points, mais que le problème est alors que « si tu travailles sur un nuage de points, tu es obligé d'approximer, donc t'as pas démontré ».

Épisode 21 : Recherche d'une nouvelle piste pour la prochaine séance.
Après avoir rédigé leur synthèse, les élèves pensent qu'ils sont un peu bloqués. Ils veulent partir sur quelque chose de nouveau pour la séance suivante. L'élève E22 propose de revenir sur leurs « zouaveries » du départ, c'est-à-dire sur la recherche d'exemples mais en lien avec leurs quatre relations de divisibilité (9.11). Il veut remplacer les exemples dans leurs relations, mais rappelle tout de même que cette piste ne permet pas de résoudre le problème :

> E22 : Sauf que le problème, on a déjà prouvé que la première démarche était vouée à l'échec. Pas vouée à l'échec mais vouée à ne rien trouver [...] sauf si t'as un temps infini.

L'élève E21 pense que c'est difficile de relier les relations de divisibilité avec les congruences modulo 30 :

> E21 : On a des relations avec abc, $ab+bc+ac$ et on a absolument plus des relations avec $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et donc ça paraitrait difficile de le relier avec nos congruences qu'on a trouvées avant. [...] On ne travaillait pas sur la même base, au début on travaillait sur la formule initiale [$\frac{4}{n} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$] et ensuite on a travaillé sur la formule modifiée par réduction au même dénominateur [$4abc = n(ab + bc + ac)$].

L'élève E23 fait alors référence à leurs prises de notes concernant les travaux des autres groupes lors de la mise en commun. L'élève E21 trouve intéressant l'idée de décomposer $\frac{4}{n}$ en deux fractions sous la forme $\frac{1}{y}+\frac{x}{z}$ puis chercher à décomposer $\frac{x}{z}$ en deux fractions unitaires. Mais cela ravive le débat sur la pertinence de cette piste de recherche pour l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus :

> E21 : Mais c'est la même chose que pour les modulo 30, c'est infini.
>
> E22 : Oui mais ça c'est une méthode empirique.
>
> E23 : C'est infini.
>
> E22 : L'empirisme c'est bien mais à la fin, faut passer à un truc formel quand même. Tu es obligé de partir dans le cas général. Si tu prouves qu'il reste une petite infinité de cas, bah il en reste toujours une infinité.

Cette piste de recherche est rejetée de par sa nature empirique et de par son inefficacité pour démontrer l'existence d'une décomposition pour tout entier n. A noter que l'élève E22 semble avoir quelques notions sur la dénombrabilité.

Nous avons également relevé une discussion entre les élèves E21 et E22 sur l'utilisation de la divisibilité à l'aide de la division euclidienne ou à l'aide des congruences.

> E22 : Je n'aime pas utiliser les congruences quand il n'y en a pas besoin.
>
> E21 : Mais n divisible, c'est des congruences, c'est la même chose.
>
> E22 : Oui mais je n'aime pas, enfin c'est pas grave, c'est des questions de préférence.

Ils sont conscients que les deux écritures permettent d'exprimer la même notion mathématique. Le fait que l'élève E22 ne souhaite utiliser les congruences que s'il y en a besoin peut évoquer une naturalisation de cet outil moins stabilisée par rapport à la divisibilité, traduite à l'aide de la division euclidienne. Cependant, les congruences ont été manipulées tout au long de la recherche et nous n'avons pas relevé de difficulté dans leur manipulation. C'est par exemple l'élève E22 qui effectue le théorème des restes chinois en acte. Nous faisons plutôt l'hypothèse que cet élève veut mettre en évidence que la notion de division euclidienne suffit pour traduire la divisibilité, et que les congruences sont un outil puissant et pertinent pour l'étude de certains types de questions.

Deuxième phase de recherche : rédaction des affiches et des preuves.
Cette phase du travail s'est déroulée lors de séance 5. Nous l'avons découpé en trois épisodes (22 à 24), que nous analysons ci-dessous.

Épisode 22 : Identification des résultats à présenter sur les affiches.
Les premiers résultats que les élèves veulent écrire sur l'affiche sont les décompositions obtenues pour n pair, n multiple de 3 et n multiple de 5. L'élève E21 dit qu'ils ont bien fait de ne pas continuer car il croit que les autres groupes n'ont pas réussi à trouver une décomposition pour les multiples de 7. L'élève E22 se demande alors « si c'est faisable ». L'élève E23 lui répond : « Ah non, pas de démonstration stupide ! ».

Ensuite, ils prévoient d'écrire les classes restantes modulo 30, tout en précisant pour quelles raisons il n'ont pas suivi cette piste de recherche :

> E21 : Si on arrive à faire tous les cas modulo 30, on pourra prouver pour tous [...] mais on s'est dit qu'il y avait beaucoup trop de cas et qu'on n'y arrivera jamais.

Ensuite, ils veulent mentionner les pistes discutées mais qui n'ont pas abouti : la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence, la mise en œuvre d'un raisonnement par l'absurde, la modélisation du problème par une courbe en 3D, la modélisation du problème avec un parallélépipède rectangle, les nombreuses transformations d'écriture. Pour l'élève E22, ce ne sont pas des résultats mais l'élève E21 pense que les résultats qu'ils ont obtenus « modulo 2 et modulo 3 ne sont pas plus intéressants que d'autres pistes de réflexion, comme la courbe par exemple ».

Ils décident ensuite de mentionner les relations de divisibilité (9.11) obtenues à partir de l'équation $4abc = n(ab + bc + ac)$ et le théorème de Gauss. Les élèves se demandent s'ils présentent les systèmes (9.12) et (9.13).

> E22 : Je ne sais pas si ce n'est pas une façon d'écrire autrement des choses évidentes.
>
> E21 : Oui, moi je le pensais aussi.
>
> E22 : Parce que tu vois, ça finalement, c'est juste des changements simples d'écriture et tu remplaces des trucs lourds à écrire par des lettres.
>
> E21 : On remplace des trucs lourds à écrire par des trucs, du coup, qui s'éloignent de notre problème car on ne se les représente même plus.

Cependant l'élève E21 revient sur l'intérêt du système (9.13) où abc et $ab + bc + ac$ sont exprimés en fonction du même paramètre k.

> E22 : Oui mais tu l'as déjà écrit sans t'en rendre compte.
>
> E21 : Oui mais là, je l'écris comme ça je m'en rends compte, comme ça je le montre.

La préparation de la rédaction de l'affiche permet aux élèves d'identifier les résultats obtenus, notamment ceux qui sont des résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus. Ils classent également les pistes de recherche en deux catégories, celles qui n'ont pas abouti et celles qui n'ont pas été explorées.

Pour terminer le résumé de leurs recherches, les élèves essaient de faire un lien entre le résultat sur les relations de divisibilité et le problème initial.

> E22 : Du coup à la question initiale, on n'a pas, parce qu'en fait on est content, on a prouvé que $abc \equiv 0[4]$ et des trucs comme ça, mais pour ramener ça sur la question on est...
>
> E21 : Quelle question ?
>
> E22 : Bah la question pour quels entiers n c'est possible, tu vois.
>
> [...]
>
> E21 : Ce qui est intéressant c'est de se dire, de toute façon on ne pourra jamais trouver quelque chose qui se rapproche du problème, on va forcément s'en éloigner à un moment ou un autre, c'est certain. [...] Et je pense qu'on ne s'en éloigne même pas assez. [...] Mais quand même, avoir des relations entre a, b et c, c'est ce qu'on cherche quand même, et surtout prouver l'existence, c'est justement en trouvant des relations pour montrer que cette relation est toujours vraie qu'on prouvera l'existence, moi je ne pense pas du tout qu'on s'éloigne du problème.
>
> E22 : Oui mais on ne sait pas quoi en faire pour l'instant.

Le lien qu'ils effectuent entre le problème initial et les relations de divisibilité se situe au niveau de la visée de la recherche : ces résultats peuvent servir pour prouver l'existence de décompositions pour tout entier naturel n. Ils sont convaincus que ces résultats auront une utilité qu'ils ne parviennent pas à identifier pour le moment. Ces discussions illustrent la prise de distance que les élèves sont capables de prendre par rapport à leur recherche et à leurs résultats.

Épisode 23 : Discussion sur la représentation du problème avec un parallélépipède rectangle.
A partir de la décomposition trouvée pour $n = 5$ ($a = 2, b = 5, c = 10$), l'élève E22 veut construire un pavé droit de dimension 2, 5, 10 avec une feuille de papier pour « modéliser le problème dans la vraie vie en 3D pour $n = 5$ ». L'élève E21 propose ensuite d'en faire d'autres, par exemple pour $n = 25$ ou pour $n = 3$. Ils reprennent l'équation qui permet d'établir une relation entre la somme des aires des faces et le volume du parallélépipède rectangle : $\frac{4}{n}abc = (bc + ac + ab)$.

> E21 : Et après qu'est ce qu'on va en faire ? On va faire un pavé droit et après regarder si on ne peut pas voir quelque chose, si les pavés droits sont tous pareils ? S'il n'y a pas un lien entre tous les pavés droits qu'on va faire ?

L'élève E21 exprime alors que depuis le début, c'est son objectif, trouver un lien logique :

> E21 : Depuis le début du problème c'est toujours ça mon objectif, c'est regarder s'il n'y a pas un lien logique entre plusieurs n, regarder s'il n'y a pas un lien logique entre tous les points tracés pour $n = 2$, pour $n = 3$, regarder s'il n'y a pas un lien logique entre tous les pavés droits.

Il évoque également les identités formulées pour n pair, n multiple de 3 et n multiple de 5, qui se ressemblent, et explique qu'il veut « toujours trouver quelque chose qui se répète, qui marche tout le temps ». Pour prouver la vérité de la conjecture d'Erdös-Straus, son idée est toujours la même : trouver des relations entre n, a, b et c pour tout entier naturel n.

Épisode 24 : Rédaction des affiches et des preuves de leurs résultats.
Tout en rédigeant les affiches, les élèves continuent de chercher une nouvelle idée pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Une nouvelle piste de recherche concerne l'étude du nombre de décompositions pour une valeur de n donnée. L'élève E22 formule la conjecture suivante : le nombre de décompositions possibles pour une valeur de n est égale au nombre de facteurs premiers de n. L'élève E21 trouve cette piste de recherche intéressante mais il est sceptique sur la conjecture formulée :

> E21 : Est-ce que tu penses que pour un nombre premier très grand il n'y aura qu'une seule manière de le décomposer ? J'en doute.
>
> E22 : Bah pour trouver un contre-exemple, il faut trouver deux façons de décomposer un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.

Ils pensent mener cette étude dans la prochaine séance de recherche sur le problème, s'il y en a une.

Sur une première affiche, les élèves écrivent les identités permettant de prouver l'existence d'une décomposition pour $n \equiv 0[2]$, $n \equiv 0[3]$ et $n \equiv 0[5]$. Ils qualifient ces résultats de « cas particuliers qui fournissent une infinité de nombres ». Sur la seconde et la troisième affiche, ils développent leur résultat sur les relations de divisibilité (9.11), notent le système (9.13) puis font la liste des pistes de réflexions qui n'ont pas abouti. Les affiches sont écrites par l'élève E24. Parallèlement, l'élève E22 rédige la preuve du résultat sur les relations de divisibilité sur une feuille. Il précise aux autres élèves qu'il ne met pas les preuves des résultats pour les congruences modulo 2, 3 et 5 car les identités sont déjà écrites sur l'affiche. Lors de la rédaction des preuves, l'élève E22 ne communique presque pas avec les autres élèves mais consulte de nombreuses fois son cahier de bord. L'élève E21 termine la rédaction des preuves en évoquant le résultat concernant le système (9.13). La rédaction des preuves des résultats ne semble pas poser de difficultés aux deux élèves qui les écrivent. L'analyse des recherches du groupe montre que l'élaboration de la preuve du résultat concernant les relations de divisibilité (9.11) s'est réalisée dialectiquement avec la construction de ce résultat. Nous faisons l'hypothèse que c'est un élément qui facilite la rédaction de la preuve. Le fait que l'élève E22 consulte de nombreuses fois les pages antérieures de son cahier afin de retrouver des éléments justifiant la formulation des relations de divisibilité étaye cette hypothèse.

Troisième phase de recherche : préparation de la mise en commun.
La préparation de la mise en commun et du débat en classe entière s'est déroulée au début de la séance 6. Nous l'analysons dans l'épisode 25 ci-dessous.

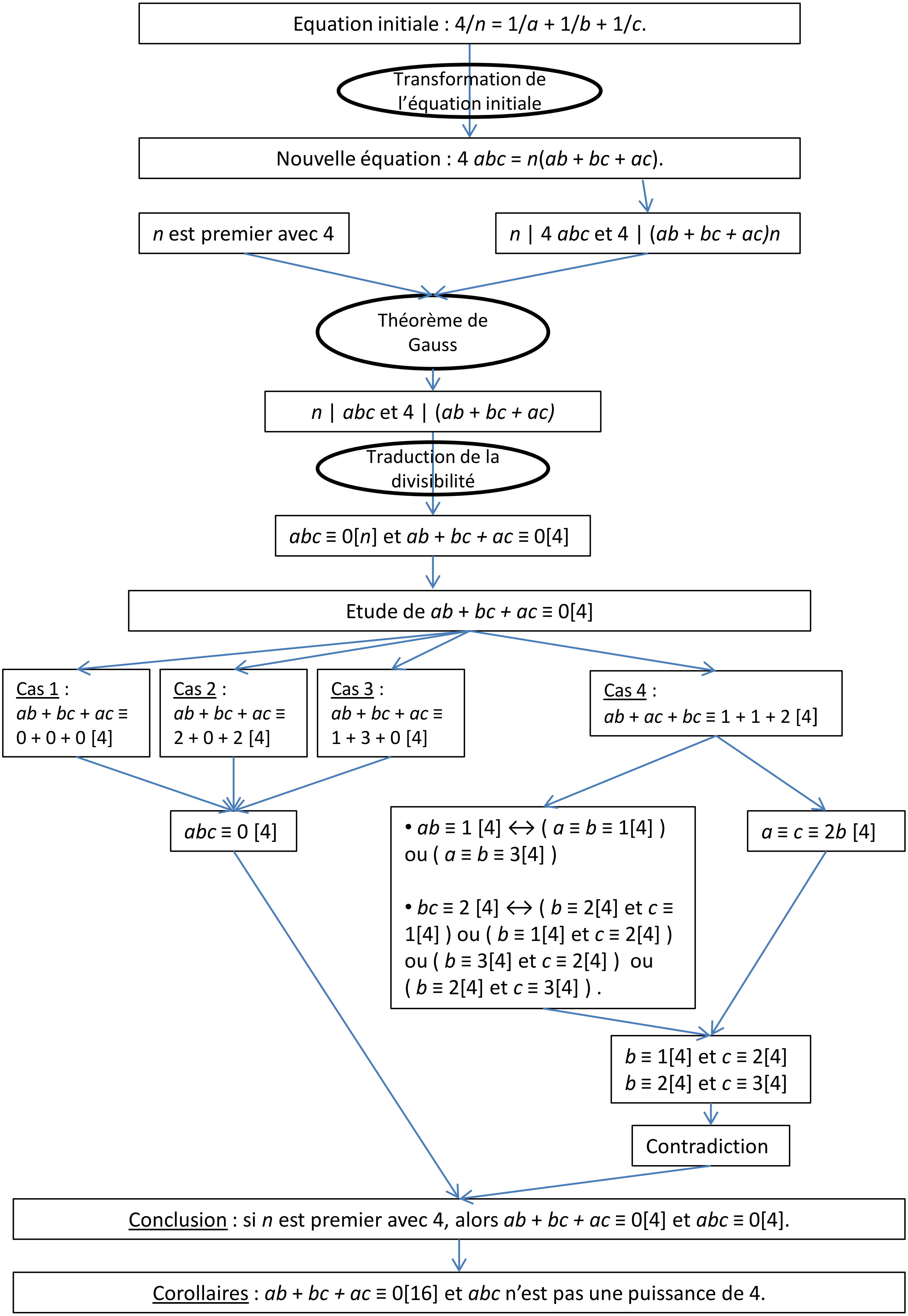
Épisode 25 : Préparation de la mise en commun et du débat.
Dans un premier temps, les élèves reprennent leurs trois affiches et hiérarchisent leurs résultats, d'une part en fonction de leur apport pour l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, et d'autre part, en fonction de leur difficulté. Les élèves considèrent les résultats écrits sur la première affiche (identités pour n pair, n multiple de 3 et n multiple de 5, cf. annexe D1) comme faciles et peu importants pour leur étude de la conjecture. Sur la seconde affiche, les élèves identifient « le gros résultat, le truc le plus dur à faire » et précisent que la démonstration fait deux pages. Il s'agit de leurs relations de divisibilité (9.11) (cf. annexe D1). La troisième affiche présente les pistes de recherche abordées mais qui n'ont pas abouti (cf. annexe D1). Les élèves veulent expliquer, d'une part les raisons pour lesquelles ils considèrent ces pistes de recherche pertinentes, et d'autre part les raisons pour lesquelles ils ne les ont pas étudiées. L'élève E21 insiste pour mettre en avant leur démarche et les liens entre les différentes pistes de recherche étudiées, « comme si le public n'y connaissait rien ».

Dans un second temps, les élèves se répartissent les résultats à présenter. L'élève E24 débutera la présentation par la démonstration des identités pour n pair, n multiple de 3 et n multiple de 5, l'élève E21 explicitera les différentes pistes « farfelues » et les élèves E22 et E23 se partagent la présentation et la démonstration des relations de divisibilité (9.11). Pour préparer ce qu'ils vont dire, ils reprennent les différentes étapes de la démonstration. L'élève qui a écrit la preuve (l'élève E22) semble bien la maîtriser alors que les autres élèves ne se rappellent plus de tous les raisonnements en jeu et des liens entre les différentes étapes. Nous verrons que l'explicitation de cette preuve lors de la présentation de leurs travaux aux autres groupes leur posera quelques difficultés (cf. paragraphe *Étape finale : seconde mise en commun*).

Conclusion de la seconde partie des recherches du groupe 2.
Le principal résultat établi par les élèves au cours des séances de recherche 3 et 4 sont les relations divisibilité dans le cas où n est impair. Nous les rappelons ci-dessous.

$$\text{Si } n \text{ est premier avec 4, alors } \begin{cases} abc \equiv 0[4] \\ abc \equiv 0[n] \\ ab + bc + ac \equiv 0[16] \\ abc \ \text{ n'est pas une puissance de } \ 4. \end{cases}$$

Le schéma présenté à la page suivante résume les différentes étapes effectuées par les élèves pour construire et prouver ce résultat.



Equation initiale : $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$.
Transformation de l'équation initiale
Nouvelle équation : $4\,abc = n(ab + bc + ac)$.
n est premier avec 4
$n \mid 4\,abc$ et $4 \mid (ab + bc + ac)n$
Théorème de Gauss
$n \mid abc$ et $4 \mid (ab + bc + ac)$
Traduction de la divisibilité
$abc \equiv 0[n]$ et $ab + bc + ac \equiv 0[4]$
Etude de $ab + bc + ac \equiv 0[4]$
Cas 1 : $ab + bc + ac \equiv 0 + 0 + 0$ [4]
Cas 2 : $ab + bc + ac \equiv 2 + 0 + 2$ [4]
Cas 3 : $ab + bc + ac \equiv 1 + 3 + 0$ [4]
Cas 4 : $ab + ac + bc \equiv 1 + 1 + 2$ [4]
$abc \equiv 0$ [4]
• $ab \equiv 1$ [4] $\leftrightarrow$ ($a \equiv b \equiv 1[4]$) ou ($a \equiv b \equiv 3[4]$)
• $bc \equiv 2$ [4] $\leftrightarrow$ ($b \equiv 2[4]$ et $c \equiv 1[4]$) ou ($b \equiv 1[4]$ et $c \equiv 2[4]$) ou ($b \equiv 3[4]$ et $c \equiv 2[4]$) ou ($b \equiv 2[4]$ et $c \equiv 3[4]$) .
$a \equiv c \equiv 2b$ [4]
$b \equiv 1[4]$ et $c \equiv 2[4]$
$b \equiv 2[4]$ et $c \equiv 3[4]$
Contradiction
Conclusion : si n est premier avec 4, alors $ab + bc + ac \equiv 0[4]$ et $abc \equiv 0[4]$.
Corollaires : $ab + bc + ac \equiv 0[16]$ et abc n'est pas une puissance de 4.

Les élèves ont également écrit un système d'équations, obtenu comme corollaire du résultat précédent :

Si n est premier avec 4, alors il existe un entier naturel k tel que

$$\begin{cases} ab + bc + ac = 16k' \\ abc = 4nk' \end{cases}$$

Ces deux résultats ont été obtenus par l'exploitation de la procédure opératoire 3 *transformation de l'équation initiale*. Elle a permis aux élèves d'écrire, par réduction au même dénominateur et par produit en croix, l'équation qui sera étudiée. Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse *a priori* des procédures, cette transformation permet d'étudier la nouvelle équation à l'aide du théorème de Gauss. Le choix de la dimension opératoire de représentation des entiers à l'aide des congruences pour traduire la première relation de divisibilité a conduit les élèves à suivre une dimension organisatrice particulière, celle d'une disjonction de cas, avec l'étude des cas 1 à 4, pour étudier la relation de divisibilité $ab + bc + ac \equiv 0[4]$. Au sein de cette disjonction de cas, la dimension opératoire privilégiée par les élèves est l'utilisation d'outils et de connaissances d'arithmétique : étude de tables de multiplications de congruences, étude de systèmes de congruences, utilisation du théorème fondamental de l'arithmétique (pour établir que abc n'est pas une puissance de 4). Un raisonnement par condition nécessaire est utilisé pour montrer que le cas 4 n'est pas possible. Dans un second temps, le choix de la dimension opératoire de représentation des entiers à l'aide de la division euclidienne pour traduire la divisibilité a permis aux élèves d'établir le second système de relations de divisibilité. Au cours de la construction de ce résultat, les élèves n'ont eu recours à l'exemple que pour vérifier si les relations obtenues étaient vraies. En cas de contre-exemple, les élèves cherchent à remettre en question leur raisonnement. L'exemple permet aux élèves de confronter leurs résultats théoriques avec l'expérience. Cependant, ils ne cherchent pas à questionner les exemples pour comprendre pour quelles raisons ils vérifient ou ne vérifient pas leur résultat. Ce sont les résultats théoriques qui sont immédiatement remis en question.

Au cours de ces deux séances de recherche consacrées notamment à l'élaboration de ces résultats, les élèves ont mis en avant leur choix de visée de la recherche. Tout d'abord, lors de la phase de mise en commun des résultats au sein de la classe, ils avaient explicité clairement qu'ils ne voulaient pas mener une recherche de décompositions effectives pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus, mais essayer de prouver l'existence (non constructive) d'une décomposition pour tout entier naturel n. Nous faisons l'hypothèse que c'est pour cette raison qu'ils n'ont pas cherché pas à s'approprier les recherches des autres groupes, qui sont axées sur l'étude de cas particuliers, notamment l'étude de décompositions pour les nombres premiers. La suite de leurs recherches s'est donc opérée dans la perspective de la quête de la vérité et les élèves n'ont plus navigué entre les deux pôles, quête de la vérité et recherche de décompositions effectives. En effet, après la mise en commun, les élèves réussissent à trouver une piste de recherche en accord avec leur visée. Ils font l'hypothèse que l'étude de l'équation $4abc = n(ab+bc+ac)$ avec des outils d'arithmétique va leur permettre de trouver une relation générale entre n et a, b, c et apporter des éléments pour étudier l'existence d'une décomposition pour tout entier n. La construction des résultats mentionnés ci-dessus s'effectue par l'exploitation de procédures opératoires, sans interactions avec des procédures exploratoires ni avec le caractère expérimental du problème. La démarche de recherche des élèves ne relève pas d'une mise en œuvre d'une dimension expérimentale. Après avoir établi ces résultats et cherché à les exploiter pour l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, les élèves sont bloqués dans leurs recherches et cherchent une nouvelle piste. Les idées étudiées s'inscrivent dans le pôle de la quête de la vérité. Des pistes liées à la recherche de décompositions effectives sont parfois mentionnées mais elles ont toujours mises de côté, la démarche associée « étant vouée à l'échec » pour prouver l'existence d'une décomposition pour tout entier naturel n. De même, lorsqu'ils évoquent la possibilité de faire un lien entre les résultats partiels obtenus pour certaines valeurs de n (n multiples de 3 et n multiples de 5) et les relations de divisibilité pour n impair, ils pensent que cela revient à étudier la conjecture pour des cas particuliers et ne veulent donc pas s'engager dans cette piste.

Lors de la phase de rédaction des affiches et des preuves, les élèves identifient deux résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus. Le premier résultat est l'existence pour certaines valeurs de n d'une décomposition (pour n congru à 0 modulo 2, pour n congru à 0 modulo 3 et pour n congru à 0 modulo 5). Les élèves l'identifient comme un résultat répondant partiellement à la question posée mais ils pensent qu'il n'est pas intéressant pour prouver la conjecture. Les relations de divisibilité dans le cas où n est impair constituent le second résultat identifié par les élèves. S'ils sont conscients qu'il n'apporte pas de réponse partielle à la question posée, ils sont persuadés qu'il est intéressant et qu'il peut servir pour étudier la vérité de la conjecture d'Erdös-Straus. Cependant, ils précisent qu'ils ne perçoivent pas pour le moment comment il peut être exploité. Les liens qu'ils effectuent entre les résultats qu'ils ont établis et la conjecture d'Erdös-Straus s'effectuent par rapport à la direction choisie pour mener les recherches. Ils jugent de la pertinence de chaque résultat pour répondre à la question posée par leur utilité dans la quête de la vérité de la conjecture. Notons qu'au cours de cette phase de rédaction des affiches et des preuves de leurs résultats, les élèves ont continué à discuter de diverses pistes de recherche à explorer pour continuer l'étude du problème initial. Les élèves cherchent notamment à exploiter la dimension organisatrice de changement de cadre, par exemple en essayant de modéliser géométriquement le problème. Les difficultés évoquées pour suivre une telle pensée organisatrice est le choix d'une dimension opératoire à leur portée. Les élèves sont conscients de manquer de connaissances mathématiques pour explorer une telle piste de recherche.

C. Itinéraire de recherche du groupe 3 - Seconde partie.

Nous analysons ci-dessous les trois phases de recherche qui constituent la seconde partie de l'itinéraire de recherche du groupe 3.

Première phase de recherche : les secondes recherches collectives par groupe.

Les secondes recherches collectives par groupe se sont déroulées lors des séances 3 et 4. Nous avons découpé cette phase de recherche en 6 épisodes (numérotés de 12 à 17) que nous analysons successivement ci-dessous. L'épisode 12 se déroule lors de la séance 3 et les épisodes 13 à 17 lors de la séance 4.

Épisode 12 : Élaboration d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ à partir des décompositions pour tout n premier inférieur à 100.

A la suite de la première mise en commun, les élèves reviennent sur deux éléments des travaux des autres groupes. Le premier élément est la désignation de l'entier a, proposée par un élève du groupe 2, par la partie entière supérieure de $\frac{n}{4}$. Au début de l'épisode, les élèves semblent intéressés par cette valeur et on peut penser qu'elle sera utilisée pour déterminer des décompositions pour une valeur de n donnée. Nous verrons dans la suite des analyses, d'une part qu'elle n'est pas exploitée dans la formalisation de la méthode (cf. par exemple leur synthèse de la séance 4, annexe E4, p. 195 ou leurs affiches, annexe E1) et d'autre part, que nous ne sommes pas sûre qu'elle ait été utilisée dans leurs calculs pour trouver des décompositions pour une valeur de n donnée. Le second élément relevé par le groupe dans les travaux des autres est la démonstration de la propriété de multiplicativité, qui permet d'effectuer la réduction du problème à l'étude des nombres premiers.

> E32 : Mais le groupe 1, il a montré qu'une fois que tu connais n en fait, quand n marche, son multiple il marche toujours.
>
> E33 : On a bien fait de le noter celui-là.

Cela permet aux élèves de s'assurer que l'étude du problème peut se réduire aux nombres premiers :

> E31 : Ça marche à chaque fois pour les nombres premiers donc c'est bon. [...] Et si tu trouves un nombre premier, un nombre qui n'est pas premier, il peut être décomposé en facteurs premiers, CQFD.

L'élève fait référence ici au théorème fondamental de l'arithmétique. Il associe les deux propriétés (multiplicativité et décomposition en facteurs premiers) pour effectuer la réduction du problème à l'étude des nombres premiers.
La recherche collective du groupe se focalise sur la recherche de décompositions effectives pour tout nombre premier n inférieur à 100. Cette piste de recherche est proposée par un élève dont l'objectif est, d'une part d'essayer de trouver des régularités entre les décompositions pour espérer ensuite effectuer des généralisations, et d'autre part pour étudier en détail les cas où leur méthode ne permet pas de trouver une décomposition.

> E32 : Franchement, c'est quoi l'intérêt de les faire tous comme ça à la suite ?
>
> E33 : Déjà ça permet de voir s'il y a des nouveaux cas, la preuve [il vient de trouver un « nouveau cas », $n = 41$] [...] Et voir s'il n'y a pas un rythme en fait.

Les nombreux exemples trouvés pour des valeurs de n données et l'étude des cas particuliers vont effectivement lui permettre d'affiner sa méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n premier. L'élaboration de sa méthode s'effectue par des allers et retours entre la construction d'exemples, le questionnement de cas particuliers et la recherche de régularités pour déterminer des règles de calculs. Nous illustrons ci-dessous leur démarche expérimentale de recherche.

Découverte d'un premier cas particulier.
La première valeur de n pour laquelle leur méthode ne fonctionne pas est $n = 41$. La décomposition en somme de deux fractions donne : $\frac{4}{41} = \frac{1}{11} + \frac{3}{451}$. Leur méthode consiste à multiplier par 2 la seconde fraction, ce qui donne $\frac{6}{902}$ puis de décomposer cette fraction en $\frac{1}{902} + \frac{5}{902}$. Le problème est que 902 n'est pas divisible par 5.

> E33 : Là par contre, on va avoir un problème.
>
> E32 : Pourquoi tu multiplies par 2 ?
>
> E33 : Parce que c'est comme ça que ça marche normalement.
>
> E32 : Là ça fait 2 et là 4.
>
> E33 : Ah en plus ça marche. Ça c'est un nouveau cas.
>
> E32 : Oui c'est un nouveau cas, mets du rouge, mets du rouge.
>
> E33 : Nouvelle décomposition.

Spontanément, l'élève E32 modifie la méthode pour trouver une décomposition de $\frac{4}{41}$. Pour décomposer $\frac{6}{902}$ en somme de deux fractions unitaires, il ne décompose pas 6 en $1+5$ mais en $2+4$, ce qui donne $\frac{6}{902} = \frac{2}{902} + \frac{4}{902}$. Les élèves se rendront compte 20 minutes après que leur calcul est faux (car 902 n'est pas divisible par 4). Cependant cela leur a permis de mettre au jour une nouvelle règle de décomposition possible.

Premier résumé de leurs recherches.
Au bout d'un quart d'heure de recherches en groupe, les élèves effectuent un premier bilan de leur méthode, avec les différents cas rencontrés.

> E33 : Après je vais noter, là par exemple, à chaque fois, t'as soit 1 sur un nombre pair.
>
> E32 : Soit 1 sur un nombre impair.
>
> E33 : Oui mais de toute façon qu'il soit pair ou impair ça ne change rien, je n'ai jamais fait gaffe [...] Tu décomposes de la même façon. En fait tu multiplies le dénominateur par 2 et puis tu le sépares et ça fait sur 1 et ça marche.
>
> E32 : Mais je veux dire, il n'y a pas de rapport, là si c'est impair, c'est deux impairs et là si c'est pair, là c'est deux pairs ou un truc du genre ?
>
> E33 : Il faut regarder après, c'est pour ça que je le fais d'ailleurs, c'est pénible mais il faut le faire.
>
> E32 : Si c'est 3 sur pair, tu peux faire 1 et 2, si c'est 3 sur impair, t'es obligé de multiplier par 2 et ensuite de diviser le truc, de séparer les trucs. [...] Pour $\frac{3}{451}$, t'es obligé de multiplier par 2 et ensuite de faire 2 et 4, t'es obligé sinon ça te bloque.
>
> [...]
>
> E32 : C'est puissant quand même.

L'objectif de ce résumé est de rassembler les différents cas obtenus pour essayer de déterminer des liens entre eux (par exemple sur la parité des dénominateurs). Il leur permet de regrouper deux cas puisque les fractions de la forme $\frac{1}{m}$ se décomposent de la même façon (avec la méthode 1, cf. p. 269) pour tout m entier naturel, la distinction selon la parité de m n'est pas nécessaire. La méthode est explicitée grâce à la description des processus de calculs mis en œuvre. Notons que selon les cas, l'explicitation relève de deux types différents de validation au sens de Balacheff : soit l'exemple générique (par exemple pour le cas d'une fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair, qui est décrit à l'aide de l'exemple $\frac{3}{451}$), soit l'expérience mentale (par exemple pour le cas d'une fraction de la forme $\frac{1}{m}$ ou $\frac{3}{m}$ avec m pair). Nous faisons l'hypothèse que le passage de l'exemple générique à l'expérience mentale s'effectue grâce à la maîtrise de la règle et de sa mise en œuvre sur de nombreux exemples.

Découverte d'un second cas particulier.
L'élève E33 repère un nouveau cas particulier à leur méthode de décomposition :

> E33 : Tiens celui là par contre il est costaud. Là par contre, celui-là, on a un problème [pour $n = 73$, il trouve $\frac{1}{19} + \frac{3}{1387}$]. 1387 en le multipliant par 2, il n'est pas divisible par 4, je ne peux pas le séparer en 5, je ne peux pas le séparer en 4.

Les deux autres élèves vérifient alors si 73 est bien un nombre premier, puis si la première fraction unitaire est bien $\frac{1}{19}$. L'étude de ce cas a permis aux élèves de mettre en évidence un cas non pris en compte par leur méthode de décomposition en cours d'élaboration. L'élève E33 pense qu'il faut essayer de le décomposer autrement.

Évolution de la méthode pour décomposer le cas $n = 73$.
Pour trouver une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour $n = 73$, l'élève E32 propose de modifier la valeur de a et de prendre comme première fraction unitaire $\frac{1}{20}$ au lieu de $\frac{1}{19}$. L'élève E33 trouve alors la décomposition suivante : $\frac{1}{20} + \frac{2}{1460} + \frac{5}{1460}$. Avec ce nouveau cas, l'élève E32 doute de l'efficacité de leur méthode :

> E32 : Mais tu vois, c'est ça qui me fait peur, comme on ne peut pas tout vérifier, il y aura obligatoirement des nombres qui vont merder comme ça.

Les élèves continuent donc à chercher une décomposition pour $n = 73$ en utilisant $\frac{1}{19}$.

> E33 : Bon, à vérifier, le 1/19 là.
>
> E31 : Oui je trouve là qu'il y a une embrouille, il vaut mieux le travailler au corps.

Les élèves modifient la première étape de leur méthode de décomposition en itérant la valeur de a. Cette modification leur permet de trouver une décomposition pour $n = 73$ mais ils ne semblent pas convaincus de cette adaptation. Nous faisons l'hypothèse que ce qui les dérange, c'est de modifier la toute première étape de leur méthode. Les évolutions précédentes se sont effectuées sur le même mode : une modification de la décomposition de la seconde fraction, selon des critères de divisibilité. Dans ce cas, la méthode est différente dès le premier calcul. Les élèves prennent conscience de l'existence potentielle d'autres cas particuliers de ce type, et donc d'une potentielle infinité de cas à étudier.

Découverte d'un troisième cas particulier et second résumé de leurs résultats.
Les élèves rencontrent la même difficulté pour l'étude du cas $n = 89$ que pour celle du cas $n = 73$. Au lieu d'essayer de le résoudre avec la modification de la méthode faite sur $n = 73$, les élèves effectuent une synthèse des différents cas afin de mettre en évidence le lien entre ces deux cas et la raison pour laquelle ils sont des cas particuliers pour leur méthode.

> E33 : Je crois que je viens de trouver la règle qu'il nous fallait. En fait ça plante, si c'est impair.
>
> E32 : Ouais on peut mais pas pour tous.
>
> E33 : Non si c'est impair, c'est [inaudible] à chaque fois.
>
> E32 : Sauf là, où on y est arrivé quoi.
>
> E33 : En fait, il y a des règles spéciales je pense.

L'élève E31 revient sur leur première liste de nombres premiers (de 3 à 19). A partir de la décomposition pour $n = 17$, il remarque que la difficulté est liée à la nature du dénominateur de la seconde fraction : « c'est quand il est impair et pas multiple de 5 ». Il met alors des signes de couleurs devant les différentes décompositions selon la nature du dénominateur de la seconde fraction (cf. annexe E6, p. 215-216) :

- quand la seconde fraction est de la forme $\dfrac{1}{m}$ avec m entier naturel, il met un signe bleu : « c'est la règle du 1 » (exemples : $n = 23, n = 31, n = 57$) ;
- quand la seconde fraction est de la forme $\dfrac{3}{m}$ avec m pair, il met un signe vert et précise que $\dfrac{3}{m} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{2}{m}$ (exemples : $n = 29, n = 37, n = 53$) ;
- quand la seconde fraction est de la forme $\dfrac{3}{m}$ avec m impair divisible par 5, il met il signe rose et ne désigne qu'un seul cas, $n = 97$.

Il conclut qu'il y a un problème lorsque la seconde fraction est de la forme $\dfrac{3}{m}$ avec m impair et qui finit par 7 ou 1. Il identifie trois cas particuliers :

- pour $n = 41$, la seconde fraction est $\dfrac{3}{451}$;
- pour $n = 73$, la seconde fraction est $\dfrac{3}{1387}$;
- pour $n = 89$, la seconde fraction est $\dfrac{3}{2047}$.

Le résumé de leur méthode de décomposition par distinction de cas leur permet de trouver un lien entre les trois cas particuliers qu'ils ont trouvés pour des valeurs de n premier et inférieur à 100. Précisons que leur méthode n'est pas formalisée comme nous l'avons présentée ci-dessous. Elle est toujours explicitée à partir de la description des processus de calculs, par expérience mentale (Balacheff, 1987).

Élaboration d'une nouvelle règle pour trouver une décomposition des trois cas particuliers.
Après avoir cherché en vain une nouvelle méthode pour décomposer la fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair non multiple de 5, les élèves reviennent sur la manière dont ils avaient réussi à décomposer le cas $n = 73$, c'est-à-dire en prenant comme première fraction unitaire la partie entière supérieure de $\frac{n}{4}$ plus 1. Ils veulent la tester sur $n = 41$.

> E33 : Mais ce n'est pas possible ce qu'on a mis [Pour $n = 41$, ils avaient écrit $\frac{4}{41} = \frac{1}{11} + \frac{2}{902} + \frac{4}{902}$] Le calcul n'est pas bon [...] 902 ce n'est pas divisible par 4.
> [...]
> E33 : Par contre, si on change la fraction et qu'on la décale d'un cran, ça marche, on trouve des trucs évidents. [...] En fait, quand il ne marche pas comme ça, il faut prendre celui d'après.

Avec cette modification, les élèves trouvent des décompositions pour les trois cas particuliers :

- $\dfrac{4}{41} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{7}{492} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{492} + \dfrac{6}{492}$;
- $\dfrac{4}{73} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{7}{1460} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{2}{1460} + \dfrac{5}{1460}$;
- $\dfrac{4}{89} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{7}{2136} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{6}{2136} + \dfrac{1}{2136}$.

Dans ce cas, la seconde fraction est de la forme $\frac{7}{m}$ avec m pair et l'élève E33 précise qu'elle se décompose en $\frac{1}{m} + \frac{6}{m}$ ou en $\frac{2}{m} + \frac{5}{m}$. Il explicite ce cas en décrivant les processus de calculs à partir des exemples. La règle n'est pas formalisée ni écrite.

Idée de construire un algorithme de balayage.
L'élève E33 voudrait faire un algorithme pour tester des décompositions sur « plein de nombres ». Les élèves réfléchissent donc à la construction d'un tel algorithme :

> E31 : Qu'est ce qu'un algorithme ? J'ai envie de dire, ça a un début et une fin.
> E33 : Non, euh, tester déjà pour les pairs, tu rentres déjà la formule des pairs [...] On fait tous les nombres tant qu'à faire, ça sera beau, ce sera joli, ce sera précis. [...] Genre si n est pair, on met notre formule, donc il te sort ça. Il faut bien d'ailleurs qu'il arrive à retenir, à le ressortir en somme de trois fractions en fait.
> [...]
> E31 : Bon si n pair, après si n impair, disjonction de cas. Mais l'algorithme ce n'est peut être pas aussi...
> E32 : Non mais laisse tomber.
> E33 : Si n impair, on fait entier suivant, suivant de $\frac{n}{4}$.
> (L'élève E33 fait un arbre sur son cahier de bord, cf. annexe E6 p. 217)
> E32 : Mais déjà l'ordi, quand tu écris si n pair, tu crois qu'il va comprendre le truc ?

Les élèves essaient de déterminer la structure de l'algorithme, notamment les deux premières étapes, si n est pair ou si n est impair. L'élève E33 a dessiné un arbre sur son cahier de bord pour illustrer la structure de cet algorithme. Ce qui semble leur poser des difficultés c'est l'implémentation de l'algorithme sur un ordinateur, par exemple comment traduire la parité. Nous faisons l'hypothèse que les élèves abandonnent, dans la suite de leur recherche, l'idée de programmer un tel algorithme car ils pensent qu'ils n'ont pas les connaissances nécessaires en programmation.

Ces différents extraits mettent en évidence que la démarche des élèves est expérimentale au sens où nous l'avons définie, c'est-à-dire qu'ils effectuent des allers et retours entre la manipulation de nombreux exemples et l'élaboration d'éléments théoriques pour rendre compte des propriétés de certains cas particuliers. La visée de leur recherche s'inscrit dans la recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données, n étant premier. Au cours de l'élaboration de leur méthode de décomposition, les élèves discutent plusieurs fois de la pertinence de cette méthode pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus. Un élève est particulièrement sceptique puisque l'étude consiste à étudier les nombres premiers et que ces derniers sont en nombre infini. Les deux autres élèves semblent conscients de cet inconvénient mais ils font l'hypothèse que cette étude permet d'apporter des éléments productifs et intéressants pour étudier le problème initial.

E32 : En fait au final, notre conjecture est fausse

E33 : Bah elle est vraie mais pas dans tous les cas en fait. [...] On bouche les trous mais ça marche.

E32 : Oui mais en gros bah t'as rien en fait.

E33 : Bah si ça marche.

E31 : On est au fond du gouffre.

[...]

E33 : Donc là, là du coup on a tous les nombres n inférieurs à 100, là on les a tous.

E32 : Ça nous apporte quoi ? Rien.

E33 : On a un taux de réussite de 100% pour les nombres de 0 à 100 (rires).

E31 : J'ai envie de dire, c'est une partie de l'infinité.

[...]

E32 : Moi je voudrais dire : oui et alors ? Super on a les 100 premiers et ça nous apporte quoi ?

E33 : On a quand même les 100 premiers. [...] Bon allez, on se fait les 100% jusqu'à 1000, qui me suit ? (rires) [...] Il faut qu'on arrive à sortir ça en algorithme car ça, ça élimine pas mal de trucs tu vois, vu qu'on voit où ça plante, on pourrait rechercher là où ça plante. Le problème, si ça plante jusqu'à l'infini, on n'a pas fini.

E31 : Moi je vote pour un algorithme.

E32 : Moi je tiens à dire que cette problématique est infaisable car on n'a pas un nombre fini de nombre premiers déjà tu ne peux pas finir le problème, c'est pour ça qu'il est ouvert.

E31 : Mais si, il y a bien d'autres problèmes où il y a des nombres premiers et on a réussi à prouver quelque chose.

Épisode 13 : Perfectionnement de la méthode de décomposition par étude des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour n premier, $100 < n < 300$.

Les élèves débutent la séance 4 en reprenant leurs recherches de la séance précédente. L'élève E32 les résume : « il y a trois nombres premiers inférieurs à 100 qui ne marchent pas avec la règle qu'on a trouvée ». L'élève E31 propose d'étudier si ces valeurs de n ont des points communs. L'élève E32 rappelle qu'ils ont une autre règle pour décomposer les cas particuliers, celle de prendre une valeur de a plus grande. L'élève E33 voudrait alors vérifier cette règle en cherchant une décomposition pour tout n premier entre 100 et 300. Nous leur inscrivons la liste des nombres premiers entre 100 et 300 au tableau. Les élèves se partagent la liste et effectuent les décompositions.

Ce travail permet à chaque élève de mettre en œuvre la méthode de décomposition qui a été principalement élaborée et testée par l'élève E33. Les élèves E31 et E32 lui posent donc plusieurs questions en fonction des différents cas rencontrés :

- E32 (il cherche la valeur de a exprimée avec la partie entière de $\frac{n}{4}$) : Je ne sais plus comment on partait, comment on fait pour les trouver les trucs. C'est le plus petit commun multiple non ? Ou le plus grand diviseur commun ? [...] Tu sais ce qu'ils nous avaient dit le groupe 1, ils avaient trouvé une façon de l'écrire.
- E31 : Quant tu avais un nombre comme ça, tu faisais comment ? $\frac{3}{2626}$.
- E31 : Ouh là j'ai un problème. Quand c'est 3 sur un nombre impair, tu fais comment ?
- E32 : Et 3 quand il est pair en dessous, tu multiplies par combien ?

L'élève E33 répond soit en effectuant le calcul, soit par une phrase décrivant le processus de calcul :

- E33 (réponse à la seconde question ci-dessus) : Fais voir, c'est un pair donc il se décompose, bah $\frac{1}{2626}$ et $\frac{2}{2626}$.
- E33 (réponse à la quatrième question ci-dessus) : Tu mets 1 sur le nombre qu'il y a en dessous puis plus 2 sur le nombre.

Cette phase de recherche permet aux élèves E31 et E32 de bien comprendre la méthode de décomposition en l'utilisant sur de nombreuses valeurs de n. Lorsque l'élève E32 comprend le processus pour décomposer une fraction de la forme $\frac{1}{m}$, avec m entier naturel, il dit :

> E32 : Et quand c'est sur 1, tu multiplies par 2 et après tu divises par 2. Ouais mais quand c'est des trucs comme ça, je ne l'écris pas.
>
> E33 : Bah fais-le quand même, ça peut servir.
>
> E32 : Non mais là tu vois, j'ai 1 sur un grand nombre, on sait qu'on le multiplie par 2 pour le diviser par 2.
>
> E33 : Oui oui, bah oui ça c'est facile.

Ses écrits montrent effectivement qu'il n'écrit pas les décompositions en somme de trois fractions unitaires pour ces cas-là (voir par exemple les décompositions pour $n = 151, n = 163$, annexe E5, p. 203). Notons qu'il procédera de la même manière pour le cas où la fraction est de la forme $\frac{3}{m}$ avec m pair, mais seulement à partir du troisième cas rencontré. Les décompositions pour $n = 157$ et $n = 173$ sont écrites en somme de trois fractions unitaires alors que la décomposition pour $n = 181$ est sous la forme $\frac{1}{a} + \frac{3}{m}$ (cf. annexe E5, p. 203). Cette phase de recherche aide également l'élève E33 à expliciter davantage les processus de calculs qu'il met en œuvre. Par exemple, lorsque l'élève E31 lui demande comment traiter le cas où la seconde fraction est de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair multiple de 5, il ne se souvient plus exactement du processus. Il a alors recours à l'exemple $n = 97$, qu'il utilise comme exemple générique (au sens de Balacheff), pour l'expliquer :

> E33 : Je ne sais plus comment on fait, attends il faut que je regarde (il tourne les pages de son cahier de bord pour trouver un exemple. Il trouve le cas $n = 97$).
>
> E32 : Donc 3 sur un multiple de 5, il faut que tu multiplies par 2 apparemment.
>
> E33 : Oui par 2, parce que ça fait 6 sur un nombre divisible par 5 et par 2 donc du coup quand tu sépares, quand tu as 6, tu mets 1 sur le truc que tu as trouvé plus 5 sur le truc que tu as trouvé, vu qu'il est divisible par 5.

Dans l'étude de sa liste de nombres premiers, l'élève E33 ne trouve pas de cas particuliers et cela semble l'embêter. Il aimerait également généraliser la méthode de décomposition mais ne sait pas comment faire :

> E33 : Par contre, on a un problème aussi, c'est pour montrer que, tu sais quand tu divises [...] c'est soit 1, soit 3 mais ça tu ne peux pas le, il faudrait qu'on arrive à le généraliser ça.
>
> E32 : Et encore parce que tu as des exceptions dedans.
>
> E33 : Non avec la fraction où c'est le plus petit dénominateur possible, c'est toujours 1 ou 3 pour l'instant, on n'a jamais trouvé autre chose.

L'élève E32 pense que c'est faux car il a trouvé un cas où le numérateur de la seconde fraction est 2 (cf. annexe E5, p. 203, le cas $n = 167$ est raturé). L'élève E33 est convaincu de ce qu'il dit et suppose que l'élève E32 a fait une erreur de calcul, ce qui est le cas. L'élève E33 est conscient que cette piste de recherche est fastidieuse mais il la juge nécessaire car il a « besoin d'exemples ». Nous faisons l'hypothèse que son objectif est de trouver plusieurs formules générales qui permettraient de décomposer $\frac{4}{n}$ pour tout n premier. Il précise cependant qu'ils n'ont rien démontré, mais l'élève E32 ajoute : « on ne l'a pas démontré mais je veux dire, on l'a, on sait comment faire ».

L'élève E33 trouve une nouvelle technique pour décomposer une fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair. Il essaie de l'expliquer aux autres en décrivant le processus de calcul à l'aide d'un exemple générique (au sens de Balacheff) :

> E33 : Quand tu as un nombre avec un impair en dessous, tu le factorises [le nombre impair] en facteurs premiers et tu trouves le multiple de 3 qui est juste après. [Il prend un exemple, pour $n = 233$, il a $\frac{4}{233} = \frac{1}{59} + \frac{3}{13747}$]. Ça [13747], tu le décomposes en 59×233, donc du coup 3×20 c'est 60, je le décompose comme ça [$\frac{3}{13747} = \frac{3\times 20}{13747\times 20} = \frac{60}{20\times 13747} = \frac{1}{20\times 13747} + \frac{59}{20\times 13747}$], en fait ça fait, il y en a un qui est sur 1.
>
> E31 : Pourquoi 20 ?
>
> E33 : Parce que 60 c'est $59 + 1$. Et du coup tu auras 1 sur voilà [$\frac{1}{20\times 13747}$] plus 59 sur ça fois 20 [$\frac{59}{20\times 13747}$], sauf que vu que ça [13747] c'est divisible par 59, ça [13747] fois 20, c'est divisible aussi par 59.

L'élève a trouvé cette technique en cherchant une décomposition pour $n = 233$ mais nous n'avons pas d'éléments permettant de savoir comment il a eu cette idée. Notons que la démarche de recherche est toujours expérimentale. En appui sur la méthode de décomposition pour une valeur de n donnée, l'élève E33 trouve une décomposition de $\frac{4}{233}$ sous la forme $\frac{1}{59} + \frac{3}{13747}$. Les tests pour décomposer la seconde fraction en somme de deux fractions unitaires avec les processus de calculs déjà élaborés ne donnant pas de solution, il cherche à adapter la méthode. En manipulant cet exemple, il parvient alors à trouver un nouveau processus de calcul. Parallèlement, l'élève E32 éprouve une difficulté pour le cas $n = 241$.

> E31 : Et quand tu as 3 sur un nombre impair [pour $n = 241$, il a $\frac{1}{61} + \frac{3}{14701}$], c'est quoi déjà, c'est impossible ça ?
>
> E33 : Ça dépend lequel. C'est divisible par 5 ou pas ? Fais voir ce que tu as ?
>
> E32 : Il faut que tu le décomposes avec le facteur au-dessus, par exemple si tu as $\frac{1}{24}$, tu prends $\frac{1}{25}$ [...] et tu trouves 7 sur un nombre en général.
>
> E33 : Non il faut déjà que tu factorises le dénominateur. [Il effectue les calculs et ne trouve pas de solution]. Non regarde, c'est $\frac{1}{62}$, il faut $\frac{1}{62}$.
>
> [...]

E31 : C'est $\frac{7}{14942}$ [...] C'est 3 et 4, 42 c'est divisible par 4 ou pas ? Non. 2 et 5 ça ne marche pas.

[...]

E32 : Divisible par 6 ça ne marche pas.

E31 : Au pire, on le laisse de côté.

Au début, l'élève E33 semble faire l'hypothèse que sa nouvelle méthode va permettre de traiter les cas particuliers. Le cas $n = 241$ va jouer un rôle important dans leur recherche : ni la nouvelle technique avec la factorisation du dénominateur, ni celle de la modification de la valeur de a ne vont permettre de trouver une décomposition pour ce cas. Pour le moment, les élèves décident de le mettre de côté. L'élève E33 remarque que les valeurs de n pour lesquelles ils n'ont pas de décompositions sont congrues à 1 modulo 3. Il voudrait réussir à décomposer toutes les fractions de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair. Il a effectivement repéré que la difficulté provenait de la nature du dénominateur. Il note une liste (1, 3, 5, 7, 9) et précise qu'ils ont résolu le cas où m est un multiple de 5. Il voudrait donc « trouver les quatre autres impairs ». Pour cela, l'élève E31 propose de faire « la liste rouge » des cas spéciaux. Les élèves écrivent donc la liste des cas pour lesquels ils n'ont pas trouvé de décomposition. Pour chaque cas, ils mentionnent la fraction de la forme $\frac{3}{m}$ correspondante :

- pour $n = 113$: $\frac{3}{3277}$;
- pour $n = 193$: $\frac{3}{9457}$;
- pour $n = 241$: $\frac{3}{14701}$.

L'élève E31 fait l'hypothèse que ces nombres premiers « doivent avoir quelque chose en commun, une congruence ou une décomposition, ah non les nombres premiers ne se décomposent pas ».

Épisode 14 : Étude de huit cas particuliers pour des valeurs de n premier.

L'élève E31 écrit la liste des nombres premiers n inférieurs à 100 pour lesquels ils n'ont pas trouvé une décomposition : 41, 73, 89, 113, 193, 233, 241 et 281. Pour étudier ces cas, l'élève E31 cherche des points communs entre ces nombres (cf. annexe E4, p. 193). Il essaie plusieurs idées :

- il regarde l'écart entre deux nombres premiers (exemples : $73 - 41 = 32$; $89 - 73 = 16$, etc.) et il ne trouve aucune régularité ;
- il compte le nombre de nombres premiers entre deux éléments de la liste et trouve parfois une régularité (exemples : il y a cinq nombres premiers entre 41 et 73 et entre 89 et 113 mais il n'y a que deux nombres premiers entre 73 et 89) ;
- il compare la somme de leurs chiffres et trouve parfois des égalités (exemples : pour 41 et 113 la somme des chiffres est 5, pour 233 et 241 la somme des chiffres est 7 mais seul 73 donne $7 + 3 = 10$) ;
- il remarque que 89 est le seul nombre qui se termine par 9, les autres se terminent soient par 1, soit par 3.

Ces recherches ne donneront pas d'indices pertinents pour l'étude des cas particuliers. L'élève E33 a adopté une autre stratégie pour étudier la liste, il cherche une décomposition en appliquant la technique de la factorisation. De cette manière, il parvient à éliminer de nombreux cas et la liste se réduit à trois nombres : 73, 193, 241. Son étude a permis, d'une part d'affiner la méthode de décomposition avec la technique de la factorisation, et d'autre part de distinguer deux types de cas particuliers. Après l'application de la technique de la factorisation aux premiers cas, il repère une condition nécessaire pour qu'elle fonctionne : le nombre m (le dénominateur de la fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair) doit avoir un facteur premier congru à 2 modulo 3.

E33 : Quand il faut décomposer en facteurs premiers, quand il y en a un qui est congru à 2 modulo 3, j'arrive à le redécomposer en fait. Quand tu obtiens, par exemple, celui qui est congru à 2 modulo 3, il faut que tu le multiplies, trois fois, que tu aies celui au-dessus en fait. Tu l'appelles quoi, tu l'appelles z et $z + 1$ est divisible par 3.

[...]

E32 : C'est vrai ? Et c'est quoi z ? C'est le truc que tu as en-dessous de ta fraction ?

E33 : C'est celui qui est en-dessous.

E32 : En dessous de la deuxième ou de la première fraction ?

E33 : 3 sur quelque chose, en fait quand tu décomposes le dénominateur, il faut que tu trouves, il faut qu'il y ait un premier qui soit congru à 2 modulo 3. [...] Et après par rapport à ce nombre premier, tu fais plus 1 et tu divises par 3, après tu multiplies toute la fraction par le nombre que tu as trouvé.

E32 : Ça fait peur.

E33 : Je te ferai la démonstration après, t'inquiète.

E32 : Et quand il t'explique avec un calcul concret, c'est bien.

L'élève E33 essaie d'expliquer le processus de calcul mais ce n'est pas très clair pour les deux autres élèves. La condition qu'il vient de trouver lui permet d'analyser rapidement si la technique de factorisation donnera une décomposition, il lui suffit de décomposer en nombres premiers le nombre m et de regarder si l'un des facteurs est congru à 2 modulo 3. Notons que les élèves ne semblent pas avoir remarqué que $m = n \times a$ (où a est la partie entière supérieur de $\frac{n}{4}$) et qu'il leur suffirait de regarder si le nombre n lui-même est congru à 2 modulo 3. Néanmoins, l'élève E33 a remarqué que les nombres qui ne se décomposent pas avec ce processus de calcul sont tous congrus à 1 modulo 3 :

E33 : Parce que tous ces nombres premiers, ils sont congrus à 1 modulo 3. Du coup je ne peux absolument rien faire avec.

Nous faisons l'hypothèse qu'il étudie la congruence modulo 3 de m plutôt que celle de n pour déterminer si une décomposition peut être trouvée grâce à la technique de factorisation, afin d'écrire explicitement la décomposition en somme de trois fractions unitaires. Le fait qu'elle ne soit pas encore automatisée et formalisée peut expliquer ce besoin d'écrire explicitement les calculs. Il s'agit d'un moyen de contrôle de la technique. Grâce à cette observation, les élèves distinguent deux types de cas particuliers. L'élève E31 les signalise sur son cahier de bord (cf. annexe E4, p. 193-194) avec un codage différent : il entoure en pointillés les « faux » cas particuliers et encadre les « vrais ». L'élève E33 voudrait trouver un nom pour appeler les cas restants :

E31 : 281 ce n'est pas un vrai.

E33 : 281, si si il marche.

E31 : Oui donc ce n'est pas un vrai.

E33 : Oui ce n'est pas un vrai. Il faut qu'on leur trouve un nom parce que là, c'est pas possible.

[...]

E33 : 241 c'est un vrai de vrai.

E32 : Voilà c'est ça le nom, un vrai de vrai, celui qui ne marche pas.

L'étude permet finalement aux élèves d'éliminer de nombreux cas particuliers et restreindre « leur liste rouge » à trois nombres. Elle a également permis de réduire le champ d'application de la méthode par itération de a. Elle n'est plus utilisée pour décomposer toute fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair non multiple de 5, puisque la technique de la factorisation permet de décomposer ces fractions lorsque m est congru à 2 modulo 3. Dans l'épisode suivant, nous verrons qu'elle est utilisée pour les trois cas particuliers restants, c'est-à-dire lorsque la technique de factorisation ne fonctionne pas (quand m n'est pas congru à 2 modulo 3).

Épisode 15 : Étude de trois cas particuliers restants.

Les élèves commencent par étudier ces trois cas en cherchant s'ils n'ont pas des points communs. Chaque élève propose plusieurs idées. L'élève E31 reprend en partie celles qu'il avait testées pour la liste précédente (cf. annexe E4, p. 193) :

- Il étudie la différence entre deux éléments consécutifs de la liste : $193 - 73 = 120$ et $241 - 193 = 48$. Il additionne 120 et 48 et exprime également ces deux nombres à l'aide de factorielles[27] : $120 = 5!$ et $48 = \frac{1}{2}4!$.
- Il compte le nombre de nombres premiers entre deux éléments consécutifs de la liste : il compte huit nombres premiers entre 193 et 241 et 22 nombres premiers entre 73 et 193. Il ajoute ces deux nombres. Il effectue ensuite un lien entre les valeurs trouvées précédemment et ces dernières en écrivant $\frac{120}{22} = \frac{60}{11}$ et $\frac{48}{8} = \frac{1}{6}$, puis en cherchant un produit en croix entre les fractions $\frac{60}{11}$ et $\frac{1}{6}$. Il écrit $\frac{10}{11} = \frac{n}{n+1}$.
- Il compare la somme de leurs chiffres : pour 73, $7 + 3 = 10$ et $1 + 0 = 1$; pour 193, $1+9+3 = 13$ et $1+3 = 4$; pour 241, $2+4+1 = 7$. Il remarque qu'il y a une différence de 3 entre chaque somme : pour 73, les sommes donnent 1, pour 193, elles donnent 4 et pour 241 elle donne 7.
- Il étudie la congruence modulo 24 de ces nombres et trouve qu'ils sont tous congrus à 1 modulo 24.

Cette dernière observation entraîne une discussion entre les élèves sur le lien logique entre $n \equiv 1[3]$ et $n \equiv 1[24]$:

> E31 : Oh regarde moi ça (Il a écrit $73 \equiv 1[24]$, $193 \equiv 1[24]$, $241 \equiv 1[24]$).
>
> E32 : Pourquoi modulo 24 ?
>
> E31 : Parce que c'est 4!
>
> E32 : On a un truc.
>
> E31 : Ils ont la même congruence modulo 24.
>
> E33 : C'est normal puisqu'ils sont congrus à 1 modulo 3, donc c'est normal qu'ils soient congrus à 1 modulo 24 aussi. Euh quoique non.
>
> [...]
>
> E31 : Ils sont congrus à 1 modulo 3.
>
> E33 : Je disais des conneries parce que je disais que s'ils étaient congrus à 1 modulo 3, ils étaient congrus à 1 modulo 24. L'inverse est valable mais...
>
> [...]
>
> E31 : Et après, s'ils sont congrus à 1 modulo 24, ils sont congrus à 1 modulo 3 ou pas ? Et c'est vrai ou pas dans ce sens-là ? [...] Mais qu'on ne peut pas le vérifier, d'accord, mais c'est dans quel sens ?
>
> E33 : Si un nombre est congru à 1 modulo 24, il est forcément congru à 1 modulo 3.

L'élève E33 ne donne pas d'éléments de justification pour démontrer l'implication et l'élève E32 pense qu'ils ne peuvent pas le vérifier. Ce point commun ne sera pas étudié par les élèves car ils pensent « qu'il ne sert à rien », étant donné qu'ils ont réussi à décomposer $\frac{4}{n}$ pour des

27. Il commet une erreur de coefficient dans l'expression de 48 à l'aide de 4!.

valeurs de n congrues à 1 modulo 24. L'élève E32 prend l'exemple de $n = 49$. Notons que l'élève E31 utilise la notion de factorielle, mais nous n'avons pas d'éléments permettant de savoir pour quelle raison il pense à exploiter cette notion.

L'élève E32 repère que les nombres restants ne sont pas dans la même centaine : $73 < 100$, $100 < 193 < 200$ et $200 < 241 < 300$.

> E32 : Et si tu remarques bien, celui là c'est pour ceux qui sont en dessous de 100, pour ceux en dessous de 200 et pour ceux en dessous de 300. Il n'y en a pas dans la même tranche. Est-ce que l'autre, tu vas le trouver en dessous de 400 et l'autre en dessous de 500, il n'y en a pas dans la même tranche. Il y en a toujours un au-dessus de la centaine que tu cherches.

L'élève E33 consulte le site Wikipédia afin de voir si ces nombres ne sont pas des nombres premiers spéciaux. Il trouve que ces nombres premiers sont des nombres premiers jumeaux, chanceux et cousins. Il fait donc l'hypothèse que ce sont des nombres premiers spéciaux. L'élève E32 explique à l'élève E31 ce que sont les nombres premiers jumeaux [28] :

> E32 : En fait tu as deux nombres entre chaque, par exemple 191-192-193, ils ont deux d'écart.
>
> E33 : 191 et 193 sont deux nombres premiers jumeaux, ils se suivent en fait.

L'élève E33 remarque qu'ils ont des nombres premiers jumeaux (par exemple 3 et 5 ou 227 et 229) pour lesquels ils ont trouvé des décompositions avec la méthode « classique ». Les élèves doutent donc de la pertinence d'étudier ce point commun. Ensuite l'élève E33 essaie d'expliquer la notion de nombres premiers chanceux : [29]

> E33 : C'est tout un crible, il faudra chercher sur Wikipédia [...] Par exemple, tu prends tous les nombres jusqu'à 100, le deuxième nombre c'est 2, tu supprimes un nombre sur 2, après le deuxième nombre c'est 3, tu supprimes un nombre sur 3 et au bout d'un moment, ça bloque, il y a certains nombres que tu ne peux pas supprimer en fait. [...] Et ceux là en font partie.

Sa définition n'est pas très précise et les élèves n'étudient pas ce point commun. L'élève E33 explique ensuite la notion de nombres premiers cousins [30] :

> E33 : Ils ont 4 de différence je crois. [...] 193 et 197 sont des premiers cousins. Euh, 241 est ce que ça marche aussi ? Euh non. Les cousins sont à oublier.

Les élèves ne cherchent pas à étudier plus en détail ces notions mais l'élève E33 évoque la possibilité de les « creuser, peut être chez lui ». Comme ils ne semblent pas convaincus de la

28. La définition de Wikipédia est la suivante : deux nombres premiers jumeaux sont deux nombres premiers qui ne diffèrent que de 2.

29. La définition de Wikipédia est la suivante : un nombre premier chanceux est un nombre premier et un nombre chanceux. Un nombre chanceux est un entier naturel dans un ensemble qui est généré par un « crible » similaire au crible d'Ératosthène qui génère les nombres premiers. Nous commençons avec une liste d'entiers démarrant par 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, ...). Puis nous enlevons un nombre sur deux, ce qui ne laisse que les entiers impairs (1, -, 3, -, 5, -, 7, -, 9, -, 11, -, 13, -, 15, -, 17, -, 19, -, 21, -, 23, -, 25, - , ...). Le deuxième terme de la suite est désormais 3. Maintenant, nous enlevons un nombre sur trois parmi ceux qui restent dans la liste (1, 3, -, 7, 9, -, 13, 15, -, 19, 21, -, 25, 27, - , 31, 33, -, 37, 39, -, 43, 45, -, 49, 51, ...). Le troisième nombre survivant est 7. Maintenant, nous enlevons un nombre sur sept parmi ceux qui restent dans la liste (1, 3, 7, 9, 13, 15, -, 21, 25, 27, 31, 33, 37, -, 43, 45, 49, 51, 55, 57, -, 63, 67, 69, 73, ...). Le quatrième nombre survivant est 9. Maintenant, nous enlevons un nombre sur neuf parmi ceux qui restent dans la liste, etc. Si nous répétons cette procédure indéfiniment, les survivants sont les nombres chanceux : 1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 63, 67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99, ...

30. La définition de Wikipédia est la suivante : les nombres premiers cousins sont une paire de nombres premiers qui diffèrent de quatre.

pertinence d'étudier les points communs entre les nombres premiers 73, 193 et 241, l'élève E33 propose d'essayer de décomposer $\frac{4}{n}$ pour ces valeurs de n en utilisant le processus de calcul qui itère[31] la valeur de a. Le cas $n = 73$ est déjà fait (il a été trouvé à la fin de la séance précédente). Les élèves E31 et E32 étudient le cas $n = 193$ et trouvent : $\frac{4}{193} = \frac{1}{49} + \frac{3}{9457} = \frac{1}{50} + \frac{7}{9650}$. Pour trouver cette décomposition, les élèves fixent la valeur de a à $E(\frac{n}{4}) + 2$, puis adaptent la méthode de décomposition d'une fraction de la forme $\frac{3}{m}$ avec m impair multiple de 5, à la fraction de la forme $\frac{7}{m}$ avec m impair multiple de 5. L'élève E33 effectue cette même méthode pour étudier le cas $n = 241$, mais elle ne fonctionne pas :

> E33 : Là par contre on va avoir un sérieux problème avec 241 [...] Il y a absolument rien de rien.
>
> E32 : Même en augmentant ? Même en mettant 63 ?
>
> [...]
>
> E33 : Je n'arrive pas à appliquer ce que j'avais trouvé pour le 3, pour le 11. [Il a $\frac{1}{63} + \frac{11}{15113}$ et voudrait appliquer la technique de factorisation].

Les trois élèves cherchent alors une décomposition pour ce cas particulier. L'élève E33 pense avoir trouvé une solution :

> E33 : Voilà trouvé, en fait les gars, tout simplement $\frac{4}{241} - \frac{1}{241}$.
>
> E31 : Bah ça fait $\frac{3}{241}$, tu ne peux pas le diviser, j'y avais pensé aussi.
>
> E33 : Non, si, ça marche. Tu multiplies la fraction par 81.
>
> E32 : Pourquoi 81 ?
>
> E33 : Euh je ne sais plus, euh parce que 81×3 c'est 243. Voilà tout simplement. Mais là par contre il y a un souci. Mais il est congru à 1 modulo 3. Il y a quelque chose qui ne colle pas, là.
>
> [...]
>
> E32 : Je suis sûr que tu as fait une erreur de calcul, je ne sais pas pourquoi.
>
> E33 : J'en étais sûr.
>
> E32 : Tu as fais une erreur de calcul ?
>
> E33 : Voilà !
>
> [...]
>
> E31 : Mais ce n'est pas possible, il doit y avoir quelque chose ou alors on a prouvé que ça ne marchait pas, 241 ne convient pas.
>
> E32 : Ça serait beau quand même.

Même s'ils n'arrivent pas à trouver une décomposition pour ce cas particulier, les élèves semblent persuadés qu'il en existe une. Une partie de la suite de leurs recherches sera effectivement consacrée à la recherche d'une décomposition pour $n = 241$ (voir épisode 17).

Épisode 16 : Rédaction d'une synthèse de leurs travaux.
Nous demandons aux élèves de faire une synthèse de leurs travaux en précisant clairement les résultats obtenus par rapport à la question posée, c'est-à-dire pour quels entiers naturels n, on peut avoir trois entiers naturels a, b, c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Avant de commencer à rédiger la synthèse, les élèves discutent du statut du cas $n = 241$ et du processus de preuve existentielle, avec ou sans construction de solutions. Ils prennent conscience que ne pas avoir de processus de construction n'est pas une preuve de la non existence de solutions.

31. C'est-à-dire remplacer a par $a + 1$ ou $a + 2$.

E33 (en réponse à la question posée) : Tous, sauf 1 ! (rires)

E32 : 241.

[...]

E33 : On a trouvé LA valeur.

E31 : Et nous pouvons démontrer très facilement que cette conjecture est fausse. (rires)

E33 : Le problème c'est que, pour prouver que ça marche pas, il faudrait trouver un contre-exemple.

E32 : En fait le problème pour que ça marche pas, c'est que nous on n'arrive pas à trouver que ça ne marche pas.

E33 : Et tu sais, dans l'équation de départ, tu remplaces n par 241 [...] et tu bidouilles ton truc pour montrer que tu ne trouves pas a, b, c entiers.

E32 : Ça, ok, mais on ne sait même pas si c'est nous qui ne trouvons pas ou si ça n'existe pas vraiment.

L'élève E33 semble faire l'hypothèse que le cas $n = 241$ pourrait être un contre-exemple à la conjecture d'Erdös-Straus et l'élève E32 se demande si ce n'est pas seulement un cas particulier, ne pouvant être décomposé avec leur méthode. Les discussions se poursuivront plus tard (lors de la séance suivante) et les élèves commencent à rédiger leur synthèse (cf. annexe E4 p. 195-196). C'est l'élève E31 qui écrit, sous la dictée de l'élève E33. Le premier point de leur synthèse est l'identité formulée pour tout n pair. L'élève E33 pense qu'il n'est pas nécessaire de préciser que $\frac{n}{2}$ est un nombre entier lorsque n est pair car « ça va de soi ». Le second point est l'étude de la décomposition de $\frac{4}{n}$ pour n impair et premier. Une discussion anime le groupe pour déterminer s'ils écrivent n impair ou n premier :

E33 : Si n est impair.

E31 : Nombre premier ou pas ?

E33 : Euh [...] on met plutôt les nombres premiers. Parce que les autres impairs, on peut les déduire des autres premiers.

E31 : Bah oui on commence déjà par ce qu'on sait [...] les nombres non premiers, enfin impairs mais non premiers.

E32 : On fait les nombres impairs non premiers.

E33 : Et tu les décomposes comment si tu ne sais pas décomposer les premiers ?

E31 : Certes.

E33 : Nombre premier différent de 2.

E32 : Si c'est impair, c'est différent de 2 (rires).

E33 : Oui, non, mais ceux qui sont premiers sont forcément impairs, sauf 2. Les impairs, c'est trop vaste.

E32 : Tu mets impair et premier.

Les élèves E31 et E32 veulent effectuer la disjonction de cas pair/impair et ne comprennent pas pour quelle raison l'élève E33 veut écrire premier et pas seulement impair. Les deux élèves semblent avoir retenu que les cas délicats pour trouver une décomposition de $\frac{4}{n}$ sont les cas où n est premier. L'implication, *s'il existe une décomposition pour tout n premier, alors il existe une décomposition pour tout n impair*, ne semble pas claire pour eux et ils pensent que les cas où n est impair et non premier sont traités autrement.

L'écriture de la synthèse va obliger les élèves à formaliser leur méthode de décomposition pour tout n premier. Pour cela, ils introduisent trois paramètres, t, j et k, pour écrire sous forme algébrique la première décomposition de $\frac{4}{n}$, en somme de deux fractions : $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{j}{k}$.

Ils précisent que t est le plus petit entier possible et que j, k sont des entiers naturels non nuls. Le paramètre t est explicité avec des mots, les élèves n'utilisent pas la notation partie entière de $\frac{n}{4}$. Dans leurs échanges, ils n'en parlent pas non plus. Pour formaliser la méthode de décomposition, ils s'appuient sur la description du processus. Nous faisons donc l'hypothèse que ce choix d'écriture résulte de leur manière de mettre en œuvre la méthode. Il semble qu'ils aient conservé leur premier moyen de calcul de la valeur de t (chercher, à la calculatrice, par essais successifs, le plus petit entier en étudiant le signe de $\frac{4}{n} - \frac{1}{t}$) et qu'ils n'utilisent pas la partie entière. Les élèves distinguent trois cas pour étudier la décomposition pour n impair et premier. Dans le premier cas, $j = 1$ et k est un entier naturel. Dans le second cas, $j = 3$ et k est pair. Le troisième cas se décompose en deux sous-cas, lorsque $j = 3$ et k impair multiple de 5 et lorsque $j = 3$ et k impair non multiple de 5. Pour les deux premiers cas, les élèves écrivent sans difficulté les décompositions, à savoir $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$ et $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} + \frac{2}{k}$. Pour écrire l'identité du premier sous-cas, c'est-à-dire quand $j = 3$ et k impair multiple de 5, l'élève E33 revient aux exemples et énonce $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2k} + \frac{5}{2k}$. L'élève E31 voudrait écrire la troisième fraction sous forme unitaire $(\frac{1}{\frac{2k}{5}})$ mais les deux autres élèves préfèrent écrire $\frac{5}{2k}$. Il veut alors préciser « avec 2k divisible par 5 » mais l'élève E33 répond : « si 5 divise k alors $2k$ est divisible par 5 ». Il ne note donc pas la précision dans la synthèse. Pour écrire le second sous-cas, c'est-à-dire quand $j = 3$ et k impair non multiple de 5, les élèves éprouvent quelques difficultés.

> E33 : Comment tu veux expliquer ça ?
>
> E31 : On cherche à diviser k par un facteur premier.
>
> E33 : On décompose en facteurs premiers, enfin non, on cherche la congruence de.
>
> E31 : Non on décompose d'abord.
>
> E33 : On décompose k en facteurs premiers et là, il y a deux cas [...] il existe au moins un diviseur congru à 2 modulo 3, il faut qu'on l'appelle, un diviseur d. [...] Attends il faut que je retrouve mon truc. Attends.
>
> [...]
>
> E31 : Ensuite il se passe quoi dans ce cas-là ?
>
> E33 : Ça fait $d + 1$ sur 3 égal à une autre constante (rires) et en fait après tu multiplies ton truc par e et ça, tu peux le décomposer en 1 sur alpha plus $3e - 1$ sur, euh c'est horrible.
>
> E32 : A faire on y arrive, à écrire on ne peut pas.
>
> E33 : A faire c'est facile.
>
> E32 : Prends un exemple simple, prends ton exemple simple là et tu décris ton exemple.

La remarque de l'élève E32 « à faire on y arrive, à écrire on ne peut pas » met en évidence le fait que les connaissances construites au sein de leur méthode de décomposition sont de nature opératoire (celles qui permettent « de faire et de réussir » (Vergnaud, 2001) et qu'ils éprouvent des difficultés à les écrire, c'est-à-dire pour passer à une forme prédicative des connaissances (celles qui prennent « la forme de textes, d'énoncés »(Vergnaud, 2001)).

L'élève E33 prend alors le cas $n = 41$ en tant qu'exemple générique du sous-cas qu'ils essaient de formaliser. La première décomposition est $\frac{1}{11} + \frac{3}{451}$. Il écrit $451 = 11 \times 41$ et il se rend compte que la valeur de k est égale à $n \times t$. Il voudrait le vérifier sur un autre exemple.

> E31 : Et on en sort quoi, de là ? Comment t'as fait pour décomposer ça ?
>
> E33 : Attends, il faut que j'en prenne un autre parce que sinon.

E31 : Mais pourquoi ?

E33 : Mais imagine que ça ne marche pas.

E32 : Mais ça marche, tu l'as fait.

[...]

E33 : Si ça marche, ça fois ça, ça fait ça. [...] C'est $n \times t$ mais ça ne ressort pas tout le temps, ça.

E32 : Quand c'est congru à 1 modulo 3 ça ne ressort pas.

La rédaction de la synthèse permet ici à l'élève E33 de repérer une nouvelle régularité : la valeur de l'entier k est égale à $n \times t$, *a priori* pour tout entier n non congru à 1 modulo 3. Il fait écrire à l'élève E31 dans la synthèse : « dans ce cas, on remarque que $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{3}{n \times t}$ ». Ce dernier lui demande d'expliquer la suite de sa technique :

E31 : Il faut que tu fasses ton truc avec le 11, là [Il fait référence à l'exemple pour $n = 41$].

E33 : $d+1$ sur 3 est égal à un autre facteur, $d+1$ sur 3 est égal à e, avec e entier.

E31 (énonce ce qu'il écrit) : On pose $\frac{d+1}{3} = e$, avec e entier.

E33 : Puis tu multiplies cette expression là $[\frac{3}{nt}]$ par e. On peut alors décomposer $\frac{3e}{nte}$ tel que $\frac{1}{nte}$.

E32 : Plus $3e - 1$ sur nte.

E33 : Il faut qu'on arrive à simplifier le dernier [...] Oui mais ça il faut prouver qu'il est entier.

E32 : Mais il est toujours entier, quoique tu fasses, mais non mais 3 fois ce que tu veux, il sera toujours entier ton nombre, moins un, tout ce que tu veux il sera entier ton nombre.

E31 : Mais il y a une division.

E33 : Euh c'est lequel qui est congru à 2 modulo 3 ?

E31 : C'est d.

E33 : Pourquoi il n'y a plus de d ? (rires)

E32 : Mais si, parce que d c'est ce qu'il y a dans nte [...] Mais si d c'est le diviseur de nte et $k = nt$, donc en fait d divise nte.

E31 : d est un diviseur de k et pas de k là-dedans.

E32 : Mais k c'est nte, non c'est nt donc d divise nte.

E33 : Il y a trop de variables.

Dans cet extrait, les élèves ont des difficultés à manipuler les différentes variables qu'ils ont introduites car ils oublient les liens entre ces variables. L'élève E33 semble avoir introduit la variable e pour simplifier les écritures (cela évite les quotients de quotients) et mettre en évidence que le quotient $\frac{d+1}{3}$ est un entier. Cependant, dans la décomposition finale, cette variable n'apparaît plus et cela le perturbe, il ne voit pas comment prouver que $\frac{nte}{3e-1}$ est un entier. L'élève E31 est également perdu entre les différentes variables et les rapports entre elles. L'élève E32 réussit à refaire les liens entre e, d, k et nt et à montrer que le quotient est bien un entier. Lorsqu'ils terminent l'écriture de ce sous-cas, la séance est terminée et ils n'ont pas le temps d'écrire le second sous-cas, c'est-à-dire quand k ne contient pas de facteur premier congru à 2 modulo 3.

Épisode 17 : Discussions sur l'élaboration de preuves des résultats. Recherche d'une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour $n = 241$.

Les élèves sont conscients qu'ils n'ont pas de démonstrations de leurs résultats et cherchent ce qu'ils pourraient démontrer :

E32 : En fait on n'a rien prouvé du tout nous. On a juste fait au cas par cas.

E33 : Pour l'instant, on n'a rien prouvé, mais il y en a certains c'est facile à prouver. Certains autres, c'est plus compliqué.

[...]

E31 : Il faut qu'on réfléchisse à ce qu'on peut prouver là-dedans, parce qu'on n'a rien démontré du tout.

E33 : Celui avec les pairs c'est facile à démontrer.

Seul l'élève E32 semble se souvenir qu'ils ont déjà travaillé sur la preuve de ce résultat. Les autres élèves semblent avoir oublié qu'ils ont déjà essayé de faire un raisonnement par récurrence et qu'ils avaient conclu qu'il n'était pas nécessaire, la vérification de la somme des trois fractions avec la nature des nombres en jeu étant suffisante (voir épisode 7). L'élève E33 explique donc comment il envisage de faire la démonstration :

E32 : Bah n pair on l'a déjà démontré avant.

E33 : Mais on n'a rien démontré. [...] On l'a juste écrit, on ne l'a pas démontré.

E32 : Je te dis qu'on l'a démontré [Il cherche dans son cahier de bord].

E33 : C'est vite fait, il y en a pour trois lignes. Tu mets ça [$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$] et il faut que tu trouves que c'est égal à $\frac{4}{n}$.

E31 : Bah ouais, mais je ne vois pas trop, genre par récurrence ?

E33 : Non tu prends ça et ça tu montres que c'est $\frac{4}{n}$, tu as juste à les additionner.

L'élève E31 ne semble pas convaincu que ce qu'explique l'élève E33 permet de prouver leur conjecture pour tout n pair. L'élève E33 lui dit de l'écrire. Pour écrire la preuve (cf. annexe E2), l'élève E33 ne suit pas l'idée proposée par l'élève E31 et ne reprend pas l'identité qu'ils ont formulée. Il écrit n sous la forme $2k$ et effectue le calcul en partant de la fraction $\frac{4}{n} = \frac{4}{2k}$ qu'il décompose en somme de trois fractions unitaires $\frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}$.

L'élève E31 insiste ensuite pour essayer de démontrer quelque chose concernant leurs résultats pour n impair et premier. L'élève E32 pense qu'ils ne le peuvent pas.

E31 : Il faut qu'on essaye de démontrer quelque chose, on n'a rien démontré là.

E32 : Tu veux démontrer quoi ? On ne peut pas.

[...]

E31 : Non mais qu'on essaie de démontrer quelque chose, il y a bien un truc qui doit être au moins simple, qui peut être démontré à notre niveau, non ?

Pour démontrer leurs résultats pour n impair et premier avec le même type de raisonnement que pour les nombres pairs (c'est-à-dire vérification de l'identité et nature des nombres en jeu pour vérifier le domaine de validité), nous avons identifié que les élèves avaient deux difficultés. La première est de déterminer l'expression de la valeur de t en fonction de n.

E31 : Ils ont quoi comme rapport les deux nombres, là ? [...] Quel est le rapport entre le plus petit possible que tu as trouvé [c'est-à-dire t] et n ? Il faudrait qu'on puisse mettre une relation.

E33 : Alors on avait trouvé un truc l'autre fois. [...] Je ne sais plus, on cherchera après.

[...] (10 minutes plus tard)

E31 : Déjà, exprimer 1 sur le plus petit possible, tu te sens chaud à exprimer ça ?

E33 : Bah 1 sur t, t le plus petit possible, t appartenant à $\mathbb{N}$. En fait, tu as $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} \geq 0$, voilà, t le plus petit possible.

E31 : Bon alors maintenant il faut une relation entre n et t.

E33 : Si, on en avait trouvé une [...], c'est le truc du groupe 1, [...] je crois que c'était partie entière de $\frac{n}{4}$ [...] Partie entière supérieure.

Les élèves semblent avoir trouvé l'expression cherchée mais ils ne s'en servent pas. Ils continuent à exprimer la valeur de t avec des mots. Nous faisons l'hypothèse que cette difficulté d'ordre syntaxique est liée à la notion de partie entière, qui ne semble pas naturalisée ni mobilisable par les élèves. La seconde difficulté rencontrée par les élèves pour élaborer une preuve des résultats pour tout n premier est de prouver que les seules valeurs possibles de j sont 1 et 3 (lorsque t est égal à la partie entière supérieure de $\frac{n}{4}$).

E33 : Tu sais, quand on prend 1 sur le plus petit possible [...] bah tu as deux cas, soit $\frac{1}{m}$, soit $\frac{3}{m}$. Ça par contre, il faudrait aussi le démontrer qu'il y a deux cas possibles comme ça.

[...]

E33 : Le problème en fait c'est qu'on ne sait pas s'il y a d'autres cas, genre des $\frac{5}{m}$, $\frac{11}{m}$, on n'en sait rien.

[...]

E33 : Ça on l'a constaté, c'est un fait mais on ne sait pas pourquoi [$j = 1$ ou $j = 3$]. D'ailleurs le $\frac{5}{m}$ on le trouve si on augmente le dénominateur.

E31 : Oui mais pourquoi ?

E33 : Ah ça je ne sais pas.

[...]

E32 : On démontre toujours rien en faisant ça.

E31 : On n'a pas le niveau pour le démontrer.

[...]

E31 : Mais je ne démontre rien, je ne peux pas démontrer, je n'ai pas les capacités intellectuelles pour démontrer. [...] Est-ce que tout $\frac{4}{n}$ peut être décomposé en ça ? On ne sait même pas si ça on peut le faire à chaque fois. Il n'y a rien qui nous prouve. Qu'est ce qui nous prouve ? Rien.

E32 : Non, mais on sait qu'on peut décomposer, soit comme ça, soit comme ça.

E31 : Est-ce que ça c'est vrai ?

E32 : Bah oui c'est vrai.

E31 : Bah non pourquoi ?

E32 : Il peut y avoir un cas en plus mais ça, c'est obligatoire que ça arrive à un moment donné.

E33 : Il y a des cas où ça n'arrive pas comme ça.

E32 : C'est pour ça que tu fais des sous-cas parce que chacun a une issue possible.

E33 : Tu ne peux pas démontrer l'ensemble des sous-cas comme ça.

E32 : Si tu trouves ça, alors ça veut dire ça, ça, ça.

E33 : On ne peut pas y trouver petits bouts par petits bouts.

Ce qui leur manque pour prouver que les valeurs de j possibles sont 1 et 3 lorsque $t = E(\frac{n}{4})+1$, c'est d'écrire n sous la forme $4k+1$ ou $4k+3$, k entier naturel. Dans ces deux cas, t est égal à $k+1$ et si $n = 4k+1$, alors $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} = \frac{3}{nt}$ et si $n = 4k+1$, alors $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} = \frac{1}{nt}$. Les élèves doutent d'avoir les connaissances mathématiques (notionnelles et heuristiques) nécessaires pour réussir à démontrer des éléments de preuve de leurs résultats.

Les discussions au sein du groupe montrent également que leur méthode n'est pas encore stabilisée ni bien comprise, notamment la technique de factorisation. Même l'élève E33 qui l'a élaborée se demande à deux reprises comment elle fonctionne.

E33 : Et on avait trouvé quoi pour ceux-là ? Je ne sais plus comment on les avait résolus.

E32 : Bah tu sais que tu multiplies par l'autre en dessous.

E33 : Multiplié par celui qui était en bas ?

E32 : Non, mais tu sais en fait, tu multipliais ton truc là en fait pour avoir ton facteur premier, et après tu remultipliais l'autre par ce facteur premier, en fait.

[...] (E33 cherche un exemple dans son cahier de bord).

E33 : Je le décomposais en facteurs premiers ?

E32 : Oui, donc tu avais ça en fait (Il lui montre la décomposition trouvée pour $n = 281$).

E33 : Il faut que je refasse vite fait la manip parce que je ne m'en souviens jamais.

E32 : Regarde, regarde, celui-là t'as fait ça, tu as décomposé en facteurs premiers, tu as vu qu'un facteur premier c'était 2 modulo 3, donc tu as pu faire la division en deux, t'en as un que t'as laissé sur 1 et l'autre que t'as mis sur ton facteur premier.

Le retour à l'exemple générique (au sens de Balacheff) est nécessaire pour comprendre la technique de factorisation. L'étape de l'expérience mentale n'est encore pas atteinte car l'élève E33 a des difficultés pour se souvenir du processus, ce qui complique sa formalisation et son explicitation.

E32 : Là, t'as 71 fois 281 et ça te donne ce nombre-là.

E33 : Oui.

E32 : Celui-là tu le multiplies par 71, je crois, c'est ça par 71, ok, donc 3 fois 71 ça donne un nombre, c'est volumineux, ça donne un nombre assez volumineux.

E33 : Tu multiplies par 24 pour avoir 72.

E32 : Oui voilà, faut avoir 72 en haut, après tu enlèves 1 là et là tu as plus que 71, donc tu peux diviser. Donc là t'as quoi comme nombre premier dans ça, là ?

E33 : Ah il faut qu'il soit multiple de 11, puisque là c'est plus trois, c'est qu'il faut que je trouve autre chose.

Sur l'exemple, il comprend comment ça marche et cela lui permet de l'adapter.

A l'épisode précédent (épisode 20), nous avons relevé que les élèves E31 et E32 éprouvaient une difficulté à comprendre pourquoi les nombres impairs non premiers étaient traités grâce à l'étude des nombres premiers. Cette difficulté survient à nouveau :

E32 : Tu sais qu'on n'a pas fait avec n est impair et non premier.

[...]

E31 : Tous les premiers sont impairs.

E33 : Tous sauf 2.

E31 : Mais 2 on l'a fait.

E32 : Non mais, on n'a pas fait n est impair ET non premier. Genre 9.

E33 : Mais si, en fait, si on peut faire avec les nombres impairs ET premiers, on peut faire avec les impairs qui ne sont pas premiers, c'est les multiples.

E32 : Il faut le dire.

E33 : Oui mais le problème c'est que, on bloque tu vois, genre il y a des impairs premiers qu'on n'a pas réussi à trouver, à décomposer en fait. Du coup ce n'est peut être pas valable pour tous.

En cherchant ce qu'ils pourraient démontrer, les élèves évoquent un raisonnement par l'absurde.

> E32 : Mais si on arrive à prouver que 241 ne marche pas, la proposition est fausse et puis voilà on a fini.
>
> E31 : On raisonne par l'absurde. Il existe un nombre tel que
>
> E33 : En bidouillant un peu la formule, peut-être qu'on pourra montrer que a, b, c ne peuvent pas être entiers ou des trucs comme ça.

Le raisonnement par l'absurde est juste évoqué, les élèves n'essaient pas de le mettre en œuvre. Nous faisons l'hypothèse que seul l'élève E32 pense que le cas $n = 241$ peut être un contre-exemple à la conjecture d'Erdös-Straus. L'élève E33 reste convaincu que ce n'en est pas un :

> E33 : Je suis sûr qu'il y a un moyen [...] Mais si, il marche, mais je n'arrive pas à trouver comment.

Les élèves essaient alors tous les trois de chercher une décomposition pour $n = 241$. Juste avant de commencer la rédaction de l'affiche, l'élève E33 dit qu'il a réussi à trouver une décomposition mais il ne l'explique pas aux autres élèves. D'après son cahier de bord (cf. annexe E6, p. 223), la décomposition est $\frac{4}{241} = \frac{1}{63} + \frac{1}{30366} + \frac{21}{30366}$. Il a itéré deux fois la valeur de t puis il semble avoir appliqué une adaptation de la technique de la factorisation.

Deuxième phase de recherche : rédaction des affiches et des preuves.
Cette phase du travail s'est déroulée lors de séance 5. Nous l'analysons dans l'épisode 18.

Épisode 18 : Rédaction des affiches et de la preuve d'un résultat.
L'élève E33 propose de faire un arbre pour présenter leurs résultats sur l'affiche. Il fait un brouillon sur son cahier de bord (cf. annexe E6, p. 224). Pendant que l'élève E31 commence à rédiger l'affiche en écrivant l'énoncé de la conjecture, l'élève E32 continue de chercher une décomposition pour $n = 241$. L'élève E33 vient d'en trouver une en itérant deux fois la valeur de t mais cette solution ne lui convient pas. Il cherche à décomposer $\frac{4}{241}$ sans itération de t ou avec une seule itération.

> E31 : Ce nombre-là, tu ne peux pas le faire avec 61 [sans itération de t].
>
> E32 : En fait, si on arrive à le trouver, toute notre hypothèse, que c'est le seul qui n'est pas bon, tombe à l'eau.
>
> E33 : Mais j'ai réussi à le trouver de toute façon, ça tombe à l'eau.
>
> E32 : Oui mais tu arrives à le trouver en augmentant beaucoup le truc.
>
> E33 : Oui mais j'ai réussi à trouver donc en aucun cas, ça invalide celui-là. Ça ne sert à rien de le chercher avec 61. Bah si pour notre méthode, mais bon on a autre chose à faire.

Contrairement à l'élève E33, l'élève E32 ne semble pas avoir compris que le cas $n = 241$ est un nouveau sous-cas de la méthode de décomposition qu'ils ont élaborée mais n'est pas un contre-exemple à la conjecture d'Erdös-Straus. Malgré les explications de l'élève E33, l'élève E32 ne semble toujours pas convaincu et continue de chercher une décomposition pour $n = 241$. Parallèlement, les élèves E31 et E33 rédigent l'affiche. Ils précisent qu'ils ont fait une étude selon la parité de n. Pour n pair, ils notent l'identité trouvée à la première séance, à savoir $\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$. Ils écrivent en rouge $\frac{n}{2}$ et précisent qu'il est entier. Contrairement à la premier mise en commun, les élèves insistent sur l'importance de préciser la nature des dénominateurs des fractions unitaires.

E33 : Et celui-là on le mettra en rouge et après, on montrera que ça c'est forcément un entier.

Ils effectuent la même présentation pour l'identité écrite en bas de la seconde affiche (cf. annexe E1). Pour n impair, l'élève E32 veut mettre une phrase pour expliquer la réduction aux nombres premiers.

E32 : n est impair ET premier. Parce que notre base c'est n est impair et premier. Sachant que si n est impair et premier, on peut faire tous les entiers.

[...]

E33 : Pour tous les autres impairs qui se décomposent en facteurs premiers.

E31 : Il faut mettre une jolie phrase comme ça, genre on remarque que

[...]

E32 : Mais ce n'est pas une remarque.

E31 : Mais nous on l'a remarqué.

L'élève E31 est conscient qu'ils ne l'ont pas démontré mais qu'ils l'ont juste observé. Les élèves ne pensent pas à utiliser les travaux du groupe 1, qui présentent la démonstration de la réduction aux nombres premiers. Ils essaient de l'expliquer en une phrase mais ils ont des difficultés à la formuler clairement. La première rédaction de l'élève E33 est la suivante (cf. annexe E6, p. 225) : « il est possible de décomposer pour tout n, $\frac{4}{n}$ en trois fractions si on peut décomposer $\frac{4}{n}$ avec n premier différent de 2 ».

E31 : Je ne comprends pas ta phrase.

E33 : Mais je n'arrive pas à l'écrire.

E31 : Ce qu'il faut c'est, ce qu'on voulait dire avant c'était que si...

E33 : Mais je sais ce qu'on voulait dire mais je n'arrive pas à le formuler.

E31 : Je n'ai pas l'impression.

Les élèves éprouvent à nouveau une difficulté à traduire leur connaissance opératoire en connaissance prédicative. L'élève E31 essaie de formuler la réduction du problème aux nombres premiers avec une autre phrase (cf. annexe E6, p. 225) : « On remarque que si pour tout n donné, il existe a, b, c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ alors pour tout multiple de n il existe aussi a', b', c' tels que $\frac{4}{n'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$ ».

E33 : C'est l'énoncé ça tout simplement.

[...]

E31 : Non, s'il existe, l'énoncé c'est existe-t-il, là on n'est pas sûr c'est ce qu'on dit. Quand ça marche, il y a ça mais c'est pas obligé que ça marche.

E33 : Mais si ça, ça marche, qu'est-ce que tu en as à carrer que ça, ça marche ?

E31 : Bah ça élimine des cas. Mais ça, ça marche, ça veut dire que tous les multiples de n vont marcher.

E33 : Avec n premier alors. Avec n premier on met. Différent de 2 d'ailleurs.

[...]

E31 : Pourquoi on fait impair en fait ? C'est pas premier ?

E33 : Parce qu'il y a deux cas.

E32 : Il y a n pair et n impair.

E31 : Oui mais les premiers sont obligatoirement impairs, on est d'accord.

E32 : Sauf 2.

E33 : Mais si on peut décomposer tous les premiers, on peut décomposer tous les impairs c'est pour ça qu'on met la phrase.

[...] (5 minutes après)

E31 : Or, si on peut décomposer tous les premiers, on peut décomposer tous les impairs. Attends ça veut dire quelque chose ?

E33 : Non ça veut rien dire.

E31 : Non mais je te parle du lien entre premier et impairs, pas entre premier et multiples. Tu vois ce que je veux dire. C'est pour ça qu'on s'intéresse aux impairs.

E33 : On s'intéresse aux premiers seulement, on n'a pas travaillé sur les impairs.

E31 : Si on sait tous les premiers, on sait tous les impairs, ça vient d'où ça ?

E33 : Parce que les premiers sont forcément impairs, sauf 2 mais on a prouvé que les pairs c'était vrai. Les autres impairs tu peux les décomposer en autres, en facteurs premiers.

E31 : Mais je sais bien comment ça marche mais il faut une petite phrase sympa pour faire le lien.

Finalement, sur l'affiche, il écrit (cf. annexe E1) :

> Si pour tout n premier > 2 s'il existe a, b, c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ alors pour tout multiple de n il existe a', b', c' tels que $\frac{4}{n'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$. Or si on montre que l'on peut décomposer en 3 fractions $\frac{4}{n}$, avec n premier, on peut décomposer en trois fractions $\frac{4}{n'}$, avec n impair, car n' multiple de n.

Avec la première phrase, les élèves veulent exprimer la propriété de multiplicativité : *si pour n il existe une décomposition, alors pour tout multiple de n il existe aussi une solution.* Avec la seconde phrase, l'élève E31 veut faire le lien entre les nombres premiers et les nombres impairs. Leurs explications ne mentionnent pas le théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, alors qu'ils l'utilisent plusieurs fois dans leurs explications orales. Nous faisons l'hypothèse que les élèves ont compris que la réduction du problème des nombres entiers aux nombres premiers nécessite l'utilisation de la propriété de multiplicativité et le théorème fondamental de l'arithmétique. Cependant la difficulté qu'ils éprouvent à l'écrire clairement semble indiquer qu'ils n'ont pas compris comment faire la démonstration. Ceci est une difficulté récurrente chez ces élèves, ils parviennent à établir des résultats en mettant en œuvre des processus, ils arrivent à les décrire pour se les transmettre, mais ils ne parviennent pas à élaborer de preuves. Il s'agit d'une difficulté fortement liée à l'exploitation des démarches de recherche de type expérimental (Grenier & Tanguay, 2008). La seule preuve que les élèves rendent à la fin de leurs recherches est une démonstration, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, du résultat pour tout n pair. C'est l'élève E32 qui l'a rédigée (cf. annexe E2) et les deux autres élèves l'ont vérifiée. Aucun élève ne semble se rappeler qu'à la suite de leur première tentative de conduire un tel raisonnement (voir épisode 7), ils avaient conclu qu'il était inutile, ni qu'ils avaient effectué cette démonstration avec une autre méthode (vérification de l'identité et de la nature des nombres en jeu) au début de la séance (épisode 21). A l'aide de notre corpus, il est difficile de comprendre pour quelles raisons les élèves produisent une telle preuve : ne sont-ils pas convaincus de la première démonstration ? L'ont-ils réellement oubliée ? Sont-ils pressés par la production de preuves à rendre ? Dans l'écriture de la preuve, l'élève E32 a repris leur premier raisonnement en modifiant les notations. Il évite ainsi la confusion entre le rang et les paramètres n et k. Cependant la seconde difficulté, à savoir l'absence de relation entre $\frac{4}{n}$ et $\frac{4}{n+2}$, persiste. Pour la contourner, il effectue un changement de variable, $k' = k + 1$ et pense ainsi avoir démontré l'hérédité de la propriété. Lors de la vérification, l'élève E33 pense que le raisonnement est « un peu direct » mais ne relève pas l'erreur.

Dans la rédaction des affiches, les élèves éprouvent de nouveau une difficulté pour expliquer la technique de la factorisation. Ils essaient de s'appuyer sur la synthèse écrite lors de la séance précédente (cf. annexe E4, p. 195-196) pour écrire une identité dans le cas où k possède un diviseur congru à 2 modulo 3.

> E33 : Si k possède un diviseur congru à 2 modulo 3. Et c'est là que je n'arrive pas à y exprimer ça, je n'arrive pas à exprimer comme il faut.
>
> [...]
>
> E33 : Je ne sais plus ce qu'on a écrit, c'est quoi le nombre qu'il y a en dessous là ?
>
> E31 : C'est k.
>
> E33 : C'est 3 fois, c'était $3-1$, non il y a un truc qui va pas là. Mais il n'y a pas de règle.
>
> E32 : Si, si, si, il faut décomposer ton k en facteurs premiers.
>
> E33 : Attends.
>
> E32 : Là en dessous, tu as k, ok, tu le décomposes en facteurs premiers et tu cherches le facteur premier qui est congru à 2 modulo 3. Et celui qui est congru à 2 modulo 3 tu le multiplies par, euh, son multiplicateur de 3.
>
> E31 : Tu fais 3 fois d quoi.
>
> E32 : 3 fois d, pour trouver un nombre, par exemple là c'est 12, ensuite t'as un diviseur de 11, donc tu peux le trouver [Il s'appuie sur l'exemple écrit dans la synthèse, pour $n = 41$, cf. annexe E4, p. 196]. C'est comme ça qu'on avait fait.
>
> E31 : Alors c'est $3d$.
>
> E33 : Moins 1.
>
> E31 : Pourquoi moins 1 ?
>
> E32 : Parce que c'est congru à 2 modulo 3.
>
> E31 : Sur ?
>
> E33 : dk, euh non.
>
> E32 : Sur ton nombre premier.
>
> E33 : d fois un entier quoi.
>
> E31 : e, non pas e c'est la constante d'Euler, k'.
>
> E33 : Attends, il y a un coefficient devant k [pour la troisième fraction].
>
> E32 : C'est ton nombre d'avant dk'.
>
> E33 : Non il est divisé par autre chose. [...] C'est pas 451, c'est 451×4 [en référence à l'exemple pour $n = 41$].
>
> E32 : Ton 4 il est dans ce truc-là.
>
> E33 : C'est $\frac{d+1}{3}$.

Rappelons que dans la synthèse, les élèves ont écrit $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{3}{nt}$ puis $\frac{3e}{nte} = \frac{1}{nte} + \frac{3e-1}{nte}$. Sur l'affiche, les élèves ont écrit $\frac{4}{n} = \frac{3d-1}{dk'} + \frac{1}{t} + \frac{1}{k(\frac{d+1}{3})}$. Pour écrire cette identité à partir de la synthèse, l'extrait ci-dessus montre que les élèves s'appuient davantage sur l'exemple ($n = 41$) que sur les notations introduites et l'expression des fractions unitaires $\frac{1}{nte}$ et $\frac{3e-1}{nte}$. Nous avançons deux raisons pour l'expliquer. D'une part, comme le précise l'élève E33, ils ne se souviennent plus de ce qu'ils ont écrit précédemment, et ont des difficultés à comprendre ce que représentent les paramètres introduits et les liens entre eux. De plus, ils trouvent qu'il y a trop de paramètres. D'autre part, ils sont pressés par le temps (il ne leur reste que cinq minutes pour terminer la rédaction de l'affiche) et il semble que le plus rapide pour eux soit de réécrire l'identité générale à partir de l'exemple, plutôt que de chercher à comprendre celle qu'ils avaient écrite. Cependant, cela les conduit à écrire une identité fausse. En effet, la troisième fraction $\frac{3d-1}{dk'}$ n'est pas une fraction unitaire. Nous faisons l'hypothèse que les élèves ont formulé cette fraction en appui sur l'exemple $n = 41$ et par analogie à la fraction $\frac{3e-1}{nte}$. Ils semblent avoir confondu $3d - 1$ et $3e - 1$. Avec leurs notations, cette troisième fraction serait $\frac{d}{k(\frac{d+1}{3})}$. En ce qui concerne la seconde fraction, $\frac{1}{k(\frac{d+1}{3})}$, elle est égale à $\frac{1}{nte}$ puisque dans leur synthèse, les élèves posent $k = nt$ et $e = \frac{d+1}{3}$. Elle a été écrite à partir de l'exemple $n = 41$ et non par changement de variables. Lors de la rédaction de leur synthèse, les élèves avaient été gênés par l'absence du paramètre d dans l'expression des fractions unitaires. Dans la formulation de l'identité écrite sur l'affiche, les élèves n'utilisent pas le paramètre $e = \frac{d+1}{3}$, ce qui leur permet de mettre en évidence la nature et le rôle de d, à savoir un facteur premier de n congru à 2 modulo 3. Notons en revanche que le lien entre k et n, à savoir $k = nt$, n'est pas utilisé dans l'expression de l'identité et qu'ils introduisent un nouveau paramètre, k', qu'ils ne définissent pas.

Troisième phase de recherche : préparation de la mise en commun.
La préparation de la mise en commun et du débat en classe entière s'est déroulée au début de la séance 6. Nous l'analysons dans l'épisode 19 ci-dessous.

Épisode 19 : Préparation de la mise en commun et du débat.
Les élèves ajoutent une phrase de conclusion sur leur preuve par récurrence (cf. annexe E2), puis ils reprennent leurs affiches pour se souvenir de leurs travaux. Pour la présentation, ils proposent d'illustrer chaque cas par des exemples. L'élève E33 précise qu'« il faut qu'on les sélectionne pour ne pas improviser ». A l'aide de leurs cahiers de bord et des affiches, les élèves notent sur une feuille un exemple correspondant à chaque cas et sous-cas présenté sur les affiches. Pour le sous-cas où k possède un diviseur premier congru à 2 modulo 3, les élèves prennent le cas $n = 233$, mais ils ont du mal à comprendre comment ils l'ont décomposé.

> E31 : C'est quoi qui doit être congru à 2 modulo 3 ?
>
> E32 : C'est un des facteurs premiers.
>
> [...]
>
> E33 : Pourquoi c'était congru 2 modulo 3 ?
>
> E31 : Ah bah parce qu'on a vu que ça marchait, après pourquoi, pourquoi ?
>
> E32 : Mais si si, on a trouvé, c'est qu'en fait là t'as, 59 tu as toujours 3 au dessus, en fait nous on voulait faire 1 et là 2 en fait c'est pour ça. Donc là pour avoir 60, tu faisais 3×20 et tu trouvais tes trucs là. Fais 3×20, ça fait 60 et c'est ce nombre là, fais ce nombre-là par 60, par 20.
>
> E33 : Ah oui, si, puis on décompose autrement après.

La préparation de la présentation de leurs recherches entraîne les élèves à s'interroger sur le fonctionnement de leur méthode de décomposition. La question que se pose l'élève E33 (« Pourquoi on a pris 2 modulo 3 ? ») met en évidence que leur méthode de décomposition n'est pas encore stabilisée ni maîtrisée. Ils savent l'appliquer sur des exemples en mettant en œuvre les différents processus de calcul, mais ils ne parviennent pas à l'expliciter dans un cadre plus général ni à comprendre pour quelles raisons elle fonctionne. Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, l'étape d'élaboration de preuves est une difficulté pour les élèves car ils ne parviennent pas à traduire leurs connaissances opératoires en connaissances prédicatives.

Conclusion de la seconde partie des recherches du groupe 3.
Après la phase de mise en commun des travaux des trois groupes, les élèves n'ont pas cherché à s'approprier les éléments de recherche présentés par les deux autres groupes. Ils ont débuté

les recherches collectives dans l'optique de développer leur méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n premier. Cette nouvelle méthode — qu'ils jugent très intéressante et pertinente pour l'étude de la conjecture — venant d'être trouvée, nous faisons l'hypothèse que leur envie d'approfondir sa construction explique qu'ils n'aient pas essayé de s'intéresser davantage aux idées des autres groupes. Néanmoins, nous avons relevé qu'ils évoquaient plusieurs fois la valeur de a (pour avoir la fraction unitaire inférieure la plus proche de $\frac{4}{n}$) donnée par un autre groupe lors de la mise en commun, à savoir $a = E(\frac{n}{4}) + 1$. Cependant, nous ne savons pas s'ils l'utilisent, notamment pour construire leurs exemples. En effet, cette valeur est écrite une seule fois par un élève dans son cahier de bord (cf. annexe E5) et ne figure jamais dans les synthèses. Au cours des séances 3 et 4, le principal résultat élaboré par les élèves est donc la construction d'une méthode de décomposition de $\frac{4}{n}$ pour une valeur de n donnée, n étant premier. Grâce à cette méthode de type algorithmique, ils ont vérifié la conjecture d'Erdös-Straus pour $0 < n < 300$. Le schéma présenté aux pages suivantes illustre, d'une part les différentes étapes qui ont jalonné la construction de leur méthode, et d'autre part les allers et retours entre la manipulation des nombreux exemples et l'élaboration d'éléments théoriques pour rendre compte de propriétés de ces objets.

Elaboration de la méthode de décomposition du groupe 3 – Séances 3 et 4

Manipulations des objets mathématiques en jeu. EXPERIENCES ⟷ Elaboration d'éléments théoriques sur les objets. THEORIE

$n = 3$; (1, 6, 6) $n = 5$; (2, 5, 10) $n = 11$; (3, 66, 66) $n = 13$; (4, 26, 52)	Régularité : La valeur de a augmente de 1 à chaque cas.	La valeur de a est la plus grande possible telle que $4/n - 1/a > 0$
$n = 17$; $a = 5$ $n = 19$; $a = 5$		
$n = 11$; $4/n - 1/3 = 1/33$ $n = 13$; $4/n - 1/4 = 3/52$ $n = 17$; $4/n - 1/5 = 3/85$ $n = 19$; $4/n - 1/5 = 1/95$	Régularité : La fraction $4/n - 1/a$ est de la forme $1/m$ ou $3/m$, m entier naturel.	
$n = 11$; (3, 66, 66) $n = 19$; (5, 190, 190)	Régularité : $4/n - 1/a = 1/m$ avec m pair.	$4/n = 1/a + 1/2m + 1/2m$
$n = 13$; (4, 26, 52)	Régularité : $4/n - 1/a = 3/m$ avec m pair.	$4/n = 1/a + 1/m + 2/m$
$n = 17$; (5, 34, 170)	Régularité : $4/n - 1/a = 3/m$ avec m impair multiple de 5.	$4/n = 1/a + 1/2m + 5/2m$
$n = 41$; $4/n - 1/11 = 3/451$ $n = 73$; $4/n - 1/19 = 3/1387$ $n = 89$; $4/n - 1/23 = 3/2047$	Problème : Trouver une décomposition de $3/m$ avec m impair non multiple de 5.	La valeur de a est augmentée de 1.
$n = 41$; $4/n - 1/12 = 7/492$ $n = 73$; $4/n - 1/20 = 7/1460$ $n = 89$; $4/n - 1/24 = 7/2136$	Régularité : $4/n - 1/(a+1) = 7/m$ avec m pair.	$4/n = 1/(a+1) + 2/m + 5/m$ ou $4/n = 1/(a+1) + 1/m + 6/m$

Manipulations des objets mathématiques en jeu.
EXPERIENCES

$\longleftrightarrow$

Elaboration d'éléments théoriques sur les objets.
THEORIE

$n = 233$,
$4/n - 1/59 = 3/13\,747$
$13747 = 59 \times 233$

$n = 281$
$4/n - 1/71 = 3/14\,701$
$14\,701 = 71 \times 281$

Régularité :
Le dénominateur de la fraction $4/n - 1/a$ a un facteur premier congru à 2 modulo 3

$4/n = 1/a + 3/m$ avec d diviseur de m et $d \equiv 2[3]$.

On pose : $3e = (d + 1)$

$4/n = 1/a + 1/me + d/me$

$n = 73$,
$4/n - 1/19 = 3/1387$

$n = 193$
$4/n - 1/49 = 3/9457$

$n = 241$
$4/n - 1/61 = 3/14\,701$

Problème :
Le dénominateur de la fraction $4/n - 1/a$ n'a pas de facteur premier congru à 2 modulo 3.

La valeur de a est augmentée de 1.

$n = 73$,
$4/n - 1/20 = 7/1460$
$4/73 = 1/20 + 2/1460 + 5/1460$

$n = 193$
$4/n - 1/50 = 7/9550$
$4/193 = 1/50 + 2/9550 + 5/9550$

Régularité :
La fraction $4/n - 1/(a+1)$ est de la forme $7/m$, m entier pair.

$4/n = 1/(a+1) + 2/m + 5/m$
ou
$4/n = 1/(a+1) + 1/m + 6/m$

$n = 241$
$4/n - 1/62 = 7/14942$

Problème :
$7/m$, m entier pair, ne se décompose pas avec la règle précédente.

La valeur de a est augmentée de 2.

$n = 241$
$4/n - 1/62 = 7/14942$
$4/n - 1/63 = 11/15183$
$4/241 = 1/63 + 1/30366 + 21/30366$

Le schéma met en évidence les deux dimensions organisatrices de la méthode : la dimension principale est le jeu d'extension/réduction avec l'étude des nombres premiers uniquement et la sous-dimension associée est l'étude de classes de nombres pour lesquelles une décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires existe. Ces deux dimensions organisatrices sont mises en œuvre par les élèves grâce à l'exploitation et l'articulation de deux procédures exploratoires. En effet, la construction de la méthode de décomposition (procédure exploratoire 2) s'appuie sur des recherches de régularités (procédure exploratoire 1) ou d'exceptions, observées par construction et questionnement de nombreux exemples pour des valeurs de n données, n étant premier. Les élèves ont ainsi étudié successivement les nombres premiers inférieurs à 19, les nombres premiers compris entre 19 et 100 et enfin les nombres premiers entre 100 et 300. Chaque étude s'est construite en plusieurs étapes, qui résultent d'un processus dialectique entre la manipulations des objets mathématiques et l'élaboration d'éléments théoriques sur ces objets. Ces allers et retours sont effectués par l'observation de régularités ou au contraire, d'une exception à une règle déjà établie. Par exemple, l'étude des nombres premier $n = 11$ et $n = 19$ permet de repérer une régularité sur la forme de la fraction égale à $\frac{4}{n} - \frac{1}{a}$. L'étude de cette régularité permet alors, d'une part d'écrire une identité pour décomposer certains nombres premiers, et d'autre part de construire de nouvelles décompositions pour des valeurs de n données, n premier. L'étude de certains exemples permet aux élèves d'identifier des exceptions aux règles déjà établies. Par exemple, le cas $n = 241$ est révélateur d'une faiblesse de la méthode de décomposition car aucune règle établie ne permet de déterminer une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour cette valeur de n. L'étude de cette exception conduit alors les élèves à perfectionner leur méthode et à imaginer une nouvelle règle pour traiter ce cas particulier et par suite, les nombres qui seront de la même forme, c'est-à-dire congrus à 1 modulo 24 et 1 modulo 5. L'exemple a un double rôle dans la construction de la méthode : une aide à l'élaboration et la formulation d'éléments théoriques sur les objets mathématiques (des identités pour décomposer certaines classes de nombres) et un moyen de vérification de ces éléments théoriques. Dans l'étape de la validation de la méthode et d'élaboration de preuves, l'exemple joue un autre rôle : un mode de validation des éléments théoriques. En effet, les élèves utilisent l'exemple pour valider les identités obtenues pour une classe de nombres donnée : soit comme une expérience cruciale (cf. épisode 11, où E32 propose « un très grand nombre »), soit comme élément générique (cf. épisode 13, où E33 explicite la méthode de la factorisation grâce au cas $n = 233$). Les élèves éprouvent des difficultés à passer de ces preuves pragmatiques à des preuves intellectuelles (Balacheff, 1987). Seules trois identités sont validées par expérience mentale : celle pour n pair ($\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$), celle pour n impair, où la seconde fraction est de la forme $\frac{1}{m}$, m entier naturel ($\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{1}{m} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m}$) et celle pour n impair où la seconde fraction est de la forme $\frac{3}{m}$, m pair ($\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{3}{m} = \frac{1}{t} + \frac{1}{m} + \frac{2}{m}$). Pour expliciter ces identités, les élèves parviennent à se détacher des processus de calcul mis en œuvre sur des cas particuliers (exemple : « tu mets 1 sur le nombre qu'il y a en dessous puis plus 2 sur le nombre », épisode 13). Nous relevons que les identités validées par expérience mentale sont les premières qui ont été trouvées dans la construction de la méthode de décomposition. Nous faisons l'hypothèse que les procédés de calcul associés ont été davantage mis en œuvre par les élèves sur un grand nombre d'exemples et que cela les a aidés à se détacher d'une preuve pragmatique. Notons enfin que la difficulté des élèves à écrire les identités à l'aide du calcul littéral les empêchent de passer d'une preuve pragmatique à une preuve intellectuelle, comme l'explique l'élève E32, « à faire on y arrive, à écrire on ne peut pas ». Dans ce cas, le passage des connaissances opératoires aux connaissances prédicatives nécessite la mobilisation d'outils algébriques. Or, la dimension opératoire privilégiée par les élèves n'est pas de nature algébrique. Par exemple, pour spécifier la nature des nombres en jeu, les élèves utilisent le langage naturel (n est impair) et n'utilisent pas l'écriture d'un entier à l'aide de la division euclidienne ($n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 3$, k entier naturel). La valeur de a est également explicitée par des mots (le plus petit entier possible tel que...), sans recours à son expression littérale ($a = E(\frac{n}{4}) + 1$). Le lien entre les deux paramètres n et a est effectué mentalement, dans l'opératoire, mais n'est pas traduit formellement, ce qui rend difficile l'écriture des identités, puis leur validation par une preuve intellectuelle et non pragmatique.

Lors de la phase de rédaction des affiches et des preuves de leurs résultats, les élèves identifient leur méthode de décomposition comme un résultat partiel de la conjecture d'Erdös-Straus. Ils expliquent que les différentes identités formulées dans leur méthode permettent de déterminer des classes de nombres pour lesquels l'équation d'Erdös-Straus a des solutions. Ils reconnaissent que ce résultat ne permet pas d'étudier une preuve de la vérité de la conjecture, mais qu'il apporte néanmoins des éléments pour son étude. Ils sont également conscients, d'une part de ne pas avoir prouvé ce résultat, et d'autre part de rencontrer des difficultés dans l'étape de l'élaboration des preuves.

9.3.4 Étape finale : seconde mise en commun au sein de la classe

Cette séance est consacrée à la mise en commun des recherches des trois groupes, avec une phase de débat. Après la phase de préparation de leur présentation, nous avons rappelé aux élèves les objectifs de cette phase de la recherche : d'une part, présenter leurs travaux à partir des affiches, et d'autre part soumettre la validité de leurs résultats à l'ensemble de la classe. Nous avons invité les élèves à poser des questions au groupe qui expose ses travaux à l'issue de leur présentation. Précisons que nous avons choisi l'ordre de passage en fonction du contenu de leurs recherches et en particulier, des résultats partiels obtenus sur la conjecture d'Erdös-Straus. L'analyse des recherches des élèves effectuée dans les paragraphes précédents a mis en évidence que la nature des recherches du groupe 2 (théorique et dans un cadre général) est différente de celles des groupes 1 et 3 (expérimentale). Nous avons donc choisi de débuter la mise en commun par la présentation du groupe 2 puis, le groupe 1 ayant moins de résultats partiels que le groupe 3, nous avons décidé de le faire passer en second et de terminer par le groupe 3. Nous analysons ci-dessous successivement la présentation des trois groupes (dans leur ordre de passage) ainsi que les phases de questions-réponses qui ont eu lieu à l'issue de chaque présentation.

A. Présentation du groupe 2.

Les élèves débutent par la présentation et la preuve de leurs résultats pour n congru à 0 modulo 2, n congru à 0 modulo 3 et n congru à 0 modulo 5. Pour chaque identité, ils montrent par réduction au même dénominateur que la somme des trois fractions unitaires est égale à $\frac{4}{n}$ mais ils ne précisent pas que les valeurs de a, b et c sont des entiers. Il semble évident, pour eux et pour les autres élèves, que $\frac{n}{2}$ est un entier quand $n \equiv 0[2]$, que $\frac{n}{3}$ est un entier quand $n \equiv 0[3]$ et que $\frac{2n}{5}$ est un entier quand $n \equiv 0[5]$. Les élèves exposent ensuite leur résultat sur les relations de divisibilité. Si la rédaction de la preuve n'avait pas posée de problème, les explications aux autres élèves se sont révélées moins précises. En effet, lors de la présentation de la preuve, ils se perdent plusieurs fois dans le cheminement de leur raisonnement. Ils se relaient et s'arrêtent parfois pour relire leur feuille. Nous faisons deux hypothèses pour expliquer cette difficulté : d'une part il s'est écoulé quatre semaines entre la séance de rédaction de l'affiche et la séance de mise en commun, les élèves ont pu avoir du mal à se remémorer leurs travaux, et d'autre part les preuves des résultats peuvent ne pas être totalement stabilisées. Dans un dernier temps, un élève présente rapidement les pistes qui n'ont pas abouti en précisant pour quelles raisons ils ne les ont pas suivies. A la fin de leur présentation, l'enseignant leur demande de préciser leur réponse à la question initiale :

> P : Finalement, le résultat que vous avez c'est quoi ? Par rapport à la question posée ?
>
> E21 : Par rapport à la question, on s'est dit que si on arrivait à trouver des liens entre a, b, c et n, peut-être qu'on trouverait un moyen qu'il y ait tout le temps un lien permanent entre n et a, b, c, que quel que soit n, on soit capable de trouver a, b, c directement, c'est ça notre but.
>
> P : Donc les résultats que vous avez pour lesquels vous êtes sûrs ?
>
> E21 : Si on arrive à démontrer [un lien], on serait sûr que $abc \equiv 0[n]$, que $ab + bc + ac \equiv 0[16]$ et que $abc \equiv 0[4]$ [...] si n est premier avec 4. [...] Et pour n congru à 0 modulo 2, pour n congru à 0 modulo 3 et pour n congru à 0 modulo 5, on a toujours trouvé une formule pour laquelle ça marche et la question ne se pose plus.

Les élèves des groupes 1 et 3 ne posent pas de questions. Deux élèves font cependant des remarques. L'élève E11 dit qu'il voudrait confronter les résultats présentés avec les résultats de son groupe, pour voir s'il y a « des choses similaires ». L'élève E31 remarque l'intérêt d'une modélisation avec le volume et les aires d'un parallélépipède rectangle pour « mieux voir et mieux s'imaginer » le problème. Avant de laisser la place au groupe suivant, nous demandons aux élèves de noter dans un coin du tableau un résumé de leurs résultats. Ils notent : si $n \wedge 4 = 1$, alors $abc \equiv 0[n], ab + bc + ac \equiv 0[16], abc \equiv 0[4]$.

B. Présentation du groupe 1.

L'élève E13 commence la présentation par la démonstration de la propriété de multiplicativité. L'élève E11 précise que ce résultat permet de réduire l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus aux nombres premiers. Il continue la présentation des résultats en exposant le début de la méthode d'élimination des cas. Il indique qu'ils se sont appuyés sur les travaux du groupe 3 présentés lors de la première mise en commun. L'élève E12 précise que ce résultat est une conjecture, qu'ils ne l'ont pas démontrée mais qu'ils l'ont vérifiée sur de nombreux exemples. L'élève E13 repend ensuite la présentation en illustrant avec un exemple le cas où n est congru à 3 modulo 4. L'élève E11 poursuit en expliquant les différents cas selon la congruence de z modulo 6 dans le cas où n est congru à 1 modulo 4. L'élève E12 intervient pour apporter quelques précisions sur leur démarche :

> E12 : Ce sont les seules vraies démonstrations qu'on a réussi à faire. On n'a pas essayé de chercher énormément d'exemples mais on a plus essayé de trouver les cas qui marchaient et les cas qui ne marchaient pas pour ensuite essayer de se concentrer sur les cas qui ne marchaient pas ou trouver une autre méthode pour résoudre ces cas-là.

Elle présente alors sa technique de décomposition avec multiples et diviseurs à l'aide de quelques exemples. Elle indique qu'elle a réussi à décomposer tous les nombres premiers jusqu'à 100 sauf 73 avec cette technique. Elle fait l'hypothèse que cette méthode permet de décomposer $\frac{4}{n}$ pour tout n non congru à 1 modulo 12 et 1 modulo 8. Pour terminer, l'élève E11 présente l'affiche 3 (cf. annexe C1) et son hypothèse sur les différentes formes d'écriture qu'il illustre, chacune, par un exemple.

A l'issue de leur présentation, les élèves des autres groupes ont posé plusieurs questions. Un élève du groupe 3 demande la raison de leur choix de raisonner modulo 6.

E32 : Pourquoi vous avez pris $6k$, pourquoi vous avez travaillé modulo 6 ?

E12 : Ca nous permettait de trouver certains cas en plus. Si on avait pris modulo 3 et il y a des fois où ça marchait et des fois où ça marchait pas, ça dépendait si c'était un nombre pair ou un nombre impair.

E32 : Parce que nous en fait on a résolu avec un modulo 3 en dessous et ça marche, sauf pour un cas où on a vraiment des problèmes mais sinon ça marche pour tous les cas c'est pour ça qu'on se demande pourquoi vous avez pris $6k$.

Puis un élève du groupe 2 (l'élève E21) demande des précisions sur la technique de décomposition avec multiples et diviseurs. L'élève E12 tente de lui répondre :

E12 : Je me suis juste rendue compte que si on prend le multiple de 8 ou de 12 qui est juste au-dessus de n, qu'on le divise par 2 et qu'on prend ça comme multiple de la fraction, on arrive presque toujours à trouver ensuite deux autres fractions quand on les ajoute, ça marche. Mais après c'est juste un constat, j'ai fait des essais, ça marchait souvent mais pas tout le temps.

Même après deux explications et des illustrations sur des exemples, la technique de décomposition de l'élève E12 est difficile à comprendre pour les autres élèves. Cela est lié aux difficultés qu'elle éprouve à l'écrire formellement. A ce stade de l'élaboration de ce résultat, il semble que le moyen le plus simple pour bien faire comprendre les procédés de calcul sous-jacents soit de le mettre à l'épreuve sur quelques exemples.

L'élève E13 ajoute que le problème auquel ils sont confrontés, c'est de décomposer une fraction $\frac{a}{b}$ en somme de deux fractions unitaires. Leurs résultats permettent de déterminer une telle décomposition pour certaines valeurs de n mais pas pour tout n premier. L'enseignant leur demande de résumer les résultats et de les noter au tableau. Ils notent :

– si solution pour n, solution pour tous les multiples.
– conjecture : $\frac{4}{n} = \frac{1}{E(\frac{n}{4})+1} + \frac{x}{z}$ avec $z = n(E(\frac{n}{4}) + 1)$ et $x = 1$ ou $x = 3$.

Les élèves des autres groupes réagissent :

E33 : Mais c'est faux ça, il y a des trucs qui foirent. On arrive à trouver des 5, des 7, des 11 [pour les valeurs de x].

[...]

E21 : Pour cette formule là [$\frac{4}{n} = \frac{1}{E(\frac{n}{4}+1)} + \frac{x}{z}$], vous avez toujours, vous n'avez jamais trouvé un seul exemple où ça n'a pas marché ?

E32 : 73 tu as dit tout à l'heure.

E12 : 73 mais je ne sais pas si on l'avait essayé avec cette formule-là.

E33 : 241, avec ça, vous ne trouverez pas normalement.

[...]

E12 : Avec les essais qu'on a fait, on a toujours trouvé, mais voilà apparemment ils [le groupe 3] ont trouvé des nombres qui ne marchent pas.

E21 : Parce que si on trouve à chaque fois où ça marche, ça serait vraiment intéressant d'avoir cet objectif là à démontrer, d'essayer de démontrer ça.

E33 : Le problème de partir sous cet angle-là, c'est qu'il y aura toujours des cas où ça ne marchera pas.

En aparté, l'élève E21 explique aux autres élèves de son groupe que « c'est ce qu'il voulait faire, pour n tu trouves des solutions ». Cependant quelques minutes après, il dit que le problème c'est que « tu peux faire tourner un ordi pendant 40 jours et montrer que ça ne marche pas ». Avant de laisser la place au groupe suivant, nous demandons aux élèves de préciser leur résumé écrit au tableau en indiquant pour quelles valeurs de n ils pensent avoir résolu le problème. Ils notent « résolu pour $n \equiv 3[4]$, problème pour $n \equiv 1[4]$ et $z \equiv 1$ ou $5[6]$ ».

C. Présentation du groupe 3.

L'élève E31 commence la présentation en expliquant le point de départ de leur démarche : ils ont fait des essais pour les premières valeurs de n, puis ils ont cherché « des similitudes » entre les décompositions. Cela les a amenés à effectuer la disjonction de cas selon la parité de n. Il précise qu'ils ont réduit l'étude du problème à l'étude des nombres premiers mais que contrairement au groupe précédent, ils l'ont admis, ils ne l'ont pas démontré. L'élève E33 explique ensuite leur méthode de décomposition. Il fait plusieurs fois des liens avec celle présentée par le groupe 1. Par exemple, il précise que leur paramètre t (qu'il présente comme la plus petite valeur telle que $\frac{1}{t}$ soit la fraction inférieure la plus proche de $\frac{4}{n}$) est égal à leur valeur de y, c'est-à-dire partie entière supérieure de $\frac{n}{4}$. L'élève E32 illustre les différents cas qu'ils ont dégagés par des exemples. L'élève E33 explique qu'ils ont construit cette méthode grâce à l'étude de tous les nombres premiers inférieurs à 300 et en particulier, grâce à l'examen des cas problématiques. Il indique que pour quelques cas, $n = 73$ et $n = 241$, ils ont réussi à trouver une solution mais ils n'arrivent pas à exhiber une règle générale.

> E33 : On arrive à les décomposer mais on n'a pas trouvé vraiment de règle en fait.
>
> [...]
>
> E32 : On a vu que ces nombres qui nous posaient vraiment beaucoup de problèmes, ils étaient congrus à 1 modulo 3. [...] On ne trouve pas encore de règle pour trouver des fractions assez facilement.

A l'issue de présentation des recherches, les élèves des autres groupes posent plusieurs questions. L'élève E21 demande des précisions sur leur méthode de décomposition.

> E21 : Alors avec cette histoire de $\frac{1}{t}$ je suis assez perplexe alors euh, c'était quoi exactement votre méthode, vous prenez $\frac{4}{n}$ et le plus grand t possible pour.
>
> E31 : Non c'est le plus petit t possible pour que la fraction $\frac{1}{t}$ soit la plus proche de $\frac{4}{n}$, que ce qui reste soit le plus petit possible.
>
> E33 : En fait c'est exactement la même chose [que le groupe 1].
>
> E21 : Et après vous cherchez une méthode pour décomposer en trois fractions.
>
> E33 : La fraction qui reste en fait.
>
> E31 : Pour la fraction qui reste, on a cherché s'il y avait des choses qui se ressemblaient pour les différents cas et si ça ne marchait pas, si on n'en trouvait aucun qui rentrait dans ces critères, on était obligé d'incrémenter t de 1 pour ensuite voir s'il y avait quelque chose, comme pour 73 et si ça ne marchait pas on incrémentait de 1 encore pour 241. Pour tous les nombres premiers en dessous de 300, pour tous ceux-là ça marchait.
>
> E32 : Le gros souci de ça, c'est que c'est basé sur des conjectures, ce n'est pas démontré en fait.
>
> E33 : Au début on avait fait les premiers en dessous de 50, puis en dessous de 100 on a trouvé des nouveaux cas et en dessous de 300 aussi, par exemple on a trouvé le cas congru à 2 modulo 3 (i.e. où un diviseur de k est congru à 2 modulo 3, cf. figure 9.3). Donc après rien ne nous dit qu'on trouvera pas autre chose. C'est pas dit par exemple qu'on trouve soit 1 sur quelque chose, soit 3 sur quelque chose, ce n'est pas démontré ça.

L'élève E11 intervient et précise qu'avec sa méthode, il trouve « le même phénomène » qu'eux pour le cas $n = 73$, il est obligé d'incrémenter la valeur de la partie entière de 1 (cf. annexe C3, p. 59). L'enseignant demande aux élèves de résumer leurs résultats en les inscrivant au tableau. L'élève E33 fait l'arbre suivant (figure 9.3) :

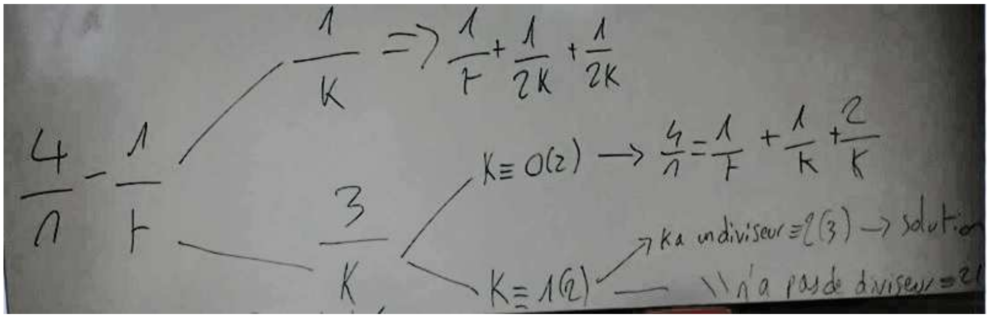


Figure 9.3 – Résumé des résultats du groupe 3 écrit au tableau.

Il précise que le problème c'est « qu'il y a toujours un morceau de branche qu'on arrive pas à fixer ». L'élève E21 fait une remarque sur cette démarche de recherche :

> E21 : J'imagine qu'à chaque fois le problème c'est qu'il va y avoir, à chaque fois un nouveau sous-cas et à chaque fois ça va s'affiner de plus en plus mais on tendra vers la solution du problème sans jamais y arriver.
>
> E33 : Oui. Parce qu'on chercherait à décomposer tous les nombres premiers, mais ça risque de prendre un petit moment.

L'enseignant demande aux élèves s'ils ont des choses à ajouter à la suite de la présentation des trois groupes. Les élèves comparent les différentes démarches de recherche mises en œuvre.

> E11 : C'est assez similaire quand même, la méthode que j'ai trouvée puis celle-là. J'essaie de retrouver des résultats [inaudible] il faudrait plus travailler.
>
> E21 : Au début, on est tous partis sur la même chose avec n pair, n divisible par 3, par 5, etc., et puis après on est parti sur des chemins différents.
>
> E33 : On a commencé comme ça, on a essayé par 5, par 7, après on s'est dit comme ça on va jamais y arriver, donc on va trouver un truc général, mais finalement...
>
> E11 : Pour trouver les premiers résultats, il faut avoir des conjectures, savoir où c'est qu'on se dirige.
>
> E33 : Le truc c'est qu'il manque les démonstrations.
>
> E11 : Ce ne sont que des conjectures et on n'arrive pas vraiment à démontrer.
>
> E21 : Les groupes 1 et 3 ils sont partis sur des choses similaires alors que nous on n'a pas pensé du tout à faire ça. En même temps, je pense que ce qu'on a démontré, ça ne vous aiderait pas vraiment pour ce que vous avez trouvé vous, et inversement.

Nous clôturons le débat en leur lançant un défi : déterminer une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour $n = 2521$ et $n = 3361$. Nous avons choisi ces exemples pour deux raisons : d'une part ce sont des cas qui résistent (congrus à 1 modulo 840), et d'autre part ce sont les exceptions étudiées par Mizony (cf. partie 5.3.3, p. 187). Nous leur précisons que lors de la séance suivante, nous leur présenterons l'état des recherches actuelles sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Conclusion.
Comme lors de la première mise en commun, les élèves ont porté un intérêt manifeste à cette phase de la recherche. Les groupes se sont écoutés et se sont intéressés aux travaux des autres. A l'issue des présentations des groupes 1 et 3, un débat a eu lieu. Après la présentation du groupe 2, les élèves des deux autres groupes n'ont pas posé de questions. Nous faisons l'hypothèse que cela est lié aux démarches de recherche mises en œuvre par le groupe 2 d'une part, et par les groupes 1 et 3 d'autre part. Le groupe 2 a mené une recherche théorique pour essayer de prouver l'existence d'une décomposition pour tout n en cherchant un lien entre n et a, b, c alors que les deux autres groupes ont étudié la conjecture dans une démarche de type expérimental, en cherchant des identités assurant l'existence de solutions pour différentes valeurs de n. Les résultats obtenus ne sont pas de même nature, il est donc difficile aux élèves des groupes 1 et 3 de réagir et de questionner la validité des résultats présentés par le groupe 2. Les réactions de plusieurs élèves confirment cette hypothèse. A l'issue de la présentation du groupe 2, l'élève E11 précise qu'il a vu des similitudes entre ses résultats et les leurs et qu'il voudrait les confronter. Dans le questionnaire, l'élève E12 exprime le même point de vue :

> E12 : C'était intéressant de voir les différentes démarches que nous avons employées. Il était néanmoins difficile de dialoguer car il aurait fallu que l'on se penche plus précisément sur les travaux des autres groupes pour cela.

A l'issue des présentations des groupes 1 et 3, les interactions entre les élèves ont été nombreuses et riches. Nous avançons deux raisons pour l'expliquer. D'une part les démarches de recherche et les méthodes de décomposition des groupes 1 et 3 sont assez proches, les élèves de ces groupes ont pu plus facilement comparer leurs travaux et réagir. Ils ont par exemple repéré que leurs méthodes étaient différentes mais conduisaient aux mêmes résultats partiels.

> E31 (questionnaire) : Cela a permis de poser des questions sur certains points plus opaques ou de savoir comment certains groupes en sont arrivés au même stade par d'autres méthodes.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que les résultats obtenus par les groupes 1 et 3 sont accessibles même si les processus en jeu dans les méthodes de décomposition ne sont pas complètement compris. Cela a facilité les réactions des élèves du groupe 2. Comme le précise l'élève E31 dans la citation ci-dessus, les questions posées ont été de deux natures : des questions pour obtenir des explications supplémentaires sur les résultats proposés et des questions pour discuter de la validité d'un résultat. La nécessité des preuves des méthodes de décomposition proposées par les groupes 1 et 3 a été mise en évidence, mais les débats n'ont pas permis de discuter de l'élaboration de ces preuves. Après le passage des trois groupes, les élèves ont comparé les différentes démarches de recherche mises en œuvre et les ont différenciées selon la visée de la recherche suivie : recherche de décompositions effectives ou quête de la vérité de la conjecture. L'articulation des résultats obtenus par le groupe 2 et par les groupes 1 et 3 est évoquée, mais les élèves semblent faire l'hypothèse que cela ne permettra pas d'enrichir l'une ou l'autre des études de la conjecture.

9.3.5 Séance de synthèse et d'institutionnalisation

La séance d'institutionnalisation et de synthèse est la dernière séance de l'expérimentation. Dans ce paragraphe, nous détaillons dans un premier temps comment nous l'avons construite, au fil de l'expérimentation, en appui sur nos analyses *a priori* et sur les recherches des élèves. Dans un second temps, nous analysons sa mise en œuvre et nous étudions si ses objectifs ont été atteints.

a. Construction de la séance.

Nous avons construit la séance de synthèse et d'institutionnalisation avec un double objectif : d'une part, valoriser les travaux de recherche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus et d'autre part, apporter des informations aux élèves sur l'état actuel des recherches sur la conjecture. Nous avons articulé ces objectifs autour de deux aspects :

– un travail sur des notions et des raisonnements mathématiques utilisés par les élèves au cours de leur recherche afin de mettre en évidence les mathématiques travaillées dans la recherche du problème ;
– la mise en perspective des travaux des élèves avec ceux des chercheurs.

Nous avons élaboré deux types de documents, utilisés comme support pour exposer ces aspects aux élèves lors de la synthèse.

Le premier document est une fiche d'exercices (cf. annexe G). Nous l'avons construite à partir de nos analyses *a priori* et des travaux des élèves. Son élaboration s'est effectuée tout au long de l'expérimentation. L'objectif de cette fiche est de proposer aux élèves des exercices pour reprendre, approfondir ou éclairer des éléments de leurs recherches. Nous avons abordé deux thèmes : l'aspect algorithmique du problème et le théorème des restes chinois. Nous avons choisi d'aborder le thème de l'algorithmique pour deux raisons. Premièrement l'analyse mathématique et épistémologique (cf. partie II) montre que les différents travaux de recherche sur la conjecture, et en particulier ceux de Mizony, exploitent l'aspect algorithmique du problème. Deuxièmement, au cours de leurs recherches, les trois groupes évoquent la construction et l'implémentation d'un algorithme pour étudier le problème. Cependant aucun groupe ne s'est attaché à le faire, ils ont tous fait l'hypothèse qu'ils ne disposaient pas des connaissances nécessaires en programmation pour le faire. L'algorithmique a été introduit dans les programmes de mathématiques en classe de seconde en 2009. Les élèves ont donc suivi un enseignement d'algorithmique pendant trois ans. Cependant, comme nous l'avons identifié dans nos analyses *a priori*, les connaissances d'algorithmique et de programmation sont difficilement disponibles et mobilisables pour ces élèves. Faire travailler sur l'aspect algorithmique de la conjecture d'Erdös-Straus permet donc d'atteindre plusieurs objectifs :

– mettre en évidence cet aspect dans les recherches des mathématiciens sur la conjecture ;
– montrer aux élèves le type d'algorithmes qu'ils auraient pu construire et implémenter à partir de leurs recherches et avec les connaissances dont ils disposent ;
– (re)travailler des notions d'algorithmique et de programmation dans une situation mathématique de recherche où ils en ont éprouvé eux-mêmes l'utilité.

Nous avons construit l'exercice en nous appuyant sur les travaux des groupes 1 et 3 et en particulier, sur leurs méthodes d'élimination de cas et de décomposition, élaborées au cours de leurs recherches sur la conjecture. A l'aide du logiciel Algobox [32], nous avons implémenté les algorithmes correspondant à leurs méthodes (cf. annexes H1 et H2). Ils ont servi de base de travail lors de la séance de synthèse.

Comme second thème de travail, nous avons choisi d'étudier le théorème des restes chinois. Ce théorème est un théorème-clé dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Il est à la base des trois résultats connus actuellement sur la conjecture (cf. résultat 1 p. 81, résultat 2 p. 83 et résultat 3 p. 95). Au cours de ses recherches, les élèves du groupe 2 ont utilisé intuitivement ce théorème lorsqu'ils sont passés de l'étude des cas modulo 5 et 6 aux cas modulo 30 (cf. épisode 10, p. 353). Notons que le théorème des restes chinois n'est pas explicitement au programme d'arithmétique de la spécialité Mathématiques en terminale scientifique mais il repose sur deux théorèmes centraux de ce programme : les théorèmes de Bézout et de

32. Nous avons choisi ce logiciel car c'est celui qu'ils connaissent et qu'ils manipulent dans leur cours de mathématiques.

Gauss. De nombreux exercices proposés dans leur manuel utilisent ce théorème implicitement. Aborder ce théorème-clé d'arithmétique permet donc d'atteindre plusieurs objectifs :

- faire le lien avec les travaux des mathématiciens sur la conjecture ;
- valoriser les travaux de recherche des élèves en apportant des éléments complémentaires ;
- travailler des notions d'arithmétique du programme.

Nous avons construit l'exercice sur le théorème des restes chinois à partir des travaux des trois groupes. Les questions 1 et 2 ont pour objectif d'apporter les éléments de preuve manquants aux groupes 1 et 3 pour démontrer la validité de la décomposition qui est à la base de leurs méthodes, à savoir $\frac{4}{n} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z}$. La question 3 explicite la démonstration du théorème des restes chinois avec deux équations modulaires. Nous l'avons scindé en quatre questions intermédiaires. Les questions 4 et 5 sont des applications du théorème des restes chinois, pour démontrer quelles sont les classes étudiées dans la méthode du groupe 1 et celle du groupe 3. Enfin la question 6 a pour objectif la démonstration du résultat 1 : l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n non congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2$ modulo 840.

Le second document, que nous avons élaboré pour la séance de synthèse, est un diaporama. Il comporte trois parties :

- des travaux d'élèves issus d'un atelier de recherche MATh.en.JEANS (cf. annexe H3) ;
- des articles originaux de travaux de plusieurs chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus ;
- un résumé des recherches actuelles et une démonstration du résultat 1 rappelé ci-dessus (cf. annexe H4) ;
- une illustration de ces recherches en lien avec les travaux des élèves (cf. annexe H5).

L'objectif de ce document est de montrer aux élèves l'état actuel des recherches de la communauté mathématique sur la conjecture d'Erdös-Straus. Il nous permet également de leur montrer certains aspects de l'activité de recherche mathématique tels que la rédaction d'un article, la diversité des mathématiciens qui se sont intéressés à la conjecture ou les diverses approches de la conjecture dans les recherches des chercheurs. Enfin, le résumé des recherches actuelles et leurs illustrations permettent de mettre en perspective les travaux des élèves (les leurs et ceux des élèves de MATh.en.JEANS) avec ceux des mathématiciens.

b. Déroulement de la séance.

Rappelons que cette séance de synthèse et d'institutionnalisation a débuté par un temps d'une vingtaine de minutes, où nous avons demandé aux élèves de répondre par écrit à un questionnaire (cf. annexe F). La partie institutionnalisation et synthèse a donc duré environ une heure trente. Dans un premier temps, nous avons distribué aux élèves le premier document, la fiche d'exercices abordant l'aspect algorithmique du problème et le théorème des restes chinois (cf. annexe G). Nous leur avons proposé de découvrir cette fiche ensemble. Comme nous l'avons précisé plus haut, ce document était un support, nous n'avons pas abordé toutes les questions proposées. Concernant la partie algorithmique, les élèves ont répondu à la première question facilement. Les élèves du groupe 3 ont d'ailleurs reconnu qu'ils auraient pu implémenter l'algorithme présenté. Nous leur avons ensuite présenté les algorithmes construits à partir des méthodes élaborées par les groupes 1 et 3 (cf. annexes H1 et H2). Nous les avons explicités et testés sur différentes valeurs de n. Nous avons précisé que ces algorithmes sont efficaces pour tester la décomposition de $\frac{4}{n}$ en somme de trois fractions unitaires sur un grand nombre de valeurs de n, mais qu'ils ne permettent pas de déterminer une condition d'existence de solutions. En effet, un nombre peut ne pas être décomposé par ces algorithmes mais avoir quand même une décomposition. Nous avons mis en perspective ces algorithmes avec les premiers algorithmes construits par Mizony. Sur la liste des cas problématiques, les élèves du groupe 3 ont repéré les deux nombres exceptions que nous leur avions donnés à décomposer ($n = 2521$ et $n = 3361$) lors de la séance précédente. Ils ont réussi à trouver une décomposition de $\frac{4}{n}$ pour ces nombres-là et remarquent que les décompositions obtenues par le chercheur ne sont pas les mêmes. Nous précisons la nature du problème pour traiter ces cas problématiques avec les méthodes de décomposition : pour les nombres congrus à 1 modulo 24, il n'est pas possible de déterminer une identité générale à partir de la décomposition $\frac{4}{n} = \frac{1}{E(\frac{n}{4})+k} + \frac{x}{z}$ car la valeur de k est constamment différente. Pour terminer sur l'aspect algorithmique du problème, nous leur présentons les recherches de lycéens sur la conjecture d'Erdös-Straus dans le cadre d'un atelier MATh.en.JEANS (cf. annexe H3), qui sont de même nature que celles menées par les groupes 1 et 3. En ce qui concerne l'étude de la partie arithmétique avec le théorème des restes chinois, nous avons d'abord traité avec les élèves les questions 1 et 2. Elles ont permis aux élèves des groupes 1 et 3 de comprendre, d'une part ce qu'il fallait démontrer, et d'autre part par quel moyen ils pouvaient prouver la décomposition à la base de leur méthode ($\frac{4}{n} = \frac{1}{E(\frac{n}{4})+1} + \frac{x}{z}$). Nous avons ensuite présenté le théorème des restes chinois sans en faire la démonstration. Nous avons décidé, avec l'enseignant, de privilégier les applications du théorème (questions 4 et 5) lors de cette séance. Il a projeté d'étudier la démonstration dans une séance ultérieure de révisions sur des notions d'arithmétique. Notons que l'élève E21 a reconnu le théorème qu'il avait utilisé en acte dans ses recherches et précise que « ça se fait instinctivement ». L'enseignant a alors insisté sur l'importance de ce théorème :

> P : Est-ce que vous voyez que ça peut être important, si je vous dis un nombre bah quand je le divise par tant, il me reste, par exemple si je le divise par 17 il me reste 5 et si je le divise par 31 il me reste 8. Quels sont les nombres possibles ? Il y en a beaucoup mais ce seront des nombres modulo 17×31. Donc c'est un résultat très important.

Il ajoute que ce théorème est souvent à la base d'exercices d'arithmétique proposés dans leur manuel ou dans les sujets d'examen du baccalauréat. Concernant la question 6, nous n'avons pas effectué la preuve proposée par l'exercice mais nous leur avons exposé et explicité la preuve issue de notre analyse mathématique de la conjecture (cf. annexe H4).

A l'issue de ce temps de travail collectif sur des aspects algorithmiques et arithmétiques de la conjecture, nous avons présenté aux élèves l'état actuel des recherches sur la conjecture à partir du second document, à savoir le diaporama. Nous avons commenté les différents travaux des mathématiciens à partir de leurs articles (Erdös, 1950 ; Oblàth, 1950 ; Rosati, 1954 ; Yamamoto, 1965) en mettant en évidence les notions mathématiques utilisées (nombres premiers, pgcd, multiples, diviseurs, théorème de Gauss, etc.) ainsi que les différentes approches (étude de type algorithmique ou recherche de conditions d'existence de solutions). Afin de mettre en évidence les résultats connus et les problèmes subsistants pour démontrer la conjecture, nous avons présenté un résumé des trois résultats actuels, illustrés d'exemples (cf. annexe H5). Enfin, l'enseignant a mis en évidence les liens entre les travaux des élèves et ceux des chercheurs :

> P : Ce qui est intéressant, c'est de voir dans toutes les idées que vous avez eues, que ce soit les trois groupes, dans ce qu'on a vu au niveau de la recherche actuelle, il y avait des prémisses dans ce que vous avez fait.

Durant cette séance, les élèves ont été attentifs et ont participé. Le travail sur l'algorithmique et le théorème des restes chinois a permis aux groupes 1 et 3 de compléter leurs recherches, notamment grâce à l'apport des éléments de preuve qui leur manquaient pour prouver la validité de leur méthode de décomposition. Plusieurs élèves ont également effectué des liens entre leurs travaux et ceux des chercheurs, comme en témoigne l'intervention de l'élève E21 :

> E21 : Nous on a pensé qu'en décomposant tout le temps on n'y arrivera jamais donc [...]. Nous notre objectif c'était de trouver des relations, bah ce qu'a fait Yamamoto entre n, a, b, c, c'est ça qu'on voulait faire.

Pour conclure, nous faisons l'hypothèse que les objectifs de la séance ont été atteints et que nous avons réussi, d'une part à valoriser les travaux des élèves, et d'autre part à leur apporter les informations qu'ils attendaient sur l'état actuel des recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus. Nous ajoutons que dans une perspective d'insérer ce type d'activité mathématique dans le cours ordinaire de la classe de mathématiques, cette séance de synthèse et d'institutionnalisation met en évidence la potentialité de ce problème de recherche, d'une part pour mobiliser, travailler et approfondir des notions du programme pendant et à l'issue des recherches sur la conjecture, et d'autre part pour montrer aux élèves la nature et le développement des mathématiques à travers la recherche de problèmes. Notons que pour diffuser ces pratiques auprès d'enseignants, nous avons publié, avec l'enseignant, un compte-rendu de cette expérimentation dans une revue de l'IREM de Dijon (D. Gardes & Gardes, 2013).

9.4 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous effectuons une mise en perspective des analyses *a posteriori* des travaux des élèves avec nos analyses *a priori*. L'analyse des recherches des élèves à l'aide des itinéraires de recherche permet de mettre en évidence des différences et des similitudes dans les processus de recherche mis en œuvre par les trois groupes. Nous effectuons ces comparaisons sur trois critères : la visée de la recherche privilégiée, la nature des processus de recherche mis en œuvre au sein d'une visée et le travail dialectique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques. Dans un premier temps, nous distinguons les recherches menées par le groupe 2 d'une part et celles menées par les groupes 1 et 3 d'autre part sur le premier critère. Dans un second temps, nous spécifions les différences entre les processus de recherche du groupe 1 et ceux du groupe 3 à partir du second critère. Enfin, dans un troisième temps, grâce au troisième critère, nous dégageons des similitudes entre les recherches des trois groupes.

a. Comparaison des visées de recherche privilégiées.

Rappelons que nos analyses *a priori* mathématiques et épistémologiques de la conjecture d'Erdös-Straus nous ont permis d'identifier deux visées de la recherche pour étudier le problème : la quête de la vérité de la conjecture et la recherche de décompositions effectives. Nos analyses *a posteriori* de la situation créée autour du problème ont montré, d'une part que les deux visées apparaissent dans les travaux des élèves, et d'autre part que les recherches des élèves s'inscrivent dans une visée particulière pour explorer le problème (ce qui n'exclut pas d'éventuelles interactions ou articulations des deux visées). Le groupe 2 a débuté ses recherches en choisissant comme visée la quête de la vérité. Cette direction a guidé l'ensemble des recherches du groupe tout au long des séances. Deux indices sont révélateurs de ce choix effectué par les élèves : d'une part les pistes de recherche qu'ils cherchent à exploiter sont en accord avec cette visée, et d'autre part les pistes de recherches liées à la recherche de décompositions effectives (l'autre visée de la recherche de la conjecture) sont mises de côté et rarement exploitées. Lors des synthèses et des mises en commun des travaux, ils ont clairement expliqué avoir choisi des pistes de recherche leur permettant *a priori* d'étudier la vérité de la conjecture. Au contraire, les groupes 1 et 3 n'ont pas privilégié une direction particulière de recherche, elle s'est révélée au cours de leurs recherches. Les élèves ont débuté l'étude de la conjecture par l'exploitation de procédures exploratoires et se révélant productives en termes de résultats partiels, ils ont choisi de continuer à les exploiter. Cela les a conduits à une étude de la conjecture d'Erdös-Straus par recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données. Les élèves sont conscients que l'étude du problème sous cette visée conduit à une étude de cas en nombre infini. Cependant en cherchant dans cette direction, ils parviennent à établir des résultats partiels sur la conjecture. La quête de la vérité de la conjecture a été mise de côté dans la mesure où ils n'ont pas réussi à trouver comment étudier le problème sous cette visée avec les connaissances dont ils disposent. Ces analyses mettent donc en évidence un nouveau phénomène, non relevé dans les analyses *a priori* : soit le choix d'une visée de la recherche s'effectue dès le début de l'étude du problème, soit il se détermine progressivement, au cours des recherches, en fonction des procédures exploitées. Ceci semble lié à la perception qu'ont les élèves de l'étude de la conjecture à leur niveau : pour les élèves du groupe 2, il s'agit de déterminer des conditions d'existence de solutions et pour les élèves des groupes 1 et 3, il s'agit de déterminer des classes de nombres pour lesquelles l'équation d'Erdös-Straus a des solutions.

L'analyse des processus de recherche en termes de dimensions organisatrice et opératoire met alors en évidence la nature différente des démarches de recherche mises en œuvre par le groupe 2 d'une part, et par les groupes 1 et 3 d'autre part. Le groupe 2 a mené ses recherches sous deux dimensions organisatrices principales, la simplification du problème et le changement de cadre, en les associant à deux dimensions opératoires, la manipulation des outils algébriques et l'utilisation de théorèmes-clés. Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse *a priori*, ces dimensions organisatrices et opératoires privilégiées par les élèves ne sont pas révélatrices du caractère expérimental du problème (faire des essais pour des valeurs de n données) et n'incitent pas à l'exploiter. Nous faisons l'hypothèse que c'est pour cette raison que les élèves les ont choisies et qu'ils ont abandonné celles qui, associées aux essais, caractérisent l'aspect expérimental. Dans la première partie de leurs recherches, les élèves ont effectivement mis en œuvre ces dimensions organisatrices (limitation de la recherche, étude de classes et jeu d'extension/réduction) et opératoires (représentation d'un entier à l'aide de la divisibilité et des congruences) mais ils ne les ont pas exploitées car ils ont fait l'hypothèse qu'elles n'étaient pas pertinentes pour chercher une preuve de la vérité du problème. Leur démarche de recherche a donc été théorique, sans recours au caractère expérimental du problème. Les exemples ont été essentiellement utilisés comme moyen de confronter la théorie à l'expérience pour vérifier l'adéquation entre un exemple et un résultat théorique. Ils n'ont pas mis en œuvre de démarche expérimentale au sens où nous l'avons définie, c'est-à-dire par des allers et retours entre les expériences et la théorie. Leur recherche a été de même nature que celle menée par Thépault (cf. chapitre 5, partie 5.3). Les visées de recherches (quête d'une preuve de la vérité de la conjecture), la nature des démarches (théoriques et non expérimentales), les dimensions organisatrices et opératoires suivies (simplification du problème, changement de cadre, manipulations algébriques, utilisation de théorèmes-clés) sont similaires. Les groupes 1 et 3 ont privilégié des dimensions organisatrices (disjonction de cas, jeu d'extension/réduction et étude de classes ou limitation de la recherche) et opératoires (représentation d'un entier à l'aide de la divisibilité) que nous avons identifiées comme porteuses du caractère expérimental du problème, à savoir faire des essais pour des valeurs de n données. Les procédures exploratoires mises en œuvre à partir de la construction et du questionnement d'exemples leur ont permis de formuler des conjectures et des résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus. Ils se sont alors engagés dans une démarche de recherche de type expérimental, par des allers et retours entre la manipulation des objets mathématiques en jeu (construction, questionnement d'exemples) et l'élaboration d'éléments théoriques pour rendre compte de propriétés de ces objets (écriture d'identités pour une classe de nombres donnée). Ce processus dialectique s'est réalisé par confrontation (entre les exemples et les conjectures formulées), vérification (des conjectures et des identités écrites à l'aide d'exemples et/ou du calcul littéral) et argumentation (de type pragmatique ou mental). Les recherches menées par ces deux groupes sont de même nature que celles menées par Mizony (cf. chapitre 5, partie 5.3). Les visées (recherches de décompositions effectives), la nature des démarches (expérimentale et à caractère algorithmique), les dimensions organisatrices suivies (jeu d'extension/réduction, étude de classes de nombres ou limitation de la recherche) sont similaires.

Ces analyses confirment nos analyses *a priori*, où nous avions identifié deux types de recherche que les élèves pouvaient mettre en œuvre pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus (cf. p. 278) :

- une recherche dirigée par la quête de la vérité de la conjecture, de nature algébrique et peu articulée avec le caractère expérimental du problème (groupe 2) ;
- une recherche privilégiant la construction de décompositions, de nature expérimentale, mais où l'étape d'élaboration de preuves peut être difficile à effectuer (groupes 1 et 3).

Nous avions relevé que des articulations entre ces deux types de démarche pouvaient apparaître dans les recherches des élèves. En effet, privilégier une visée de la recherche n'exclut pas la mise en œuvre de procédures associées à l'autre visée. Nous avons relevé des articulations entre une recherche de nature algébrique et une recherche de nature expérimentale dans les travaux du groupe 1, notamment dans les recherches de l'élève E12 (cf. p. 341). En revanche, les groupes 2 et 3 ont exploité les deux types de procédures (exploratoire et opératoire) mais en passant de l'un à l'autre, sans les articuler (cf. par exemple le schéma des recherches du groupe 2, p. 361).

Nous ajoutons que cette expérimentation a mis en évidence une autre caractéristique des recherches selon la visée choisie. Une recherche dirigée par la quête de la vérité entraîne les élèves à mener une réflexion sur la nature de l'activité mathématique et à se poser de nombreuses questions méta-mathématiques sur les raisonnements ou le développement des mathématiques. Une recherche de type expérimental favorise davantage les avancées en termes de production de résultats partiels sur la conjecture, mais nous avons relevé que les élèves peuvent éprouver des difficultés à passer à l'étape de l'élaboration de preuves, même lorsque la nécessité de la preuve est reconnue. Ceci fait écho aux travaux de Grenier et Tanguay (2008) sur les relations entre les activités de définition, construction et preuves en géométrie dans l'espace.

b. Comparaison des processus de recherche au sein de la visée de recherche de décompositions effectives.

Les recherches menées par les groupes 1 et 3 s'inscrivent dans la même visée et sont de même nature (de type expérimental). Cependant nous avons relevé trois différences dans les processus de recherche mis en œuvre par le groupe 1 et par le groupe 3.

La première différence s'observe dans l'exploitation des exemples lors de la construction de leurs méthodes respectives : méthode par élimination de cas pour le groupe 1 et méthode de décomposition pour le groupe 3. Le groupe 3 a élaboré sa méthode en s'appuyant sur la construction et l'étude de nombreux exemples : tous les nombres premiers inférieurs à 300. Etudier un grand nombre d'exemples a permis aux élèves, d'une part de repérer des régularités, d'identifier les différents cas à distinguer et de déterminer les identités permettant de les traiter, et d'autre part d'identifier les cas particuliers et de les examiner minutieusement. Par exemple l'étude des nombres premiers inférieurs à 100 leur a permis d'écrire la décomposition $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{j}{m}$, où t est la plus grande valeur telle que $\frac{4}{n} - \frac{1}{t} > 0$, puis de dégager deux cas selon la valeur de j (cf. annexe E1). Ensuite l'étude des nombres premiers compris entre 100 et 300 leur a permis de mettre en évidence des sous-cas pour le cas $j = 3$ (quand m est pair ou quand m a un diviseur congru à 2 modulo 3) ainsi que les cas problématiques $n = 193$ et $n = 241$. Notons que cette exploitation des exemples est semblable à celle de Mizony. Les élèves du groupe 1 n'ont pas eu besoin d'effectuer de nombreux exemples pour construire leur méthode d'élimination des cas puisqu'ils se sont appuyés sur les résultats déjà obtenus par le groupe 3 et présentés lors de la première mise en commun. Les premiers cas à traiter étaient identifiés. La construction de leur méthode s'est donc appuyée sur un (ou deux) représentant(s) de chaque cas, qu'ils ont examinés minutieusement afin de formuler une identité assurant l'existence d'une décomposition pour ce cas. L'exemple est utilisé comme exemple générique, représentant d'une classe de nombres. Dans nos analyses *a priori*, nous avions relevé cette différence d'exploitation des exemples, construction des exemples ou utilisation de l'exemple comme produit fini, mais au sein de démarches de recherche de nature différente (cf. par exemple les analyses de la pré-expérimentation 1). Cette expérimentation met en évidence que cette différence d'exploitation des exemples peut apparaître au sein d'une même démarche de recherche, de type expérimental.

Cette utilisation des exemples a induit les élèves des deux groupes à privilégier des dimensions organisatrices différentes au sein de la pensée organisatrice principale du jeu d'extension/réduction. Il s'agit de la seconde différence entre les processus de recherche des deux groupes. Après avoir réduit l'étude du problème aux nombres premiers, le groupe 1 choisit la pensée organisatrice de limitation de la recherche par élimination de cas à étudier, alors que le groupe 3 privilégie l'étude de classes. Cette différence se caractérise au sein des méthodes élaborées dans les deux groupes dans la manière de traiter les cas problématiques. Dans la méthode de décomposition du groupe 3, les élèves cherchent à traiter les cas problématiques par l'étude de nouvelles classes de nombres. Ils créent alors de nouveaux sous-cas dont certains sont traités et dont d'autres vont former les nouveaux cas problématiques à étudier. Dans la méthode d'élimination de cas du groupe 1, les élèves cherchent à traiter l'ensemble des cas problématiques, sans constituer de nouveaux sous-cas. Ils font l'hypothèse que leur traitement se fera d'une manière différente, ils cherchent donc à élaborer une nouvelle méthode. En annexe (annexe C6 et annexe E7), nous avons représenté ces deux méthodes (de type algorithmique) à l'aide d'un arbre. Schématiquement, dans la construction de l'arbre, le groupe 3 agrandit l'arbre par l'étude de nouvelles branches alors que le groupe 1 stoppe la croissance de l'arbre et cherche à étudier la branche problématique par une autre méthode. Les analyses *a priori* n'ont pas mis en évidence ce phénomène. Nous avançons deux raisons pour l'expliquer. D'une part, les analyses mathématiques de la conjecture ont montré que les travaux s'inscrivant sous la visée de la recherche de décompositions effectives ont articulé ces deux dimensions organisatrices, sans en privilégier une par rapport à l'autre. Les chercheurs effectuent en effet une étude de classes de nombres afin de réduire le nombre d'exceptions tout en cherchant à étudier ces exceptions grâce à une autre méthode. Les travaux de Mizony illustrent particulièrement cette démarche de recherche. D'autre part, les analyses didactiques *a priori* et en particulier celles des pré-expérimentations, n'ont pas permis d'identifier ce phénomène dans les recherches des élèves car il se révèle au cours de l'étude des cas particuliers, ce qui nécessite d'avoir avancer suffisamment dans l'étude du problème. Nous faisons l'hypothèse que le temps long de la recherche est révélateur de cette différence entre les processus de recherche mis en œuvre par les groupes 1 et 3 dans leur étude du problème par recherche de décompositions effectives.

La troisième différence identifiée entre les processus de recherche mis en œuvre par les groupes 1 et 3 est la nature de la validation des résultats. Les élèves des deux groupes ont eu recours au calcul littéral pour formuler les différentes identités obtenues. L'écriture de ces identités s'est effectuée dans une dialectique entre les aspects syntaxiques (écriture des identités générales) et sémantiques (nature des nombres en jeu, retour aux exemples). Nous avons relevé que les élèves du groupe 3 ont éprouvé davantage de difficultés à formuler leurs identités. Leur méthode s'appuyant sur l'étude et la construction de nombreux exemples, nous faisons l'hypothèse qu'ils n'ont pas réussi à se dégager suffisamment des aspects sémantiques de leurs recherches pour exploiter ses aspects syntaxiques. Ils n'ont ainsi pas mobilisé les outils arithmétiques et algébriques facilitant une écriture formelle des identités à partir de l'étude des exemples. Par exemple, ils n'ont pas exprimé la valeur de t à l'aide de la partie entière et ils n'ont pas effectué le passage d'une notation modulaire à une écriture à l'aide de la divisibilité pour exprimer les valeurs de m. Au contraire, le groupe 1 a construit sa méthode en articulant directement les aspects sémantiques (présentés par le groupe 3) et syntaxiques en cherchant à formaliser les valeurs des différents nombres en jeu (la valeur de y puis celles de x et de z). Comme nous l'avons mentionné dans nos analyses *a priori*, cette analyse met en évidence l'importance d'articuler les aspects syntaxiques et sémantiques dans la formulation de conjectures d'une part, et dans la construction de preuves d'autre part. En effet, cette différence se retrouve ensuite dans la validation des résultats obtenus. Les élèves du groupe 3 n'ont prouvé qu'une seule identité formulée (celle pour les nombres pairs) et à l'aide d'un raisonnement par récurrence (qui, par ailleurs, est erroné). Les autres identités sont validées par des preuves pragmatiques (Balacheff, 1987) à l'aide d'expérience cruciale ou d'exemple générique. Nous faisons l'hypothèse qu'ils ne reconnaissent pas le calcul littéral comme outil de validation. Notons que nous n'avions pas prévu cette difficulté, étant donnée la richesse de leur bagage mathématique, tant au niveau des connaissances notionnelles et heuristiques que de leur pratique de la résolution de problèmes. Le groupe 1 a effectué les deux types de validation, pragmatique et intellectuelle (Balacheff, 1987). Leurs identités sont prouvées à l'aide du calcul littéral et de l'écriture des entiers à l'aide de la divisibilité. Lorsque les outils algébriques leur manquaient pour établir une preuve intellectuelle (par exemple pour prouver la valeur de x), ils ont eu recours à une validation pragmatique à l'aide d'exemples. Notons cependant que les élèves des deux groupes sont conscients de la nature de leurs preuves et du statut de leurs résultats (démontrés ou à l'état de conjectures). Nous identifions ici un effet dû à leur pratique des mathématiques, et en particulier à leur pratique de la résolution de problèmes de recherche.

c. Potentialités du problème pour travailler la dialectique connaissances/heuristiques.

L'analyse des processus de recherche mis en œuvre par des élèves au cours de l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus met en évidence les potentialités de ce problème pour travailler les aspects dialectiques de l'activité de recherche mathématique entre acquisition, mobilisation de connaissances et développements d'heuristiques. Même si la nature des connaissances mathématiques et des heuristiques mobilisées et travaillées par les élèves sont de nature différente selon le type de démarche de recherche suivie, tous les groupes ont travaillé cette dialectique de l'activité mathématique. Les heuristiques principalement développées par les groupes 1 et 3 sont l'étude de cas particuliers dans une perspective de généralisation et la recherche de régularités. Les connaissances mathématiques associées et privilégiées pour développer ces heuristiques sont essentiellement des connaissances d'arithmétique (nature des nombres, calcul fractionnaire, nombres premiers, multiples et diviseurs, congruences, critères de divisibilité, théorème de Gauss) et heuristiques (statut épistémique d'une conjecture, existence de résultat partiel, rôle du contre-exemple, nature d'une preuve). Le groupe 2 a développé deux heuristiques principales au cours de ses recherches, l'étude de différentes hypothèses de recherche et la construction d'un raisonnement pour guider l'étude d'une piste de recherche. Au cours de discussions métamathématiques, les élèves ont mobilisé de nombreuses connaissances heuristiques telles que le statut épistémique d'une conjecture, la différence entre une preuve existentielle et une preuve constructive, le rôle du contre-exemple dans l'élaboration d'une preuve, la différence entre une recherche de nature empirique et de nature formelle. Les connaissances mathématiques mobilisées et travaillées sont essentiellement arithmétiques : théorèmes de Bézout, théorème de Gauss, divisibilité, congruences, système de congruences. Au cours de la recherche du problème, les élèves ont ainsi travaillé l'essentiel des connaissances et heuristiques mathématiques identifiées dans nos analyses *a priori*. Seul le caractère algorithmique du problème n'a pas été exploité par les élèves. En outre, cette expérimentation révèle les potentialités de ce problème pour travailler des éléments de logique telles que l'alternance de quantificateurs, la négation d'une propriété, la différence entre une preuve existentielle et une preuve constructive (cf. les recherches du groupe 2). De plus, elle met en évidence la possibilité, pour les élèves, d'avoir des discussions métamathématiques au cours des recherches sur le problème.

D'autre part, grâce aux réponses aux questions de la partie 4 du questionnaire (cf. annexes F), nous avons relevé que la majorité des élèves reconnaissent que cette recherche menée sur la conjecture d'Erdös-Straus leur a permis, d'une part d'approfondir et consolider leurs connaissances en arithmétique, et d'autre part d'acquérir une expérience de recherche d'un problème non résolu. Ceci confirme la potentialité du problème à faire travailler la dialectique entre mobilisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques. Ils précisent que les heuristiques développées au cours de la recherche leur ont apporté des éléments méthodologiques pour aborder ce type de problème. Ils mentionnent par exemple l'approche du problème sous différents angles, la préparation et la structuration d'un plan pour étudier une piste de recherche ou la réduction de l'étude du problème à l'étude d'un sous-problème. Nous retrouvons là certaines étapes clés de la méthodologie de résolution de problèmes proposée par Pólya (1945).

Pour conclure, ces analyses *a posteriori* confirment et affinent nos analyses *a priori* quant aux potentialités de la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus pour travailler un certain type d'activité mathématique en classe. Cette étude de problème permet aux élèves de :

- travailler les aspects dialectiques entre acquisition, mobilisation de connaissances et développement d'heuristiques ;
- approfondir des connaissances mathématiques, notionnelles et heuristiques (surtout en arithmétique) ;
- travailler des questions de logique ;
- acquérir des heuristiques expertes de recherche de problèmes non résolus ;
- mettre en œuvre une démarche de type expérimental qui se révèle performante pour avancer dans l'étude du problème, en particulier pour établir des résultats partiels ;
- avoir des discussions de nature métamathématique.

Dans le chapitre suivant, nous effectuons une analyse de l'expérimentation en laboratoire à une autre échelle, afin notamment de déterminer les variables productrices de ces effets par confrontation de la contingence au modèle théorique.

Chapitre 10

Retour sur les analyses *a priori*

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la seconde fonction de la confrontation à la contingence (au sens de Bloch), c'est-à-dire le dispositif de régulation/modification du modèle théorique. Nous effectuons un retour sur nos analyses *a priori* afin de reprendre la discussion de la consistance théorique de notre situation de recherche, créée autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans un premier paragraphe, nous discutons le rapport entre le modèle épistémologique et mathématique et la contingence en ce qui concerne la pertinence de la notion de « geste » de la recherche, pour étudier la question de la transposition de l'activité de recherche experte. Dans un second paragraphe, nous analysons les variables du milieu matériel des élèves qui ont été productrices des effets observés, dans l'expérimentation de type laboratoire, entre le milieu matériel que nous avons décrit et le milieu objectif des élèves.

10.1 Analyse des gestes dans les recherches des élèves

Dans le chapitre précédent (chapitre 9), nous avons étudié les travaux des élèves à l'aide d'une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire, premier outil de notre grille d'analyse. Cette étude a confirmé les potentialités de la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus pour mettre les élèves en position de chercheurs. Dans ce paragraphe, nous revenons plus spécifiquement sur la question de la transposition du travail des chercheurs. Cette analyse s'effectue à partir du second outil de notre grille d'analyse, la notion de « geste » de la recherche. Dans l'analyse des travaux des élèves à partir de leur itinéraire (cf. chapitre 9, partie 9.3), les gestes de la recherche, effectués par les élèves au cours de leur étude de la conjecture, apparaissent en filigrane. Dans ce paragraphe, nous les mettons en évidence en étudiant leur émergence et leurs effets dans les recherches des élèves, en appui sur nos analyses *a priori* (cf. chapitre 7, partie 7.2.2).

1. Réduire le problème aux nombres premiers.

Le geste de *réduction du problème aux nombres premiers* a été effectué dans les trois groupes mais de manière différente. Les élèves du groupe 1 ont réduit l'étude du problème aux nombres premiers grâce à l'identification de la propriété de multiplicativité (s'il existe une décomposition pour n, il existe une décomposition pour tout multiple de n), qu'ils ont, par ailleurs, démontrée, et à l'utilisation, en acte, de l'autre propriété (tout entier admet au moins un diviseur premier). La référence à cette propriété apparaît une seule fois dans leurs travaux, au cours d'une discussion où l'élève E12 explique à l'élève E13 la réduction :

> E13 : Dès que c'est pas un nombre premier, c'est sûr que c'est bon ? C'est sûr ?
>
> E12 : Oui dès que ce n'est pas un nombre premier, on a déjà trouvé. En fait, il faut avoir le nombre premier, un de ses diviseurs premiers. Si on a pour un de ses diviseurs premiers, on a pour le nombre.

Ce geste est donc, pour le groupe 1, un construit de leur recherche. Il est effectué spontanément, à la suite de l'identification de la propriété de multiplicativité à partir de leurs exemples (pour n pair, n multiple de 3, n multiple de 5).

Dans le groupe 2, le geste de *réduction du problème aux nombres premiers* est effectué dans l'opératoire et en acte, à partir de classes de nombres pour lesquelles les élèves ont déterminé des solutions. Les élèves ont en effet effectué ce geste à partir de leur application, en acte, du théorème des restes chinois. En cherchant la liste des classes de nombres modulo 30 pour lesquelles ils n'avaient pas prouvé l'existence de solutions, ils s'aperçoivent qu'il ne reste que des nombres premiers. Les propriétés sous-jacentes ne sont pas explicitées et les élèves n'exploitent pas ce geste de la recherche car ils font l'hypothèse qu'il n'est pas intéressant pour étudier la vérité de la conjecture.

Les élèves du groupe 3 ont effectué la réduction du problème aux nombres premiers à partir de l'observation de la propriété de multiplicativité sur des exemples.

> E31 : Pour tous les nombres qui sont multiples ça marche, parce que les multiples de 2 ça marche, multiples de 3 ça marche, multiples de 5 ça marche, multiples de 7 ça marche et ainsi de suite. A mon avis ce qu'il faut prouver [...] il faut que tous les nombres premiers ça marche.

Ils n'ont pas cherché à démontrer cette propriété mais ils ont reconnu que le groupe 1 l'avait démontrée. Lorsqu'ils cherchent à expliciter la réduction sur leur affiche, ils font référence au théorème fondamental de l'arithmétique. Cependant ils éprouvent des difficultés à l'énoncer correctement.

> E31 : Comme tous les multiples de nombres premiers, comme tous les multiples s'écrivent nombre premier fois k [...]. Donc dans ce cas là, si on a prouvé que ça marche pour tous les premiers, ça marchera donc pour tous les nombres.

Comme pour le groupe 1, ce geste est, pour le groupe 3, un construit de leur recherche. Il est effectué spontanément, à la suite de l'identification de la propriété de multiplicativité à partir de leurs exemples (pour n pair, n multiple de 3, n multiple de 5, etc.).

Comme nous l'avons identifié dans l'analyse *a priori*, le geste de *réduction du problème aux nombres premiers* est effectué par les élèves mais ce n'est pas le premier geste réalisé lors de la recherche. Les élèves n'utilisent pas directement les propriétés d'arithmétique sous-jacentes même si ce sont des connaissances disponibles. Pour les rendre mobilisables, le recours à la construction et au questionnement des exemples semble nécessaire. Ce geste de la recherche est un construit de leur recherche, grâce à des allers et retours entre l'exploitation des exemples et la recherche de régularités pour élaborer des propriétés théoriques sur ces objets. De ce point de vue, l'émergence de ce geste dans la recherche des chercheurs et dans celle des élèves est différente. Cependant, nous avons relevé une similarité entre les mathématiciens et les élèves quant à l'explicitation de ce geste : ils évoquent la propriété de multiplicativité (admise ou démontrée) mais ils ne mentionnent pas le théorème fondamental de l'arithmétique. Le recours à ce théorème semble se faire implicitement. Pour les élèves, nous faisons l'hypothèse que cela peut dissimuler une difficulté à l'énoncer et à le mobiliser. Dans les groupes 1 et 3, l'émergence de *la réduction du problème aux nombres premiers* s'est réalisée dans un système de gestes, en interaction avec d'autres gestes de la recherche : la *désignation des objets* et la *construction et le questionnement des exemples*. La réduction du problème aux nombres premiers a conduit les élèves du groupe 1 à effectuer une disjonction de cas modulo 4 et à désigner un nombre premier selon sa congruence modulo 4. Cela leur a permis d'avancer dans la construction de leur méthode par élimination de cas. Dans le groupe 3, ce geste de la recherche a favorisé la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental. Ils ont en effet élaboré leur méthode de décomposition en étudiant tous les nombres premiers inférieurs à 300. Ce geste tient un rôle central dans les recherches des élèves dans la mesure où il permet des avancées, telles que la formulation de conjectures ou l'écriture d'identités générales et l'élaboration d'éléments de preuves.

2. Désigner des objets

Le geste de *désignation des objets mathématiques* n'a pas été effectué par tous les élèves. Le groupe 2 ne l'a pas utilisé, le groupe 3 l'a évoqué mais il a éprouvé des difficultés dans sa réalisation tandis que le groupe 1 l'a exploité à plusieurs reprises. Dans l'analyse *a priori*, nous avions indiqué que la désignation des objets est fortement liée à la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental ; par suite, il n'est pas surprenant que le groupe 2, dont le travail ne relève pas de cette démarche, n'ait pas eu recours à ce geste.

Dans le groupe 1, les élèves ont utilisé une première fois ce geste de la recherche pour désigner la valeur du dénominateur y de la fraction unitaire inférieure la plus proche de $\frac{4}{n}$, en posant $y = E(\frac{n}{4}) + 1$. Cette définition de y, à l'aide de la partie entière, joue un rôle central dans la construction de leur méthode par élimination des cas car elle permet, d'une part de construire de nouveaux exemples, et d'autre part de formuler l'identité générale suivante : $\frac{4}{n} = \frac{1}{E(\frac{n}{4})+1} + \frac{x}{n(E(\frac{n}{4})+1)}$. Par des allers et retours entre le questionnement d'exemples et la recherche de régularités sur la valeur de x, ils ont mis en évidence le rôle des nombres premiers. Pour déterminer la valeur de x, ils ont en effet utilisé la notation d'un nombre premier selon sa congruence modulo 4. La désignation des objets joue donc un rôle important dans leur recherche à plusieurs niveaux : pour introduire certains objets mathématiques qu'ils utilisent comme outils pour avancer dans la recherche (nombres premiers, congruences), pour aider à la formulation de conjectures et pour écrire et formaliser les différentes étapes de leur méthode. Les analyses des travaux de recherche du groupe 3 mettent particulièrement en évidence l'importance de ce geste pour formaliser et élaborer des preuves de résultats, établis à partir de la manipulation d'exemples. Les élèves ont en effet éprouvé des difficultés dans ces phases de recherche car ils n'ont pas exprimé y et x en fonction de n (cf. épisode 17, p. 437). La comparaison des travaux de ces deux groupes met en lumière l'apport de l'articulation des aspects syntaxiques et sémantiques pour l'émergence de ce geste dans les recherches des élèves. Nous faisons l'hypothèse que les élèves du groupe 3, à la différence de ceux du groupe 1, ont éprouvé des difficultés à désigner certains objets mathématiques en jeu car ils n'ont pas assez articulé les aspects syntaxiques et sémantiques dans la construction de leur méthode. Ils ne se sont pas suffisamment détachés de la manipulation des exemples pour formaliser leur méthode de décomposition. Pour étayer cette hypothèse, nous nous appuyons sur l'émergence de ce geste dans leur recherche, lorsqu'ils cherchent à spécifier les exceptions à leur méthode. La désignation des exceptions se réalise dans un processus dialectique entre le questionnement de ces exemples et la recherche d'éléments théoriques pour rendre compte de la propriété de ces objets spécifiques. Les aspects sémantiques et syntaxiques sont articulés grâce à la mise en œuvre d'une démarche expérimentale. Cette dernière favorise l'émergence de ce geste et ses effets puisque les élèves parviennent, d'une part à distinguer deux types d'exceptions et d'autre part, à les caractériser. Notons que les élèves relèvent l'importance de ce geste pour simplifier leur manipulation et leur étude des cas particuliers :

E31 : 281 ce n'est pas un vrai.

E33 : 281, si, il marche.

E31 : Oui donc, ce n'est pas un vrai.

E33 : Oui ce n'est pas un vrai. Il faut qu'on leur trouve un nom parce que là, c'est pas possible.

[...]

E33 : 241 c'est un vrai de vrai.

E32 : Voilà c'est ça le nom, un vrai de vrai, celui qui ne marche pas.

Ces analyses confirment nos analyses *a priori*, qui ont montré que l'émergence de ce geste est favorisé par l'exploitation de procédures exploratoires et certaines connaissances mathématiques. La notion de partie entière et la notation d'un nombre premier selon sa congruence modulo 4 sont, par exemple, deux connaissances qui ont manqué aux élèves du groupe 3 pour formaliser et élaborer des preuves de leurs résultats. Elles mettent en évidence un élément supplémentaire qui favorise l'émergence de ce geste : l'articulation des aspects sémantiques et syntaxiques. Les élèves, comme les chercheurs, ont recours à ce geste de la recherche dans le travail sur les objets mathématiques en jeu. C'est pour cette raison que Thépault et les élèves du groupe 2 n'ont pas effectué de désignation d'objets. Le geste se réalise ainsi au sein d'une démarche de type expérimental et favorise, en retour, les va-et-vient entre les phases d'expérimentation, de formulation et d'élaboration de preuves.

3. Introduire un paramètre

Nous n'avons pas relevé le geste d'*introduction d'un paramètre* dans les recherches des élèves, au sens où nous l'avons défini, c'est-à-dire l'introduction d'un signe sans renvoi explicite aux objets qu'il désigne. Dans nos analyses *a priori*, nous avions relevé que son émergence s'effectuait au sein de procédures algorithmiques ou algébriques et qu'il était peu effectué par les élèves. L'analyse des recherches des trois groupes de l'expérimentation en laboratoire permet d'affiner ces éléments.

Au sein d'une procédure de nature algorithmique, il semble que ce soit le langage de programmation d'un algorithme qui favorise l'émergence de ce geste. La construction d'une méthode algorithmique sans passage à une implémentation n'entraîne pas nécessairement l'introduction d'un paramètre. Ceci est en lien avec les aspects sémantiques d'un algorithme, qui se construit en appui sur les objets mathématiques en jeu, et les aspects syntaxiques de l'implémentation, qui consiste en la construction d'une syntaxe dans un langage spécifique pour réaliser la liste d'opérations du procédé algorithmique. Les groupes 1 et 3 ont élaboré des méthodes algorithmiques de décomposition et d'élimination de cas sans avoir recours à ce geste de la recherche. Les élèves du groupe 3 évoquent, à la fin de leur recherche, la possibilité de faire varier la valeur de y (qui est égale à $E(\frac{n}{4})+1$) en l'augmentant successivement de 1 mais ils n'introduisent pas, comme le fait Mizony, un paramètre pour le formaliser (c'est-à-dire écrire $y = E(\frac{n}{4}) + a$ où a est le paramètre qui varie). Nous faisons l'hypothèse que cela est lié à leur manque de connaissances en algorithmique et en programmation. Mizony a recours à cette formulation pour construire un algorithme de décomposition. En effectuant ce geste, il généralise et améliore son premier algorithme en un algorithme de balayage plus performant, qui génère un nombre très important d'exemples. La méthode de décomposition construite par le groupe 3 s'inscrivant sous les mêmes dimensions organisatrices que celle élaborée par Mizony, on peut supposer qu'une programmation de leur méthode aurait favorisé le recours à ce geste de la recherche. Dans une recherche s'appuyant sur la manipulation d'outils algébriques, les élèves du groupe 2, comme Thépault, n'ont pas eu recours à ce geste de la recherche. A partir de nos analyses mathématiques et de ces analyses *a posteriori*, nous faisons l'hypothèse qu'au sein de procédures algébriques, c'est l'utilisation de certains outils mathématiques (tels que le théorème des restes chinois, la notion de résidu quadratique, la divisibilité des polynômes) qui peut nécessiter le recours à ce geste et en favoriser l'émergence.

Cette analyse met en évidence l'importance des connaissances mathématiques sous-jacentes à l'introduction d'un paramètre (connaissances en programmation ou outils arithmétiques spécifiques) pour favoriser l'émergence de ce geste et sa réalisation.

4. Construire des exemples et les questionner

Le geste de *construction et questionnement des exemples* émerge dans la majorité des travaux de recherche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus. Dans les recherches individuelles, nous l'avons relevé dans 8 recherches sur 10. Il émerge, soit comme premier geste de la recherche (cf. les cahiers des élèves E12 et E24, annexes C4 et D7) dans le but de déterminer des régularités à partir de plusieurs exemples, soit à la suite de l'abandon d'une piste de recherche algébrique (cf. le cahier de l'élève E21, annexe D4) ou pour vérifier des manipulations algébriques (cf. les cahiers des élèves E11 et E33, annexes C3 et E6). Dans les recherches collectives, ce geste a particulièrement été porteur dans la construction des méthodes de décomposition et d'élimination de cas au sein des groupes 1 et 3. Dans le groupe 1, les élèves ont élaboré leur méthode d'élimination des cas (cf. épisode 9, p. 390) à partir de la valeur de la fraction unitaire inférieure la plus proche de $\frac{4}{n}$ (à savoir $\frac{1}{y} = \frac{1}{E(\frac{n}{4})+1}$) , à partir du questionnement de trois exemples (donnés par le groupe 3 lors de la mise en commun : $n = 23, n = 29$ et $n = 457$) et à partir de la construction et de l'étude de deux exemples ($n = 461$ et l'exemple crucial $n = 4513$). Le geste de *construction et questionnement des exemples* joue un rôle central dans leur démarche de recherche : il favorise les allers et retours entre la manipulation des exemples, la recherche de régularités et l'écriture des expressions littérales pour rendre compte des propriétés de ces objets. Notons que l'étude des exemples comme produits finis (ceux donnés par le groupe 3) ne suffit pas aux élèves pour élaborer les éléments théoriques de leur méthode. Un recours au geste de *construction et questionnement de nouveaux exemples* (dont un exemple crucial) semble nécessaire. Ceci fait écho à nos analyses *a priori*, où nous avons mis en évidence que la construction des exemples favorise davantage les avancées de la recherche (notamment la production de résultats partiels) que l'exploitation des exemples comme produit fini. La construction d'exemples favorise la mise en œuvre d'une démarche expérimentale par allers et retours entre expériences et théorie. Dans le groupe 3, les élèves ont construit leur méthode de décompositions (cf. épisode 12, p. 422) à partir de la construction, puis de l'étude des décompositions de $\frac{4}{n}$ pour tout nombre n premier inférieur à 300. Ce geste de la recherche a émergé pour deux raisons : d'une part les élèves cherchent à déterminer des régularités pour généraliser leurs procédés de décomposition, et d'autre part ils veulent étudier en détail les cas problématiques. Il favorise alors la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental entre la manipulation de nombreux exemples, l'étude de cas particuliers, la recherche de régularités et la détermination de règles générales pour décomposer certaines classes de nombres. Leur utilisation de ce geste est similaire à celle de Mizony dans ses recherches sur la conjecture. La différence est dans la construction des exemples, « à la main » pour les élèves et à l'aide d'algorithmes pour le chercheur. L'analyse comparative des travaux des deux groupes (cf. conclusion du chapitre 9, partie 9.4) a mis en évidence l'exploitation différente des exemples dans ces deux groupes. Le groupe 1 a eu recours à peu d'exemples et les a utilisés en tant que représentant d'une classe de nombres. Au contraire, le groupe 3 a construit de nombreux exemples, pour déterminer les classes de nombres pour lesquelles l'équation d'Erdös-Straus a des solutions et pour identifier et étudier les cas problématiques. La conséquence est une méthode de décomposition plus performante et riche pour le groupe 3 en termes de résultats partiels sur la conjecture, c'est-à-dire d'identification de classes de nombres pour lesquelles l'équation a des solutions. Seuls les nombres congrus à 1 modulo 24 ne sont pas décomposés par leur méthode alors qu'avec la méthode du groupe 1, il reste aussi les nombres congrus à 17 modulo 24. Les schémas des recherches des groupes 1 et 3 (respectivement p. 406 et p. 449) illustrent, d'une part l'exploitation différente des exemples dans les deux recherches, et d'autre part le rôle du geste de *construction et questionnement des exemples* au sein d'une démarche expérimentale et dans les avancées des recherches (écriture d'identités, formulation de conjectures et élaboration de résultats partiels). Nous noterons également que ce geste de la recherche s'effectue en lien avec les gestes de *désignation des objets* et de *contrôles locaux*, favorisant également les interactions entre les expériences et l'élaboration d'éléments théoriques, comme nous l'avions relevé dans les recherches de Mizony.

Les élèves des groupes 1 et 3 ont eu recours à ce geste de la recherche, pour s'engager dans l'étude du problème en exploitant une procédure exploratoire, puis pour avancer dans les recherches en construisant une méthode de décomposition ou d'élimination des cas. Dans le groupe 2, les élèves ont peu exploité ce geste de la recherche, et quand ils ont essayé de construire un exemple (pour $n = 5$), ils ont éprouvé quelques difficultés, comme en témoigne les extraits suivants (cf. également épisodes 6 à 8, p. 349) :

> E21 : 4/5, ça fait 0,8 [...] il faut que la somme fois 10, ça fasse 8.
>
> [Les élèves tapent sur leur calculatrices]
>
> E22 : 1/5 + 1/5, t'as 2/5 [...] 1/2,5 non ça ne va pas.
>
> [...]
>
> E23 : Au pire, on peut essayer tous les cas, 5 c'est $1 + 4$ et c'est $3 + 2$. On peut essayer toutes les valeurs de a, b, c parce que, de toute façon, elles sont comprises entre 1 et 5.
>
> [...]
>
> E22 : Je ne cherche pas l'exemple, je cherche à prouver l'existence.
>
> [...]
>
> E21 : 4/5 c'est égal à 0,8. Par exemple, $0,3+0,3+0,2 = 0,8$, il faut donc trouver une fraction égale à 0,3 et une autre égale à 0,2. Ça existe 3/10 mais il faudrait une fraction unitaire et 1/(10/3) ne marche pas car ce n'est pas un entier. [...] Il faut trouver à faire 0,8 avec ça et après transformer en fractions.

La construction de cet exemple se réalise par tâtonnements. Les élèves n'effectuent pas de lien entre cet exemple et ceux qu'ils ont trouvés auparavant, et ils ne cherchent pas à construire une méthode pour déterminer cette décomposition. Nous faisons l'hypothèse que ces difficultés à trouver une décomposition pour $n = 5$ résultent, d'une part de la manipulation de notations décimales plutôt que fractionnaires, et d'autre part de leur visée de la recherche. Ils ne sont pas convaincus de la pertinence de cette piste de recherche pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus et sont réticents à s'engager réellement dans la recherche de solutions pour une valeur de n donnée. Ces analyses confirment ce que nous avions déjà repéré dans notre analyse *a priori*, à savoir que ce geste est, soit utilisé tout au long des recherches, au sein de démarches expérimentales, soit écarté volontairement en raison de sa nature empirique, pour mettre en œuvre une démarche de type algébrique. Ce geste est ainsi intimement lié à la mise en œuvre d'une démarche expérimentale. La construction et le questionnement des exemples s'effectuent par des allers et retours entre la recherche de décompositions pour certaines valeurs de n et la volonté de déterminer des identités générales. Il favorise ainsi les aspects dialectiques entre manipulation des objets mathématiques en jeu et élaboration des éléments théoriques rendant compte des propriétés de ces objets.

5. Effectuer des contrôles locaux

Le geste *effectuer des contrôles locaux* consiste à effectuer un retour à la nature des nombres en jeu dans le problème. Ce geste joue un rôle particulièrement important dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus dans la mesure où les objets mathématiques en jeu sont des nombres entiers. Comme les élèves et les étudiants des pré-expérimentations, les élèves de cette expérimentation en laboratoire portent une attention particulière à la nature des nombres tout au long de leurs recherches. Nous faisons l'hypothèse que leur conscience de la spécificité du champ concerné par l'arithmétique (enseignée à leur niveau) est un élément décisif dans l'émergence de ce geste dans leurs recherches.

> E21 : Je me demande si ce n'est pas mieux de l'étudier sous cette forme [$4abc = n(ab + bc + ac)$] parce que comme ça on n'a que des entiers donc on peut plus facilement utiliser l'arithmétique et la divisibilité.

Nous avons relevé ce geste de la recherche dans les travaux des trois groupes. Les élèves effectuent un retour à la nature des nombres en jeu, soit par calcul sur les énoncés, soit par vérification à l'aide d'exemples. Ce geste provoque alors différentes avancées dans la recherche de la conjecture.

La première est la formulation de conjectures. Nous l'illustrons grâce aux recherches du groupe 3. A l'épisode 4 (p. 367), un élève écrit l'identité suivante : $\frac{4}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{3}{n}$. Il justifie la validité de l'identité par un calcul sur les énoncés et précise que $\frac{3}{n}$ est la fraction unitaire $\frac{1}{\frac{n}{3}}$. Comme il ne contrôle pas la nature du nombre $\frac{n}{3}$, il conjecture que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout entier n impair. Ce sont les autres élèves du groupe qui lui expliquent que ce nombre n'est pas un entier pour toute valeur impaire de n. Le recours à un exemple est nécessaire à l'élève pour comprendre le problème. Cela lui permet ensuite de déterminer le domaine de validité de la conjecture à tout n multiple de 3.

La seconde est la formalisation des éléments théoriques trouvés à partir de la manipulation d'exemples. Les élèves du groupe 3, lorsqu'ils écrivent la synthèse de leurs recherches, tentent de formaliser leur méthode de décomposition. Ils écrivent l'identité suivante : $\frac{4}{n} = \frac{1}{t} + \frac{j}{k}$. Pour décrire et expliciter le cas où $j = 1$ et k est congru à 2 modulo 3, ils désignent par d le facteur premier de k congru à 2 modulo 3. Ils posent ensuite $e = \frac{d+1}{3}$. Grâce à cette notation, ils mettent en évidence que e est un nombre entier. Ils effectuent ensuite à nouveau ce geste de la recherche pour vérifier que le nombre $\frac{3e-1}{nte}$ est un nombre entier (cf. annexe E4, p. 196). Afin de contrôler leurs écritures syntaxiques, ils ont ainsi recours à la sémantique par retour à la nature des nombres en jeu. Dans les recherches du groupe 1, le contrôle de la nature des nombres en jeu constitue une aide à l'élève E12 pour formaliser sa méthode de décomposition par multiples et diviseurs. Elle s'appuie sur la nature des nombres pour formuler une condition qui explicite le procédé de calcul sous-jacent à sa méthode :

> $\frac{4}{n} = \frac{4k}{kn} = \frac{d+e+f}{kn}$. On a $4k$ qui doit être la somme de trois des diviseurs (d, e, f) de kn.

Sous cette condition, $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{kn}{d}} + \frac{1}{\frac{kn}{e}} + \frac{1}{\frac{kn}{f}}$ et ces trois fractions sont unitaires. Ce recours au geste de contrôle local fait écho à celui effectué par Thépault et Mizony pour déterminer les conditions d'existence de solutions de leurs théorèmes (cf. chapitre 5, partie 5.3).

La troisième est la vérification de résultats théoriques. Les élèves du groupe 2 ont exploité de nombreuses procédures opératoires par manipulations algébriques. Le retour à la nature des nombres en jeu est un de leurs outils pour vérifier la validité de leurs résultats algébriques, comme l'illustre l'extrait suivant :

> E22 : Ça veut dire que $k'k = 1/4$. Ce qui implique qu'il y a au moins k' ou k qui ne soit pas entier. Ce qui implique qu'il y a d'autres choses qui ne soient pas entières. Ce qui implique qu'il y a beaucoup de choses qui ne soient pas entières. Ce qui implique qu'il n'y a plus beaucoup d'entiers là-dedans. (rires)
>
> [...]
>
> E21 : C'est impossible. Il y a une erreur quelque part.

Cet élève se rend compte, en étudiant la nature des objets qu'ils manipulent, qu'ils ont fait une erreur dans la traduction de l'expression $n \mid abc$. Ils ont écrit : il existe k entier naturel tel que $n = abck$, au lieu de $abc = nk$. L'élève exerce ainsi un contrôle sémantique de ses expressions syntaxiques.

Enfin, la quatrième avancée dans les recherches est l'élaboration de preuves. Comme nous l'avons mis en évidence dans l'analyse *a priori*, les élèves ont recours à ce geste de la recherche pour prouver les conjectures qui assurent l'existence de solutions à l'équation pour certaines classes de nombres. Par exemple, pour prouver l'existence de solutions pour tout n pair, les élèves vérifient par un calcul sur les énoncés, d'une part que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$ est égal à $\frac{4}{n}$, et d'autre part que la parité de n assure que ces fractions sont unitaires. Notons que cette dernière justification est rarement évoquée dans leurs discussions, elle semble évidente. En revanche, lorsqu'ils présentent leurs résultats à l'ensemble de la classe, ils la mentionnent. Ils sont donc conscients de son importance pour élaborer la preuve du résultat.

Ces analyses nous permettent d'affiner nos analyses *a priori* concernant l'émergence de ce geste de la recherche : elle semble favorisée, d'une part par la conscience des élèves de la spécificité du champ de l'arithmétique (enseignée en terminale scientifique), et d'autre part par l'articulation des aspects syntaxiques et sémantiques dans différentes étapes de la recherche (formulation de conjectures, formalisation d'éléments théoriques, construction de preuves). Le geste *effectuer des contrôles locaux* apparaît ainsi tant au sein de procédures opératoires qu'exploratoires. Au sein d'une recherche avec manipulations d'outils algébriques, ce geste permet de vérifier les résultats théoriques grâce à un contrôle sémantique. Dans une recherche de nature expérimentale, il s'agit plutôt d'un outil qui constitue une aide à la formulation de conjectures ou à la formalisation et généralisation d'éléments théoriques élaborés dans les allers et retours entre les expériences et la théorie.

6. Transformer l'équation initiale

Dans nos analyses *a priori*, nous avons montré que ce geste de la recherche est souvent effectué par les élèves au cours de leurs recherches. Il émerge au sein de procédures opératoires lors d'une étude de la conjecture d'Erdös-Straus dans un cadre général. Nous avons relevé des difficultés dans le travail des élèves à réaliser et exploiter ce geste, en raison de la non-mobilisation ou du manque de certaines connaissances ou outils mathématiques. Nous avions fait l'hypothèse que la transformation de l'équation initiale se révèle productrice d'avancées dans la recherche des élèves lorsque ces derniers possèdent un bagage mathématique assez riche. L'analyse des travaux des élèves de l'expérimentation en laboratoire confirme ces hypothèses et apporte des éléments supplémentaires. Nous avons relevé ce geste de la recherche dans la majorité des recherches individuelles des élèves (9 sur 10, cf. cahiers de bord des élèves en annexes) puis dans les travaux collectifs des trois groupes. Ce geste émerge des recherches des élèves lorsqu'ils cherchent à simplifier l'écriture de l'équation initiale, en isolant l'inconnue n (transformation 1, p. 270) ou en utilisant un produit en croix pour ne plus avoir de fractions (transformation 2, p. 270). Cette dernière transformation est souvent exploitée car les élèves repèrent la possibilité d'appliquer le théorème de Gauss puis des conditions de divisibilité. Nous avons observé que cette piste est étudiée plus en détail par les élèves lorsqu'ils font un lien avec la résolution d'équations diophantiennes. Dans le groupe 2, les élèves ont suivi cette piste basée sur la transformation 2. En appui sur leurs connaissances d'arithmétique (théorème de Gauss, divisibilité, congruences et leurs propriétés), d'heuristique (type de raisonnement) et de logique, ils ont établi un résultat partiel portant sur des conditions d'existence de solutions. Notons que cette recherche a été particulièrement productive en termes de travail des heuristiques et de discussions métamathématiques. Dans ses recherches individuelles, l'élève E11 (cf. annexe C3) a étudié une autre forme équivalente à l'équation initiale : $4 = \frac{n(bc+ac+ab)}{abc}$ en posant des conditions sur a, b, c telles que $a = b = c$ ou a, b et c deux à deux distincts. Nous avons relevé qu'il a éprouvé de nombreuses difficultés à étudier cette équation (erreurs de calculs, raisonnements erronés) et cela l'a conduit à énoncer des résultats faux. La mobilisation du calcul littéral et de certains raisonnements en mathématiques ne semble pas suffisamment naturalisée pour cet élève pour exploiter cette piste de recherche. Nous avons relevé ce constat dans d'autres travaux d'élèves. Par exemple, l'élève E13 essaie d'étudier l'équation initiale en posant $a = n$. Il obtient alors une nouvelle équation $\frac{3}{n} = \frac{b+c}{bc}$ qu'il essaie de résoudre. Une méthode de résolution serait d'introduire la lettre S pour désigner la somme $b+c$ et la lettre P pour désigner le produit bc et d'utiliser la méthode de somme et produit des racines, comme le fait Thépault dans ses recherches. Cependant, cet élève ne dispose pas de ces connaissances. Après plusieurs essais de résolution infructueux, il abandonne cette piste. Enfin, nous avons identifié, dans les recherches de certains élèves, une tentative d'articuler cette procédure opératoire avec une procédure de type exploratoire. Par exemple, l'élève E31, dans ses recherches personnelles (cf. annexe E4), étudie l'équation sous la forme suivante $4 = n(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$ en prenant successivement les valeurs particulières de n suivantes : $n = 2, n = 1, n = 3, n = 4, n = 5$. Cette étude lui a permis de déterminer des décompositions pour ces valeurs de n, d'identifier des régularités ($a = b = 2n, c = 1$ ou $a \times b = c$) et d'écrire une identité générale ($\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$).

Le geste de *transformation de l'équation initiale* apparaît assez spontanément dans la recherche des élèves. La visée de la quête de la vérité de la conjecture est un élément favorisant l'émergence de ce geste. Il est en effet associé à une étude de la conjecture dans un cadre général, par exploitation de procédures opératoires. Dans ce cas, sa réalisation et son exploitation sont favorisées par la mobilisation de certaines connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques. Les avancées de la recherche sont la production de résultats partiels mais surtout, un travail sur les heuristiques et une réflexion de type métamathématique. Nous avons relevé, dans une recherche, l'utilisation de ce geste en lien avec l'exploitation du caractère expérimental du problème (faire des essais sur des valeurs de n) mais généralement, au sein de procédures exploratoires, les élèves ont peu recours à ce geste de la recherche. Une des raisons est qu'il n'est pas particulièrement porteur d'une dialectique entre manipulation des objets mathématiques en jeu et élaboration d'éléments théoriques.

7. Implémenter un algorithme

Le geste d'*implémentation d'un algorithme* n'a émergé dans aucune des recherches des trois groupes. Cependant les élèves ont tous évoqué au cours de leurs recherches l'idée de construire un algorithme et de l'implémenter sur un ordinateur. Dans les groupes 2 et 3, les élèves ont discuté de la construction d'un procédé algorithmique. Dans le groupe 2, l'idée est de construire un algorithme de balayage des valeurs de a, b et c, donnant en sortie les valeurs de n pour lesquelles l'algorithme trouve une solution à l'équation d'Erdös-Straus. Dans le groupe 3, les élèves repèrent que leur méthode est de type algorithmique et qu'elle pourrait être implémentée. Leur idée est de construire un algorithme reposant sur leur méthode de décomposition qui leur permettrait, d'une part de tester un grand nombre de valeurs de n, et d'autre part de repérer puis d'étudier les valeurs de n pour lesquelles leur méthode ne donne pas de solutions. Les deux procédés algorithmiques évoqués ont des fonctions différentes dans l'étude de la conjecture. Le premier permet de déterminer des solutions à l'équation d'Erdös-Straus alors que le second permet de vérifier la méthode de décomposition élaborée, et d'identifier les cas problématiques. Dans ce cas, le geste *implémenter un algorithme* favorise la mise en œuvre d'une démarche expérimentale par allers et retours entre la construction et l'implémentation d'un algorithme et l'étude des concepts mathématiques sous-jacents (cf. recherches de Mizony). Le premier procédé n'est pas porteur de l'exploitation des exemples dans la mesure où son élaboration ne permet pas de comprendre la construction des décompositions. La manipulation des exemples se limite alors à l'étude de produits finis et non à la construction effective de décompositions. Comme nous l'avons vu dans l'analyse du geste *construire et questionner les exemples*, cette exploitation des exemples est moins productive en termes d'avancées dans la recherche.

Si les algorithmes ne sont pas construits ni implémentés par les élèves, c'est que ces derniers font l'hypothèse qu'ils ne disposent pas des connaissances nécessaires en algorithmique et en langage de programmation pour le faire. Bien que ces élèves aient suivi un enseignement en algorithmique et en programmation pendant trois ans (de la seconde à la terminale), il semble que ces connaissances ne soient pas encore suffisamment naturalisées pour être disponibles et mobilisables pour les élèves, en particulier dans le contexte de résolution de problèmes de recherche. Cette analyse met à nouveau en évidence l'importance des connaissances mathématiques sous-jacentes au geste de la recherche, qui permettent son émergence et sa réalisation.

Conclusion

Dans cette analyse, nous avons mis en évidence les gestes de la recherche qui émergent dans les travaux des élèves. Deux gestes ne sont pas apparus : l'*introduction d'un paramètre* et l'*implémentation d'un algorithme*. Nous avons relevé que ceci est lié aux connaissances mathématiques sous-jacentes, non mobilisées par les élèves ou absentes de leur milieu objectif. Les cinq autres gestes de la recherche ont été effectués par les élèves mais pas dans tous les groupes. Comme nous l'avons mis en avant dans les travaux des chercheurs (cf. chapitre 5, partie 5.3) puis dans les analyses des pré-expérimentations (cf. chapitre 6, partie 6.3), l'émergence d'un geste est favorisée par un type de démarche spécifique. Pour formuler le théorème de Mizony 1 et pour construire le programme de vérification de solutions à l'équation pour $n < 10^{17}$, Mizony a effectué les gestes suivants : *réduire le problème aux nombres premiers*, *désigner des objets*, *construire et questionner des exemples*, *effectuer des contrôles locaux* et *implémenter un algorithme*. Ce sont les gestes qui émergent au sein d'une démarche de type expérimental et qui favorisent sa mise en œuvre. Dans la construction de leurs méthodes de décomposition et d'élimination de cas, les élèves des groupes 1 et 3 ont eu recours au même système de gestes (mise à part l'*implémentation d'un algorithme*). Ceci n'est pas étonnant puisque les recherches des élèves et du chercheur s'inscrivent sous la même visée (recherche de décompositions effectives) et mettent en œuvre les mêmes dimensions organisatrices. Les élèves du groupe 2 ont élaboré leur résultat théorique en effectuant essentiellement deux gestes de la recherche : *transformer l'équation initiale* et *effectuer des contrôles locaux*. Le premier geste émerge spontanément dans l'étude de la conjecture dans un cadre général et favorise une démarche de recherche de type algébrique. Le second geste joue un rôle central dans l'étude de la conjecture par son articulation des aspects syntaxiques et sémantiques, dans la formulation de conjectures et dans la construction de preuves. Ces deux gestes ont été essentiels dans les recherches, de nature algébrique, de Thépault. Notons cependant qu'il a utilisé également *la réduction du problème aux nombres premiers* et la *construction et le questionnement des exemples*, gestes identifiés dans les recherches des élèves mais non exploités.

Ces analyses montrent que la notion de geste permet de décrire, analyser et mettre en perspective les processus de recherche mis en œuvre par les élèves et les chercheurs dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Cet outil est ainsi pertinent pour étudier la question de la transposition du travail du chercheur. Les gestes identifiés dans les recherches des mathématiciens sont également relevés dans les recherches des élèves, quand ces derniers disposent des connaissances mathématiques favorisant leur émergence. La notion de geste de la recherche permet de prendre en compte les aspects dialectiques de l'activité de recherche entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. En effet, l'émergence d'un geste est favorisée, d'une part par la mobilisation des connaissances mathématiques sous-jacentes, et d'autre part par la nature de la démarche de recherche mise en œuvre. En retour, sa réalisation au sein d'un système de gestes provoque des avancées dans la recherche, notamment l'élaboration de résultats partiels, et permet d'approfondir les connaissances mathématiques mobilisées et de développer des heuristiques de recherche. Pour le chercheur, la prise en compte d'un système de gestes contribue à l'analyse de la complexité des processus de recherche mis en œuvre au cours d'une résolution de problème, ainsi que de celle du travail mathématique effectif produit.

10.2 Analyse du milieu objectif des élèves

Dans ce paragraphe, nous analysons le milieu objectif des élèves en relation avec le milieu matériel décrit dans l'analyse *a priori*. Nous nous intéressons en particulier à l'évolution du milieu objectif au cours de la recherche. Pour conduire cette analyse, nous nous appuyons, d'une part sur les analyses des travaux des groupes à l'aide des itinéraires de recherche (cf. chapitre 9, partie 9.3), et d'autre part sur les réponses des élèves au questionnaire rempli lors de la séance de synthèse (cf. annexe F). Nous reprenons successivement les cinq éléments caractérisant le milieu matériel des élèves que nous avons constitué (cf. chapitre 8) afin d'étudier leurs effets sur la recherche des élèves.

Le premier élément caractérisant le milieu est l'organisation didactique de la situation et notamment, la mise en œuvre d'un scénario se composant de sept séances. L'analyse des recherches des groupes met en évidence la pertinence d'une telle organisation didactique pour prendre en compte différentes modalités du travail du chercheur, éléments essentiels pour mener une recherche sur un problème non résolu. Le temps long de la recherche a permis, comme le préconise Tisseron (1998), « de laisser le temps aux élèves de se poser des questions et de suivre leurs propres pistes de recherche ». Dans les deux premières séances, les élèves ont évoqué de nombreuses pistes de recherche potentielles pour étudier le problème et en ont exploré plusieurs. Nous faisons l'hypothèse que la première mise en commun a été une étape charnière dans leurs recherches, car elle leur a permis de choisir puis de s'engager dans une piste de recherche particulière. Ainsi, à partir de la séance 3, chaque groupe a pu approfondir l'étude d'une piste : élaboration de la méthode d'élimination des cas pour le groupe 1, étude de conditions d'existence de solutions pour tout nombre impair pour le groupe 2 et construction d'une méthode de décomposition pour le groupe 3. Dans les réponses au questionnaire, deux élèves mettent en évidence l'importance de ce facteur temps dans leurs recherches, et pensent que le temps leur a manqué pour avancer dans l'étude de la conjecture :

> E12 : Pour vraiment approfondir il nous aurait fallu encore plus de temps de recherche.
>
> E21 : Je pense que pour réellement avancer, il est nécessaire de faire des séances longues, deux heures c'était bien mais trois heures aurait mieux convenu je pense. [...] Je pense qu'il faudrait plus de temps pour vraiment avancer.

Le nombre et la nature des séances a permis aux élèves d'approcher les différentes phases du processus créateur de l'activité mathématique décrit par de nombreux mathématiciens (cf. chapitre 5), comme en témoigne cet élève :

> E32 (questionnaire) : [Que] cette activité se vit, on n'y pense sans cesse quand on a le temps et des fois, l'idée vient d'où on se s'y attend pas.

La phase de préparation s'est déroulée pendant les premières phases de recherche individuelle et collective, où les élèves ont choisi l'orientation de leurs recherches (la quête de la vérité de la conjecture ou l'étude de décompositions pour des valeurs de n données), établi des premiers résultats partiels et déterminé une piste de recherche à explorer pour étudier la conjecture (existence d'une décomposition pour tout entier n impair ou élaboration d'une méthode de décomposition ou d'élimination de cas pour n impair). L'espacement entre les séances a joué le rôle de la phase d'incubation et de repos. Entre les séances, plusieurs élèves disent avoir pensé au problème, dans différentes situations, et avoir trouvé des idées. Les situations qu'ils décrivent présentent des similitudes avec celles évoquées par les chercheurs (cf. chapitre 5, partie 5.1.1). Par exemple, une élève du groupe 1 a eu plusieurs idées en se réveillant :

> E12 (questionnaire) : Je me suis réveillée plusieurs fois avec des idées concernant le problème.

Un élève du groupe 2 explique à ses camarades qu'il a eu une idée alors qu'il était chez le coiffeur :

> E22 (séance 2) : J'ai trouvé pour les multiples de 3. J'étais chez le coiffeur, je n'avais rien à faire alors j'y réfléchissais. Je n'avais rien pour m'occuper.

Enfin, un élève du groupe 3 explique avoir eu une idée alors qu'il était sous la douche :

> E33 (séance 2) : J'ai pensé je ne sais plus quand cette semaine, je ne sais plus ce que je cherchais [...] sous la douche, c'est tombé comme ça.

Au cours des recherches, certains élèves emploient le terme d'illumination et expriment la venue d'une idée soudaine :

> E12 (séance 2) : Je me suis réveillée le matin et je me suis dit, ah, c'est ça !
>
> E21 (séance 3) : Ça m'est venu à l'esprit comme ça, je ne sais pas si c'est vrai ou pas.
>
> E32 (séance 2) : J'ai eu juste une illumination là.

Les élèves pensent que l'idée est intéressante à suivre et sont conscients qu'elle doit être vérifiée. En revanche, contrairement aux chercheurs qui attribuent un caractère de certitude à l'illumination, les élèves ne sont pas certains de sa vérité et de son utilité pour l'étude du problème. Enfin, les élèves entrent dans la phase de vérification, finition et continuation lors de la rédaction des synthèses et de la présentation de leurs travaux aux autres groupes. Comme de nombreux mathématiciens, les élèves pointent l'importance de ces phases de travail pour « clarifier leurs recherches » :

E13 : Cela permet de mettre au clair notre avancée dans le problème.

E21 : Il faut toujours faire une synthèse du travail accompli pour mettre en ordre son travail.

E24 : Cela permet de synthétiser toutes nos pistes de recherche pour une meilleure clarté.

E32 : Cela permettait de poser nos arguments plus clairement et ainsi, comprendre le raisonnement des personnes.

E33 : Ca permet de mettre au clair les solutions trouvées.

Deux élèves mentionnent également l'utilité de la synthèse pour recentrer leurs recherches, qui se sont parfois éloignées du problème initial, et faire le lien entre leurs résultats et le problème initial :

E12 : Ca a été difficile de faire une vraie synthèse et de rédiger ce que nous avions fait mais je pense que c'est essentiel pour nous faire nous recentrer sur le problème posé et voir ce que nous avons trouvé, dans quelle mesure nous avons répondu au problème.

E22 : [La rédaction d'une synthèse] force à faire un travail de synthèse et de confronter ses travaux au problème original.

Notons que pour les élèves du groupe 3 en particulier, la rédaction des synthèses les a obligés à formaliser leur méthode de décomposition en écrivant les différentes identités à l'aide d'outils algébriques. Nous faisons l'hypothèse que sans les rédactions de synthèses, leur méthode serait restée une connaissance opératoire et non prédicative (Vergnaud, 2001). Les vidéos des recherches des élèves montrent que les synthèses facilitent l'engagement dans l'étude du problème à chaque début de séance. En effet, les élèves s'appuient toujours sur la synthèse de la séance précédente pour démarrer leur recherche. Puis, au cours de la séance, ils consultent régulièrement les pages antérieures de leur cahier de bord pour retrouver des pistes de recherche étudiées ou abandonnées, des conjectures ou des résultats. Le cahier de bord constitue la mémoire de leurs recherches. Comme nous l'avions prévu, les synthèses et le cahier de bord ont permis d'assurer une continuité dans la recherche des élèves tout au long des séances. Ces outils méthodologiques ont contribué à l'évolution du milieu objectif, d'une part pour le stabiliser entre deux séances (faire en sorte que les pistes de recherche étudiées, les résultats trouvés et les difficultés éprouvées ne soient pas oubliés) et d'autre part, pour l'enrichir au fil des séances (en favorisant par exemple l'exploitation de toutes les idées et pistes de recherche évoquées, en utilisant les conjectures formulées ou les résultats démontrés, etc.).

L'importance des différentes modalités d'échanges est également mise en évidence par les élèves :

E12 (questionnaire) : C'était intéressant de voir les différentes démarches que nous avons employées [...] Ça nous a donné un aperçu de la difficulté de communiquer les résultats aux autres (nécessité d'être clair dans les explications).

E21 (séance 3) : C'est un exercice formateur de, d'expliquer quelque chose à l'oral [...] Plus tard dans le travail, on devra expliquer des choses aux autres, expliquer pourquoi on veut faire ça.

E21 (questionnaire) : Le plus important je pense est de partager les idées. De plus formuler ses idées permet qu'elles soient plus claires dans notre esprit.

E23 (questionnaire) : La mise en commun a été efficace car elle nous a permis de nous comprendre ainsi que de faire le point sur nos recherches.

E33 (questionnaire) : [Lors de la mise en commun] On a des avis extérieurs au travail de groupe ce qui permet de remettre en question notre travail.

Notons que cette dernière citation fait écho au récit de Villani, qui explique l'importance de la critique des pairs dans la genèse de son théorème (cf. chapitre 5, partie 5.1.1). Les mises en commun ont permis aux élèves, d'une part de faire le point sur leurs recherches et d'identifier les avancées dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, et d'autre part de relancer les recherches.

> E11 (questionnaire) : Ça permet de partir sur les pistes des autres groupes ainsi que de comparer la quantité de travail et méthodes choisies (moment déclencheur).
>
> E12 : C'est un des moments qui nous a fait le plus avancer, car nous nous sommes basés sur une conjecture du groupe 3 pour continuer notre travail (avant nous stagnions un peu).

Enfin, nous avons relevé que certains élèves étaient sensibles à une certaine esthétique des mathématiques :

> E21 (séance 5) : Ce qui me plait avec les pavés droits, c'est qu'il y a abc qui correspond à un volume et $ab + bc + ac$ qui correspond à trois aires, je trouve ça sympa.
>
> E22 : C'est joli.
>
> E22 (séance 5) : C'est l'énoncé du problème écrit de façon très mathématique, c'est plus joli. C'est l'énoncé écrit de façon jolie [il fait référence à l'écriture du problème avec des quantificateurs].

Le second élément caractérisant le milieu matériel des élèves est la disponibilité de connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques, permettant la manipulation des objets mathématiques en jeu et l'élaboration d'éléments théoriques rendant compte des propriétés de ces objets. L'analyse des recherches des élèves montre que les connaissances identifiées comme utiles (cf. p. 304) sont disponibles et mobilisées. Au cours de la recherche de méthodes pour étudier le problème dans un cadre général, les élèves ont mobilisé diverses connaissances algébriques : transformation de l'équation initiale par réduction au même dénominateur, calculs sur des quotients, notion de partie entière et étude de la possibilité de résoudre un système de deux équations avec quatre inconnues. L'extrait de conversation suivant au sein du groupe 2 illustre la mobilisation des connaissances des systèmes linéaires pour discuter de la pertinence d'une piste de recherche exposée par un élève :

> E21 (séance 1) : Est-ce que tu peux exprimer c et le réinjecter dans la même égalité ?
>
> E22 : Oui mais tu arriveras à une impasse [...] C'est comme si tu faisais une substitution avec une seule équation à deux inconnues ça va pas te donner grand-chose.

Cette discussion a permis aux élèves de ne pas se lancer dans la résolution d'un tel système, piste qui se révèle complexe et potentiellement infructueuse. Rappelons que dans la pré-expérimentation 5 (cf. chapitre 6, partie 6.3), nous avons pointé la difficulté des étudiants à prendre du recul sur leur travail, ce qui les a conduits à essayer de résoudre le système. Les élèves ont également mobilisé de nombreuses connaissances d'arithmétique : notion de divisibilité sous plusieurs écritures (en utilisant le signe |, en utilisant la division euclidienne et en utilisant les congruences), différents critères de divisibilité, les congruences et leurs propriétés, l'étude de tableaux de multiplications de congruences, étude d'un système de congruences, utilisation des théorèmes de Bézout et de Gauss, notion de nombres premiers, utilisation du théorème fondamental de l'arithmétique. Nous pouvons également ajouter l'application en acte du théorème des restes chinois. Les élèves disposent et mobilisent des connaissances heuristiques, telles que le rôle de l'exemple et du contre-exemple, pour vérifier ou infirmer un résultat théorique, le statut épistémique d'une conjecture, l'existence de résultats partiels, la nature d'une preuve et l'existence de divers raisonnements pour étudier une question mathématique. Nous avons également relevé des connaissances en logique (surtout dans le groupe 2) : l'utilisation des quantificateurs pour écrire un énoncé mathématique, la négation d'un énoncé mathématique, les notions d'implication et d'équivalence, de conditions nécessaires et suffisantes. La disponibilité et la mobilisation de toutes ces connaissances mathématiques a permis aux élèves, d'une part de circonscrire leur recherche en constituant une aide à la détermination d'une piste de recherche, et d'autre part d'approfondir une piste de recherche particulière : la piste de recherche reposant sur l'étude de l'équation $4abc = n(ab + bc + ac)$ et l'application du théorème de Gauss pour le groupe 2, l'élaboration de la méthode d'élimination de cas pour le groupe 1 et la construction d'une méthode de décomposition pour le groupe 3. La présence de ces connaissances dans le milieu matériel des élèves a ainsi contribué à faire évoluer le milieu objectif pour assurer le maintien de la dévolution de la recherche et l'avancée dans la recherche du problème par production de résultats partiels sur la conjecture.

Le troisième élément caractérisant le milieu matériel des élèves est une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes. Pour acquérir une telle pratique, nous avons identifié l'importance d'avoir une culture mathématique générale et une pratique régulière et fréquente d'activités de recherche mathématique. L'analyse des recherches des groupes, et en particulier de celle du groupe 2, met en évidence la culture mathématique de ces élèves. Au cours des différentes séances de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus, ils font régulièrement référence à des problèmes historiques et épistémologiques. Citons, par exemple, la référence à la conjecture des nombres premiers jumeaux et son étude algorithmique ou l'infinité des nombres premiers et sa preuve par l'absurde.

> E22 (séance 2) : L'infinité des nombres premiers jumeaux s'ils [les mathématiciens] pensent que c'est vrai par exemple, c'est parce qu'ils en ont trouvé des très grands, des milliards avec des algorithmes.

Dans le groupe 2, les élèves font plusieurs fois référence au problème de la quadrature du cercle qui a été résolue grâce (en partie) à une formulation du problème dans un autre cadre que celui de la géométrie. Cela est en lien avec la nature de leurs recherches, guidées par la quête de la vérité de la conjecture et la mise en œuvre d'une dimension organisatrice particulière, celle du changement de cadre. Dans les groupes 1 et 3, les élèves étudient la conjecture à partir de l'étude et la construction d'exemples. Ils discutent à plusieurs reprises de la nature des travaux des mathématiciens sur la conjecture d'Erdös-Straus et en particulier, d'un possible traitement algorithmique.

> E31 (séance 2) : À mon avis si c'est à 13 qu'il y a une impossibilité, je pense que déjà ils ont trouvé, je pense qu'il y a des mathématiciens qui ont déjà trouvé, genre des algorithmes qui testent comme ça.
>
> E32 : Non mais, peut être qu'ils n'arrivent pas à le démontrer, justement, en fait.
>
> E31 : Non mais qui testent comme ça, qui lancent des chiffres tout ça et genre, ils ne sont peut être pas allés loin mais je veux dire, à mon avis les cent premiers chiffres ils doivent marcher ou peut être 1000, tu vois ce que je veux dire.

Les notions d'épistémologie et d'histoire des mathématiques qu'ils ont étudiées dans leur enseignement de spécialité Mathématiques et dans le parcours « Excellence » leur permettent, d'une part d'envisager diverses pistes de recherche pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus, et d'autre part de circonscrire leurs recherches. Par exemple, les élèves du groupe 2 font l'hypothèse que s'éloigner du problème est une piste pertinente pour étudier la conjecture mais sont réticents à mener une recherche de décompositions effectives car ils pensent qu'il restera toujours un cas particulier à étudier. Au contraire, les élèves des groupes 1 et 3 s'engagent dans une étude par disjonction de cas, puis par étude de cas particuliers, en vue d'obtenir des généralisations sur le problème. Les élèves font également référence à des exercices de recherche étudiés dans un devoir à la maison de spécialité Mathématiques ou dans le parcours « Excellence ».

> *Les élèves discutent de la possibilité de résoudre une équation avec plusieurs inconnues, « à la main » ou avec un logiciel de calcul formel (épisode 7).*
>
> E21 : Dans un DM [Devoir à la Maison] il y en avait une [équation] où on avait fait $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ et c'était égal à quelque chose qu'on avait résolu.
>
> *Les élèves discutent d'une représentation géométrique du problème et l'élève E23 les met en garde contre « le piège de la représentation », en faisant référence à un exercice étudié dans le parcours « Excellence » (épisode 27).*
>
> E23 : C'est comme le truc avec l'échiquier tout en ligne, tu avais des pièces et le piège c'était d'essayer de se représenter.
>
> E21 : En classe d'« Excellence » une fois avec l'échiquier.
>
> *Les élèves cherchent à étudier l'équation initiale ou l'une de ses formes équivalentes. Un élève fait référence aux méthodes étudiées dans l'exercice ouvert 2 (cf. annexe B2) pour prouver une égalité (séance 2).*
>
> E31 : Alors pour prouver qu'ils sont égaux, enfin qu'il y a un coefficient, il n'y a pas cinquante solutions, enfin si, soit on fait ça moins ça et ça doit être égal à 0 ou un truc comme ça.

La pratique régulière et fréquente d'activités de recherche mathématique leur permet en particulier d'accepter de ne pas trouver de résultats, de réagir dans les phases infructueuses, d'explorer de nombreuses pistes sans s'en interdire et d'en choisir une avant de s'engager dans la recherche. Les élèves sont conscients qu'ils ne parviendront pas à résoudre la conjecture mais sont curieux et intéressés par le fait d'apporter une petite « pierre à l'édifice ».

> E21 : On a quasi aucune chance d'y arriver mais il ne faut pas qu'on se dise, vu que les autres n'y sont pas arrivés ça sert à rien qu'on essaye, justement il faut essayer de voir comment est-ce qu'on peut apporter une pierre au problème.
>
> E31 (séance 2) : Il y a plein de monde qui a cherché dessus mais on ne sait pas ce qu'ils ont fait, on peut toujours essayer un truc.
>
> E33 (questionnaire) : On sait dans un coin de notre tête qu'on ne va probablement pas trouver la solution mais on cherche à s'en approcher.

La culture mathématique et la pratique régulière et fréquente d'activités de recherche mathématique permettent aux élèves d'avoir une pratique distanciée de la résolution de problèmes. Au cours de leurs recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus, ils prennent régulièrement de la distance par rapport à leur travail. Avant de s'engager dans une piste de recherche, ils se demandent, d'une part s'ils peuvent l'exploiter avec les connaissances dont ils disposent, et d'autre part si elle sera productive pour l'avancée dans l'étude de la conjecture. Ces réflexions permettent aux élèves de circonscrire leur recherche en choisissant une piste qui correspond à leur visée et qui leur est *a priori* accessible.

Le quatrième élément constitutif du milieu matériel des élèves est la formulation de l'énoncé et l'indication du statut épistémique du problème. Rappelons que nous avons fait le choix d'indiquer aux élèves que le problème était toujours une conjecture. L'énoncé a été proposé sous forme affirmative, avec une incitation à la recherche de décompositions pour des valeurs de n données de par la formulation *pour tout entier naturel n [...] on peut trouver trois entiers naturels [...]*. La compréhension de cet énoncé n'a pas posé de difficultés aux élèves, ils se sont engagés facilement dans l'étude de la conjecture. Dans les groupes 2 et 3, les élèves ont plusieurs fois fait référence au statut épistémique de la conjecture au cours de leurs recherches et particulièrement, dans les phases de découragement. Les élèves ne l'oublient pas et sont conscients qu'ils ne parviendront pas à résoudre le problème.

> *Dans le groupe 2, à la séance 4.*
>
> E21 : De toute façon dans la logique, on ne pourra jamais trouver un résultat.
>
> E22 : Mais si on peut trouver un truc, un ensemble de résultats.
>
> *Dans le groupe 3, séance 2.*
>
> E32 : Il faut se dire aussi que ce problème n'est pas encore résolu, donc si on ne trouve pas c'est normal.
>
> E33 : Oui mais ça n'empêche pas d'aller loin, [...] on essaie d'avancer ?

Les réponses des élèves au questionnaire montrent que tous les élèves du groupe 2 ont gardé à l'esprit que le problème n'était pas résolu :

> E21 : Je l'ai toujours gardé à l'esprit.
>
> E22 : [Nous y avons pensé] lorsque nous recherchions des pistes pour aborder le problème.
>
> E23 : Évidemment, il était impossible d'oublier que ce problème n'est pas résolu, surtout dans les moments où on se trouve face à une difficulté quelconque. [...] Je pensais à cela dans les phases de vide, c'est-à-dire pendant la recherche de solutions à des problèmes insurmontables.
>
> E24 : Je pense que nous l'avons tous gardé en tête et cela nous a peut-être parfois un peu découragés mais nous avons fait comme s'il était résolu.

Dans le groupe 3, seul l'élève E32 précise l'avoir gardé à l'esprit. C'est d'ailleurs lui qui l'évoque plusieurs fois au cours des recherches de ce groupe. Dans le groupe 1, les élèves évoquent peu le statut épistémique de la conjecture (une seule fois) au cours de leurs recherches et dans les réponses au questionnaire, ils expliquent qu'ils ont oublié qu'il était non résolu :

> E11 : J'ai oublié que ce problème était non résolu. Car partir avec l'idée que le problème n'est pas résolu me semble un frein pour la recherche.
>
> E12 : Personnellement, lors des séances, je n'y ai pas pensé.
>
> E13 : Je l'ai complètement oublié. A vrai dire, je ne me souviens même pas que l'on me l'a dit (je devais peut-être être absent).

Les élèves qui ont gardé à l'esprit le statut épistémique du problème (problème ouvert non résolu) ont pu prendre du recul quant à leur démarche de recherche et leurs résultats.

> E23 (questionnaire) : Cela [nous] a fait relativiser l'importance de notre travail, en effet nous n'étions ni les premiers ni les plus doués.
>
> E31 (questionnaire) : Cette perspective permet aussi de nous rassurer lorsqu'on a des difficultés.

Ils acceptent ainsi de ne trouver que des résultats partiels et en reconnaissent la valeur. Par exemple, dans le groupe 2, lorsqu'ils s'éloignent du problème initial, ils font l'hypothèse que c'est une bonne idée car « ils sont en recherche », ils ne peuvent pas trouver de solutions directement. Les élèves du groupe 3 ajoutent que l'influence sur leurs recherches a été l'étude de nombreuses pistes.

> E31 (questionnaire) : Cela a influencé nos recherches dans le sens où il fallait étudier toutes les idées ou pistes possibles, même les plus complexes, impensables ou farfelues car s'il existait une réponse « conventionnelle » ou « classique », elle aurait déjà été sûrement découverte.
>
> E33 (questionnaire) : On a essayé de nouvelles pistes, de nouvelles façons d'aborder le sujet.

La valeur de cette variable didactique permet ainsi le développement d'une heuristique importante décrite par Pólya (1945) pour résoudre un problème : aborder le problème sous différents points de vue. Dans l'analyse *a priori* (cf. chapitre 6, partie 6.4.2), nous avons identifié deux réactions possibles des élèves à l'indication du statut épistémique du problème : certains peuvent être galvanisés par le défi représenté par la recherche d'un problème non résolu alors que d'autres peuvent être découragés ne pouvant rivaliser avec des mathématiciens. Les réponses de deux élèves confirment cette analyse en évoquant ce double effet :

> E12 (questionnaire) : Parfois en rentrant chez moi, j'ai trouvé que c'était d'autant plus tentant de continuer à chercher que le problème n'avait jamais été entièrement résolu. Cela a aussi parfois un côté réconfortant quand on ne trouve pas de se dire que le problème n'a jamais été résolu. C'est une sorte de défi qui permet de voir ce que nous sommes capables de trouver.
>
> E31 (questionnaire) : Il me semble que cette idée de problème non résolu est une donnée importante du problème. Elle est à la fois stimulante car elle permet de maintenir un faible espoir d'être le premier à prouver ou non la véracité du problème. Elle peut cependant dans une moindre mesure « décourager » les participants dans le sens où même des chercheurs, des professionnels n'en sont pas venus à bout.

A la lumière de ces analyses, nous faisons l'hypothèse qu'indiquer le statut épistémique du problème n'a pas constitué d'obstacle à la dévolution de la recherche et a enrichi le milieu objectif des élèves tout au long des recherches.

Le cinquième élément caractérisant le milieu matériel est la disponibilité d'outils technologiques. Les élèves avaient à leur disposition des calculatrices programmables de type TI-89 et des ordinateurs avec des logiciels de calcul formel, de géométrie et de programmation. Au cours de leurs recherches, les groupes ont utilisé les calculatrices essentiellement pour effectuer du calcul fractionnaire (ou des calculs avec des nombres décimaux), pour trouver ou pour vérifier une décomposition pour une valeur de n donnée. Certains élèves ont utilisé des fonctions de calcul formel pour déterminer si un nombre est premier (commande factor), pour développer ou factoriser une expression ou encore, pour essayer de résoudre une équation. Les trois groupes évoquent la possibilité de construire et implémenter un algorithme avec Algobox. Ils ne s'engagent pas dans cette piste de recherche parce qu'ils pensent qu'ils ne disposent pas des connaissances suffisantes pour écrire le programme. Le groupe 2 fait également l'hypothèse que le logiciel n'est pas efficace pour traiter le type d'algorithmes auxquels ils pensent. Les élèves de ce groupe ont utilisé le logiciel de calcul formel DERIVE pour tenter de résoudre l'équation initiale pour $n = 5$ (séance 2). Lors de l'exploration de pistes géométriques, les élèves des groupes 1 et 2 évoquent à plusieurs reprises l'idée de représenter le problème à l'aide de logiciels, mais précisent qu'ils n'ont pas les moyens (en termes de connaissances et de techniques) pour le faire. Les outils technologiques autres que les calculatrices n'ont donc pas été souvent utilisés par les élèves. Selon eux, les raisons sont un manque de connaissances et de maîtrise de certains logiciels pour utiliser ces outils.

Pour conclure, le milieu objectif pour les élèves s'est révélé être très proche du milieu matériel tel que nous l'avons décrit (cf. p. 304) et a produit les effets escomptés, c'est-à-dire favoriser la dévolution de la recherche sur un temps long et l'avancée des recherches avec production de résultats partiels. Les élèves se sont effectivement engagés facilement dans l'étude du problème et ont toujours mené une recherche active. Des premiers résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus (l'existence de décompositions pour certaines valeurs de n données) ont été établis rapidement, pendant la recherche individuelle et les premières recherches collectives (séance 1). Les élèves ont ensuite pu approfondir une piste de recherche en détail pour établir de nouveaux résultats : l'existence de décompositions pour certaines valeurs de n pour les groupes 1 et 3 et des relations de divisibilité dans le cas où n est impair pour le groupe 2. La première séance de mise en commun (séance 3) a été un moment déclencheur pour les élèves, où leur milieu s'est stabilisé et a permis le choix puis l'étude d'une piste de recherche particulière. Le temps long de la recherche a donc joué un rôle primordial dans les recherches des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Conclusion de la partie III

Dans cette partie, nous rendons compte des analyses didactiques que nous avons conduites pour apporter des éléments de réponses aux questions centrales de notre thèse, que nous rappelons ici : que veut dire concrètement mettre les élèves en position de chercheur ? Que peut-on transposer de l'activité de recherche d'un mathématicien ? Nos analyses ont été structurées à l'aide du cadre d'analyse des modèles de milieu de Bloch (2002) : élaboration du milieu expérimental *a priori*, confrontation à la contingence pour tester les prédictions théoriques puis pour revenir sur le modèle théorique.

Dans un premier temps, à partir de nos analyses mathématiques et épistémologiques, nous avons construit une situation de recherche pour la classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans le chapitre 6, nous avons déterminé plusieurs organisations didactiques pour une telle situation, que nous avons ensuite testées grâce à la mise en œuvre de cinq pré-expérimentations dans des classes. Cette mise à l'épreuve de la contingence nous a permis, d'une part d'affiner l'élaboration de la situation créée, et d'autre part de tester sa robustesse. Dans le chapitre 7, nous avons conduit l'analyse *a priori* de la situation expérimentale autour de la conjecture d'Erdös-Straus qui a été expérimentée dans un contexte de laboratoire, avec des élèves de terminale scientifique. Pour cela, nous avons :

– identifié différentes procédures envisageables ainsi que les résultats abordables à ce niveau ;
– étudié la pertinence de la grille d'analyse (construite au chapitre 5) pour décrire et analyser le travail de recherche des élèves engagés dans la recherche de la conjecture ;
– élaboré un milieu matériel initial, qui favorise la dévolution de la recherche sur un temps long et l'avancée des recherches dans l'étude du problème.

L'élaboration du milieu expérimental *a priori* (au sens de Bloch) de cette situation expérimentale s'est effectuée en interactions avec le milieu théorique mathématique et épistémologique présenté dans la partie II de notre thèse. Les études mathématiques et épistémologiques sont apparues comme un préalable nécessaire à la réflexion didactique mais, en retour, elles ont été enrichies par les analyses didactiques *a priori*. L'analyse des pré-expérimentations a notamment permis d'affiner la construction de la grille d'analyse des processus de recherche ainsi que son utilisation. Par exemple, en repérant les difficultés des élèves pour questionner les exemples, nous avons analysé en détail le rôle des exemples et des contre-exemples dans les recherches des deux chercheurs, Thépault et Mizony. L'interaction des trois pôles de notre recherche, mathématique, épistémologique et didactique, s'est ainsi révélée un outil pertinent pour construire une situation de recherche en classe autour de la conjecture d'Erdös-Straus, puis pour tester sa viabilité avant de la mettre en œuvre dans un contexte de laboratoire.

Dans un second temps, nous avons mis cette situation à l'épreuve de la contingence (au sens de Bloch). Dans le chapitre 8, nous avons présenté l'expérimentation que nous avons menée dans un contexte de laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Nous avons choisi les conditions de laboratoire afin d'étudier en détail les processus de recherche des élèves. Cela nous a permis de neutraliser certains paramètres dus à la classe, de mettre en place une organisation didactique sur un temps long, de jouer sur la valeur de certaines variables didactiques (notamment celle du statut épistémique du problème) et de construire un milieu proche de celui que nous avons décrit comme favorable. Dans le chapitre 9, nous avons étudié les travaux de recherche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus, à l'aide du premier outil de notre grille d'analyse, une analyse en termes de dimensions organisatrices et opératoires. Ce travail a permis, dans un premier temps, d'analyser en détail les processus de recherche effectifs des élèves des trois groupes, à partir de leurs itinéraires de recherche et de leurs productions finales, puis, dans un second temps, de comparer leurs recherches sur les trois critères suivants : la visée de la recherche privilégiée, la nature de la démarche de recherche mise en œuvre au sein d'une visée et le travail dialectique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques. Nous avons ainsi relevé que deux groupes (groupes 1 et 3) ont étudié la conjecture d'Erdös-Straus en s'inscrivant sous la visée de la recherche de décompositions effectives, avec la mise en œuvre de démarches de type expérimental. Ces dernières se sont différenciées sur la façon d'exploiter des exemples. L'autre groupe (groupe 2) a exploité une démarche de nature algébrique, dans la perspective de prouver la vérité de la conjecture. Dans leur recherche du problème, les trois groupes ont travaillé les aspects dialectiques entre la mobilisation de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. Nous avons également mis en évidence les diverses potentialités de la situation de recherche : la richesse des procédures mises en œuvre, un travail effectif de la dialectique entre les connaissances mathématiques et les heuristiques mobilisées, et selon les groupes, une mise en œuvre de démarches de type expérimental, l'approfondissement de connaissances mathématiques notionnelles et une acquisition d'heuristiques expertes de recherche de problème non résolu.

Dans un troisième temps, à partir de ces analyses, nous avons effectué un retour sur nos phases de conception théorique. Dans le chapitre 10, nous avons analysé les gestes de la recherche qui ont émergé dans les recherches des élèves, puis nous avons confronté le milieu objectif des élèves avec le milieu matériel que nous avions identifié. Les analyses concernant les gestes de la recherche ont mis en évidence que cet outil est pertinent pour étudier la question de la transposition du travail des chercheurs : les gestes de la recherche effectués par les élèves dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus sont similaires à ceux des mathématiciens, ils émergent au sein de démarches de même nature, en appui sur les connaissances mathématiques sous-jacentes, et permettent des avancées, notamment en termes de production de résultats partiels. La notion de « geste » de la recherche permet de prendre en compte les aspects dialectiques de l'activité de recherche entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. L'analyse du milieu objectif des élèves montre que les éléments, identifiés pour caractériser un milieu antagoniste de type expérimental favorisant la dévolution de la recherche sur un temps long et des avancées sur le problème, sont producteurs des effets escomptés. Le milieu que nous avons élaboré est favorable pour placer les élèves dans une réelle position de chercheur sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous avons particulièrement mis en évidence l'importance des connaissances mathématiques, de la pratique distanciée et régulière d'une activité de recherche de problèmes et du temps long de la recherche. Ces éléments ont permis aux élèves de vivre les différentes phases du processus de découverte mathématique (décrit par de nombreux mathématiciens), d'approcher divers aspects de l'activité de recherche experte (rôle du temps, différentes modalités d'échange, appropriation du travail des pairs), de s'engager dans l'étude approfondie d'une piste de recherche, d'avoir une réflexion d'ordre métamathématique et de produire plusieurs résultats partiels sur le problème. Ces analyses *a posteriori* de l'expérimentation de type laboratoire ont ainsi mis au jour des éléments précieux concernant l'activité de recherche des élèves sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus d'une part, et sur l'élaboration d'un milieu favorable à cette situation de recherche d'autre part. Ces indices permettront d'affiner une nouvelle fois les analyses *a priori* afin de réintroduire cette situation en classe. Ce travail est une des perspectives de notre thèse.

Conclusion générale et perspectives

A l'articulation de la théorie des nombres et de la didactique des mathématiques, notre recherche visait à étudier la question de la transposition du travail du mathématicien, via l'étude de processus de recherche de chercheurs, d'élèves et d'étudiants sur la recherche d'un même problème non résolu : la conjecture d'Erdös-Straus. Nous avons structuré notre recherche autour de trois pôles en interactions (mathématique, épistémologique et didactique) en nous référant aux modèles de milieu de Bloch (2002), que nous avons adapté à notre étude.

Les analyses mathématiques et épistémologiques se sont appuyées sur l'interaction de quatre études : notre propre recherche mathématique du problème, une analyse de l'état de l'art de la conjecture, une étude de témoignages de mathématiciens sur le processus et l'heuristique de découverte mathématique et un suivi des travaux de deux chercheurs engagés dans la résolution de la conjecture. Elles se sont attachées à identifier les différents aspects du travail du mathématicien et les éléments moteurs dans l'avancée de leurs recherches. Cela nous a conduite à développer la notion de « geste » de la recherche pour décrire, analyser et mettre en perspective les processus de recherche des chercheurs, des élèves et des étudiants sur la conjecture d'Erdös-Straus. Ces analyses ont mis en évidence les potentialités du problème pour créer une situation de recherche de problèmes en classe, plaçant les élèves dans une position proche de celle du mathématicien.

Les analyses didactiques se sont composées de trois phases. La première est la construction d'une situation didactique de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus via le test de plusieurs pré-expérimentations. La seconde a été consacrée à la mise à l'épreuve de cette situation didactique de recherche dans un contexte de laboratoire, avec des élèves de terminale scientifique. Nous avons analysé finement les processus de recherche des élèves à l'aide des outils méthodologiques développés dans les analyses mathématiques et épistémologiques. Dans la troisième phase, nous avons effectué un retour sur nos analyses *a priori*, en analysant les gestes de la recherche dans les travaux des élèves d'une part, et le milieu objectif des élèves d'autre part. Elles ont mis en évidence les potentialités de la situation de recherche créée autour de la conjecture d'Erdös-Straus : la richesse des procédures mises en œuvre, un travail effectif de la dialectique entre les connaissances mathématiques et les heuristiques mobilisées, et selon les groupes, une mise en œuvre de démarches de type expérimental, l'approfondissement de connaissances mathématiques notionnelles et une acquisition d'heuristiques expertes de recherche de problème non résolu. Pour le chercheur, elles montrent la pertinence de la notion de geste de la recherche pour étudier la question de la transposition du travail des chercheurs.

Nous rendons compte à présent des résultats auxquels nous sommes parvenue à l'issue de notre recherche, et nous terminerons en précisant les perspectives qui nous semblent aujourd'hui offertes par cette recherche.

Les résultats de notre recherche

Résultat 1 : la richesse d'une méthodologie fondée sur l'interaction de trois pôles : mathématique, épistémologique et didactique.

Pour conduire nos travaux, nous avons élaboré une méthodologie de recherche, en appui sur l'interaction de trois pôles (mathématique, épistémologique et didactique), qui se décline en trois éléments constitutifs, relatifs aux différents modèles de milieu de Bloch (2002) :

- Une étude d'épistémologie contemporaine qui consiste, outre un état de l'art des travaux de recherches contemporains sur la conjecture d'Erdös-Strauss et notre propre travail mathématique sur le problème, à suivre des travaux de recherche de chercheurs « in statu nascendi » sur la conjecture.

– La construction d'une situation didactique de recherche autour de la conjecture par des allers et retours entre le milieu théorique et le milieu expérimental *a priori*, en particulier grâce à la mise en œuvre de pré-expérimentations.
– Une expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique, pour mettre à l'épreuve de la contingence la situation didactique élaborée.

Ci-dessous, nous détaillons l'apport de ces trois études spécifiques qui ont structuré notre recherche.

Le travail mathématique et épistémologique sur la conjecture d'Erdös-Straus.

En effectuant l'état de l'art des travaux de recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons mis en évidence deux caractéristiques de ce problème : d'une part, il s'agit d'une conjecture qui résiste aux mathématiciens depuis 1950, et d'autre part, les outils mathématiques investis par les chercheurs, et qui sont performants pour avancer dans la résolution, sont *a priori* disponibles chez les élèves de fin de lycée. Notre propre travail mathématique sur l'étude de la conjecture s'est révélé important pour acquérir une bonne maîtrise des différents outils mathématiques mobilisés dans les recherches sur le problème. Il a également été nécessaire pour suivre les travaux des deux chercheurs engagés dans l'étude de la résolution de la conjecture. En effet, il nous fallait comprendre ce qu'ils faisaient dans leurs recherches pour ensuite pouvoir étudier leurs processus de recherche. L'étude du suivi des travaux de deux mathématiciens s'est révélée être un élément crucial dans notre démarche de recherche, dans la mesure où nous avons pu avoir accès à des recherches « en train de se faire ». Le cheminement des idées, les processus de recherche mis en œuvre, les éléments moteurs dans les avancées des recherches sont des éléments difficilement perceptibles dans les publications ou les communications des mathématiciens. Par le suivi des recherches en cours, nous avons pu avoir accès à certains de ces éléments. Nous avons noté une différence entre le suivi des recherches de Thépault, qui s'est effectué à distance et en recueillant des données postérieures à la recherche, transmises par le chercheur, et celui des recherches de Mizony, où nous avons recueilli nous-même la majorité des données « en direct ». Dans ce second suivi, nous avons pu davantage avoir accès aux processus de recherche mis en œuvre, au cheminement de ses recherches ainsi qu'aux indicateurs des avancées de ses travaux.

Ces analyses mathématiques et épistémologiques ont pu être menées grâce au double encadrement dont nous avons bénéficié pendant notre thèse, en théorie des nombres et en didactique des mathématiques. Elles ont été un préalable nécessaire à nos analyses didactiques pour étudier la question de la transposition du travail du chercheur en résolution de problèmes, en apportant des éléments de réponses aux questions suivantes : que peut-on apprendre du travail de recherche d'un mathématicien ? Peut-on identifier des éléments potentiellement invariants dans son activité de recherche ?

Pour répondre à la première question, nous avons identifié différents aspects du travail du chercheur comme éléments essentiels à prendre en compte pour construire une situation didactique de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus, plaçant les élèves dans une position proche de celle du mathématicien. Nous avons mis en évidence : la nature du processus de découverte mathématique (rôle de l'intuition dans les phases créatives, de la rigueur dans les phases de rédaction, différences des raisonnements plausible et démonstratif), le rôle de la communauté mathématique et des différentes modalités d'échange entre pairs et le rôle du temps dans la recherche. En réponse à la seconde question, nous avons identifié, dans l'heuristique de la découverte mathématique, plusieurs éléments potentiellement invariants dans les recherches des mathématiciens : faire des liens pour résoudre un problème (liens entre des problèmes et entre des domaines mathématiques, associations d'idées, de notions), articuler les connaissances antérieures avec l'expérience de résolution de problèmes (dialectique connaissances/heuristiques) et repérer les ressorts de la dimension expérimentale pour s'engager et avancer dans l'étude du problème. A partir de ces éléments de réponses, nous avons développé un outil d'analyse des processus de recherche mis en œuvre dans une résolution de problèmes prenant en compte ces différents éléments potentiellement invariants. Il s'agit de la notion de « geste » de la recherche (cf. résultat 2 ci-dessous).

Les pré-expérimentations et l'expérimentation en laboratoire.

Pour étudier en détail les processus de recherche d'élèves et étudiants sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avions, dès le début de notre projet, prévu d'effectuer une expérimentation dans un contexte de laboratoire. Ce dispositif particulier permet de neutraliser certains paramètres de la situation et de se focaliser sur des variables de situation spécifiques. Ce contexte d'expérimentation étant relativement coûteux à mettre en place, il nous est apparu nécessaire de tester au préalable la viabilité de la situation de recherche que nous voulions mettre en œuvre dans ces conditions. Pour cela, nous avons construit différentes organisations didactiques, que nous avons ensuite testées grâce à la réalisation de cinq pré-expérimentations. Ces mises à l'épreuve de la situation élaborée ont contribué à l'amélioration de nos analyses *a priori*, mais également à celle de nos analyses épistémologiques. L'analyse des travaux de recherche des élèves des pré-expérimentations a confirmé la viabilité de la situation dans différents contextes scolaires, et en particulier avec des élèves de terminale scientifique. L'étude de la pertinence de la grille d'analyse, et en particulier de la notion de « geste » de la recherche pour analyser les processus de recherche des élèves, a permis d'affiner l'élaboration du milieu théorique mathématique et épistémologique. Le protocole expérimental de la situation en contexte de laboratoire s'est élaboré par des allers et retours entre les tests des pré-expérimentations, l'analyse *a priori* de la situation et les élaborations théoriques (mathématiques et épistémologiques) sur la conjecture.

La confrontation à la contingence dans un contexte de laboratoire a eu lieu dans des conditions très favorables :

- le temps didactique n'a pas été contraint, nous avons pu choisir le nombre de séances de recherche et effectuer des régulations au cours de l'expérimentation en ajoutant, par exemple, une séance de recherche ;
- l'enseignant était disponible, expérimenté, formé en didactique des mathématiques et en particulier sur les questions de la résolution de problèmes en classe, il a pris en charge la gestion des premières séances puis co-animé avec nous les séances suivantes ;
- les élèves étaient peu nombreux, très motivés et intéressés par l'activité de recherche mathématique ;
- les séances se sont déroulées dans un cadre scolaire mais au sein d'un cours non institutionnel ;
- le milieu matériel effectif des élèves était très proche du milieu matériel théorique élaboré à partir de nos analyses *a priori*.

Pour notre recherche, réaliser une expérimentation dans ces conditions de laboratoire s'est révélé très favorable, d'une part pour tester la pertinence de notre grille d'analyse, en termes de dimensions organisatrice et opératoire puis à l'aide de la notion de « geste », pour analyser finement les processus de recherche des élèves (cf. résultat 2) ; et d'autre part, pour mettre en évidence les potentialités de la situation élaborée autour de la conjecture d'Erdös-Straus pour placer les élèves dans une réelle position de chercheur sur ce problème (cf. résultat 3). En outre, cette méthodologie de recherche est pertinente pour recueillir des éléments essentiels pour passer d'un contexte de recherche à un contexte de classe. Par exemple, nous avons identifié les éléments du milieu matériel des élèves favorisant, d'une part la dévolution de la recherche et son maintien au cours d'un temps long de recherche, et d'autre part l'avancée des recherches des élèves. Nous avons également mis en évidence différentes institutionnalisations possibles à faire à la suite de la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus : des connaissances mathématiques notionnelles, des heuristiques de la recherche et des débats de nature méta-mathématique. Une des perspectives dans la suite de notre travail de thèse est d'identifier et étudier plus en détail les apports de cette expérimentation en contexte de laboratoire, afin d'effectuer de nouvelles expérimentations dans un contexte de classe (cf. perspective 4).

Résultat 2 : la pertinence de notre grille d'analyse pour décrire et analyser les processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

Dans les analyses mathématiques et épistémologiques de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons identifié des éléments potentiellement invariants dans l'activité de recherche des mathématiciens : l'action du sujet, le rôle de l'intuition dans la phase de création, l'importance de la dialectique entre la mobilisation des connaissances et le développement d'heuristiques et les ressorts de la dimension expérimentale. Afin de prendre en compte ces éléments pour décrire, analyser et mettre en perspective les processus de recherche de différents publics en situation de recherche de problèmes, nous avons développé la notion de « geste » de la recherche, dont nous rappelons ci-dessous la définition.

> Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans la possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Chapitre 5, p. 155)

En ce qui concerne l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons identifié sept gestes contribuant significativement à l'avancée des recherches : désigner des objets, réduire le problème aux nombres premiers, introduire un paramètre, construire des exemples et les questionner, effectuer des contrôles locaux, transformer l'équation initiale, implémenter un algorithme. Certains gestes sont porteurs de l'aspect expérimental du problème et favorisent la mise en œuvre d'une démarche expérimentale pour étudier le problème (désigner des objets, réduire le problème aux nombres premiers, construire des exemples et les questionner, implémenter un algorithme), d'autres émergent davantage au sein de procédures algébriques (transformation de l'équation initiale, introduire un paramètre).

Dans un premier temps, nous avons testé cette notion de « geste » de la recherche pour décrire et analyser les recherches des deux chercheurs dont nous avons suivi les travaux sur la conjecture d'Erdös-Straus. Cet outil s'est révélé pertinent dans la mesure où il permet d'affiner les premières analyses des processus de recherche, effectuées en termes de dimensions organisatrices et opératoires. Il met en évidence le rôle des objets mathématiques en jeu, le recours aux connaissances mathématiques disponibles et mobilisables, les heuristiques développées et les origines et la nature des avancées de la recherche. Il contribue ainsi à l'analyse de la complexité des raisonnements mis en œuvre dans une recherche de problèmes.

Dans un second temps, nous avons testé cet outil pour analyser le travail de recherche des élèves et des étudiants, et en particulier pour comparer les processus de recherche mis en œuvre dans leurs recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus. Cette analyse *a priori* de la notion de « geste » a mis en évidence sa pertinence pour analyser les recherches effectives des élèves sur la conjecture. Comme pour l'étude des travaux des chercheurs, cet outil permet d'affiner les analyses, en termes de dimensions organisatrices et opératoires, des processus de recherche des élèves, en mettant en évidence trois éléments essentiels : l'origine des avancées de la recherche, les ressorts de la dimension expérimentale et l'apport d'un travail dialectique entre mobilisation de connaissances et développement d'heuristiques. Pour le didacticien, cette analyse montre que la notion de « geste » est un outil pertinent à intégrer dans les analyses *a priori* d'une situation didactique de recherche, dans la mesure où la prise en compte d'un système de gestes contribue à l'analyse de la complexité des processus de recherche mis en œuvre au cours de la recherche d'un problème ainsi qu'à celle du travail mathématique effectif produit.

Dans un troisième temps, nous avons exploité la notion de « geste » de la recherche dans l'analyse des travaux de recherche des élèves dans le cadre de l'expérimentation en laboratoire, en particulier pour les mettre en perspective avec ceux des chercheurs. Nous avons ainsi mis évidence la pertinence de cet outil pour étudier la question de la transposition du travail des mathématiciens. Les gestes identifiés dans les recherches des mathématiciens sont également relevés dans les recherches des élèves, quand ces derniers disposent des connaissances mathématiques favorisant leur émergence. Leurs origines et conséquences sont similaires : ils apparaissent au sein du même type de démarches, en appui sur les connaissances mathématiques sous-jacentes et leur réalisation, au sein d'un système de gestes, ils provoquent des avancées dans la recherche, notamment l'élaboration de résultats partiels. Ils permettent d'approfondir les connaissances mathématiques mobilisées et de développer des heuristiques de recherche. La notion de « geste » de la recherche prend ainsi en compte l'aspect dialectique de l'activité de recherche experte, entre mobilisation, acquisition de connaissances mathématiques et développement d'heuristiques.

Pour conclure, la notion de « geste » de la recherche que nous avons développée se révèle pertinente, d'une part pour analyser la complexité des processus de recherche mis en œuvre dans une recherche de problème et le travail mathématique effectif produit, et d'autre part pour étudier la question de la transposition du travail du chercheur en situation de recherche. Une des perspectives à poursuivre après notre travail de thèse est de développer plus en détail cet outil, notamment son intégration dans les analyses *a priori* d'une situation didactique de recherche (cf. perspective 2).

Résultat 3 : la consistance de la situation didactique de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus pour placer les élèves en réelle situation de résolution de problèmes de recherche.

La construction de la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus s'est appuyée sur les hypothèses suivantes :

> La résolution de problèmes de recherche permet de travailler les relations dialectiques entre les connaissances mathématiques et les connaissances heuristiques de l'activité mathématique.
>
> La dimension expérimentale des mathématiques fournit un terrain propice pour travailler les aspects dialectiques de l'activité mathématique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques.
>
> La dimension expérimentale de l'activité de résolution de problèmes de recherche peut être facilitée si les objets mathématiques en jeu sont suffisamment familiers des élèves pour fonctionner comme des objets concrets.

Nous avions alors choisi le domaine de la théorie des nombres dans la mesure où les objets mathématiques en jeu (notamment les notions de nombre entier et de fraction) sont naturalisés assez tôt dans la scolarité. Notre recherche montre que ce choix est pertinent, la théorie des nombres offre un terrain propice à la manipulation des objets mathématiques en jeu dans un problème et favorise la mise en œuvre de démarches de type expérimental. En effet, la majorité des élèves que nous avons observés étudient la conjecture d'Erdös-Straus grâce à l'exploitation de procédures exploratoires, à partir du geste de construction et questionnements des exemples. Les objets mathématiques en jeu (fractions, nombres entiers) sont naturalisés et permettent aux élèves de les questionner pour formuler des conjectures, dégager des régularités et établir des résultats partiels. Notons que certains élèves n'ont pas eu recours à une démarche de type expérimental ; ceux-ci ont préféré étudier la conjecture dans un cadre plus général, en utilisant des outils algébriques. Nos analyses montrent que ce choix s'effectue pour des raisons liées à leur conception des mathématiques, et notamment celle de la preuve en mathématique. Ils n'identifient pas les apports d'une recherche de nature expérimentale dans la résolution du problème, tant dans les phases de découverte que dans celles de vérification.

Afin de placer les élèves dans une position proche de celle des mathématiciens pour étudier la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons construit un milieu spécifique, composé des cinq éléments suivants : des connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques riches, une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes, une organisation didactique sur un temps long (comportant plusieurs séances de recherche), un énoncé du problème incitant à l'action et la disponibilité de calculatrices programmables et d'ordinateurs. Le milieu objectif des élèves de l'expérimentation de type laboratoire étant proche du milieu théorique construit, nous avons pu mettre en évidence les paramètres producteurs des effets escomptés. Trois aspects se sont révélés essentiels pour faire vivre une authentique situation de recherche aux élèves sur la conjecture : la mobilisation de connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques, l'habitude de pratiquer diverses activités de recherche mathématique et le temps long de la recherche. Ces éléments ont permis aux élèves de vivre les différentes phases du processus de découverte mathématique (décrit par de nombreux mathématiciens), d'approcher divers aspects de l'activité de recherche experte (rôle du temps, différentes modalités d'échange, appropriation du travail des pairs), de s'engager dans l'étude approfondie d'une piste de recherche, d'avoir pour certains d'entre eux des réflexions d'ordre métamathématique et de produire plusieurs résultats partiels sur le problème. Nous avons également relevé la richesse des procédures mises en œuvre, un travail effectif de la dialectique entre les connaissances mathématiques et les heuristiques mobilisées, et selon les groupes, la mise en œuvre de démarches de type expérimental, l'approfondissement de connaissances mathématiques notionnelles et l'acquisition d'heuristiques expertes de recherche de problèmes non résolu.

Notre recherche montre ainsi que la situation didactique de recherche que nous avons élaborée autour de la conjecture d'Erdös-Straus est pertinente pour faire travailler l'activité de recherche mathématique en contexte scolaire. En référence au modèle des situations de recherche pour la classe (SiRC) de Grenier et Payan (2003), notre situation permet de travailler les trois aspects fondamentaux de l'activité de recherche qu'il met en évidence : l'enjeu de vérité, l'aspect social de l'activité et l'aspect recherche. Elle remplit les objectifs des situations de recherche pour la classe, à savoir la résolution, au moins partielle, d'une question dont on ne connaît pas la réponse, l'apprentissage de « savoirs transversaux » et la mise en œuvre d'une démarche expérimentale. En outre, elle met en évidence d'autres éléments pertinents à prendre en compte pour créer une situation de recherche en classe : d'une part, le rôle des objets mathématiques dans la résolution de problème, et en particulier, dans la mise en œuvre d'une démarche expérimentale, et d'autre part l'apport du travail dialectique entre connaissances mathématiques et développement d'heuristiques dans la recherche d'un problème, notamment dans sa participation à la construction des savoirs mathématiques. Notons également qu'elle montre que la théorie des nombres, comme les mathématiques discrètes, est un domaine mathématique riche pour construire des situations de recherche pour la classe. Enfin, l'élaboration d'un milieu prenant en compte un temps long de recherche, une pratique distanciée et variée des mathématiques et la disponibilité d'un bagage notionnel riche favorise une position de l'élève proche de celle du mathématicien en situation de recherche de problèmes.

Les perspectives de notre recherche

Au cours de notre recherche, nous avons articulé plusieurs approches de l'activité mathématique, relevant de champs disciplinaires distincts : les mathématiques elles-mêmes, l'épistémologie, la didactique des mathématiques et la philosophie des mathématiques. Cette méthodologie de recherche, comme nous l'avons montré ci-dessus, s'est révélée pertinente pour notre projet, à savoir étudier la question de la transposition du travail du mathématicien. Parmi les différentes investigations conduites, la précision de certaines d'entre elles se trouve réduite par le temps qu'il est envisageable d'accorder dans le cadre d'un travail de doctorat. Dans les perspectives de cette recherche, nous envisageons ainsi la poursuite de plusieurs de ces études, de nature épistémologique, philosophique et didactique.

Perspective 1 : Poursuivre l'étude de l'activité du mathématicien.

Concernant l'analyse épistémologique du travail du chercheur en mathématiques, nous nous sommes appuyée sur des témoignages de mathématiciens décrivant le processus de recherche mathématique et l'heuristique de la découverte mathématique, à partir de leurs expériences personnelles. Pour poursuivre cette analyse de l'activité de recherche du mathématicien, il serait intéressant de mettre nos travaux en perspectives avec ceux conduits par d'autres auteurs, notamment au niveau international, tels que ceux de Bouleau (1997), Burton (2004), Madsen et Winsl øw (2009).

Bouleau (1997) a réuni, dans un ouvrage, différents dialogues de mathématiciens autour de la création mathématique. Par rapport au livre de Nimier (1989), les témoignages s'appuient tous sur un même domaine mathématique, la théorie du potentiel. Ils sont plus techniques mathématiquement mais mettent en avant les mêmes aspects de la création mathématique. Madsen et Winsl øw (2009) se sont intéressés aux relations entre les pratiques de recherche et d'enseignement telles qu'elles sont édictées par des professeurs d'université au sein d'une université axée sur la recherche. Leurs travaux se situent en didactique des mathématiques et utilisent le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999). Burton s'est intéressée, quant à elle, à une problématique proche de la notre : étudier les pratiques mathématiques expertes au service de l'apprentissage des mathématiques scolaires. En 2004, elle a publié un livre intitulé *Mathematics as Enquirers : Learning about Learning Mathematics* qui présente les résultats d'une recherche dont l'objectif était le suivant :

> The focus of this book is on what, from mathematicians as learners, we can learn about learning mathematics. (Burton, 2004, p. 6-7)

Elle a interviewé 70 mathématiciens (britanniques et irlandais) pour analyser leur expérience par rapport à différents aspects de l'activité mathématique :

1. Les relations externes de cette activité avec d'autres formes d'interaction humaine et culturelle (*Personal- and Cultural-Social Relatedness*).
2. Les relations internes, les connexions à l'intérieur des mathématiques (*Connectivities*).
3. L'esthétique (*Aesthetics*).
4. Le rôle de l'intuition, surtout dans les phases créatrices du travail du mathématicien (*Intuition/Insight*).
5. Les différents styles de pensées mathématiques (*Thinking Styles*).

Ces catégories, que nous retrouvons dans notre recherche, servent de cadre théorique pour organiser les entretiens et leurs présentations mais également, pour étudier des implications pédagogiques. Les entretiens menés mettent en évidence la perception des mathématiciens de leur apprentissage des mathématiques :

> Knowing is understood as socio-culturally based as being aesthetics and intuitive, heterogeneous and holistically inter-connected. Knowing and feelings play on, and support each other. (Burton, 2004, p. 198)

Selon l'auteure, cette conception de la connaissance mathématique et de sa construction est éloignée des mathématiques enseignées et de l'expérience qu'ont la majorité des élèves des mathématiques scolaires :

> The gap between mathematicians' views of mathematical knowing and that encountered by learners is monstrous. (Burton, 2004, p. 198)

Elle pointe le fait que ce que dissent les mathématiciens sur leur propre apprentissage en tant que chercheurs est très différent de ce que les enseignants offrent comme expérience à leurs élèves ou leurs étudiants :

> If the mathematicians' learning through their research is well described by my model, mathematics comes to be know in ways more closely related to an heterogeneous, inclusive, accessible and holistic epistemology. (Burton, 2004, p. 14)

Le point de vue de l'auteure est que cette différence explique une bonne partie des échecs et des difficultés associés aux mathématiques à l'école, ainsi que le détournement des élèves et des étudiants pour les études mathématiques. Elle fait l'hypothèse qu'il est possible — et urgent — de dispenser un enseignement des mathématiques prenant en compte les différents aspects du travail du chercheur, mis en avant par les mathématiciens eux-mêmes :

> I believe we have a responsibility to make the learning of mathematics more akin to how mathematicians learn. (Burton, 2001, p. 598)

Elle met alors en avant les apports de l'activité de recherche mathématique pour travailler ces aspects et apprendre des mathématiques :

> Learning mathematics could be a (re)search activity. [...] As a research activity, the creativity, challenge, motivation and delight of which the mathematicians spoke could be available to those engaged in exploring the discipline as learners. (Burton, 2001, p. 598)

La problématique, les questions soulevées et les analyses de Burton étant en étroite relation avec nos travaux, une étude détaillée de ses recherches nous permettrait d'affiner notre propre cadre théorique épistémologique et par suite, nos analyses didactiques.

Perspective 2 : Développer la notion de « geste » de la recherche tant sur le plan philosophique que didactique.

Pour développer la notion de « geste » de la recherche, nous nous sommes appuyée sur la notion de « geste » en philosophie des mathématiques. Ne disposant pas de formation spécifique dans ce domaine, nous avons étudié succinctement cette notion à la lumière de quelques textes de Cavaillès (1938, 1994), Cassou-Nogues (2001b), Châtelet (1993), Bailly et Longo (2003). Une perspective serait d'étudier plus en détail ces textes afin d'approfondir la notion de « geste » en philosophie des mathématiques et l'usage qui en est fait. Ces analyses philosophiques et épistémologiques nous permettraient d'affiner la notion de « geste » de la recherche pour nos analyses didactiques, et en particulier pour analyser plus en détail la question de la transposition du travail du mathématicien.

Nous envisageons également de mener une étude plus fine des processus de recherche mis en œuvre par un sujet en situation de résolution de problèmes de recherche en articulant davantage les deux outils de notre grille d'analyse, l'analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire et l'analyse des gestes de la recherche. Enfin, pour intégrer la notion de « geste » de la recherche dans nos analyses *a priori*, il nous semble pertinent d'essayer de déterminer des critères caractérisant des situations de recherche propices à l'émergence et la réalisation des gestes de la recherche.

Perspective 3 : Étudier spécifiquement l'étape de l'élaboration d'une preuve dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus.

Notre recherche s'est focalisée sur les processus de recherche mis en œuvre dans la résolution de problème de recherche. L'étape de l'élaboration de la preuve a été succinctement étudiée et mérite, selon nous, une analyse spécifique. Le corpus que nous avons construit est potentiellement riche pour conduire une analyse fine du processus de preuve en situation de recherche de problèmes, en suivant la même méthodologie de recherche (étude des pratiques mathématiques expertes, analyse des processus de preuves dans les travaux des deux chercheurs Thépault et Mizony, analyse des processus de preuves dans les travaux des élèves et des étudiants).

Nous avons débuté une étude de la pratique des mathématiciens concernant le processus de preuve à la lumière des travaux de Lakatos (1984) et Balacheff (1987), mais elle mérite d'être affinée et d'être mise en perspective avec d'autres travaux tels que ceux de Weber (2008). Ce dernier s'est effectivement intéressé aux pratiques mathématiques concernant la validation d'une preuve, c'est-à-dire à l'acte de déterminer si un argument constitue une preuve valable. Il a proposé à des mathématiciens de lire une preuve mathématique et de discuter de sa validité. Il les a ensuite interviewés sur leurs processus de validation et leur conception de la preuve en mathématiques. Les résultats de ses recherches montrent que les mathématiciens ont recours à plusieurs modes de raisonnements différents pour valider une preuve : le raisonnement formel et la construction de preuves rigoureuses, le raisonnement déductif informel et le raisonnement à partir d'exemples. Les données recueillies par l'auteur mettent en évidence le fait que les connaissances conceptuelles jouent un rôle important dans la validation des preuves mais également, que les processus impliqués sont dépendants de facteurs contextuels tels que le domaine mathématique dans lequel se situe la preuve, la communauté qui évalue la preuve et l'auteur de la preuve. Weber discute également des implications pédagogiques de cette étude épistémologique. Il pointe la pertinence d'étudier les pratiques mathématiques pour l'enseignement des mathématiques mais également, les liens difficiles entretenues par ces deux domaines :

> Investigations into the practices of professional mathematicians should have a strong influence on what is taught in mathematics classrooms ; the link between the behaviors of mathematicians and the teaching of mathematics, however, is not straightforward. (Weber, 2008, p. 451)

Il met, par exemple, en évidence le fait que la notion de preuve est souvent introduite, dans le contexte scolaire, sans référence suffisante au contenu mathématique. Or, chez les mathématiciens, la plupart des stratégies de validation sont fondées sur leur compréhension des concepts du domaine étudié. Pour l'apprentissage du processus de preuve, il fait alors l'hypothèse suivante :

> Although there may be basic validation strategies that can be taught in introductory proof courses, such as identifying if an argument is using a valid proof framework, some validation strategies are content-dependant and, it would seem,

must be learned in the context of studying particular mathematical domains. (Weber, 2008, p. 452)

En appui sur ces travaux, nous envisageons ensuite de mener une analyse des processus de preuves mis en œuvre dans les recherches de Thépault et Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus, puis de ceux des élèves. En analysant les processus de recherche des élèves, nous avons déjà relevé des premiers éléments d'analyse concernant l'étape de l'élaboration d'une preuve. Nous avons identifié différentes conceptions de la preuve en mathématique chez les élèves : preuve par exemple générique, preuve par calcul sur les énoncés, preuve d'existence avec ou sans construction. Les élèves font appel aux deux types de validations décrites par Balacheff (1987), pragmatique et théorique, en fonction des connaissances mathématiques dont ils disposent, de la démarche de recherche mise en œuvre et de leur conception des mathématiques. Dans l'ensemble des travaux des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons relevé une difficulté, pour les élèves, à s'engager et à réaliser l'étape de preuve de leurs résultats. Cela fait écho aux travaux de Grenier et Tanguay (2008), qui ont observé ce même phénomène dans les recherches d'étudiants avancés confrontés à un problème en géométrie dans l'espace . Nous soulevons deux explications : au sein d'une démarche de type expérimentale, les élèves éprouvent des difficultés à articuler les aspects syntaxiques et sémantiques de leurs recherches qui favorisent le passage de la manipulation des objets mathématiques en jeu à l'élaboration des preuves des éléments théoriques formulés ; au sein d'une démarche de type algébrique, ils ne disposent pas toujours des outils mathématiques (connaissances et raisonnements) nécessaires pour établir la preuve. A partir de ces premiers éléments d'analyses, nous envisageons d'étudier spécifiquement les processus de preuves dans l'activité de recherche mathématique des élèves, à la lumière de travaux en didactique des mathématiques, tels que Balacheff (1987), Durand-Guerrier (2008), Grenier et Tanguay (2008), Tanguay et Grenier (Tanguay & Grenier, 2010) et l'ouvrage publié à la suite de l'étude ICMI 19, *Proof and Proving in Mathematics Education* (Hanna & de Villiers, 2012).

Perspective 4 : Passer d'une ingénierie de recherche à une ingénierie pour la classe.

Dans notre thèse, nous avons fait le choix de construire et réaliser une ingénierie de recherche pour conduire nos analyses didactiques sur l'étude des processus de recherche d'élèves en situation de résolution de problèmes de recherche. Un des enjeux est ensuite de passer d'une ingénierie de recherche à une ingénierie pour la classe. Pour étudier en détail cette question des méthodologies d'ingénierie didactique, nous nous référerons à la XV^{e} école d'été de didactique des mathématiques, dont le thème portait sur les enjeux des ingénieries didactiques (cf. par exemple (Perrin-Glorian, 2011 ; Bessot, 2011)). Une expérimentation de type laboratoire permet de recueillir des éléments précieux sur la situation de recherche construite pour l'introduire ensuite dans un contexte scolaire. Nous avons déjà relevé des éléments concernant l'élaboration du milieu matériel des élèves ou la phase d'institutionnalisation. Une analyse plus détaillée permettrait de mettre au jour d'autres éléments essentiels pour améliorer les analyses *a priori* de la situation construite et sa mise en œuvre dans une classe. Au vu du milieu objectif des élèves de l'expérimentation en laboratoire, nous faisons l'hypothèse que le développement de ce type d'activité en classe est lié à la nature de l'enseignement des mathématiques dispensé aux élèves. Il semble ainsi important, pour la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus, que cet enseignement incorpore des notions d'épistémologie et d'histoire des mathématiques ainsi qu'une pratique diversifié d'activités mathématique et en particulier, des activités de recherche mathématique.

Cette perspective de notre recherche nous semble importante si l'on veut diffuser ce type d'activité mathématique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Notre objectif est alors de construire une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus qui pourrait être mise en œuvre par un enseignant, dans sa classe, sans avoir recours à notre intervention en tant que chercheur. Nous avons déjà franchi une première étape de ce travail puisqu'au printemps 2013, un enseignant a testé notre situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus, avec des élèves de terminale scientifique, dans des conditions proches de celles en laboratoire (cinq élèves ont cherché le problème pendant six séances de deux heures). La prochaine étape consiste à passer des conditions de laboratoire à des conditions ordinaires, c'est-à-dire en classe et insérer dans la progression de l'enseignement.

Perspective 5 : Étudier spécifiquement les potentialités de la situation pour travailler l'algorithmique.

Compte-tenu de la nature algorithmique des travaux de Mizony sur la conjecture d'Erdös-Straus et de l'introduction de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques du secondaire à partir 2009, notre projet de recherche prévoyait initialement une étude des potentialités de ce domaine quant à la recherche mathématique et à la résolution de problèmes de recherche en classe. Nos travaux ayant débuté en 2009, les premières expérimentations que nous avons menées dans un contexte scolaire se sont déroulées avec des élèves n'ayant pas encore suivi un enseignement en algorithmique. Dans leurs recherches sur la conjecture d'Erdös-Straus, ils n'ont pas utilisé de procédures algorithmiques. Nous n'avions donc pas d'éléments expérimentaux pour analyser les potentialités de la situation didactique autour de la conjecture d'Erdös-Straus pour travailler les questions algorithmiques. L'expérimentation en laboratoire s'est déroulée, quant à elle, avec des élèves ayant suivi ce nouvel enseignement dès la classe de seconde. Nous avons relevé, dans leurs recherches, plusieurs allusions à l'aspect algorithmique du problème, et dans certains groupes, l'élaboration de méthodes de type algorithmique, sans que celles-ci ne soient programmées. Les élèves ont évoqué un manque de connaissances en algorithmique et en programmation pour expliquer le fait qu'ils n'aient pas cherché à implémenter leur méthode algorithmique. Ces quelques éléments d'analyse montrent que l'aspect algorithmique de la conjecture d'Erdös-Straus peut être exploité dans les recherches des élèves.

En appui sur les travaux de Modeste (2012) en didactique des mathématiques, il serait intéressant d'étudier les potentialités de ce problème pour travailler l'algorithmique en situation de résolution de problèmes de recherche. A partir d'une analyse épistémologique du concept d'algorithme et d'une étude de sa transposition, Modeste a proposé une caractérisation des problèmes fondamentaux pour l'algorithme et identifié des types de situations pour l'algorithmique. Il précise, par exemple, que les situations de recherche pour la classe (Grenier & Payan, 2003) se prêtent bien pour travailler les questions algorithmiques, en particulier grâce à leurs critères de multiplicité des stratégies possibles et d'accessibilité du problème. De ce point de vue, la situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus vérifiant les caractéristiques d'une situation de recherche pour la classe, elle est potentiellement un bon candidat pour l'algorithmique. De plus, Modeste fait l'hypothèse qu'« une situation pour l'algorithme doit être proposée dans un cadre bien connu de l'élève afin de favoriser l'émergence de questions concernant l'algorithme, sans que des notions trop avancées ne fassent obstacle à celles visées » (Modeste, 2012, p. 216). Cela fait écho à notre hypothèse de recherche, selon laquelle la dimension expérimentale de l'activité de résolution de problèmes de recherche peut être facilitée si les objets mathématiques en jeu sont suffisamment familiers des élèves pour fonctionner comme des objets concrets. Une analyse de la situation de recherche autour de la conjecture d'Erdöis-Straus à la lumière des résultats de Modeste (2012) permettrait de répondre aux questions suivantes : la conjecture d'Erdös-Straus est-elle un problème à fort potentiel algorithmique ? La situation de recherche élaborée autour de la conjecture est-elle une situation pour l'algorithmique ? Les connaissances mathématiques en algorithmique et programmation dispensées dans l'enseignement secondaires peuvent-elles permettre d'étudier la conjecture algorithmiquement ? Quel lien entretiennent algorithme et preuve dans les recherches sur la conjecture ?

Références

Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., & Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom INRP.

Anzieu, D. (1981). *Le corps de l'œuvre.* Paris : Gallimard.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème.* IREM de Lyon.

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert.* SCÉRÉN-CRDP de l'Académie de Lyon.

Arsac, G., & Mante, M. (2008). *Articulations clés dans l'histoire du problème ouvert.* Consulté sur *http : //math.univ − lyon1.fr/irem/IMG/pdf/arsac.pdf*, le 20 décembre 2012.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, *9/3*, 281-308.

Artigue, M., Brousseau, G., Butlen, D., Duval, R., Perrin, M.-J., Robert, A., & Rogalski, M. (2002). Actes de la journée en hommage à Régine Douady. IREM de Paris.

Artigue, M., Chevallard, Y., Combelles, C., Duverney, D., Monaghan, J., Moisan, J., ... Xavier, L. (2007). *Sur l'épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat en france* (Rapport technique). Educmath. Disposnible sur http ://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/.

Bailly, F., & Longo, G. (2003). *Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique.* Consulté sur *http : //math.univ − lyon1.fr/irem/IMG/pdf/arsac.pdf*, le 4 décembre 2012.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educationnal Studies in Mathematics*, *18*, 147-176.

Barrier, T. (2009). *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes en arithmétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *27/1*, 9-44.

Bello-Hernández, M., Benito, M., & Fernández, E. (2012). On Egyptian fractions. *arXiv preprint arXiv :1010.2035v2*.

Bernstein, L. (1962). Zur Lösung der diophantischen Gleichung $m/n = 1/x + 1/y + 1/z$, insbesondere im Fall $m = 4$. *J. Reine Angew. Math.*, *211*, 1-10.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV^e^ école d'été de didactique des mathématiques. Clermont-Ferrand 2009.* Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Bkouche, R. (1982). Les mathématiques comme science expérimentale. *Bulletin APMEP*, *333*, 306-324.

Bkouche, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères IREM*, *70*, 33-76.

Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques. Corps, 21-30 août 2001* (p. 125-139). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Bouleau, N. (1997). *Dialogues autour de la création mathématique.*

Bouvier, A. (1981). *La mystification mathématique.* Paris : Hermann. Editeurs des sciences et des arts.

Bronner, A. (2006). Installation et régulation par l'enseignant de l'espace « parole-pensée-actions-relations », gestes d'étude, gestes professionnels, évènements et ajustements. In M.-C. Guernier, V. Durand-Guerrier, & J.-P. Sautot (Eds.), *Interractions verbales, didactiques et apprentissages : Recueil, traitement et interprétation didactiques des données langagières en contexte scolaire* (p. 115-136).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage.

Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners - and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal*, *27 (5)*, 589-599.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers : Learning about learning mathematics.* Springer.

Cassou-Noguès, P. (2001a). Conscience et réflexivité dans la philosophie mathématique de cavaillès. *Methodos [En ligne].* Consulté sur `http://methodos.revues.org/55 ; DOI : 10.4000/methodos.55, le 26 mars 2013.`

Cassou-Noguès, P. (2001b). *De l'expérience mathématique. Essai sur la philisophie des sciences de J. Cavaillès.* Paris : VRIN.

Castela, C. (2006). Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de première scientifique. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 33-77).

Castela, C. (2012). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets. le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques.* HDR, Université Denis Diderot, Paris VII.

Cavaillès, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme.* Paris : Hermann.

Cavaillès, J. (1981). *Méthode axiomatique et Formalisme.* Paris : Hermann, rééd.

Cavaillès, J. (1994). *Oeuvres complètes de philosophie des sciences.* Paris : Hermann.

Chevallard, Y. (1991). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, *30*, 5-15.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12/1*, 73-112.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin (Eds.), *Actes de la VIII école d'été de didactique des mathématiques* (p. 82-122). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique la figure du professeur. *Recherche en didactique des mathématiques*, *17/3*, 17-54.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19/2*, 221-265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Châtelet, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie.* Paris : Editions du Seuil.

Claparède, E. (1907). Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens : les résultats - X. *L'Enseignement Mathématique*, *9*, 473-479. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Claparède, E. (1908). Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens : les résultats - XI. *L'Enseignement Mathématique*, *10*, 152-172. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. *Le cognitif en didactique des mathématiques*, 31-69.

Connes, A. (1994). Le point de vue d'Alain Connes. *Les mathématiciens, Dossier Hors-Série Pour la Science*, 106-107.

Daina, A., Mathé, A.-C., Pelay, N., & Sabra, H. (2001). Expérimentation et position du chercheur en didactique des mathématiques : réflexions autour du thème du IV e séminaire des jeunes chercheurs de l'ARDM. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2011*, 57-76.

Demazure, M. (1997). *Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes* (Vol. 1). Cassini.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7/2*, 5-31.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM*, *15*, 37-61.

Duchet, P. (1996). *De la recherche à la formation : MATh.en.JEANS, chercher, comprendre, aimer les mathématiques.* En ligne. Consulté sur *http : //mapage.noos.fr/duchet/duchet_travaux_fichiers/pub_dida/rechform.pdf*, le 20 décembre 2012.

Duchet, P., & Audin, P. (2009). MATh.en.JEANS : définition, exemples, contre-exemples, propriétés, démonstrations. *Bulletin APMEP*, *482*, 347-358.

Duchet, P., & Mainguene, J. (2003). Les apprentis-chercheurs de MATh.en.JEANS. In *Actes Journées COPIRELEM, La Roche sur Yon, 17-19 mai 2002.* IREM des Pays de la Loire. Consulté sur *http : //mathenjeans.free.fr/amej/mej_quoi/publi_sur_mej/03apprentichercheurs.pdf*, le 20 décembre 2012.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* HDR, Université Claude Bernard-Lyon I.

Durand-Guerrier, V. (2006). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas, & A. Mercier (Eds.), *Actes des journées mathématiques de l'INRP* (p. 17-23). INRP.

Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. In *Actes du colloque : Quelles références épistémologiques pour les didactiques, Bordeaux, 25-27 mai 2006.*

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *40/3*, 373-384.

Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : Enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expériementer des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* INRP, Cédérom.

Elsholtz, C. (2001). Sums of k unit fractions. *Transactions of the American Mathematical Society*, *353*(8), 3209-3228.

Elsholtz, C., & Tao, T. (2011). Counting the number of solutions to the Erdos-Straus equation on unit fractions. *Arxiv preprint ArXiv :1107.1010*.

Erdös, P. (1932). Beweis eines Satzes von Tschebyschef. *Acta Litt. Ac. Sci. Regiae Univ. Hung. Fr.-Jos. Sect. Sci. Math.*, *5*, 194-198.

Erdös, P. (1949). On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, *35*, 374-384.

Erdös, P. (1950). On a Diophantine Equation. *Mat. Lapok*, *1*, 192-210.

Erdös, P. (1963). *Quelques problemes de théorie des nombres* (N° 6). Monographies de L'Enseignement Mathématique.

Feferman, S. (1988). The Logic of Mathematical Discovery versus The Logical Structure of Mathematics. *In The Light of Logic*, 77-93.

Fehr, H. (1905). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - I. *L'Enseignement Mathématique*, *7*, 387-395. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fehr, H. (1906a). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - III. *L'Enseignement Mathématique*, *8*, 43-48. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fehr, H. (1906b). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - IV. *L'Enseignement Mathématique*, *8*, 217-225. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fehr, H. (1906c). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - VI. *L'Enseignement Mathématique*, *8*, 463-495. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fehr, H. (1907a). Enquête sur la méthode des travail des mathématiciens : les résultats - IX. *L'Enseignement Mathématique*, *9*, 306-312. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fehr, H. (1907b). Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens : les résultats - VII. *L'Enseignement Mathématique*, *9*, 123-128. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fehr, H. (1908). *Enquête de l'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens.* Gauthier-Villars.

Fehr, H., & Laisant, C. (1902). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : premier questionnaire. *L'Enseignement Mathématique*, *4*, 208-211. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fehr, H., & Laisant, C. (1904). Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens : questionnaire complété. *L'Enseignement Mathématique*, *6*, 376-379. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Félix, C. (2002). *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématique et de l'histoire.* Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille.

Flournoy, T. (1905). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - II. *L'Enseignement Mathématique*, *7*, 473-478. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Flournoy, T. (1906). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - V. *L'Enseignement Mathématique*, *8*, 293-310. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Flournoy, T. (1907a). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - VII. *L'Enseignement Mathématique*, *9*, 128-135. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Flournoy, T. (1907b). Enquête de travail sur la méthode des mathématiciens : les résultats - VIII. *L'Enseignement Mathématique*, *9*, 204-217. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Fort, M. (2007). *Expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat scientifique* (Rapport technique). Disponible sur http ://media.education.gouv.fr/file/98/3/4983.pdf : Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.

Gardes, D. (1998). *Quels sont les effets à long terme sur les apprenants d'un entrainement à la résolution de problèmes de mathématiques ?* (Mémoire de Master non publié). Université Claude Bernard Lyon 1.

Gardes, D., & Bridenne, M. (2003). Apprendre dans la durée : une tentative dans les classes de première. In J. Colomb, J. Douaire, & R. Noirfalise (Eds.), *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes.* INRP.

Gardes, D., & Gardes, M.-L. (2013). Apprentis chercheurs sur la conjecture d'Erdös-Straus. *Feuille de vigne, IREM de Dijon*, *126-127*.

Gardes, M.-L. (2009). *Etude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique.* (Mémoire de Master non publié). Université Claude Bernard Lyon 1.

Gardes, M.-L. (2010). Démarche d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures : Un exemple en classe de terminale scientifique. *Petit x*, *83*, 51-78.

Gardes, M.-L. (2012). Intérêts et limites des méthodes algébriques dans un problème de recherche en théorie des nombres. *Actes du 36e séminaire SFIDA. Nice 2011*. (Disponible sur https ://sites.google.com/site/actessfida)

Gardes, M.-L., & Mizony, M. (2012). La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM*, *87*, 79-90.

Gardner, M. (1978). Jeux mathématiques, maints casse-tête et problèmes sur les nombres issus de curieuses fractions utilisées dans l'Egypte ancienne. *Pour la Science*, *14*, 101-103.

Gardner, M. (1979). Jeux mathématiques. *Pour la Science*, *19*, 112.

Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier Grenoble.

Giusti, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques.* Ellipses.

Godot, K. (2006). La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, *78*, 31-53.

Gonseth, F. (1955). *La géométrie et le problème de l'espace.* Editions du Griffon.

Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 161-178.

Grenier, D. (2012). La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In D. J.-L. & C. S. (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012. Genève.*

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en* *didactique des mathématiques*.

Grenier, D., & Tanguay, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x*, *78*, 26-52.

Gueye, I., & Mizony, M. (2012). Recent progress about Erdös-Straus conjecture. *B SO MA S S*, *1/2*, 6-14.

Hadamard, J. (1945). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton University Press, New York.

Hadamard, J. (1993). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine Mathématique.* Sceaux : Les Grands Classiques Gauthiers-Villars. Editions Jacques Gabay.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, *87*, 519-524.

Halmos, P. (1985). *I want to be a mathematician : An automathography.* Springer-Verlag New York.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). *ICMI Study 19 Book : Proof and Proving in Mathematics Education.* Springer, New-York.

Hoffman, P. (2000). *Erdös. l'homme qui n'aimait que les nombres.* Paris : Belin.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique.* Paris : Hermann. Editeurs des sciences et des arts.

Lefebvre, J. (1999). Invention, découverte et créativité en mathématiques : aspects psychologiques et historiques. *Bulletin AMQ*, *XXXIX, n^o 3*, 10-18.

Lévy-Leblond, J.-M. (1998). Impasciences. *Euréka*, *27*.

Madsen, L., & Winsløw, C. (2009). Relations between teaching and research in physical geography and mathematics at researchintensive universities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*, 741-763.

Maillet, E. (1901). Correspondance. *l'Enseignement Mathématique*, *vol. 3*, 58-59, 128, 219. (Consulté sur http ://www.unige.ch/math/EnsMath/)

Maillet, E. (1902). *Rêve mathématique.* Gauthier-Villars.

Majaj, M. (2011). *L'enseignement de l'arithmétique en France au collège et à la transition collège/lycée.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Mathé, A.-C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3. Analyse de la portée des jeux de langage dans un Atelier de géométrie en cycle 3 et modélisation des gestes de l'enseignant en situation.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Mizony, M. (2010). Sur la conjecture d'Erdös-Straus. *Mathematice*, *18*. Consulté sur *http : //revue.sesamath.net/spip.php?article*262.

Mizony, M., & Gardes, M.-L. (2010-2012). *Un point sur la conjecture d'Erdös-Straus.* Consulté sur `http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/SurErdos_Straus2.pdf`.

Mizony, M., & Gueye, I. (2012). Towards the proof of Erdös-Straus conjecture. *B SO MA S S*, *1/2*, 141-150.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier Grenoble.

Modeste, S., Gravier, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2010). Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères IREM*, *79*, 51-72.

Montgomery, H., & Vaughan, R. (2006). *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory.* Cambridge University Press.

Mordell, L. (1969). *Diophantine equations* (Vol. 30). Academic Press.

Morris, C. W. (1938). *Foundations of the Theory of Signs*. University of Chicago Press.

Nicolas, J.-L. (1986). *Discours prononcé à l'occasion du doctorat Honoris Causa de l'Université de Limoges à Monsieur le professeur Paul Erdös le 22 avril 1986.*

Nicolas, J.-L. (2002). Statistical properties of partitions. *In Paul Erdös and His Mathematics. Bolyai Society Mathematical Studies*, *Studies 11*, 537–547.

Nicolas, J.-L. (2006). Paul Erdös, poseur de problèmes. *Tangente Hors-série "Les mathématiciens"*, *25*.

Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : l'heuristique mathématique.* IREM de Lyon.

Oblàth, R. (1950). Sur l'équation diophantienne $\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. *Mathesis*, *59*, 308-316.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier - Grenoble 1.

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, *73*, 6-34.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. In C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV^e école d'été de didactique des mathématiques. Clermont-Ferrand 2009.* Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Pluvinage, F. (1993). Didactique de la résolution de problèmes. *Petit x*, *32*, 5-24.

Poincaré, H. (1908). L'invention Mathématique. *Bulletin de l'Institut Général Psychologique*, *3*, 175-187.

Poincaré, H. (1924). *Science et méthode.* Paris : Flammarion.

Poincaré, H. (1993). L'invention Mathématique. In *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* (p. 137-151). Sceaux : Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Editions Jacques Gabay.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton University Press.

Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible.* Paris : Gauthiers-Villars.

Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème.* Sceaux : Editions Jacques Gabay.

Rivoal, J. (2010). La rénovation de la voie professionnelle et la création du Bac Pro en trois ans. Place des mathématiques et des sciences physiques et chimiques. *Repères IREM*, *79*, 89-100.

Rosati, L. A. (1954). Sull'equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. *Boll. Un. Mat. Ital. (3)*, *9*, 59–63.

Salin, M. (2002). Repères sur l'évolution du concept de milieu dans la théorie des sitautions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^e école d'été de didacitque des mathématiques. Corps, 21-30 août 2001.* Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Schinzel, A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx. Comment. Math.*, *28*, 187-194.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Schwartz, L. (1994). Le point de vue de Laurent Schwartz. *Les mathématiciens, Dossier Hors-Série Pour la Science*, 15-18.

Selberg, A. (1949). An elementary proof of the prime number theorem. *Ann. Math.*, *50*, 305-313.

Sensévy, G. (1998). Lecture, écriture et gestes professionnels. *Repères INRP*, *18*, 123-138.
Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perpectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* (p. 1-22).
Swett, A. (1999). *The erdös-straus conjecture.* Consulté sur `http://math.uindy.edu/swett/esc.htm.`
Tanguay, D., & Grenier, D. (2010). Experimentation and Proof in a Solid Geometry Situation. *For the Learning of Mathematics*, *30(3)*, 36-42.
Thépault, L. (2003). *Pour le plaisir de se casser la tête !* Paris : Dunod.
Thépault, L. (2005). *Pour le plaisir de se casser (encore plus) la tête !* Paris : Dunod.
Thépault, L. (2006). *Pour le plaisir de se casser (un peu) la tête !* Paris : Dunod.
Thépault, L. (2007). *Cassez-vous la tête ! : la compil...* Paris : Dunod.
Thépault, L. (2008). *Le chat à six pattes et autres casse-tête- : 100 petits problèmes mathématiques très amusants.* Paris : Dunod.
Thurston, W. (1995). Preuve et progrès en mathématiques. *Repères IREM*, *21*, 7-26.
Tisseron, C. (1998). *Différents aspects du travail du chercheur.* Consulté sur `http://sierra.univ-lyon1.fr/irem/CF/epis/cadre1.htm.`
Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *RDM*, *10/2.3*, 133-169.
Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (Ed.), *Actes du colloque GDM-2000, la notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.*
Villani, C. (2012). *Théorème vivant.* Paris : Grasset.
Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for research in mathematics education*, *39/4*, 431-459.
Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof production. *Educational studies in mathematics*, *56*, 209-234.
Weil, A. (1994). Le point de vue d'André Weil. *Les mathématiciens, Dossier Hors-Série Pour la Science*, 48-49.
Yamamoto, K. (1965). On the Diophantine equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, *19*, 37-47.
Zhang, Y. (2013). *Bounded gaps between primes.* (Ann. of Math. to appear)