Enseigner les concepts logiques en début d'université dans l'espace mathématique francophone : aspects didactiques épistémologiques et langagiers. Une étude de cas au Cameroun

Judith Sadja Kam

N° d'ordre 224-2013 Année 2013

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

délivrée par

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

et préparée en cotutelle avec

L'UNIVERSITÉ DE YAOUNDE 1

ÉCOLE DOCTORALE

Education, Psychologie, Informatique et Communication

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006 / arrêté du 6 janvier 2005)

soutenue publiquement le 29 novembre 2013

par

NJOMGANG NGANSOP Judith

Spécialité : Didactique des Mathématiques

TITRE :

Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. *Une étude de cas au Cameroun*

Sous la co-direction de Viviane DURAND-GUERRIER et Lawrence DIFFO LAMBO

RAPPORTEURS

M. DELCROIX Antoine et Mme GUEUDET Ghislaine

JURY :

M. MERCAT Christian, Président du jury

Mme GUEUDET Ghislaine, Rapporteur

M. ANDJIGA Nicolas Gabriel, Examinateur

Mme CHELLOUGUI Faiza, Examinatrice

M. DIFFO LAMBO Lawrence, Co-directeur

Mme DURAND-GUERRIER Viviane, Co-directrice

RÉSUME

L'objet de notre étude porte sur la logique et le langage à la transition entre le lycée et l'université dans le contexte camerounais.

Au Cameroun, dans l'enseignement secondaire, les concepts de logique sont très peu explicités en classe de mathématiques, du fait que leur enseignement n'est pas prescrit par les nouveaux programmes[1] officiels. Ce n'est pas le cas de l'enseignement supérieur où un cours de logique formelle sous forme de rappel, est souvent donné en début d'année. Ce cours n'est pas prescrit par les programmes, mais certains enseignants en voient la nécessité.

Les résultats de plusieurs travaux ont montré que certaines des difficultés que les étudiants rencontrent dans la pratique des mathématiques proviennent d'une mauvaise maîtrise des concepts de logique. Nous faisons l'hypothèse qu'ils sont insuffisamment pris en charge par les enseignants dans la classe de mathématiques, qui pensent qu'ils sont disponibles chez les étudiants, du fait de leur utilisation dans la vie courante d'une part, et progressivement dans l'activité mathématique.

La thèse que nous soutenons est que, pour rendre opératoire les concepts de logique chez les étudiants nouvellement arrivés à l'université, un minimum d'explicitation de ces concepts en relation avec leur usage dans l'activité mathématique est nécessaire pour les apprentissages en mathématiques à tout le moins dans l'enseignement supérieur.

Pour défendre notre thèse, nous avons divisé notre travail en deux parties. Dans la première partie, nous présentons des éléments théoriques et analytiques nécessaires à notre travail, et une revue des travaux antérieurs en relation avec notre problématique.

La deuxième partie porte sur les résultats d'une expérimentation que nous avons menée avec des élèves de terminale C d'un lycée de Yaoundé[2], et des étudiants de première année de licence de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé. Elle s'est déroulée en deux temps : nous avons fait passer un questionnaire portant sur la logique et le langage aux élèves et aux étudiants, et à la suite de ce questionnaire, nous avons organisé un module de suivi avec huit étudiants ayant passé ce questionnaire. Le questionnaire nous a permis de repérer certaines conceptions des élèves et des étudiants concernant les concepts de logique, et le module de suivi a permis de provoquer des débats qui permettaient dans certains cas d'affiner nos analyses et nous donnaient des éléments permettant d'identifier des occasions pour expliciter certaines notions.

[1] La mise en place des nouveaux programmes officiels de mathématiques a commencé dès l'année scolaire 1994-1995 par la classe de sixième, et s'est faite progressivement.
[2] Au Cameroun

TITLE

"Teaching of the concepts of logic in francophone mathematics' area: epistemological, didactic and language aspects. *Case study in Cameroon.*"

ABSTRACT

Our study focuses on logic and language at the transition between high school and university in the Cameroonian context.

In Cameroon secondary education, the concepts of logic are paid little attention in mathematics classes, due to the fact that their teaching is not prescribed in the new official syllabuses[3]. This is not the case of higher education, where a course on formal logic is often given at the beginning of the year to first year university students, with a refreshing purpose. That course is not required in the syllabus, but some teachers see the need.

Several scientific studies have shown that some of the difficulties encountered by students while practicing mathematics come from their poor familiarity with concepts of logic. We assume that these students are insufficiently attended to by their teachers who think that the concepts are at their reach, since they are used in everyday life on the one hand, and they are gradually used in mathematical activities, on the other hand.

In this thesis, we stand for the point that, for the concepts of logic to become real operational tools to a student who begins university studies, some teaching of these concepts which should address the connections with mathematical activities is necessary, at least as a starting point in higher education studies. To defend our thesis, we have divided our work into two parts which are as follows :

In the first part, we present theoretical material necessary to our work as well as other technical tools that will be needed. We also provide a review of previous studies related to our issue.

The second part is on an experiment we carried out with students from the Upper Sixth class - science option - of a high school in Yaoundé (Cameroon), and with first year university students of mathematics of the Yaoundé Higher Teachers' Training College. This experiment had two stages : Firstly, the high school students and the university students filled out a questionnaire on logic and language. Following this, we organized a follow-up module involving 8 students purposely selected from their answers to the questionnaire. This questionnaire enabled us to detect meaningful points on how high school and university students grasp the concepts of logic, and the module helped to start debates which enabled in some cases to refine our analysis, and also provided us with strategic approaches for explaining certain concepts of logic.

DISCIPLINE : Didactique des mathématiques

[3] The new official mathematics syllabuses were instituted at the 1994-1995 school year by first year of secondary school, and was gradually extended to involve all other years of secondary school study.

MOTS-CLES : négation, implication, équivalence, quantification, prédicat, enseignement, apprentissage, logique, langage, raisonnement, transition lycée/université.

INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE

Laboratoire S2HEP : « Sciences et Société ; Historicité, Education et Pratiques »

Bâtiment « la Pagode », 38 avenue Niels Bohr- Campus de la Doua

Université Claude Bernard Lyon 1, 43 Boulevard du 11 novembre 1918

69622 Villeurbanne Cedex

REMERCIEMENTS

Je remercie mon époux Samuel SADJA KAM, qui m'a apporté son soutien sur tous les plans dans la réalisation de cette thèse. Cette thèse est la nôtre.

A nos enfants Joël, Serge et Michèle-Ange qui ont chacun participé très significativement à ce travail et qui m'ont entourée de toute leur affection je dis ma reconnaissance.

Je vous aime très fort.

Je remercie Madame Viviane Durand-Guerrier pour tout l'encadrement dont j'ai bénéficié au cours de la rédaction de ce travail. J'ai admiré son expertise, sa patience et sa gentillesse ; qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur DIFFO LAMBO Lawrence d'avoir accepté de codiriger cette thèse.

Je remercie Monsieur Philippe JAUSSAUD, directeur du laboratoire LIRDHIST au moment où je commençais ma thèse, et Monsieur Philippe LAUTESSE directeur du laboratoire S2HEP[4], pour toutes les facilitations qu'ils m'ont accordées pour la rédaction et la soutenance de ma thèse.

Je remercie Madame Ghislaine GUEUDET d'avoir accepté d'être rapporteur et examinatrice de cette thèse, et Monsieur Antoine DELCROIX d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Qu'ils soient remerciés pour leur disponibilité.

Je remercie Monsieur Nicolas Gabriel ANDJIGA d'avoir accepté d'être membre du jury. Qu'il soit remercié pour le grand intérêt qu'il accorde à mon travail, le soutien multiforme qu'il n'a cessé de m'apporter depuis le début de cette belle aventure.

Je remercie Monsieur Christian MERCAT, Madame Faiza CHELLOUGUI d'avoir accepté d'être membres du jury de cette thèse. Qu'ils soient remerciés pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail.

Je remercie la Coopération Française au Cameroun qui m'a apporté un grand soutien financier dans la réalisation de cette thèse.

[4] Le laboratoire LIRDHIST a changé de dénomination, il est devenu S2HEP.

Je remercie Monsieur Joël MOULEN et Monsieur Maurice TCHUENTE qui sont à l'origine de ce travail. Qu'ils trouvent ici ma profonde reconnaissance pour toute la motivation qu'ils ont su m'apporter.

Je remercie Messieurs Luc Calvin MEGAMTCHE, Joseph FOTSING, Donatien TCHOKONA, Raoul BOUDY, Fidèle CIAKE, Hubert NNANG, Bertrand TCHANTCHO qui ont accepté de participer à mon travail en m'accordant des interviews, et en m'ouvrant gracieusement les portes de leurs classes pour les enquêtes que j'y ai menées.

Je remercie la grande famille des Classes Scientifiques Spéciales, en particuliers Mme Marie Louise ASSE Messieurs AYINA BOUNI et Donat KENMEGNE pour les services qu'ils ont su me rendre avec joie.

Je remercie pour leur disponibilité les étudiants de MATH1 (2010), eux qui ont accepté de participer à l'expérimentation au centre de notre travail de thèse.

Je remercie Mesdames Huguette FOSSO et Berthe TCHENDJE, ainsi que Monsieur TCHENDJE pour leur amitié qui m'a été si précieuse. Ils n'ont pas cessé de m'encourager tout au long de la rédaction de ce travail, ils ont cru en moi.

Je remercie Madame Jacqueline TINA, la famille GERNEZ et la famille LOMBARD à Lyon pour m'avoir accueillie dans cette grande ville et m'avoir ouvert les portes de leur domicile en toute confiance.

Je remercie toute ma famille, en particulier ma sœur Isabelle NJOMGANG et mes mamans Elisabeth NANGOB NJOMGANG et Jacqueline MAKUISSU KAM pour leur soutien tout au long de la rédaction de ma thèse.

Je remercie le Révérend Pasteur Joseph BAMEKO, Stanislas BALEKE pour le soutien spirituel et les prières qu'ils ont élevées pour moi.

Je remercie mes filleuls Hervé Léon PRISO, Danielle NDAMZI, Calvin et Lydie SAMBA, François et Lucianie WANKEU, Gaëlle, Judith et Danielle TCHENDJE, Marlène KOM et Manuelle EDOUNG, ma nièce Muriel-Laure KOM, mon bébé Karelle TCHENDJE pour leurs attentions multiformes.

Pour tous ceux que je n'ai pas cités et qui ont de près ou de loin contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail, je dis MERCI.

Sommaire

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Notre étude porte sur la logique et le langage à la transition entre le lycée et l'université, dans le contexte camerounais. Elle est motivée par l'importance des questions de logique et de langage, leurs relations dans l'activité mathématique, et leurs apprentissages à la fin du secondaire et en début d'université.

La question de la place de la logique dans l'enseignement est une question difficile qui est très controversée dans l'espace francophone et ailleurs dans le monde depuis la réforme des mathématiques modernes. Les opposants s'appuient sur divers travaux conduits dans cette période, que ce soit en Éducation mathématique ou en Psychologie du raisonnement. Ces travaux montrent en effet qu'un enseignement « per se » de la logique ne se transfère pas nécessairement dans la classe de mathématiques et n'améliore pas nécessairement les aptitudes au raisonnement déductif (Durand-Guerrier, 1996 – Durand-Guerrier et al. 2012). Dans sa thèse de doctorat, V. Durand-guerrier (1996) a mis en évidence le fait que la théorie logique de référence habituellement considérée pour ces travaux est le calcul des propositions, qui ne permet pas de prendre en compte les phénomènes de quantification, alors que ceux-ci sont au cœur de l'activité mathématique. Les travaux développés ensuite (Durand-Guerrier & Arsac 2003, 2005, Chellougui 2004, Durand-Guerrier 2005, 2008) ont établi que la théorie logique de référence pertinente pour l'analyse des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques est la logique des prédicats du premier ordre, celle-ci étant pertinente tant pour analyser les énoncés en langue naturelle que pour analyser les énoncés formalisés (Durand-Guerrier, 2005, 2012). Les travaux empiriques conduits dans cette perspective ont montré que les élèves de la fin du secondaire et les étudiants en début d'université et au-delà, rencontrent de fait des difficultés résistantes dans la manipulation des énoncés comportant des quantifications (Durand-Guerrier 1996, 2003, 2005; Durand-Guerrier & Arsac 2003, 2005 ; Chellougui 2004, Barrier 2009). Au-delà de l'espace francophone, ces difficultés sont attestées au niveau international (Selden & Selden, 1995; Epp, 2003; Gueudet, 2008; Durand-Guerrier & al. 2012). Les travaux de Ben Kilani (Ben kilani 2005; Durand-Guerrier & Ben Kilani 2004) ont en outre montré, sur le cas de la négation dans le contexte tunisien, que ces difficultés sont renforcées dans le cas d'un enseignement en français langue seconde, ce qui est le cas au Cameroun, même si les contextes éducatifs sont très différents de ce point de vue.

Une question qui reste ouverte est celle de la prise en compte des résultats de ces travaux de recherche pour faire des propositions d'enseignement à la transition lycée/université. Notre étude vise à apporter des éléments de réponse à cette question en prenant comme théorie logique de référence le calcul des prédicats du premier ordre.

Au Cameroun, dans l'enseignement secondaire, les concepts de logique sont très peu explicités en classe de mathématiques du fait que leur enseignement n'est pas prescrit par les derniers programmes[5] officiels. Ce n'est pas le cas de l'enseignement supérieur où un cours de logique sous forme de « rappel », est souvent donné en début d'année. Ce cours n'est pas prescrit par les programmes officiels des universités[6], mais certains enseignants en voient la nécessité.

Notre travail se situe dans un contexte multilingue. En effet, le Cameroun possède deux langues officielles que sont le français et l'anglais. Par ailleurs, le système d'enseignement francophone est différent du système d'enseignement anglophone. Le choix du système d'enseignement pour un enfant s'opère dès la maternelle, et il est difficile de changer de système en cours de cycle primaire ou secondaire. Dans l'enseignement supérieur, les cours sont donnés indifféremment en français et en anglais dans la zone francophone, alors que dans la zone anglophone, ils sont donnés exclusivement en anglais.

En dehors de ces deux langues officielles, on rencontre environ deux cent trente langues locales[7] qui sont classées en six grands groupes au sein desquels on observe des variations linguistiques plus ou moins grandes. Comme l'a montré Françoise Tsoungui (1980) pour la langue Ewondo, ces langues locales déteignent sur la pratique du français, ce qui n'est en général pas pris en compte dans le cours de mathématiques. Or, le travail de Ben Kilani (2005) dans le cas de la Tunisie, met en évidence les effets que le passage de la pratique de la langue arabe à la langue française peut avoir sur l'apprentissage de la logique et des mathématiques en général.

Dans le secondaire comme dans le supérieur, le cours de mathématique est porté par la langue naturelle qui est le français ou l'anglais. Nous avons choisi de nous intéresser exclusivement aux enseignements faits en français.

[5] La mise en place des nouveaux programmes officiels de mathématiques a commencé dès l'année scolaire 1994-1995 par la classe de sixième, et s'est faite progressivement.

[6] Les programmes officiels en vigueur dans les universités camerounaises ont été arrêtés depuis juillet 1999.

[7] Source : Institut National de la Cartographie (Yaoundé, Cameroun)

Le traitement des concepts de logique ne fait pas l'objet d'une véritable explicitation à l'université. Pour les enseignants, ces concepts sont supposés être disponibles chez les étudiants qui entrent à l'université. Ils en font en conséquence un usage explicite à travers le formalisme. On assiste alors à un changement de mode d'expression entre les niveaux secondaire et universitaire : dans le secondaire, les énoncés mathématiques sont traités dans le langage courant, alors qu'à l'université c'est un langage mixte[8] qui est utilisé.

Les difficultés auxquelles sont confrontés les étudiants qui entrent en première année d'université sur ces questions sont souvent repérées par les enseignants et attestées par la littérature et de nombreux travaux de recherche que nous avons cités ci-dessus. Sans prétendre à l'exhaustivité, citons celles de ces difficultés qui sont récurrentes :

- les étudiants ne savent généralement pas reconnaitre ou expliciter la différence entre une proposition mathématique, une propriété, une expression en mathématiques. Bien qu'ils utilisent régulièrement les connecteurs logiques, ils n'en connaissent pas bien la définition ;
- l'équivalence est parfois utilisée ou interprétée en lieu et place de l'implication ;
- les étudiants ne font pas toujours la distinction entre le « et » et le « ou » ;
- les symboles de quantificateurs existentiel et universel dont l'utilisation n'est pas recommandée (voire déconseillée) dans le secondaire, sont utilisés surtout comme des abréviations. Par ailleurs, les mots désignant les quantificateurs ne sont pas toujours identifiés comme tels par les apprenants ;
- les étudiants ont du mal à nier un énoncé comportant un ou plusieurs quantificateurs.

Ces difficultés se rencontrent dans l'ensemble de l'activité mathématique et se révèlent particulièrement dans la pratique de la démonstration dont le schéma se complexifie dans l'enseignement supérieur : c'est le cas de la mise en œuvre d'une démonstration dont l'énoncé contient une quantification multiple.

Dans le secondaire, le schéma courant du raisonnement se réduit généralement à une suite de pas de déduction prenant comme prémisse soit les données du problème, soit des résultats intermédiaires issus de l'application des théorèmes universels et des résultats généraux.

On peut faire l'hypothèse que l'enseignement de logique donné en début d'année à l'université ne fournit pas aux étudiants les outils nécessaires qui leur permettent de dépasser ces difficultés. Cette hypothèse s'appuie sur une analyse de l'ouvrage intitulé « *Cours d'algèbre* » de Roger Godement (1973), et du cours d'analyse 1 de Guy LAFFAILLE et

[8] Mélange de langage courant et langage formel

Christian PAULY[9] dans le cadre de notre mémoire de Master 2[10]. Il en ressort qu'il est difficile pour l'étudiant d'établir le lien entre les objets de la logique qui sont présentés dans le cours de logique et les outils logiques utilisés dans la pratique des mathématiques : le cours de logique porte sur la logique propositionnelle, alors que l'analyse du discours mathématique porte sur la logique des prédicats.

Concernant le formalisme logico-mathématique dont le but est de lever les ambiguïtés de la langue, il est quasiment absent dans l'enseignement secondaire. En effet, l'utilisation des symboles logico-mathématiques n'est pas recommandée à ce niveau d'étude. Mais ces symboles sont brutalement introduits à l'université sans que le plus souvent le sens précis en soit donné. Les travaux de Chellougui (2004) montrent que, loin d'éclairer les concepts mathématiques, le formalisme semble plutôt représenter un obstacle pour les jeunes étudiants. La complexité croissante des énoncés mathématiques renforce davantage les difficultés déjà bien réelles auxquelles sont confrontés ces étudiants. En conséquence, ces derniers font un usage des symboles peu contrôlé, souvent erroné. En particulier, ils les utilisent comme des abréviations sans en respecter la syntaxe. Nous citons le cas de l'implication qui est une notion polysémique (Durand-Guerrier, 2003, 2005) très utilisée dans le langage courant sous la forme « si …alors … ». À l'université, elle est introduite avec le signe ⇒, mais son traitement ne s'éloigne pas beaucoup de l'usage courant[11], comme l'ont montré Rogalski & Rogalski (2004) pour une population d'étudiants d'une université de Lille, titulaires d'une licence de mathématiques.
Avec l'équivalence souvent appelée bi-implication, ces concepts sont au centre de toute activité mathématique et sont essentiels dans tout raisonnement scientifique.

Par ailleurs, la négation participe fortement de la démonstration : démonstration par l'absurde, par contraposition, par contre-exemple. Sa maîtrise est également nécessaire pour une appropriation complète des concepts mathématiques : il ne suffit pas de savoir reconnaître qu'un objet donné possède une propriété, il faut aussi pouvoir reconnaître qu'il ne possède pas cette propriété. L'utilisation de ce concept dans la pratique courante depuis l'enfance pourrait laisser croire qu'il est acquis en fin d'étude secondaire ; ce n'est pourtant pas le cas. Dans notre mémoire de Master 2, nous avons fait ressortir les difficultés que des élèves titulaires d'un baccalauréat scientifique, en année de préparation pour les concours des grandes écoles

[9] Professeur à l'université de Montpellier 2
[10] Intitulé « Comment enseigner les concepts logico-mathématiques : cas de la négation » (2008).
[11] Evaluer la vérité d'une l'implication dans son utilisation au sens courant, consiste à vérifier la vérité de l'antécédent.

au Cameroun, et des étudiants de première année de licence de mathématiques de l'université Claude Bernard Lyon 1, éprouvaient à construire la négation des énoncés quantifiés (Durand-Guerrier & Njomgang, 2009). Un constat analogue avait déjà été fait par la commission Inter IREM[12] Université (CI2U) auprès d'étudiants primo arrivant à l'université, dans diverses universités françaises.

En outre, les travaux de Ben Kilani (Ben Kilani & Durand-Guerrier (2004), Ben Kilani (2005)) ont montré que la syntaxe de la négation varie d'une langue à l'autre, pour ce qui concerne le français et l'arabe, et que cela est une source de difficultés supplémentaires pour les étudiants dont la langue naturelle est l'arabe, et qui étudient les mathématiques en français. Nous faisons l'hypothèse que ceci est également vrai dans le contexte camerounais où les langues maternelles utilisées en famille ne sont pas le français, et qu'il en est de même pour les autres concepts.

Toutes ces difficultés sont renforcées et révélées par le rôle crucial de la quantification dans les énoncés mathématiques à l'université, et selon Durand-Guerrier (1996, 2005), Epp (1999), Chellougui (2004), Arsac & Durand-Guerrier (2005), par les pratiques mathématiques qui tendent à laisser implicites un certain nombre de manipulations relatives à l'utilisation des quantificateurs par les enseignants du supérieur. C'est le cas de la quantification bornée, de la quantification implicite des énoncés, du jeu d'apparition/disparition des quantificateurs et de l'implication dans les énoncés et leur traitement. Mais ces implicites ne sont pas toujours partagés par les étudiants. Les enseignants peuvent contrôler ces pratiques par leur maîtrise des contenus mathématiques. Mais ce n'est pas le cas pour les étudiants qui doivent apprendre à maîtriser en même temps les concepts mathématiques et les outils logiques nécessaires au travail mathématique.

Dans ce travail, nous retenons les éléments suivants :

- l'implication est une notion polysémique (Durand-Guerrier, 2005) et son utilisation dans le langage courant peut déteindre sur l'activité mathématique (Rogalski & Rogalski, 2004) ;
- l'utilisation de l'implication dans des situations où il y a équivalence entre des énoncés, amène les étudiants à travailler sur des énoncés conditionnels dans un cadre où il y a effectivement une équivalence. Cela ne favorise pas la compréhension de la

[12] Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques

distinction entre implication et équivalence. De plus l'équivalence est parfois utilisée en lieu et place de l'égalité ;

- les notions de condition nécessaire et condition suffisante restent assez opaques pour les étudiants (Rolland (1999), Deloustal-Jorrand, (2003)) ;
- la négation produit des énoncés qui peuvent être source d'ambiguïté référentielle, en particulier en ce qui concerne la différence entre négation et contraire (Fuchs, 1996) ;
- l'appropriation de la négation nécessite l'articulation de règles syntaxiques (grammaire des énoncés) et de contraintes sémantiques (sur les valeurs de vérité) et pragmatiques (prenant en compte en particulier les connaissances du sujet) (Durand-Guerrier & Ben Kilani (2004), Durand-Guerrier (2005)) ;
- les pratiques mathématiques relatives à la quantification (quantification bornée, quantification implicite des énoncés) ne sont pas toujours partagées par les étudiants (Durand-Guerrier (1996), Chellougui, (2004)) ;
- pour beaucoup d'étudiants, la permutation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ n'est pas significative (Chellougui, 2004) ;
- la quantification dans un énoncé mathématique, qu'elle soit implicite ou explicite, engendre la question du statut de la variable qui n'est pas toujours clair (Durand-Guerrier, 2003).

Nous pouvons résumer cela en disant que la maîtrise de l'outil logique, nécessaire pour faire des mathématiques, est encore loin d'être assurée tant dans l'enseignement secondaire que dans l'enseignement supérieur.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- les difficultés relatives à ces concepts logiques sont assez méconnues par la plupart des enseignants, aussi bien dans le secondaire que dans le supérieur ;
- l'enseignement et l'apprentissage de ces concepts ne sont pas, ou peu, pris en charge par les enseignants qui supposent qu'ils sont disponibles du fait de leur utilisation dans la vie courante d'une part, puis progressivement dans l'activité mathématique d'autre part.

- un minimum d'explicitation des concepts logiques en relation avec leur usage dans l'activité mathématique est nécessaire pour les apprentissages en mathématiques à tout le moins dans l'enseignement supérieur.

Dans notre travail, nous avons testé ces différentes hypothèses pour ce qui concerne l'apprentissage de la logique au Cameroun.

Ceci nous amène à la question de recherche suivante :

> ***Comment rendre opératoires les concepts logico-mathématiques chez les étudiants qui entrent en première année d'université, pour qui les questions de logique et de langage n'ont jamais fait l'objet d'un enseignement ?***

Y. Chevallard (1991) classe les concepts de logique parmi les objets paramathématiques, c'est-à-dire, des objets qui sont utilisés comme outil dans l'activité mathématique, mais ne sont pas des objets d'enseignement. L'apprentissage de ces concepts est en grande partie laissé à la charge des étudiants. De ce fait, leur capacité à reconnaître le statut des objets logico-mathématiques et à les manipuler est approximative. Les difficultés qu'ils rencontrent pourraient être une conséquence de la transposition didactique, qui ne prend pas toujours en compte la complexité de certains concepts.

Ceci nous amène à reformuler notre question de recherche ainsi : ***« Quelle transposition didactique peut-on effectuer afin de rendre opératoire les concepts de logique chez les étudiants de première année de licence de mathématiques ? »***

Nous avons scindé cette question en trois sous-questions :

- qu'en est-il de la prise en compte de la complexité de ces concepts et de leur utilisation ?
- comment aider les étudiants à surmonter les difficultés langagières qui se présentent dans le cours de mathématiques, tant du point de vue de la langue naturelle que du langage symbolique ?
- peut-on repérer dans les enseignements, des situations idoines pour l'explicitation de ces concepts de logique ?

Pour apporter des éléments de réponse à nos interrogations, nous avons divisé notre travail en deux grandes parties.

La première partie regroupe des éléments théoriques sur lesquels nous nous appuyons pour mener nos analyses dans la deuxième partie qui est expérimentale.

L'opérationnalité d'un concept est le résultat d'une activité cognitive, interne au sujet en situation. C'est cette activité cognitive que Vergnaud (1991) a appelée *la conceptualisation.* Cet auteur considère que la complexité dans l'utilisation des concepts n'est pas seulement dans le faire, elle est aussi dans le dire : la forme prédicative de la connaissance a une part importante dans l'opérationnalité des concepts. Les concepts de logique se développent surtout en acte, c'est-à-dire lorsque le sujet est en situation. Les enseignants de leur côté pensent que ces concepts sont stabilisés chez les étudiants. Ces différents points de vue ont contribué à orienter notre choix sur la Théorie des Champs Conceptuels de Gérard Vergnaud (2001) et la Dialectique Outils/Objets (R. Douady, 1986), comme cadres théoriques pour notre étude. La pertinence de ce choix est développée dans le chapitre 1.

Au chapitre 2, nous présentons des éléments de la logique du premier ordre, à l'œuvre dans l'activité mathématique. Nous montrons la pertinence du calcul des prédicats comme cadre d'analyse du discours mathématique. Les difficultés générées par les concepts de logique sont bien réelles : les concepts en eux-mêmes sont complexes en tant qu'objet de savoir, et leur utilisation en mathématiques complexifie davantage les énoncés à traiter. Ces deux points de vue sont développés dans ce chapitre.

Le chapitre 3 est consacré à une revue des travaux en lien avec notre problématique et nous permet de situer nos recherches par rapport à ces travaux.

Nous avons ensuite mené une analyse d'un manuel de terminale C au programme au Cameroun, et d'un polycopié du cours d'analyse, en usage en première année de la filière mathématique de l'École Normale Supérieure de Yaoundé. Cette analyse permet d'identifier le type d'enseignement qui est proposé concernant les concepts de logique, et de mettre en perspective les résultats avec les connaissances exigibles pour une bonne pratique des mathématiques. Elle permet d'autre part d'identifier des situations qui pourraient être problématiques pour les élèves et les étudiants. Parallèlement à cette analyse, nous proposons quelques éléments sur les pratiques enseignantes telles que renseignées lors d'entretiens que nous avons eus avec des enseignants du secondaire et du supérieur. Les résultats sont présentés dans le chapitre 4.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous présentons une expérimentation que nous avons menée avec des élèves de terminale C[13] *d'un lycée de Yaoundé, et avec des étudiants de première année de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé.*

[13] Ancienne appellation de la terminale S actuelle, et demeure toujours.

Nous avons proposé un questionnaire[14] à ces élèves et étudiants. Notre objectif était d'établir un diagnostic des difficultés relatives aux questions de logique et de langage rencontrées par les apprenants, et de mettre à l'épreuve nos hypothèses de travail. Sur la base de ce questionnaire, nous avons organisé un module de suivi avec huit étudiants volontaires parmi ceux ayant répondu au questionnaire. Le module avait pour but, d'une part, de provoquer des débats entre les étudiants, afin que chacun puisse s'exprimer sur les raisons du choix de sa réponse aux items proposés et, d'autre part, d'expliciter les concepts rencontrés. Il s'est déroulé en quatre séances d'une à trois heures chacune. Les traces orales recueillies ont contribué à enrichir notre corpus et ont permis de dépasser certaines des limites inhérentes aux questionnaires, nous permettant de préciser ce que les différentes situations pourraient permettre de travailler dans le cadre du cours ordinaire de la classe. Les analyses sont menées en parallèle avec celles des réponses au questionnaire.
Au chapitre 5, nous présentons les questionnaires et les modalités de leur passation. Nous avons regroupé ces exercices en fonction des concepts qui sont au centre de leur traitement. Pour chacun des exercices du questionnaire, nous présentons une analyse a priori que nous avons menée en référence aux cadres théoriques développés dans les chapitres précédents, puis une analyse a posteriori des réponses obtenues à la suite de la passation du questionnaire et du module de suivi. C'est ainsi qu'au chapitre 6, nous avons regroupé les exercices centrés sur la négation, au chapitre 7, les exercices centrés sur la quantification et au chapitre 8, les exercices centrés sur l'implication. Le chapitre 9 est consacré au changement de langage dans l'activité mathématique, avec toutes ses implications.

Nous concluons notre travail par une synthèse des résultats obtenus.

Nous faisons ressortir les possibilités que nous avons identifiées en vue d'une amélioration de la prise en charge des concepts de logique par les enseignants de mathématiques. Quelques pistes de recherche sont également présentées pour avancer sur la question des apprentissages dans un contexte multilingue que nous n'avons pas pu traiter dans ce travail.

[14] Nous avons proposé pour chaque niveau un questionnaire en fonction des enseignements qui ont été faits.

PARTIE 1 : Étude théorique et analytique

CHAPITRE 1 : La Théorie des Champs Conceptuels comme cadre théorique d'étude de nos questions de recherche

Introduction

La thèse que nous soutenons est que, pour rendre opératoires les concepts de logique pour l'activité mathématique des élèves et des étudiants, un minimum d'explicitations de ces concepts en relation avec leur usage dans l'activité mathématique est nécessaire. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que les catégories logiques participent du processus de conceptualisation (Durand-Guerrier 2011).

Pour développer notre propos, nous nous appuyons sur trois articles. Le premier, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », est de Régine Douady. Il est paru en 1986 dans la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n°2, pp 5-31.*

Les deux autres sont de Gérard Vergnaud :

- « La théorie des champs conceptuels » paru en 1991 dans la revue *Recherche en Didactiques des Mathématiques, Vol. 10/2.3, pp.133-170* ;
- « Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance », conférence publiée dans les Actes de Colloque GDM-2001.

Gérard Vergnaud définit la théorie des champs conceptuels comme :

> « Une théorie cognitiviste, qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. […] Sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre les connaissances. » (Vergnaud, 1991, p. 135)

Dans cette citation, la signification qu'il attribue au mot *connaissances* est « *aussi bien les savoir-faire que les savoirs exprimés* ». Comme nous l'avons annoncé au début de notre travail, nous nous intéressons aux connaissances en logique des élèves et des étudiants à la transition entre le lycée et l'université.

Les concepts de logique sont des *notions-outils* au sens de Yves Chevallard (1991), c'est-à-dire, « des objets qui sont utilisés dans la pratique de l'activité mathématique sans être « normalement » des objets d'étude ». Cette définition de *notion-outil* est proche de celle que Régine Douady (1986) donne d'un concept en tant qu'outil dans l'article sus-cité : « un concept est *outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème » (Douady, 1986, p.9).

Seulement, l'utilisation d'un concept exige du sujet en activité, une bonne connaissance de sa syntaxe, des significations qu'il peut avoir selon les situations, et de ses propriétés : en échos à Chevallard (1991), nous disons qu'il doit être « appris ». Pour cela, il doit être transformé en objet de pensée. Un moyen de transformation consiste en la mise en œuvre de la *dialectique outil-objet* que Régine Douady (1986) définit comme un processus qui a cours en situation de résolution de problème, et qui consiste à transformer un concept ayant le statut d'outil en un objet de savoir.

Plusieurs travaux en didactique de mathématiques (Durand-Guerrier (1996), Epp (1999), Deloustal-Jorrand (2000-2001, 2003), Rogalski & Rogalski (2004), Chellougui (2004), Durand-Guerrier & Arsac (2003, 2005), Bloch & Ghedamsi (2005), Ben Kilani (2005)) ont montré que tant la quantification que la négation et l'implication sont des concepts que les étudiants qui entrent à l'université ont beaucoup de difficultés à manipuler :

- la quantification implicite des énoncés, les phénomènes d'apparition/disparition des quantificateurs dans les définitions et la démonstration, la manipulation des énoncés quantifiés qui contiennent les quantificateurs universel et existentiel, sont des pratiques expertes qui ne sont pas explicitées dans la classe de mathématique ;
- la négation est considérée comme un *objet naturel* du fait de son usage dans la vie courante. Cette naturalisation de l'objet *négation* est faite à tort comme le montrent les travaux de Ben Kilani (2005) et les résultats que nous avions produit dans notre mémoire de Master. La complexité du concept se révèle entre autre, dans la construction de la négation des énoncés contenant des quantificateurs et des énoncés conditionnels. Les démonstrations par contraposition et par l'absurde sont également des activités mathématiques qui en exigent une bonne connaissance : les énoncés à nier sont souvent d'une grande complexité, comme nous le montre l'exemple que nous étudions à la section 3.1 du chapitre qui suit.
- le terme *implication* recouvre plusieurs notions, à savoir, conditionnel, syllogisme, inférence, implication matérielle, implication formelle. Savoir évaluer une implication matérielle, démontrer qu'une implication formelle est vraie, faire la distinction entre une implication ouverte et une implication formelle dont la quantification est implicite sont des compétences qui relèvent d'une bonne maîtrise de l'implication. En outre, la reconnaissance des inférences valides n'est pas avérée chez les étudiants nouvellement entrés à l'université : ils ont, dans certaines situations, tendance à traiter l'implication comme l'équivalence (Durand-Guerrier, 1996).

À toute cette complexité dans l'usage des concepts ci-dessus cités, il faut ajouter les difficultés d'ordre langagier et linguistique : l'introduction du formalisme dans les textes, le passage d'un langage à un autre, principalement du langage courant au langage formel et réciproquement (Duval, 1988), les changements de langue dans le cursus scolaire (Ben Kilani, 2005), la pratique courante d'une langue qui n'est pas la langue dans laquelle les études sont faites (Tsoungui, 1980, Barwell & Barton & Setati (2007)).

Notre objectif est de montrer la pertinence du choix de *la Théorie des Champs Conceptuels* et de *la dialectique outil-objet* comme des cadres théoriques de notre travail.

Nous présentons dans les paragraphes 2 et 3 du chapitre 2, quelques éléments qui mettent en évidence la complexité des concepts de logique et les difficultés relatives à leur utilisation. Cela nous permet de soutenir l'idée selon laquelle les concepts de logiques et leur apprentissage relèvent des connaissances complexes, et ainsi de motiver le choix du cadre des champs conceptuels pour nos recherches.

Nous inspirant de Douady (1986), nous disons qu'un élève a des connaissances en logique « s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme *outils explicites*[15]dans des problèmes qu'il doit résoudre, […] s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites, pour interpréter les problèmes ou poser des questions à leurs propos » (op. cit., p. 11-12) : cette définition pose le problème de l'opérationnalité des concepts qui est la question centrale de notre travail, en lien avec leur forme prédicative ; c'est l'objet de la première partie.

L'énonciation des objets et de leurs propriétés s'appuie d'une part sur le langage, et d'autre part sur les catégories logiques ; elle est essentielle dans le processus de conceptualisation, et doit prendre en compte les systèmes signifiant/signifié. Dans la deuxième partie, nous argumentons dans ce sens en mettant en évidence le rôle crucial du langage dans les apprentissages.

1. Opérationnalité des connaissances

Un concept est utilisé dans diverses situations, et dans chacune d'elle, il n'est pas mis en œuvre de la même manière, comme nous l'illustrons pour l'implication et de la négation au paragraphe 2 du chapitre 2 ; cela rend compte de la complexité de ces concepts. Des propriétés différentes du concept dont la pertinence est variable selon les situations à traiter,

[15] On parle d'outil explicite pour les notions qu'un élève met en œuvre, qu'il peut formuler et dont il peut justifier l'emploi (Douady, 1986, p.10)

doivent être mobilisées pour résoudre le problème posé. Nous adhérons ainsi à l'idée de Vergnaud qui affirme un principe d'élaboration pragmatique des connaissances :

> « C'est à travers des situations[16] et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Ce processus d'élaboration pragmatique est essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il l'est d'ailleurs pour l'histoire des sciences. […] Si l'on veut prendre correctement la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend dans l'action du sujet. La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas. » (Vergnaud, 1991, pp.135-136)

Une connaissance est dite *opératoire* lorsqu'elle « permet de faire et de réussir » (Vergnaud, 2001), ce qui signifie qu'il faut savoir quand on doit l'utiliser, quand il ne faut pas, dans quels champs elle doit intervenir.

Pour l'implication, l'aspect opératoire se manifeste par les inférences permises dans une situation donnée ; pour la quantification, il se manifeste par l'identification des énoncés quantifiés et du type de quantification en jeu (quantification implicite, multiple, énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et de la forme $\exists x, \forall y, P(x,y)$).

Le choix qu'un sujet opère parmi les différentes possibilités d'utilisation d'un concept en situation de résolution de problème, résulte des opérations cognitives qui ne sont pas toujours visibles mais qui se manifestent par certaines des conduites que le sujet adopte.

1.1. Les schèmes

D'après G. Vergnaud, deux classes de situations peuvent se présenter pour un sujet en apprentissage :

- des classes de situations pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat de la situation. Pour ces classes de situations, les concepts sont utilisés comme outils : ceci correspond à la *phase a « Ancien »* dans le processus *dialectique outil-objet* ;
- des classes de situations pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires, ce qui l'oblige à un temps de réflexion et d'exploration, à des hésitations, à des tentatives avortées et le conduit éventuellement à la réussite, éventuellement à l'échec. Dans cette classe de situations, certes, les connaissances sont également des outils, mais leur opérationnalité n'est plus immédiate. L'élève recherche des moyens nouveaux adaptés : c'est d'après R. Douady (1986), la *phase b « Recherche nouveau implicite »* dans le processus *dialectique outil-objet*. On est généralement en présence des situations nouvelles, jamais rencontrées auparavant.

[16] Le mot *situations* qui apparait ci-dessus désigne une tâche à résoudre, et non une situation didactique.

Mais qu'est ce que la compétence ? Nous avons choisi les définitions données par Vergnaud (2001) :

« *A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives qui lui permet d'utiliser tantôt une procédure, tantôt une autre, et de s'adapter ainsi plus aisément aux différents cas de figure qui peuvent se présenter* » ou alors « *A est plus compétent s'il sait "se débrouiller" devant une situation nouvelle d'une catégorie jamais rencontrée auparavant.* » (Vergnaud, 1991, pp. 2- 3)

Ainsi vu, le concept de compétence traduit, entre autre, une capacité d'adaptation du sujet devant une situation nouvelle, et contient la notion de performance. Or l'auteur estime qu'il est trop général de parler d'adaptation à l'environnement ; ce qui s'adapte se sont les *schèmes*, et ils s'adaptent à des situations. Donc pour l'une et l'autre classes de situations, des *schèmes* organisent les conduites. Il donne quatre définitions complémentaires des *schèmes* :

1- Un schème est une totalité dynamique fonctionnelle ;
2- Un schème est l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée ;
3- Un schème est nécessairement composé de quatre catégories de composantes
  - un but (ou plusieurs), des sous-buts et des anticipations
  - des règles d'action, de prise d'information et de contrôle
  - des invariants opératoires, (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte)
  - des possibilités d'inférences
4- un schème est une fonction qui prend ses valeurs d'entrée dans un espace temporalisé à n dimensions et qui produit ses valeurs de sortie dans un espace également temporalisé à n' dimensions : n et n' étant très grands. » (Vergnaud, 2001, p.4)

On peut, d'une part, dire que le fonctionnement cognitif du sujet repose sur le répertoire de *schèmes* disponibles antérieurement formés et, d'autre part, bien percevoir le caractère adaptatif du *schème*.

Comme exemple de *schèmes* associés au concept d'implication, « on trouve des conduites inférentielles classiques rendant compte des règles d'inférences comme le *Modus Ponens* ou la règle de transitivité d'antécédent à conséquent et dans une moindre mesure la règle du *Modus Tollens* » (Durand-Guerrier, 1996, p. 107).

Comme exemple de *schèmes* associés à la négation, nous rencontrons la mise en œuvre de la forme négative, tant pour des propositions singulières que pour les énoncés quantifiés, ou encore l'identification de la structure d'un énoncé puis l'application des règles syntaxiques.

« C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher […] les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (Vergnaud, 1991, p.136). Ces éléments cognitifs sont des règles d'action et d'anticipation, des inférences, et aussi les invariants opératoires.

1.2. Les invariants opératoires

Les invariants opératoires pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents à la situation. Il en existe de trois types :

- les invariants de type « *propositions* » qui sont susceptibles d'être vrais ou faux ; les théorèmes-en-acte[17] sont de ce types ;
- les invariants de type « *fonction propositionnelle* » : ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent les briques indispensables à la construction des propositions. Ce sont les *concepts-en-acte* ou les *catégories-en-acte* ;
- les invariants de type « *argument* » qui peuvent être des objets matériels, des personnages, des nombres, des relations, des fonctions propositionnelles et même des propositions. (Vergnaud, 1990, p. 142-145)

Théorèmes-en-acte et concepts-en-acte sont la composante épistémique des schèmes, et ne sont généralement pas l'objet d'une formulation explicite dans le processus de conceptualisation, comme c'est le cas des théorèmes et des concepts. Vergnaud le précise lorsqu'il dit :

> « Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement, on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : proposition, fonctions propositionnelles, objets-arguments. » (Vergnaud, 1991, p.145)

Nous proposons dans l'exemple qui suit, repris de Durand-Guerrier (1996), une illustration de cette pensée.

Considérons l'exercice suivant :

> « Donner l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 20 qui vérifient
> (P) *Si x est pair, alors son successeur est premier.* »

(P) est une implication ouverte au sens où la variable x est une variable libre susceptible de recevoir des affectations de valeurs[18]. La résolution de cet exercice requiert de l'étudiant la connaissance des conditions de vérité d'une implication matérielle, à savoir qu'une implication matérielle est fausse seulement dans le cas où son antécédent est faux et son conséquent vrai ; dans tous les autres cas elle est vraie. On est amené à dire ici, pour chaque implication matérielle obtenue par instanciation de x par une valeur comprise entre 0 et 20, si elle est vraie ou fausse.

---

[17] Théorèmes qui sont utilisés dans l'action du sujet et dont le domaine de validité est généralement restreint.

[18] Ceci est précisé au chapitre 2

L'utilisation et la manipulation de l'implication sont couramment rencontrées dans la classe de mathématiques, dans l'énonciation des théorèmes (implication formelle) ou dans la démonstration (implication au sens de Quine) où elle est utilisée pour exprimer des inférences. C'est par exemple le cas de la démonstration de la formule $\forall x,\ \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ (F). Un domaine étant défini, pour la vérité de cette proposition, il est d'habitude de supposer que $\mathcal{P}(x)$ est vrai et de montrer que la vérité de $\mathcal{Q}(x)$ suit. Or la formule (F) est vraie si pour chaque instance de x, l'implication matérielle obtenue est vraie. Le cas où l'antécédent est faux n'est jamais examiné, du fait que l'implication est vraie, et cela n'est pas en général exprimé. On ne regarde que le cas où la propriété antécédente est vraie. Le théorème-en-acte selon lequel, montrer qu'une implication est vraie consiste à se placer dans le domaine caractérisé par la propriété antécédente et montrer que la propriété conséquente suit, est un invariant opératoire.

En effet, la démonstration des énoncés de la forme $\forall x,\ \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$, les inférences effectuées au cours d'un raisonnement, à savoir que, lorsque P est vrai, on en déduit Q (P et Q étant des formules du calcul des prédicats), où seule la vérité de l'antécédent est prise en compte, sont des classes de situations qui ont contribuées à installer chez les élèves, le théorème-en-acte ci-dessus cité.

Pour ce qui concerne l'énoncé (P), on observe très fréquemment la mise en œuvre de cet invariant opératoire, à ne considérer que les nombres pairs. Ici, cet invariant opératoire est mis en défaut car il ne s'agit pas de prouver une implication, mais d'évaluer la valeur de vérité de chacune de ses instances. Le fait que les nombres impairs compris entre 0 et 20 satisfont la phrase ouverte (P) met en défaut ce théorème-en-acte : il ne s'applique pas à cette classe de situations, il a une validité locale. On est en présence d'une situation nouvelle –nous dirions peu familière, qui pourrait contribuer à la déstabilisation des compétences acquises par les étudiants dans le traitement de l'implication.

Au cours de l'activité, l'émergence des invariants opératoires de type *propositions* résulte en général du rôle important qu'ils jouent dans la résolution d'un problème nouveau. Lorsque les apprenants restent confrontés aux classes de situations pour lesquelles ces théorèmes-en-acte sont opératoires, il y a une institutionnalisation locale du savoir.

En écho à Vergnaud, nous disons que l'apprentissage et l'enseignement d'un concept ne peuvent se ramener ni à la définition de ce concept, ni à son utilisation pour une classe de situations : son opérationnalité doit être éprouvée à travers des situations variées.

L'item (P) figure dans les questionnaires que nous avons proposés aux élèves et aux étudiants ; c'est l'exercice 1.

Une autre illustration de la présence et de l'importance de la prise en compte des invariants opératoires dans l'activité cognitive du sujet en situation de résolution de problème est tirée de l'article de Durand-Guerrier (2011), « *Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques* », qui est un cours de l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques en 2011.

Il s'agit d'un problème[19] qui a été expérimenté deux années successives, d'abord dans une seule classe de $5^{\text{ème}}$ (élèves âgés de 12-13 ans), puis l'année suivante dans toutes les classes d'un même collège. Le sujet est le suivant :

« *Dans l'expression* $n \times n - n + 11$, *si on remplace* n *par n'importe quel nombre entier naturel, on obtient toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?* »

Les élèves sont d'abord invités à une recherche individuelle, puis une recherche en groupe qui s'achève par la production d'une affiche présentant le résultat et les idées du groupe et une explication pour convaincre les autres de la validité de leurs résultats. Dans un troisième temps ils débattent sur les affiches qui sont présentées par le professeur et, enfin, le quatrième temps est consacré à une synthèse sur les débats et (ou) sur l'insuffisance de certaines preuves qui ont été mises en évidence au cours du troisième temps.

Nous relevons et commentons quelques interventions au cours des débats relatifs à l'affiche A, où les élèves ont répondu OUI et qui porte les inscriptions suivantes :

> *Le résultat n'a toujours que deux diviseurs car c'est toujours un nombre premier (donc impair) car le premier résultat (qui est* $N \times N - N$) *est égal à un nombre pair donc celui-ci +11=un nombre premier (impair)*
>
> *1[er]* $résultat = un$ *nombre pair parce que* $N \times N - N$ *égal* N *multiplié par son premier nombre inférieur :*
>
> *Exemple :*
>
> $5 \times 5 - 5 + 11 = 20 + 11 = 31 \quad 5 \times 4$
>
> $8 \times 8 - 8 + 11 = 56 + 11 = 67 \quad 8 \times 7$

Tableau 1 : L'affiche du groupe A (op. cit. p.19)

(4) Géraldine : nous ne sommes pas convaincus car si on remplace n par 11, cela donnera $11 \times 11 - 11 + 11$ qui est égal à 121 et qui a trois diviseurs 11 ; 121; et 1.

(36) Géraldine : C'est vrai, il n'y a que 11 comme exception, mais c'est pas entièrement juste, mais pas entièrement faux non plus.

Ces deux interventions de Géraldine montrent d'une part une remise en question du résultat par la production d'un contre-exemple, et d'autre part le refus de rejeter complètement le

[19] Cet exemple provient de Arsac et al. (1992)

résultat du groupe. On peut faire l'hypothèse que Géraldine n'a pas pris en compte la quantification universelle qui se traduit par *toujours*. Elle travaille comme avec une phrase ouverte.

(6) Paul : Nous ne sommes pas convaincus car il n'y a que deux exemples. Rien ne prouve qu'avec les autres nombres cette théorie marche.

Paul considère qu'il est en présence d'un énoncé universel, et que 5 et 8 *–éléments singuliers* qui ont une valeur *d'élément générique* pour le groupe, sont des exemples pour lesquels l'énoncé ouvert associé à l'énoncé universel est vrai, mais ces exemples ne suffisent pas. Géraldine a donné 11 en contre-exemple. Marie pense qu'il faudrait en trouver d'autres pour rejeter l'énoncé, d'où la réaction de Paul :

(18) Paul : Un seul suffit

Un autre élève aborde dans le même sens que Paul en donnant une justification à sa réponse :

(40) Elève : Y a une exception, donc c'est pas toujours !

(49) Elève : C'est marqué toujours ; donc on répond non, c'est pas toujours.

Dans cette intervention, la quantification universelle est prise en compte par l'Elève. Sans l'expliciter, il utilise la règle du contre-exemple.

L'auteur conclut que les interventions mettent en évidence la présence des différentes catégories logiques ci-dessous, qui ne sont pas explicitées mais qui, on le voit bien, pilotent l'action des différents élèves :

- énoncés clos (universels) qu'il faut évaluer –variable liée ;
- énoncé ouvert associé avec lequel les élèves travaillent –variable libre avec le statut de marque-place ;
- termes complexes : expression algébrique $n \times n - n + 11$;
- éléments singuliers : valeurs substituées à la variable n ;
- élément générique (sur l'affiche $N \times N - N$) ;
- exemples, contre-exemples ;
- énoncé existentiel (implicitement) : l'intervention (4) de Géraldine est la formulation implicite d'un énoncé existentiel ;
- énoncés contingents (parfois vrai, parfois faux) : intervention (36) de Géraldine.

Il est essentiel de pouvoir bien identifier ces différentes catégories logiques en mathématiques. En effet, si nous considérons que l'énoncé du problème donné est un universel, c'est-à-dire *une proposition* à cause de la présence de *toujours*, alors n a le statut d'élément lié, et l'exhibition d'une exception *–un contre-exemple*, produit la réponse *NON*. Si par contre on considère qu'on a un énoncé ouvert, la réponse correspondra à celle de

Géraldine en (36), que nous reformulons en « la propriété est vérifiée par certains éléments, mais non vérifiée pour d'autres éléments ». Dans cet exemple, les élèves travaillent de fait avec l'énoncé ouvert, alors qu'ils doivent se prononcer sur la valeur de vérité de l'énoncé clos.

La prise en compte des catégories logiques dans les apprentissages en logique ont orienté le choix des items qui figurent dans le questionnaire que nous avons proposés aux élèves et aux étudiants. D'une part, leur identification par les apprenants est importante pour le traitement des problèmes posés, et d'autre part, il est possible, par une analyse fine des réponses de ces élèves et étudiants, d'avoir accès à « la partie cachée de l'iceberg de la conceptualisation » qui pilote les opérations de pensée nécessaires pour traiter certaines classes de situations, et rend les connaissances opératoires.

D'après Vergnaud :

> « La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans le processus de conceptualisation » (Vergnaud, 2001, p.9).

Il pose la nécessité d'établir des relations entre la forme opératoire de la connaissance et sa forme prédicative, celle qui prend la forme de textes, d'énoncés, de traités et de manuels. Dans l'exemple ci-dessus, la forme prédicative « Un contre exemple suffit à invalider un énoncé » cache la co-présence des deux énoncés, clos et ouvert, nécessaire à la mise en œuvre de l'invariant opératoire associé ; de ce fait, la relation entre la forme opératoire et la forme prédicative n'est pas établie explicitement.

1.3. Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance

Qu'une connaissance soit opératoire n'est pas suffisant, elle n'a à ce moment qu'un statut d'outil et son opérationnalité se réduit à des situations qui sont en général connues. En dehors de ces situations, le sujet va certes utiliser ses connaissances pour résoudre le problème posé, mais la réussite n'est pas garantie.

Revenons à l'exercice précédent :

> « Donner l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 20 qui vérifient
> (P) *Si x est pair, alors son successeur est premier.* »

Son traitement consiste en l'évaluation d'implications matérielles comme nous l'avons dit plus haut. Cela renvoie à la table de vérité du connecteur logique *implication* qui n'a pas le même statut que l'implication en œuvre dans (P), qui est une implication ouverte. De même, l'implication contenue dans la proposition universellement quantifiée $\forall x,\ \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ n'a pas non plus le même statut que les deux précédentes : c'est la clôture universelle de l'implication ouverte $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ –écriture formelle de (P), et sa valeur de vérité est déterminée par celle des implications matérielles $\mathcal{P}(a) \Rightarrow \mathcal{Q}(a)$ où a est un élément de l'univers du discours. Durand-Guerrier (1996) dans une étude épistémologique de l'implication, montre la polysémie de cette notion : l'implication ne peut se réduire à la forme « si …, alors… », utilisée dans le langage courant. Le problème qui va se poser pour l'apprenant est d'identifier quelle implication est en jeu.

Le concept d'implication n'est pas un objet d'enseignement. Pour les étudiants qui reçoivent des cours de logique en début d'année, le connecteur logique *implication* noté ⇒ est défini par sa table de vérité et interprété par l'expression « si …, alors … ». Dans le cours de mathématiques, on retrouve l'implication sous la forme « si …, alors, … », et cela concerne surtout les énoncés de théorème et de définition (ouverts ou clos), et sous la forme ⇒ pour marquer des inférences. Nous rappelons que pour un énoncé conditionnel ouvert, l'implication est une extension du connecteur logique ⇒ au calcul des prédicats ; elle n'a pas le même statut que celle qui est contenue dans un énoncé clos.

Les connaissances opératoires et prédicatives sur l'implication présentent des ruptures, et il en est de même des autres concepts comme nous le verrons dans la suite. D'après Vergnaud, ces ruptures peuvent engendrer des difficultés pour les élèves. C'est pourquoi nous soutenons la thèse que les savoirs logiques doivent être explicités et institués.

En accord avec Douady, nous pensons que « officialiser certaines connaissances qui jusque-là n'ont été que des outils, leur donner un statut d'objet, est une condition d'homogénéisation et de constitution d'un savoir de la classe, et pour chacun, une façon de jalonner son propre savoir, et par là d'en assurer la progression. L'enseignant a la charge de donner un statut d'objet aux concepts utilisés dans leur aspect outil ».

Elle a appelé cette opération *phase d « institutionnalisation – statut d'objet »*. Les concepts de logique sont utilisés dans l'activité mathématique comme des outils, et ils sont rarement explicités. Une analyse de la complexité de ces concepts et de la complexité des structures logiques des énoncés mathématiques montre que leur apprentissage ne peut pas être à la charge seule des étudiants. Nous faisons l'hypothèse que, pour que ces derniers puissent les maîtriser, les connaissances relatives aux concepts de logique doivent également passer par les deux dernières phases du processus *dialectique outils-objets* suivantes :

- *phase e « familiarisation-réinvestissement »* qui consiste à résoudre des exercices variés qui nécessitent les notions récemment institutionnalisées. Chemin faisant, les élèves développent des habitudes et savoir-faire ; ils intègrent le savoir social en le confrontant à leur savoir particulier (op. cit., p. 19).

Dans une analyse de manuel que nous avons menée, nous mettons en exergue quelques items susceptibles d'être exploités à cette fin.

- *phase f « complexification de la tâche ou nouveau problème »* qui est la dernière phase de ce processus. Elle consiste à éprouver ces savoirs dans des situations nouvelles, plus complexes que celles qui ont été rencontrées auparavant.

  Le cours de mathématique en début d'université offre une variété foisonnante d'items pour la mise en œuvre de cette phase, du fait de la structure des énoncés, des difficultés inhérentes aux concepts, et du langage utilisé (Chellougui, 2004).

Ces différentes phases de la dialectique outil-objet mettent en évidence un processus de transformation des outils en objets de pensée. Il y a également une dialectique connaissance opératoire/connaissance prédicative qui se dégage de ce processus. En effet, l'utilisation du concept en tant qu'outil lui donne une valeur opératoire, et les différentes phases d'institutionnalisation réalisées aussi bien par les élèves que par l'enseignant le renvoient à sa valeur prédicative. Ces deux aspects des connaissances relatives au concept sont interdépendants. Les connaissances utilisées au départ, suite à une complexification de la tâche sont réajustées, puis explicitées d'abord par les élèves: il y a émergence des règles d'action, elles ont une portée locale. L'enseignant va ensuite institutionnaliser les connaissances, et cette fois les règles deviennent générales. Le concept en œuvre devient un objet de savoir qui est réinvestit dans des exercices en vue de familiariser les élèves avec les nouvelles notions qui sont ensuite éprouvées dans des exercices beaucoup plus complexes où elles reprennent le statut d'outil. Le point de vue dialectique outil-objet permet d'entretenir la dialectique connaissance opératoire/connaissance prédicative tout au long de la scolarité.
Revenant à l'aspect prédicatif de la connaissance, le rôle de l'enseignant en tant que médiateur est fondamental. En effet, le professeur institutionnalise les notions en donnant un cours : « Il « fait le cours » en présentant de manière organisée, structurée les définitions, théorèmes, démonstrations, en pointant ce qui est essentiel et ce qui est secondaire » (Douady, 1986, p. 19). Mais auparavant, ces notions ont servi d'outil aux élèves, ce qui leur a permis d'énoncer des résultats empiriques qui sont formulés en termes d'objet ou de pratique, avec leurs conditions d'emploi du moment. Tout cela est le résultat de la conceptualisation, processus cognitif à la base de l'action du sujet : « les situations d'action sont la première source de conceptualisation, au moins en ce qui concerne les concepts scientifiques et techniques à l'apprentissage desquels l'écolier est convié » (Vergnaud, 2000, p. 82). En outre, on ne saurait parler de conceptualisation sans prendre en compte l'importance du langage dans ce processus ; « la conceptualisation est une condition de l'énonciation. En

retour l'énonciation apporte à la conceptualisation une contribution décisive » (Vergnaud, 2001, p. 12). L'énonciation est faite à l'aide des signes du langage, et leur signification n'est pas figée, elle se développe.

2. Le rôle du langage dans le processus de conceptualisation : signifiant/signifié

> « C'est un travail théorique et empirique indispensable que de clarifier la fonction du langage et des autres signifiants. Dans la théorie des champs conceptuels, cette fonction est triple :
> - Aide à la désignation donc à l'identification des invariants : objets, propriétés, relations, théorèmes ;
> - Aide au raisonnement et à l'inférence
> - Aide à l'anticipation des effets et des buts, à la planification et au contrôle de l'action. » (Vergnaud, 1991, p. 159)

Nous nous intéressons surtout au langage comme aide à la désignation et comme aide au raisonnement et à l'inférence, ce qui est en rapport avec notre problématique comme nous le montrons dans la suite.

La première fonction qu'on reconnait au langage est celle de communication. Dans la classe de mathématiques, on distingue deux types de discours : le discours oral qui est tenu en grande partie par l'enseignant, et le discours écrit qui apparait sous forme de cours à relever, d'exercices traités par l'enseignant ou par les élèves, de devoirs. Le discours oral est constitué des mots de la langue, et le discours écrit, en plus des mots de la langue, contient des symboles dont l'utilisation a surtout cours à l'université, où le formalisme est introduit en première année. Les apprenants sont confrontés d'une part au langage naturel dont la pratique est un exercice courant et, d'autre part, au langage mixte ou formel dont ils n'ont pas toujours la maîtrise. Il faut noter que lorsqu'un énoncé est écrit en langage symbolique, si on veut en parler, on utilise le discours oral. Le langage naturel utilisé dans le cadre mathématique demande une clarification de la signification des mots qui désignent des concepts logiques. C'est par exemple le cas de la *négation* qui s'identifie à la forme négative, et de *l'implication* qui est réduite à la seule forme « *si … alors…* » dans le langage courant. Cette clarification doit également être faite pour les symboles et leur syntaxe.

2.1. Importance des représentations langagières

La désignation, donc l'identification des invariants relève de la fonction de représentation du langage. Un invariant peut avoir plusieurs représentations langagières qui peuvent ne pas être toutes équivalentes pour les étudiants. En effet, deux écritures peuvent avoir la même signification, c'est-à-dire qu'elles sont vraies des mêmes objets et fausses des mêmes objets, mais le sens est différent. Le mot *sens* est pris ici selon Vergnaud (1991). Il le définit comme « une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constitue le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu » (p. 158). Il précise qu'une situation ou un symbolisme particulier n'évoque pas chez un individu tous les schèmes disponibles. Une difficulté pour l'étudiant est de pouvoir établir des liens entre les différentes représentations. Nous avons choisi deux exemples pour illustrer la variabilité des représentations langagières et les difficultés qu'elle engendre :

<u>Exemple 1</u> : Expression de la propriété *être constante* dans le cas des fonctions.

Soit f une fonction définie sur un ensemble non vide E à valeurs dans un ensemble non vide F, on a les définitions suivantes :

- f est constante sur E si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x) = f(y)$ (a)
- f est constante sur E si et seulement si $\exists a \in E$ tel que $\forall x \in E, f(x) = a$ (b)

Les deux définitions ont la même signification : f est une fonction constante. Mais conceptuellement, il y a une différence entre voir que la fonction est constante dans le sens où il existe une valeur commune pour toutes les images (c'est le cas (b)), et voir que la fonction est constante dans le sens où deux éléments quelconques de E ont la même image (c'est le cas de (a)). L'interprétation (a) de la définition peut même avoir une formulation orale ambigüe, à savoir, *les images des éléments de E sont deux à deux égales* (voir Durand-Guerrier, 2011). Le passage de (a) à (b) et réciproquement, doit pouvoir être établi par les étudiants : la définition (a) contient deux quantificateurs universels, et la définition (b) contient un quantificateur existentiel et un quantificateur universel. Le passage de (b) à (a) ne pose pas de réel problème, mais le passage de (a) à (b) peu être problématique dans la mesure où on doit introduire la valeur constante de la fonction à l'aide du quantificateur existentiel. Par ailleurs chacune de ces définitions est utilisée pour des situations bien précises.

<u>Exemple 2</u> : Caractéristique de la borne supérieure.

Nous présentons trois énoncés issus de Chellougui (2004), qui caractérisent l'objet mathématique *borne supérieure*, qui est comme elle l'a montré, un objet complexe. Sa définition fait appel à des propriétés de structures.

1) « Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ et $A \subset E$. On appelle borne supérieure de A dans E, le plus petit des majorants de A dans E s'il existe ; cet élément est noté $Sup_E(A)$ ou $Sup(A)$. » (pp. 192-193)

2) « Sur la droite réelle $\mathbb{R}$ munie de sa relation d'ordre naturelle, toute partie majorée non vide a une borne supérieure. […] La borne supérieure M[20] d'une partie majorée A est caractérisée par les relations :

- Pour tout $x \in A, x \leq M$

  et

- Quel que soit $M_1 < M$, il existe au moins un $x \in A$ tel que $M_1 \leq x \leq M$. » (p. 191)

3) « Si $M = sup_A$[21], M possède les deux propriétés suivantes :

   $\forall x \in A, x \leq M$

   $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; x > M - \varepsilon$ » (p.189), sup_A désignant ici la borne supérieure de l'ensemble A.

Dans le premier énoncé, la caractérisation de la borne supérieure est donnée en langage courant, dans le second en langage mixte, et dans le troisième, en langage formel. Ces trois formulations renvoient à des points de vue bien différents. Dans la première formulation, on a un point de vue ensembliste : on se situe dans l'ensemble de majorants de A et on en prend le plus petit élément (E ici est un ensemble quelconque muni d'une relation d'ordre). Mais cette définition n'est pas suffisante pour le traitement des situations relatives au concept, car en général elle n'est pas opératoire.

Dans les deux autres formulations, le référentiel est l'ensemble des nombres réels muni de l'ordre naturel. La deuxième formulation exprime qu'il existe toujours un élément de A inséré entre M et tout réel plus petit que M, ou encore, tout réel M_1 plus petit que M n'est pas un majorant de A. Tandis que la troisième formulation traduit le fait qu'il est possible d'approcher d'aussi près que l'on veut le réel M par un élément de l'ensemble A, ce qui renvoie dans une certaine mesure à la notion de limite.

Le passage d'un énoncé à l'autre demande que soit réalisé de la part de l'étudiant un saut conceptuel qui ne va pas de soi ; la maîtrise de ces trois énoncés est cependant nécessaire pour une appropriation adéquate du concept à l'université.

Ces deux exemples illustrent l'importance a priori des formes langagières dans le processus de conceptualisation. L'identification des invariants permet de générer des schèmes en situation de résolution de problème. Plusieurs schèmes peuvent être disponibles chez un individu, mais la difficulté réside dans le choix de celui qui est opératoire pour la situation. Nous convenons avec G. Vergnaud qu'un concept ne peut être réduit à sa définition, car en

[20] Pour des raisons de cohérence, nous avons remplacé b dans le texte initial par M

[21] Pour les mêmes raisons que précédemment, nous avons remplacé E dans le texte initial par A.

général la définition n'est pas opératoire. Les expressions d'un concept dans des formes langagières différentes font ressortir les subtilités cachées par le langage naturel. Elles participent ainsi de l'explicitation du concept, donc de sa compréhension et de son traitement. Notre partie expérimentale mettra en évidence cette importance.

2.2. Le langage comme aide au raisonnement

Les signifiants et l'organisation du discours jouent un rôle important dans l'activité mathématique. L'énonciation peut aussi bien être interne qu'externe. Or toute activité externe est conditionnée par une activité cognitive interne basée sur le langage. Il modifie le comportement du sujet, sa relation à l'objet.

Comme nous l'avons vu précédemment, le langage permet d'identifier les signifiants. Du point de vue de G. Vergnaud, ces signifiants renvoient à plusieurs signifiés en fonction de la situation à traiter. C'est la fonction du langage de sélectionner les éléments pertinents pour la situation, de les organiser, et d'élaborer un plan en vue de résoudre le problème posé. Le langage accompagne les résolutions des situations nouvelles, notamment lorsque ces résolutions appellent des conceptualisations nouvelles. Nous proposons un exemple de l'activité langagière comme aide au raisonnement dans ce qui suit : il s'agit d'une séquence extraite du module de suivi des étudiants de première année de mathématiques de l'École Normale Supérieure de Yaoundé au Cameroun, que nous avions organisé au mois de janvier 2010. L'item et les éléments d'analyse logique que nous proposons dans les commentaires qui vont suivre sont extraits de Durand-Guerrier[22] (1996, p. 151-152). L'item figure parmi les exercices du questionnaire que nous avons proposé aux élèves et étudiants. Le problème posé était le suivant :

Dans ce qui suit, (u_n) *désigne une suite définie par récurrence sous la forme «* $u_{n+1} = f(u_n)$ *», où* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*. On a alors le résultat suivant :*

> **(P1)** « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »
> *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite* (u_n) *si l'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*

L'item (P1) est la première question d'une série de quatre questions. Ces questions visent à vérifier si les étudiants savent dans quels cas on peut faire une inférence, et dans quels cas on ne le peut pas.

---

[22] Nous avons modifié l'antécédent de l'item ; chez Durand-Guerrier, il est « Si la suite (u_n) converge vers un réel l, alors, l est solution de l'équation $f(x) = x$ »

Pour répondre à cette question, l'étudiant doit pouvoir mobiliser le Modus Tollens, ou être en mesure de construire la contraposée de (P1). Une analyse de la structure logique de cet énoncé menée par Durand-Guerrier (1996), que nous reprenons ci-dessous et dans les analyses a priori des questionnaires, montre qu'elle est assez complexe et difficilement accessible à l'étudiant. De ce fait il n'est pas avéré qu'il puisse construire correctement sa contraposée.

Nous avons enregistré les discussions d'un groupe formé de quatre étudiants que nous avons appelés **E5**, **E6**, **E7** et **E8**. Ces étudiants doivent répondre à la question posée et justifier leur réponse.

Évidence de la réponse pour **E5** :

> **1 E5** : **si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution**, on déduit de manière immédiate que f n'est pas convergente. Parce que si l'on essaie de regarder la … la réciproque … la contraposée de si f est convergente, sa limite est solution de $f(x) = x$, heuuu, non, attendez un peu
>
> **2 E7** : oui, la contraposée ; si elle est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. La contraposée ça sera quoi ?
>
> **3 E5** : Regarde un peu, analysons un peu ça. Si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, cela veut dire qu'on ne peut pas trouver un élément tel que, qui puisse vérifier $f(x) = x$, par conséquent, la limite de la suite, la limite de u_n ne peut pas exister, puisqu'il n'existe aucun élément x tel que $f(x) = x$. Et il n'existe pas d'élément dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = x$, n'est ce pas, on peut déduire quoi ? Puisque si une suite est convergent, alors sa limite appartient à $\mathbb{R}$. Et comme maintenant ici on dit « si la suite u_n est convergente, alors sa limite est solution de l'équation-là », c'est automatique. Et si maintenant cette fonction-ci n'a pas de solution, il parait très évident que la suite n'est pas convergente. Mon problème maintenant est le suivant : si on voit bien la négation de cette proposition-ci, on dit « si la suite u_n est convergente et sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$ », elle est bel et bien fausse. Puisqu'il y a certains résultats qui en découlent. Si elle est fausse n'est ce pas, sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$, cela veut dire que si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, c'est-à-dire que si ceci n'a pas de solution, on ne peut pas avoir u_n convergente. Puisque regarde, la négation-ci est fausse. Si on connaissait la négation, si la suite u_n était convergente …, la suite u_n convergente et sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$.

E5 est convaincu que sa réponse –la suite ne converge pas– est correcte. Par une succession d'arguments, il essaie d'élaborer un raisonnement pour expliquer sa position.

« Si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, cela veut dire qu'on ne peut pas trouver un élément tel que, qui puisse vérifier $f(x) = x$ »: **E5** reformule « $f(x) = x$ n'a pas de solution », il en donne un signifié.

« par conséquent, la limite de la suite, la limite de u_n ne peut pas exister, puisqu'il n'existe aucun élément x tel que $f(x) = x$ » : L'étudiant reprend sa réponse sous la forme d'une conclusion à la reformulation qu'il a faite. Jusque-là, il n'y a aucun éclaircissement de sa réponse, il fait juste une paraphrase.

« Et il n'existe pas d'élément dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = x$, n'est ce pas, on peut déduire quoi ? » : il revient sur le problème qui leur a été posé.

« Et si maintenant cette fonction-ci n'a pas de solution, il parait très évident que la suite n'est pas convergente. » : partant du résultat (P1) qui est énoncé ci-dessus, **E5** répète sa réponse en précisant que cela parait *très évident*. Mais son argumentation montre qu'il a du mal à expliciter les raisons de cette évidence.

« Mon problème maintenant est le suivant : si on voit bien la négation de cette proposition-ci, on dit « si la suite u_n est convergente et sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$ », elle est bel et bien fausse. » : il utilise maintenant la négation qui est mal énoncée, et dont il déclare la fausseté.

« Si elle est fausse n'est ce pas, sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$, cela veut dire que si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, c'est-à-dire que si ceci n'a pas de solution, on ne peut pas avoir u_n convergente. » : il y a encore une reprise de la réponse sans justification. La négation qui est évoquée, et même énoncée (sans toutefois être correcte) ne sert pas à l'étudiant.

« Puisque regarde, la négation-ci est fausse. Si on connaissait la négation, si la suite u_n était convergente …, la suite u_n convergente et sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$. » : cette fois, il énonce correctement la négation. La négation que les étudiants produisent, montre qu'ils ont identifié un énoncé conditionnel.

> **4 E7** : sa limite n'est pas solution de l'équation
>
> **5 E5** : $f(x) = x$. Elle est fausse. Tu vois un peu, donc cela me parait un peu clair dans ma tête que si, que la position 6.1, donc, si $f(x) = x$ n'a pas de solution, alors u_n n'est pas convergente. Moi, ça me parait très clair.
>
> **6 E7** : Continuons

7 E5 : Le problème n'est pas de continuer, c'est que c'est clair

8 E7 : Il faut justifier

9 E5 : Tu justifie cela comment ? C'est ça le problème !

10 E7 : Il faut justifier.

11 E5 : on va justifier cela comment ?

Ces échanges montrent que **E5**, bien que convaincu que sa réponse est correcte, n'arrive pas à la justifier. Toute l'argumentation développée au dessus n'a pas réussi à convaincre ses camarades. En **8**, **E7** demande à **E5** de justifier sa réponse.

Les séquences de 5 à 11 traduisent l'indisponibilité du Modus Tollens chez l'étudiant **E5** sous sa forme prédicative. Cette règle d'inférence est une connaissance-en-acte chez cet étudiant, ce qui lui a permis de produire sa réponse.

Du fait de l'indisponibilité du Modus Tollens même chez les étudiants, ils sont obligés d'introduire un nouvel outil : la contraposée. Il y a une modification du comportement des étudiants par rapport à la construction de la preuve.

12 E6 : Si la suite u_n est convergente, alors sa limite est

13 E5 : est solution de l'équation $f(x) = x$.

14 E6 : donc dire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution

15 E7 : moi je vois que ça c'est au niveau de la contraposée. On dit bien « si la limite… », la contraposée va dire que quoi ? « Si la limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$, lors u_n n'est pas convergente. Or quand on dit que $f(x) = x$ n'a pas de solution, ça veut dire que même la limite-là ne sera pas solution de l'équation $f(x) = x$

E7 essaie d'énoncer la contraposée de l'énoncé (P) « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* ».

16 E5 : et par conséquent $f(x) = x$ n'est pas convergente

17 E7 : par conséquent u_n n'est pas convergente.

18 E5 : u_n n'est pas convergente

19 J : Vous dites que si la limite

20 E7 : La contraposition

21 J : Oui. La dernière phrase que tu as dite c'est quoi ? Si la limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$

22 E7 : puisqu'on a dit ici, $f(x)$ n'est ce pas, égal à x n'a pas de solution, donc ça veut dire que même la limite, si bien, donc même la limite de u_n si bien elle existe

23 J : Si tu dis « même la limite », ça suppose qu'elle est convergente. Ça suppose que la suite peut être convergente. Si tu parles de la limite, ça veut dire que tu supposes que la suite peut converger

24 E7 : Non, pas la limite

Suite à l'intervention de l'enseignant qui fait une remarque sur l'existence de la limite, **E7** va essayer avec les autres de reformuler la contraposée.

25 E5 : et la contraposée est très claire ! la contraposée dit « si la limite de la suite u_n

26 E7 : n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$

27 E6 : Il y a un problème, parce que, quand il a dit « si la limite »

28 E7 : Oui, c'est ça que je dis !

29 E6 : ça veut dire que la limite existe mais elle n'est pas solution. Mais la contraposition sera donnée, parce que dès que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution

30 E6 : Non, non, non …

31 E7 : Dès que l'équation $f(x) = x$

32 E5 : il y a un problème, il y a un problème. Non, dans la contraposée, je ne pense pas qu'on ait utilisé le mot *limite*.

33 E7 : Attend, on dit, la contraposée c'est

34 E5 : Je ne pense pas que le mot *limite* puisse être dedans

Les étudiants sélectionnent les éléments pertinents, et organisent leur discours.

35 E7 : la contraposée sera quoi ?

36 E6 : parce que la limite doit d'abord exister. Elle doit d'abord exister. Parce que si on dit la limite, si tu dis maintenant que

37 E5 : Heuu, si la limite, si la limite de la suite u_n est solution de, c'est-à-dire que,

38 E6 : si la limite, elle existe déjà, tu vois un peu, elle existe déjà

39 E5 : et dire après que la suite u_n est non convergente, ça n'a pas de sens. Tu me suis, donc moi je me dis maintenant que comme contraposée on doit dire que, si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors la suite n'est pas convergente. Moi je me dis que c'est ça la contraposée. Parce que dès lors que l'on met le mot limite, ça crée comme une sorte de quiproquo, on ne comprend plus rien.

40 E7 : tu es d'accord E6 ?

41 E6 : je suis d'accord.

Il apparait ici que le mot *limite* est un obstacle à la formulation de la contraposée. Il n'apparait de façon explicite que dans le conséquent et est implicite dans l'antécédent[23]. **E5** énonce donc la contraposé en l'excluant. Cette formulation semble satisfaire les autres membres du groupe.

La formulation de **E5** est correcte. En effet, la paraphrase de (P1) est :

« Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite l est un point fixe de f ».

L'écriture formelle de cette phrase dans le calcul des prédicats est :

$$(S(u,f)\wedge C(u,x) \Rightarrow F(f,x)^{24} \text{ (P1')}$$

S est la relation qui traduit que les termes de la suite u sont définis par

$$\forall n, u(n+1) = (f \circ u)(n)$$

$C(u,x)$ s'interprète par « la suite u a pour limite x » ;

$F(f,x)$ s'interprète par « x est un point fixe de f ».

Le théorème général associé à (P1) est :

$$\forall u, \forall f, \forall x, ((S(u,f)\wedge C(u,x) \Rightarrow F(f,x)) \text{ (P1'')}$$

u est pris dans l'ensemble des suites numériques, f dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et x dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

La contraposée de (P'') est :

$$\forall u, \forall f, \forall x, \neg F(f,x) \Rightarrow \neg(S(u,f)\wedge C(u,x))$$

C'est une proposition qui est vraie.

Si $\neg F(f,x)$ –qui s'interprète par x n'est pas un point fixe de f– est vrai, alors, $\neg(S(u,f)\wedge C(u,x)$ suit nécessairement. Or, $\neg(S(u,f)\wedge C(u,x)$ est logiquement équivalent à $\neg S(u,f)\vee\neg C(u,x)$. Comme $\neg S(u,f)$ est un énoncé faux du fait de la définition de la suite u, $\neg C(u,x)$ suit nécessairement. Au total on a exprimé dans le langage naturel :

> « *Si la fonction f n'admet pas de point fixe, alors la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ ne converge pas* ».

Ou encore

---

[23] Une analyse a priori de cet énoncé est présenté dans Durand-Guerrier (1996), où la formalisation de l'énoncé fait ressortir la variable *limite* dans l'antécédent.

[24] Une analyse logique du théorème général associé à (P1) se trouve dans Durand-Guerrier (1996). Nous en avons pris quelques extraits. Nous reprendrons de façon plus complète cette analyse dans les analyses a priori des exercices du questionnaire.

« *Si l'équation* $f(x) = x$ *n'admet pas de solution, alors la suite* u *définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$ *ne converge pas* ».

La construction de la contraposée n'est pas aussi simple pour les étudiants, comme on a pu le constater dans les séquences **26** à **38**. Le mot *limite* pose un problème que les étudiants ont surmonté en l'évacuant de la formulation qu'ils ont proposée. Si nous revenons à la formulation de la contraposée à la séquence **15** :

> « Si la limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$, alors u_n n'est pas convergente. »

Cette contraposée s'interprète ainsi :

> « Si la limite de la suite u_n n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$, alors la limite de u_n n'existe pas dans $\mathbb{R}$ ».

parce que la convergence d'une suite renvoie à l'existence de la limite. Cet énoncé est une anaphore, et en même temps une contradiction ; dans son antécédent la suite u_n a une limite, et dans le conséquent, cette limite n'existe pas.

Les étudiants auraient pu faire l'économie des séquences **15** à **39**. En effet, le Modus Tollens leur permettait de conclure à la divergence de la suite (u_n). Cette règle d'inférence s'énonce ainsi dans le calcul des propositions :

$$P \text{ et } Q \text{ étant deux propositions, } ((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

Dans le calcul des prédicats, le Modus Tollens permet de faire l'inférence suivante :

$$\text{Si } \forall x \left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \text{ et } \neg Q(a), \text{ alors } \neg P(a),$$

a désignant un élément de l'univers du discours.

On a bien :

> « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* » qui est vrai ;
>
> « l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution » qui est vrai ;

De ces deux énoncés, on peut conclure que :

> « la suite (u_n) ne converge pas ».

Le coût cognitif de l'utilisation de la contraposée est très élevé par rapport à ce que demande l'utilisation du Modus Tollens.

Dans cette séquence, on est parti de ce qu'on pourrait appeler un monologue de **E5** en **3**. Ce dernier essayait de trouver une justification de la réponse qu'il a proposée, mais son argumentation le conduit à énoncer trois fois sa réponse :

Si l'équation « f(x)=x » n'a pas de solution, alors la suite (u_n) *ne converge pas*

en guise de conclusion à son discours : deux fois par des paraphrases et une fois en introduisant la négation qui ne lui est d'aucun secours. Conscient de n'avoir pas convaincu ses camarades par son discours, il va contribuer, suite à l'intervention de **E7** en **15**, à construire la contraposée de l'énoncé (P) donné en résultat en début d'exercice.

Nous avons présenté une séquence dans laquelle les étudiants essaient de justifier une réponse que l'un d'eux a produite. Ce dernier a utilisé le Modus Tollens comme règle d'action pour répondre. Mais le fait que chez cet étudiant la forme prédicative de cette règle n'est pas disponible provoque une discussion et en même temps une réflexion sur le moyen de justifier la réponse.

La construction de la contraposée a permis d'exhiber une difficulté due au langage utilisé : l'évacuation du mot *limite* dans l'antécédent de la contraposée à cause de la contradiction générée par le phénomène d'anaphore.

Conclusion du chapitre 1

L'enseignement et l'apprentissage des concepts de logique sont des activités qui relèvent des compétences complexes. Les concepts en eux-mêmes sont des objets complexes comme le montrent les études épistémologiques y relatives, et de plus, leur utilisation dans l'activité mathématique comme outil est complexe. Notre thèse étant que pour les rendre opératoires, un minimum d'explicitations en relation avec l'activité mathématique est nécessaire, les champs conceptuels et la dialectique outils/objets offrent un cadre idoine pour étudier cette question. En effet, un concept ne se réduisant pas à sa définition, nous soutenons l'élaboration pragmatique des connaissances relatives au concept : c'est en situation de résolution des problèmes qu'un concept prend du sens pour le sujet, c'est-à-dire, génère un ensemble de schèmes, ces schèmes pouvant être ou non opératoires. L'analyse des schèmes permet de mettre en évidence les éléments sous-jacents à l'action du sujet, en particulier, les invariants opératoires contenus dans les schèmes, car ils pilotent la reconnaissance des éléments pertinents à la situation.

Pour les apprentissages, on doit établir des liens entre la forme opératoire des connaissances et leur forme prédicative. En effet, faire et réussir ne suffit pas selon Vergnaud, car le concept a un statut d'outil et son opérationnalité se réduit aux situations connues. Il doit être transformé en objet d'étude d'après R. Douady, et cela passe par différentes étapes au cours desquelles la dialectique connaissance opératoire/connaissance prédicative se dégage.

On ne saurait faire l'impasse sur le rôle du langage ici qui a d'abord une fonction d'identification. Le langage permet de désigner les signifiants, de représenter les signifiés de la langue. Il permet également de mettre en mots les opérations de pensée, de structurer et d'accompagner l'activité, en bref, d'aider le sujet en activité à construire un raisonnement.

Tous ces éléments mis en exergue vont nous permettre de rentrer dans l'activité du sujet afin de pouvoir l'analyser et déceler éventuellement les continuités et les ruptures relatives aux concepts sur lesquels nous avons choisi de travailler.

CHAPITRE 2 : Les questions de logique à la transition lycée-université

Introduction

Les questions de logique à la transition lycée-université se posent avec acuité. En effet, dans l'introduction, nous soulignions le fait que plusieurs travaux en didactique des mathématiques –travaux dont nous ferons une revue dans la suite de notre travail– ont montré l'importance de la maîtrise de l'outil logique pour bien mener l'activité mathématique.

Dans l'enseignement secondaire au Cameroun, l'enseignement de la logique est quasi absent des programmes : les instructions officielles et les commentaires qui accompagnent les programmes sont muets sur l'enseignement des concepts de logique. Ce n'est pas le cas dans l'enseignement supérieur, où un cours de logique est dispensé en début d'année. Les concepts qui y sont développés ne sont pas toujours en adéquation avec l'utilisation qui en est faite dans le cours de mathématiques : le cours de logique porte principalement sur la logique propositionnelle, et la quantification y est introduite de façon très élémentaire. On se contente le plus souvent de quelques rappels mettant l'accent presque exclusivement sur les aspects syntaxiques et sur les règles opératoires. Pourtant, à ce niveau d'étude, il est nécessaire de prendre en compte la complexité grandissante des énoncés et les difficultés engendrées par l'introduction du formalisme, du fait que le langage utilisé dans le secondaire est majoritairement le langage naturel. Nous avons fait ressortir ces deux aspects pour le cas de la négation, dans notre mémoire de Master[25], à la suite d'une analyse de deux cours d'Analyse I de première année d'université[26] de la filière mathématiques. Dans notre travail de thèse, nous avons centré notre étude sur trois connecteurs logiques à savoir la négation, l'implication, l'équivalence, et sur les quantificateurs dont l'usage est problématique (Chellougui, 2004).

Dans ce chapitre, nous présentons au paragraphe 1 quelques éléments fondamentaux de la logique du premier ordre, en mettant l'accent sur les concepts que nous étudions. Cela nous permet de bien préciser le vocabulaire de la logique et de définir un cadre d'analyse pour notre travail.

L'étude de ces concepts met en évidence une complexité inhérente au concept lui-même, et de ce fait, une complexité dans son usage en mathématique. Nous développons ces deux niveaux de complexité au paragraphe 2 de ce chapitre.

[25] Comment enseigner les concepts logiques en première année d'université : cas de la négation

[26] Les cours de Guy Laffaille en ligne sur le site de l'université de Montpellier 2, et de Sylvie Benzoni en ligne sur le site de l'université Lyon 1.

1. La logique en œuvre dans l'activité mathématique

Plusieurs auteurs ont contribué au développement des concepts de logique, en rapport avec l'activité mathématique. Nous les présentons brièvement en nous inspirant d'une part de l'enquête que Viviane Durand-Guerrier a réalisée dans sa thèse de doctorat[27], et d'autre part, de sa note de synthèse[28].

1.1. Brève synthèse de quelques travaux sur la logique

L'origine de la logique remonte à l'Antiquité avec les travaux d'Aristote contenus dans un traité, *l'Organon*, les travaux des Mégariques, des Stoïciens, etc... L'importance de ces travaux a été reconnue par les logiciens qui ont été à l'origine du renouveau de la logique à la fin du XIX° siècle et au début du XX° siècle, en particulier les auteurs ayant contribué au développement de la logique contemporaine du premier ordre. Notre synthèse portera essentiellement sur quelques auteurs de cette période.

Nous partons des travaux de Gottlob FREGE (1879) pour qui seule l'inférence est l'objet de la logique. Il assigne à la logique l'étude du passage du vrai au vrai. Son projet était de rénover la logique afin d'atteindre une parfaite rigueur dans les raisonnements mathématiques, ceci en fournissant le critère le plus sûr de la validité d'une chaîne d'inférences. En effet, le fait que les raisonnements mathématiques s'expriment dans le langage courant, rend difficile le contrôle de la validité des inférences. Il propose ainsi une idéographie dont le premier objectif est de « fournir le critère le plus sûr de la validité d'une chaîne d'inférences et de nous permettre de remonter à la source de tout ce qui y restait implicite […]. Cette idéographie, destinée avant tout aux mathématiques, complète le langage mathématique (c'est-à-dire les formules) au moyen de signes conçus pour les rapports logiques » (Durand-Guerrier, 1996, p. 23).

Dans cette idéographie Frege distingue l'expression d'un contenu de jugement et marque par des signes l'affirmation de la justesse et de la fausseté d'un contenu de jugement. Dans le symbolisme qu'il propose, pour mettre en relation deux contenus de jugement A et B, Frege considère quatre cas dont « non A et B » dont il définit un signe pour la négation :

[27] Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication, *Université Claude Bernard- Lyon 1 (1996)*

[28] Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, *Université Claude Bernard-Lyon 1 (2005)*

Il appelle ce signe « le trait d'implication », qui correspond à l'implication usuelle notée en logique $B \supset A$ qui est la traduction de « si B alors A ». C'est la négation de « B et non A », c'est-à-dire « non (B et non A) ». Elle est définie de manière vérifonctionnelle[29].

Aux énoncés de la forme « si A, alors B », il associe les règles d'inférence du *Modus Ponens* et *de transitivité d'antécédent à conséquent* sous les formes respectives :

« $(si\ B, alors\ A)\ est\ vrai$ et « $(si\ C, alors\ B)\ est\ vrai$

$B\ est\ vrai\ ;\ donc$ $(si\ B, alors\ A)\ est\ vrai\ ;\ donc$

$A\ est\ vrai$ » $(si\ C, alors\ A) est\ vrai$

Frege affirme la différence fondamentale entre une inférence et l'affirmation du conditionnel. En effet, il dit la chose suivante :

> «Plus d'un mathématicien s'exprime comme si l'on pouvait tirer des conséquences d'une pensée dont la vérité est encore douteuse. Quand je dis « j'infère A de B » ou « je conclus de B la vérité de A », on entend par B une des prémisses ou l'unique prémisse de l'inférence. Mais tant que l'on n'a pas reconnu la vérité d'une pensée, on ne peut pas l'employer comme prémisse d'une inférence, on ne peut rien en inférer ni conclure. Y prétendre, c'est confondre comme on s'en rendra aisément compte la reconnaissance de la vérité d'une composition hypothétique et une inférence où l'on prend la condition de la proposition composée pour prémisse. Or reconnaitre que le sens de
>
> « Si C, alors A »
>
> est vrai, cela peut être le fruit d'une inférence, comme dans le dernier exemple ci-dessus, mais il n'est pas dit que C lui-même soit vrai » (in Durand-Guerrier, 1996, p.27)

En outre, la quantification y est prise en compte : affirmer un jugement dans une expression comportant une indéterminée, c'est affirmer la vérité de l'énoncé universel.

Concernant la négation, Ben Kilani (2005), souligne le fait que les ostensifs utilisés permettent de distinguer sans ambiguïté l'opposition par contrariété qui correspond au contraire, et l'opposition par contradiction qui correspond à la négation :

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\smile\!-$ $\Phi(a)$ exprime que tout a possède la propriété Φ (1)

$\vdash\!\!\!\top\!\!-\!\smile\!-$ $\Phi(a)$ exprime que certains a ne possèdent pas la propriété Φ, c'est-à-dire la négation de (1) ;

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\smile\!\top$ $\Phi(a)$ exprime que tout a possède la propriété non Φ, ou encore, aucun a ne possède la propriété Φ. C'est le contraire de (1)

---

[29] La vérité de $B \supset A$ est fonction des valeurs de vérité de A et de B.

L'idéographie permet donc à la fois de traduire des relations entre propositions et d'exprimer des relations faisant intervenir la quantification.

Bertrand RUSSELL (1903, 1910) a tenté sans succès de fonder toutes les mathématiques sur la logique. Toutefois, son œuvre logique reste très importante : d'une part, le symbolisme qu'il a introduit est celui en vigueur aujourd'hui et, d'autre part, l'introduction de la notion de fonction propositionnelle a ouvert la voie au calcul des prédicats qui constitue une théorie formelle de la quantification.

Russell marque la distinction fondamentale entre proposition et fonction propositionnelle :

> « Une proposition est tout ce qui est vrai ou faux. Une expression telle que « x est un homme » n'est par conséquent pas une proposition, car elle n'est ni vraie, ni fausse. Si nous donnons à x une valeur constante, l'expression devient une proposition. » (op. cité p.31)

À partir des notions de variable apparente[30] et variable réelle[31], il définit les fonctions propositionnelles qui sont des énoncés « là où il y a une ou plusieurs variables réelles et où pour toutes les valeurs des variables, l'expression concernée est une proposition. » (Durand-Guerrier, 1996, p.31).

Dans son ouvrage *Les Principia Mathématica (1910*), le calcul propositionnel contient de nombreuses avancées. Il définit quatre fonctions des propositions ; la fonction contradictoire qui correspond à la négation, la fonction disjonctive qui correspond à la disjonction, la fonction conjonctive qui correspond la conjonction et la fonction implicative qui correspond à l'implication et qu'il appelle *implication matérielle*. Les fonctions conjonctive et implicative sont définies à partir des fonctions disjonctive et contradictoire :

La fonction conjonctive : $(P \wedge Q) \equiv non(non\ P \vee non\ Q)$

La fonction disjonctive : $(P \Rightarrow Q) \equiv non(nonP \vee Q)$

Il définit également les valeurs de vérité d'une proposition et affirme le caractère vérifonctionnel[32] de son système qu'il complète en introduisant des propositions primitives qui représentent en quelque sorte des axiomes, comme chez Frege.

Russel introduit l'implication universellement quantifiée entre fonctions propositionnelles, qu'il appelle *l'implication formelle*. La quantification universelle notée « quel que soit *x* » dans son ouvrage les *Principes de la mathématique(1903)*, est remplacée par le symbole *(x)* dans *Les Principia Mathématica,* où le symbole $\exists x$ qui signifie « il existe un *x* » apparait.

[30] Variable qui est liée au quantificateur universel.

[31] Appelée encore variable libre.

[32] La valeur de vérité d'une proposition complexe dépend uniquement des propositions élémentaires (inanalysables) qui la composent

Par ailleurs, la contradictoire de la fonction propositionnelle symbolisée par Φx est la fonction notée ¬ Φx, qui pour chaque valeur de x est vraie si Φx ne l'est pas, et vice versa.
Russell insiste sur la nécessité de ne pas confondre l'énoncé (x) ¬ Φx et l'énoncé ¬ (x)Φx, seul le deuxième exprimant la négation de l'énoncé (x) Φx.

Ludwig WITTGENSTEIN (1921)[33], dans le *Tractatus logico-mathématica*, construit un système formel dont l'élément de base est la variable propositionnelle, et dans lequel il n'introduit pas d'axiome. Il introduit deux principes : le principe de bivalence qui consiste en ce que les variables propositionnelles peuvent prendre les valeurs de vérité Vrai ou Faux, et le principe d'extentionalité ou de vérifonctionnalité. Il définit les différents connecteurs logiques par leur table de vérité. Le principe d'extentionalité va lui permettre de déterminer la valeur de vérité d'une proposition complexe. Ceci va conduire Wittgenstein à distinguer deux catégories extrêmes de propositions complexes : les tautologies qui sont vraies pour toute distribution des valeurs de vérité des propositions élémentaires, et les contradictions qui sont fausses pour toute distribution des valeurs de vérité des propositions élémentaires. Il peut alors se passer d'axiome, puisque les théorèmes de logique sont des tautologies. Dans le système formel qu'il construit, les tautologies, plus particulièrement celles du type $P \supset Q$ où P et Q ne sont pas toutes les deux des propositions élémentaires du système formel, jouent un rôle important ; elles permettent de valider une inférence. Il marque bien dans le calcul propositionnel qu'il construit, la différence entre vérité d'une proposition donnée dans une interprétation et vérité d'une proposition dans le calcul des propositions, qui correspond à la validité. Cette clarification entre vérité et validité, très précise dans le calcul propositionnel n'est pas faite dans le calcul des prédicats. Mais on sait que le calcul des propositions ne permet pas de rendre compte de certaines situations en mathématiques.

TARSKI (1936a, 1936b, 1944)[34] : son projet était de construire une définition de la *vérité* qui soit matériellement adéquate[35] et formellement correcte. Son étude concerne les langages des sciences déductives formalisées. Il introduit le concept de *satisfaction d'une fonction propositionnelle par un élément de l'univers du discours*, ayant constaté que « les propositions complexes ne sont pas des agrégats de propositions plus simples », mais « (…) sont obtenues à partir des fonctions propositionnelles dont elles constituent des cas particuliers ». Il illustre cette définition de la manière suivante : « pour tout a, a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc ». « Le concept de

[33] Voir Durand-Guerrier (2005)
[34] Voir Durand-Guerrier (2005)
[35] Conforme à la réalité

satisfaction proposé par Tarski fournit une méthode précieuse et efficace pour établir la vérité des propositions obtenues à partir des fonctions propositionnelles, soit comme instance d'une fonction propositionnelle, soit en liant toutes les variables libres par des quantificateurs » (Durand-Guerrier, 2005, p. 20), ou même en mélangeant les deux. Le concept de conséquence logique étant au cœur de son travail, il en donne une définition sémantique en introduisant au préalable le concept de *modèle*. On retrouve ici le prolongement des travaux de Wittgeinstein dans le *Tractatus logico-mathématica* : dans le calcul des propositions, la *conséquence logique* se traduit structurellement par le fait que l'implication entre antécédent et conséquent est une tautologie.

Willard V.O. QUINE (1950) : une grande partie de son œuvre tend à élucider le rôle et la place de la logique dans la Philosophie et la Science. Dans son ouvrage *Méthode de logiques*[36] (1950), il précise que « le but le plus marquant de la logique, dans ses applications à la science et au discours quotidien est la justification et la critique de l'inférence. La logique se consacre pour une bonne part à la mise au point de techniques destinées à montrer qu'un énoncé « suit logiquement », ou non, d'un autre » (cité in Durand-Guerrier, 1996, p. 47). Dans le calcul des propositions, Quine marque une distinction entre le conditionnel et l'implication. Le conditionnel s'exprime par l'utilisation de « si …, alors … » et est traité comme une fonction de vérité : le principe de vérifonctionnalité est respecté. Il définit l'implication ainsi : S_1 et S_2 étant deux schémas vérifonctionnels[37], S_1 implique S_2 si et seulement si aucune interprétation ne rend S_1 vrai et S_2 faux.

Les fonctions de vérité ne permettant pas de rendre compte de toutes les inférences, il construit un système formel pour y remédier. Pour formaliser la notion de « terme », il introduit comme Russell, des lettres de prédicat[38] à une ou plusieurs variables. Dans son système qui contient les deux quantificateurs, il définit les phrases ouvertes et les phrases closes. Pour les phrases ouvertes, la notion de « vérité » qu'il introduit et qui correspond à la notion de *satisfaction d'une formule ouverte par un objet de l'univers du discours*, évoquée pour la première fois par Tarski (1936a), est fondamentale. Cette notion permet d'établir des inférences entre des instances des énoncés ouverts et leur clôture existentielle ou universelle. Par ailleurs, le formalisme utilisé permet d'écrire les énoncés complexes comme une combinaison des prédicats et des phrases entre eux, au moyen des fonctions de vérité. Quine étend au calcul des prédicats la notion de validité, ce qui lui permet de définir l'implication et

[36] Cet ouvrage est une synthèse de ses travaux précédents.
[37] Dans le système formel que Quine a défini, un schéma vérifonctionnel est une lettre p, q, etc… et toutes leurs fonctions de vérité.
[38] Russell les a appelés les fonctions propositionnelles, nom que Quine refuse d'utiliser.

l'équivalence dans ce système. Le travail de Quine montre que la théorie de la quantification et l'usage du symbolisme du calcul des prédicats aide à la clarification conceptuelle. Il va étendre au calcul des prédicats la notion de validité, ce qui lui permet d'y définir les notions d'implication et d'équivalence. Dans cette extension, la définition que Quine donne de l'implication s'identifie à la définition de *conséquence logique* chez Tarski.

Chez tous ces auteurs, on voit émerger d'abord le concept de proposition, puis la notion de vérité dans une interprétation donnée. Selon Durand-Guerrier (2005), ni Frege, ni Russell n'ont établi une réelle distinction entre vérité dans une interprétation donnée et validité qui correspond à la vérité dans un système formel. C'est Wittgenstein qui, à l'aide des tautologies marque cette distinction. Ne pouvant prendre en compte certains énoncés dans le calcul des propositions, ils introduisent la quantification. Russell ouvre la voie au calcul des prédicats en introduisant les fonctions propositionnelles. La notion de satisfaction définie par Tarski est reprise par Quine. Elle est fondamentale dans la construction du système formel de ce dernier et permet une extension des fonctions de vérité au calcul des prédicats.

Le travail de ces auteurs s'inscrit dans la logique du premier ordre. Il existe aussi des logiques d'ordre supérieur dans lesquelles on quantifie sur les prédicats alors qu'en logique du premier ordre, on ne quantifie que sur les variables. Pour notre travail, nous nous limiterons à la logique du premier ordre, compte tenu du niveau d'enseignement des mathématiques qui nous intéresse.

1.2. La logique du premier ordre

Notre objectif n'est pas de faire un cours sur la logique du premier ordre, mais de donner quelques éléments fondamentaux qui permettent d'éclairer les concepts de la théorie et leur utilisation. Ces explicitations vont contribuer à nourrir certains développements que nous faisons dans la suite.

La logique du premier ordre contient deux systèmes principaux :

- le calcul des propositions dans lequel la *proposition* est l'élément fondamental pour exprimer une idée ;
- le calcul des prédicats qui est une extension du calcul propositionnel. On y introduit des lettres qui sont des variables, des lettres de prédicat, les connecteurs logiques, et les symboles des deux quantificateurs existentiel et universel. Les éléments fondamentaux

sont les *formules atomiques* qui sont construites avec des lettres de prédicat et de variables, et des termes.

1.2.1. Le calcul propositionnel

Une *proposition* est par définition, une entité linguistique qui est susceptible d'être vraie ou fausse. On la retrouve encore sous le terme d'*énoncé* (Quine, 1972), terme qui pour nous aura le sens de *phrase déclarative.*

Exemples :

(P1) « Yaoundé est la capitale du Cameroun » est une proposition varie ;

(P2) « La fonction partie entière est une fonction paire » est une proposition fausse.

Dans le calcul des propositions, on utilise des lettres qui sont des variables et qui sont interprétées par des propositions. À partir de ces lettres et des connecteurs logiques, on va fabriquer de manière récursive des formules. On introduit également dans ce système les valeurs de vérité. La proposition élémentaire y est le plus petit composant, et seule est prise en compte sa valeur de vérité. Les lettres de variables propositionnelles prennent soit la valeur Vrai, soit la valeur Faux : c'est le principe de bivalence. Par ailleurs, la valeur de vérité d'une proposition composée satisfait au principe de vérifonctionalité (compositionalité) qui veut que, dès qu'on connait la valeur de vérité des propositions élémentaires, on connait la valeur de vérité de l'énoncé global. Dans ce système, les tables de vérité donnent les possibilités de distributions de valeurs de vérité. Le calcul propositionnel ainsi présenté est une version héritée de Wittgenstein (1921).

Dans la suite, nous présentons les connecteurs logiques cités plus haut.

1.2.1.1. La négation

C'est un opérateur unaire –il s'applique à une proposition– qui échange les possibilités des valeurs de vérité des propositions : une proposition vraie est changée en une proposition fausse et une proposition fausse est changée en une proposition vraie. La négation recouvre donc un aspect sémantique.

De plus, on a le principe suivant : la double négation appliquée à une proposition n'affecte pas cette proposition.

On note $\neg p$ (lire $non\ p$) la négation de la proposition p ; affirmer « *non p* » revient à affirmer « il est faux que p ».

<u>Table de vérité</u> :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Exemples :

(1) « 3 est un entier impair » a pour négation « 3 n'est pas un entier impair »

(2) « le losange ABCD a ses diagonales perpendiculaires » a pour négation « le losange ABCD n'a pas ses diagonales perpendiculaires »

La négation de ces deux propositions qui sont des propositions singulières, coïncide avec la négation dans la grammaire française. Cela n'est pas le cas pour d'autres propositions comme nous le verrons plus loin.

La négation des propositions complexes se construit de manière récursive, à partir de la négation des différents connecteurs.

1.2.1.2.L'implication

L'implication est une notion centrale en mathématiques, et particulièrement dans le raisonnement déductif.

Dans le calcul des propositions, c'est un connecteur binaire qui relie deux variables p et q pour donner la formule notée $p \Rightarrow q$, qui modélise un énoncé conditionnel. On l'appelle implication matérielle ou conditionnel matériel. p et q sont respectivement appelés antécédent et conséquent. Une autre écriture de l'implication $p \Rightarrow q$ qu'on ne rencontre pratiquement pas dans les manuels au programme est $p \supset q$.

Un tel énoncé n'est faux que dans le cas où son antécédent est vrai et son conséquent est faux. Il est donc vrai dans les trois autres cas. La proposition $(non\ p) ou\ q$ a la même valeur de vérité que $p \Rightarrow q$, pour toute interprétation des lettres de variable : on dit que les deux formules sont logiquement équivalentes.

L'implication réciproque de $p \Rightarrow q$ est $q \Rightarrow p$; sa table de vérité est différente de celle de l'implication directe.

Remarque :

On retrouve la notation de la réciproque de $p \Rightarrow q$ ainsi : $p \Leftarrow q$.

Table de vérité :

p	q	$p \Rightarrow q$	$non\,p$	$(non\,p)\ ou\ q$	$p \Leftarrow q$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V

Pour les mêmes distributions des valeurs de vérité, on constate bien par ce tableau que les deux schémas propositionnels n'ont pas toujours la même valeur de vérité.

On appelle contraposée de $p \Rightarrow q$, la formule $non\ q \Rightarrow non\ p$. $p \Rightarrow q$ et sa contraposée ont la même table de vérité ; les deux formules sont logiquement équivalentes, comme le montre le tableau qui suit.

P	Q	$non\ p$	$non\ q$	$non\ q \Rightarrow non\ p$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Exemples : I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur I.

(3) *Si la fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur I.*

(4) *Si la fonction f est continue sur I, alors elle est dérivable sur I*, est la réciproque de (3)

(5) *Si la fonction f n'est pas continue sur I, alors elle n'est pas dérivable sur I*, est la contraposée de (3)

Dans le langage naturel (ou langage courant), l'implication qu'on retrouve sous la forme « *si ..., alors…* » n'engage généralement le locuteur que si l'antécédent est vrai. C'est ce que Quine (1950) a appelé le conditionnel courant. L'utilisation de « *si ..., alors…* » dans le langage courant peut induire chez les élèves la *propriété-en-acte de causalité*[39] (Deloustal-Jorrand, 2000-2001) selon laquelle il y a un lien de causalité évident entre l'antécédent et le conséquent. On n'envisage pas le cas où l'antécédent pourrait être faux. Ceci s'oppose au

[39]« $A \Rightarrow B$ n'a de raison d'être que lorsque A et B ont un lien de causalité (évident) entre elles », A et B étant des propositions.

principe de compositionalité, principe théorique en désaccord le plus souvent avec le sens commun, et qui permet d'attribuer une valeur de vérité à un énoncé conditionnel dont l'antécédent et le conséquent n'ont aucun lien sémantique.

Une autre notion de l'implication qu'on rencontre dans le calcul des propositions est l'implication au sens de Quine (1950). Elle est de la forme $P \Rightarrow Q$ où P et Q sont deux formules du calcul des propositions. Le conditionnel obtenu est une tautologie, c'est-à-dire, une proposition vraie pour toute interprétation des variables. Ces implications sont associées aux règles d'inférences. Par exemple, $[p \; et \; (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ est une implication au sens de Quine qui est associé à la règle du Modus Ponens.

Il est essentiel de faire la distinction entre affirmer une implication $p \Rightarrow q$ et faire une déduction à partir d'une implication affirmée. En effet, la vérité de $p \Rightarrow q$ ne donne aucune information sur la valeur de vérité de p et de q, ce qui n'est pas le cas pour une inférence faite à partir d'une implication où la vérité de p permet de déduire celle de q, et où la fausseté de q permet de déduire celle de p.

Une notion proche de l'implication qui est souvent à l'origine de nombreuses erreurs de raisonnement est l'équivalence.

1.2.1.3.L'équivalence

Elle relie deux lettres de proposition p et q pour former la formule $p \Leftrightarrow q$ qui est vraie lorsque p et q ont la même valeur de vérité, et fausse lorsque les valeurs de vérité sont différentes. On dit que ces propositions sont équivalentes.

L'équivalence est logiquement équivalente à la conjonction d'une implication et de sa réciproque : autrement dit dans le système formel, $p \Leftrightarrow q$ a la même table de vérité que $((p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p))$, d'où son autre appellation *bi-implication.*

Affirmer $p \Leftrightarrow q$ revient à dire que l'antécédent et le conséquent ont la même valeur de vérité.

<u>Table de vérité</u>

P	Q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2.1.4.Implication, équivalence et règles d'inférence.

Lorsqu'une implication n'est pas une équivalence, on ne peut mettre en œuvre que deux règles d'inférence :

- le Modus Ponens ou règle du détachement : de $p \Rightarrow q$ et de p vrais, on déduit la vérité de q ;
- le Modus Tollens : de $p \Rightarrow q$ vrai et de q faux, on déduit la fausseté de *p*.

De $p \Rightarrow q$ vrai et q vrai, on ne peut rien déduire pour *p*, et de $p \Rightarrow q$ vrai et p faux, on ne peut rien déduire pour q.

Par contre, avec l'équivalence, on peut faire les quatre inférences suivantes :

- de $p \Leftrightarrow q$ et p vrais, on conclut que q est vrai;
- de $p \Leftrightarrow q$ et q vrais, on conclut qu'on a p vrai;
- de $p \Leftrightarrow q$ et $non\ p$ vrais, on conclut qu'on a $non\ q$ vrai;
- de $p \Leftrightarrow q$ et $non\ q$ vrais, on conclut qu'on a $non\ p$ vrai.

Il faut remarquer que certaines inférences ne peuvent s'exprimer à l'aide des modèles précédents. C'est par exemple le cas de « $P(a) \Rightarrow \exists x, P(x)$ » dont l'écriture utilise un quantificateur et une fonction propositionnelle. $P(a)$ est une proposition, ce qui n'est pas vrai pour $P(x)$.

1.2.1.5.Insuffisance du calcul des propositions

En mathématiques, on rencontrer des phrases telles que :

(6) *Certains entiers naturels sont pairs.*

(7) *Tous les entiers naturels sont pairs.*

Ces phrases sont des propositions respectivement vraie et fausse. Elles contiennent pour l'une le quantificateur existentiel « certains », et pour l'autre le quantificateur universel « tous ». Ces quantificateurs ne rentrant pas dans l'alphabet du calcul propositionnel, ces phrases sont prises dans ce système comme des entités.

Par ailleurs, la négation mathématique de la phrase (7) est : « *il existe des entiers naturels qui ne sont pas pairs* » (8). La formalisation de cette dernière phrase est $\neg p$, où p est interprété par l'énoncé (7). Cette formalisation ne permet pas de rendre compte du changement de quantificateur lorsqu'on passe de l'énoncé (7) à l'énoncé (8), et *a fortiori*, de la structure de ces deux phrases ; on ne peut donc pas les analyser. Nous convenons avec Durand-Guerrier (1996) que :

> « Le fait que le calcul des propositions soit un système complet possédant une procédure de décision pour les tautologies fait sa force, mais aussi, on l'a vu, sa faiblesse, puisque le prix à

payer pour cette efficacité est l'extrême pauvreté des énoncés qu'il peut produire et partant des situations qu'il permet de formaliser. La richesse des mathématiques rend donc nécessaire l'usage d'une théorie plus élaborée, en l'occurrence le calcul des prédicats. (op. cit. p. 65)

Pour renforcer notre thèse selon laquelle la logique propositionnelle ne suffit pas pour analyser le discours mathématique, nous présentons une analyse d'une démonstration (D) erronée du théorème des accroissements finis généralisés, issue de l'article intitulé « *Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?* », dont les auteurs sont Viviane Durand-Guerrier et Gilbert Arsac. Cet article est publié dans la revue *Recherches en Didactiques des Mathématiques* (RDM), volume 23, n°3, pp295-342 de l'année 2003[40].

L'énoncé du théorème généralisé est précédé de l'énoncé du théorème usuel des accroissements finis :

Théorème des accroissements finis :

Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé $[a;b]$, si f est continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a;b[$ tel que

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Théorème des accroissements finis généralisé :

Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a;b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a;b[$, alors il existe un réel c dans $]a;b[$, tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. (p.298)

D'après les auteurs, la démonstration fréquemment rencontrée chez les étudiants en DEUG scientifique de première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier de la façon suivante :

(D) « La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a;b[$ tel que $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$. De même, g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a;b[$ tel que $g'(c)(b-a) = g(b) - g(a)$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a;b[$, $g'(c) \neq 0$ et donc $g(b) - g(a) \neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient l'égalité cherchée. »

Comme le disent les auteurs, cette démonstration est fausse du fait du choix de c qui est le même pour la fonction f et pour la fonction g. Ils proposent en contre-exemple deux

[40] Nous en faisons une revue dans le chapitre qui suit

fonctions, les fonctions qui à x associent respectivement x^2 et $\sin x$. En se plaçant dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, les calculs mettent en évidence l'impossibilité de choisir le même point c. L'analyse de cette démonstration à l'aide du modèle de Raymond Duval (1993) montre que les différents théorèmes, explicites et implicites, sont utilisés correctement ; la non validité ne dépend pas d'une mauvaise application du Modus Ponens. Les auteurs proposent d'analyser l'erreur sous deux points de vue :

du premier point de vue, ils considèrent que la démonstration est, comme en géométrie, une démonstration sur un exemple générique constitué ici du couple de deux fonctions *f* et g, mais il faut ajouter aux considérations de Duval une règle de manipulation des variables ; quand on applique un énoncé du type « *quel que soit a, il existe b…* », il faut ajouter que *b* « dépend » de *a*. Cela signifie concrètement que dans la démonstration, on doit préciser la dépendance de la variable *c* aux fonctions *f* et g ; *c* qui dépend de *f* est noté c_f et *c* qui dépend de g est noté c_g. De ce point de vue, pour les auteurs, *on étudie de façon empirique les règles de fonctionnement des démonstrations concrètement mises en œuvre en mathématiques*.

Du deuxième point de vue, la démonstration est interprétée dans le calcul des prédicats. *On utilise un modèle théorique pour rendre compte de la pratique précédente*.

Pour les auteurs, de ce point de vue, l'erreur consiste à utiliser une lettre de variable liée comme s'il s'agissait d'un nom d'objet. Ceci revient à faire l'impasse sémantique sur l'inférence associée à la règle d'instanciation existentielle, et à ce moment, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objet, à savoir qu'une lettre utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour un autre objet. On doit donc déduire une instanciation de c pour f avec une lettre et une instanciation de c pour g avec une autre lettre, c'est-à-dire que de :

« il existe c dans $]a;b[$ tel que $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$ »,

on a par instanciation existentielle de c :

$$f'(c_f)(a-b)=f(a)-f(b)$$

et, de :

« il existe c dans $]a;b[$ tel que $g'(c)(b-a)=g(b)-g(a)$ »

on a par instanciation existentielle de c :

$$g'(c_g)(a-b)=g(a)-g(b)$$

On obtient alors l'égalité de deux quotients, mais cela ne prouve pas le résultat cherché.

Cette analyse met en évidence la place cruciale qui est celle de la quantification existentielle et des instantiations dans la démonstration, et qui ne rentre pas dans le calcul des propositions. Pour une pratique correcte de l'activité mathématique, on est obligé de sortir du cadre du calcul propositionnel et d'introduire le calcul des prédicats qui est une extension du calcul des propositions et qui permet de prendre en compte les phénomènes de quantification (Durand-Guerrier & Arsac 2003)

1.2.2. Le calcul des prédicats

« Le calcul des prédicats est en quelque sorte la première étape de la formalisation de l'activité mathématique » (Cori & Lascar, 2003).

Pour développer cette partie, nous nous appuyons sur Durand-Guerrier & al., (2000).

Dans le calcul des prédicats, les objets sont appelés *les termes*. Ils sont modélisés par des lettres de variables. On y introduit des lettres appelées prédicats pour écrire certaines propriétés et les relations entre ces objets, les connecteurs logiques, les parenthèses et les symboles des deux quantificateurs existentiel et universel. Les éléments fondamentaux sont les *formules atomiques* qui sont construites avec une lettre de prédicat, et une ou des lettres de variables, pour écrire certaines propriétés d'objets et des relations entre objets.

1.2.2.1. Les fonctions propositionnelles

Une fonction propositionnelle ou encore un prédicat modélise une propriété d'objets ou une relation entre des objets, selon le nombre de variables qu'on peut lui assigner.

Les prédicats à une place ou prédicats unaires modélisent des propriétés d'objets : *être pair, être un diviseur de 12* pour des nombres entiers, *être une fonction croissante*, sont des interprétations d'un prédicat unaire. En assignant une variable à un prédicat unaire *P*, on obtient une formule atomique dont la formulation logique est $p(x)$, et qui s'interprète dans un domaine donné par une phrase ouverte. « *x est pair* », « *x est un diviseur de 12* », « *f est une fonction croissante* » sont des phrases ouvertes. x et f sont appelés des variables libres.

Une phrase ouverte n'a pas de valeur de vérité. À partir d'une phrase ouverte, on obtient une proposition singulière par instantiation de la variable par un élément du domaine. Par exemple : *3 est pair, La fonction partie entière est une fonction croissante*, sont des propositions singulières. Lorsque la proposition obtenue par assignation d'un objet à une variable est vraie, on dit que l'objet satisfait la phrase ouverte ; sinon, on dit qu'il ne la satisfait pas.

Les prédicats à deux places ou plus modélisent des relations. Ce sont des prédicats *n-aires* ($n \geq 2$) ou *polyadiques* ; ils s'appliquent à plusieurs objets. Par exemple, *être inférieur ou égal à*, *être parallèle à*, sont modélisés par des prédicats binaires ; *être compris entre … et …* est modélisé par un prédicat ternaire. Lorsqu'on assigne *n* variables à un prédicat *n-aire*, on obtient une formule atomique qui est interprétée par une phrase ouverte. Pour un prédicat à deux places, on a une formulation logique $R(x, y)$. C'est le cas par exemple de « *x est inférieur ou égal à y* ». Si on attribut un objet à l'une des variables *x* ou *y*, on obtient une propriété, puisqu'il n'y aura plus qu'une seule variable libre. « *être inférieur ou égal à 2* » est obtenue en assignant à *y* la valeur *2*. Lorsqu'on assigne *n* ($n \geq 2$) objets à un prédicat *n-aire*, on obtient une proposition : *La droite (D) est parallèle à la droite (D')* ; *3,5 est compris entre 3 et 4*.

Parmi les phrases ouvertes, certaines sont vraies de tous les objets de l'univers du discours, comme par exemple la phrase ouverte « *Q a des diagonales perpendiculaire* », qui est vraie de tous les losanges. D'autres sont fausses de tous les objets de l'univers du discours, par exemple : *Q est un quadrilatère,* l'univers du discours étant l'ensemble des triangles du plan. D'autres enfin sont vraies pour certain(s) objet(s) et fausses pour d'autre(s), comme par exemple *Q est un carré*, dans l'univers des quadrilatères. Pour rendre compte de ces différences, on introduit la quantification qui est une formalisation de la notion de quantité dans le langage courant.

1.2.2.2.La quantification

Dans le langage du calcul des prédicats standard, il existe deux quantificateurs : le quantificateur universel noté ∀ dont la signification dans la langue parlée est *tous*, et le quantificateur existentiel noté ∃ dont la signification dans la langue parlée est *il existe au moins un*.

Plusieurs autres mots et expressions de la langue parlée expriment la notion de quantité : *pour tout*, *quel que soit*, *chaque*, qui sont synonymes de *tous ; certains*, *plusieurs* qui sont synonymes de *il existe au moins un*, puis, *il existe un unique*, *aucun*, qui ne sont pas modélisés, mais se traduisent par des formules complexes. Par exemple, *Aucun x n'a la propriété p* se reformule en $\forall x, \neg p(x)$; *il existe un unique x qui a la propriété p(x)* se reformule en $\exists x, [(p(x) \wedge \forall y, p(y)) \Rightarrow (x = y)]$. Dans le langage courant, le mot *un(e)* est très utilisé. Il rentre dans le groupe de déterminants que F. Corblin (1996), dans l'article « *Les indéfinis : variables et quantificateurs* » extrait du site Perseé[41], appelle les indéfinis au sens étroit. Il en donne plusieurs interprétations :

- dans le cadre de la logique des prédicats, il cite Russell qui donne la traduction canonique du mot anglais *a* par le quantificateur existentiel ;
- dans le cadre de la Théorie de la Quantification Généralisée (TQG), il est considéré comme un quantificateur universel ;
- dans la Théorie des représentations du discours (DRT), *un* introduit une variable d'individu, c'est-à-dire, un générique.

Étant donné un domaine d'interprétation, le quantificateur universel transforme une phrase ouverte en une proposition vraie lorsque tous les objets de l'univers du discours satisfont la phrase ouverte, sinon, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé universellement quantifié est « $\forall x, P(x)$ » où x est une variable et P une fonction propositionnelle.

Tous les losanges ont des diagonales perpendiculaires est une proposition vraie.

Tous les quadrilatères ont des diagonales perpendiculaires est une proposition fausse lorsque l'univers du discours est l'ensemble des quadrilatères. En effet, un rectangle qui n'est pas un carré n'a pas ses diagonales perpendiculaires. Il ne satisfait donc pas la phrase ouverte *Q a des diagonales perpendiculaires*.

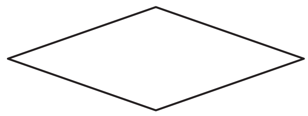
Un énoncé universellement quantifié est faux dès qu'il existe une instance de la phrase ouverte qui est fausse. Il se peut dans certains cas, que toutes les instances soient fausses.

Tous les triangles sont des quadrilatères est une proposition fausse. La phrase ouverte n'est satisfaite par aucun élément de l'univers du discours.

La prise en compte du domaine de quantification est essentielle pour déterminer la valeur de vérité d'un énoncé quantifié.

[41] www://.persee.

Tous les losanges sont des carrés est une proposition fausse dans l'ensemble des quadrilatères. En effet la figure qui suit est un losange qui n'est pas un carré ; elle est un contre-exemple :



Si par contre notre univers du discours est l'ensemble des rectangles, la proposition est vraie.

Le quantificateur existentiel, quant à lui, transforme une phrase ouverte en une proposition vraie si au moins un élément de l'univers du discours satisfait la phrase ouverte. Dans le cas où aucun objet de l'univers du discours ne satisfait la phrase ouverte, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé existentiel est « $\exists x, P(x)$ » où P et x sont définis comme précédemment.

Les propositions *il existe au moins un losange dont les diagonales sont perpendiculaires*, et *il existe au moins un losange qui est un carré* sont des propositions vraies, la première dans tout univers contenant au moins un losange, et la deuxième, dans tout univers contenant au moins un carré. Elles sont fausses sinon.

Il faut signaler que dans le langage courant, le quantificateur existentiel n'est pas souvent explicité. Pour traduire une phrase donnée dans le langage courant dans le langage du calcul des prédicats, on est amené à éclaircir son sens. C'est le cas par exemple de la phrase « Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 a un diviseur premier », où n'apparait pas le quantificateur existentiel. Cette phrase se formalise ainsi :

$\forall n, (((n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq 2)\ ) \Rightarrow \exists p, P(p) \wedge (p/n)\ )$, P étant le prédicat « être premier ».

Tant pour la quantification universelle qu'existentielle, on voit l'importance de l'univers du discours sur lequel porte cette quantification.

On peut à partir des formules atomiques, des connecteurs logiques et des quantificateurs, construire des énoncés complexes. Mais la détermination de la valeur de vérité de ces énoncés n'obéit plus pour la plupart, au principe de vérifonctionnalité comme c'était le cas dans le calcul des propositions, du fait que dans le calcul des prédicats, « les propositions complexes ne sont pas des agrégats de propositions plus simples » (Tarski, 1950,1972). En effet, beaucoup d'énoncés complexes sont constitués d'énoncés imbriqués les uns dans les autres, comme le montre cet exemple :

$$\forall f\, \forall a[(\forall u\, (F(u, a) \Rightarrow G(f, u, a)) \Rightarrow H(f, a)], \text{ où } F, G \text{ et } H \text{ sont des relations.}$$

C'est la notion de *satisfaction* qui va permettre d'étendre les connecteurs logiques propositionnels au calcul des prédicats, qui de ce fait est vu comme une extension du calcul des propositions.

1.2.2.3.La négation

Dans le calcul des prédicats, la négation d'une fonction propositionnelle transforme une phrase ouverte en une phrase ouverte qui est satisfaite par les objets qui ne satisfont pas la première. Par exemple, la négation de « *n est un nombre premier* » (a) est « *n n'est pas un nombre premier* » (b). L'entier naturel 3 satisfait la phrase (a), et ne satisfait pas (b), alors que 8 satisfait (b), mais ne satisfait pas (a). Les énoncés quantifiés qui sont des propositions sont des clôtures de phrases ouvertes. On peut donc leur appliquer l'opérateur négation, comme nous le voyons dans la suite.

La négation des énoncés universellement quantifiés

On considère la proposition suivante : « *tous le nombres premiers sont pairs* » (1).

Dans la langue naturelle, pour nier cette proposition, on va faire porter la négation sur le verbe. On obtient « *tous les nombres premiers ne sont pas pairs* », dont l'interprétation selon la norme linguistique française standard[42] est « *certains nombres premiers ne sont pas pairs* » (2). Dans l'usage courant, il arrive qu'on rencontre l'interprétation « *aucun nombre premier n'est pair* » (3). Etant donné que la négation en mathématiques doit échanger les valeurs de vérité des propositions, la négation en mathématiques de (1) est l'énoncé (2) qui est paraphrasé par « *il est faux que tous les nombres premiers sont pairs* » et dont la formulation d'Aristote est *« quelque nombre premier n'est pas pair »* (4). En mathématiques, d'une manière générale, on n'utilise pas cette formulation, on la remplace par la formulation explicite « *il existe au moins un nombre premier qui n'est pas pair* » (5), ce qui est en accord avec la syntaxe logique. Ben Kilani (2005) montre que, malgré cela, les élèves utilisent essentiellement la forme en *tous … ne … pas…* qui est ambigüe.

[42] Voir Fuchs (1996)

Nier un énoncé universellement quantifié revient à faire porter la négation sur le verbe et changer le quantificateur universel en quantificateur existentiel ; « *certains* » dans (2) ou « *quelque* » dans (4).

On a alors la formule : $\neg (\forall x \ F(x)) \equiv \exists x \, (\neg F(x))$[43] où $\equiv$ est le signe de l'équivalence logique dans le calcul des prédicats, et $\neg$ l'expression de la négation. Cette formule a très bien été précisée par Russel, qui attire l'attention du lecteur sur une erreur assez récurrente qui consiste à penser que la négation de « $\forall x$, $f(x)$ » est « $\forall x$, non $f(x)$ », alors que c'est plutôt « $\exists x$, non $f(x)$ » (Durand-Guerrier, 2005).

À cette équivalence logique on associe la règle du contre-exemple. En effet, pour montrer qu'un énoncé universellement quantifié est faux, il suffit d'exhiber un objet de l'univers du discours dont l'assignation à la phrase ouverte donne une proposition fausse. Cela renvoie à l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique qui est à l'œuvre dans la logique du premier ordre.

La négation des énoncés existentiels

Lorsqu'on demande de nier la proposition « *Certains nombres impairs sont premiers* » (a), l'application de la règle de grammaire qui consiste à faire porter la négation sur le verbe conduit à « *certains nombres impairs ne sont pas premiers*» (b), qui n'est pas la négation de (a) puisque les deux phrases peuvent être simultanément vraies.

Si on fait porter la négation sur le verbe et que l'on change le quantificateur existentiel en quantificateur universel, on obtient « *Tous les nombres impairs ne sont pas premiers* » (c).

Seulement, comme nous le disions précédemment, cette formulation est ambiguë.

Si nous revenons alors à la proposition (a) que nous faisons précéder par l'expression « il est faux que », qui marque la négation totale[44] et qui correspond à la négation en logique on obtient :

« *Il est faux que certains nombres impairs sont premiers* » (a') qu'on reformule en

« *Aucun nombre impair n'est premier* » (b') qui est la forme standard en français.

On peut également la reformuler en « *Tous les nombres impairs sont non premiers* » (c'), qui est une forme non utilisée dans le langage courant et qui correspond à la forme logique de la négation dans le langage des prédicats :

[43] En rappel, ¬p se lit « non p » qui est la négation de p.
[44] Négation appliquée à toute la phrase

$$\neg\,(\exists x, P(x)) \equiv (\forall x, \neg P(x))$$

La négation des énoncés quantifiés met en évidence deux types de négations[45] dans la langue française :

- la négation totale qui s'applique à la totalité de la phrase et qu'on peut introduire par « il est faux que ». Par exemple, « il est faut que *certains nombres premiers sont pairs* » correspond à « *Tous les nombres premiers sont non pairs (impair)* » ;
- la négation partielle qui s'applique seulement au verbe et qui correspond à la négation dans la grammaire française. Par exemple, « *certains nombres premiers sont pairs* » a pour négation partielle « *certains nombres entiers ne sont pas pairs* ».

Nous reviendrons dessus lorsque nous ferons la revue des travaux de Ben Kilani.

Négation et contraire

Il est assez fréquent dans la classe de mathématiques, d'entendre les élèves et les étudiants parler de « contraire » lorsqu'il est question de négation. On retrouve également cette appellation de la négation dans le manuel Transmath, programme 2000, Seconde, où il est écrit en encadré « Pourquoi le contraire de « f croissante » n'est pas « f décroissante » ? » (in Durand-Guerrier, 2005, p.76).

Ces deux termes sont fréquemment utilisés comme des synonymes, pourtant ils ne désignent pas la même chose. Certes, le contraire marque une relation d'opposition entre des objets, mais l'opposition ici est beaucoup plus radicale que dans la négation. Pour les énoncés, on parlera de contraire lorsqu'on a affaire à des énoncés universellement quantifiés. Par exemple, les propositions « *tous les hommes sont blancs/aucun homme n'est blancs* », sont contraires l'une de l'autre ; c'est ce qu'Aristote a appelé la relation de contrariété. Cette opposition est caractérisée par le fait que deux contraires ne peuvent être vrais en même temps, mais il est possible qu'ils soient simultanément faux.

En mathématiques, il existe des couples dont l'opposition entre les termes est à la fois le contraire et la négation. C'est le cas de (pair, impair) pour les nombres entiers, (continue, discontinue) pour les fonctions numériques. Il n'en est pas de même pour le couple (croissante, décroissante) en ce qui concerne les fonctions ; une fonction peut n'être ni croissante, ni décroissante. On retrouve très souvent l'utilisation de ce dernier couple dans les productions des élèves, et même dans celles des étudiants où l'on peut lire : « comme la fonction f n'est pas croissante, elle est décroissante », ce qui montre que ces derniers

[45] Voir Ben Kilani (2005)

identifient décroissant à non-croissant. C'est également le cas pour ce qui concerne le couple (paire, impaire) pour les fonctions, l'identification (impaire, non paire) étant renforcée par ce qui se passe dans l'ensemble des entiers.

1.2.2.4.L'implication

Une formule du type $P(x) \Rightarrow Q(x)$, où P et Q sont des prédicats est interprétée par une phrase ouverte. Pour tout élément a de l'univers du discours, $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est une implication matérielle. Elle n'est fausse que si $P(a)$ est vraie et $Q(a)$ est fausse. Dans les autres cas elle est vraie. On dira alors que a satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$. On définit ainsi le connecteur $\Rightarrow$ dans le calcul des prédicats à partir de l'implication matérielle, et on l'appelle l'*implication ouverte*. Comme dans le calcul des propositions, on définit également la contraposée de l'implication ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$, qui est la formule $\neg\, Q(x) \Rightarrow \neg\, P(x)$. C'est une implication ouverte qui est équivalente à la formule initiale.

La formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$ étant interprétée dans une structure par une phrase ouverte, on peut la clore à l'aide du quantificateur universel ou existentiel.

On obtient pour la clôture universelle, la proposition $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ appelée *implication formelle* (Russel, 1903, 1910) ou *faisceau de conditionnel* (Quine, 1950, 1972). Cette proposition est vraie lorsque pour chaque instance de x l'implication matérielle obtenue est vraie. On voit donc que pour définir l'implication formelle $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$, on doit introduire chaque implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$, définie pour une certaine classe d'objets. Durand-Guerrier (2003) dira que:

> « Such implication is a particular case of the open sentence $P(x) \Rightarrow Q(x)$, where x is a free variable. An open sentence has no truth-value. This is at the heart of Tarski's semantic definition of truth (Tarski, 1944), and for us, the key to clarify the use of implication. The open conditional is an extension of material implication, building the bridge between the material implication and the generalized conditional: considering the domain D of the objects, […] while assigning an object a of D to the variable x, we obtain a material implication; a is said to satisfy the open sentence if the material implication is true, if not, a does not satisfy it. »[46]

Il est à noter que les théorèmes en mathématiques sont généralement donnés sous la forme d'une implication formelle, mais le plus souvent, le quantificateur est omis. C'est le cas du

[46] Une telle implication est un cas particulier de la phrase ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$, où x est une variable libre. Une phrase ouverte n'a pas de valeur de vérité. Ceci est au cœur de la théorie sémantique de la vérité de Tarski (1944), et pour nous, la clé pour clarifier l'utilisation de l'implication. L'implication ouverte est une extension de l'implication matérielle, qui est un pont entre l'implication matérielle et l'implication formelle : étant donné un domaine d'objets *D*, en assignant un objet *a* de *D* à la variable *x*, on obtient une implication matérielle ; on dira que *a* satisfait l'implication ouverte si l'implication matérielle est vraie, sinon, *a* ne la satisfait pas.

théorème suivant que nous avons relevé lors d'une observation de classe de Terminale Scientifique :

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$*,*

f une fonction continue sur I,

alors $\forall y \in f(I), \exists x \in I /\ y = f(x)$

Cette pratique experte ne permet pas toujours à l'étudiant de faire la distinction entre une phrase ouverte et sa clôture universelle.

Un autre problème soulevé par l'implication est la distinction qui n'est pas toujours faite entre démontrer un théorème de la forme $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$, et montrer la vérité de l'énoncé universel $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$.

D'après Quine, lorsqu'on a énoncé le théorème $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$, la vérité de $P(a)$ pour un générique a n'est pas acquise, elle est juste posée ; on part de la vérité de $P(a)$ et on conclut à la vérité de $Q(a)$. Par contre, montrer que $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$, est vrai, c'est montrer que pour chaque instance a de x, a étant pris dans l'univers du discours, $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est vrai. Dans ce cas, les valeurs de vérité de $P(a)$ et de $Q(a)$ sont connues, car $P(a)$ et $Q(a)$ sont des propositions.

L'implication formelle va générer deux règles fondamentales de déduction :

1- Si $\forall x \left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$ et $P(a)$, alors $Q(a)$;
2- Si $\forall x \left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$ et $\neg Q(a)$, alors $\neg P(a)$.

Une implication formelle étant vraie, on ne peut inférer que dans deux cas :

Si pour une instance a de x, $P(a)$ est vrai, ou si $\neg Q(a)$ est vrai. Pour le reste, on ne peut se prononcer sans information supplémentaire.

En effet, pour définir l'implication formelle $\forall x \left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$, on a besoin d'introduire chaque implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$, pour a appartenant à une classe d'objets. Or $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est une instance de l'implication ouverte $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

On définit également la clôture existentielle de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ qui est $\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Elle est vraie s'il existe un élément de l'univers du discours qui satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Cette forme est très peu considérée car, dès qu'un élément de l'univers du discours ne satisfait pas P, l'énoncé $\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vrai.

Le traitement de l'implication, tels que les résultats de certains travaux –Legrand (1990), Rogalski & Rogalski (2004), Durand-Guerrier (2005) –en didactique des mathématiques le montrent, est problématique pour les étudiants.

1.2.2.5.L'équivalence

L'équivalence ou bi-implication est comme les autres connecteurs logiques, étendue au calcul des prédicats, du fait qu'elle se définit à l'aide de l'implication et de la conjonction. La formule $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ est interprétée par une phrase ouverte. De ce fait, on peut en définir la clôture universelle, tout comme la clôture existentielle :

La clôture universelle est $\forall x, (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$ qui est vraie lorsque chaque instance de la phrase ouverte $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ est vraie. Elle est fausse s'il existe au moins une instance de $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ qui est fausse. On a quatre possibilités d'inférence lorsque $\forall x, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ est vrai. Pour un élément a de l'univers du discours :

si $P(a)$ est vrai, alors on peut conclure à $Q(a)$;

si Q(a) est vrai, on peut conclure à P(a) ;

si ¬P(a) est vrai, on peut conclure à ¬Q(a) ;

si ¬Q(a) est vrai, on peut conclure à ¬P(a).

La clôture existentielle est $\exists x, (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$, qui est vraie lorsqu'au moins une instantiation de $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ est vraie. En mathématiques, les interprétations de cette formule ne sont pas très fréquentes, contrairement à la clôture universelle qui est une forme dans laquelle les théorèmes sont exprimés.

Conclusion

À la suite d'un brève synthèse des travaux sur la logique où nous avons parcouru quelques œuvres de certains auteurs contemporains, nous avons présenté quelques éléments du calcul des propositions, à savoir, les concepts de négation, d'implication et d'équivalence, puis des règles d'inférence valides dans ce cadre. Nous avons, en nous appuyant sur des travaux antérieurs, montré que le calcul propositionnel ne permettait pas de rendre compte de certaines structures logiques, en l'occurrence les énoncés quantifiés. Nous avons défendu la thèse selon laquelle il est insuffisant pour analyser le discours mathématique.

La notion de satisfaction va permettre d'étendre les connecteurs logiques propositionnels au calcul des prédicats, qui de ce fait est vu comme une extension du calcul des propositions. Le calcul des prédicats se présente ainsi comme une théorie logique de référence qui nous permet de rentrer au cœur de l'activité mathématique, du point de vue du langage, dans une perspective didactique.

2. La complexité des concepts de logique dans l'usage en mathématiques

Introduction

Plusieurs études épistémologiques et didactiques (Durand-Guerrier (1996), Durand-Guerrier & Arsac (2003), Chellougui (2004), Deloustal (2004), Ben Kilani (2005))[47], ont mis en évidence d'une part, les difficultés d'émergence des concepts de logique au cours de l'histoire et d'autre part, les difficultés d'appréhension de ces concepts par les étudiants. Ces travaux ont également souligné des difficultés en lien avec la flexibilité de la langue naturelle, et pour les contextes multilingues, avec les différences de structures grammaticales (Ben Kilani (2005), Edmonds-Wathen et al. (à paraître)).

2.1. La quantification

Les difficultés liées à l'utilisation des quantificateurs sont bien réelles comme le montrent Epp (1999), Deloustal-Jorrand (2003), Durand-Guerrier (2005), Chellougui (2004, 2009). Nous illustrons notre propos par deux exemples tirés de la thèse de doctorat de F. Chellougui (2004). Le premier exemple est relatif aux énoncés contenant une quantification multiple et le second présente le phénomène de quantification bornée.

Exemple 1 : Distinguer entre deux énoncés de la forme $\forall x, \exists y, R(x,y)$ et $\exists y, \forall x, R(x,y)$

L'auteure étudie le rôle de la quantification dans l'élaboration effective d'un raisonnement mathématique pour les étudiants de première année d'université. Elle a mis en place deux expérimentations. À l'issue de la première, elle a recueilli des données qui ont fourni des informations sur le maniement des quantificateurs, et leur utilisation par les étudiants dans les raisonnements produits. Ces premières informations étaient insuffisantes pour son travail, mais lui a donné des pistes de recherche. Elle met en place une seconde expérimentation avec 6 binômes d'étudiants de première année de la section Mathématiques- Informatique (MI_1) de l'université de Bizerte en Tunisie.

Dans cette seconde expérimentation, l'auteure a mené des entretiens guidés avec quelques étudiants pour essayer de mieux comprendre les difficultés liées à l'appropriation de la notion de borne supérieure. Au cours des entretiens, elle leur a demandé d'écrire la définition d'un majorant. Dans chacun des binômes, la définition a été donnée sous la forme de l'énoncé clos :

« $\forall x \in A, \exists M \in R, tel\ que\ x \leq M$. On dit que M est un majorant. »

[47] Nous ferons une revue de ces travaux dans le second chapitre.

que l'auteure a qualifié de « *étrange définition d'un objet majorant* ». Ceci a conduit l'expérimentatrice à engager un débat sur l'alternance des quantificateurs. Nous donnons et commentons ci-dessous quelques extraits des échanges :

Binôme 4 :

> **85.A38** : Ce n'est pas un majorant. Il faut il existe avant quel que soit, sinon c'est faux quand quel que soit est avant il existe.
>
> **86.N31** : On n'a pas vu ça dans le cours, pour nous c'est la même chose. Mais ce n'est pas la même chose. Comment savoir il existe avant quel que soit ou quel que soit avant il existe ? »

L'étudiant **A38** explicite le fait que changer l'ordre des quantificateurs change la signification de la phrase. Pour ce dernier, la définition correcte est celle où le quantificateur existentiel vient avant le quantificateur universel, sinon, la définition d'un majorant est fausse.

L'étudiant **N31** a la position qui est majoritaire chez les étudiants, à savoir que $\forall x, \exists y, P(x, y)$ et $\exists y, \forall x, P(x, y)$, c'est la même chose. D'un autre côté, cet étudiant sait que les deux formules n'ont pas la même signification, mais le problème du contrôle de ces énoncés se pose : quand faut-il écrire « *il existe … tel que, quel que soit* » et « *quel que soit …, il existe* » ? Il manifeste ici un appel à travailler la question. Par ailleurs, il dit n'avoir pas vu dans le cours ces deux formulations. Ce n'est pas le point de vue de l'auteure qui, dans son travail a précisé que « les connaissances mathématiques supposées disponibles au moment de l'expérimentation et la formulation des questions recouvrent essentiellement le cours fait par l'enseignant » (p.206). Cela montre que si un cours de logique est donné en début d'année et qu'il n'est pas entretenu, il ne sert pas aux étudiants.

Binôme 5 :

> *À la question qui lui est posée de savoir s'ils ont retenu quelque chose des quantificateurs :*
>
> **112.M38** : Oui, on a utilisé les quantificateurs, mais pour la définition, j'ai oublié.
>
> **113.Int32** : B, pourquoi, c'est presque nouveau ?
>
> **114.B44** : Parce qu'au lycée on utilise toute l'expression, tout le mot entier. Pour existe on écrit : il existe. Pour quel que soit, on écrit : quel que soit.
>
> C'est nouveau pour moi, la notation des symboles
>
> **115.M39** : Mais c'est pas ça le but d'écrire ou non les quantificateurs, le but c'est de les utiliser : parce ce que si l'on change l'un par l'autre, tout sera changé. Comme pour la définition d'un majorant. (p.247)

L'intervention de **M38** nous conforte dans la position selon laquelle, si l'enseignement d'un concept n'est pas soutenu tout au long de l'année, il est fort probable que l'étudiant en oublie l'usage.

B44 pose le problème de l'introduction brutale du formalisme à l'université. Dans le secondaire, les quantificateurs sont écrits avec les mots de la langue, ce qui n'est plus le cas à l'université où les symboles apparaissent. Cet étudiant, et d'autres avec lui sont désemparés par cette pratique enseignante.

Dans sa réplique, **M39** montre que, pour lui, ce n'est pas la forme (langue naturelle ou symbole) des quantificateurs qui importe, mais leur usage : le concept doit être opératoire chez eux. D'autre part, il sait que l'inversion des quantificateurs va provoquer le changement de signification de la phrase. Il y a une prise en compte explicite de la syntaxe et de la sémantique.

Ce que nous retenons de ces extraits :

- pour certains étudiants les énoncés des formes $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et $\exists y, \forall x, P(x,y)$, c'est la même chose, et pour d'autres, c'est différent . Il se pose la question de la distinction entre les deux écritures, c'est-à-dire, de la syntaxe dans l'utilisation des symboles ;
- les étudiants manifestent le besoin d'un travail sur les quantificateurs : le travail en cours de mathématiques sur la quantification est insuffisant, et ne leur permet pas de faire la distinction entre les deux écritures ;

Dans son article qui porte en sous-titre « *Un fragment d'expérience* », Helena Siwek (1973) avait posé le problème suivant :

> « C'est le problème de l'utilité et de l'efficacité de ce cours[48] qui se pose maintenant ; en particulier la question de savoir si l'introduction de notions fondamentales de logique et la présentation de quelques lois logiques influencent essentiellement le raisonnement des élèves. » (in Durand-Guerrier, 1996, p.122)

Les extraits ci-dessus nous amènent à faire l'hypothèse que la réponse est non.

Exemple 2 : La quantification bornée

La quantification bornée est une pratique ordinaire de l'enseignant. Elle consiste en ce que, lorsqu'on travaille dans un domaine $\mathcal{U}$ et qu'on veut exprimer une propriété P qui est vraie dans un sous domaine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{U}$, on fait porter la quantification sur ce sous-domaine $\mathcal{D}$. Réciproquement, si on a une implication universellement quantifiée sur un domaine $\mathcal{U}$, on peut la quantifier sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des objets qui vérifient l'antécédent : on a dans l'univers $\mathcal{U}$:

$$\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \ (1)$$

qui va s'écrire en utilisant la quantification bornée :

$$\forall x \in \mathcal{D}, Q(x) \ (2)$$

[48] Il s'agit d'un cours de logique de 15 heures environ qui avait été donné à des élèves de classes non différenciées de lycée.

où $\mathcal{D} = \{x/x \in \mathcal{U} \wedge P(x)\}$. L'implication dans (1) est vraie lorsqu'on instancie x par tous les objets de l'ensemble $\mathcal{D}$, et par tous les objets qui n'appartiennent pas à $\mathcal{D}$.
La définition de la continuité ci-dessous est tirée d'un manuel d'analyse de première année scientifique (Guégand & Gavini, 1995), à la page 108.

> « 2.1 Définition : Soit I un intervalle de R, $a \in I$ et $f : I \to R$
> On dit que f est **continue en $\boldsymbol{a}$** si et seulement si f admet $f(a)$ comme limite en a.
> Dans le cas contraire[49], on dit que f est discontinue en a.
> Explicitons cette définition :
> f continue en a
> $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (3)
> $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ (4)
> $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ (5) »

Dans l'écriture (5) l'implication qui apparaissait en (3) et en (4) a disparu. Chellougui justifie cette disparition par la pratique enseignante qui consiste à utiliser la quantification bornée, et conclut que c'est la quantification bornée qui cache l'implication.
En effet, la quantification bornée est présente en mathématique, mais absente dans le calcul des prédicats. Par exemple l'écriture mathématique $\forall x \in A, F(x)$ se traduit dans le calcul des prédicats par $\forall x, (A(x) \Rightarrow F(x))$, où $A(x)$ est la propriété $(x \in A)$. C'est bien ce qui explique le passage de (4) à (5).
Ce phénomène n'étant ni problématisé, ni explicité, il revient en général aux étudiants de le prendre à leur charge.
Il faut noter que cette pratique a des effets sur la manipulation des énoncés conditionnels universellement quantifiés. La tendance naturelle consiste en ce que, affirmer une implication c'est affirmer son antécédent : lorsqu'on écrit « $\forall x \in E, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ », on ne considère que le cas où l'antécédent est vrai. Ce phénomène permet d'une part d'expliciter l'apparition et la disparition de l'implication, et d'autre part de travailler dans des situations où l'antécédent peut être faux, dire « si $P(x)$, alors $Q(x)$ » ne garantit pas la vérité de $P(x)$.

2.2. La négation

En français, il ne se pose en général aucun problème lorsqu'il s'agit de donner la négation d'une proposition singulière : la forme négative dans la grammaire française et la négation en mathématiques coïncident : la négation de « *2 est un entier naturel pair* » (1) est « *2 n'est pas un entier naturel pair* ». La règle de construction de la négation qui consiste à

[49] Il faut noter que c'est de la négation qu'il s'agit ici : « Si f n'est pas continue, on dit que f est discontinue ». on utilise « le cas contraire » pour parler de la négation.

appliquer « ne … pas » sur le verbe, ne correspond plus à la négation mathématique pour des énoncés quantifiés ou des énoncés conditionnels.

Nous avons vu dans le cadre du calcul des prédicats, que la négation recouvre un aspect sémantique et un aspect syntaxique. Le phénomène courant qu'on observe en mathématiques, c'est que l'articulation entre les deux aspects n'est pas travaillée le plus souvent. La négation est un connecteur logique qui est utilisé très tôt. La plupart des enseignants font l'hypothèse que son usage n'est pas problématique.

Or, en français, l'utilisation de la forme négative génère des ambiguïtés pour les énoncés universellement quantifiés, et produit une réponse erronée pour les énoncés existentiels :

- la négation de « *toutes les boules sont rouges* » (2) est « *il existe des boules qui ne sont pas rouges* ». L'utilisation de la forme négative pour nier (2) va donner « *toutes les boules ne sont pas rouges* », énoncé qui dans la norme de la langue française signifie « *il existe des boules qui ne sont pas rouges* », mais qui peut parfois être interprété par certains locuteurs dans le sens de « *Aucune boule n'est rouge* » ;
- la négation de « *certaines entiers naturels sont pairs* » (3) est « *aucun entier naturel n'est pair* ». Si on utilise la forme négative pour nier (3), on obtient « *certains entiers naturels ne sont pas pairs* », qui n'est pas sa négation. C'est un énoncé qui est vrai, tout comme le (3). Ici, le critère sémantique n'est pas respecté.

Un fait marquant en logique est que la négation d'un énoncé conditionnel est une conjonction. L'antécédent n'est pas modifié et on prend la négation du conséquent. Ainsi, pour un énoncé conditionnel, la construction de la négation respecte une syntaxe qui n'est donnée ni par la forme négative, ni par la syntaxe à l'œuvre dans la construction de la négation des énoncés quantifiés. Par exemple, la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge (\neg Q)$. Pour les énoncés complexes, la construction de la négation est récursive, c'est par exemple le cas de l'énoncé formel :

$$\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \text{ dont la négation est } \exists x, (p(x) \wedge (\neg q(x)).$$

Ces trois types d'énoncés renvoient l'étude de la négation à des types de tâches bien distincts : nier des énoncés singuliers, nier une propriété, nier une relation, nier des énoncés conditionnels, nier des énoncés quantifiés, ou encore nier des énoncés plus complexes où se combinent à la fois plusieurs connecteurs logiques et la quantification. Cette étude est développée dans Durand-Guerrier & Njomgang Ngansop (2009).

La définition du concept de négation telle qu'elle est donnée en rappel en début d'année dans le cours[50], ne suffit pas à l'étudiant pour acquérir des compétences liées à ce concept.

2.3. L'implication - L'équivalence

L'implication est au centre de toute activité mathématique, elle est constitutive de la substance même des preuves et démonstrations, et au-delà, essentielle dans tout raisonnement scientifique. Il en est de même du concept d'équivalence encore appelé comme nous le signalions dans le paragraphe sur le calcul des prédicats, bi-implication.

2.3.1. L'implication

V. Durand-Guerrier (1996), dans une enquête épistémologique, met bien en évidence la multiplicité des notions recouvertes par le terme *implication*, à savoir, le conditionnel courant, l'implication matérielle, l'implication formelle, le syllogisme, les règles d'inférence et les lois logiques associées. Elle montre que « la notion d'implication est une notion riche, complexe et polysémique ; les études des psychologues […] tendent à prouver que l'acquisition des compétences liées à cette notion n'est pas avérée, même chez des sujets adultes » (p. 106).

Pour sa part, V. Deloustal-Jorrand (2004), dans sa thèse de doctorat, montre qu'une bonne appréhension et une bonne utilisation du concept d'implication passe par la connaissance et l'établissement des liens entre le cadre de la logique formelle, le cadre ensembliste et le cadre du raisonnement déductif[51]. Elle fait l'hypothèse que ce jeu de cadres (Douady, 1986) est suffisant si on arrive à le mettre en application.

Selon Quine (1950), toutes les notions recouvertes par le terme *implication* ont leur particularité dans leur traitement et leur usage. Durand-Guerrier (1996, 2003) a montré que ces distinctions ont une pertinence didactique.

Nous proposons ci-dessous des exemples d'activité qui mettent en jeu certains de ces aspects. Nous avons retenu quatre exercices[52] à travers lesquels nous mettons en évidence quelques difficultés que peuvent rencontrer les étudiants, dans le traitement de l'implication :

(1) Démontrer la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K.

[50] Les rappels de logique qui sont faits en début d'année sont contenus dans le cours d'algèbre. En analyse, le travail qui est fait par l'enseignant sur la logique, consiste généralement en des rappels de méthodes de démonstration d'une implication (voir analyse du polycopié de première année de licence au chapitre 3).

[51] Nous préciserons de quoi il est question dans la revue des travaux sur l'implication.

[52] Les items (1) et (2) ont été pris respectivement dans le manuel de terminale C (Mathématiques Terminale S, collection CIAM), et les items (3) et (4) sont issus respectivement de Durand-Guerrier (2003), et Durand-Guerrier (1996)

S'il existe deux éléments a et b $(a < b)$ de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $[a; b]$.

D'après les auteurs, cette propriété est une conséquence du théorème général « le théorème des valeurs intermédiaires ». Pour le traiter, on utilise le théorème général qui est une implication. Il s'agit d'identifier dans cette propriété, ce qui a valeur d'antécédent pour le théorème des valeurs intermédiaires afin de pouvoir appliquer ce théorème.

(2) Démontrer que :

(Q) « *Si une fonction est dérivable sur un intervalle K de ℝ, alors elle est continue sur cet intervalle* ».

On se place dans l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle, définies sur un intervalle de ℝ contenant K.

Dans cet exercice, (Q) est un énoncé universellement quantifié dont la quantification est implicite. Si on se place dans l'univers des fonctions numériques définies sur une partie de ℝ contenant l'intervalle K, son écriture formelle est : $\forall f, \mathcal{D}_K(f) \Rightarrow \mathcal{C}_K(f)$, $\mathcal{D}_K$et $\mathcal{C}_K$étant les prédicats qui s'interprètent respectivement par *être dérivable sur* K et *être continu sur* K. (Q) est une implication formelle, elle est vraie si chaque instantiation de f par un objet de l'univers du discours est une proposition vraie. Il est possible que cette quantification ne soit pas repérée par les étudiants qui la verraient plutôt comme un générique dont l'écriture formelle est $\mathcal{D}(f) \Rightarrow \mathcal{C}(f)$ et qui a la même structure que (P). Le traitement de cet exercice consiste à se donner un f générique, le supposer dérivable[53] et montrer qu'il est continu. On ne se soucie pas des fonctions g non dérivables sur K car pour ces fonctions-là, l'implication matérielle $\mathcal{D}_K(g) \Rightarrow \mathcal{C}_K(g)$ est vraie. C'est le mode de raisonnement qui, pour montrer que « $A \Rightarrow B$ » est vrai, consiste à supposer que A est vrai, et à démontrer que B est vrai sous l'hypothèse A. C'est le mode de raisonnement qui correspond à l'introduction de l'implication.

Il est habituel qu'on ne regarde pas le cas où A est faux[54] ; or, supposer que A est vrai ne signifie pas que A est vrai. Cette habitude de ne considérer dans la démonstration d'une implication, que le cas où l'antécédent est vrai, développe des connaissances-en-acte qui sont mises en défaut dans d'autres types de tâches.

[53] Supposer vrai s'apparente très souvent à déclarer vrai. On ne regarde pratiquement jamais le cas où l'antécédent peu être faux.

[54] Voir analyse manuel et polycopié, chapitre 3.

Dans le cas où A est faux, on a toujours $A \Rightarrow B$ qui est vrai, de ce fait, pour A vrai ou A faux, l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie.

(3) Donner l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient la propriété (P) :

« *Si x est pair, alors son successeur est premier.* »

Cet exercice correspond à l'exercice 1 des questionnaires que nous avons proposés aux élèves et aux étudiants.

La tâche demandée est inhabituelle ; on doit vérifier qu'une implication matérielle est vraie ou fausse. (P) est une implication ouverte dont l'écriture formelle est

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

où P est le prédicat qui s'interprète par *être pair*, et Q le prédicat qui s'interprète par *avoir son successeur premier.* Cet exercice consiste en l'évaluation des implications matérielles obtenues par instantiation de x par des valeurs comprises entre 0 et 20. Il faut donc connaitre les règles de vérité d'une implication matérielle.

Nous en ferons une analyse approfondie au chapitre 8

(4) Dans ce qui suit, (u_n) désigne une suite définie par récurrence sous la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ », où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On a alors le résultat suivant :

« Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si :

a. L'équation « *f(x)=x* » n'a pas de solution

b. L'équation « *f(x)=x* » a au moins une solution.

Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « *f(x)=x* » si :

c. La suite (u_n) est convergente

d. La suite (u_n) n'est pas convergente

Cet exercice figure «également dans nos questionnaires (n°6 pour le questionnaire étudiants, et n°5 dans le questionnaire adressé aux élèves). Il est relatif aux règles d'inférence, en particulier le Modus Ponens et le Modus Tollens, et renvoie à la question de savoir quelles inférences sont permises.

Ces quatre exercices montrent bien quatre traitements différents de l'implication. Dans le premier exercice, il faut identifier un antécédent pour appliquer un théorème général dont la structure logique est une implication ; dans le deuxième, on a une implication formelle dont le traitement fait appel à des connaissances mathématiques ; dans le troisième exercice, on a une implication ouverte dont le traitement nécessite le recours à l'implication matérielle : on est ainsi renvoyé à l'implication dans le cadre de la logique propositionnelle. Enfin dans le dernier item, on a le traitement de l'implication en relation avec les règles d'inférence permises. Ceci permet de travailler sur la distinction entre « implication vraie dont la réciproque est fausse » et « équivalence vraie ». Pour le dernier cas, l'implication est utilisée dans le cadre du raisonnement déductif.

2.3.2. L'implication et l'équivalence

Dans la classe de mathématiques, il est habituel de séparer les équivalences en deux implications, adoptant le point de vue syntaxique « bi-implication ». En France, ceci a été une recommandation des programmes de collège jusqu'à la fin des années 2000. Dans les programmes actuels en France, il est demandé d'introduire le théorème de Pythagore comme une propriété caractéristique, c'est-à-dire, sous la forme d'une équivalence.

Au Cameroun, la recommandation officielle veut que le théorème de Pythagore soit énoncé en deux phases : le théorème direct et sa réciproque[55] :

- Triangle rectangle
  - Propriété de Pythagore: thèorèmes direct et réciproque.

avec en commentaire :

- Utiliser la propriété de Pythagore pour calculer une distance (choisir les données pour ne pas avoir de problème de radical).
- Utiliser la réciproque pour justifier qu'un triangle est rectangle.

Cette pratique ne favorise pas une bonne appropriation de la distinction entre une implication et une équivalence.

Cette difficulté à faire la distinction entre ces deux notions est renforcée par les pratiques ordinaires comme dans les exemples ci-dessous :

<u>*Exemple 1*</u> :

Considérons le théorème selon lequel « *toute fonction dérivable en un point a de son ensemble de définition est continue en ce point* ». Le seul exemple dans l'enseignement secondaire, de fonction continue et non dérivable, c'est-à-dire qui met en défaut la réciproque, est la *fonction valeur absolue*. Les fonctions qui sont données aux élèves sont en général continues et dérivables, et de plus, l'étude de la continuité vient avant celle de la dérivabilité de la fonction. La dérivabilité n'est pas étudiée en les points où la fonction n'est pas continue.

[55] Contenu dans le « Programme de mathématiques de l'enseignement secondaire général » mis en place à la rentrée scolaire 1994/1995.

Ce qu'on n'explicite pas, c'est que, si la fonction n'est pas continue en a, alors elle n'est pas dérivable en a, contraposée du théorème sus-cité. Cela reste du domaine de l'implicite.
Dans le plan d'étude d'une fonction d'un cours auquel nous avons assisté, on demande d'étudier la continuité puis la dérivabilité ; dans les exercices[56] qui portent sur l'étude des fonctions numériques, il est écrit :

« étudier la continuité et la dérivabilité de f »

Ainsi, les élèves commencent par étudier la continuité de la fonction, puis la dérivabilité en les points où la fonction est continue. On retrouve ici une pratique opératoire dont la forme prédicative est celle de la contraposée.
Par ailleurs, les fonctions étudiées la plupart du temps sont dérivables en les points où la fonction est continue. Ce plan d'étude des fonctions peut contribuer à installer chez les élèves, la réciproque de ce théorème comme un énoncé vrai.
Le théorème ci-dessus est un bon candidat pour l'explicitation des règles d'inférence :

- du point de vue de l'énoncé direct, pour étudier la continuité, on étudie la dérivabilité. Si la fonction est dérivable, alors elle est continue, sinon, on ne peut rien dire de la continuité, on est amené à l'étudier ;
- du point de vue de la contraposée, si la fonction n'est pas continue, alors, elle n'est pas dérivable ; si elle est continue, on ne peut rien dire de la dérivabilité, on est donc amené à l'étudier.

De ces deux points de vue, l'étude de la continuité se ferait dans les cas où la fonction n'est pas dérivable, et celle de la dérivabilité, lorsqu'on sait que la fonction est continue ; la continuité est une condition nécessaire à la dérivabilité, elle n'est pas suffisante.
Exemple 2 : On considère dans l'exercice (3) ci-dessus l'énoncé, $(\mathcal{E})$ « *Si la suite* (u_n) *est convergente, alors sa limite est solution de l'équation f(x)=x* ». À la question de savoir ce qu'on peut dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) lorsque l'équation « *f(x)=x* » a au moins une solution, Durand-Guerrier (2003) au cours d'une expérimentation avec des étudiants a obtenu 142 réponses sur 273 qui disaient que « *la suite converge* ». Les étudiants utilisent la réciproque de $(\mathcal{E})$. Nous avons également par des observations naturalistes, observé ce comportement chez les élèves. Cela peut s'expliquer par des habitudes scolaires : une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ étant donnée, pour étudier sa convergence, l'élève commence généralement par résoudre l'équation $f(x) = x$. Lorsqu'il trouve une solution, il démontre que la convergence de la suite est effective. Les exercices où l'équation $f(x) = x$ a

[56] Manuel « mathématiques Terminale S » collection CIAM (p.229)

au moins une solution avec la suite qui ne converge pas ne sont que très rarement abordés dans le cours[57].

Les pratiques scolaires peuvent ainsi contribuer à installer des conceptions erronées de certaines notions logiques. Ceci met en valeur selon nous, le fait que la vigilance épistémologique (Artigue, 1990) doit s'exercer aussi pour les concepts de logique dans la classe de mathématiques.

Conclusion

Nous avons présenté quelques items qui illustrent la complexité des concepts logiques que nous étudions, et quelques difficultés que les étudiants rencontrent dans l'utilisation de ces concepts, cela pour des énoncés simples. À l'université, comme nous le disions dans l'introduction, on rencontre des énoncés dont le niveau de complexité logique est nettement plus élevé, du fait de leur structure et de la manière dont les notions de logiques y sont imbriquées.

3. La complexité logique des énoncés mathématiques à la transition Lycée-Université : deux exemples d'analyse logique d'énoncés mathématiques

Au fur et à mesure que les élèves et étudiants avancent dans leur cursus, ils sont confrontés à des énoncés mathématiques de plus en plus complexes : c'est le cas par exemple de la définition de la continuité d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point x_0 qui est donnée en première année d'université. Au lycée, cette définition est introduite par le biais de la notion de limite, alors qu'à l'université, c'est le langage mixte ou formel qui est utilisé (Bloch & Ghedamsi, 2005), lequel n'est pas toujours à la portée des étudiants. Cette complexité d'ordre linguistique et mathématique renforce les difficultés dans le traitement des énoncés, mais nous ne nous y attardons pas ; cet aspect sera traité dans la partie expérimentale. C'est la complexité logique des énoncés, laquelle est en rapport avec notre problématique, qui retiendra notre attention.

En accord avec Quine (1950), nous disons que la formalisation des énoncés mathématiques participe de la clarification conceptuelle. C'est ce qui guide les analyses logiques des deux énoncés que nous proposons de mener dans la première et la deuxième partie de ce paragraphe. Dans la troisième partie, nous montrons la pertinence de ces analyses logiques.

Les énoncés que nous avons sélectionnés pour nos analyses sont les suivants :

Théorème (caractérisation de la *continuité* à l'aide de *suites*)

[57] Nous verrons dans l'étude des manuels au chapitre suivant, que les suites en question sont pour la plupart du temps convergentes

f est une fonction continue sur un intervalle réel A, a est un élément de A, et $(u_n)_n$ est la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$;

($\mathcal{E}1$) « *Si pour toute suite* $(u_n)_n$ *à valeurs dans A telle que* $lim_{n\to+\infty} u_n = a$ *on a* $lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$*, alors f est continue en a* »

C'est un théorème d'analyse réelle, qui permet de caractériser la continuité d'une fonction à l'aide des suites convergentes. Il est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas continue. Une analyse logique de ce théorème est proposée par Durand-Guerrier & Njomgang Ngansop (2009).

La conjecture de Goldbach (1690-1764):

($\mathcal{E}2$) « *Tout entier pair* n*, supérieur ou égal à* 4 *est la somme de deux nombres premiers* »

Cette conjecture est l'un des deux problèmes posés par Christian Goldbach à Euler en 1742, et qui jusqu'à présent reste un problème ouvert.

3.1. Le premier énoncé : caractérisation de la continuité à l'aide des suites convergentes

($\mathcal{E}1$) : « *Si pour toute suite* $(u_n)_n$ *à valeurs dans A telle que* $lim_{n\to+\infty} u_n = a$ *on a* $lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$*, alors f est continue en a* »

Cet énoncé est tiré du chapitre 4 du cours d'Analyse 1, dispensé en janvier 2006 par Guy LAFFAILLE et Christian PAULY[58] à l'Université de Montpellier 2.

Les raisons du choix de cet énoncé viennent du fait que :

- on est en présence d'un théorème énoncé en langage mixte et d'apparence simple ;
- la démonstration se fait par contraposition mais la contraposée de ($\mathcal{E}1$) n'est pas explicitée

Nous allons écrire l'énoncé ($\mathcal{E}1$) de façon un peu plus détaillée afin d'en faire ressortir les différentes parties :

« si (« pour toute suite $(u_n)_n$ à valeurs dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ » on a « $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ ») (i), alors (*f* est continue en *a*) (ii) ».

Si … alors … indique qu'on est en présence d'un énoncé conditionnel dont l'antécédent est (« pour toute suite $(u_n)_n$ à valeurs dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ » on a « $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ ») (i), et le conséquent (*f* est continue en *a*) (ii).

[58] Professeurs à l'Université de Montpellier 2

Cette première reformulation met en évidence le fait que l'antécédent de l'implication est un énoncé conditionnel universellement quantifié.

Nous allons donner l'écriture symbolique de cet énoncé en traitant d'abord l'antécédent, puis le conséquent :

<u>Formalisation de l'antécédent</u> :

pour toute suite $(u_n)_n$ *à valeurs dans A telle que* $lim_{n\to+\infty} u_n = a$ *on a* $lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ (i)

(i) peut encore se formuler ainsi :
pour toute suite $(u_n)_n$ *à valeurs dans A , si* $lim_{n\to+\infty} u_n = a$, *alors,* $lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ (iii)
qui s'écrit :

$\forall u, (\lim u = a \Rightarrow \lim f \circ u =$ (iv)

u est la suite de terme général u_n

Désignons par :
F le prédicat à deux places, où le premier terme est une suite à valeurs dans A et le deuxième un nombre réel, qui s'interprète par « converger vers » ; autrement dit $F(u, a)$ s'interprète par la suite u converge vers le réel a.
G le prédicat à trois places où le premier terme est une fonction, le deuxième une suite et le troisième un nombre réel, et tel que $G(f, u, a)$ s'interprète par « l'image par f de la suite u converge vers le réel $f(a)$ »;
La formule (iv) s'écrit avec les lettres de prédicat définies ci-dessus :

$\forall u, (Fu, a) \Rightarrow G(f, u, a))$ (v)

<u>Formalisation du conséquent</u> : *f* est continue en *a*
Si on appelle H le prédicat à deux places dont le premier terme est une fonction et le second un réel, et qui s'interprète par « la fonction ... être continue en … », l'écriture formelle du conséquent est :

$H(f, a)$

En restituant la quantification universelle implicite dans l'énoncé, on obtient l'énoncé formel ci-dessous, dont l'énoncé initial est une interprétation :

$$\forall f \ \forall a \ \left[\left(\forall u \ \left(F(u, a) \Rightarrow G(f, u, a)\right)\right) \Rightarrow H(f, a)\right] \text{(a)}$$

où f, a et u prennent leurs valeurs respectivement dans l'ensemble des fonctions numériques, des réels et des suites numériques à valeurs dans A. L'antécédent est un énoncé conditionnel, et contrairement à ce qu'on aurait pu croire en première lecture, on est bien en présence d'une proposition, toutes les variables étant liées par le quantificateur universel.

Le cours d'Analyse 1 de Guy LAFFAILLE et Christian PAULY comporte un chapitre –le chapitre 2- intitulé « Logique et langage des ensembles » dont le but est « de présenter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ qui apparaitront dans ce cours (limite d'une suite, continuité d'une fonction) et de rappeler les définitions élémentaires de la théorie des ensembles » (op.cit., p.15).

Dans notre mémoire de Master 2, après une analyse de ce cours[59], nous concluons que les notions de logique présentées dans ce chapitre 2 sont insuffisantes pour la compréhension de la suite du cours, du fait de l'absence d'explicitation d'un certain nombre de questions :

- la notion de contraposition est donnée sous forme propositionnelle dans le chapitre sur la logique ainsi : « la contraposée : c'est l'équivalence déjà vue[60] $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\ Q \Rightarrow non\ P)$, P et Q sont des propositions » ;
- ils donnent la négation des formules contenant le quantificateur universel et le quantificateur existentiel respectivement :

$$non\big((\forall x)R(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)\big(non\ R(x)\big)$$
$$non\big((\exists x)R(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)(nonR(x)\ )$$

  Les auteurs énoncent la négation de « *f est continue en* a » et commencent directement la preuve : on peut faire l'hypothèse que les étudiants auront des difficultés à établir la contraposée de l'énoncé à démontrer. Beaucoup de connaissances sont supposées acquises par les étudiants. Il en est ainsi de l'utilisation des tables de vérité et de la signification exacte des symboles logiques et mathématiques.

La formalisation de l'énoncé $(\mathcal{E}1)$ nécessite qu'on explicite la quantification. Si les variables f et a ne sont pas liées, on obtient une phrase ouverte du fait que nous sommes dans le cadre du calcul des prédicats. En effet, lorsqu'on formalise un énoncé dans ce cadre, la lettre prend le statut de variable, et elle est soit liée, soit libre. Lorsque dans une formule toutes les

[59] Voir annexe 1 : analyse cours
[60] Ils ont écrit cette équivalence en proposition 2.1.1.

variables sont liées, on a un énoncé clos, et s'il en existe au moins une qui soit libre, on a un énoncé ouvert. On ne peut formaliser un théorème[61] par un énoncé ouvert.

<u>Remarque</u> : Nous avons considéré comme domaine pour les suites, l'ensemble des suites numériques à valeurs dans A, c'est-à-dire que nous avons en réalité borné la quantification. En prenant les suites dans l'ensemble des suites numériques, on obtient la formule :

$$\forall f\ \forall a\ \left[\left(\forall u, (A(u) \Rightarrow\ \left(F(u,a) \Rightarrow G(f,u,a)\right))\right) \Rightarrow H(f,a)\right] \text{ (a')}$$

qui est logiquement équivalent à :

$$\forall f\ \forall a\ [(\forall u, ((A(u) \wedge F(u,a)) \Rightarrow G(f,u,a))) \Rightarrow H(f,a)] \text{ (a'')}$$

où $A(u)$ s'interprète par « u est une suite à valeurs dans A ». Cela complexifie davantage la formule ; néanmoins, la prise en compte du domaine de quantification est essentielle lorsque l'on va utiliser ce théorème pour étudier la continuité d'une fonction donnée.

Il faut noter que selon la pratique mathématique ordinaire, les deux quantificateurs universels en tête de l'énoncé conditionnel sont sous-entendus dans l'énoncé initial ; tandis que le quantificateur universel qui figure dans l'antécédent de l'énoncé et qui lie la variable u est explicité. Cette explicitation est nécessaire, sinon son absence va produire un énoncé ambigu. En effet, si on a la formulation où le quantificateur universel est implicite :

« Si pour une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$, alors f est continue en a »

Il faudra déterminer :

- la portée du quantificateur ;
- l'interprétation de *une* (une suite) : universelle ou existentielle ?

La démonstration par contraposition demande la construction de la négation des énoncés (i) et (ii), ce qui peut s'avérer difficile car ni la négation des énoncés du type (i), ni celle des énoncés du type (ii) ne sont explicitées dans le cours.

La structure logique de la contraposée de (a) est :

$$\forall f\ \forall a\ \left[\left(\neg H(f,a)\right) \Rightarrow\ \left(\exists u(F(u,a) \wedge \neg G(f,u,a)\right)\right]$$

[61] Dans une théorie mathématique donnée, un théorème est un énoncé clos vrai qui peut être établi au moyen d'une démonstration. (Durand-Guerrier, 2011)

Nous faisons l'hypothèse que pour l'étudiant il est difficile de lier les écritures formelles de l'antécédent et du conséquent à celle qui est donnée dans le chapitre 2, à savoir « $\forall x, R(x)$ » où la quantification s'applique à une formule atomique comportant une seule variable.

Ecrire la contraposée de cette proposition suppose que l'on sache :

1. reconnaître la portée des différents quantificateurs ;
2. repérer la hiérarchie des deux implications ;
3. que la contraposée d'une implication universellement quantifiée est une implication universellement quantifiée ;
4. construire la négation d'un énoncé universellement quantifié ;
5. construire la négation d'un énoncé conditionnel.

L'analyse logique de cet énoncé met en évidence une complexité de la structure logique, qui est insuffisamment prise en compte dans les éléments de logique introduits dans le chapitre 2 du polycopié de G. Lafaille et C. Pauly. Il faut noter que la forme logique de la contraposée met en valeur ce qu'il faut mettre en œuvre pour la prouver, et éclaire ainsi le premier pas de la démonstration des auteurs.

L'omission des deux quantificateurs universels en début d'énoncé ne gênera pas, du point de vue de la logique, l'établissement de la contraposée, car ces quantificateurs ne changent pas. Mais il est possible que les étudiants les changent, car ces derniers associent souvent la négation au changement de quantificateur.

L'explicitation de la quantification universelle portant sur la variable u dans l'antécédent est indispensable, car cela permet de lever des ambiguïtés. En outre, ceci est constitutif de la signification de l'énoncé et met en évidence ce qu'il faut faire pour utiliser cet énoncé pour une fonction et un réel donné : considérer une suite générique. Par ailleurs, le quantificateur doit être changé lorsque l'on prend la négation. Ceci est à mettre en rapport avec ce que Durand-Guerrier et Arsac (2003) ont mis en évidence, à savoir, le fait que l'expert contrôle le niveau de rigueur qu'il s'impose par sa connaissance des cas où relâcher la rigueur pourrait être dangereux.

3.2. Le deuxième énoncé : la conjecture de Goldbach

($\mathcal{E}2$) : « *Tout entier pair n supérieur ou égal à* 4 *est la somme de deux nombres premiers* »

Comme nous l'avons dit plus haut, c'est un problème ouvert, en ce sens que sa démonstration n'est pas encore établie. Nous précisons que l'univers considéré est l'ensemble des entiers naturels. Cet énoncé figure dans le questionnaire que nous avons proposé aux étudiants. Le travail que nous leur avons demandé était d'exprimer cette conjecture dans le langage formel.

Cette phrase qui est énoncée en langage courant est d'apparence simple et compréhensible par le lecteur. Néanmoins la formalisation de cet énoncé nécessite que soient levés les implicites inhérents à la langue naturelle.

L'énoncé proposé est de la forme « Tout A est B », où A est mis pour « *nombre entier pair supérieur ou égal à 4* » et B, « *nombre (écrit comme) somme de deux nombres premiers* ». Nous allons paraphraser l'énoncé ($\mathcal{E}2$) afin d'en déterminer la structure logique.

<u>Explicitation du conditionnel :</u> Suppression de la quantification bornée et introduction d'une variable

> ($\mathcal{P}1$) « Pour tout entier n, si n est pair et supérieur ou égal à 4 alors, n est la somme de deux nombres premiers ».

La variable n prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres entiers.

On a une implication formelle, où la quantification universelle porte sur la variable n. L'antécédent est « *n est pair et supérieur à 4* », et le conséquent, « *n peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers*

Jusque là, la formulation du conséquent n'est pas explicite ; il s'agit de formaliser la propriété « *être la somme de deux nombres premiers* » en introduisant deux lettres de variable.

<u>Explicitation du quantificateur existentiel :</u>

Dire « l'entier n est la somme de deux nombres premiers » c'est dire « qu'on peut trouver deux nombres premiers dont n est la somme », ou encore, qu' « il existe deux nombres premiers p et q tels que leur somme soit égale à n ».

La conjecture s'énonce alors :

> « *Pour tout entier n, si n est pair et supérieur à 4, alors il existe deux nombres premiers p et q tels que leur somme soit égale à n* ».

On note :

P la propriété qui s'interprète par « être premier » ;

$\mathcal{P}$ la propriété qui s'interprète par « être pair » ;

Q la propriété qui s'interprète par « être supérieur ou égal à 4 » ;

S la relation ternaire qui s'interprète par « être la somme de … et de … »

On obtient l'écriture formelle :

$$(\mathcal{P}2)\ \forall n\ ((\ \mathcal{P}(n) \wedge Q(n)) \Rightarrow (\exists p, \exists q, (P(p) \wedge P(q) \wedge S(\ n, p, q)))$$

Cette écriture fait apparaitre la forme de l'énoncé qui est un conditionnel universellement quantifié. Son antécédent est une conjonction de deux formules atomiques et son conséquent est un énoncé existentiel.

Dans l'explicitation du conditionnel qui est faite ci-dessus, on peut conserver la quantification bornée sur l'ensemble des entiers pairs. On obtient la formulation :

> $(\mathcal{P}3)$ « Pour tout entier pair n, s'il est supérieur ou égal à 4, alors, n est la somme de deux nombres premiers ».

qui devient après explicitation du quantificateur existentiel dans le conséquent :

> $(\mathcal{P}4)$ « Pour tout entier pair n, s'il est supérieur ou égal à 4, alors, il existe deux nombres premiers dont n est la somme ».

<u>Remarque</u> :

On peut encore supprimer la quantification bornée, ce qui donne lieu à l'apparition d'une nouvelle implication :

> $(\mathcal{P}5)$ « Pour tout entier n, (si n est pair, alors, (si n est supérieur ou égal à 4, alors, il existe deux nombres premiers dont n est la somme ».

D'où l'écriture formelle :

$$(\mathcal{P}6)\ \forall n, [\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \big(Q(n) \Rightarrow (\exists p, \exists q, P(p) \wedge P(q) \wedge S(\ n, p, q)\big))]$$

L'univers du discours est l'ensemble des nombres entiers.

L'écriture $(\mathcal{P}6)$ est équivalente à $(\mathcal{P}2)$, car on l'équivalence logique :

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

La seule variable qui apparait dans l'écriture $(\mathcal{E}2)$ est n, pourtant dans $(\mathcal{P}2)$, on a besoin de trois variables (n, p, q) définies dans $\mathbb{N} \times P \times P$. Il est possible d'avoir plus de variables en élevant le niveau de formalisation de cet énoncé : c'est le cas si on doit expliciter « p et q sont premiers », n est pair.

On passe d'une phrase qui a une structure linéaire (sujet/copule/attribut) à un énoncé conditionnel universellement quantifié, dont le conséquent est un énoncé existentiel.

Nous reviendrons sur une explicitation plus détaillée de cette conjecture au chapitre.

La paraphrase, puis la formalisation nous ont permis de faire ressortir :

1- la structure logique de l'énoncé ;
2- les variables pertinentes pour son traitement,
3- le quantificateur existentiel caché

La structure logique de cette conjecture nous donne des indications sur ce que l'on doit faire pour vérifier qu'un entier donné satisfait l'implication.

Les analyses des énoncés que nous avons menées, révèlent des structures logiques complexes des énoncés ($\mathcal{E}1$) et ($\mathcal{E}2$). Nous faisons l'hypothèse que ceci doit être travaillé lors de la transition.

3.3. La pertinence de l'analyse logique des énoncés mathématiques

Un énoncé mathématique formalisé n'est pas toujours une suite linéaire de symboles. On rencontre très souvent des structures imbriquées les unes dans les autres comme c'est le cas de :

$$\forall f\ \forall a\ \Big[\Big(\forall u\ \big(F(u,a) \Rightarrow G(f,u,a)\big)\Big) \Rightarrow H(f,a)\Big] \text{ (i)}$$

qui nous le rappelons, est la formalisation de ($\mathcal{E}1$) ci-dessus. Ici, il y a imbrication d'un énoncé conditionnel dans un autre. La suppression de la quantification bornée sur l'ensemble des suites à valeurs dans A pour a donné la formule (ii) :

$$\forall f\ \forall a\ \Big[\Big(\forall u, A(u) \Rightarrow\ \big(F(u,a) \Rightarrow G(f,u,a)\big)\Big) \Rightarrow H(f,a)\Big] \text{ (ii)}$$

qui a trois niveaux d'implication, la plus interne étant $F(u,a) \Rightarrow G(f,u,a)$.

Une analyse logique d'énoncé permet ainsi d'identifier les objets suivants :

- le type d'énoncé en jeu : énoncé ouvert ou énoncé clos ;
- les différentes variables et leur statut : variables libres, liées, éléments génériques ;
- les implicites dans la quantification ;
- les quantifications explicites et le champ des quantificateurs présents dans les énoncés.

Elle permet aussi de lever les implicites et les ambiguïtés sémantiques de la langue, et par là, d'expliciter la structure logique de l'énoncé et de rendre visible les choix faits par l'auteur ou la communauté mathématique. En outre, elle donne des indications dans des activités de preuve :

1) comment prouver l'énoncé ;
2) comment utiliser l'énoncé dans une preuve.

Concernant les ambiguïtés sémantiques de la langue, elles sont à l'origine de beaucoup d'incompréhensions et de confusions. Nous citons quelques expressions de la langue qui sont d'usage courant et qui portent ces ambiguïtés :

- *« tous ... ne ... pas ... »* utilisé pour la négation des énoncés quantifiés, qui se formalisent par « $\forall x, P(x)$ » (b).

  Certains sujets l'interprètent comme *aucun*. A ce moment, pour ces derniers, la négation de (b) est « $\forall x, \neg P(x)$ » (b') à la place de « $\exists x, \neg P(x)$ » (b''). Notons en outre que le plus souvent, il est plus aisé d'établir (b'') que d'établir (b') ;
- *deux à deux* : dans Durand-Guerrier (2011), l'auteure analyse la phrase « les faces d'un polyèdre régulier sont *deux à deux* superposables ». D'après elle, deux interprétations sémantiques sont a priori possibles :
  - chaque fois que je prends deux faces, elles sont superposables ;
  - chaque fois que je considère une face, je peux en trouver une différente que je peux superposer.

D'après l'auteure, du point de vue de l'analyse logique (*syntaxe*), étant donné une relation binaire $S(x, y)$, les deux interprétations ci-dessus correspondent à deux manières différentes de clore l'énoncé. La première interprétation donne la formulation suivante :

$$\forall x, \forall y, S(x, y)$$

La deuxième interprétation produit la formule :

$$\forall x, \exists y, (y \neq x \wedge S(x, y))$$

Pour Durand-Guerrier (2011), choisir une formulation de l'énoncé (forme syntaxique), revient à choisir une interprétation : la formulation logique permet de lever les ambiguïtés. (p.8)

Conclusion

Nous avons fait une analyse logique de deux énoncés mathématiques, qui avait pour but de montrer que certains énoncés mathématiques rencontrés en début d'université ($\mathcal{E}1$), voire susceptibles d'être rencontrés dès le secondaire ($\mathcal{E}2$) ont des structures logiques complexes.

Cette analyse a permis de mettre en évidence :

- l'importance de la détermination de la structure des énoncés : connaitre la structure d'un énoncé permet d'avoir une interprétation stable de cet énoncé ;

- la nécessité d'expliciter la quantification qui est un élément pertinent dans la structure des énoncés et dans leur signification. L'absence d'un quantificateur dans un énoncé peut générer des ambiguïtés ;
- l'existence des implicites dans la langue naturelle : nous avons identifié des implications et des quantificateurs cachés ;
- rôle des quantificateurs dans un énoncé : dans le premier item, du fait qu'il contribue à lever les ambiguïtés de la langue, à identifier la structure des énoncés.

Conclusion du chapitre 2

Nous avons fait une brève synthèse des travaux sur la logique du premier ordre par quelques auteurs contemporains. Chez tous ces auteurs, on voit émerger la notion de proposition. La distinction entre vérité dans une interprétation donnée et validité sera établit par Wittgenstein dans le calcul propositionnel. C'est Russell qui introduit les fonctions propositionnelles, ce qui ouvre la voie au calcul des prédicats qui constitue une théorie formelle de la quantification. Dans cette théorie, Tarski définit le concept de vérité à l'aide de la notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle par un élément de l'univers du discours, ce qui a permis l'extension des fonctions de vérité au calcul propositionnel.

À la suite de cette synthèse, nous avons présenté quelques éléments du calcul propositionnel et avons montré en nous appuyant sur des travaux de Durand-Guerrier et Arsac (2003), que le calcul propositionnel ne permet pas d'analyser le discours mathématique ; c'est le calcul des prédicats qui permet de rendre compte de la structure des énoncés.

Les concepts qui sont présents dans le calcul des prédicats, présentent une certaine complexité dans leur usage en mathématique. C'est le cas particulier de la quantification, de l'implication et de la négation que nous étudions.

La complexité se retrouve aussi dans les énoncés mathématiques à l'université, où on assiste à une augmentation du niveau du formalisme. Toutefois, certains énoncés sont formulés dans la langue naturelle ou dans le langage mixte, ce qui cache leur structure. L'analyse logique des énoncés permet de lever les ambiguïtés de la langue, et expliciter les structures. Nous faisons l'hypothèse qu'elle présente un terrain riche pour pouvoir travailler sur le formalisme logico-mathématique.

CHAPITRE 3 : Revue des travaux antérieurs

Introduction

Les analyses précédentes ont mis en évidence la complexité des concepts de logique et celle des structures logiques de certains énoncés mathématiques. Dans l'enseignement secondaire, l'enseignement des mathématiques est surtout basé sur des connaissances opératoires et les concepts sont utilisés comme des outils pour résoudre des problèmes, tandis qu'à l'université, les concepts deviennent des objets de savoir dont la complexité croit au fur et à mesure qu'on avance dans le cursus (Bloch & Ghedamsi, 2005). Cette complexité est renforcée par les pratiques expertes des enseignants qui disposent des moyens pour contrôler leurs productions, mais ces moyens de contrôle ne sont pas souvent explicités. Ceci est le cas en général en ce qui concerne les concepts de logiques (voir par exemple Durand-Guerrier & Arsac, 2003). De ce fait, l'appréhension de ces concepts reste à la charge de l'étudiant qui ne dispose pas toujours des connaissances ou des compétences nécessaires pour cela.

Plusieurs auteurs ont mis en lumière les difficultés rencontrées par les étudiants nouvellement arrivés à l'université pour une appropriation adéquate des notions logiques en jeu dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous présentons dans ce qui suit une revue de certains de ces travaux auxquels nous nous réfèrerons dans les chapitres suivants.

1. Transition lycée-université (Ghislaine Gueudet, 2008)

Les résultats que nous présentons sont issus de l'article intitulé :

« Investigating the secondary-tertiary transition »

Il a été publié dans la revue Education Studies in Mathematic en 2008.

Cet article fait suite à un cours donné à l'école d'été de didactique des mathématiques en 2007 dans le cadre du thème sur la transition lycée-université. L'objectif de cet article est de faire une synthèse sur les différents travaux français et internationaux relatifs à cette question.

En raison du foisonnement des textes qui abordent ce sujet, l'auteure porte son choix sur la littérature qui traite explicitement de la transition secondaire-supérieur. Elle précise que dans la suite de son texte, elle utilisera le terme *transition* pour désigner tout phénomène pointé, par l'auteur considéré, comme relevant de la transition secondaire-supérieur, ou tout autre phénomène de transition qui pourrait apparaitre à l'entrée à l'université, comme par exemple la transition d'un mode de pensée à un autre. Elle se propose de collecter les différents points

de vue sur la transition, mis en évidence par les différentes approches, et de rechercher comment ils contribuent à comprendre les questions didactiques posées par la transition secondaire-supérieur.
D'après l'auteure, les difficultés des étudiants sont le point central des études sur la transition. Les questions y relatives peuvent être classées en deux catégories : l'observation et l'analyse des difficultés des étudiants, et des propositions et évaluations des modèles d'enseignement.

Ces deux points sont en rapport avec notre méthodologie, qui consiste à observer les étudiants aux prises avec les questions de logique, les enseignants pendant les cours de mathématiques, et à faire des propositions pour un enseignement des concepts de logique, en relation avec l'activité mathématique.

Elle articule son article sur trois points principaux :

- les modes de pensée et l'organisation des connaissances ;
- la preuve et la communication en mathématiques ;
- la transposition didactique et le contrat didactique.

1.2 Un changement des modes de pensée et l'organisation des connaissances est nécessaire à l'université

D'après Tall (1991) :

> "The move from elementary to AMT[62] involves the significant transition: that from describing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on definitions" (p. 239)

Cette citation rejoint l'avis de plusieurs auteurs, selon lesquels, il faut un mode de pensée avancée lorsque les contenus mathématiques à l'université sont abordés.

L'auteure cite en exemple Robert (1998) qui a mené une analyse des contenus mathématiques enseignés à la fin du secondaire et en début d'université, et qui montre que certains de ces contenus sont intrinsèquement difficiles. C'est ainsi que cette dernière écrit :

> « Considering the official curriculum indicates that the mathematics taught from upper secondary school starts looking like (and this resemblance grows with the school years) 'the expert' mathematics (professional mathematicians), for the mathematical content but also for the expected practices. (p. 141, author's translation)[63] » (p. 240)

---

[62] Advanced Mathematical Thinking qui signifie la pensée mathématique avancée
[63] Considérant le curriculum officiel, il indique que l'enseignement des mathématiques du second cycle ressemble (et cette ressemblance augmente avec l'âge scolaire) aux mathématiques expertes (mathématiciens professionnels), pour ce qui concerne le contenu mathématique mais aussi pour toutes les pratiques attendues.

On retrouve cette difficulté intrinsèque dans les concepts de logique ; c'est ce que nous présentons dans la section 2 du deuxième chapitre, et dans la section 3 du même chapitre, nous présentons quelques éléments qui montrent la complexité de ces concepts dans leur usage en mathématiques, comme c'est le cas de la démonstration du théorème :

> f est une fonction continue sur un intervalle réel A, a est un élément de A, et $(u_n)_n$ est la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$;
> « *Si pour toute suite* $(u_n)_n$ *à valeurs dans A telle que* $lim_{n\to+\infty} u_n = a$ *on a* $lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$*, alors f est continue en a* »

Se référant toujours aux travaux de A. Robert (1998), l'auteure aborde la question de l'organisation des connaissances chez les mathématiciens. Ces derniers ne considèrent pas les concepts de façon isolée, mais les concepts et leurs propriétés sont organisés en réseaux. Cette organisation des connaissances peut être interprétée comme une condition nécessaire pour développer les modes de pensée et les raisonnements requis à l'université. Il y a chez les mathématiciens une certaine flexibilité dans le choix des ressources en situation de résolution de problème, une capacité à combiner différents raisonnements et modes de pensée. On ne retrouve pas cette flexibilité chez les élèves en fin de secondaire, ni chez les étudiants nouvellement entrés à l'université.

C'est précisément cet aspect que l'auteure aborde en se référent aux travaux de Sierpinska (2000) et Lithner (2000) :

- Sierpinska (2000) distingue entre la pensée théorique qui est caractérisée par des systèmes de concepts organisés et la réflexion sur les moyens sémiotiques de représentation, et la pensée pratique qui utilise des exemples prototypiques et des raisonnements basés sur la logique de l'action. D'après elle, les mathématiciens utilisent les deux modes de pensée : assez souvent, dans des situations familières, ils utilisent la pensée pratique, et dans des situations nouvelles ou face à des problèmes difficiles, ils utilisent la pensée théorique. Les difficultés que rencontrent les étudiants de première année peuvent être interprétées comme une conséquence de la pensée pratique.
- Lithner (2000) distingue deux types de raisonnement : le raisonnement plausible qui vise à guider vers ce qui est probablement la vérité et qui est basé sur les propriétés mathématiques ; et le raisonnement basé sur les faits établis. Il montre que les

stratégies que les étudiants de première année utilisent pour résoudre les tâches sont principalement basées sur les faits établis.

Alors que les mathématiciens développent d'autres modes de pensée et de raisonnement, les étudiants nouvellement arrivés à l'université restent sur le mode de pensée pratique et sur le raisonnement basé sur les expériences établies. Leur unique mode de pensée est lié aux situations et aux objets familiers, à cause de leur manque d'expérience en mathématique (p. 241).

Pour l'auteure, une autre raison issue des travaux de Lithner (2000) pourrait justifier le comportement des étudiants en situation de résolution de problème : ce dernier questionne la manière dont les enseignements sont dispensés à l'université : permettent-ils aux nouveaux étudiants d'expérimenter les raisonnements plausibles ? Battie (2003) identifie ce phénomène chez des élèves de terminale en France. Elle met en évidence leur aptitude à développer des raisonnements selon les dimensions opératoire (calcul, utilisation des théorèmes familiers, …) et organisationnelle (induction, contraposition, …) pour des tâches familières. Mais lorsqu'il s'agit de problèmes difficiles, ils se limitent à un traitement familier suivant la dimension opératoire. Elle démontre que cette difficulté provient du mode d'enseignement dans le secondaire. L'autonomie qui est laissée aux élèves dans des tâches prototypiques est limitée.

Les points de vue de Battie (2003) et Lithner (2000) amènent l'auteure à conclure que les difficultés que les étudiants rencontrent ne sont pas seulement dues aux différences observées dans les comportements des étudiants et des enseignants en situation. La manière dont les contenus sont enseignés dans le secondaire et à l'université en est également une cause (p. 242).

1.3 Le langage en mathématiques

Se basant sur des métaphores qui sont souvent utilisées pour évoquer ce qui se passe au cours de la transition secondaire-supérieur, l'auteure déclare :

> « University is seen as a new world, or at least a new country, with a new language and new laws that make the student feel like a foreigner. These are the laws and the language used by mathematicians[64]. » (p. 243)

[64] L'université est vue comme un nouveau monde, ou du moins comme un nouveau pays, avec un nouveau langage et de nouvelles lois faisant que les étudiants s'y sentent comme des étrangers. Ce sont les lois et le langage utilisés par les mathématiciens.

Elle pointe l'utilisation du langage dans l'activité mathématique, plus précisément dans l'élaboration de la preuve. D'après elle, les études sur la preuve ont montré qu'une minorité d'élèves arrivés en fin de secondaire pouvaient produire des preuves correctes.

L'auteur fait l'hypothèse que l'enseignement reçu à l'université est en partie responsable des difficultés que les étudiants nouvellement arrivés éprouvent à construire des preuves. En effet, d'après Dreyfus (1999), les enseignants des lycées et les manuels qui participent de la formation des élèves ne les aident pas à établir les « normes socio-mathématiques », ce qui signifie dans ce contexte, un critère partagé par les étudiants et les enseignants et qui permet de décider si une preuve est valide ou non, quelle explication est satisfaisante, … Cet aspect des mathématiques semble être laissé à la charge des étudiants (p. 243). Des variations dans la rigueur des preuves peuvent aussi être observées dans les manuels à l'université.

L'auteure illustre le manque de « norme socio-mathématique » à l'aide d'une étude de Durand-Guerrier et Arsac (2003) sur les preuves en (ε, δ) ; nous faisons la revue de cet article dans ce chapitre. Dans les manuels, on rencontre des situations variées, souvent pour le même contenu mathématique, comme par exemple la définition de la limite. Parfois, elle est écrite dans le langage formel avec les quantificateurs. Parfois elle est énoncée dans le langage courant. Parfois, le lien entre ε et δ est rendu explicite et s'exprime par la notation δ_ε, et parfois ce lien reste implicite. Ces mêmes auteurs montrent également que les mathématiciens jugent la validité de la preuve en utilisant simultanément les aspects syntaxique et sémantique. Pour G. Gueudet, ce qui semble le plus spécifique dans la « pratique des mathématiques avancées » et qui est requis à l'université, c'est l'aspect syntaxique et l'articulation entre la syntaxe et la sémantique. Les connaissances syntaxiques sont étroitement liées à l'utilisation des symboles, des quantificateurs en particulier. Comme le déclarent Ianone et Nardi (2008), les connaissances syntaxiques et le langage symbolique associé sont utiles pour produire des arguments formels et contrôler les connaissances sémantiques (p. 244).

L'auteure conclut :

> "It is the language of advanced mathematics, required to enter the mathematical community and to communicate inside this community" [65](p. 244)

D'après elle, ceci nous fait rentrer dans la dimension socio-culturelle du phénomène de transition. D'après Ianone et Nardi (2008), les connaissances syntaxiques sont caractéristiques

[65] C'est le langage des mathématiques avancées qui est requis pour entrer dans la communauté mathématique et pour communiquer à l'intérieur de cette communauté.

du « genre de discours » de la communauté scientifique. Les étudiants ont tendance à imiter ce « genre de discours » en mathématiques à l'université, mais cela les conduit généralement à faire des productions qui ressemblent à des mathématiques, souvent plus centrées sur la forme que sur le sens. Berger (2004), identifie l'apprentissage des nouveaux signes en mathématiques à l'apprentissage des mots nouveaux dans une langue étrangère. C'est avec l'aide des enseignants que le langage va pouvoir s'améliorer chez les étudiants.

Cette comparaison que fait Berger (2004) est assez pertinente dans la mesure où, les étudiants nouvellement entrés à l'université doivent faire usage du symbolisme qui jusque-là leur était inconnu ; le cours de mathématique dans le secondaire est dispensé dans le langage courant, et les symboles sont très peu utilisés. En outre, un apprentissage de la syntaxe du langage basé sur ces signes nouveaux s'impose.

L'auteure présente ensuite les travaux de Chellougui (2004) dont nous faisons une revue plus loin, qui portent sur l'utilisation des quantificateurs en première année d'université. Cette dernière a identifié plusieurs formes de formulation, soit dans le même manuel, soit par le même enseignant. Ils les utilisent souvent comme des abréviations, ce qu'ils n'acceptent pas des étudiants.

D'après l'auteure, les difficultés observées dans cette partie résultent seulement en partie de la manière dont les mathématiques sont enseignées à l'université. Il faudrait alors questionner la façon dont les contenus et les normes socio-culturelles sont enseignés dans le secondaire et le supérieur.

1.4 La transposition didactique et le contrat didactique

D'après l'auteure, les difficultés observées à la transition secondaire-supérieur pourraient provenir de la rupture dans les organisations mathématiques et le contrat didactique entre les deux institutions : le lycée et l'enseignement à l'université.

(a) Les organisations mathématiques au secondaire et à l'université

Elle rappelle qu'une organisation mathématique est une structure [T, τ, θ, Θ] ayant quatre composantes : T désigne un type de tâches, τ les techniques associées à ces tâches, θ la technologie qui est le discours qui explique et justifie les techniques, et Θ la théorie qui est le discours qui justifie la technologie.

Elle présente des exemples d'études sur les questions de transition, qui ont été menées dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, en s'appuyant sur les organisations

mathématiques. Des travaux de Bosch et al. (2004), il ressort de ces études que dans le secondaire, les organisations mathématiques sont limitées et centrées sur des types de tâches très peu variés, et très peu en rapport les uns avec les autres. Ils ne peuvent donc pas être intégrés dans des organisations mathématiques plus larges, caractérisées par une technologie commune et comprenant plusieurs types de tâches et techniques articulés entre eux (p. 246).
D'après l'auteure, les travaux de Winslow (2008) confirment ces résultats. Pour ce dernier, deux types de transitions apparaissent dans les activités mathématiques qui sont proposées à l'université. La première est une conversion entre une activité centrée sur le bloc technico-pratique [T, τ] au secondaire, vers une activité nécessitant une organisation mathématique plus complète à l'université. Dans la seconde transition, les types de tâches nécessitant des objets théoriques apparaissent : le bloc théorique [θ, Θ] d'une organisation mathématique déjà connue, devient le bloc technico-pratique de la nouvelle organisation mathématique (p. 247).
Pour comprendre davantage les attentes de l'institution universitaire, l'auteure propose de pendre en compte le contrat didactique dans les deux institutions.

(b) Le contrat didactique

L'auteure présente des études menées par Praslon (2000) sur la dérivée (p. 247). Il observe que dans le secondaire, les tâches sont divisées en plusieurs sous-tâches, les indications sont généralement données aux élèves pour les guider, ce qui ne permet pas de développer leur autonomie en mathématique, et enfin que la dérivée est surtout utilisée comme un outil. Tandis qu'à l'université, davantage de flexibilité est requise entre les cadres et les registres.
D'après l'auteure, étudier les questions de transition en se centrant sur l'institution peut guider à innover dans les modes d'enseignement au secondaire. Son constat est que l'enseignement secondaire ne forme pas les élèves pour des études scientifiques à l'université. D'après elle, les études réalisées sur la transition devraient plutôt contribuer à construire des modes d'enseignement à l'université consistant en premier, en une révision générale des activités du secondaire avec pour objectif de construire des organisations mathématique complètes (p. 248). Elle indique que la nécessité de cette reconstruction a été suggérée par Artigue (2001). Ce mode d'enseignement aiderait les étudiants à entrer plus facilement dans un nouveau contrat didactique.

(c) Les attentes de l'institution

D'après l'auteure, comparer les attentes des enseignants du secondaire et celles des enseignants du supérieur n'a pas encore fait l'objet d'une étude. Elle présente quelques investigations sur les recherches portant sur les attentes de l'institution universitaire, dans le but de les comparer avec des résultats provenant d'analyses des exercices de mathématiques proposés aux étudiants en cours, ou pendant les tutorats.

Elle s'interroge sur les attentes de l'université par rapport aux nouveaux étudiants. D'après elle, du point de vue de Rey et al (2003), les enseignants de l'université n'ont pas un objectif clair de ce qu'ils enseignent. Elle cite aussi Castela (2004) qui a également identifié ce manque chez les enseignants de mathématiques. Cette dernière fait l'hypothèse que cela pourrait les amener à enseigner les mathématiques « pour eux-mêmes », c'est à dire, avec des pratiques destinées aux mathématiciens, or une minorité de leurs étudiants vont devenir des mathématiciens professionnels (p. 249). Toujours d'après l'auteure, les auteurs précédemment cités observent que le travail individuel des étudiants est basé sur l'imitation des stratégies de résolution des exercices, et non sur le développement d'une réelle compréhension. Ce comportement des étudiants s'éloigne des attentes des enseignants, et s'explique, par le fait que, lorsque les enseignants doivent évaluer leurs étudiants, ils proposent généralement des sujets très proches de ceux qui ont été traités dans le but d'éviter des échecs massifs. Elle cite Castela (2004) qui a comparé ces étudiants aux étudiants des classes préparatoires. Alors que les premiers développent un travail superficiel consistant à imiter les techniques, les seconds développent des compétences pour aborder de nouveaux problèmes et transférer les méthodes maîtrisées, à de nouvelles situations (p. 250).

Pour l'auteure, selon Dreyfus (1999), le mode d'évaluation semble empêcher un changement nécessaire d'attitude chez les étudiants, et semble favoriser le développement d'une attitude opposée à celle qui est attendue par les professeurs de l'université.

1.5 Quelques propositions de l'auteur pour des actions didactiques

Parmi les propositions de l'auteure, nous avons retenu celles qui sont directement en lien avec notre propre travail.

L'étudiant qui arrive nouvellement à l'université est appelé à transformer, voire faire évoluer son mode de pensée, et arriver à organiser ses connaissances en réseaux. Cela lui permet d'acquérir une flexibilité dans le choix des ressources en situation de résolution de problème, une capacité à combiner différents raisonnements et modes de pensée.

Pour cela, l'auteure recommande un changement des types de tâches habituellement proposées. Elle propose une nouvelle gamme qui contiendrait une variété de tâches qui permettraient de développer différentes solutions, et de ce fait, contribuerait à entretenir une forme d'autonomie chez les étudiants en mathématiques.

Concernant les problèmes relevant du langage et de la preuve, les étudiants éprouvent des difficultés dans la production des énoncés mathématiques : utilisation incorrecte des signes, syntaxe incorrecte, ou incohérence globale du texte.

L'auteure suggère que davantage d'attention soit portée dans le traitement des énoncés mathématiques proposés aux étudiants en début d'université. Elle suggère aussi une formation pour les enseignants sur la question du langage mathématique en usage à l'université. Les étudiants quant à eux devraient s'accoutumer progressivement au nouveau langage. Ce langage semble être différent de ce qu'ils connaissent à cause des signes nouveaux, et une syntaxe qui semble très liée au raisonnement. L'utilisation du langage mathématique doit prendre en compte les aspects syntaxique et sémantique, et ceci est particulièrement sensible dans la production des preuves.

Sur la transposition didactique, l'auteure propose des actions qui permettraient aux étudiants de construire ou de reconstruire des organisations mathématiques complètes. Elle propose qu'ils soient confrontés à des tâches de niveau élevé[66]. En outre, la transposition didactique et le contrat didactique sont fortement interdépendants. Les attentes de l'institution universitaire nécessitent des étudiants un changement de comportement. Les évaluations dont la contribution dans les attentes de l'institution est cruciale semblent aller à l'encontre de ces attentes. Elle aborde dans le sens de Ridgway (1999), Haines et Houston (2001), pour un changement de mode d'évaluation.

Conclusion

Dans cet article, G. Gueudet pointe des problèmes qui émergent de plusieurs travaux sur la transition secondaire-supérieur :

- l'absence d'autonomie et de flexibilité des étudiants qui est due en partie au mode d'enseignement des contenus mathématiques. Ceci vaut en particulier pour les concepts de logique : les étudiants reçoivent peu d'enseignements sur ces concepts, et lorsqu'ils sont utilisés par les enseignants, ils ne les explicitent pas. De ce fait, les élèves développent des connaissances-en-acte que nous pouvons identifier à des imitations dont il est question dans l'article. Par ailleurs, plusieurs situations dont la résolution requiert que les concepts de logique soient mobilisés, sont traitées plutôt à l'aide des connaissances mathématiques. La prise en compte de ces concepts dans le traitement des situations mathématiques peut être une manifestation de la flexibilité

[66] Challenged tasks (p. 251)

dans l'utilisation de leurs connaissances. Du point de vue didactique, notre travail vise à proposer une contribution pour que cette flexibilité soit efficiente chez ces derniers ;

- le langage mathématique représente un obstacle à l'activité mathématique. L'usage que font les enseignants du supérieur des symboles logico-mathématiques n'est pas toujours partagé par les étudiants. Le langage symbolique doit faire l'objet d'un apprentissage ;
- la limitation des activités des étudiants à l'organisation mathématique technico-pratique : dans l'activité mathématique, les activités de logique se réduisent généralement à prouver la vérité d'un énoncé conditionnel universellement quantifié, construire la négation d'un énoncé quantifié dont les énoncés « internes » ne contiennent pas de quantificateur, … nous faisons l'hypothèse que la confrontation des étudiants à de diverses situations inhabituelles permet d'une part de les déstabiliser, et d'autre part, de les aider à élargir l'organisation mathématique dans laquelle ils évoluent : cela peut se faire dans le cadre de la dialectique outil-objet. L'action de l'étudiant en situation n'est plus une restitution des connaissances qu'il a mémorisées, mais elle va s'appuyer sur des connaissances théoriques et pratiques ;
- la nécessité de développer les recherches sur la transition lycée-université : un accent doit être mis sur les questions de logique et de langage à cette transition.

2. Logique et langage

Introduction

Le développement des compétences des étudiants dans l'utilisation de l'outil logique est lié à la maîtrise du langage utilisé : langage naturel et formalisme logico-mathématique. L'usage de chaque forme de langage dans les apprentissages en mathématiques nécessite une bonne connaissance de sa syntaxe qui s'articule avec sa sémantique, et d'un langage à un autre, ces deux points de vue peuvent changer.

2.1. Le langage de la quantification (Susanna Epp, 1999)

L'article que nous avons retenu est écrit en anglais. Il date de 1999, et a pour titre :

« The language of Quantification in mathematics Instruction »

Il est contenu dans le livre *Developping Mathematical Reasoning in Grades K-12*, au chapitre 16.

La problématique porte sur le développement des compétences des étudiants dans le raisonnement logique, plus particulièrement sur le langage de la quantification des énoncés en mathématiques et le maniement de ces énoncés.

Notre intérêt pour cet article vient du fait que notre travail vise à répondre à la possibilité de développer les compétences des étudiants dans l'utilisation des concepts de logique, en particulier pour ce qui concerne l'usage des quantificateurs. Nous y avons repéré quelques pistes qui pourraient orienter notre réflexion.

L'auteure est enseignante de mathématiques à l'université. Elle fait le constat que les difficultés de ses étudiants dans l'évaluation des énoncés et le raisonnement mathématique sont dues en grande partie à la confusion faite entre la signification de certains mots et expressions du langage naturel, et leur signification dans le langage mathématique.

2.1.1. Les formes variables des énoncés quantifiés

Au cœur du discours mathématique, on rencontre des mots qui renvoient à la quantité comme *tout*, *quelques* avec des variantes comme *quel que soit*, *chaque*, *aucun*. Elle présente une variété d'énoncés quantifiés que nous manipulons d'ordinaire dans l'activité mathématique. L'utilisation de ces énoncés nécessite qu'ils aient du sens pour les étudiants. Par exemple, quelles sont les différentes expressions qui marquent la quantification universelle ? Pour un énoncé universel, à quel moment est-il vrai ? Quand doit-on dire qu'il est faux ? À partir d'un énoncé vrai, que peut-on déduire ? Ces questions sont fondamentales du point de vue didactique. En effet, la multiplicité des mots de la langue et des formes d'expressions ne facilite pas toujours la compréhension des phrases. L'auteure souligne le cas des énoncés universellement quantifiés de la forme « All A are B »[67] qui peuvent se mettre sous la forme conditionnelle « if-then »[68] :

« *All squares are rectangle*[69] » peut être transformé en la forme équivalente « *for all x, if x is a square, then x is a rectangle*[70] ».

Concernant les énoncés existentiels, donnés sous la forme « Some A are B »[71], ils peuvent être reformulés avec l'expression « *il existe au moins un* » :

« *Rational numbers are integers* »[72] peut être écrit « *there exists a rational number x such that x is an integer* »[73].

Selon l'auteure, la maîtrise de ces différentes formes langagières facilite la manipulation des énoncés dans les registres de la langue naturelle et formelle. En effet, d'une part, le passage

[67] Tous les A sont B
[68] Si-alors
[69] Tous les carrés sont des rectangles
[70] Pour tout x, si x est un carré, alors il est un rectangle
[71] Certains A sont B
[72] Certains nombres rationnels sont des entiers
[73] Il existe au moins un nombre rationnel x, tel que x soit un entier

d’un langage à un autre passe par une paraphrase correcte des énoncés, et de ce fait, le choix des expressions justes, et d’autre part, l’identification des objets à partir de leurs formulations variées devient plus aisée.

Les travaux montrent que ces compétences ne s’acquièrent pas spontanément :

> « The ability to rephrase statements in alternate, equivalent ways, to recognize that other attractive-looking reformulations are not equivalent, and to have a feeling for truth and falsity of universal and existential statements are crucial in mathematical problem-solving tools. Yet numerous studies show that students do not acquire these abilities spontaneously[74]. » (p.2)

2.1.2. Des confusions entre le langage mathématique et le langage naturel

L’usage du langage courant va stabiliser les pratiques langagières et générer de nombreuses erreurs au cours de l’activité mathématique.

L’auteur propose l’exemple suivant :

Dans une classe, un enseignant fait la promesse suivante : « tous ceux qui seront calmes pendant le test sortiront pour jouer dans la cour ».

Si l’enseignant autorise les élèves bruyants à sortir, du point de vue logique, son acte est conforme à ce qu’il a dit. Le maître n’aura dit que ce qui arriverait aux élèves sages, et rien n’est dit à propos des élèves bruyants. Mais du point de vue du langage naturel, la déclaration du maître insinue que tous ceux qui seront dehors sont ceux qui auront été tranquilles pendant le test. C’est la réciproque de ce que le maître a promis. Elle est encore équivalente à : *ceux qui n’ont pas été tranquilles pendant le test ne pourront pas sortir*.

Il arrive que les mathématiciens, sachant qu’une implication est une équivalence, ne le précisent pas, et utilisent la réciproque de cette implication. Cette pratique peut contribuer à renforcer l’effet du langage naturel qui a lui-même tendance à favoriser l’utilisation de l’implication comme une équivalence. Il est certes vrai que dans la langue naturelle on rencontre très souvent de telles situations, mais ce n’est pas toujours le cas. L’auteur recommande aux enseignants à l’université d’être vigilants sur les relations logiques qu’entretiennent un énoncé et sa réciproque, et d’attirer l’attention des étudiants sur la possibilité pour ces deux types d’énoncés d’avoir des valeurs de vérité différentes.

Elle termine son article avec quelques propositions pour améliorer les performances logiques des étudiants.

[74] La capacité de reformuler, de reconnaître que des reformulations d’apparence attractive de ne sont pas équivalente, et d’avoir le sentiment de vérité ou de fausseté pour les énoncés universellement et existentiellement quantifiés sont des outils cruciaux pour résoudre les problèmes mathématiques. De nombreuses études montrent que les étudiants n’acquièrent pas spontanément ces capacités.

2.1.3. Quelques suggestions de l'auteur pour l'enseignement des mathématiques

Parmi les suggestions que l'auteur propose, nous en avons choisi trois que nous reformulons. Notre choix s'est porté sur les recommandations qui peuvent être mises en œuvre dans le cours ordinaire de la classe au niveau d'étude que nous avons ciblé, et à la faisabilité dans notre environnement de travail.

a) Les enseignants doivent exiger des étudiants qu'ils expliquent ou justifient leurs réponses. La critique de leur travail contribue à mettre en évidence les différentes erreurs de raisonnement qu'ils commettent, et d'argumenter davantage pour soutenir les conclusions auxquelles ils aboutissent. Cela a d'énormes avantages dans le développement intellectuel des étudiants.

   Nous pensons en effet que, expliquer ou justifier les réponses à un problème consiste à mettre en mots les connaissances qu'on utilise dans l'action ; c'est un exercice difficile. Il faut structurer ses idées, ce qui a un important coût cognitif.

b) La formulation des propriétés mathématiques données en langage formel, à l'aide des mots de la langue permet de les utiliser dans une diversité de situations. Il est assez simple pour des étudiants de reconnaitre une formule écrite avec les lettres habituelles, surtout lorsqu'elle est régulièrement utilisée en classe. Mais la signification ne suit pas forcément.

c) Certains enseignants ont développé des méthodes –des raccourcis, qui permettent aux étudiants de résoudre des problèmes, et ainsi, évitent de se heurter aux difficultés logiques et langagières que peuvent rencontrer ces derniers. Cette pratique prive l'étudiant des opportunités qu'il pourrait avoir de développer ses compétences dans le raisonnement logique. S. Epp donne par exemple le cas où il faut trouver l'inverse d'une fonction sans utiliser explicitement la définition de l'inverse.

En conclusion, l'auteure met l'accent sur la formation et le développement des compétences logiques des étudiants. L'acquisition de ces compétences n'est pas spontanée, il faudrait un travail permanent sur deux axes :

- le premier concerne le langage : il est nécessaire de développer la sensibilité des étudiants au langage mathématique, où le sens des énoncés n'est pas toujours le même que dans le langage naturel et de travailler sur les changements de langage, l'utilisation des symboles et leurs significations ;
- le second axe porte sur les concepts de logique en eux-mêmes. Le cours de mathématiques contient une diversité de situations que l'enseignant peut exploiter

pour expliciter davantage l'utilisation de ces concepts. L'auteur en présente quelques-unes.

2.2. Structure logique des énoncés mathématiques (Annie Selden et John Selden, 1995)

L'article que nous présentons est écrit en anglais et a pour titre :

"Unpacking the logic of mathematical statements"

Il a été publié en 1995 dans le volume 29 de la revue *Educational Studies in Mathematics*, et il va de la page 123 à 151. Les auteurs sont John SELDEN et Annie SELDEN.

La problématique est centrée sur le langage en mathématiques, plus précisément, la capacité pour les étudiants nouvellement arrivés à l'université, à pouvoir expliciter des énoncés mathématiques donnés dans la langue naturelle à l'aide des symboles mathématiques.

D'après les auteurs, plusieurs travaux sur la démonstration sont centrés sur le besoin d'améliorer la capacité des étudiants à comprendre les démonstrations produites par les enseignants et contenues dans les manuels. En revanche, « la méthode du débat scientifique » encourage plutôt les étudiants nouvellement arrivés à l'université à produire des preuves et à les évaluer eux-mêmes ; ils citent en particulier Alibert et Thomas (1991, p.227) :

> « Teaches them that proof is really a tool which may be used it improve ideas and separate false intuition, however natural it may appear, from true mathematical statements » (p.124)

C'est dans la deuxième perspective que les auteurs situent leur article, plus particulièrement, ils examinent la capacité des étudiants à clarifier la structure logique des énoncés mathématiques et à les utiliser dans la construction des démonstrations et leur validation.

Pour cela, ils choisissent comme population pour leur expérimentation, des étudiants qui souhaiteraient continuer leurs études en mathématiques, à un niveau où ils auront besoin de construire des preuves et de déterminer leur validité.

Les auteurs soutiennent que ceux qui n'arrivent pas à déterminer correctement la structure logique des théorèmes, ne peuvent pas non plus déterminer la validité de leurs preuves (p.125).

2.2.1. Définition des concepts clé

2.2.1.1. Preuve et validation

D'après les auteurs, il existe plusieurs types de preuves en mathématiques et plusieurs manières de les considérer. Ce qu'ils désignent par *preuve*, ce sont les preuves qu'on rencontre dans les manuels universitaires, ou ce qu'on peut demander aux étudiants à l'université de construire. (p.126)

Il nous semble que ce que les auteurs désignent par *preuves*, correspond aux démonstrations au sens de Balacheff (1982), c'est-à-dire :

> « une suite d'énoncés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est obtenu à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini (p.263) ».

Pour les auteurs, de telles preuves mobilisent pour leur construction, une flexibilité dans l'usage des concepts mathématiques. Néanmoins, dans cet article, ils restreignent leur étude à la structure logique des preuves, c'est-à-dire qu'ils considèrent les preuves dans la perspective d'établir la vérité des théorèmes, à l'intérieur d'une théorie et écartent toutes les autres considérations.

Les auteurs utilisent le terme anglais « *validation* » pour désigner la procédure qu'un individu met en œuvre pour déterminer si une preuve est correcte et si elle est réellement la preuve du théorème qu'elle dit démontrer. Nous le traduisons également par le terme « validation » en français. D'après les auteurs, cette procédure implique des questionnements et des réponses à de nombreuses questions qu'on se pose, et peut-être la construction de preuves secondaires. En outre, malgré sa complexité, la *validation* est en grande partie un processus mental, et contrairement à la construction de la preuve, il n'y a aucune production matérielle finale qui puisse être analysée. (p.127)

2.2.1.2. Énoncés informels

Pour les auteurs, un énoncé *informel* est un énoncé qui s'écarte d'une version dans le langage du calcul des prédicats, c'est-à-dire, qui n'utilise pas les expressions telles que « pour tout », « il existe », « et », « ou », « si… alors, … », « si et seulement si », avec leurs variantes.

Ils prennent les exemples suivants :

- « differentiable functions are continuous[75] » : par convention, le quantificateur universel est sous-entendu.

[75] Les fonctions différentiables sont continues

- « a function is continuous whenever it is differentiable[76] » : elle s'exprime sans le « si … alors … » qui traduit le conditionnel.

D'après les auteurs, ces formulations sont très courantes en mathématiques, et ne sont pas considérées comme ambigües ou mal construites, dans la mesure où elles sont comprises par un grand nombre de personnes. Elles sont rarement clarifiées, les conventions permettant leur interprétation précise par les mathématiciens, mais sûrement pas par les étudiants.

2.2.1.3.L'explicitation des énoncés informels

Les auteurs désignent par « expliciter la structure logique d'un énoncé informel », le fait d'associer à cet énoncé informel un énoncé formel d'où ressortent les éléments logiques y compris ceux qui, par convention, sont sous-entendus.

Notre commentaire : l'explicitation des énoncés informels est d'une grande importance dans l'activité mathématique car elle permet de lever les implicites de la langue et participe de ce fait à la clarification conceptuelle.

Les auteurs illustrent cette définition par un exemple :

> *(1) "In a compact semigroup every group is contained in its own maximal group which is closed"(p.128)*[77]

Un exemple d'explicitation logique est :

> *(2) "For every semigroup S and every group G, if S compact and G is a subgroup of S, then, there is a group H such that H is a subgroup of S, G is a subgroup of H, and H is maximal and closed"*[78]

D'après leur expérience, pour les besoins de l'enseignement, les énoncés informels de type (1) sont beaucoup plus compréhensibles que les énoncés formels de type (2), car ils sont plus faciles à appréhender, tandis que les énoncés de type (2) sont utiles pour les preuves :

> « We suspect informal statements may more nearly reflect an intuitive grasp of relationships between concepts while their more formal equivalent versions may capture the precision needed for validation proofs. » (p.128)

En commentaire, un énoncé formel fait ressortir la structure logique cachée de l'énoncé informel qui lui est associé, et donne des indications sur la manière dont on peut engager la démonstration de l'énoncé.

Selon les auteurs, la capacité d'expliciter les énoncés informels est en lien étroit avec la structure de la preuve, et joue un rôle important dans la construction et la validation des preuves.

---

[76] Une fonction est continue si elle est dérivable

[77] Dans un semi groupe compact, tout groupe est contenu dans son propre groupe maximal qui est fermé.

[78] Pour tout semi groupe S et tout groupe G, si S est compact et G est un sous-groupe de S, alors il existe un groupe H tel que H est un sous-groupe de S, G est un sous-groupe de H, et H est maximal et fermé.

2.2.1.4. Les structures des preuves

Par *structure de preuve*, les auteurs désignent une représentation de « haut niveau » d'une structure logique de preuve qui ne dépend pas du contenu mathématique mais qui est suffisamment riche pour permettre la reconstitution des énoncés prouvés ou leur équivalent. Une représentation écrite de cette structure peut se présenter comme une séquence d'énoncés séparés par des espaces et permettant de produire une preuve de l'énoncé en ajoutant des arguments complémentaires. (p.129)

Les auteurs proposent un exemple qui illustre la définition et montre le lien existant entre l'énoncé formel et le cadre de la preuve correspondant.

> « A proof framework and a corresponding formal statement can be thought of as containing the same logical information in different linguistic forms, with each obtainable from the others. » (p.130)

2.2.2. Les questions sous-jacentes

Les données recueillies par les auteurs suggèrent trois questions sous-jacentes :

- Quelle relation y a-t-il entre la capacité à expliciter la structure logique des théorèmes et comprendre ou faire des mathématiques, ou avec l'enseignement des mathématiques à l'université?
- L'incapacité des étudiants de niveau moyen à déterminer la structure logique des énoncés mathématiques est-elle une entrave à leur progrès ? Qu'en est-il des mathématiciens ? Peuvent-ils déterminer de façon fiable la validité des preuves ?
- Comment savoir si notre façon de faire est cohérente avec les pratiques des mathématiciens ? Comment savoir si d'autres points que nous mettrons en évidence concernant leurs pratiques sont exacts ? (p.130)

2.2.2.1. Les relations entre explicitation d'une structure logique et validation – Implication dans les activités mathématiques

Dans cette partie, les auteurs font le lien entre la validation et la capacité à expliciter les structures logiques. Ils soutiennent que les étudiants qui ne peuvent pas avec certitude expliciter la structure logique des théorèmes ne peuvent pas non plus valider les preuves. (p.130)

Ils montrent que l'étudiant qui est capable de construire la structure d'une preuve est capable de retrouver l'énoncé formel du théorème dont est issue cette structure. De ce fait, ils concluent que l'étudiant qui peut avec certitude valider les preuves peut également expliciter la structure logique des théorèmes donnés sous la forme informelle, et que la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Comprendre et apprendre les mathématiques avancées sont souvent considéré comme des constructions mentales de concepts chez un individu. En revanche, expliciter la structure logique d'un énoncé formel, construire des structures de preuves et les valider suit une certaine procédure, et peut être considéré comme relevant d'une habileté mentale. On pourrait voir leur apprentissage comme contribuant à développer des savoir-faire d'un individu.

2.2.2.2. Les images mentales liées à un énoncé (statement Images)

Pour définir ce concept, les auteurs considèrent les propositions. Ils appellent « *image mentales liées à un énoncé* », l'ensemble des structures mentales que le sujet lie à cet énoncé.

Nous faisons l'hypothèse que ces « images mentales » peuvent être rapprochées de la notion de « sens de l'énoncé » le terme « sens » ayant la signification donnée par G. Vergnaud (1991).

D'après les auteurs, valider la démonstration d'un théorème provoque une modification des connaissances de base et une amélioration des images mentales associées au théorème (p.133). De ce fait, pour des étudiants d'un niveau d'étude avancé, les images mentales relatives aux théorèmes contiennent les structures de preuve.

Les auteurs soutiennent qu'il est important de prendre en compte les relations complexes entre les concepts, exprimées dans les théorèmes. Ils choisissent comme unité d'analyse pour leur recherche, les images mentales qui ne correspondent pas seulement au concept, mais aussi aux théorèmes et, servent de support aux relations complexes entre les concepts. Ils définissent ainsi un cadre d'étude de leurs données en mettant en avant les concepts *d'énoncé formel, énoncé informel, structure de la preuve et explicitation des structures*.

2.2.3. Les résultats de l'expérimentation

Les auteurs s'interrogent sur la capacité des étudiants à valider de façon fiable les preuves, et à produire des cadres de preuves pour des théorèmes exprimés avec un énoncé informel. C'est ainsi qu'ils évaluent dans le test que nous décrivons ci-dessous, la capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels de l'analyse.

Leur expérimentation s'est déroulée au Tennessee Technological University aux Etats-Unis.

Les données ont été recueillies auprès de 61 étudiants, familiers avec le langage du calcul des prédicats. Ils sont inscrits dans un cours intermédiaire qui a pour but de faciliter la transition du niveau d'étude élémentaire, très calculatoire, au niveau supérieur où les connaissances sont plus abstraites. Les auteurs notent que ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année de l'université, mais on y retrouve des étudiants de niveau 3 et 4 qui ont reçu des enseignements supplémentaires dans divers champs mathématiques, et qui ont de bonnes performances académiques.

Les données proviennent de trois tests et de cinq examens.

Dans un premier temps, les auteurs proposent aux étudiants quatre énoncés simplifiés, dont deux sont vrais et les deux autres faux ; tous les quatre sont significatifs et ont une syntaxe correcte.

94 réponses sont collectées ($n = 31, n = 19, n = 24, n = 20$).

Énoncé 2 ($n = 19$)

« There is a function g such that $g' = f$ whenever f is continous at each x »[79] (4)

Les résultats proviennent d'un test et d'un examen final à l'issue de deux cours dispensés par deux instructeurs. Parmi les 19 étudiants qui ont répondu, seuls 2 d'entre eux ont pu expliciter correctement la structure logique de cet énoncé :

Les auteurs proposent un exemple d'explicitation correcte :

« $\forall f\ [(\forall x\ f\ is\ continous\ at\ x) \rightarrow \exists g\ g' = f]$ » (5)

et présentent une reformulation incorrecte qu'ils ont rencontrée :

« $\forall g\ \forall f\ \left[(g\ exists) \rightarrow [\forall x(f\ cont\ on\ x) \rightarrow (g' = f)]\right]$ » (6)

Parmi les erreurs que les auteurs ont relevées à la suite de ce test, figurent une utilisation inadéquate des quantificateurs et des connecteurs, la production de la réciproque d'un énoncé en lieu et place de l'énoncé demandé. Ils obtiennent un taux de réussite de 8,5%, et cela provient de 13,1% des étudiants interrogés.

Une autre expérimentation a consisté à proposer 9 énoncés –dont des énoncés en ε-δ portant sur la définition de la limite, du théorème de Rolle, … – à 24 des étudiants de la première expérimentation. À l'issue de cette expérimentation, les auteurs ont encore relevé de faibles performances des étudiants.

Cela les amène à conclure que cette étude montre qu'aucun étudiant ayant participé à l'expérimentation, malgré leur bon niveau en mathématiques, n'arrive à écrire les structures logiques des énoncés à l'aide du langage du calcul des prédicats. Et s'ils y arrivent, c'est de façon occasionnelle. Les représentations qu'ils ont d'un théorème énoncé de façon informelle ne contiennent pas la version formelle du théorème, par conséquent, ne contient pas le cadre de sa preuve.

[79] Il existe une fonction telle que $g' = f$ lorsque f est continue en tout point.

2.2.4. *Quelques suggestions des auteurs*

D'après les auteurs, la formation complémentaire reçue par les sujets concernés par cette étude leur donnait plus d'avantages pour ce travail que les étudiants nouvellement arrivés à l'université. De ce fait, les auteurs concluent que ces nouveaux étudiants ne seront pas en mesure d'expliciter aisément les structures logiques des théorèmes et des définitions.
Le résultat des analyses a conduit les auteurs à faire trois suggestions pour l'enseignement :

- les théorèmes et les définitions devraient être exprimés à l'aide des énoncés formels et informels ;
- les instructions ou les avis explicites sur la validation sont un domaine plus ou moins négligé. Ils devraient être communiqués aux étudiants et ne pas seulement se limiter à la preuve ;
- l'importance pour les étudiants de justifier leurs productions.

2.3. Négation logique et négation grammaticale (Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2005)

L'article dont nous nous proposons de faire la revue est intitulé :

« ***Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques*** »

Il a été publié en 2004 dans la revue *les cahiers du français contemporain*.

Dans cet article, les auteurs présentent des éléments d'une recherche qui se propose d'étudier, dans une perspective didactique, le fonctionnement de la négation dans trois registres, mathématiques, français et arabe dans le contexte de l'enseignement secondaire tunisien.

Pour notre travail de thèse, nous nous sommes intéressée au fonctionnement de la négation en français et en mathématiques ; dans la suite de notre travail, nous envisageons de prendre en compte le bilinguisme de fait au Cameroun, dans le cas des locuteurs bilingues ewondo-français. Une première exploration a donné lieu à une communication à l'étude ICMI 21[80].

D'après les auteurs, parmi les notions logiques qui apparaissent comme source de difficultés pour les élèves dans l'activité mathématique, se trouve la négation des énoncés universels. Ils citent les travaux d'El Faqih (1991) et de Durand-Guerrier (2000) qui confirment également le fait que la négation des énoncés quantifiés peut être problématique pour un non expert.

[80] Voir Annexe 13

Les auteurs font l'hypothèse que ces difficultés tiennent d'une part, au fait que la négation n'est pas seulement un connecteur de la logique classique, mais elle est aussi d'usage courant dans la langue naturelle et, d'autre part, au fait que les dimensions syntaxiques et sémantiques sont étroitement mêlées.

2.3.1. Quelques éléments d'épistémologie d'Aristote à Quine

2.3.1.1. Le concept de négation chez Aristote

D'après les auteurs, l'étude de ce concept remonte à l'Antiquité grecque. Il apparait dans le premier traité de logique – l'Organon qui signifie en grec *instrument*, qui regroupe les œuvres logiques d'Aristote. Dans le livre 2, *De l'Interprétation*, ce dernier traite des oppositions dans la langue vernaculaire, principalement en ce qui concerne les énoncés quantifiés pour lesquels il distingue deux types d'oppositions : l'opposition par contradiction et l'opposition par contrariété.

Deux propositions contradictoires ne peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses en même temps. De la vérité ou de la fausseté de l'une, on peut conclure à la fausseté ou à la vérité de l'autre. Selon Aristote, cette opposition vaut entre les affirmatives universelles et les négatives particulières, ou les négatives universelles et les affirmatives particulières.

La relation de contrariété est celle qui relie une universelle affirmative et une universelle négative. Deux propositions qui ont une opposition de contrariété ne peuvent être toutes deux vraies, de sorte qu'on peut conclure de la vérité de l'une à la fausseté de l'autre, mais elles peuvent être toutes les deux fausses, de sorte que l'on ne peut rien dire de la valeur de vérité de la seconde proposition si la proposition donnée est fausse. Pour les auteurs la relation de contrariété correspond plus ou moins au contraire dans la langue courante.

Les auteurs pointent également le fait souligné par Aristote, qu'il n'y a pas de relation d'opposition entre la particulière affirmative et la particulière négative.

2.3.1.2. La négation dans la logique du premier ordre

A la fin du XIXème et au début du XX° siècle, les travaux de Frege, Russell et Wittgenstein contribuent à la clarification du concept de négation. C'est Tarski (1936) qui, avec la mise au point de la théorie sémantique de la vérité dans les langages formalisés, fait un apport déterminant dans la logique moderne.

Pour les auteurs, les travaux d'Aristote et les résultats de Tarski montrent que l'étude du concept de négation doit s'appuyer sur une analyse conjointe de la syntaxe et de la sémantique. Par exemple, dans une langue et une situation donnée, le fait que deux propositions échangent leurs valeurs de vérité ne garantit pas qu'elles sont négations l'une de l'autre. (p.12)

Nous citerons le cas des propositions suivantes :

(a) Certains nombres entiers sont pairs
(b) Tous les nombres entiers sont pairs

Dans l'ensemble des nombres entiers, (a) est vraie et (b) est fausse, mais les deux propositions qui échangent bien leurs valeurs de vérité ne sont pas négations l'une de l'autre.

Dans le calcul des propositions, la négation est un opérateur unaire s'appliquant aux propositions qui échange le vrai et le faux. Le principe du tiers-exclus est valide : « $p \vee \neg p$ » est un énoncé universellement valide (une tautologie) ; il en est de même du principe de contradiction : « $\neg(p \wedge \neg p)$ ».

Dans le calcul des prédicats, la négation est un opérateur qui s'applique soit à des propositions, soit à des fonctions propositionnelles ; ceci amène à considérer selon Da Costa (1997), une *extension du concept de négation*, s'appuyant sur la notion de satisfaction[81] :

> « Par définition, la négation d'une fonction propositionnelle F, notée $\neg F$ est la fonction propositionnelle qui dans toute structure interprétative adéquate est satisfaite exactement par les suites d'objets qui ne satisfont pas F. Par conséquent, l'énoncé « $Fx \vee \neg Fx$ » est universellement valide. Il en est naturellement de même de sa clôture universelle $\forall x(Fx \vee \neg Fx)$. » (p.13)

Ceci permet d'établir le fait que l'énoncé « $(\forall xF) \vee (\exists x \neg F)$ » est universellement valide ; cet énoncé s'obtient à partir de la tautologie « $p \vee \neg p$ » par substitution. Cela correspond à la règle du contre-exemple en mathématiques.

Notre commentaire : Dans le calcul des prédicats, dire que $\forall x \ F(x)$ est faux est équivalent à dire que $\exists x \, (\neg \, F(x))$ est une proposition vraie. Ainsi, nier un énoncé universellement quantifié revient à faire porter la négation par le verbe et changer le quantificateur universel en quantificateur existentiel. Du point de vue sémantique, pour montrer qu'un énoncé universellement quantifié est faux, il suffit d'exhiber un objet de l'univers du discours dont l'assignation à la phrase ouverte donne une proposition fausse.

[81] Voir au chapitre 2, section 1.2.2.3

Nous notons également que la négation de $\exists x \; F(x)$ est $\forall x \; \neg F(x)$.

2.3.2. La négation dans la grammaire française

Les auteurs rappellent que dans la grammaire française, on distingue deux types de négation :

- la *négation totale* : elle concerne en principe le contenu de l'énoncé en impliquant un choix de l'énonciateur entre la vérité et la fausseté de cet énoncé ; elle affecte la totalité de l'énoncé ;
- la négation partielle : elle ne s'intéresse pas au contenu de l'énoncé dans sa globalité du point de vue de sa valeur de vérité ; elle n'affecte qu'une partie de l'énoncé.

2.3.2.1. La négation totale des énoncés universellement quantifiés

D'après les auteurs, l'énoncé « *tous les documents ne sont pas autorisés à l'examen* » signifie habituellement que certains et seulement certains documents sont autorisés à l'examen ; on peut rendre compte de cette interprétation en considérant que la négation porte sur l'ensemble de l'énoncé et peut être paraphrasé sous la forme :

Il est faux que « *tous les documents sont autorisés à l'examen* »

qui renvoie à la négation totale qui prend en compte l'aspect sémantique de la négation.

2.3.2.2. La négation partielle des énoncés universels

La négation partielle est une opération qui n'affecte qu'une partie de l'énoncé. Elle s'exprime à l'aide des *mots négatifs* tels que : *aucun*, *jamais*, *nulle part*…, identifiant ainsi le constituant de l'énoncé visé par la négation en l'opposant au constituant positif correspondant (p.14). Ils prennent comme exemple pour illustrer leur propos :

« *Aucun* document n'est autorisé à l'examen ».

D'après eux, l'usage du terme négatif « *aucun* » montre que c'est « *tous* » qui est visé par la négation, et de ce fait, la négation partielle est principalement un procédé syntaxique et non sémantique (au sens logique du terme) car elle ne vise pas la modification de valeur de vérité de l'énoncé : dans l'exemple ci-dessus, il est possible que les deux énoncés soient faux.

2.3.2.3. Les ambiguïtés sémantiques relatives à la négation des énoncés universels en français

Se référant au livre « Précis de grammaire pour les concours » (Maingenau, 1994), les auteurs citent un court paragraphe relatif aux problèmes engendrés par la combinaison de la négation et de la quantification. D'après ce dernier, une telle combinaison est :

> « source de bien de difficultés car elle engendre des ambiguïtés. Ainsi « *tous les lions ne sont pas ici* » ne signifie pas contrairement à ce qu'on attendait que tous les lions sont

> absents mais seulement certains d'entre eux. C'est-à-dire que l'ordre des constituants (*tous … ne … pas …*) ne correspond pas à l'interprétation, qui serait plutôt « *les lions ne sont pas tous ici* ». La négation en langue naturelle est donc fort différente de la négation du calcul des prédicats de la logique classique. » (op. cit., p. 224).

Pour les auteurs, l'une des difficultés est due au fait que les quantificateurs universels n'ont pas de sens propre, mais acquièrent du sens en s'unissant avec le nom ou les noms qui les suivent. Il est donc nécessaire dans un énoncé universellement quantifié, de faire la distinction, déjà mentionnée par Frege, entre le *sujet grammatical* et le *sujet logique* (p.16). Par exemple dans la phrase « toutes les vaches sont vaccinées », le sujet logique est « les vaches » et le sujet grammatical est « toutes les vaches ». La négation grammaticale de la phrase « toutes les vaches sont vaccinées » sera alors « toutes les vaches **ne** sont **pas** vaccinées ».

Les auteurs citent également les travaux de Fuchs (1996) qui voit deux interprétations de la phrase « *toutes les vaches ne sont pas vaccinées* » :

- certaines vaches et seulement certaines ne sont pas vaccinées. La négation porte ici sur le verbe et le quantificateur est changé ;
- aucune vache n'est vaccinée, ce que l'on obtient par substitution de « aucune vache » à « toutes les vaches ».

Pour eux, les difficultés qui surviennent dans la langue naturelle sont identiques à celles qui ont été rencontrées par les logiciens qui ont étudié et développé ce concept, difficultés en relation avec la pratique de la langue. En outre, dans l'enseignement du français au Cameroun, comme en France ou en Tunisie, l'étude de la négation concerne principalement l'étude de la forme négative, indépendamment des valeurs sémantiques (au sens logique du terme d'échange des valeurs de vérité).

2.3.3. Des résultats observés dans l'usage de la négation en contexte tunisien

2.3.3.1.Le contexte tunisien

Les auteurs indiquent que l'enseignement des mathématiques en Tunisie se fait d'abord en langue arabe jusqu'à la neuvième année de l'école de base (enseignement obligatoire) puis en langue française pour les quatre années de lycée. L'école de base qui s'étend sur neuf années, est subdivisée en deux cycles :

- le premier s'étend sur six années et se fait par des instituteurs dont la formation est pluridisciplinaire ;

- le deuxième s'étend sur trois années et se fait ordinairement par des professeurs spécialistes en leur matière. Il correspond à ce qui est appelé en France le collège et au Cameroun le premier cycle de l'enseignement secondaire[82] ;
- le lycée est composé de quatre années. Il est couronné par le diplôme du baccalauréat. Les enseignants qui exercent à ce niveau sont aussi des spécialistes en leur matière.

L'apprentissage scolaire de la langue française est inséré dans le système éducatif tunisien à la troisième année de l'école de base et se poursuit jusqu'au baccalauréat. Le français a le statut de langue étrangère obligatoire.

2.3.3.2. Quelques phénomènes observés dans la pratique de la négation mathématique

L'étude des programmes et des manuels officiels tunisiens a permis aux auteurs de montrer que la négation logique ne fait pas l'objet en Tunisie, d'un enseignement explicite en mathématiques. Elle est implicitement présente, et ce à l'occasion de l'utilisation du raisonnement par l'absurde, de la production d'un contre-exemple ou chaque fois qu'il faut montrer qu'un objet mathématique ne possède pas une certaine propriété. En revanche, la négation grammaticale fait l'objet d'un enseignement explicite en français, ayant pour objectif de permettre à l'élève de reconnaitre les types et les formes des phrases et de s'approprier les mécanismes permettant de passer d'un type de phrase à un autre. (p.3)

En se basant sur un guide méthodologique du français à l'usage du professeur, les auteurs montrent que la négation enseignée dans la classe de français transforme une phrase universelle en une phrase universelle en ne faisant porter la négation que sur le prédicat ; ceci correspond à la négation partielle.

Les auteurs ont mené une enquête auprès de trois enseignants tunisiens de français et de dix-huit enseignants tunisiens de mathématiques. Cette enquête montre que les trois enseignants tunisiens de français interrogés identifient la forme négative d'un énoncé universel à sa négation, et que les enseignants tunisiens de mathématiques ne font pas de distinction explicite entre « négation » et « contraire ». Ceci permet aux auteurs de dire que la négation n'est pas problématisée.

En outre, un questionnaire proposé par les auteurs à soixante-douze élèves de sixième année secondaire (16-17 ans, équivalent à la première française[83]) fait apparaitre, selon les auteurs, que la conception selon laquelle la négation de « tous » est « aucun » est prédominante chez les élèves interrogés.

---

[82] Ce cycle s'étend sur quatre années et devrait probablement contenir la première année de lycée tunisien.

[83] Qui correspond également à la première camerounaise

Le Cameroun étant un pays multilingue, nous faisons l'hypothèse, confortée par les résultats d'une étude préliminaire que nous avons menée en 2011 (Njomgang Ngansop & Durand-Guerrier 2011)[84], que les phénomènes observés dans la manipulation de la négation dans l'enseignement des mathématiques en Tunisie sont susceptibles d'être présents dans l'enseignement de mathématiques au Cameroun. Nous envisageons dans la suite de notre thèse, de conduire des recherches sur la pertinence de la prise en compte de l'influence de la langue maternelle dans les enseignements des concepts de logique, et plus particulièrement, pour ce qui concerne la négation.

En conclusion, les auteurs ont mené une étude épistémologique du concept de négation qui montre que la construction de la négation doit prendre en compte les aspects syntaxique et sémantique.

En comparant les structures grammaticales de la négation en Arabe et en Français, ils mettent en évidence les différences concernant la négation des énoncés universellement quantifiés dans les deux langues, la négation en Arabe étant congruente à la négation logique, ce qui n'est pas le cas en Français si on se réfère à la norme grammaticale. En outre, dans l'usage du Français, l'utilisation de la forme négative pour ce type d'énoncés peut générer des ambiguïtés sémantiques : deux interprétations possibles de la négation émergent : la négation totale de l'énoncé (qui correspond à la négation logique) ou la négation partielle (qui correspond au contraire au sens d'Aristote).

Les auteurs soulignent que le terme contraire est parfois utilisé en lieu et place du terme négation, que ce soit dans le langage courant ou en mathématiques.

Ces différents phénomènes qui apparaissent dans le maniement de la négation montrent que ce concept, bien que d'usage courant, est assez complexe ; ceci est conforté par les résultats d'une enquête que nous avons menée auprès des étudiants des Classes Scientifiques Spéciales à Yaoundé[85]. Ces résultats mettent en lumière la grande variété de formes langagières proposées par les étudiants. Pour notre travail, nous nous appuyons sur cette étude pour pouvoir d'une part, dégager les différents aspects qui ressortent de l'utilisation du concept de négation par les étudiants et les élèves, et d'autre part, d'identifier des situations pertinentes pour l'apprentissage du concept.

[84] Voir article en annexe 13

[85] Durand-Guerrier & Njomgang Ngansop, 2009

Conclusion

Les auteurs dont nous avons présenté les travaux mettent l'accent sur l'importance d'une sensibilisation des étudiants au langage mathématique. Pour eux, il est nécessaire de travailler sur les changements de langage : le passage du langage naturel au langage formel permet d'expliciter la structure logique des énoncés informels que sont certains théorèmes et définitions, et donne des pistes pour la construction des preuves ; la formulation des propriétés mathématiques données en langage formel, à l'aide des mots de la langue, permet de les utiliser dans une diversité de situations.

Concernant la construction de la négation, Durand-Guerrier & Ben Kilani montrent qu'elle doit prendre en compte les aspects syntaxique et sémantique, et soulignent de ce fait la différence entre négation partielle, négation mathématique et contraire.

3. Quantifications multiples

Dans le cours de mathématiques on rencontre un grand nombre d'énoncés de la forme $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ et de la forme $\exists y\ \forall x\ \ P(x,y)$. Pour l'une et l'autre des formes, la question de la signification de l'énoncé et de la gestion des variables se pose.

3.1. Sur la dépendance des variables (Durand-Guerrier et Arsac, 2003)

L'article que nous présentons a été publié en 2003 dans le volume 23, n°3 de la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques*, de la page 295 à 342. Il porte le titre :

« ***Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?*** »

Les auteurs sont Viviane Durand-Guerrier et Gilbert Arsac.

La problématique de cet article porte sur l'articulation entre logique, rigueur et validité dans le raisonnement, dans le domaine de l'analyse, sous deux points de vue :

- du côté du praticien de mathématique, dans son rôle de professeur : par quoi dans son discours auprès des étudiants remplace t-il la logique absente ?
- du côté de l'étudiant de mathématiques : comment en tant que novice du domaine de mathématiques étudié, peut-il satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves non valides ?

3.1.1. Motivation de l'étude

D'après les auteurs, en didactique des mathématiques, les travaux sur la démonstration, dont ceux conduits par Raymond Duval (1993, 1995), utilisent comme cadre logique de référence essentiel, le calcul des propositions. La pertinence de ce cadre d'analyse s'explique, du point de vue logique, par le fait que l'on manipule en Géométrie, essentiellement des instances de théorèmes universels (qui peuvent se mettre sous la forme : « Pour tout x, si $P(x)$, alors, $Q(x)$ ») ; de ce fait, selon eux, dans les démonstrations géométriques, en général les quantificateurs n'apparaissent pas et l'on est effectivement ramené au calcul des propositions.

Les auteurs notent cependant que, d'après Durand-Guerrier (1999), cela conduit à des difficultés lorsque l'énoncé est universellement quantifié et non pas vrai, mais faux dans le domaine considéré. Ils illustrent ce fait par l'exemple suivant :

> *« Soit Q un quadrilatère ; pour chacune des deux implications suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :*
>
> *a) Si Q est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur ;*
>
> *b) Si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange. » (p.298)*

D'après les auteurs, l'énoncé a) est vrai car il est associé à un théorème universel, quant à l'énoncé b), on ne peut pas se prononcer sur sa valeur de vérité, car il admet à la fois des exemples et des contre-exemples, et le déclarer faux revient à l'assimiler à l'énoncé universellement quantifié associé. Ainsi, Houdebine (1998, page 115) fait remarquer que cet exercice « fait apparaitre chez les élèves de quatrième une hésitation entre faux, pas toujours vrai et vrai » (p.298).

Pour les auteurs, lorsqu'on aborde la démonstration en analyse, le cadre théorique proposé par Raymond Duval pour la Géométrie devient inopérant dans de nombreux cas, en particulier pour des théorèmes existentiels. Ils illustrent ce point à travers une démonstration erronée du théorème des accroissements finis.

Cette illustration figure dans la section 1.2.1.5 du chapitre 2. Nous n'y reviendrons pas.

3.1.2. La pratique de la démonstration

Leur étude porte essentiellement sur les définitions de la notion de limite et sur les modes de raisonnement associés pour lesquels il n'y a pas de transformation par transposition en ce sens que le raisonnement espéré de l'étudiant n'est pas différent de celui du mathématicien.

3.1.2.1. Exemple générique, nécessité et généralité

Les auteurs commencent par rappeler la définition de Balacheff (1988) de l'exemple générique :

> « L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant d'une classe. » (p.301)

D'après eux, la preuve par exemple générique concerne les assertions portant sur tous les éléments d'une classe, c'est-à-dire en mathématiques, des propositions universellement quantifiées. Ils distinguent deux aspects dans la preuve par élément générique ; *la nécessité et la généralité*. Pour les auteurs, la nécessité fait appel au caractère contraignant du raisonnement ; elle est assurée par l'enchaînement sans faille du raisonnement et facilement modélisé par le calcul des énoncés. La généralité vise à garantir le caractère générique de l'exemple étudié ; elle peut être assurée de différentes manières, relativement indépendantes de la nécessité, et dépendantes du domaine mathématique envisagé.

Les auteurs présentent trois exemples de preuves par exemple générique dont *l'exemple 3* (p.302) *en analyse* où :

les démonstrations se font par traitement d'un exemple générique, et une spécificité que les auteurs ont identifiée leur semble être la fréquence d'apparition d'énoncés du type « $\forall\varepsilon, \exists\eta \dots$ » d'où l'abréviation qu'ils adoptent pour désigner la démonstration des énoncés de ce type : démonstration en (ε, η). Une telle démonstration part de la donnée d'un ε générique. D'après les auteurs, dans les manuels, le caractère générique de ε est plus ou moins souligné et dans un vocabulaire varié. Et dans un même manuel, le traitement de cette question peut différer suivant qu'il s'agit de définir la limite d'une suite ou celle d'une fonction alors que la structure logique des deux définitions est la même. Les auteurs résument brièvement les grandes tendances que l'on peut rencontrer :

Ils distinguent au niveau des définitions, deux grandes tendances ; la première qui consiste à donner la définition quantifiée, que ce soit en langage courant ou en utilisant les quantificateurs et ils citent en exemple Balaguer (1999, p.10) :

> « Une suite (u_n) est convergente (dans $\mathbb{R}$) s'il existe un réel l tel que ;
>
> $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ » (p.303)

D'après les auteurs, dans ce cas, seul un commentaire ou la pratique qui apparait dans les démonstrations qui suivent montrent qu'il s'agit de preuve par exemple générique. La seule différence avec la géométrie provient du fait que la quantification est toujours explicite dans l'énoncé.

La deuxième tendance, selon les auteurs, consiste à expliciter d'emblée dans la définition, la pratique de la démonstration sur un ε générique, la définition comporte déjà en quelque sorte une règle d'action. Ils citent en exemple Cagnac (1963, p.67) :

« Définition : Etant donné le nombre positif arbitraire ε, on peut prouver l'existence d'un nombre positif α tel que la condition $|f(x) - l| < \varepsilon$ est vérifiée en tout point x qui vérifie $0 < |x - a| < \alpha$. » (p.303)

Pour les auteurs, cette idée de remplacer le *quel que soit* par l'allusion à un élément quelconque n'est pas propre aux mathématiciens.

La dépendance de ε par rapport à η est soulignée soit en commentaires, soit déjà dans la définition comme dans l'exemple tiré de Ouvarov (1984, p.54) qu'ils proposent :

« un nombre b s'appelle limite d'une fonction $y = f(x)$ lorsque $x \to a$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre δ dépendant de ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tel que pour tous les $x \in A$ satisfaisant à la condition $0 < |x - a| < \delta$, on a l'inégalité $|f(x) - b| < \varepsilon$. » (p.304)

Les auteurs notent que le plus fréquent est l'introduction de la notation η_ε, cette notation fonctionnelle visant à rappeler la dépendance. Cette apparition montre que le danger du type d'erreur conduisant à la démonstration fausse du théorème des accroissements finis étudiée ici est bien perçu par les auteurs de manuels universitaires.

3.1.2.2.Sur la démonstration en géométrie

Les auteurs déclarent que les énoncés en (ε, η) existent aussi en géométrie, mais il faut les débusquer car ils sont masqués par la pratique de la quantification implicite. Ils citent en exemple l'énoncé « Tout segment admet un milieu » qui se reformule, une fois la quantification restituée en « Pour tout couple de points (A, B), si $A \neq B$, il existe un point I de la droite (A, B) tel que $IA = IB$ », en précisant qu'il en est de même de tout énoncé affirmant l'existence, et en général, la constructibilité d'un objet géométrique :

« Une première différence entre géométrie et analyse tient simplement à des pratiques de rédaction des énoncés mathématiques en langue courante. » (p.306)

Concernant la dépendance de l'objet construit par rapport à la donnée, les auteurs la qualifient d'*évidente* dans les exemples qu'ils ont proposés. Une première explication de cette *évidence* d'après eux, vient de ce que l'objet construit se ramène à un objet unique ou à la rigueur existe en deux ou quelques exemplaires. De plus, il est en général constructible à la règle et au compas, ce qui explique l'absence de l'écriture fonctionnelle ; la connaissance de la procédure de construction apporte une information plus précise :

« Au total, le contexte des problèmes de construction, l'usage du dessin, l'utilisation traditionnelle des notations rendent totalement invraisemblable l'oubli de la dépendance de l'objet construit par rapport à l'objet donné […] » (p.307)

Les auteurs de conclure que, dans les domaines de l'analyse et de la géométrie, la rigueur des raisonnements est assurée par des routines très contextualisées propres à chacun. La logique disparait derrière un certain nombre de « règles de raisonnement » comme celles relatives à la manipulation des variables en analyse, ou aux règles de raisonnement par analyse-synthèse[86] en géométrie. Les limites de ces procédés qui permettent une « évidente économie de logique » peuvent se révéler quand les mathématiciens et surtout les élèves et les étudiants sont confrontés à des situations inhabituelles.

3.1.3. Le calcul des prédicats

Les auteurs présentent le calcul des prédicats comme théorie logique de référence pour étudier les démonstrations en analyse à l'université. D'après eux, d'une manière générale il est admis qu'il est suffisant de connaitre quelques règles syntaxiques de fonctionnement des quantificateurs pour utiliser de manière efficace le symbolisme logique. Ils prennent en exemple la règle syntaxique de construction de la négation des énoncés quantifiés, qui consiste à échanger les quantificateurs universels et existentiels et à appliquer la négation à la formule sans quantificateur. Les auteurs notent que cette règle est insuffisante dès lors que l'on veut nier un énoncé qui contient par exemple une sous-formule quantifiée, antécédent d'un énoncé conditionnel comme :

« $\forall x\ \forall y\ ((\forall z\ Fxyz) \Rightarrow Gxy)$ » qui a pour négation « $\exists x\ \exists y\ ((\forall z\ Fxyz) \wedge \neg Gxy)$ » (p. 311)

En outre, les auteurs pointent des difficultés d'ordre sémantique ; nous en parlons dans la section 1.2.2.3 du chapitre 2.

Revenant à l'analyse de la démonstration en géométrie au collège faite par Duval, pour les auteurs, un point de vue essentiellement syntaxique suffit ; on peut travailler sur les statuts des propositions indépendamment de leurs valeurs de vérité[87]. Mais les problèmes commencent lorsqu'on veut démontrer qu'un résultat est faux. D'après eux, dans le calcul des propositions, une manière de prouver qu'un théorème A est faux, c'est de trouver un énoncé B faux, tel que B soit une conséquence de A. Mais la méthode la plus fréquente pour un mathématicien de prouver qu'un énoncé est faux, c'est de produire un contre-exemple, ce qui n'a aucune signification dans le calcul des propositions :

> « Or la notion de contre-exemple n'a pas de signification dans le calcul des propositions, car il s'agit d'une procédure de type sémantique ; la recherche d'un contre-exemple renvoie à la nature des objets avec lesquels on travaille et à l'univers du discours dans lequel se déploie le raisonnement. » (p.313)

[86] La démarche d'analyse-synthèse conduit à traiter d'abord de l'unicité de l'objet construit, puis de son existence.

[87] Utilisation des règles d'introduction et d'élimination du connecteur ⇒.

Ainsi, selon les auteurs, la possibilité de trouver ou non un contre-exemple à un énoncé dépend des connaissances pertinentes pour cette recherche qui sont accessibles au sujet, de ce fait, la prise en compte des trois dimensions syntaxique, sémantique et pragmatique, permet d'analyser le discours mathématiques.

Concernant le contrôle de la validité de la preuve, d'après les auteurs, à la suite des travaux de Gentzen qui a développé un système de déduction naturelle pour le calcul propositionnel, consistant à donner des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs propositionnels, Copi (1954) et Quine (1950) ont développé un système de démonstration naturelle dans le calcul des prédicats. Aux règles de Gentzen s'ajoutent les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs qui permettent en particulier de modéliser la démonstration par exemple générique. Un tel système peut en particulier être utilisé pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le Calcul des Prédicats. Les quatre règles de manipulation des énoncés quantifiés dont on dispose dans ce système sont présentées dans Hottois (1989, pp.101-102) :

1) IU : Instantiation Universelle

$$\frac{(x)fx}{fa}$$

a constante individuelle quelconque substituée à x

Commentaire : Ce qui vaut pour tous vaut pour n'importe qui.

2) GU : Généralisation universelle

$$\frac{fa}{(x)fx}$$

avec a : une constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée seulement du point de vue de son appartenance à ce domaine

Commentaire : On reconnait ici la démonstration par élément générique.

3) GE : Généralisation Existentielle

$$\frac{fa}{(\exists x)fx}$$

a constante quelconque

Commentaire : Exhiber un élément qui vérifie la propriété permet d'affirmer l'existence d'au moins un tel élément.

4) IE : Instantiation Existentielle

$$\frac{(\exists x)fx}{fw}$$

Attention à l'interprétation de w ; il s'agit d'une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent (ou doit s'il n'y a qu'un objet de ce type) vérifier $\exists xfx$. Le plus souvent on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on ignore l'identité *précise de cet objet. C'est pour cela qu'il faut veiller à ce que le signe introduit (ici w) soit sans occurrences antérieures qui précisément le déterminerait (l'identifierait) de façon abusive.*

Commentaire : Affirmer l'existence d'un élément qui vérifie une propriété donnée permet de considérer un tel élément. (in Durand-Guerrier & Arsac, pp.315-316)

En note, les auteurs donnent l'ordre d'introduction des lettres ; si une instanciation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

Du point de vue des auteurs, l'intérêt principal du système de Copi, réside dans le fait de rendre explicites les règles de manipulation des variables. Il est intermédiaire entre la pratique usuelle et un système entièrement formalisé (p.316).

Pour les auteurs, les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs à la manière de Copi relèvent de la dimension sémantique puisqu'on introduit les noms d'objet. Dans la pratique des mathématiques, ces deux règles restent le plus souvent à un niveau implicite : par exemple on passe directement d'un énonce du type « il existe x tel que $P(x)$ » où x est une variable liée qui ne désigne rien, à l'utilisation dans une preuve de la lettre x comme le nom d'un objet satisfaisant la propriété P. Il en résulte une instabilité dans le statut des lettres dans les démonstrations. Ils concluent que :

> « Dans la perspective didactique qui est la nôtre, nous retiendrons que l'utilisation du système de Copi permet de mettre en évidence dans une démonstration certaines manipulations de variables cachées par la rédaction proposée. » (p.318)

3.1.4. Une expérimentation

Les auteurs se proposent de montrer sur un exemple, la pertinence, sur le plan didactique, de l'utilisation de la déduction naturelle dans le calcul des prédicats pour analyser les preuves mathématiques du point de vue de leur validité logique, et ceci principalement lorsque ces preuves mobilisent des énoncés contenant un (ou des) quantificateur(s) universel(s) et un (ou des) quantificateur(s) existentiel(s).

L'expérimentation qu'ils décrivent tente d'apporter des éléments de réponse à la première question à savoir, *par quoi dans son discours auprès des étudiants, l'enseignant remplace t-il la logique absente ?*

Ils ont mené une enquête auprès des enseignants de l'université sur une preuve en topologie qu'un étudiant a produite[88]. Les auteurs présentent une formalisation de cette preuve qui permet de repérer l'erreur commise.

[88] Voir annexe 1, « une preuve en topologie »

Dans le cadre de cette expérimentation, les questions adressées aux enseignants sont :

1) Quelles erreurs comporte cette démonstration, (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue) ?
2) Qu'écririez-vous sur la copie ?
3) Quel corrigé proposeriez-vous à cet étudiant ?

Les résultats :

22 enseignants ont participé à cette expérimentation. Les auteurs proposent une première étude qualitative des réponses ; elle permet de dégager quelques grandes tendances dans le discours des enseignants, et aussi de pointer les différences :

Les points communs

a) Le contrôle par les connaissances mathématiques, la production d'un contre-exemple

D'après les auteurs, tous les enseignants repèrent que la démonstration n'est pas correcte. Quatorze d'entre eux proposent un contre-exemple ; c'est un moyen de s'assurer de la non validité du résultat établi, mais ceci ne permet pas de savoir en quoi la démonstration est fautive. Pour les auteurs, le fait que certains enseignants n'ont pas, à la première lecture détecté d'erreur dans la démonstration, « confirme la faible distance, en ce qui concerne le contrôle logique de la démonstration, entre la pratique experte et celle de l'étudiant, et met en évidence que ce sont les connaissances mathématiques des enseignants (et non pas l'analyse de la démonstration) et leur pratique de la démonstration en analyse qui leur donnent d'abord la certitude d'une erreur de raisonnement et les orientent ensuite vers le problème de la dépendance des variables. On comprend mieux alors le fait que l'étudiant, ne disposant pas de ce contrôle, puisse ne pas voir son erreur. » (p.323)

b) La prégnance de la notion de dépendance

D'après les auteurs, 21 enseignants écrivent « x et y dépendent de ε » et le traduisent en mettant en évidence ε dans l'écriture des lettres x et y. Pour les auteurs, les réponses recueillies confirment que la règle qui consiste à indicer les lettres de variables muettes dans une quantification existentielle lorsque celle-ci est précédée d'une quantification universelle fonctionne comme une *règle de raisonnement* en Analyse, permettant à la fois d'éviter les erreurs et de mettre en évidence le « sens » , ici la « dépendance des variables ».

Les divergences

Les auteurs observent les divergences sur les points suivants :

- concernant les quantificateurs, deux enseignants parlent de *mauvaise gestion des quantificateurs*, tandis que d'autres proposent un contrôle de type global sur les écritures symboliques ; deux proscrivent l'emploi des quantificateurs et recommandent l'usage de la langue courante ;

- sur les variables, pour la plupart des enseignants qui ont répondu à l'enquête, les lettres renvoient implicitement à des objets du domaine considéré ; parmi eux, rares sont ceux qui disent que les objets qu'on manipule doivent être introduits explicitement au moyen *d'identificateurs* à l'aide des lettres qui les désignent.

Une étude de trois démonstrations dans un même manuel permet aux auteurs d'illustrer la variabilité de l'explicitation de la règle de dépendance des variables.

En conclusion à ces travaux, pour apporter des éléments de réponse à la question de savoir par quoi dans son discours auprès des étudiants, l'enseignant remplace t-il la logique absente, les auteurs, ont mené une expérimentation axée sur la pratique de la démonstration en analyse, avec des enseignants de l'université. Les résultats révèlent que le professeur communique des règles de raisonnement contextualisées qui remplacent l'appel explicite à la logique. La règle de dépendance des variables pour ce qui concerne les énoncés en (ε, η) est très présente dans la pratique enseignante, et le contrôle de la validité des preuves se fait à l'aide des connaissances mathématiques : la bonne application de ces règles repose sur l'expertise mathématique des enseignants.

Or on ne retrouve pas cette expertise chez les étudiants, et de ce fait, le contrôle de la preuve ne peut être effectif. La logique, du point de vue de la déduction naturelle dans le calcul des prédicats, apparait comme un outil idoine pour effectuer ce contrôle.

Dans notre travail, nous avons axé notre problématique sur la possibilité de rendre les concepts de logique opératoire chez les étudiants qui arrivent à l'université. Les éléments de réponse ci-dessus nous permettent, en accord avec les auteurs, de conjecturer qu'il est possible de mettre sur pied un enseignement sur la logique, au-delà de quelques notions actuellement transmises sur les quantificateurs et les règles syntaxiques de négation. La notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément et les règles de manipulation des énoncés quantifiés sont, a priori, des points d'appui pertinents, du fait qu'ils permettent de prendre en compte l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique dans l'activité mathématique.

Au chapitre 4, nous nous appuierons sur ces éléments de logique pour mener l'étude du manuel de terminale C, et du polycopié de mathématiques de première année de licence de mathématiques.

3.2. Sur le formalisme (Faïza Chellougui, 2004)

Les résultats que nous présentons ici sont issus de la thèse de doctorat de Faïza Chellougui, réalisée en co-tutelle entre l'université Claude Bernard Lyon 1 et l'université de Tunis, et soutenue en 2004. Elle a pour titre :

L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université entre l'explicite et l'implicite

Ce travail a retenu notre attention pour deux raisons : d'une part il porte sur les phénomènes de transition Lycée-Université, et d'autre part, il est en rapport avec notre problématique axée sur l'enseignement des concepts de logique aux étudiants nouvellement arrivés à l'université.

La problématique de cette thèse porte sur le rôle de la quantification dans l'élaboration effective d'un raisonnement mathématique pour les étudiants de première année d'université.

Elle part des trois hypothèses suivantes :

H1 : l'explicitation des éléments de logique, au début de l'année ne suffit pas à traiter les difficultés des apprenants

H2 : La complexité du concept de quantification n'est pas en général explicitement prise en charge par les enseignants

H3 : Les étudiants scientifiques de première année universitaire maîtrisent la plupart des raisonnements classiques faisant appel seulement au caractère propositionnel

L'auteure choisit comme cadre théorique pour l'élaboration de son travail, le calcul des prédicats. Elle en montre la pertinence dans le premier chapitre de son travail, en s'appuyant sur les travaux de V. Durand-Guerrier (1996) qui soutient la thèse selon laquelle, la logique des prédicats joue le rôle de référence épistémologique pour l'analyse des énoncés et des raisonnements dans une perspective didactique.

Dans le deuxième chapitre, elle mène une enquête épistémologique sur le concept de quantification. Cette enquête lui permet de mettre en évidence la richesse du concept de quantification, et d'arriver à une clarification des différentes notions qu'il recouvre. L'auteure montre que les travaux de Leibniz à Quine, en passant par Frege et Russell, ont contribué à expliciter les aspects syntaxique et sémantique de l'usage du concept de quantification[89].

Parmi les points dégagés par l'auteur, nous retenons principalement :

[89] Une brève revue des travaux de ces auteurs (excepté Leibniz) a déjà été réalisée au chapitre 2

- l'introduction des fonctions propositionnelles et des lettres de variables pour exprimer un jugement, un énoncé général ;
- l'explicitation de la négation des énoncés quantifiés et l'interdéfinissabilité des deux quantificateurs ;
- la précision qui est établie entre les mots de la langue qui renvoient à la quantification et les signes.

3.2.1. Le formalisme dans l'activité mathématique

3.2.1.1. Le formalisme mathématique

D'après l'auteure,

> « En grande partie, le formalisme en mathématique a été inventé pour faire face aux nombreux paradoxes qui sont apparus avec l'avènement de la théorie des ensembles ; d'un point de vue conceptuel, il permet de ramener le raisonnement mathématique à des calculs automatisés sur des symboles et il fournit des outils pour le contrôle de la validité des raisonnements. » (p.73)

Elle note que dans la pratique mathématique, il est difficile d'écrire tous les textes mathématiques en langage formalisé. C'est un langage mixte qui est utilisé, c'est-à-dire un mélange de langage courant et de formules constituant des formalisations partielles. Ce langage comporte certaines lacunes, des abréviations qui sont souvent ambigües, pour lesquelles seul le contexte permet d'en déterminer la signification. Elle cite le signe $+$ et la lettre grecque π. Une pratique experte consiste à raisonner sur les abréviations introduites comme si elles constituaient des signes primitifs au même titre que les signes fondamentaux du langage formalisé. Cette pratique experte est constitutive de l'activité mathématique, mais n'est pas transparente pour un étudiant abordant une notion nouvelle (p.74). Une autre source de difficulté pour l'étudiant que l'auteure identifie est l'implicite dans l'activité mathématique : la quantification implicite des énoncés, et dans la démonstration, la construction des relations implicites entre propriétés et situations.

3.2.1.2. Rigueur et formalisme

Pour l'auteure, il semble y avoir une forte relation entre mathématiques et rigueur. Toutefois, le langage mathématique doit garder une certaine souplesse, la dialectique rigueur et créativité ne s'oppose pas. Elle soutient ce point de vue en citant M. Loi (1982) :

> « […] le langage mathématique, même axiomatisé, doit être flexible et souple : tout comme la langue naturelle, il utilise les homonymes et les synonymes sans lesquels il ne pourrait fonctionner. Le symbole ne désigne jamais un objet isolé ; souvent il sert à désigner une infinité d'objets, ou un objet à une transformation près ; quelquefois, il est même utilisé

dans les domaines très éloignés. C'est un énorme échangeur –et un abus de langage– qui […] donne à la pensée toute sa puissance. » (in Chellougui, (2004), p. 78)

D'après elle, la rigueur au sens usuel non formalisée de la démonstration d'un théorème se constate par le fait que chacune des étapes est parfaitement claire à tout lecteur, compte tenu des extensions de sens déjà opérées dans les étapes antérieures.

Un point que l'auteure explore dans son travail est l'articulation entre logique et mathématiques. S'appuyant sur les travaux de Durand-Guerrier et Arsac (2003), elle présente les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs à la manière de Copi[90].

D'après l'auteure, dans son mémoire, elle utilise ces règles pour contrôler localement la validité de preuves en mathématiques, tant dans ses analyses a priori qu'a posteriori. Elles relèvent de l'articulation entre syntaxe et sémantique puisqu'il y a introduction des noms d'objets dans un domaine d'interprétation générique.

Ces règles qui sont incontestablement d'une grande importance dans l'analyse du raisonnement mathématique ne font pas l'objet d'une utilisation explicite dans notre travail. Nous avons focalisé nos recherches sur l'identification des situations d'enseignement qui pourraient être problématiques pour les élèves et pour les étudiants, et sur lesquelles l'enseignant pourrait s'appuyer en vu de les aider pour une bonne appréhension des concepts de logique.

3.2.1.3. Un exemple d'usage du formalisme dans l'activité mathématique : la notion de continuité dans l'enseignement supérieur

L'auteure a choisit pour illustrer les difficultés pointées, le concept de continuité qui est étudié au lycée et à l'université. La question du passage de la définition en langue naturelle à une définition formalisée est posée.

Nous donnons la définition de la continuité d'une fonction en un point telle qu'elle est énoncée dans le manuel au programme en Terminale C, au Cameroun :

> « Soit f une fonction et x_0 un nombre réel.
> On sait que f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ » (p.203)

Nous avons choisi deux définitions de la continuité que l'auteure présente :

- la première extraite du manuel d'analyse de première année scientifique (Guégand & Gavini, 1995), à la page 108 du manuel. Elle présente le phénomène de la quantification bornée. Nous l'avons commentée à la section 2.1 du chapitre 2 ;

[90] Voir revue des travaux de Durand-Guerrier & Arsac à la section précédente

- la deuxième définition est tirée du manuel *Cours de mathématiques -2 –Analyse, Classes préparatoires 1[er] cycle universitaire*-, 1988, et a pour auteurs Arnaudiès et Fraysse. Cette définition se trouve à la page 108 du manuel :

> « […] on obtient en particulier les définitions suivantes de la continuité de f en a […] :
>
> (1) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que
> $(x \in A$ et $|x - a| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$.
>
> (2) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que
> $(x \in A$ et $|x - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. (in Chellougui, 2004, p.93).

Dans cette définition, elle questionne la présence du « *et* » dans l'antécédent.

D'après elle, on attendrait plutôt l'écriture :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in A \ \ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (7)$$

Elle propose une autre formulation de (2) présentée dans le manuel, et utilisant les symboles logiques :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \ et \ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (8)$$

et questionne l'équivalence logique entre (7) et (8). Elle supprime la quantification bornée sur la variable x dans (7), et obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, [x \in A \Rightarrow (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)] \quad (9)$$

Elle ramène sa question à l'équivalence logique entre

$$(x \in A \wedge |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \ (10)$$

et

$$[x \in A \Rightarrow (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)] \quad (11)$$

En considérant uniquement la variable x, les énoncés (10) et (11) se mettent sous la forme :

$$\big(p(x) \wedge q(x)\big) \Rightarrow r(x) \ (12)$$

et

$$[p(x) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(x))] \quad (13)$$

Le fait que dans le calcul des propositions l'équivalence suivante :

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$$

soit une tautologie permet à l'auteure de conclure à la validité universelle de la formule suivante dans le calcul des prédicats :

$$\forall x, [p(x) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(x))] \ \Leftrightarrow [\big(p(x) \wedge q(x)\big) \Rightarrow r(x)]$$

De ce fait, elle conclut à l'équivalence des énoncés (7) et (8).

Pour conclure cette partie de sont travail, l'auteure déclare :

« L'introduction du formalisme logico-mathématique dans le savoir savant[91] vise à introduire un certain niveau de rigueur dans les écritures mathématiques pour lever des ambiguïtés, des implicites et interroger certaines évidences. Dans le savoir à enseigner[92], l'étude a montré une grande variété de formulations en langage formel, mixte ou naturel pour lesquels nous avons repéré et analysé des difficultés d'ordre syntaxique dont nous pouvons faire l'hypothèse qu'elles auront des conséquences sur le travail des étudiants. » (op.cit. p.101)

3.2.2. *Les énoncés de la forme* $\forall x, \exists y, P(x, y)$ *et de la forme* $\exists y, \forall x, P(x, y)$

L'auteure rapporte les travaux de Dubinski et Yparaki (2000) dans lesquels ils ont conduit une expérimentation dans le but de voir comment les étudiants scientifiques avancés comprenaient les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x, y)$ et de la forme $\exists y, \forall x, P(x, y)$, donnés en langue naturelle. En particulier, ils cherchent à voir si la syntaxe est considérée ou non.

Les résultats montrent qu'il y a une forte tendance chez un nombre important d'étudiants pour favoriser une interprétation $\forall x, \exists y, P(x, y)$ sur une interprétation $\exists y, \forall x, P(x, y)$. Les raisons possibles étant liées à la valeur de vérité de chaque énoncé (certains étudiants favorisent des énoncés vrais dès lors que ceux-ci correspondent aux interprétations des énoncés comme $\forall x, \exists y, P(x, y)$), aux difficultés cognitives (comme la mise en œuvre de la preuve de chaque type d'énoncé), à la formulation d'un énoncé et l'utilisation du terme *tout* par opposition à *chaque*.

Pour avoir des éléments de réponse à la question centrale qu'elle s'est posée, l'auteure va mener deux expérimentations avec des étudiants de première année de la faculté des sciences de Bizerte. La première a lieu à la fin du premier semestre 2001 /2002. Dans cette expérimentation, elle examine l'articulation entre logique, rigueur et validité à travers une série d'exercices. La question qui guide son expérimentation est de savoir si le niveau de formalisme respecte les normes de rigueur d'un raisonnement mathématique, d'une part, et s'il suffit à assurer la validité des raisonnements produits, d'autre part.

La deuxième expérimentation est organisée au cours de l'année académique 2002/2003 à la faculté des sciences de Bizerte, en complément à la première.

3.2.2.1. La première expérimentation

Elle propose à 96 étudiants un test composé de trois items. Du fait que les résultats qu'elle présente ne concernent que le premier item, nous ne présenterons que celui-là :

[91] Voir chapitre 3, paragraphe 1

[92] Idem

Exercice 1

On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$\forall(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, p\,\mathcal{R}\,q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*\ p^n = q$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

À travers ce test, elle se propose de :

- Montrer comment intervient la quantification par rapport au savoir mathématique lui-même et d'éclairer le mode de fonctionnement du symbolisme logique chez les étudiants ;
- Savoir comment un étudiant travaille le passage au formalisme en particulier l'introduction et la gestion de la quantification ;
- Déterminer les difficultés, a priori, qui pourraient être engendrées suivant le niveau de formalisme, l'économie du langage symbolique, les moments où il est indispensable d'utiliser les quantificateurs, etc. (p.119)

Ces trois points sont en relation avec notre travail, et particulièrement pour ce qui concerne les exercices 2, 4, 5, 8 et 10 du questionnaire adressé aux étudiants.

L'auteure définit 9 variables didactiques. Nous choisissons celles qui sont liées à notre propos, et les accompagnons des commentaires de l'auteure :

- la variable V2 : le nombre de quantificateurs en jeu dans l'énoncé (de même type et de type différent). D'après l'auteure, cette variable est importante pour tester si dans un énoncé quantifié la présence ainsi que le nombre des quantificateurs universel et existentiel, engendre des difficultés dans le traitement de cet énoncé ;
- la variable V3 : la position des quantificateurs dans un énoncé. Elle permet de tester si la position des quantificateurs au début ou à l'intérieur de la phrase a des conséquences sur la démarche démonstrative.

  Pour certains items que nous proposons dans le questionnaire, nous testons si la position des quantificateurs dans la phrase peut engendrer des difficultés dans le traitement de cette phrase ;
- la variable V5 : la présence des deux quantificateurs : universels et existentiels, sous la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et $\exists y, \forall x, P(x,y)$;
- la variable V7 : la nature de la quantification (explicite ou implicite). Elle permet de déterminer la conduite d'un raisonnement mathématique chez les étudiants en fonction de l'apparition ou non de la quantification.

Les résultats :

L'auteure a choisit de classer les productions des étudiants suivant deux axes : la dimension logico-mathématique et l'articulation entre logique et langage.
Nous donnons les résultats généraux à l'issue de l'étude.

La réflexivité

Selon le premier axe, la catégorie ayant le plus grand effectif (27%) est celle pour lesquelles les réponses sont sans aucun quantificateur et en présence d'un argument mathématique. Pour l'auteure, ce nombre parait important et significatif dans le cas où les étudiants utilisent beaucoup plus un raisonnement mathématique sans aucun contrôle logique d'ordre syntaxique.
Les étudiants ayant produit des réponses où s'articulent logique et mathématique représentent 13,8% de la population.
Selon le second axe, le taux le plus élevé (39,09%) correspond à la catégorie L2 constituée des réponses dont la syntaxe logique est incorrecte.
L'auteure conclut que :

> « L'étude des réponses montre un usage non négligeable des formes langagières et permet de repérer des difficultés liées au formalisme logique en jeu. La justification de l'existence de la variable n est rarement invoquée et lorsqu'elle l'est, c'est le plus souvent d'une manière non conforme à la syntaxe logique » (p.140)

L'antisymétrie

Selon le premier axe, le pourcentage le plus élevé (47,5%) correspond à la catégorie C6 où les réponses ne contiennent qu'un quantificateur et pas d'argument mathématique. D'après l'auteure, ce type de réponses étaient attendu ; elles montrent que le problème de l'existence est réel pour les étudiants.

Les étudiants ayant produit des réponses où s'articulent logique et mathématiques représentent 3,75% de la population.
Selon le second axe, le pourcentage de réponses le plus élevé (46,25%) correspond aux réponses de la catégorie L2 où la syntaxe logique est non contrôlée et dans chaque cas, il y a absence d'une connaissance mathématique adaptée.

La transitivité

Selon le premier axe, le pourcentage le plus élevé (53,25%) correspond à la catégorie C6 où les réponses ne contiennent qu'un quantificateur et pas d'argument mathématique. D'après l'auteure, ceci est lié au problème de la construction de la puissance et de la justification de l'argument mathématique pour confirmer la transitivité.

Les étudiants ayant produit des réponses où s'articulent logique et mathématique représentent 15,58% de la population.
Selon le second axe, le pourcentage le plus élevé (41,56%) correspond encore à la catégorie L2.

Dans ce second axe, la catégorie L3 a aussi un pourcentage de réponses élevé (40,26%). Cette catégorie correspond aux réponses où le langage utilisé est mixte.

Un résultat qui ressort de cette étude est le fait que :

> « lors de l'application successive de deux énoncés existentiels nécessitant *a priori* l'utilisation de lettres différentes, de nombreux étudiants utilisent de fait la même lettre. Autrement dit, ceux-ci ne respectent pas les restrictions sur les noms d'objets associés à la règle d'instantiation existentielle. » (p.153)

3.2.2.2.La deuxième expérimentation

Elle s'est déroulée avec 6 binômes, autour du concept de borne supérieure. Elle s'est faite en deux étapes : à la première étape, les étudiants ont résolu deux exercices par groupe de deux binômes. La deuxième étape consistait en un entretien semi-directif dirigé par l'auteure suivi d'un questionnement général sur l'enseignement de la borne supérieure au lycée et à l'université et sur l'articulation entre la logique et les mathématiques.
L'auteure rappelle que la question qui guide les entretiens concerne la manière dont les étudiants s'approprient la notion de borne supérieure. À partir de cette question, d'autres se sont posées à propos d'un élément majorant et d'une partie majorée. Elle note que ces questions ont fréquemment émergé lors de la résolution des exercices proposés.
Nous résumons les résultats obtenus au cours des entretiens avec chaque binôme en portant une attention sur les phénomènes observés :

- l'auteure identifie un phénomène saillant à tous les binômes qu'elle appelle « étrange définition d'un objet majorant ».
  Dans les six binômes, les étudiants donnent la définition de l'objet majorant sous la forme d'un énoncé clos[93] qui correspond à une propriété de structure (*être majorée* pour une partie) d'une part, et d'autre part, l'énoncé est sous la forme $\forall x, \exists y, P(x, y)$, alors que

[93] Une définition est une phrase ouverte, vrai de certains objets et fausse d'autres.

l'énoncé correspondant à la propriété *être majorée* pour une partie est de la forme $\exists y, \forall x, P(x,y)$:

$\forall x \in M, \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ (p.218)

Devant cette définition, l'auteure est intervenue en proposant de décrire graphiquement la situation, et de déterminer un exemple d'élément qui contredit le fait que M soit un majorant de A. Cela permet de montrer au binôme la dépendance entre M et x dans un énoncé de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$, et le fait que cet énoncé ne traduit pas que A est une partie majorée.

- les difficultés dans la mobilisation de la définition : il y a une instabilité dans les formulations des définitions. D'après l'auteure,

> « il apparait clairement que pour certains étudiants, on peut donner une définition sans que celle-ci caractérise certains éléments du domaine de référence. Ils n'ont pas de vocabulaire pour exprimer la relation entre l'objet considéré et la formule testée.
> Les définitions ne semblent pas être repérées comme fournissant un certains nombre de propriétés devant être satisfaites ; ceci est à mettre en relation avec l'absence des phrases ouvertes dans le milieu. » (p.234)

- les ostensifs dans le travail des étudiants : pour l'auteure, les ostensifs jouent un rôle pour la mise à jour d'un certain disfonctionnement ou blocage dans les représentations des étudiants. D'après elle, les réponses des étudiants font apparaitre deux niveaux des ostensifs :
  - ✓ les ostensifs symboliques mobilisés par les étudiants et qui se manifestent dans leurs productions :
  - ✓ les ostensifs graphiques mobilisés d'une part par les étudiants de façon spontanée, pour illustrer et pour se convaincre des résultats et des réponses immédiates aux questions, et d'autre part, par l'auteure ; l'introduction des graphiques provoque soit un aménagement de la définition, soit un questionnement sur les objets eux-mêmes. (p.246)

Concernant la deuxième partie de l'entretien, l'auteure retient les trois points ci-dessous :

1) certains étudiants n'ont pas les moyens de distinguer et de contrôler les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et leur correspondant de la forme $\exists y, \forall x, P(x,y)$. Ils s'attendent à un enseignement explicite mettant à jour ces moyens.
2) D'autres étudiants ont exprimé que le passage du langage naturel au langage formel s'est fait d'une manière spontanée sans précision. Certains ne connaissent pas la définition des deux quantificateurs, même avant que soit introduit le symbolisme.

3) Concernant la définition des objets *être un majorant* et *être une borne supérieure*, certains (rares) étudiants reconnaissent les difficultés liées à ces objets surtout lors du passage aux exercices et aux applications de leur définition. (pp.247-248)

Pour conclure cette revue de travaux, nous pouvons dire que les résultats que l'auteure présente dans son travail sont d'une grande richesse pour la conduite de nos recherches. En effet, la prise en compte de certains éléments va nous permettre d'orienter certaines propositions sur les actions didactiques que nous proposons de mener :

- l'explicitation des symboles de la quantification dans leur usage en mathématiques est nécessaire dès le secondaire, ou tout au moins en classe terminale ;
- l'usage du symbolisme doit se faire selon les deux aspects syntaxique et sémantique ;
- le langage utilisé est crucial pour la manipulation des symboles en général, et des quantificateurs en particulier. « Les ambiguïtés sur le vocabulaire sont inhérentes à l'activité mathématique elle-même qui spécialise des termes du langage courant pour un usage bien défini » (p.234). Il est souhaitable que la dialectique signifiant/signifié soit travaillée par les enseignants ;
- les implicites sont très présents dans la pratique des mathématiques, et sont à l'origine de plusieurs difficultés que les élèves rencontrent. La quantification implicite des énoncés, la transformation d'une implication en une conjonction, la pratique de la quantification bornée etc., requièrent des connaissances en logique que les étudiants ne maîtrisent pas toujours. Nous faisons l'hypothèse qu'une clarification de certaines situations pourrait contribuer à alléger la charge de l'étudiant.

Conclusion

Les résultats que nous présentons ci-dessus problématisent la quantification multiple et montrent la nécessité d'expliciter les symboles de quantification dans leur usage en mathématiques. Cet usage doit recouvrir les aspects syntaxique et sémantique. Du point de vue sémantique, la déduction naturelle dans le calcul des prédicats représente un outil pertinent pour contrôler la validité des preuves des énoncés de la forme $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$.

4. Implication et quantification

Introduction

Les résultats ci-dessus font apparaitre un lien entre la quantification et l'implication. En effet, la quantification bornée qui est une pratique courante dans la classe de mathématiques génère le phénomène d'apparition et de disparition de l'implication et peut de ce fait être source de difficultés dans la compréhension des énoncés. En outre, les résultats de plusieurs études (Rogalski & Rogalki (2003, 2004), Durand-Guerrier (1996, 2005), Deloustal-Jorrand (2000-2001, 2004)) font ressortir les difficultés qu'éprouvent des étudiants dans le traitement des énoncés conditionnels. Nous présentons ci-dessous quelques résultats en relation avec notre problématique.

4.1. Quelques aspects de l'implication mathématique (Deloustal-Jorrand, 2000-2001)

L'article que nous présentons a pour titre :

« ***L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs*** »

Il a été publié en 2000-2001 dans le n°55 de la revue « Petit X », et se trouve dans les pages 35 à 70.

L'objet de cet article est de repérer comment le concept d'implication prend sens et les difficultés qui lui sont attachées, à partir de l'étude de quelques manuels et l'analyse de conceptions des futurs enseignants.

D'après l'auteure, on peut voir le *concept mathématique d'implication* comme une *modélisation* de l'implication dans la logique naturelle, de ce fait, le concept mathématique d'implication est conforme à la logique naturelle sous certains aspects et ne l'est pas sous d'autres.

L'étude de ce concept, amène l'auteure à se poser des questions de type didactique et épistémologique :

Quel est l'objet mathématique implication? Quels liens a-t-il avec l'objet naturel?

Quel enseignement de l'objet implication? Quelle est sa place dans les manuels?

Quel sont les conceptions de futurs enseignants sur certains aspects de l'objet implication ?

Pour apporter des éléments de réponse, l'auteure a dans une première partie, répertorié et étudié trois points de vue de l'implication mathématique et les liens entre ceux-ci : le point de vue du *raisonnement déductif*, le point de vue de *la logique formelle* et le point de vue *ensembliste*. Elle a ensuite étudié l'enseignement de l'implication à travers les manuels et dans une troisième partie, elle a proposé un questionnaire individuel à quatre étudiants-futurs enseignants, suivi d'un débat pour mettre en conflit certaines propriétés-en-acte liées à l'implication.

4.1.1. *Trois points de vue sur l'implication*

4.1.1.1.Le point de vue du raisonnement déductif

L'auteure entend par « point de vue déductif sur l'implication », l'écriture et l'utilisation de l'implication dans un raisonnement sous la forme:

A est vraie

A ⇒B est vraie

Donc B est vraie (p.37)

D'après elle, dans cette utilisation, le mathématicien (ou l'élève) s'intéresse essentiellement au cas où *A* est vraie pour les raisons qu'elle cite :

- si l'implication est utilisée comme règle d'inférence, par ailleurs, c'est que la prémisse est vraie. L'implication est ainsi réduite à la forme « Si *A* est vraie alors *B* est vraie » ;
- dans le cas où l'implication est universellement quantifiée, pour montrer que celle-ci est vraie, il suffit de supposer la prémisse est vraie et d'établir que la conclusion est vraie ;
- lorsqu'une implication est vraie, il est naturel de se demander si c'est une équivalence. On peut alors envisager deux méthodes : soit on montre que la conclusion est fausse lorsque la prémisse est fausse, soit on montre que la réciproque de cette implication est vraie. Cependant, d'après l'auteure, la pratique mathématique privilégie la deuxième solution et évite le cas de la prémisse fausse.

Elle fait l'hypothèse que cette utilisation usuelle et quasi exclusive de l'implication dans l'activité mathématique induit chez les élèves les propriétés-en-acte suivantes :

« *A ⇒B n'a pas d'intérêt lorsque A est fausse».*

« *A ⇒B est fausse lorsque A est fausse* ».

L'auteure fait remarquer que dans l'activité mathématique courante, les implications sont utilisées pour démontrer un résultat : on enchaîne des propriétés vraies, grâce à des implications, pour aller des hypothèses vers la conclusion. Elle fait l'hypothèse que cette utilisation de l'implication peut induire chez les élèves la propriété-en-acte qu'elle appelle « propriété-en-acte de causalité » : « *A ⇒B n'a de raison d'être que lorsque A et B ont un lien de causalité (évident) entre-elles.* »

Nous confirmons ces observations relatives à cette utilisation de l'implication, qui est faite dans la preuve des théorèmes et la résolution des exercices : une suite de deux propriétés reliées par le symbole de l'implication est en fait une implication calculable au sens de

Rogalski & Rogalski (2004) ; le conséquent s'obtient généralement par transformation de l'antécédent.

D'après l'auteure, cette propriété-en-acte traduit le fait qu'il doit exister un cheminement sémantique pour passer de la prémisse à la conclusion. Elle note que cette propriété peut être renforcée par les expressions langagières associées à l'implication que sont « *A implique B* », « *A donne B* », et qui laissent bien penser qu'il y a un lien de cause à effet entre l'hypothèse et la conclusion. Elle note encore qu'en logique naturelle, « *A implique B* » est associée à « *A est la cause de B* ».

Pour l'auteure, la conception de causalité peut induire un *ordre temporel* entre la prémisse et la conclusion, car le fait que la cause précède la conséquence induit que, pour que A implique B, A doit être réalisé avant B. Dans cette conception de causalité de l'implication, il est difficile d'admettre d'une part, l'équivalence entre $A \Rightarrow B$ (A précède B) et (*non* B) $\Rightarrow$(*non* A) (*non* B devant précéder *non* A) et, d'autre part, que B est une condition nécessaire à la réalisation de A, du fait que B est vue comme une conséquence de A. (p. 39)

4.1.1.2.Le point de vue ensembliste

Pour définir ce point de vue, l'auteure se donne deux ensembles A et B définis respectivement les propriétés A et B[94] et pose que :

> l'implication de B par A (c'est-à-dire A⇒B) est équivalente à l'inclusion de A dans B (c'est-à-dire $A \subset B$).

Pour l'auteure, le point de vue ensembliste est peu pertinent pour traiter des implications entre propositions. En effet, pour parler d'ensemble, il faut travailler avec des propriétés s'appliquant à des objets de « même nature », ou être capable de définir les objets qui constituent les ensembles. Toutefois, elle cite des exemples d'implications entre énoncés contingents dont la représentation ensembliste peut être difficile ou impossible (p.39).

4.1.1.3.Le point de vue de la logique formelle

D'après l'auteure, le point de vue de la logique formelle décrit l'implication à l'aide des tables de vérité ou des connecteurs logiques, ce qui donne l'équivalence entre « $A \Rightarrow B$ » et « *non* A ou B ». La table de vérité de l'implication permet de traiter les implications entre les propositions.

L'auteure soutient le choix de la véracité de l'implication dans les deux cas où la prémisse est fausse. D'après elle, ce choix n'est pas arbitraire. Il découle de certaines conventions qui

[94] L'auteure a utilisé les mêmes lettres pour désigner l'ensemble et la propriété, ce qu'elle a précisé en note de bas de page, mais nous faisons la distinction dans la notation des deux objets.

régissent cette logique et de l'aspiration à rendre compte de certains aspects de la logique naturelle :

- *bivalence des propositions:* une proposition a exactement deux valeurs de vérités possibles, Vrai ou Faux.
- *principe du tiers exclu:* une proposition est soit vraie soit fausse, jamais les deux en même temps.
- *vérifonctionnalité de l'implication: la valeur de vérité de* « $A \Rightarrow B$ » ne dépend que des valeurs de vérité respectives de A et de B et non de leur contenu sémantique.

De ces trois conventions, seul le principe du tiers exclu est conforme à la logique naturelle ; le principe de vérifonctionnalité ne prend pas en compte le lien entre antécédent et conséquent, et le principe de bivalence est adapté aux propositions alors que la logique naturelle est plus proche des énoncés contingents.

L'auteure montre aussi que le modèle mathématique paraît conforme à la logique naturelle du point de vue de la contraposée.

4.1.1.4.Rapports entre les différents points de vue

L'auteure relie les différents points de vue de l'implication :

le point de vue de la logique formelle se déduit de la logique naturelle dès lors que l'on veut rendre compte de la contraposée et respecter les conventions nécessaires au système. Du point de vue de la logique formelle, on peut passer au point de vue ensembliste à l'aide des tables de vérité, enfin, le raisonnement déductif utilise essentiellement les propriétés suivantes de la logique formelle:

- « $A \Rightarrow B$ » est fausse lorsque A est vraie et B est fausse.
- « $A \Rightarrow B$ » est vraie lorsque A est vraie et B est vraie, avec cependant un implicite de cheminement explicatif reliant A et B.
- la contraposée de l'implication est équivalente à l'implication elle-même.

D'après l'auteure, les points de vue ensembliste et de la logique formelle sont absents de l'enseignement secondaire. Pourtant, ils permettent, contrairement au point de vue déductif, de prendre en compte explicitement le cas de la prémisse fausse. (p.43)

En commentaire, l'absence des deux points de vue ci-dessus renvoie aux habitudes scolaires qui consistent à modéliser essentiellement le Modus Ponens au détriment du Modus Tollens. En effet, le Modus Tollens permet précisément de prendre en compte la possibilité d'une prémisse fausse dans le cadre du raisonnement déductif.

4.1.2. Le fonctionnement de l'implication dans quelques manuels

L'auteure choisit d'étudier la « vie » de l'objet implication aux niveaux quatrième et DEUG scientifique. Elle justifie son choix par le fait que c'est en classe de quatrième que débute l'apprentissage de la démonstration et pour cela, le concept d'implication devrait occuper une place privilégiée ; pour le niveau DEUG, les premières années d'études universitaires permettent de donner une signification plus formalisée à l'implication, notamment à l'aide de l'introduction de la logique. Elle choisit pour cela des manuels où l'objet *implication* ou l'objet *équivalence* sont présents dans la table des matières ou dans l'index.

Par cette étude, l'auteure cherche à préciser les situations, les concepts, les signifiants et les signifiés qui lui sont rattachés. Pour cela elle s'est posé les questions suivantes :

Où trouve-t-on l'objet implication? *(Q1) Comment est-il défini* ? (Q2) *A quelles notations est-il rattaché ?(Q3) A quoi est-il censé servir* ? (Q4) *Quel symbolisme et quel vocabulaire lui sont rattachés? (Q5)*

4.1.2.1. Les manuels du niveau quatrième

L'auteure a mené son étude dans cinq manuels :

Hachette (1983) (H); Armand Colin (1979) (AC); Nathan (1988) (N); Istra (1975) (I); Bréard (1971) (B).

Nous relevons les grandes lignes des résultats de cette étude dans le tableau (1) en annexe 1 section 8.

Les manuels ne mentionnent pas le mot « implication », mais les expressions et termes qui l'évoquent (condition nécessaire, condition suffisante, réciproque, …)

L'auteure note que les expressions *«Pour que...il faut que...*)) et *«Pour que...il suffit que...*)) sont absentes de tous ces manuels. (pp. 44-48)

4.1.2.2. Les manuels du niveau DEUG scientifique

L'étude concerne les manuels suivants :

Lelong Ferrand Amaudiès Tl (1974) (LFA) ; Amaudiès Fraysse Tl (1996, 1° édition en 1987) (AF) ; Ramis Oddoux Deschamps Tl (1°éd. conforme aux prog 72) (ROD) ; Calvo (1996) (C) ; Pichon (1989) (P) ; Flash U (1993) (FU) ; Liret Martinais (LM) ; Letac (1984) (Le) ; Lehman Tl (1984) (L).

Comme pour les manuels de quatrième, nous présentons les grandes lignes des résultats dans le tableau (2) en annexe 1 section 9.

La place de l'implication apparait de manière très précise dans les manuels de DEUG, et particulièrement dans les ouvrages d'algèbre.

L'implication apparait comme un outil pour la théorie des ensembles, un objet de la logique formelle et un outil pour le raisonnement mathématique.

L'auteure souligne trois points à la suite des définitions (Q2) :

- dans P, FU et LM, l'attention est attirée sur la propriété « Si P est fausse, alors P implique Q est vraie » qui est présentée comme un cas « qui donne à réfléchir » ;
- « P implique Q » est parfois traduit par « Si P est vraie, alors Q est vraie aussi » (LM et Le) ;
- LM traduit « P implique Q » par « P donc Q ».

D'après l'auteure, dans ces deux derniers points, les écritures associées à l'implication induisent le fait qu'on ne considère que le cas où la prémisse est vraie.

En commentaires à ces points :

La remarque relative au premier point, rejoint les propos de l'auteure sur le désaccord entre la logique naturelle et la logique mathématique ;

Concernant le second point, on l'a retrouvé dans le manuel de terminale C, et nous le commentons au chapitre 4, section 4.1.

<u>Concernant la question Q3</u> :

D'après l'auteure, les notions rattachées à l'implication sont plus nombreuses. Dans tous les ouvrages, elle trouve l'implication liée aux éléments : *proposition, connecteurs, équivalence, quantificateurs,* raisonnement par *contraposée* et par *l'absurde.* La notion de *contre-exemple* est présente (de manière explicite ou non) aux côtés de l'implication dans cinq ouvrages (AF, P, FU, LM, L). Le raisonnement par *récurrence* est rapproché de l'implication dans trois manuels (FU, Le et LM) (pp.48-56).

L'auteure pour conclure souligne quelques résultats de cette analyse des manuels des deux niveaux :

- *Le point de vue ensembliste est quasiment absent* :

Aucun manuel de DEUG ne porte ce regard-là sur l'implication, pas même ceux qui l'utilisent dans la théorie des ensembles. Dans les manuels de quatrième, (I) et (B) donnent une interprétation ensembliste de l'implication. Cependant, (I) ne donne aucun exemple ou exercice qui permette de donner un sens concret à cette interprétation. Quant à (B), il met en relation inclusion et implication dans ses exercices, mais il n'utilise les ensembles que pour représenter les implications et non pas en tant qu'outil.

- *Il y a cloisonnement de point de vue* : les manuels définissent l'implication de façon différente, suivant l'utilisation que les auteurs comptent en faire : les auteurs qui se concentrent sur l'utilisation de l'implication dans la démonstration se placent sous un angle lié au raisonnement déductif et ceux qui veulent l'utiliser dans le cadre de la théorie des ensembles se placent du point de vue de la logique formelle.

Mis à part deux manuels de DEUG, ces deux points de vue ne sont pas mis en relation.

4.1.3. L'expérimentation avec des étudiants-futurs professeurs

L'auteure a conduit cette expérimentation dans le but de cerner certains aspects du *rapport personnel* à l'objet implication qu'ont des étudiants, futurs enseignants. La population est constituée de deux filles et deux garçons d'un niveau en mathématiques supérieur à la maîtrise. D'après l'auteure, leur façon d'appréhender l'implication est celle d'étudiants avancés, mais elle est aussi très proche de celle de jeunes professeurs. Elle pense que les conceptions qu'ils ont sont voisines de celles qu'ils transmettront à leurs élèves implicitement ou non.

L'expérimentation que l'auteure présente est issue du troisième chapitre de son mémoire de DEA (Deloustal, 1999), dans lequel elle voulait repérer des règles et des *propriétés-en-acte* présentes ou au contraire absentes chez ces futurs enseignants. Elle voulait observer comment ils s'en servaient, dans quelles circonstances, si elles *cohabitaient,* s'il y avait des *invariants.*

Son expérimentation comportait deux temps. Elle a d'abord construit un questionnaire qui concernait aussi bien l'objet mathématique que son utilisation en tant qu'outil. Il a été soumis aux étudiants individuellement pendant une durée de deux heures. Au vu des premiers résultats aux questionnaires, l'auteure a mis en place un débat d'une durée de deux heures entre les quatre étudiants. Cela lui a permis de confronter la propriétés-en-acte (P1) et la propriété (P3) dans laquelle elle a regroupé les propriétés (P3a) et (P3b) qui ont trait à la vérifonctionnalité de l'implication :

(Pl): «A⇒B» n'a d'utilité (et/ou de sens) que lorsque A est vraie

(P3a) : Si A est fausse, alors « A⇒B » est vraie

(P3b) : Si A est fausse, alors « A⇒B » est fausse

et de repérer la« résistance» de certaines propriétés notamment

(P2) « A⇒B » n'a de sens que si A et B ont un lien de cause à effet.

Dans cet article, l'auteure veut problématiser les propriétés (P1) et (P2) qui d'après elle, sont très fortement « soutenues » par la logique naturelle. Pour cela, elle ne reprend que l'étude de certaines questions associées plus particulièrement à ces propriétés. Elle ne s'intéresse qu'aux réponses au questionnaire.

Elle pense que les propriétés (P1) et (P2) appliquées au domaine mathématique peuvent amener des difficultés, des inexactitudes voire même des erreurs lors d'une résolution de problème.

Les questions que l'auteure traite se trouvent en annexe 1, section 10.

Elle propose la **question 1-2** pour permettre de problématiser les propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité, mais aussi pour permettre un débat sur la question de la lecture implicite de l'implication sous forme *universellement quantifiée ;*

À travers la **question 1-3**, l'auteure veut problématiser la propriété-en-acte de causalité ; dans la **question 7**, les étudiants doivent donner un avis sur un énoncé conditionnel issu d'un manuel d'algèbre. (pp.59-62)

<u>Les résultats</u>

Le deuxième tableau (question 1-2)

D'après l'auteure, les réponses font apparaître deux binômes :

- le premier binôme utilise la propriété-en-acte (P3a) « l'implication est vraie dès que la prémisse est fausse » ;
- le second binôme utilise la propriété-en-acte (P3b) « l'implication est fausse dès que la prémisse est fausse ».

  La contraposée n'est pas utilisée.

La vérifonctionnalité de l'implication n'est pas reconnue en tant que telle. Pour l'auteure :

- soit sa connaissance est réduite à la connaissance de la propriété-en-acte « si P est fausse alors P⇒Q est vraie ». Cette propriété-en-acte parait alors être utilisée hors de tout contexte et non pas comme faisant partie des propriétés de vérifonctionnalité de l'implication comme le montre la séquence que l'auteure présente (p.63).

  En commentaire, nous pouvons dire que l'aspect prédicatif de la vérifonctionnalité n'est pas disponible chez les deux étudiants.
- soit la vérifonctionnalité est ignorée. D'après l'auteure, l'utilisation de la propriété-en-acte (P3b) semble plutôt relever d'une question sur le sens d'une implication dont la prémisse est fausse que de l'utilisation de la vérifonctionnalité.

L'absence des connaissances sur la vérifonctionnalité d'une part met en valeur le lien explicatif, et d'autre part, oblige la cohabitation entre la propriété (P3a) et la propriété-en-acte de causalité : dès que la prémisse est vraie et que (P3a) n'est pas utilisable, il faut recourir à un lien explicatif entre la prémisse et la conclusion pour montrer que l'implication est vraie. Mais cette cohabitation peut être à l'origine de contradictions.

L'auteure relève dans le questionnaire puis dans le débat, un phénomène marquant qu'elle résume en les questions suivantes :

- doit-on se servir des contenus sémantiques des propositions pour statuer sur la valeur de vérité de l'implication ?
- qu'a-t-on le droit de savoir ?

Elle a constaté que les étudiants sont indécis quant à leur droit à se servir de leurs connaissances sur la parité des nombres, et pour le deuxième tableau (qui correspond aux réponses aux questions a', b', c' et d'), ils proposent différentes solutions suivant les valeurs de vérités accordées aux propositions.

D'après l'auteure, les échanges qui suivent (p.64) semble révéler l'opposition entre l'utilisation des propriétés-en-acte liées à la vérifonctionnalité et l'utilisation de la propriété-en-acte de causalité qui apparait :

> « les étudiants accordent suffisamment d'importance au lien explicatif pour être prêt à « oublier » ce qu'ils savent sur la parité des nombres et ne s'intéresser qu'à la relation sémantique entre prémisse et conclusion » (p.64).

Il nous semble qu'il y a également une absence d'articulation entre le contenu mathématique et les notions de logique. La réplique de X en ligne 4[95] semble révéler la séparation de ces deux aspects dans le traitement de l'implication (l'étudiant ne sait dans « quel monde » se placer).

Implication mathématique et logique naturelle (question 1-3)

D'après l'auteure, à cet item, l'absence de lien explicatif entre les phrases et le contexte non mathématique semblent déconcerter les étudiants. Elle considère les réponses de deux nouveaux binômes, proches des réponses suivantes :

- il n'y a aucune implication entre ces phrases ;
- « P2⇒P1 » est vraie (justification avec un lien explicatif) et « P2⇒P3 » fausse.

Elle indique que le traitement des implications amène les étudiants à se poser les questions du statut de vérité des propositions et de la présence ou de l'absence de lien explicatif entre les phrases.

Les interventions des étudiants montrent en effet que pour construire une implication, l'antécédent doit être vrai et le conséquent doit suivre nécessairement, il doit être une « conséquence » de l'antécédent.

Prémisse fausse (question 7)

L'auteure ne rencontre pas d'utilisation de l'outil contraposée pour cette question.

[95] Voir annexe 1 section 10 (échanges 1)

Elle identifie l'utilisation de la propriété-en-acte (P3a), et du lien explicatif entre les propositions.
Une étudiante qui avait utilisé la propriété (P3b) à la question 1-2 ne l'utilise plus ici, d'après l'auteure, la conception de causalité parait dominante dans le traitement de cet item.
En conclusion à cette analyse, l'auteure constate que la contraposée ne joue jamais le rôle d'outil pour décider de la véracité d'une implication ; les deux propriétés-en-acte liées à la prémisse fausse ((P3a) et (P3b)) sont présentes, en revanche les propriétés-en-acte liées à la vérité de la conclusion apparaissent peu.

Pour conclure cet article, l'auteure donne un aperçu des autres résultats de son mémoire liés à des questions qu'elle n'a pas traitées ici ; ils prolongent et complètent ceux qui ressortent dans cet article. De ce fait, nous regroupons les deux résultats :

- le lien entre les ensembles et l'implication est peu présent et parait superficiel : le lien formel entre A⊂B et $A \Rightarrow B$ est connu des étudiants, pourtant les ensembles ne sont jamais des outils pour répondre aux questions. Dans les manuels comme dans les réponses au questionnaire, le point de vue ensembliste sur l'implication est réduit à son minimum. Il permet pourtant d'après l'auteure, de problématiser la vérité de la prémisse. Elle fait l'hypothèse que ce point de vue permet de différencier l'implication de l'équivalence. En outre, parler en termes d'ensembles permet de travailler sur une implication dont les quantificateurs apparaissent explicitement ;
- dans son mémoire, les questions sur les conditions nécessaires et conditions suffisantes ont été bien réussies dans l'ensemble d'après l'auteure. Cependant, elle relève qu'une conception causale temporelle de l'implication empêche de différencier la condition nécessaire de la condition suffisante. Concernant le questionnaire, la conception causale de l'implication est largement prédominante dans les réponses des étudiants et la vérifonctionnalité de l'implication ne leur est pas connue : il n'y a pas d'implication entre deux faits qui n'ont « rien à voir ». En accord avec l'auteure, nous pouvons dire que dans l'usage mathématique, en particulier dans le raisonnement déductif, on ne s'intéresse qu'à des implications qui montrent un lien. On pourrait donc admettre cette· conception causale comme légitime. Elle relève cependant que cette conception peut amener à confondre condition nécessaire et condition suffisante notamment lorsqu'elle s'accompagne d'une conception temporelle de l'implication. En effet, si A est perçue comme la cause de B, comment dire que B est une condition nécessaire pour A ?

Quelques phénomènes observés dans le mémoire, n'apparaissant pas dans les analyses ci-dessus :

- les implications paraissent très largement perçues comme implicitement universellement quantifiées. Cet implicite n'est pas conscient et empêche de comprendre d'autres réponses dues à une autre interprétation de l'implication ;
- La négation de l'implication n'est pas familière, les étudiants attendent une autre implication pour formuler la négation de $P \Rightarrow Q$.

  Ce résultat est conforme aux résultats que nous avons obtenus et qui sont représentés dans Durand-Guerrier & Njomgang (2009).

Conclusion

Le traitement des items proposés à des étudiants-futurs enseignants met en évidence la conception causale de l'implication qu'ils ont : un lien explicatif doit exister entre l'antécédent et le conséquent. Cette conception est renforcée, comme le dit l'auteure, par l'usage de l'implication dans le raisonnement déductif en mathématiques. Or évaluer une implication consiste à utiliser le principe de vérifonctionnalité qui n'est pas toujours disponible chez les étudiants ; on doit aussi prendre en compte des implications à antécédent faux. Ces résultats montrent que pour ces étudiants, le travail mathématique n'a pas permit une appropriation adéquate des concepts de la logique utiles pour l'activité mathématique. Ceci renforce l'hypothèse de la nécessité de ne pas laisser ce travail à la seule charge des étudiants.

Dans l'étude du manuel de terminale et du polycopié, nous cherchons à identifier, en nous appuyant sur les résultats des analyses de l'auteure, comment l'implication y est prise en charge.

4.2. Modes de traitement de l'implication mathématique par des étudiants avancés (Jeanine Rogalski et Marc Rogalski, 2004)

Nous présentons des résultats extraits de l'article :

« ***Contribution à l'étude des modes de validation de l'implication par des futurs enseignants de mathématiques*** »

Cet article a été publié en 2004, dans le volume 9 des ANNALES DE DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, p. 175-203.

Les auteurs, Jeanine et Marc Rogalski, y présentent des résultats d'une étude sur le traitement des implications particulières par des étudiants licenciés en mathématiques et préparant le concours de recrutement de professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire (CAPES[96]). Le but de leur expérimentation est d'identifier, s'ils existent, des types de structuration plus ou moins inconsciente de l'usage de la logique dans l'évaluation de la validité de l'implication, en en détectant des schèmes d'utilisation.

La théorie des champs conceptuels de G. Vergnaud fournit un cadre de référence pour cette étude. En effet, les concepts d'invariant opératoire et de théorème-en-acte semblent être pertinents pour interpréter les schèmes mis en œuvre par les étudiants.

4.2.1. Motivation et hypothèse de travail

La motivation des auteurs pour cette étude réside « dans l'importance, pour des enseignants de mathématiques en collèges ou lycées, de pouvoir distinguer dans les « erreurs de raisonnement » des élèves celles qui proviennent directement de la mauvaise compréhension des mathématiques enseignées, et celles liées à un maniement erroné de la logique en œuvre en mathématiques » (p. 176).

Les tests proposés aux étudiants portent sur les implications à hypothèse fausse. Les auteurs justifient leur choix par les raisons suivantes :

1. ces implications permettent de mettre en évidence le saut qualitatif entre d'une part une certaine logique naturelle utilisée dans la pratique des mathématiques, et d'autre part, une logique formelle dont la nécessité intervient de façon plus cachée en mathématiques ;
2. l'aspect formel de la logique est plus présent qu'on ne le pense dans les mathématiques courantes, par exemple :
   (a) la véracité de $P \Rightarrow Q$ quand P est fausse répond à une nécessité de cohérence des raisonnements (raisonnement par contraposition et raisonnement par l'absurde) ;
   (b) les modes usuels de recherche d'une preuve utilisent souvent des conditions suffisantes : « pour prouver Q, il suffirait qu'on ait P, car $P \Rightarrow Q$ » : alors même qu'on ne sait pas encore que P est vraie (et il se peut qu'elle se révèle fausse !), il faut « avoir confiance » dans cette implication. (p. 177)

Les hypothèses qui sous-tendent l'exploitation empirique des données recueillies sont :

[96] Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré.

- on peut avoir accès aux schèmes d'utilisation de l'implication présents dans la population étudiée et aux effets de ces schèmes en dépouillant les réponses des étudiants à des items qui, soit sont des questions relatives à la validation d'implications dont l'hypothèse est toujours fausse, soit des questions qui attirent l'attention des sujets sur la valeur de la ou des variables qui rendent fausse l'hypothèse ;
- on peut détecter l'éventail de structurations des modes de validation de l'implication par l'étude des conjonctions de réponses à certains types d'implications présents dans certains items (pp.178-179).

Sur la base de la deuxième hypothèse, les auteurs établissent une typologie des diverses implications au moyen de catégories <u>prenant explicitement en compte les contenus mathématiques ou non mathématiques</u>. Ils distinguent ainsi quatre types d'implications :

- les implications *calculables* (à contenu mathématique), par exemple l'assertion « si 1=2, alors 2=3 » ;
- les implications *arbitraires* correspondant à la définition d'une règle (en général non mathématique) : la tâche de sélection de Wason[97] ;
- les implications de *contrat social* : « les bonbons de la maîtresse[98] » ;
- les implications *factuelles*, non calculables, où l'hypothèse et la conclusion sont facilement saisissables par le sujet : « Labyrinthe[99] »

4.2.2. Les résultats

4.2.2.1. Présentation globale des résultats

L'étude a été menée sur deux groupes d'étudiants : le premier test (test 1) a eu lieu en septembre 1999 avec une population de 107 étudiants, et le second test (test 2) a eu lieu en septembre 2001, avec une population de 71 étudiants.

Lors du dépouillement des résultats du premier test, les auteurs ont classé les sujets selon quatre profils de comportement, avec des variantes pour les trois premiers, en croisant les réponses à la validation de trois implications de type factuel à hypothèse fausse :

- **« Logique stable** (10 sujets)

(réponse du type *« l'implication est vraie » - en général avec l'argument « parce que l'hypothèse est fausse »* - dans les trois items)

- **Logique instable** (9 sujets)

[97] Elle est présentée à la section 2.2.2
[98] Voir item en annexe n° 1
[99] Voir au chapitre 3, section 4.1 et en annexe 1

(la même réponse dans deux items sur 3)

- **Pertinent stable** (9 sujets)

(réponse du type « *l'implication est stupide* », « *elle n'a pas de sens* », dans les 3 items)

- **Pertinent instable** (14 sujets)

(la même réponse dans 2 items sur 3)

- **Non conditionnel stable** (22 sujets)

(réponse du type : « l'assertion est fausse car l'hypothèse est fausse » dans les trois items.

- **Non conditionnel instable** (23sujets)

(La même réponse dans 2 items sur 3)

- **Sans dominante** (20 sujets)

(tous tes autres types de réponses ou de distribution de réponse aux 3 items, incluant les non réponse éventuelles). » (p.180)

Les auteurs précisent que la dénomination « non conditionnel » est choisie « pour rendre compte du fait que ces étudiants ne conçoivent pas la vérité de l'implication comme un lien conditionnel entre les valeurs de vérité des propositions » (p. 181).

De cette catégorisation des étudiants découlent la question de la pertinence de cette définition des profils qui se décline elle-même en deux autres questions : sont-ils un moyen de prédiction statistique au succès ou à l'échec aux autres items ? Y a-t-il corrélation avec le succès au CAPES ? La réponse à ces deux questions pour la population du test 1 est oui.

En septembre 2001, les auteurs organisent un autre test dans les mêmes conditions que le premier, avec quelques modifications dans la formulation de certains items. La définition des profils, et l'analyse des résultats obéissent aux mêmes critères qu'au premier test. Mais l'effectif de la population ayant diminué, pour éviter les dispersions qui auraient rendu les résultats peu significatifs, ils ont regroupé les catégories « stable » et « instable » d'un même profil, et ne prennent en compte cette fois que les quatre profils « logique », « pertinent », « non conditionnel » et « sans dominante ». La répartition en catégories de la population testée est semblable à celle obtenue avec la première population comme le montre le tableau ci-dessous que les auteurs présentent :

PROFILS	TEST 1 (N=107)	TEST 2 (N=71)
LOGIQUE	17,7	21,1
PERTINENT	21,5	23,9
NON CONDITIONNEL	42	39,4
SANS DOMINANTE	18,7	15,5

Distribution –en pourcentage– des étudiants selon leur profil de réponse aux implications « non-calculables à prémisses fausse ». (p.182)

Les corrélations entre les catégories évoquées ci-dessus et les succès aux mêmes autres items sont aussi globalement semblables à des détails près qui s'expliquerait par des variations de formulation, avec quelques différences locales.

4.2.2.2. Quelques points spécifiques

Pour répondre à leur interrogation de départ, les auteurs ont étudié des points plus spécifiques qui s'articulent autour de quatre questions : quelle est l'utilisation de la contraposée ? Y a-t-il des effets des changements de formulation ? Comment sont traitées les différentes implications calculables à hypothèse toujours fausse ? Que se passe t-il quand on attire l'attention des étudiants sur les « hors-sujet » (au sens de M. Legrand, c'est-à-dire des valeurs pour lesquelles l'antécédent de l'implication est fausse). (p.185)

L'utilisation de la contraposée pour valider une implication :

En moyenne 41% des sujets utilisent au moins une fois la contraposée lors du premier test, et 55% lors du deuxième test. Il faut toutefois noter qu'il y a eu une augmentation importante de l'utilisation de la contraposée à deux items de type factuel (Wason et Radford[100]) au test 2, dans le profil « non conditionnel ». Selon les auteurs, cela serait dû au passage de la formulation implicite à la formulation explicite du conditionnel.

Les effets de changement de formulation en « Si …, alors … » :

Trois items ont été modifiés au second test : les auteurs ont introduit la formulation en « *Si ...*, *alors* ... ». Les raisons de ces modifications résultent de deux discussions sur la recherche antérieure :

(a) les travaux de psychologie du raisonnement utilisant « *Si ..., alors* … », pour comparer la population de futurs enseignants de mathématiques aux populations de ces travaux, les auteurs ont repris leur formulation ;
(b) la formulation avec « tout » pouvait cantonner des sujets à ne se placer que dans le cas de l'hypothèse vraie, favorisant ainsi un mode d'évaluation de type « pertinent ».

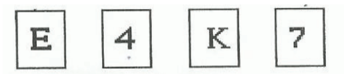
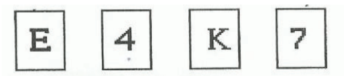
Nous faisons deux commentaires :

[100] L'item Wason est présenté ci-dessous au point 2.2.2 ; l'item Radford est présenté en annexe 1

(1) il est possible que l'utilisation de « *Si ..., alors …* » déclenche une utilisation naturelle de l'implication chez les enseignants de mathématiques, ce qui serait le fait de la pratique de la langue ;

(2) le changement de formulation permet d'expliciter le conditionnel caché qui, comme les auteurs le disent, cantonnerait les sujets à se placer dans le cas où l'hypothèse est vraie. Ce changement peut également permettre la mise en œuvre d'un schème opératoire lié à la structure explicite de l'énoncé.

L'un des items modifié est la tâche de sélection de Wason. Elle a été posée ainsi :

> On dispose de cartes sur lesquelles figurent sur une face une lettre et sur l'autre face un chiffre.
>
> Version 1 : on veut tester la règle éventuelle : « *derrière une voyelle il y a un chiffre pair* ». Pour cela on prend un échantillon de quatre cartes qu'on pose sur la table ; on voit alors la disposition ci-dessous :
>
> 
>
>
> Quelle(s) carte(s) exactement doit-on retourner pour savoir si la règle est respectée sur l'échantillon ?
>
> Version 2 : on veut tester la règle éventuelle : « *si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un chiffre pair sur son autre face* ». Pour cela on prend un échantillon de quatre cartes qu'on pose sur la table ; on voit alors la disposition ci-dessous :
>
> 
>
>
> Quelle(s) carte(s) exactement doit-on retourner pour savoir si la règle est respectée sur l'échantillon ?

Le pourcentage de réussite à cet item pour le profil « logique » a subit une réelle augmentation (de 48% à 67%), la non prise en compte du nombre impair restant l'erreur dominante. La formulation « canonique » « *Si ..., alors ...* » semblerait avoir déclenché l'usage de la contraposée chez des étudiants qui n'auraient pas répondu correctement sinon : il s'agit particulièrement des étudiants à profil « non conditionnel ».

Nous pouvons dire en remarque, que les formes langagières utilisées dans la pratique des mathématiques peuvent constituer un obstacle à la compréhension de certains énoncés.

Les implications calculables à hypothèses (toujours) fausse

Dans le test 2, les auteurs proposent 3 items de ce type. Ces items conduisent globalement à un meilleur succès que les implications « factuelles », non calculables, à hypothèse fausse (on observe de 35% à 66% de réponses correctes pour ces items calculables, et de 18% à 34% de réponses correctes pour les items non calculables), mais ils diffèrent de manière importante entre eux du fait que chacun a ses modes de validation :

L'item qui donne lieu au plus grand nombre de réponses correctes est :

« l'assertion *Si 1=2, alors 2=3* est-elle vraie ? » (2)

L'item le moins bien réussi est :

Un étudiant A affirme que la proposition (I)

(I) $\forall x \in R, si\ x^2 + 1 \leq 0, alors\ (x^2 + 1)^2 \leq 0$

est vraie et justifie ainsi son affirmation :

« on a $(x^2 + 1)^2 = x^2(x^2 + 1) + (x^2 + 1)$, donc si $x^2 + 1 \leq 0$, alors $x^2(x^2 + 1) \leq 0$, et $(x^2 + 1)^2$ est la somme de deux quantités négatives, donc est négative. »

Un étudiant B conteste son affirmation ainsi :

« mais c'est absurde ! L'hypothèse $x^2 + 1 \leq 0$ n'est jamais vraie, ni la conclusion $x^2(x^2 + 1) \leq 0$! De plus, quel que soit le signe de $x^2 + 1$, son carré est évidemment strictement positif ! Cette assertion est donc complètement fausse ! »

Que pensez-vous de ce dialogue et de la proposition (I) ? »

Les auteurs avancent deux interprétations des performances aux deux items ci-dessus :

- soit il y a disponibilité de l'invariant qui fait passer de $1 = 2$ à $2 = 3$, qui conduit à un taux élevé de réponses correctes, alors qu'il n'y pas la même accessibilité de celui utilisé dans l'énoncé pour passer de $x^2 + 1 \leq 0$ à $(x^2 + 1)^2 \leq 0$,
- soit il y a une perturbation introduite par le fait qu'un contre argument au calcul proposé ait été introduit dans l'énoncé de ce dernier item.

Nous émettons des réserves quant à ces interprétations : d'une part, il est clair que « $1 = 2$ » est une proposition fausse, ce qui pourrait être aussi perturbateur que l'hypothèse de (I) l'est, et d'autre part, la justification donnée par l'étudiant A offre une piste aux étudiants pour conclure à $(x^2 + 1)^2 \leq 0$, sous l'hypothèse $x^2 + 1 \leq 0$. Nous pensons plutôt à une perturbation des étudiants due à la contradiction qui nait du fait que d'une part, $(x^2 + 1)^2$ est un carré, donc il doit être positif, et d'autre part, que $(x^2 + 1)^2$ est la somme de deux nombres négatifs : $(x^2 + 1)^2$ est à la fois strictement positif et strictement négatif.

Un item de ce type se trouve dans les questionnaires que nous avons proposés aux élèves et aux étudiants respectivement[101].

Pour les deux items, l'évaluation des implications est ramenée à la démonstration des implications sous les hypothèses respectives $1 = 2$ et $x^2 + 1 \leq 0$ ou à l'application de la définition de l'implication via les tables de vérité.

[101] Voir chapitre 8, paragraphe 3

Les résultats à ces deux items montrent un bon pourcentage de réussite des étudiants du profil « logique » (60% de réussite) contre un taux faible pour tous les autres (moins de 30%).

Les « hors-sujet »

Les auteurs définissent les « hors-sujets » ainsi :

« Dans une implication de type « $quel\ que\ soit\ x, si\ P(x), alors\ Q(x)$ », il peut y avoir des situations où $P(x)$ est vrai pour certains des x et faux pour d'autres. M. Legrand a proposé d'appeler « hors-sujet » un élément du domaine qui ne satisfait pas la proposition antécédente (de sorte que l'implication matérielle associée est vraie puisque son antécédent est faux) ; cette dénomination permet d'« en parler dans les débats. » (p.189)

En commentaire, $P(x)$ est une phrase ouverte en x, donc ne peut avoir de valeur de vérité ; un élément singulier a de l'univers du discours peut la satisfaire ou ne pas la satisfaire. Un « hors-sujet » est un élément a du domaine qui ne satisfait pas la phrase $P(x)$, c'est-à-dire, tel que $P(a)$ soit faux.

Dans le test 2, deux items proposent des implications dans lesquelles existent de tels « hors sujet ». En général, ces items ne sont pas bien réussis ; l'un d'eux que nous présentons ci-dessous est le plus mal réussi :

> On a posé la question suivante à un étudiant : la proposition (P) suivante est-elle vraie ?
> (P) : « $\forall x \in R^2, \forall \lambda \in R, si\ x^2 - 2\lambda x + 2\lambda + 3 \leq 0, alors\ |x| \leq 2|\lambda| + 4)$ »
> Il a donné la réponse suivante :
> « L'assertion (P) est fausse. En effet, l'hypothèse signifie que l'on a $(y-x)^2 \leq (x-4)^2 - 25$; mais si
> $-1 < x < 9$, alors $(x-4)^2 - 25 < 0$, donc l'hypothèse n'est pas vérifiée, et n'impose donc aucune contrainte à y (on est dans la bande $]-1,9[\times R$) ; mais la conclusion, dans ce cas, entraînerait sur y la contrainte $|y| \leq 22$, ce qui serait absurde. »
> Que diriez-vous à cet étudiant ?

Pour cette catégorie d'items, on constate une fois de plus que :

- le profil « logique » a le taux de réussite le plus élevé (87% et 33% pour chacun des items) ;
- les profils « sans dominante » et « non conditionnel » correspondent aux taux de réussite les plus bas. Aucun de ces étudiants ne répond correctement à la fois aux deux items de « hors sujet » ;
- les étudiants de profil « pertinent » se situent à un niveau intermédiaire.

Aussi les auteurs de conclure :

« Alors que les étudiants sont tout à fait susceptibles de « suivre » un calcul montrant que $Q(x)$ est vérifié pour des x vérifiant $P(x)$, ils sont déstabilisés quand on attire leur attention sur l'existence des « hors sujet ». Cela nous semble confirmer la fragilité pour nombre d'entre eux du traitement d'une implication en tant que relation entre antécédent et conséquent, fragilité se traduisant par un glissement de l'évaluation de l'implication à celle de la validité de l'hypothèse (ou de l'antécédent). » (p.190)

Nous pensons que les difficultés dans le traitement des « hors-sujets » pourraient aussi s'expliquer par la difficulté à faire le lien entre les règles de calcul des prédicats (syntaxe) et leur application (sémantique). L'item (P) est de la forme « $\forall x, \forall \lambda, P(x,\lambda) \Rightarrow Q(x,\lambda)$ » et l'évaluation de cette implication nécessite des va-et-vient entre les registres mathématique et logique. On peut penser que certains étudiants ont écarté le traitement logique de cet item pour n'en faire qu'un traitement mathématique. En effet, de l'hypothèse, on peut par des inférences calculatoires, aboutir à la conclusion sans tenir compte des « hors-sujets ». D'autres étudiants, en prenant en compte l'existence des hors-sujets n'ont pu aboutir à une réponse correcte : ils pouvaient conclure à la fausseté de l'hypothèse, ou même penser qu'ils sont en présence d'un énoncé contingent. Ceci montre selon nous que dans la classe de mathématiques, il est important, à l'occasion, d'exhiber des « hors-sujets » –cela permet à l'étudiant de se familiariser avec des implications à antécédent faux, et de bien préciser la relation entre condition nécessaire et condition suffisante. En effet, lorsque P implique Q, cela signifie que la réalisation de P est suffisante pour la réalisation de Q, mais le fait que P ne soit pas réalisé n'empêche en rien la réalisation de Q.

Au vu des résultats aux deux tests, les auteurs concluent en l'existence de différents schèmes globaux d'évaluation d'implications, et des effets des types d'implications considérées. Ils soulignent une bonne réussite des étudiants du profil « logique » aux différents items proposés ; dans un premier article sur le même sujet Rogalski & Rogalski ; 2003) les auteurs précisent qu'« un profil « logique » correspond au mode de traitement attendu des mathématiciens : il est le fait d'environ 20% des étudiants ».

Cette observation renvoie à la pertinence de la définition des profils. Cette définition a permis de distinguer parmi les étudiants, ceux qui font une évaluation correcte de l'implication (profil « logique »), à quelques items près, ceux dont les performances sont mitigées (profils « pertinent » et « non conditionnel »), et ceux dont les performances sont assez instables (profil « sans dominante »).

La corrélation des profils avec les résultats du CAPES confirme cette pertinence de la définition des profils, ce qui amène les auteurs à se poser la question des modalités de formation de ces étudiants sur les questions de logique, étant donné qu'ils sont reçus au CAPES et vont devenir enseignants.

4.2.3. Quelques suggestions

Du point de vue des auteurs, l'objectif serait de faire passer dans le profil « logique » les étudiants qui sont dans les autres profils. Se posent alors deux questions supplémentaires : quel type de formation si elle est nécessaire ? et : ne peut-on résoudre le problème avant, pendant la formation universitaire (Deug et licence) ?

Ces deux questions restent d'actualité et rejoignent notre problématique qui porte sur l'enseignement des concepts de logique à la transition lycée-université, où l'accent est mis sur la dialectique opératoire/prédicative.

D'un sondage que les auteurs ont réalisé auprès d'enseignants de licence de l'université de Lille 1, il ressort que ces derniers ne parlent quasi jamais de questions de logique, même en « passant », à l'occasion d'un raisonnement délicat. Une seule exception est faite : le raisonnement par récurrence, car il est réputé donner lieu à de nombreuses erreurs. D'après les auteurs, les enseignements de logique « formelle » qu'on a rétablis ici et là font douter qu'ils puissent avoir un effet réel sur la pratique mathématique des étudiants. C'est ainsi que les auteurs suggèrent deux modes d'action :

- un enseignement ayant pour but une utilité immédiate en mathématiques, en particulier permettant d'utiliser les débats scientifiques avec des raisonnements validables par une collectivité étudiante, en attirant l'attention sur les points essentiels qui distinguent la logique des mathématiciens de la logique « courante » spontanément pratiquée par les étudiants : c'est par exemple le cas de l'activité « Circuit » développé par M. Legrand (1990) à différents niveaux des cursus ;
- à travers les options spécifiques de DEUG ou de licence, on peut donner un enseignement « culturel » sur la logique, en plongeant les étudiants, d'une part dans l'évolution historique, la philosophie et l'épistémologie des questions de logique (avec lecture de textes et discussions), de l'autre dans les difficultés proprement mathématiques et didactiques qu'on peut rencontrer chez des enseignants, des étudiants ou des élèves.

Les auteurs concluent leur article en soulignant la nécessité d'une mise au point sérieuse sur ces problèmes en formation des maîtres[102] et pointent deux difficultés :

[102] Correspond aux enseignants

- les étudiants pensent spontanément qu'arrivés à ce stade, « ils savent raisonner », pourquoi en reparler ?
- Cela leur sera-t-il utile, soit pour réussir le CAPES, soit (en deuxième année) pour la conduite de leur classe ? Ces deux difficultés ne concernent d'ailleurs pas que les problèmes de logique.

Les auteurs préconisent une déstabilisation des étudiants quant à leur certitude sur la logique. L'utilisation des tests analogues à ceux qu'ils ont fait passer, avec discussion et mise au point collective leur semble être une approche possible, voire inévitable pour rendre les étudiants réceptifs. Cela n'est certes pas suffisant pour restabiliser les étudiants dans un meilleur « profil ». Il faudra, à cela ajouter les deux modes d'action préconisés précédemment.

En conclusion, cet article de Jeanine Rogalski et Marc Rogalski cadre bien avec notre travail de recherche, du point de vue du questionnement, et en partie de la méthodologie. Nous en retenons :

- qu'une déstabilisation des élèves et des étudiants à l'aide de tests est nécessaire pour faire émerger des différents types de structuration de l'usage de la logique dans l'évaluation de la véracité de l'implication –voire même dans des tâches spécifiques aux différents concepts de logique, en en détectant des schèmes d'utilisation. Cette déstabilisation doit s'appuyer sur des items dont le traitement n'est pas familier aux étudiants, mais qui mobilisent des connaissances supposées acquises par ces derniers. C'est le cas ici où l'accent était mis sur les implications à antécédent faux ;
- les réponses des étudiants aux tests ont permis une catégorisation de ces derniers en des profils dont la pertinence est avérée, et qu'on peut prendre en compte dans une perspective de recherche ou d'apprentissage ;
- la proposition d'une action tendant à faire basculer les étudiants des trois derniers profils dans le profil « *logique* » : il s'agit d'un enseignement de la logique en liaison avec l'activité mathématique, où l'attention est portée sur les points essentiels qui distinguent la logique des mathématiciens de la logique « courante » spontanément pratiquée par les étudiants.

4.3. Des pratiques mathématiques en question (Durand-Guerrier, 2005)

Nous avons porté notre intérêt sur l'Habilitation à Diriger les Recherches en Didactique des Mathématiques de l'auteure, soutenue en juin 2005 à l'Université Claude Bernard Lyon 1, qui porte en titre :

Apport de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.

Nous avons choisi de nous attarder sur le chapitre IV qui est intitulé :

« Des pratiques mathématiques en question » ;

Les notions développées dans ce chapitre sont au cœur des analyses que nous menons dans la partie expérimentale de notre travail.

4.3.1. Les pratiques de la quantification

D'après l'auteure, la spécificité de la logique quand on l'étudie d'un point de vue didactique, c'est qu'il y a en quelque sorte un double mouvement de transposition. Tout d'abord le mathématicien, dans son activité mathématique propre l'utilise le plus souvent comme une technique, sans référence explicite à une théorie logique. Parmi ces usages, l'un des plus répandu est la quantification implicite des énoncés conditionnels ; un deuxième usage est celui qui consiste à utiliser massivement dans les énoncés complexes, la quantification bornée. Ces pratiques se transportent tout naturellement dans la classe *via* la formation universitaire des enseignants pour le second degré, et parce qu'à l'université, les enseignants de mathématiques sont en général des mathématiciens professionnels.

4.3.1.1.La quantification bornée

D'après l'auteure, on parle de quantification bornée pour décrire une pratique ordinaire du mathématicien lorsqu'il veut donner une définition en langage formalisé. Elle reprend l'exemple classique de la définition de la continuité en un point a d'une fonction numérique f :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Elle ajoute que dans la syntaxe du calcul des prédicats, il n'y a pas de quantification bornée ; si on a besoin de spécifier certains objets, on introduit les lettres de propriétés permettant de catégoriser les différents objets. D'après elle, ici, il s'agit de la propriété « être supérieur strictement à 0 » ; pour faire disparaitre la quantification bornée, il faudra introduire une implication pour le quantificateur universel et une conjonction pour le quantificateur existentiel, ce qui donne l'énoncé :

$$\forall\varepsilon\ [\varepsilon > 0\ \Rightarrow (\exists\eta\ (\eta > 0\ \wedge\forall x\ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)))]$$

D'après l'auteure, on peut faire disparaitre toutes les implications de cet énoncé en bornant également la quantification sur la variable x de la manière suivante :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0\ \forall x \in\ ]a-\eta, a+\eta[\ |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

Ceci produit un jeu d'apparition/disparition des quantificateurs. L'auteure fait l'hypothèse qu'il est constitutif de la compréhension de l'implication logique dans son utilisation en mathématiques. Mais certaines observations qu'elle a conduites montrent qu'il n'est pas nécessairement disponible chez les étudiants.

Dans le cadre d'un enseignement optionnel proposé à des étudiants scientifiques de Deug deuxième année, l'auteure a demandé de formaliser l'énoncé qui fournit une condition suffisante pour que deux réels soient égaux :

> *« si la distance de deux nombres réels peut être rendue inférieure à tout nombre strictement positif, alors ces deux nombres sont égaux »*

Une fois stabilisé le fait que l'énoncé ouvert « $(\forall\varepsilon > 0\ d(x,y) < \varepsilon) \Rightarrow (x = y)$ » est bien la traduction de l'énoncé proposé en langue vernaculaire, et qu'il traduit bien le fait que l'antécédent de l'implication est une condition suffisante de l'égalité de deux réels, l'auteure a demandé aux étudiants d'en donner une formalisation n'utilisant pas la quantification bornée.

D'après l'auteure, les étudiants proposent régulièrement l'énoncé :

$(\forall\varepsilon\ (\varepsilon > 0\ \wedge d(x,y) < \varepsilon) \Rightarrow (x = y)$ (E)

Pour expliquer pourquoi cet énoncé ne convient pas, l'auteure considère son interprétation dans le modèle du corps ordonné des réels, car la quantification bornée n'ayant pas d'équivalent dans la logique des prédicats, la syntaxe ne peut lui être d'aucun secours.

L'auteure interprète l'antécédent de (E) par la phrase ouverte :

> « pour tout ε, ε est positif et la distance de x à y est inférieure strictement à ε »

Dans l'énoncé ainsi reformulé, le premier terme de la conjonction est mis en défaut par les réels négatifs ; par suite, quelles que soient les valeurs assignées aux variables x et y, la proposition obtenue est fausse.

La quantification bornée consiste à restreindre le domaine de quantification. D'où il s'ensuit que pour la supprimer, il faut faire le mouvement inverse et donc restituer l'implication.

Elle propose la formulation correcte :

$$(\forall\varepsilon\ (\varepsilon > 0\ \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon) \Rightarrow (x = y)$$

Considérant l'antécédent :

$$(\forall\varepsilon\ (\varepsilon > 0\ \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon)$$

Elle en donne la négation :

$$(\exists\varepsilon\ (\varepsilon > 0 \wedge d(x,y) \geq \varepsilon)$$

D'après l'auteure, cela permet de retrouver le fait que supprimer la quantification bornée pour un énoncé existentiel conduit à introduire une conjonction.

Pour l'auteure, cet exemple permet de mettre en évidence plusieurs points cruciaux de l'articulation entre logique et raisonnement mathématique dans une perspective didactique :

- l'exemple illustre la nécessité de considérer les implications à antécédent faux pour la pratique ordinaire des mathématiques.
  En commentaire, ne considérer que les implications à antécédent vrai conduit souvent les étudiants à produire des réponses erronées quand ils doivent évaluer une implication dont l'antécédent est faux (Rogalki & Rogalki, 2004). Le même constat est fait lorsque les étudiants doivent déterminer un ensemble dont la propriété caractéristique est une implication ouverte : c'est ce que nous observons dans les réponses obtenues au premier exercice des questionnaires que nous avons élaborés, concernant les étudiants des Classes Scientifiques Spéciales de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé que nous avons interrogés ;
- la pratique de la quantification bornée tend à occulter la structure logique profonde des énoncés que l'on manipule ; l'auteure fait l'hypothèse que, dans ce cas, une explicitation de cette structure logique profonde contribue à la clarification

conceptuelle dans la mesure où elle permet de travailler en même temps sur le concept logique d'implication et sur le concept mathématique des nombres réels.

Nous citons par exemple les énoncés de la forme « tout A est B » (1) qu'on peut encore écrire « $\forall x \in A, B(x)$ » (2), et dont la levée de la quantification bornée permet d'obtenir l'énoncé « $\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)$ » (3). Le passage de (1) à (3) peut représenter pour les étudiants un exercice difficile (Epp, 1999) ;

- le mouvement de va et vient entre le modèle dans lequel on travaille et le langage formalisé dans lequel on traduit les énoncés, ce qui permet d'exercer un contrôle sémantique sur les énoncés formalisés produits, d'après Sinaceur.

4.3.1.2. La quantification implicite des énoncés conditionnels

S'appuyant sur de nombreuses observations naturalistes, ainsi que sur quelques analyses de manuels pour sa thèse, et, pour la Tunisie sur Chellougui (2000), l'auteure déclare que la quantification implicite des énoncés conditionnels est une pratique massive tant parmi les mathématiciens que dans la classe de mathématiques, dans le second degré ou à l'université. D'après elle, cette pratique cache la distinction entre *implication entre propositions*, *implication universellement quantifiée* et *implication ouverte*, et fait disparaître l'importance de l'univers du discours pour établir la vérité d'un énoncé général. Pour illustrer son propos, l'auteure présente un exemple –communément appelé « le labyrinthe », qui met en évidence le fait que cet implicite n'est pas partagé par de nombreux élèves, et qu'en outre, il peut conduire les enseignants à proposer des réponses inadaptées dans certaines situations (p.81). L'énoncé et un résumé de son traitement figurent en annexe 1, paragraphe 3 (le labyrinthe).

Nous faisons ici un résumé des résultats, en concentrant notre attention sur les phrases n°3 et n°6 :

Phrase n°3 : « X est passé par M »

Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K ».

Les taux de réussite aux deux phrases se répartissent ainsi :

Phrase n°3 : 85%. Ce taux correspond à la réponse considérée comme exacte par les auteurs de l'évaluation : ON NE PEUT PAS SAVOIR ;

Phrase n°6 : 29%. Il correspond à la réponse considérée comme exacte par les auteurs de l'évaluation : FAUSSE.

D'après l'auteure, les résultats montrent une forte divergence entre les professeurs et les élèves qui ont répondu majoritairement « ON NE PEUT PAS SAVOIR ». Dans les premières analyses de ces réponses, elle identifie une incertitude sur le statut de la lettre X. L'auteure choisit le trajet comme variable pertinente qui permet de traduire les informations en vue d'une formalisation de la tâche. La formalisation dans le calcul des prédicats qu'elle propose l'amène à faire trois interprétations de la lettre X. La deuxième et la troisième interprétation permettent d'expliquer le phénomène d'instabilité dans l'interprétation du statut de la lettre X :

Dans la deuxième interprétation, X est une lettre de variable implicitement quantifiée universellement. On lui associe son trajet t qui est une variable implicitement quantifiée universellement. Les énoncés 3 et 6 sont tous deux faux.

Dans la troisième interprétation, X est une lettre pour un individu générique. Elle nomme t le trajet générique associé ; dans ce cas, les énoncés 3 et 6 sont intrinsèquement contingents : ce sont des instances de phrases ouvertes ayant à la fois des exemples et des contre-exemples.

D'après l'auteure, un deuxième résultat de cette formalisation, c'est le fait qu'aucune de ces trois interprétations ne produit la totalité des réponses des auteurs ; ce qui montre que nécessairement, les auteurs changent de point de vue sur le statut logique de la lettre X selon qu'elle apparait dans la phrase n°3 ou dans la phrase n°6 :

> « pour conserver le maximum de cohérence, on peut faire l'hypothèse que la réponse donnée pour la phrase n°3 correspond à l'interprétation générique (c'est-à-dire la troisième), et que cette même interprétation conduit à introduire une quantification universelle implicite dans la phrase n°6. » (op. cit. p.90)

C'est ce que nous observons dans les réponses à l'exercice 3 du questionnaire adressé aux élèves et aux étudiants (Voir chapitre 5, exercice 3).

4.3.2. L'instabilité du statut des lettres dans les démonstrations

L'auteure a mené une étude de plusieurs démonstrations mathématiques de fin de lycée ou de premier cycle universitaire qui montre que l'instabilité du statut de la lettre est une pratique assez courante dans les manuels.

Elle présente en exemple une démonstration de l'*existence et de l'unicité du barycentre d'un système de points massifs* dans un manuel de terminale scientifique.

Le texte de la démonstration se trouve dans le manuel Dimathème *T.S.programme obligatoire* de 1998, pp.266-267, dans le chapitre 11 intitulé *Barycentre.*

Théorème et définition

> Soit un système de points massifs $(A_i;\alpha_i), 1 \leq i \leq n$, de masse totale $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$
>
> Si $m = 0$, alors le vecteur $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ est indépendant de M, autrement dit la fonction vectorielle de Leibniz $M \to \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ est constante.
>
> Si $m \neq 0$, alors il existe un point G unique tel que, pour tout point M, $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = m\overrightarrow{MG}$
>
> Ce point G est appelé barycentre du système. (p.103)

La démonstration se trouve en annexe 1, section 6 (Réduction de la fonction vectorielle de Leibniz).

Pour l'auteure, dans la définition comme dans la démonstration, il y a une fluctuation du statut de la lettre M :

Dans la définition, la lettre M est un élément générique puis une lettre de variable fonctionnelle d'une part, et d'autre part, c'est une variable liée.

Dans la démonstration, elle va successivement avoir le statut d'élément générique, de variable libre, de variable liés et d'élément singulier.

Par exemple, dans la séquence ci-dessous :

> 17. si $m \neq 0$, montrons alors que l'équation $F(M) = \vec{0}$ admet une solution
> 18. unique.
> 19. $F(M) = \vec{0} \Leftrightarrow F(A) + m\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{m}F(A)$
> 20. cette dernière relation montre que M est l'image de A par la translation de
> 21. vecteur, $\frac{1}{m}F(A)$ et par suite M est unique. Si on appelle G ce point,
> 22. on a donc $F(G) = \vec{0}$ et pour tout M, $F(M) - F(G) = F(M) = m\overrightarrow{MG}$
> 23. autrement dit $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2}$ +…..+$\alpha_n\overrightarrow{MA_n} = m\overrightarrow{MG}$

À la ligne 17, M variable libre, devient l'élément singulier G à la ligne 21. Puis à la ligne 22, M est une variable liée qui n'a plus le même rôle dans la démonstration que dans les lignes précédentes.

D'après l'auteure, on retrouve ces fluctuations dans le statut des lettres dans de nombreux textes mathématiques.

Dans notre travail, l'analyse du manuel de terminale C et du polycopié de première année de la filière mathématique, nous renseigne sur des situations d'instabilité du statut des lettres qui peuvent, du point de vue didactique, avoir des conséquences sur la compréhension de certaines démonstrations par les élèves et les étudiants.

4.3.3. Quelques propositions de l'auteure

Les travaux de Rogaski & Rogalski (2003, 2004) et Deloustal-Jorrand (2000-2001, 2004) montrent un grand déficit de connaissances sur les usages de l'implication en lien avec la quantification chez les étudiants préparant le concours pour devenir professeur de mathématiques, ainsi que chez les professeurs stagiaires ayant réussi ce concours, en France.

L'auteure suggère de proposer des ingénieries spécifiques et d'en observer les effets, en référence aux travaux de Deloustal-Jorrand (2004). Une autre voie qu'elle souhaite explorer dans la suite du travail de Chellougui (2004) consisterait à faire travailler de futurs professeurs et des professeurs en poste sur l'élaboration et / ou l'analyse des preuves à destination des élèves, ainsi que sur l'analyse de preuves produites par les élèves ou les étudiants et de confronter leurs analyses avec les siennes.

En conclusion, les résultats de recherche de l'auteure montrent que la pratique de la quantification implicite des énoncés conditionnels universels non seulement n'est pas partagée par les étudiants, mais peut conduire à des positions peu pertinentes au regard des objectifs de l'enseignement des mathématiques. En particulier elle ne permet pas de problématiser l'implication, ce qui est renforcé d'une part par la pratique consistant à ne pas expliciter les conclusions générales comme elle le montre, et d'autre part par la pratique de la quantification bornée. De ce fait, d'après l'auteure, le professeur se prive de la possibilité de travailler sur le rôle que jouent les outils logiques fondamentaux, en particulier, implication et quantification dans l'élaboration des raisonnements mathématiques.

Dans notre travail, nous testons les effets de la quantification implicite des énoncés sur les élèves et les étudiants en leur proposant des énoncés dont le traitement nécessite que le statut soit précisé. Cela permet de mettre en évidence les différentes interprétations auxquelles la formulation d'un énoncé peut renvoyer, et les « dangers » du maniement d'un tel énoncé.

Par ailleurs, notre intérêt étant porté sur l'identification des situations qui vont contribuer à la clarification de l'usage des concepts de logique dans le cours de mathématiques, nous allons dans l'analyse du manuel et du polycopié, chercher à repérer des cas de démonstrations où le statut des lettres peut représenter un obstacle pour les élèves et les étudiants.

Conclusion

D'après V. Deloustal-Jorrand, le traitement de l'implication met en évidence la nécessité pour les étudiants d'établir un lien explicatif entre l'antécédent et le conséquent. Cette conception est renforcée par l'usage de l'implication dans le raisonnement déductif en mathématiques. Ce résultat va dans le même sens que ceux de Rogalski & Rogalski qui montrent que l'évaluation des implications calculables est mieux réussie dans les tests qu'ils proposent aux étudiants que celle des implications à antécédent faux. Ces deux auteurs montrent de ce fait que le principe de vérifonctionnalité n'est pas toujours disponible chez les étudiants.

Concernant la quantification implicite des énoncés conditionnels universels, V Durand-Guerrier montre qu'elle n'est pas partagée par les étudiants, mais également qu'elle ne permet pas de problématiser l'implication. De ce fait, le professeur se prive de la possibilité de travailler sur le rôle que jouent en particulier l'implication et la quantification dans l'élaboration des raisonnements mathématiques.

Conclusion du chapitre 3

Les travaux que nous avons présentés montrent que la logique est un domaine peu travaillé par les enseignants de mathématiques à l'université. Durand-Guerrier et Arsac (2003) montrent que les enseignants remplacent la logique dans leur discours auprès des étudiants par des règles de raisonnement contextualisées. Le contrôle de la validité des raisonnements se fait à l'aide des connaissances mathématiques qui reposent sur leur expertise. D'après Gueudet (2008), les pratiques expertes que l'on observe chez les enseignants proviennent de leur flexibilité mentale : l'enseignement des mathématiques à l'université requiert un mode de pensée élevé et l'organisation des connaissances en réseau. On ne retrouve pas cette flexibilité chez les étudiants nouvellement entrés à l'université. Les pratiques enseignantes non explicitées installent plutôt des règles d'action comme le montrent les résultats de Rogalski & Rogalski (2004) et Deloustal-Jorrand (2000-2001) pour l'évaluation de l'implication qui consiste pour certains étudiants, à ne considérer que le cas où l'antécédent est vrai. En outre, l'introduction d'un langage nouveau et l'absence de prise en charge des difficultés relatives à ces changements amènent les étudiants à imiter le langage utilisé par les enseignants, et à produire des énoncés erronés. Selden & Selden (1995) pointent les difficultés des étudiants à transformer des énoncés donnés en langue naturelle, en langage formel. Une proposition de Epp (1999) consiste à sensibiliser les étudiants au langage mathématique, avec prise en compte des aspects syntaxique et sémantique, et l'absence d'articulation entre ces deux aspects dans l'utilisation des concepts de logique est révélée par les travaux de Chellougui sur la quantification.

Les résultats ci-dessus pointent les difficultés qui apparaissent dans la manipulation des concepts de logique par les étudiants, et problématisent l'absence de prise en charge de l'enseignement de ces concepts. Dans notre travail, d'une part, nous voulons repérer les phénomènes qui apparaissent dans la mise en œuvre des concepts de logique par les étudiants. À cet effet, nous leur proposons un questionnaire dont le traitement utilise les concepts sous un ou plusieurs aspects. Nous l'avons élaboré en nous appuyant sur les études antérieures dont nous avons fait la revue ci-dessus. Nous y proposons plusieurs types de situations :

- la construction de la négation des énoncés formels et informels ;
- l'évaluation d'une implication à antécédent toujours faux ;
- l'évaluation des énoncés implicitement quantifiés ;
- l'usage de la quantification multiple et l'articulation syntaxe/sémantique ;
- la transformation des énoncés d'un langage à un autre.

D'autre part, nous cherchons à identifier quelques situations d'enseignement dans le cours de mathématiques, que l'enseignant peut exploiter pour apporter des clarifications sur l'usage des concepts de logique.

Les manuels et les polycopiés au programme constituent un terrain adéquat pour rencontrer de telles situations.

CHAPITRE 4 : Analyse de manuel et de polycopié- Analyse de quelques pratiques de classe

Introduction

Les concepts de logique sont présents dans les définitions, les théorèmes, les preuves, etc…, mais nous faisons l'hypothèse qu'ils ils ne sont pas mis en évidence, car l'enseignant est centré sur l'étude des concepts mathématiques.

L'objet de ce chapitre est de mettre en lumière des éléments de transposition didactique mis en place dans le manuel et le polycopié, et dans la classe de mathématiques.

Nous nous sommes proposé pour cela, dans un premier temps, de mener une analyse du manuel de terminale C et du polycopié utilisé par les étudiants de première année de la filière « Mathématiques » de l'École Normale Supérieure de Yaoundé. Elle permet d'identifier le type d'enseignement qui est proposé concernant les concepts de logique, et de mettre en perspective les résultats avec les difficultés identifiées dans les différents travaux de recherche. Pour cela, nous nous proposons d'apporter des éléments de réponses aux deux questions suivantes :

- Sous quelle forme la logique est-elle présente dans les manuels ?
- Existe-t-il dans les cours, des situations qui peuvent engendrer des difficultés chez les élèves et étudiants ?

Les deux questions sont liées. Pour y répondre, nous allons regarder quelle transposition est faite des concepts de logique. Nous utilisons à cet effet, les outils d'analyse fournis par le calcul des prédicats. Nous étudions les aspects suivants :

- le langage utilisé pour formuler les énoncés : le langage formel, le langage mixte[103] ou le langage courant ;
- la forme de la quantification : implicite ou explicite, utilisation des symboles ou expression avec des mots de la langue ;
- le statut des lettres dans les énoncés : variables libres, liées, élément générique, élément singulier ;
- la forme sous laquelle l'implication apparait : la forme courante (si …, alors…), le symbole $\Rightarrow$, la forme implicite ;
- la négation est-elle présente dans les leçons ?

[103] C'est l'association du langage formel et du langage courant

Dans un deuxième temps, nous présentons des éléments de transposition didactique que nous avons relevés au cours des entretiens avec les enseignants de mathématiques, et nous les mettons en perspective avec les résultats des analyses du manuel de terminale C.

Avant ce travail d'analyse, nous présentons quelques éléments de la transposition didactique.

1. Éléments de transposition didactique

Notre propos s'appuie sur l'ouvrage de Y. Chevallard :

La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné

Il est paru pour la première fois en 1985 aux éditions « la Pensée Sauvage ». La version que nous utilisons date de 1991.

Chevallard introduit son sujet en déclarant que :

> « Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation des contenus de savoirs comme contenus à enseigner » (p. 39)

L'enseignement d'un concept exige l'identification et la désignation des contenus *d'un objet de savoir* comme contenus à enseigner. Cet objet de savoir rentre dans le domaine du *savoir savant*, c'est-à-dire, celui qui est reconnu par une communauté scientifique. Il est en général le résultat d'une construction qui répond à un problème rencontré par le chercheur. Une fois le contenu du savoir ayant été désigné comme *savoir à enseigner*, il subit des transformations qui vont lui permettre d'avoir une place parmi les *objets d'enseignement*.

Ceci marque une différence qualitative entre le savoir dans le système didactique et le savoir scientifique qui lui sert de référence.

> Le « travail » qui d'un *objet de savoir à enseigner* fait un *objet d'enseignement* est appelé *la transposition didactique*. (p. 39)

La transformation est faite de sorte que les objets d'enseignement soient à la portée des apprenants. Il est alors nécessaire de faire une recontextualisation de ces objets afin de leur donner du sens.

La transposition didactique est représentée par le schéma :

⟶ objet de savoir ⟶ objet à enseigner ⟶ objet d'enseignement

D'après l'auteur, le premier chaînon marque le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du préconstruit au construit.

Il désigne par objet de savoir :

« « Les notions mathématiques » : par exemple, l'addition, le cercle, la dérivation, les équations linéaires du premier ordre, … »
À côté des « notions mathématiques », il distingue des notions *paramathématiques* qui sont des *notions-outils de l'activité mathématique.* Elles ne sont pas normalement des objets d'étude pour le mathématicien.

La logique formelle joue un rôle important dans l'activité mathématique à l'université, où elle repose en grande partie sur le raisonnement. Pour paraphraser l'auteur, nous disons qu'elle doit être « apprise » (ou plutôt « connue »), mais elle n'est pas enseignée (selon le plan d'enseignement des notions mathématiques) : les concepts de logique sont des objets paramathématiques. Ils rentrent dans l'enseignement des mathématiques, sans toutefois être des objets d'enseignement ; ce sont des outils nécessaires à l'enseignement des mathématiques.
Nous pouvons identifier les concepts de logique qui sont introduits en début d'année, et qui portent essentiellement sur le calcul propositionnel et les quantificateurs, comme des objets de savoir. Les étudiants ont du mal à les utiliser pour faire des mathématiques. Nous avons l'exemple de la négation où la plupart du temps, la définition qui en est donnée est : « P étant une proposition, sa négation est notée $non\ P$ ou $\neg P$ ». À la suite de cet énoncé, les auteurs donnent la table de vérité du connecteur « négation ». Cette définition de la négation n'est pas suffisante pour construire la négation d'un énoncé mathématique complexe, comme on en rencontre dans le cours[104]. Il est nécessaire de transformer le savoir initial afin de le rendre accessible, utilisable par les étudiants ; un travail de transposition doit être effectué.

2. Analyse du manuel de terminale C

Le manuel en question appartient à la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM), et est intitulé :

MATHEMATIQUES Terminale SM

Sa première parution date de 1999.
Il est composé de 15 chapitres, dont 1 d'arithmétique, 1 de probabilité, 2 d'algèbre, 3 de géométrie et 8 d'analyse.
Nous avons porté notre choix sur trois chapitres :

- l'arithmétique pour sa richesse en éléments de logique ;
- les fonctions numériques, d'une part pour leur richesse en élément de logique, et d'autre part, parce que nous avons eu l'occasion d'assister aux enseignements qui

[104] Voir section 3.1 du chapitre 1

portaient sur ces chapitres. En outre, quelques items du questionnaire et du module de suivi portent sur des éléments du chapitre sur les fonctions numériques ;

- les suites numériques : nous nous intéressons au paragraphe intitulé « *Complément sur les suites* » car il contient des éléments nécessaires au traitement de l'exercice 6 du questionnaire que nous avons proposé aux étudiants, et qui figure dans Durand-Guerrier (1996). Les résultats qu'elle obtient à cet item, nous oriente vers une analyse des exercices qui portent sur ce paragraphe, et qui sont proposés dans le manuel. En effet, certains étudiants ont tendance à traiter l'implication comme l'équivalence. Nous avons interprété ce comportement comme résultant des habitudes scolaires : dans les exercices qui portent sur les suites définies par récurrence, les suites qu'on propose d'étudier sont généralement convergentes.

  Les questions qui guident cette analyse sont de savoir comment sont formulés les exercices proposés aux élèves, quelles sont les tâches demandées, quelles sont les stratégies de réponse.

2.1. Arithmétique

Le chapitre qui porte sur l'arithmétique part de la page 6 à la page 27 pour ce qui concerne le cours, et les exercices vont de la page 28 à la page 32 du manuel.

(1) <u>Le langage utilisé</u>

Dans ce chapitre les énoncés des propriétés, des théorèmes et des définitions sont donnés en langage mixte et en langage naturel. Le langage mixte consiste en grande partie en l'utilisation des symboles mathématiques. On rencontre quatre fois, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$: ils servent à la définition de la relation d'ordre $\leq$ dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$:

$\forall(a,b) \in \mathbb{N}^2, (a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}, b = a + c)$ (p.6)

$\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2, (a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N})$ (p.8)

à l'énoncé de la quatrième propriété d'une série de propriétés :

(4) $\exists a' \in \mathbb{Z}, a + a' = a' + a = 0$ (p.7)

(l'entier relatif a a été introduit en début des énoncés)

Le quantificateur $\forall$ est utilisé dans les travaux dirigés dont un intitulé est « le petit théorème de Fermat » (p. 27).

Nous avons rencontré une écriture en compréhension d'un ensemble qui nous a semblé être incorrecte du fait que la propriété caractéristique de l'ensemble n'apparait pas :

$$\{2n + 7, n \in \mathbb{N}\}$$

À notre avis, on devrait plutôt écrire $\{x \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N}, x = 2n + 7\}$

(2) <u>Les différentes formes de la quantification et l'utilisation des quantificateurs</u>

L'utilisation des quantificateurs :

Le *quantificateur existentiel* apparait sous la forme « il existe », mais il n'est pas très présent dans les énoncés, du fait que les formulations des énoncés en langue naturelle font disparaitre ce quantificateur. Le symbole ∃ est utilisé dans l'énoncé (4) ci-dessus.

Le *quantificateur universel* est exclusivement exprimé dans la langue naturelle :

> Pour tous entiers relatifs a, b et c … ;
>
> Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément ; (p.9)

Les différentes formes de la quantification

La quantification implicite :

Il existe dans cette leçon, des énoncés où l'on rencontre les quantifications existentielle et universelle qui sont implicites. Nous en présentons deux illustrations :

1er cas : la quantification existentielle implicite

> **Propriété (1)**
>
> Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
>
> Tout entier naturel x non nul peut s'écrire de façon unique $\sum_{k=0}^{p} a_k b^k$, où les a_k sont des entiers naturels tels que : $0 \leq a_k \leq b$ et $a_p \neq 0$. (p.10)

L'expression de cette propriété en langage formel va nécessairement faire émerger le quantificateur existentiel caché, qui permet d'introduire les entiers naturels a_k.

2ème cas : la quantification universelle implicite

Dans la deuxième remarque à la page 6 :

> **Remarque :**
>
> *Deux entiers naturels* a *et* b *sont toujours comparables […]*

Les entiers naturels a et b sont implicitement liés par le quantificateur universel ;

Dans la propriété 3 de la page 19 :

> **Propriété 3 (1)**
>
> Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD.
>
> Un entier relatif m est multiple de δ si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $m = au + bv$.(1)

L'énoncé (1) est universellement quantifié et la quantification est implicite sur m.

La quantification multiple

Elle mobilise les deux quantificateurs et peut apparaitre sous la forme $\forall x, \exists y\ P(x, y)$ ou $\exists y, \forall x\ P(x, y)$. Dans ce chapitre, elle est surtout de la forme « $\forall x, \exists y\ P(x, y)$ ». Dans les formulations en langue naturelle, la forme n'est pas explicite comme c'est le cas pour l'exemple suivant :

> **Propriété 2**

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. (p.6)

Nous avons rencontré un seul énoncé où les deux quantificateurs sont explicités, mais cela n'est pas très visible. Il s'agit de l'énoncé de la propriété (4) ci-dessous :

(4) $\exists a' \in \mathbb{Z}, a + a' = a' + a = 0$ (p.7)

Elle figure en quatrième position dans une série de propriétés de l'addition dans $\mathbb{Z}$. Les lettres a, b et c, utilisées pour énoncer ces propriétés sont introduites en tout début par le quantificateur universel (pour tous entiers relatifs a, b et c, on a :).

Nous avons constaté que les lettres de variables utilisées pour énoncer les propriétés et les théorèmes généraux sont introduites en grande partie par « soit ». Sur 37 théorèmes et propriétés, il y en a seulement 9 qui commencent par « pour tout(s) ».

Plusieurs théorèmes et propriétés sont énoncés sous la forme :

Soit a un entier relatif, il existe un entier relatif b tel que …

Cette remarque nous amène à étudier le statut des lettres dans les énoncés.

(3) __Le statut des lettres dans les énoncés__

On rencontre des variables liées par les quantificateurs universel et existentiel, et des éléments génériques dans la formulation des propriétés et des théorèmes :

Propriété 3 (2)

Soit a et b deux entiers relatifs tels que : $b \neq 0$. Il existe un entier relatif n tel que : $nb \geq a$.

Les lettres a et b sont des éléments génériques pris dans l'ensemble des entiers rationnels et n est une variable liée par le quantificateur existentiel.

Nous avons également rencontré dans cette partie du cours, des lettres dont le statut logique est assez flou. Par exemple à la page 7, dans l'encadré de logique relatif à la démonstration par récurrence on lit :

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$, qui concerne un entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- On démontre que : $P(n_0)$ est vraie ;
- On démontre que : pour tout entier k supérieur ou égal à n_0, si $P(k)$ est vrai, alors $P(k+1)$ est vrai.

Il y a une utilisation impropre du terme *proposition* dans la première ligne. En effet, $P(n)$ est une propriété qui dépend de l'entier n. On s'intéresse de savoir si P est vérifiée pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, c'est-à-dire, on voudrait savoir si la proposition « Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $P(n)$ » est vraie.

Les lettres P et n_0 ne sont pas introduites, pourtant elles devraient l'être. P a le statut d'élément générique, et n_0 est un élément singulier de $\mathbb{N}$ le statut de n_0 se justifiant par la première étape de la démonstration ; n est une variable libre dans l'écriture $P(n)$.

Dans la deuxième étape de la démonstration, k est une lettre muette et de ce fait, $P(k)$ ne peut avoir de valeur de vérité. Par ailleurs, si on considère l'écriture « si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie », du point de vue logique, elle est impropre : la vérité concerne la totalité de l'implication, c'est-à-dire $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Dans cette étape, il s'agit de montrer que « $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ » est vraie ; cela consiste à démontrer $P(k+1)$ sous l'hypothèse $P(k)$, ce qui est la technique habituellement utilisée pour démontrer qu'un énoncé conditionnel est vrai.

L'utilisation des lettres sans qu'elles soient introduites :

Dans la démonstration de la propriété 3 de la page 19[105], à la sixième ligne, les lettres u' et v' partent du statut de lettres muettes à nom d'objets ; elles ne sont pas introduites.

Dans la définition en extension des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, une lettre n est introduite pour généraliser l'écriture :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\} \text{ (page 6)}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots; n-1; n; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\} \text{ (page 7)}$$

Changement de statut logique des lettres

On retrouve cette pratique à la page 9, dans la démonstration de la propriété 3, que nous avons notée propriété 3 (2), et que nous rappelons :

> Soit a et b deux entiers relatifs tels que : $b \neq 0$. Il existe un entier relatif n tel que : $nb \geq a$.
>
> **Démonstration :**
>
> 1er cas : $b \geq 1$
>
> - Si $a \geq 0$, il suffit de prendre $n = a$;
> - Si $a < 0$, il suffit de prendre $n = 0$.

105 Voir annexe 1

2ème cas : $b \leq -1$

On a : $-b \geq 1$; donc il existe un entier relatif m, tel que : $m(-b) \geq a$.

Il suffit donc de prendre : $n = -m$.

Les réels a et b étant donnés, les auteurs cherchent à démontrer l'existence de n. Pour cela, ils cherchent à exhiber un élément singulier n_0 satisfaisant $nb \geq a$.

n est au départ une lettre muette, et lorsqu'on lui affecte les valeurs a et 0 dans le 1er cas, elle devient une variable libre.

Dans le deuxième cas, m est une lettre muette, qui est utilisée comme un nom d'objet. En affectant $-m$ à n, le statut de n change, il devient une variable libre. On devrait faire une instantiation existentielle de m[106] de telle sorte qu'on puisse faire une affectation de valeur à la variable libre n, car dans l'égalité $n = -m$, n et m ont le même statut, pourtant n devait être une lettre de variable et $-m$ est un élément singulier.

(4) __L'implication et l'équivalence__

L'implication

L'une des formes très courantes de l'implication est la forme naturelle, « Si …, alors … », et elle apparait dans les énoncés de théorème, de proposition et dans les démonstrations.

Dans quatre définitions, la forme « P si Q » est présente :

Définition :

Soit n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.

On dit que a est congru à b modulo n si $a - b$ est un multiple de n. (page 14)

Le signe $\Rightarrow$ est présent dans deux énoncés de propriété (p.8, p.9), dans deux démonstrations dont les propriétés associées sont énoncées avec « Si …, alors … » (p.13, p.14), et dans une remarque (p.15).

Dans les deux propriétés où le signe $\Rightarrow$ est utilisé (page 8), les implications sont des implications formelles, c'est-à-dire, des implications de la forme $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Dans les démonstrations où le signe $\Rightarrow$ apparait, il est utilisé pour les inférences qui proviennent des connaissances mathématiques. L'implication établit un lien explicatif entre les énoncés.

$(a' - a \in n\mathbb{Z}$ et $b' - b \in n\mathbb{Z}) \Rightarrow (a' + b') - (a + b) \in n\mathbb{Z}$ (page 14)

Dans les autres démonstrations, les auteurs utilisent la forme « on a F1, donc F2 » pour faire des inférences. F1 et F2 désignent ici, soit des formules, soit des propositions.

[106] Voir Durand-guerrier & Arsac, chapitre 3, section 5.1

Nous avons identifié des énoncés conditionnels implicites, c'est-à-dire des énoncés de la forme « Tout A est B ». Nous rappelons que nous les appelons ainsi car ce sont des énoncés linéaires qui peuvent se mettre sous la forme[107] :

$$\forall x, A(x) \Rightarrow B(x) \text{ (a)}$$

Nous présentons deux exemples.

Exemple 1 *:*

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément (page 9)

Pour formaliser cet énoncé, nous nous plaçons dans l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{Z}$. Nommons $\mathcal{M}$ le prédicat qui s'interprète par « être majoré », et $\mathcal{G}$, celui qui s'interprète par « a un plus grand élément »

On a la formule suivante :

$$\forall A, \mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{G}(A)$$

Exemple 2 *:*

Tout entier naturel n différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier (page 24)

En le paraphrasant pour faire ressortir sa structure logique, on a :

Pour tout entier naturel n, si n est différent de 0 et de 1, alors n admet au moins un diviseur premier. (i)

On a encore :

Pour tout entier naturel n, si (n est différent de 0 et n est différent de 1), alors (n admet au moins un diviseur premier). (ii)

Nous nous proposons d'écrire la formule explicite de cet énoncé.

Pour l'écrire, nous avons besoin de deux prédicats à deux places :

d qui s'interprète par « est différent de ». C'est une relation symétrique.

D est un prédicat à s'interprète par « est un diviseur de ». La première lettre représente le diviseur, et la seconde le dividende.

On a également besoin d'une prédicat unaire P qui s'interprète par « être premier ».

On obtient la formule :

$$\forall n, \Big(\big(d(n,0) \wedge d(n,1) \big) \Rightarrow \exists m, D(m,n) \wedge P(m) \Big)$$

Les notions de condition nécessaire et condition suffisante ne sont pas évoquées dans cette leçon.

<u>L'équivalence</u> :

[107] Voir Epp, chapitre 3, section 2.1

L'équivalence est présente dans cette leçon sous la forme « … si et seulement si … », et par le signe $\Leftrightarrow$.

L'utilisation du signe $\Leftrightarrow$ est beaucoup plus fréquente. Il est présent dans 9 items, alors que la forme « … si et seulement si … » l'est dans deux propriétés seulement.

Quatre propriétés sont énoncées avec l'équivalence ; pour deux d'entre elles, les auteurs ont proposé une démonstration :

- propriété 1 (p.14) : la démonstration est établie par équivalence ;
- propriété 3 (p.19) : la démonstration (*annexe 1*) se fait en deux étapes :

> **Propriété 3**
> Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD.
> Un entier relatif m est multiple de δ si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
> $m = au + bv$. (p.19)

La première étape de la démonstration consiste à montrer que, s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $m = au + bv$, alors, m est un multiple de δ, et cela n'est pas annoncé par les auteurs.

Dans l'énoncé de la propriété, u et v sont des variables liées par le quantificateur existentiel, et dans la démonstration, ce sont des éléments génériques. En toute rigueur, on devrait faire une instantiation existentielle de ces deux variables pour la démonstration.

Dans la deuxième partie de la démonstration, les auteurs montrent que si un entier relatif m est multiple de δ, alors, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $m = au + bv$. Comme pour la première, ceci n'est pas dit.

(5) __La négation__

Dans la leçon d'arithmétique, la négation n'apparait pas explicitement. Nous avons repéré son utilisation, lorsque les auteurs montrent que, dans la division euclidienne d'un entier a donné par un entier non nul b donné, le couple (q, r), où q est le quotient et r le reste de la division euclidienne d'un entier a par un entier non nul b, est unique. Ils procèdent par démonstration par l'absurde. Ils supposent que le couple n'est pas unique et aboutissent à une contradiction.

Il faut toutefois signaler que le mode de démonstration n'est pas précisé, et que les auteurs n'explicitent pas pourquoi ils ont choisi deux couples pour leur démonstration.

2.2. Les fonctions numériques d'une variable réelle : limite et continuité

La méthodologie d'analyse reste la même que celle que nous avons utilisée dans le cours d'arithmétique.

Dans ce chapitre, le cours part de la page 193 à la page 209, et les exercices vont de la page 210 à la page 212.

(1) <u>Le langage utilisé</u>

La grande majorité des énoncés de ce chapitre est donnée dans le langage mixte : sur 21 formulations encadrées, 18 sont données dans le langage mixte, et le reste est donné dans la langue naturelle.

Le seul symbole logique que nous avons trouvé dans ce chapitre est le quantificateur universel. Il ne figure que dans un énoncé encadré sous la forme ∀ ; c'est dans les exercices et les exemples traités qu'on le rencontre sous cette forme.

(2) <u>Les différentes formes de la quantification et l'utilisation des quantificateurs</u>

<u>L'utilisation des quantificateurs</u>

Le quantificateur universel

Dans cette partie, on retrouve la notation ∀ du quantificateur universel, comme nous le disions précédemment. Cette notation n'apparait qu'une fois, et dans une propriété :

> **Propriété 2 :**
> Soit f une fonction.
> S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
> S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]A, +\infty[$ tels que :
> $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]A, +\infty[, |f(x) - l| \leq g(x)$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. (p.195)

L'utilisation du quantificateur dans la deuxième partie de cette propriété entraine un changement du statut de l'inégalité : dans la première partie de l'énoncé, on a l'inégalité dans l'ensemble des fonctions numériques, qui est définie ainsi:

$f \leq g$ sur une partie A de $\mathbb{R}$ lorsque $\forall x \in A, f(x) \leq g(x)$

Dans la deuxième partie, on a l'inégalité dans $\mathbb{R}$.

Dans les exemples, le symbole ∀ est utilisé dans la comparaison de fonctions définies sur le même intervalle afin de déterminer la limite de l'une lorsque celle de l'autre est connue[108] :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq 1 + cos^2(2\pi x) ;$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, x \leq f(x) ; \text{(p.202)}$$

[108] Voir propriété 2 ci-dessus

Le quantificateur existentiel

Le quantificateur existentiel est exclusivement exprimé en langue naturelle : « il existe », et il vient toujours après qu'un élément générique ait été introduit :

> « Soit f une fonction. S'il existe une fonction g telle que … »

<u>Les différentes formes de la quantification</u>

La quantification implicite

Certains énoncés sont implicitement quantifiés :

> « La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré » (p.195)
>
> « si f est une fonction continue sur un intervalle K, alors $f(K)$ est un intervalle » (p.205)

Dans les deux formulations, *un* (<u>un</u> polynôme) et *une* (<u>une</u> fonction) sont interprétés comme renvoyant à une quantification universelle.

Dans les analyses a posteriori de l'exercice 2[109] de notre questionnaire et du module de suivi, nous avons repéré un étudiant présent qui a participé au module de suivi, qui interprète *un* comme un quantificateur universel, et comme un quantificateur existentiel. Nous pointons ce phénomène dans ce chapitre. En effet, il est écrit dans la première partie des propriétés 1 :

Soit f une fonction.

> « S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A, +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors lim$x$→+∞$fx$=+∞. » (p.195)

Le statut logique auquel renvoie A, le réel qui définit l'intervalle, peut être interprété de plusieurs façons. Il peut être un générique, un réel donné, ou interprété comme introduit par un quantificateur universel. Lorsqu'on observe les propriétés 2 qui suivent, le même intervalle est introduit avec le quantificateur existentiel.

De ce fait, *la quantification multiple* qui mobilise les deux quantificateurs, c'est-à-dire une expression de la forme « pour tout x, il existe y, $P(x, y)$ » ou de la forme « il existe y, pour tout x, $P(x, y)$ », est inexistante dans ce chapitre.

Comme dans le chapitre précédent, on observe aussi le phénomène de quantification bornée.

(3) <u>Le statut des lettres dans les énoncés</u>

Dans ce chapitre, 16 propriétés sur les 18 qu'il contient sont énoncées avec des éléments génériques introduits en début de formulation : elles commencent généralement par « soit f une fonction, … », « soit n un entier naturel … ».

Dans certaines propriétés, les lettres de variable ne sont pas introduites. Nous présentons deux exemples :

[109] Voir au chapitre 7

Propriété 3 :

Soit f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle $]A,+\infty[$.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$. (p.196)

Dans cette propriété, ni l'intervalle, ni les lettres l et l' n'ont été introduits. En toute rigueur, la lettre A qui désigne la borne inférieure de l'intervalle devrait être introduite par la quantificateur universel. Pour ce qui concerne les lettres l et l', on serait tenté de les introduire avec le quantificateur existentiel, du fait que, écrire « $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ » signifie que la limite de la fonction f existe en $+\infty$, et que cette limite est égale à l. Etant donné que nous sommes en présence d'une anaphore, cela n'est pas possible[110]. Ces deux lettres doivent également être introduites par le quantificateur universel. On a la formulation symbolique :

$$\forall f, \forall g, \forall A, \forall l, \forall l', [I(f,g,A) \Rightarrow (L(f,l) \wedge L(g,l') \Rightarrow l \leq l')]$$

$I(f,g,A)$ s'interprète par « f est inférieur ou égal à g sur l'intervalle $]A,+\infty[$ » et $L(f,l)$ s'interprète par « f a pour limite l ». Le domaine de quantification est l'ensemble des fonctions numériques et des nombres réels.

La propriété qui suit la propriété 3 révèle une pratique assez courante dans la classe de mathématiques :

Propriété :

Soit $g \circ f$ la composée de deux fonctions et a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $g \circ f$ est définie.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = l$, alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$. (p.196)

Puis, hors de l'encadré, il est écrit :

a, b et l sont des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Cette précision n'est pas pour introduire les lettres, mais pour donner des informations, soit sur les différentes affectations qu'on peut faire à ces variables –elles seraient à ce moment-là vues comme des variables libres, soit sur le domaine de quantification dans le cas où a, b et l sont des variables liées par le quantificateur universel.

Les fonctions f et g sont introduites implicitement par l'écriture de leur composée. Deux statuts de ces lettres sont possibles : elles peuvent être considérées comme des variables libres, ou alors comme quantifiées implicitement. Comme nous sommes en présence d'un théorème, l'interprétation a priori est celle d'une quantification implicite.

Ces deux exemples montrent qu'il y a beaucoup d'implicites dans le statut des lettres, et très peu d'indicateurs dans les énoncés permettent de savoir quel est le statut des lettres en jeu. En outre, et il y a parfois des ambiguïtés, comme on le voit dans la propriété 3 ci-dessus, pour ce

[110] Voir le même phénomène au chapitre 1, section 2.2

qui concerne les lettres qui désignent les limites. Nous faisons l'hypothèse que ces implicites ne permettent pas aux étudiants d'être au clair avec le statut des lettres dans les énoncés.

(4) ***La négation***

Ce concept n'est pas explicité, toutefois, on le rencontre dans la propriété 2 de la page 197 :

> **Propriété 2**
>
> Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a,b[$ $(a < b)$.
>
> Si f est non majorée sur $]a,b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b.
>
> Si f est non minorée sur $]a,b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a. (p.197)

Les auteurs traduisent « f n'est pas majorée » en langage mixte en utilisant un énoncé conditionnel :

> Si f n'est pas majorée, alors, pour tout nombre réel M, il existe un élément x_0 de l'intervalle $]a,b[$ tel que $f(x_0) > M$.

(5) ***Les différentes utilisations de l'implication et de l'équivalence***

L'implication

Elle est formulée dans la langue naturelle : « si …, alors … ». L'implication formelle explicitée est inexistante, et il en est de même des conditionnels cachés qui se ramènent à une implication formelle.

Les conditionnels qui apparaissent sont énoncés avec des éléments génériques, comme par exemple :

> **Propriété 2**
>
> Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a,b]$.
>
> Si f est continue sur $[a,b]$, alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé $[m,M]$. (p.205)

f a le statut d'élément générique.

Nous avons aussi identifié des conditionnels cachés dont l'énoncé contient des éléments génériques :

> **Théorème** (théorème des valeurs intermédiaires)
>
> Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K.
>
> Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.

f, a, et b sont des éléments génériques, le statut de K n'est pas précis.

Le théorème est de la forme « tout A est B », donc il peut se mettre sous la forme d'un énoncé conditionnel.

Pour formaliser ce théorème, appelons :

$I(x,y)$ l'intervalles de bornes x et y ;

E le prédicat ternaire interprété par « être l'image de … par la fonction … » ;

C le prédicat binaire interprété par « être continue dans » ;

On a la formule :

$$\big(C(f,K)\wedge(a\in K)\wedge(b\in K)\big)\Rightarrow\big[\forall y, y\in I\big(f(a),f(b)\big)\Rightarrow\big(\exists x, x\in I(a,b)\wedge E(y,x,f)\big)\big]$$

Concernant l'écriture symbolique de l'implication, nous n'avons rencontré aucun énoncé encadré contenant le signe ⇒.

Dans les démonstrations, c'est la déduction mathématique d'un énoncé sous hypothèse que l'on rencontre.

L'équivalence

Le signe ⇔ de l'équivalence n'est pas utilisé dans ce chapitre.

Une propriété (p.200) mobilise l'équivalence qui est exprimée en langue naturelle : « si et seulement si ». Sa démonstration est établie en deux étapes, par l'implication.

Une démonstration d'un énoncé conditionnel

Il s'agit de la première partie de la propriété 2 de la page 197 :

> **Propriété 2**
>
> Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a,b[$ $(a<b)$.
>
> Si f est non majorée sur $]a,b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b.

La démonstration de cet énoncé vient juste avant la formulation de l'énoncé :

> Démonstration : Si f n'est pas majorée, alors, pour tout nombre réel M, il existe un élément x_0 de l'intervalle $]a,b[$ tel que $f(x_0)>M$. (1)
>
> f étant croissante, on a : $\forall x\in\,]x_0,b[, f(x)>M$; donc : $\lim_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)=+\infty$. (2) (p. 197)

Les auteurs ont fait l'hypothèse que f est une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a,b[$ comme on le voit dans (2). En début de démonstration (1), ils traduisent le fait que f n'est pas majorée, puis ils utilisent cela dans (2) sans avoir explicité l'hypothèse selon laquelle f n'est pas majorée. Or, dire « si f n'est pas majorée » n'est pas l'affirmation de « f n'est pas majorée ». Cette utilisation implicite de l'hypothèse « f n'est pas majorée » conduit à l'énoncé « $\forall x\in\,]x_0,b[, f(x)>M$ » qui se déduit de cette hypothèse et de « f est croissante ». Par ailleurs, les lettres x_0 et M sont des variables muettes en (1), qui devraient être introduites en (2) par instantiation existentielle et universelle de x_0 et M respectivement.

La conclusion, « $\lim_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)=+\infty$ » n'est pas immédiate. En effet, de :

$$\forall x\in\,]x_0,b[, f(x)>M$$

On fait un généralisation existentielle sur x_0, puis une généralisation universelle sur M, ce qui permet d'avoir l'écriture :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in]x_0, b[, f(x) > M$$

La restitution des quantificateurs donne cette formule qui traduit bien le fait que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b par valeurs inférieures.

On retrouve encore dans cette démonstration beaucoup d'implicites.

Les inférences

Le Modus Ponens est utilisé dans les exemples où il faut appliquer les théorèmes ou les propriétés. Nous avons l'exemple suivant :

Propriété 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K.

S'il existe deux éléments a et b de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$

Cette propriété est un énoncé conditionnel qui est vrai pour toute fonction continue f et tout intervalle K. Elle se formalise ainsi :

$\forall f, \forall K, \forall a, \forall b, [(a \in K \wedge b \in K \wedge f \in C(K) \wedge f(a)f(b) < 0) \Rightarrow \exists x \in [a; b], f(x) = 0]$ (a)

qui peut encore s'écrire dans le calcul des prédicats :

$\forall f, \forall K, \forall a, \forall b, F(a, b, f, K) \Rightarrow \exists x, G(a, b, f, x)$ (b)

f est prise dans l'ensemble des fonctions numériques ;

K est pris dans l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$;

a et b sont des nombres réels.

***Exemple** :*

Démontrer que l'équation $cos\frac{\pi x}{2} = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$ *(p.206)*

(1) Les auteurs affirment que la fonction $f: x \to cos\frac{\pi x}{2} - x$ est continue sur $[0; 1]$;

Ils choisissent une fonction et un intervalle singuliers.

(2) Ils montrent que $f(0)f(1) < 0$

Ils montrent ici que l'antécédent est vrai pour les éléments singuliers 0 et 1.

D'après (b), on a :

$(F(0,1, f, K') \Rightarrow \exists x, G(0,1, f, x))$ (c)

Par application du Modus Ponens, à (c) et (2) on a :

$[(F(0,1, f, K') \Rightarrow \exists x, G(0,1, f, x)) \wedge F(0,1, f, K')] \Rightarrow \exists x, G(0,1, f, x)$

(3) Ils déduisent en utilisant la propriété 1 ci-dessus, que l'équation admet une solution sur $[0; 1]$.

Deux remarques ont retenu notre attention :

(a) La remarque à la page 205 :

Si f n'est pas continue sur K, alors $f(K)$ peut ne pas être un intervalle

(b) La remarque à la page 206

Si f n'est pas continue sur $[a, b]$, un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ peut ne pas avoir d'antécédent par f dans l'intervalle $[a, b]$.

Elles font respectivement suite à la propriété 1 ci-dessous et au théorème des valeurs intermédiaires :

Propriété 1

« Si f est une fonction continue sur un intervalle K, alors $f(K)$ est un intervalle » (p.205)

La formulation des deux énoncés en (a) et (b) donne l'impression que dans chacune de ces implications, l'antécédent est vrai. Nous proposons de dire en (a) :

« Si f n'est pas continue sur K, alors $f(K)$ est un intervalle » n'est pas un théorème.

c'est-à-dire qu'on peut avoir une fonction qui n'est pas continue, dont l'image n'est pas un intervalle. Les formulations (a) et (b) traduisent que la réciproque est fausse.

Ces deux remarques font référence de façon implicite aux règles d'inférence[111].

2.3. Les fonctions numériques d'une variable réelle : dérivabilité

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la dérivation. La partie relative à l'étude des fonctions contient exclusivement des exemples d'études de certaines fonctions qui mettent en œuvre les outils fournis par l'étude des limites, de la continuité et de la dérivation. Nous insisterons sur des phénomènes que nous n'avons pas rencontrés dans les parties précédentes pour éviter les répétitions.

(1) <u>Le langage utilisé</u>

Comme dans les deux autres chapitres, le langage utilisé est mixte avec l'utilisation du quantificateur universel ∀ dans une seule propriété, et dans les démonstrations.

Il y a deux utilisations du symbole ⇒ dans une démonstration (p.219)

(2) <u>Les différentes formes de la quantification et l'utilisation des quantificateurs</u>

<u>L'utilisation des quantificateurs</u>

Le quantificateur ∀ est utilisé dans une propriété et dans les démonstrations, mais jamais en début d'énoncé de propriété ou de théorème.

Comme dans les autres chapitres, le quantificateur existentiel s'exprime par « il existe », le signe ∃ n'apparaissant nulle part.

<u>Les formes de la quantification</u>

Une propriété est écrite avec une quantification implicite :

[111] Voir chapitre 2, section 1.2.2.4

Propriété

Une fonction dérivable sur un intervalle K est continue sur cet intervalle. (p.214)

La quantification multiple

En dehors des formes que nous avons identifiées dans les parties précédentes, les énoncés de la forme $\exists x, \forall y, P(x, y)$ apparaissent :

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, a et b deux éléments de K ($a < b$).
S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

2.4. Les suites numériques

Les cours sur cette partie va de la page 286 à la page 290 du manuel, et les exercices sur le chapitre « suites numériques » vont de la page 291 à la page 294.

Le paragraphe commence par une introduction dans laquelle on demande de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\left(2 - \frac{u_n}{4}\right)$.

Après cet exercice introductif, la propriété suivante est énoncée :

Propriété

Soit (u_n) une suite dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$. (p.286)

Nous avons ensuite les remarques :

- Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée « point fixe » de f
- L'existence d'un point fixe pour une fonction f ne prouve pas la convergence d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ (*cf. exemple 3 ci-après).*

Trois études de suites sont données en exemple (p.287), avec comme instruction :

« Etudier la limite de la suite (u_n) (resp. (v_n) et (w_n)) (le premier terme et la relation de récurrence sont donnés).

Méthodes de résolution :

Exemple 1

Étape 1 : Les auteurs donnent la représentation graphique de la fonction associée à la suite, et de la droite d'équation $y = x$. Ils déterminent le point d'intersection de ces deux courbes. Ils construisent ensuite les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses. Cela leur permet de conjecturer que la suite est croissante et converge vers 4.

Étape 2 : Ils résolvent l'équation $f(x) = x$ et trouve une solution qui est 4.

Étape 3 : Ils montrent que la suite est convergente et a pour limite 4.

Exemple 2 :

Étape 1 : elle est la même que précédemment

Étape 2 : elle est aussi la même que précédemment. Les auteurs trouvent deux solutions à l'équation $f(x) = x$, une positive et une négative. Puisque la suite est à termes positifs, ils concluent que, si la suite est convergente, elle a une limite positive.

Étape 3 : Ils démontrent que la suite est convergente.

Exemple 3 :

Étape 1 : Elle est la même que précédemment, mais la construction des premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses permet aux auteurs de conjecturer que la suite a pour limite $+\infty$.

Étape 2 : Ils déterminent le point fixe qui est 0, et disent « si la suite est convergente, elle converge vers 0 ».

Étape 3 : Les auteurs montrent à l'aide des propriétés mathématiques que la suite a pour limite $+\infty$.

En encadré, ils proposent un procédé pour étudier la limite d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_n = f(u_{n+1})$.

M : Pour étudier la limite d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_n = f(u_{n+1})$, on peut utiliser le procédé suivant :

- utiliser le graphique pour conjecturer le résultat ;
- résoudre l'équation $f(x) = x$;
- démontrer le résultat conjecturé.

Notre commentaire :

Le paragraphe montre qu'il existe au moins une suite récurrente non convergente, que l'existence d'un point fixe de la fonction associée à une suite récurrente ne garantit pas la convergence de cette suite, qu'une suite peut être divergente et la fonction associée admet un point fixe, et qu'enfin la fonction associée à une suite récurrente convergente peut avoir plusieurs points fixes.

Dans les travaux dirigés (p.288), les auteurs présentent deux méthodes utilisant les suites récurrentes pour déterminer une valeur approchée des solutions d'une équation : la méthode du point fixe et la méthode de Newton. Ces exemples font écho aux recommandations contenues dans le livre des programmes de l'enseignement des mathématiques de l'enseignement secondaire général au Cameroun :

> « Un des objectifs de cette partie est l'étude sur quelques exemples simples des méthodes d'approximation d'un nombre réel au moyen d'une suite »

Les suites définies dans les travaux dirigés sont nécessairement convergentes.

Analyse des exercices

Cette analyse consiste à rechercher tous les exercices sur les suites récurrentes, et à regarder les tâches qui sont demandées aux élèves.

<u>Première série d'exercices</u> : étude globale d'une suite

Il y un seul exercice (12) sur les suites définies par récurrence. La tâche demandée est d'exprimer le terme général de la suite en fonction de n. Pour cela il faudrait utiliser une suite auxiliaire.

<u>Deuxième série d'exercices</u> : limites de suites

Il y a un exercice sur les suites définies par récurrence. Dans cet exercice on étudie la convergence de quatre suites par la méthode proposée en encadré. Les deux premières suites sont convergentes, et les deux autres ne le sont pas.

<u>Troisième série d'exercices</u> : Suites monotones convergentes

Cette série contient quatre exercices pour lesquels il est demandé de :

- Tracer la courbe représentative de la suite associée ;

- Démontrer que la suite vérifie certaines contraintes (suite à termes positifs, constante pour certaines valeurs du premier terme et croissante pour d'autres valeurs, …) ;
- Déduire des questions précédentes que la suite est convergente, puis déterminer sa limite.

Dans les trois parties précédentes, les élèves appliquent directement les théorèmes et propriétés sur les suites.

Quatrième série d'exercices : Approfondissement

Dans cette partie, les exercices sont un peu plus élaborés que dans les parties précédentes ; ici les théorèmes et propriétés sont appliqués, mais pas de façon directe. On a souvent recours à des résultats qui ne figurent pas dans ce chapitre. Cette partie comprend 14 exercices sur les suites, dont 6 (32, 33, 34, 39, 40, 41) sur les suites récurrentes.

Exercice 32 : montrer que deux suites extraites convergent vers la même limite, point fixe de la fonction associée, que l'élève a déterminé auparavant ;

Exercice 33 : montrer que la suite converge vers l'unique point fixe de la fonction associée, dont l'élève a montré l'existence. Pour montrer la convergence de la suite, il utilise la formule des accroissements finis.

Exercice 34 : la suite récurrente est définie à partir de deux suites données en début d'exercice. Il est demandé aux élèves de montrer que la suite converge vers une valeur qui est donnée.

Exercice 39 : il s'agit ici d'étudier la limite de trois suites, à partir de résultats supplémentaires qu'on demande aux élèves de montrer. Dans les trois cas, la suite est convergente

Exercice 40 : la fonction associée à la suite est continue, mais n'est pas explicitée. On demande de montrer sous certaines conditions, que le point fixe de cette fonction est unique, puis de montrer que la suite est convergente.

Exercice 41 : les élèves doivent montrer que la suite est convergente pour certaines valeurs du premier terme proposées par les auteurs, puis étudier la convergence de la suite lorsque le premier terme décrit un ensemble donné. Pour certaines valeurs du premier terme la suite converge et pour d'autres, elle ne converge pas.

Dans la majorité des exercices, la méthode proposée pour l'étude de la convergence des suites est utilisée, et les suites données sont des suites convergentes. Par ailleurs, la convergence des suites est très liée à l'existence du point fixe.

2.5. Synthèse de l'analyse du manuel de Terminale C

Notre analyse s'est intéressée à la forme sous laquelle la logique intervient dans les leçons que nous avons choisi de regarder. Pour cette analyse, nous avons pris en compte les concepts de logique autour desquels nous avons centré notre travail, en nous plaçant dans le cadre du calcul des prédicats. Nous retenons les points suivants :

- le langage prédominant est le langage mixte, c'est-à-dire un mélange de langue naturelle et de formalisme logico-mathématique. Quelques énoncés –assez rares, sont formulés dans la langue naturelle ;
- l'utilisation des éléments génériques est prédominante. On rencontre de ce fait, peu d'énoncés universellement quantifiés, peu d'énoncés dont la quantification est multiple, et cela fait émerger les énoncés existentiels ;
- le statut des lettres est très instable, surtout dans les démonstrations. Dans plusieurs énoncés, les lettres ne sont pas introduites, ce qui rend difficile la détermination de leur statut ;
- l'implication dans les énoncés de théorèmes et propriétés est exprimée en langue naturelle. On la retrouve dans les démonstrations souvent sous le signe ⇒ où elle établit une relation causale entre deux énoncés, et elle sert aussi à exprimer une inférence. En dehors de la preuve par récurrence, les règles d'inférence habituelles ne sont pas évoquées, en particulier celle du Modus Ponens qui reste très implicite ;
- la négation n'intervient que dans la démonstration, et elle n'y est pas explicitée.

Concernant les suites récurrentes, les exercices permettent de mobiliser le théorème-en-acte suivant :

> « Si la fonction associée à la suite a un seul point fixe, alors, la suite est convergente et converge vers ce point ; si elle en a plusieurs, on regarde le signe des termes de la suite et la limite est de même signe que ces termes. »

Il y a un lien étroit entre le point fixe de la fonction et la convergence.

Cette analyse a permis d'identifier quelques situations que les enseignants pourraient exploiter pour une explicitation des concepts de logique.

2.6. Quelques pratiques de classe au lycée

Nous livrons dans ce paragraphe, quelques éléments qui permettent de nous éclairer sur une éventuelle prise en charge des concepts de logique par les enseignants. Ces éléments ressortent des entretiens[112] que nous avons eus avec ces derniers, sur la base d'un

[112] Les retranscriptions des entretiens figurent en annexe 7

questionnaire[113] élaboré à leur intention et du questionnaire que nous avons proposé aux élèves.

Les entretiens se sont déroulés au mois de juin 2012.

Nous avons rencontré trois enseignants de mathématiques qui interviennent dans les classes de terminale C de deux lycées de Yaoundé. Ils ont accepté de répondre à nos questions, et nous les en remercions vivement. L'un est animateur pédagogique de mathématiques et exerce comme enseignant de mathématiques depuis environ une vingtaine d'années, et les deux autres exercent depuis une dizaine d'année.

Nous appellerons AP l'enseignant, animateur pédagogique, En1 et En2 les deux autres enseignants.

2.6.1. *Le cours de logique en début d'année*

Les programmes officiels de l'enseignement secondaire ne disent rien au sujet de l'enseignement des concepts de logique. Néanmoins, on rencontre dans les manuels de mathématique au programme, des « points logiques » qui apparaissent dans des encadrés. Les inspecteurs de mathématiques recommandent aux enseignants, d'après ceux que nous avons interviewés, qu'en cas de rencontre avec ces points logiques, ils clarifient les concepts en jeu. Dans le manuel de mathématiques de terminale C que nous avons analysé, nous n'avons rencontré qu'un point logique[114], il concernait la démonstration par récurrence.

Le contenu du cours de logique que les enseignants que nous avons rencontrés dispensent, est essentiellement composé de l'apprentissage du raisonnement et des techniques de démonstration :

> **(4)**J : […] La première question que je vous pose est de savoir si vous faites des cours de logique en début d'année ?
>
> (5) En1 : Euh, je fais des compléments pour le raisonnement et la rédaction.
>
> (6) J : Compléments, c'est-à-dire ?
>
> (7) En1 : Compléments, c'est-à-dire, je propose des techniques de rédaction et j'insiste sur le processus d'une démonstration. Voilà ce que je peux faire. Maintenant, le reste de la logique dans le programme actuel camerounais est fait sous forme de point logique. A un

[113] Voir en annexe 7
[114] Nous signalons que nous avons regardé s'il existait d'autres points logiques dans le manuel, que celui que nous avons repéré en arithmétique.

moment donné du cursus de l'élève, on doit s'arrêter et faire un point logique. Donc il n'y a plus de titre de chapitre « logique ». (Annexe 9)

Ils enseignent comment démontrer une équivalence, une implication, comment démontrer par l'absurde, par contraposée, et comment construire la démonstration par récurrence.

Or ces différents types de démonstrations mobilisent incontestablement les connecteurs logiques. Par exemple, la démonstration par l'absurde demande une bonne connaissance de l'usage de la négation ; la démonstration par contraposition utilise la négation et l'implication.

2.6.2. La prise en charge des connecteurs logiques

La négation : C'est à l'occasion d'une démonstration qui mobilise la négation que les enseignants en parlent. À la question de savoir s'ils l'explicitaient, En1 nous a répondu qu'il ne le faisait pas automatiquement, mais En2 apprend à ses élèves à trouver la négation[115] d'une conjonction, d'une implication, d'une « double implication », ceci dans le cadre du calcul propositionnel (annexe 10, ligne 26).
L'enseignant AP, pour sa part, procède par étapes pour enseigner à ses élèves à construire la négation des énoncés. Il encourage l'utilisation de « ne pas » pour un début, puis il demande une reformulation de la phrase dans la langue naturelle, avec un changement de forme (annexe 8, ligne 28).
Nous faisons l'hypothèse que ce que cet enseignant appelle « reformulation avec le changement de forme » consiste à expliciter la structure logique de l'énoncé (Selden & Selden, 1995).
Nous leur avons présenté le questionnaire destiné aux élèves ; ils ont été unanimes que la majorité de leurs élèves donneraient aux items 3.1, 3.2 et 3.4, la forme négative en guise de négation, et qu'ils proposeraient comme réponse à l'item 3.3, d'après **En1**, « si un nombre n'est pas divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4 » (annexe 9, ligne 133), et la négation correcte de $P \Rightarrow Q$ d'après **En2** (annexe 10, ligne 116). Nous ne sommes pas en mesure de dire si les élèves de **En2** pourront donner un énoncé quantifié ou non, mais du point de vue de la syntaxe, nous pensons a priori qu'elle peut être correcte.
Comme cela ressort dans l'analyse du manuel, très peu de situations utilisent la négation, et lorsqu'elle apparait, elle n'est pas explicitée. Le fait que les enseignants s'inspirent du manuel

[115] Il a appelé *contraire* et par la suite utilise le mot *négation*

pour préparer leurs cours peut expliquer cette absence de prise en charge du concept dans les leçons.

L'implication : Elle est centrée sur la démonstration des théorèmes qui sont des énoncés conditionnels. Les enseignants proposent les différentes méthodes de démonstration d'une implication, et principalement la démonstration sous hypothèse qui est très présente dans le cours. Le symbole ⇒ est utilisé, ainsi que la forme « si …, alors … ».

À la question de savoir comment leurs élèves traiteraient l'exercice 1 du questionnaire, qui consiste à déterminer la valeur de vérité d'une implication obtenue par instanciation de la variable x, nous avons les réponses suivantes :

La réponse de **En1**

> « **(113) En1** : et là, celui qui va essayer de faire, se dire bon, x et on va dire qu'il y a beaucoup qui vont raisonner en disant *supposons x est pair,* il dit x est égal à $2k$. Alors, $x + 1$ est premier, $x + 1 = 2k + 1$. Là il se met à rechercher qu'est ce qu'un nombre premier en voyant voir comment il peut, s'il peut prouver ça.
>
> **(115) En1** : S'il peut trouver une condition. Alors, certains vont commencer à, vont oublier qu'on leur demande de trouver les entiers x. Ils vont croire qu'on leur demande de démontrer que si x est pair, alors $x + 1$ est un nombre premier. » (Annexe 9)

La réponse de En2

> « **(102) En2** : Bien, déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 …. Je pense que, par rapport à moi, sur dix élèves que j'ai encadrés, la moitié peut répondre, la moitié pas. Pas parce que les autres, les autres, ils n'auront pas… Les autres je précise vous donnerons la solution uniquement dans l'ensemble des nombres pairs inférieurs à vingt, c'est-à-dire, ils iront chercher les solutions dans les nombres pairs. Ici par exemple dans cet exercice, tous les nombres impairs sont solution, mais ils iront chercher seulement les solutions dans les nombres pairs. » (Annexe 10)

La réponse de **En2** nous amène à faire l'hypothèse qu'il a explicité les règles de vérité d'une implication matérielle. D'après lui, la réponse des élèves qui consiste à ne considérer que les nombres pairs résulterait d'habitude scolaire :

> **(104) En2** : Justement c'est une habitude scolaire. Parce que ils vont vouloir supposer que, supposons que x est pair. C'est ce qu'ils vont admettre. Donc, je dis, voilà pourquoi ils vont aller chercher les solutions dans les nombres pairs, je dis la moitié. Mais, celui qui va prendre les choses à l'envers, c'est-à-dire, celui qui va chercher à montrer que $non\ Q \Rightarrow non\ P$ trouvera tout l'ensemble des solutions. Ceux qui auront cherché les solutions dans l'ensemble des nombres pairs, ça sera une des conséquences de cette mauvaise habitude scolaire. On a appris à dire supposons que P est vrai et montrons que Q est vérifié, et montrons que Q est vrai aussi. (Annexe 10)

Ce phénomène qui consiste chez les élèves, à évaluer d'abord l'antécédent d'un énoncé conditionnel lorsqu'on veut évaluer cet énoncé, est pointé par les enseignants dans leurs commentaires sur l'exercice 8. D'après eux, pour de nombreux élèves, cet énoncé est faux du fait que l'antécédent est faux.

L'enseignant **AP** a travaillé sur les tables de vérité des connecteurs logiques avec ses élèves dans le cours de probabilité (Annexe 8, ligne 10).

Quant aux enseignants **En1** et **En2** ils ne le font pas automatiquement, car cela ne leur est pas permis par l'inspection, d'une part, et d'autre part, ils éprouvent des difficultés à intéresser les élèves.

Pour cette deuxième raison, nous faisons l'hypothèse que les situations proposées pour illustrer l'usage des tables de vérité n'étaient pas pertinentes.

Les deux enseignants **En1** et **En2** ont travaillé sur la contraposée avec leurs élèves.

<u>L'équivalence</u> : L'équivalence est encore appelée par **En2**, « double implication ». Ce concept est explicité dans le cadre de la démonstration, où les enseignants explicitent les modes de démonstration de l'équivalence, dont l'un semble être une démonstration par double implication. Un autre mode que nous identifions est la démonstration en boucle (**En1**).

<u>Les inférences</u> : l'exercice 5 du questionnaire destiné aux élèves porte sur les règles d'inférence ; il permet de préciser à quel moment on peut faire une inférence, et à quel moment on ne le peut pas. Pour les enseignants **En1** et **En2**, il est presque certains que les élèves répondront correctement aux items **5.1** et **5.3**, et se comporteront aux items **5.2** et **5.4**, comme s'ils étaient en présence d'une équivalence, c'est-à-dire, comme si l'énoncé :

> « si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$ »

est une équivalence. Pour justifier ce comportement des élèves à l'item **5.2**, chacun des deux enseignants avancent les raisons qui suivent :

<u>En1</u> : les élèves ne font pas une interprétation rigoureuse de la phrase ; il y a un préalable de convergence, et la résolution de l'équation $f(x) = x$ n'est qu'un moyen de retrouver la limite. Il renforce son explication en insistant sur le fait que lorsqu'on a une implication qui n'est pas une équivalence, on doit toujours préciser que la réciproque est fausse (annexe 9, ligne 147) et exhiber un contre-exemple. Ceci sous-entend que l'énoncé qu'il considère est donné avec un quantificateur universel.

Cette pratique a été repérée dans le manuel. Nous y avons aussi rencontré la formulation « la réciproque n'est pas toujours vraie ».

<u>En2</u> : il pointe les habitudes scolaires :

(126) En2 : […] Bon, je crois que beaucoup vont se tromper, mais par habitude. Beaucoup risqueront de dire que la suite u_n converge. Parce qu'on a eu la maladresse toujours de leur donner des cas où, lorsque l'équation $f(x) = x$ avait des solutions, la suite était convergente, et l'une des solutions était… Or ils ne comprennent pas je vais dans ce cas là, je n'explore ce cas que si je sais que la suite u_n est convergente. Donc beaucoup vont se dire que comme l'équation $f(x) = x$ a des solutions, la suite est convergente. Ils ne comprendront pas que dans la plupart des cas, les trois premières questions ont toujours consisté à prouver que la suite u_n converge, soit en montrant qu'elle est croissante et majorée, soit qu'elle est décroissante et minorée avant d'aboutir à ça. Donc beaucoup risquent de se tromper et de dire qu'elle est convergente. Ça met vraiment l'accent sur le fait qu'il faut insister sur le quantificateur. Ah, je comprends maintenant vos questions, parce que ça montre qu'il faut insister quand on enseigne ça, de dire ce n'est qu'au cas où la suite est convergente que sa limite. On n'utilise pas ça comme on utilise souvent pour prouver que la suite converge, mais pour déterminer la limite de la suite lorsqu'on sait déjà qu'elle est convergente. Donc on ne saurait se prononcer en principe sur la convergence de la suite avec la solution. (Annexe 10, ligne 126)

Aucun des deux enseignants n'a évoqué les règles d'inférence pour justifier la réponse de leurs élèves ; les justifications s'appuient plutôt sur des considérations pragmatiques.

Le langage :

Les enseignants **En1** et **En2** utilisent en général la langue naturelle, afin de se conformer aux instructions de l'inspection pédagogique de mathématiques. Le symbole de l'implication et de l'équivalence sont utilisés par les enseignants. Ils permettent aux élèves de les utiliser sous leur contrôle[116], afin que cela soit fait correctement. Les quantificateurs sont exprimés en majorité avec la langue naturelle.

L'enseignant **AP** introduit dans son cours, l'écriture formelle. Ce dernier exerce les élèves au changement de langage, au passage du langage naturel au langage formel et réciproquement.

2.6.3. L'usage des quantificateurs et le statut des lettres

La quantification simple : les trois enseignants utilisent le langage naturel pour exprimer les quantificateurs, ainsi que le symbole $\forall$. Les seules expressions qu'ils ont en usage pour désigner le quantificateur universel sont « *quel que soit* », « *pour tout* », et pour désigner le quantificateur existentiel, « *il existe* ».

Pour les autres quantificateurs (certains par exemple), **En2** nous a répondu que lorsqu'il les utilise, il n'informe pas les élèves que ce sont des quantificateurs.

[116] En général lorsque les élèves sont au tableau

Concernant le symbole ∀, de l'avis de **En2** et **AP**, c'est un moyen pour abréger les écritures (Annexe 8, lignes 54 et 56 ; annexe 10, ligne 56).

Cela pourrait justifier l'absence de prise en compte de la syntaxe d'utilisation du quantificateur : nous le voyons parfois apparaitre à la fin de l'énoncé qui est supposé être quantifié.

Nous avons attiré leur attention sur la quantification implicite des énoncés et sur les énoncés formulés avec des génériques :

La réponse de **En1** :

> **(99) En1** : J'avoue que vraiment, je n'ai pas attiré l'attention dessus. Je suis tombé dans le piège de la routine. Les autres, quand on dit, soit une fonction. L'idée de l'article indéfini *une*, me permet peut être de croire que c'est *pour tout* et au moment où je vais aller à l'existentiel, j'utiliserai l'article défini, *le*, *la*. Quand je vais prendre *une*, comme c'est indéfini, on pense que ça peut couvrir tout. Mais je crois qu'attirer l'attention un détail est très important, ce serait plus intéressant de dire, *pour toute fonction f, si f est dérivable en* x_0, *alors f est continue en* x_0. Je me dis que si tu commences à écrire *quel que soit f appartenant à l'ensemble F des fonctions, si f dérivable implique ...,* cet énoncé aura du mal à passer. (Annexe 9, ligne 99)

Pour cet enseignant, identifier *un* au quantificateur universel, *le* ou *la* à des existentiels « c'est ce que l'enseignant pense, mais il ne l'a pas vraiment dit » (annexe 9, ligne 105).

La réponse de **AP** : il identifie « soit x » à « quel que soit x », c'est-à-dire qu'il identifie un élément générique à une variable liée (annexe 8, ligne 54).

<u>La quantification multiple</u> : **En2** utilise les indices (Durand-Guerrier et Arsac, 2003) pour exprimer la dépendance des variables. Pour ce dernier, c'est un moyen d'éviter des confusions (Annexe 10, ligne 70).

À la question de savoir ce que les élèves répondraient à l'exercice 4, **En1** et **En2** pensent que les élèves produiront le premier item, du fait que généralement, les enseignants donnent la définition de « M est un majorant ». Ce sont les autres items qui peuvent les amener à s'interroger sur la correction de leur réponse. En1 émet des doutes sur les capacités de ses élèves à distinguer **4.3** (Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que $f(x) \leq$M) de **4.4** (Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, $f(x) \leq$M).

Nous faisons l'hypothèse, d'après les explications ci-dessus, que cette confusion pourrait provenir de ce que la lettre M est écrite en **4.3** sans indice explicitant sa dépendance à x.

<u>Les lettres de variables</u> :

Dans les entretiens, les enseignants relèvent surtout une fixation des élèves sur les lettres qui désignent des objets :

- pour de nombreux élèves, la lettre f désigne une fonction et x est le nom de la variable réelle. Lorsque la fonction ou la variable change de nom, c'est une difficulté qui s'installe chez l'élève. Pour les aider à se détacher de cette fixation, **AP** propose de souvent varier les dénominations ;
- y désigne en général un nombre réel, et lorsqu'il apparait dans une équation différentielle, les élèves n'arrivent plus à exprimer les solutions de cette équation. La gestion des variables est aussi une préoccupation pour les enseignants comme en témoigne **En2** :

> **(88) En2** : […] tu donnes une équation différentielle à un enfant, $z'' + 3z + 1 = 0$. L'enfant va écrire la solution comment ? Lorsqu'il va vouloir déterminer la solution qui vérifie l'équation $y''(2) = 0$, y… Donc c'est un problème. Alors qu'est ce que moi je fais ? Il faut présenter la chose à l'enfant comme étant une simple notation. Moi, ce que je dis, c'est que depuis la classe de troisième vous avez commencé à étudier les fonctions, en seconde… La fonction était en général notée f, la variable notée x et l'image de x, on note généralement y. Donc, aujourd'hui, tout ce qu'on va faire, c'est que y va jouer le rôle de f, parce qu'on a toujours écrit $y = f(x)$. y c'est $f(x)$. Mais pour l'instant, pour qu'il n'y ait pas de confusion entre x qui est la variable, qui elle doit être prise dans un intervalle et f qui est une fonction qui appartient à l'ensemble des fonctions, voilà, tout simplement on va supprimer le x et prendre $y = f$. C'est comme ça qu'on s'en sort un peu. Mais sinon il serait mieux de continuer dans ce chapitre-là, de noter les inconnues à l'aide des fonctions, des lettres comme f, h, l, m, ignorer un peu y, parce que dans les classes antérieures, c'était les images de x par f. C'était des images. Ça crée vraiment des problèmes. Parfois les enfants, même quand on insiste, ne savent pas écrire la solution d'une équation différentielle.

Le statut des lettres est évoqué, mais le vocabulaire adéquat n'est pas toujours utilisé, comme cela se voit à l'annexe 9, ligne 73 :

- une lettre « représente quelque chose de concret » : cela peut renvoyer le statut de la lettre à un élément générique ou singulier ;
- les variables muettes : elles peuvent avoir le statut de variable libre, ou de variable liée.
- nous avons relevé des expressions comme « variable indépendante » et « variable dépendante des autres » : dans l'énoncé « $\exists M, \forall x, P(x, y)$ », M est une *variable indépendante*, et dans l'énoncé « $\forall x, \exists M, P(x, y)$ », M est une *variable dépendante* de x. Dans le calcul des prédicats, M a dans les deux énoncés, le statut de variable liée.

2.6.4. Synthèse des entretiens et quelques propositions des enseignants

Les entretiens nous ont permis de dégager les points suivants :

- certains enseignants dispensent des cours de logique, bien que cela ne soit pas prescrit par les programmes. Les programmes préconisent plutôt un point logique lorsque cela est nécessaire ;
- les enseignements qui proposent un cours de logique en début d'année ont centré le contenu de ce cours sur l'apprentissage de la démonstration ;
- une manière de prévenir des inférences non valides du type

  $$\Big(\big(P(a) \Rightarrow Q(a)\big) \wedge \neg P(a)\Big) \Rightarrow \neg Q(a)$$

  et du type

  $$\Big(\big(P(a) \Rightarrow Q(a)\big) \wedge Q(a)\Big) \Rightarrow P(a)$$

  faites à partir du théorème

  $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$,

  consiste à préciser lors de l'énonciation de ce théorème que la réciproque n'est pas vraie ;
- les apprentissages sur les connecteurs logiques sont peu pris en charge par les enseignants ; l'implication, l'équivalence et la négation ne sont évoqués que dans le cadre de la démonstration ;
- la quantification implicite des énoncés n'est pas problématisée. L'enseignant estime que cette pratique est institutionnalisée ; il considère que *un* renvoie au quantificateur universel, et *le* ou *la* renvoient au quantificateur existentiel ;
- lorsque les enseignants utilisent les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x, y)$, ils ont recours à la notation fonctionnelle qui indique que y dépend de x ;
- le statut de la lettre n'est pas explicité, mais la fonction de la lettre dans les énoncés l'est ;
- le langage utilisé pour les concepts logiques est le langage courant en général ; l'apprentissage du langage formel relève de la responsabilité de l'enseignant.

Les enseignants pensent que les élèves ne sont pas suffisamment outillés en logique pour faire correctement des mathématiques à l'université. Ils proposent un travail sur la logique dès la classe de seconde, avec au premier cycle, des activités ludiques qui permettent aux jeunes élèves de se familiariser avec les modes de raisonnement. Ils déplorent le manque de formation de certains de leurs collègues en logique et proposent la réintégration de la logique dans les programmes scolaires.

Conclusion

Nous avons analysé le manuel de mathématiques au programme dans la classe de terminale C au Cameroun. Le but de cette analyse était de mettre en lumière les éléments de transposition didactique des concepts de logique contenus dans le manuel. Nous avons également, à travers des entretiens menés avec des enseignants de mathématiques intervenant dans la classe de terminale C, identifié quelques pratiques enseignantes relatives à la prise en charge des concepts de logique par ces derniers.

Nous remarquons quelques similitudes entre la transposition des concepts de logique dans les manuels, et les pratiques enseignantes :

- l'utilisation des éléments génériques et la pratique de la quantification implicite sont très présentes, et semblent être naturelles ;
- les règles d'inférence n'apparaissent pas dans le manuel, et les enseignants n'en parlent pas ;
- l'utilisation des connecteurs logiques est effective dans les démonstrations, mais ces connecteurs ne sont pas explicités ;
- le langage courant est en grande partie utilisé pour exprimer la quantification et les opérations logiques.

Dans le manuel, nous avons repéré des séquences des démonstrations où le statut de la lettre est très instable. Les résultats des entretiens ne nous permettent pas d'affirmer qu'il y a une réelle explicitation du statut des lettres ; les enseignants s'attardent davantage sur la fonction des lettres dans les énoncés.

L'étude que nous venons d'effectuer nous permet de confirmer deux hypothèses que nous avons posées, pour ce qui concerne les enseignements du secondaire que nous avons interviewés. La première stipule que les concepts de logique sont très peu pris en charge par les enseignants de mathématiques, et la seconde, que les difficultés relatives à ces concepts logiques sont assez méconnues par la plupart des enseignants. C'est l'avis de l'enseignant **En2** à la fin de notre entretien :

> **(140) En2** : […] Mais ça m'interpelle aussi. Parce que, quand on voit ça, on constate que parfois on enseigne mal.
>
> **(141) J** : […] On oublie certaines petites choses qui
>
> **(142) En2** : qui peuvent causer beaucoup de tord à l'élève un peu plus tard quand il va lire les livres de première année, de deuxième année, de troisième année. Il risque se perdre,

surtout par rapport à la quatrième question là, où parfois au niveau du majorant, on dit des choses aux élèves sans préciser. Je crois qu'il faut toujours préciser même si l'élève ne comprend pas beaucoup, il faut toujours préciser.

3. Analyse du polycopié de première année de licence de mathématiques

En première année de licence de mathématiques à l'École Normale Supérieure de Yaoundé, le cours d'analyse a pour support un cours polycopié qui date de 1994. Il a été rédigé par Joël Moulen, à ce moment enseignant de mathématiques à la faculté des sciences de l'Université de Yaoundé[117], et Nicolas Gabriel Andjiga, enseignant de mathématiques à l'École Normale Supérieure de Yaoundé.

Nous avons porté notre choix sur cet ouvrage car il était également utilisé en première année de licence de mathématiques à l'université de Yaoundé 1, université dont l'École Normale Supérieure de Yaoundé est un établissement. Il comporte 11 chapitres, et il n'en existe aucun dont le contenu porte explicitement sur la logique.

En introduction, les auteurs présentent cet ouvrage comme un support qui a pour but :

- une application raisonnée des résultats de l'Analyse à la résolution des problèmes ;
- d'initier les étudiants aux techniques d'élaboration des résultats ;

Ils précisent que les cours mettent l'accent sur l'acquisition des techniques de démonstration en Analyse.

Nous avons choisi de porter notre attention sur les chapitres suivants :

- le corps des réels, car il contient plusieurs éléments fondamentaux de l'analyse, et de ce fait, plusieurs concepts de logique nécessaires à leur traitement ;
- fonctions numériques à une variable réelle ;

Dans ce chapitre, nous parlerons de proposition mathématique pour désigner une proposition au sens logique, ceci pour marquer la distinction avec l'usage de ce terme dans le polycopié ; en effet, les auteurs utilisent régulièrement les termes de *proposition* et de *propriété* pour désigner certains théorèmes.

3.1. Le corps des nombres réels

C'est le premier chapitre du polycopié. Il va de la page 1 à la page 7, et les exercices vont de la page 7 à la page 9.

[117] L'université de Yaoundé est devenue depuis la réforme de 1993 l'Université de Yaoundé 1.

(1) <u>Le langage utilisé</u>

Dans cette partie, on rencontre les trois types de langage, et certains énoncés sont entièrement écrits en langage formel. Par exemple la propriété caractéristique de la borne supérieure :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$,

$\alpha = Sup\, A \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq \alpha\ et\ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, \exists x \in A\ /\ \alpha - \varepsilon < x$ (p.2) (i)

L'implicite des formulations amène parfois les auteurs à expliciter entre parenthèses la signification de l'énoncé écrit dans le langage formel (p.6).

(2) <u>Les formes de la quantification et l'utilisation des quantificateurs</u>

L'utilisation des quantificateurs

Les deux quantificateurs apparaissent sous la forme symbolique –∀ pour le quantificateur universel et ∃ pour le quantificateur existentiel, et sont exprimés aussi avec les mots de la langue (pour tout, il existe).

Beaucoup d'objets sont introduits par « soit …», ce qui donne à ces objets, le statut d'élément générique.

Les formes de la quantification

La quantification implicite n'existe pas dans cette partie du cours.

Les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ ou de la forme $\exists x, \forall y, P(x,y)$ n'apparaissent pas de façon explicite. Deux théorèmes énoncés dans la langue naturelle peuvent prendre la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$:

Proposition I-2-3

Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un nombre rationnel. (p.4)

Théorème I-2-7

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. (p.5)

La proposition et le théorème prennent la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ si on se situe respectivement dans l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et dans l'ensemble des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

La quantification bornée apparait dans plusieurs formulations et dans les démonstrations. Dans la démonstration de l'énoncé (i) ci-dessus, on peut lire :

« Supposons que $\alpha = \sup A$ et montrons que $\forall x \in A, x \leq \alpha$ et que $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, \exists x \in A\ /\ \alpha - \varepsilon < x$ ».

Il veulent montrer que :

$\forall x \in A, x \leq \alpha$ (1)

et $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, \exists x \in A\ /\ \alpha - \varepsilon < x$ (2)

dans (2) il y a une expression de la quantification bornée qui peut être problématique pour les étudiants. L'écriture fait disparaitre l'implication et de ce fait, la syntaxe utilisée en (2) est ambigüe. En toute rigueur on devrait écrire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x)$$

ou en quantifiant sur les rationnels positifs, on écrit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x$$

(3) <u>Le statut des lettres dans les énoncés</u>

Les théorèmes, les propositions et les propriétés sont soit des énoncés généraux, soit des énoncés formulés avec des éléments génériques.

Les variables sont liées par le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Dans certaines propositions on retrouve des lettres dont le statut est ambigu :

Dans la propriété caractéristique de la borne supérieure, α est une variable libre, ou une variable universellement quantifiée implicitement :

> **Propriété I.1.6**
>
> Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$.
>
> $\alpha = Sup\, A \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq \alpha\ et\ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, \exists x \in A \,/\, \alpha - \varepsilon < x$ (p.2) (i)

Les auteurs construisent une preuve par hypothèse, elle commence par :

« Supposons que $\alpha = \sup A$ et montrons que $\forall x \in A, x \leq \alpha$ et que $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, \exists x \in A \,/\, \alpha - \varepsilon < x$ ».

La lettre α n'est pas introduite.

Pour établir la démonstration, les auteurs cherchent, pour $\varepsilon > 0$ et élément générique, un élément τ de A qui satisfait la phrase ouverte en x, $\alpha - \varepsilon < x$.

Ils continuent la démonstration ainsi :

> Mais $\alpha = \sup A$ donc $\forall x \in Maj\ (A), \alpha \leq x$, (3)
> or $\varepsilon > 0$, donc $\alpha - \varepsilon < \alpha$ (4)
> et par conséquent $\alpha - \varepsilon \notin Maj\ (A)$. (5)
> Or $\alpha - \varepsilon \notin Maj\ (A) \Leftrightarrow \exists t \in A, \alpha - \varepsilon < t$. (6)
> Il suffit donc de prendre $\tau = t$. (7)

La lettre x en (2) et la lettre t en (6) jouent le même rôle, celui de variable muette. En (6), il y a affirmation de l'existence d'un élément de A qui satisfait la phrase $\alpha - \varepsilon < x$, mais pas désignation de cet élément. La lettre τ change de statut à l'étape (7), elle devient une variable libre par affectation de t, et t devient un nom d'objet.

Les lettres τ et t ont changé de statut dans la démonstration.

Nous avons identifié le même phénomène dans le cours d'arithmétique de terminale C.

De même, dans la Propriété I-1-7, α et β sont soit des variables libres, soit des variables implicitement liées par le quantificateur universel :

Propriété I-1-7

Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$.

(i) $\alpha = \max A \Rightarrow \alpha = \sup A$

(ii) $\beta = \min A \Rightarrow \beta = \inf A$ (p.2)

(4) __Les formes de l'implication et de l'équivalence__

__L'implication__

Des formulations sont sous la forme : Q si P

Définition I-1-2

Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$,

A est une partie **majorée** (resp. **minorée**) de $\mathbb{Q}$ si A admet au moins un majorant (resp. un minorant). (p.1)

Ces formulations sont souvent utilisées dans les définitions (p.2, p.5).

Nous avons rencontré le symbole ⇒ dans l'énoncé de la proposition I-1-7 (p.2) :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$.

(i) $\alpha = \max A \Rightarrow \alpha = \sup A$.

(ii) $\beta = \min A \Rightarrow \beta = \inf A$

et dans des démonstrations (pp.2, 7) où les auteurs font des transformations d'écriture.

Dans certaines démonstrations, le signe ⇐ apparait (p.3, p.6). Il est précédé de « il suffit que … », ou il vient après cette expression. Nous donnons un extrait d'une démonstration où le signe ⇐ est utilisé :

On a $2br < b^2 - 3 \Leftrightarrow r < \frac{b^2-3}{2b} \Leftrightarrow r < \frac{b}{2} - \frac{3}{2b}$ et $\frac{b}{2} - \frac{3}{2b} < b$, donc $b - r \in B \Leftarrow r < \frac{b}{2} - \frac{3}{2b}$; il suffit donc de prendre $r = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} - \frac{3}{2b}\right)$. (p.3)

$b - r \in B \Leftarrow r < \frac{b}{2} - \frac{3}{2b}$ se lit d'après les auteurs, « pour que $b - r$ appartienne à B, il suffit que r soit inférieur à $\frac{b}{2} - \frac{3}{2b}$ »

Il faut noter que ce signe n'est pas d'usage courant. Nous ne l'avons pas rencontré dans le manuel. La notion de condition suffisante est utilisée sans que les notions de condition nécessaire et condition suffisante ne sont pas explicitées.

Dans ce chapitre, nous avons identifié deux énoncés conditionnels, dont l'implication est implicite. Nous en donnons un exemple :

> **Théorème I-2-5** ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)
>
> Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ admet une infinité de rationnels. On dit encore que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Aucun énoncé de définition, de théorème ou de propriété n'est formulé à l'aide de l'expression « si …, alors … ».

La démonstration des énoncés conditionnels

Les auteurs utilisent la méthode directe qui consiste à montrer la vérité du conséquent sous l'hypothèse que l'antécédent est vrai, et les chaînes d'implications. Aucune méthode n'est annoncée avant la démonstration.

L'équivalence

L'équivalence apparait dans ce chapitre sous les formes « … si et seulement si … » et ⇔.

Dans les démonstrations, c'est surtout le signe ⇔ qui est utilisé pour marquer l'équivalence entre deux énoncés mathématiques.

La démonstration des théorèmes qui sont des équivalences se fait toujours en deux étapes ; pour montrer que $\forall x, (A(x) \Leftrightarrow B(x))$ est vrai, les auteurs montrent que pour un élément générique a, $A(a) \Rightarrow B(a)$ et $B(a) \Rightarrow A(a)$ sont vrais, et chaque fois, ils explicitent l'énoncé à démontrer.

*(5) **La négation***

On retrouve la négation dans deux démonstrations et elle y est appelée *contraire* (p.6, p.7). Elle apparait également dans la démonstration du théorème I.2.5 (p.5), qui est une démonstration par l'absurde.

À la page 6, les auteurs explicitent la négation de la phrase, ce qu'ils ne font pas à la page 7.

Pour la démonstration du théorème I.2.5, les auteurs énoncent directement la négation sans y faire allusion.

(6) Les exercices

Plusieurs éléments de logique apparaissent dans les exercices de ce chapitre. Nous en commentons quelques-uns :

Exercice 1 :

Les auteurs demandent en première question, de donner les différentes méthodes de démonstration d'une implication. Dans le cours il y en a deux que nous avons identifié, la démonstration sous hypothèse, et la démonstration par chaînes d'implications. Certaines démonstrations par contraposition sont faites en cours[118], et dans ce cas, l'enseignant les annonce généralement[119].

À la deuxième question, ils donnent trois énoncés conditionnels universellement quantifiés. Ils demandent de démontrer qu'ils sont vrais, puis de donner leur contraposée et leur négation :

$\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}, [\forall x \in \mathbb{Q}, (x < a \Rightarrow x < b)] \Rightarrow a < b$ (1)

$\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}, [a < b + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0] \Rightarrow a \leq b$ (2)

$\forall a \in \mathbb{Q}, (a^2 \neq 9) \Rightarrow (a \neq 3)$ (3) (p.7)

Dans le (2), du point de vue de la syntaxe logique, on devrait avoir $\forall \varepsilon > 0$ avant $a < b + \varepsilon$.

Ces trois énoncés sont complexes. En nous appuyant sur les résultats des travaux antérieurs que nous présentons au chapitre 3, nous faisons l'hypothèse que les notions de logiques qui sont données en début d'année sont insuffisantes pour permettre aux étudiants de répondre aux questions posées. Nous avons identifié quelques difficultés auxquelles les étudiants peuvent se heurter :

- la structure logique des énoncés (1) et (2) est complexe (Durand-Guerrier & Arsac, Gueudet, Selden & Selden) ;
- la quantification bornée à l'intérieur des crochets de l'item (2) (Durand-Guerrier) ;
- la construction de la négation des énoncés (1) et (2) qui contiennent un quantificateur dans l'antécédent (Durand-Guerrier & Ben Kilani, Gueudet) ;
- la construction de la preuve de chaque énoncé (Durand-Guerrier & Arsac, Selden & Selden).

[118] Voir dans le paragraphe suivant l'entretien avec l'enseignant de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé

[119] Nous avons obtenu cette information au cours d'un entretien avec un enseignant du supérieur

Exercice 2

Dans la première partie de cet exercice, les auteurs demandent de déterminer une ensemble A qui satisfait les phrases ouvertes (4) à (8). Pour le faire, l'étudiant doit d'une part mobiliser la construction de la négation des énoncés donnés en cours, à savoir « A a un plus petit élément », « A est majoré », … , et d'autre part, pouvoir traduire ces propriété dans le langage formel qui est opératoire :

> A n'admet pas de plus petit élément (4)
>
> A n'admet pas de plus grand élément (5)
>
> A n'est pas majoré et est minoré (6)
>
> A est minoré et n'a pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$ (7)
>
> A n'a pas de plus grand élément, mais admet une borne supérieure (8) (p.7)

Dans la deuxième partie de l'exercice 7 (p.9), il est demandé de donner en les justifiant, des exemples de parties A de $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

(i) A n'a pas de majorant ;
(ii) A n'a ni plus grand élément, ni plus petit élément ;
(iii) A a un plus grand élément et n'a pas de plus petit élément ;
(iv) A a un plus grand élément et un plus petit élément.

Il faut pour cet exercice, construire la négation des énoncés. Ceci demande de la part des étudiants, une bonne connaissance de l'usage de la négation.

Ces items vont permettent aux étudiants de travailler en prenant en compte en même temps l'aspect syntaxique de la négation, et son aspect sémantique ; on doit trouver des ensembles A qui satisfont certaines propriétés et pas d'autres.

Dans la troisième partie de l'exercice 2, les auteurs demandent de déterminer lorsqu'elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de chacun des ensembles donnés. Pour cela, l'étudiant doit savoir exprimer « la borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble n'existe pas ».

3.2. Fonction numérique à une variable réelle

Nous avons pour support le cours d'un étudiant que l'enseignant a distribué en début d'année, car dans le polycopié, le cours sur les fonctions numériques n'est pas complet.

C'est un document de 18 pages ; le cours va de la page 1 à la page 11, et les exercices, de la page 12 à la page 18.

(1) Le langage utilisé

Les trois formes de langage sont présentes dans le cours.

Il faut noter, tout comme dans le chapitre précédent, qu'il y a une augmentation du niveau de complexité des énoncés dans le polycopié, par rapport à celui manuel. Cela est dû, d'une part, au langage utilisé et, d'autre part, au changement du statut des objets qui sont étudiés ; ils passent d'outils qu'ils étaient dans le secondaire, à objet d'étude dans l'enseignement supérieur.

Nous avons repéré un énoncé exprimé dans la langue naturelle, qui, traduit en langage formel présente une grande complexité :

> « Toute fonction continue sur $[a; b]$ est bornée et atteint ses bornes » (p.9) (1)

Lorsque nous paraphrasons cet énoncé nous obtenons :

> « pour toute fonction continue f sur $[a\,; b]$, il existe un réel positif A tel que, pour tout x dans l'intervalle $[a\,; b]$, $|f(x)| \leq A$, et f atteint ses bornes » (2)

Nous explicitons « f atteint ses bornes » :

Dire que « f atteint ses bornes » signifie que la borne supérieure M, et la borne inférieure m, de $f([a; b])$ existent, et de plus, il existe deux réels u et v dans $[a; b]$ tels que $f(u) = m$ et $f(v) = M$. Nous obtenons :

> « pour toute fonction continue f sur $[a\,; b]$, il existe un réel positif A tel que, pour tout x dans l'intervalle $[a\,; b]$, $|f(x)| \leq A$, et pour tous réels m et M, si $\sup f([a; b]) = M$ et $\inf f([a; b]) = m$, alors il existe deux réels u et v dans $[a; b]$ tels que $f(u) = m$ et $f(v) = M$ » (3)

Dans la portée du quantificateur liant f, on a la conjonction de deux énoncés :

> « il existe un réel positif A tel que, pour tout x dans l'intervalle $[a\,; b]$, $|f(x)| \leq A$ » (4)
>
> « pour tous réels m et M, si $\sup f([a; b]) = M$ et $\inf f([a; b]) = m$, alors il existe deux réels u et v dans $[a; b]$ tels que $f(u) = m$ et $f(v) = M$ » (5)

(4) est un énoncé contenant une quantification double ;

(5) est un énoncé conditionnel, universellement quantifié, dont le conséquent est un énoncé existentiel.

À la page 11, les auteurs donnent la définition d'une fonction uniformément continue sur un intervalle I :

> $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (6)

qu'ils font suivre du commentaire ci-dessous qui est un théorème :

> On constate que si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I

Auparavant, ils ont donné la définition de « f est continue en un point x_0 » ainsi :

> « f est continue en x_0 si la limite de f en x_0 est $f(x_0)$. (p.8) (7)

Les deux définitions sont formulées dans des langages différents. De ce fait, la relation énoncée en commentaire n'est pas immédiate. Il faudrait une formalisation de la définition (7) pour établir ce lien :

Lorsqu'ils ont défini la limite L d'une fonction en un point X_0, ils ont explicité le cas où $L = l \in \mathbb{R}$ et $X_0 = x_0$, ce qui donne pour la définition formelle d'une fonction définie sur un intervalle I et continue en x_0 :

> $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (8)

Pour passer de (6) à (8), on doit écrire x et y séparément, liés chacun par le quantificateur universel, puis faire une instantiation universelle de y par x_0. Ces opérations sont généralement implicites dans le cours, et peuvent être difficilement compréhensibles par les sujets[120].

(2) <u>Les différentes formes de la quantification et l'utilisation des quantificateurs</u>

<u>L'utilisation des quantificateurs</u>

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont utilisés par les auteurs, de même que les expressions « pour tout », « il existe ».

<u>Les différentes formes de la quantification</u>

<u>La quantification implicite</u>

On la retrouve dans les énoncés des théorèmes.

La quantification universelle implicite apparait sous la forme habituelle :

> « Si f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe c dans $]a;b[$ tel que $f(c) = 0$ » (p.10)

La quantification existentielle est implicite dans les énoncés en langue naturelle ; elle est absorbée par la langue comme c'est le cas de l'énoncé (1) (*Toute fonction continue sur* $[a;b]$ *est bornée et atteint ses bornes*) que nous avons analysé et dont les formulations (2) et (3) qui le suivent font ressortir le quantificateur existentiel.

<u>La quantification bornée</u>

Dans les énoncés, la quantification est exclusivement bornée.

<u>La quantification multiple</u>

Dans la définition d'une fonction bornée (p.9), elle de la forme $\exists y, \forall x \; P(x,y)$.

---

[120] Voir Gueudet, chapitre 3, paragraphe 1.

Dans la définition de « L est la limite de f en X_0 [121]» (p.2), on retrouve les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$.

(3) ***<u>Le statut des lettres dans les énoncés</u>***

La plupart des propositions et des propriétés sont formulées avec des éléments génériques, et leur démonstration se fait par éléments génériques, elle commence par exemple par « soit une fonction, … ».

Le phénomène de changement de statut des variables est aussi présent dans ce chapitre. Dans la démonstration de la proposition suivante :

> **Proposition 19**
>
> Soit $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$ et $\alpha, L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$ et $\lim_{x\to L} f(x) = \alpha$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \alpha$. (p.7)

Nous avons identifié deux lettres de variables dont les statuts passent respectivement d'élément générique et de lettre muette, à variable libre et nom d'objet.

<u>Nous commentons un énoncé qui figure dans le manuel de terminale et le polycopié :</u>

<u>Dans le manuel :</u>

> **Propriété :**
>
> Soit $g \circ f$ la composée de deux fonctions et a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $g \circ f$ est définie.
>
> Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = l$, alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$. (p.196)

Hors de l'encadré, il est écrit :

> a, b et l sont des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

<u>Dans le polycopié</u> :

> **Proposition 16**
>
> Soit f et g deux éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, X_0, L_1, L_2 des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
>
> Si $\lim_{x\to X_0} f(x) = L_1$, et $\lim_{x\to L_1} g(x) = L_2$ et si $\exists A \in \mathcal{V}(X_0), \forall x \in A, x \neq X_0 \Rightarrow f(x) \neq L_1$,
>
> alors $\lim_{x\to X_0}(g \circ f)(x) = L_2$. (p.6)

Dans la première formulation, nous avons pointé l'ambiguïté du statut des lettres a, b et l, où seul a est introduit comme un élément générique en début d'énoncé.

Par ailleurs, la formalisation de cet énoncé laisse penser que les lettres b et l doivent être introduites par le quantificateur existentiel, ce qui n'est pas le cas, comme le montre la deuxième formulation. Les lettres correspondantes dans cette formulation, à savoir X_0, L_1 et L_2 sont des éléments génériques. Les fonctions f et g sont introduites explicitement, avec le statut de générique. En formalisant donc la propriété du polycopié, f, g, X_0, L_1 et L_2 sont liés par le quantificateur universel. L'écriture du polycopié lève les ambiguïtés que nous avons

[121] L et X_0 sont des lettres qui peuvent prendre les valeurs réelles et $+\infty$ ou $-\infty$.

identifiées dans celle du manuel et met en valeur le degré de complexité de l'énoncé qui paraissait simple tel qu'écrit dans le manuel.

(4) <u>L'implication et l'équivalence</u>

<u>L'implication</u>

On la rencontre sous la forme « Si P, alors Q », « Q si P » et sous la forme P⇒Q qui apparait beaucoup plus dans les démonstrations et les définitions formelles de la limite.

La proposition 16 de la page 6 contient l'expression « Si … alors … » et le signe ⇒ dans sa formulation. C'est un énoncé conditionnel dont l'antécédent lui-même est une conjonction dont un énoncé est un conditionnel :

> **Proposition 16**
>
> Soit f et g deux éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, X_0, L_1, L_2 des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
>
> Si $\lim_{x\to X_0} f(x) = L_1$, et $\lim_{x\to L_1} g(x) = L_2$ et si $\exists A \in \mathcal{V}(X_0), \forall x \in A, x \neq X_0 \Rightarrow f(x) \neq L_1$,
>
> alors $\lim_{x\to X_0} (g \circ f)(x) = L_2$. (p.6)

Dans les preuves, le signe ⇒ est utilisé pour des implications par transformation d'écriture.

Les inférences que nous avons rencontrées sont établies à l'aide de la règle du Modus Ponens (p.10).

<u>L'équivalence</u>

À la page 8, les auteurs donnent un théorème constitué de deux énoncés e1 et e2, et ils annoncent au préalable que ces énoncés sont équivalents.

La démonstration consiste à montrer e1 sous l'hypothèse e2, puis e2 sous l'hypothèse e1.

(5) <u>La négation</u>

Nous ne l'avons rencontrée que dans la preuve de l'énoncé (1) (*Toute fonction continue sur* $[a; b]$ *est bornée et atteint ses bornes*). La négation est utilisée pour faire la démonstration par l'absurde (p.9).

D'après les auteurs :

> « Si la fonction f n'est pas majorée sur $[a; b]$ (9), alors on a :$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a; b], f(x_n) > n$ » (10)

(9) n'est pas explicité, (10) est une conséquence de ce que f est majorée, et non l'expression de « f est majorée ». Nous signalons que la formulation de ce théorème dans le langage des prédicats n'a pas été donnée par les auteurs. De ce fait, comprendre la démonstration pourrait représenter une difficulté pour les étudiants.

En conclusion sur les fonctions numériques, nous constatons, par rapport au cours de terminale, une réelle augmentation du niveau de complexité des énoncés.

Les énoncés en (ε, η) apparaissent, et les schémas de démonstration qui les accompagnent sont beaucoup plus élaborés que ceux que nous avons rencontré dans le manuel (Durand-Guerrier & Arsac, Chellougui).

Nous n'avons pas mené dans cette partie qui concerne l'enseignement supérieur, une analyse du cours sur les suites numériques car le théorème du point fixe qui est utilisé dans les exercices 5 et 6 des questionnaires des élèves et des étudiants respectivement ne figure pas dans le polycopié.

D'après un enseignant de l'École Normale Supérieure de Yaoundé qui encadre les étudiants de première année de mathématiques dans les travaux dirigés d'analyse, ce théorème n'est pas énoncé en cours, mais il intervient dans certains exercices qui sont donnés en travaux dirigés.

3.3. Synthèse de l'analyse du polycopié

L'analyse du polycopié que nous avons menée nous permet de relever, en plus des phénomènes déjà identifiés dans le manuel de mathématiques, ceux qui suivent :

- les énoncés écrits dans le langage formel sont complexes du fait qu'ils contiennent des quantificateurs, des connecteurs logiques, et que certains énoncés sont imbriqués les uns dans les autres. Par ailleurs, nous avons rencontré des énoncés formulés dans la langue naturelle, d'apparence simple ; l'explicitation de leur structure logique met en évidence plutôt une structure très complexe ;
- le signe $\Leftarrow$ apparaît. Il a la signification « il suffit que » :
- des utilisations impropres du quantificateur qui apparait à la fin de l'énoncé ouvert qui est en fait un énoncé clos : $P(x), \forall x$;
- le type de démonstration est annoncé et les auteurs proposent des exercices qui permettent de mobiliser de façon explicite les concepts de logique ;
- les démonstrations contiennent beaucoup d'implicites.

En conclusion, certains phénomènes identifiés dans l'analyse du polycopié sont d'un niveau de complexité élevé pour des étudiants qui arrivent à l'université. De l'analyse du manuel de terminale C et du polycopié, des témoignages des enseignants que nous avons rencontrés, nous faisons l'hypothèse que les étudiants n'ont pas suffisamment d'outils logiques pour y affronter les enseignements de mathématiques.

3.4. Quelques pratiques de classe en début d'université

Nous avons rencontré un enseignant de mathématiques de l'École Normale Supérieure de Yaoundé –nous l'appelons **Es**– pour un entretien. Il donne des cours d'analyse en première année de la filière informatique de cette école, et en même temps encadre un groupe d'étudiants de première année de la filière mathématique de cette même école en analyse. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude pour la disponibilité dont il a fait preuve à notre endroit.

Notons qu'au cours de l'année académique 2010-2011, nous avons assisté en tant qu'observatrice à quatre séances de travaux dirigés que cet enseignant dispensait à un des groupes des étudiants de première année de la filière mathématique de l'École.

Notre entretien s'est déroulé au mois de mai 2013. Il était guidé par le même questionnaire que celui que nous avons utilisé avec les enseignants du secondaire. À la fin de l'entretien, nous lui avons présenté le questionnaire élaboré pour les étudiants. Nous lui avons demandé de donner son avis sur la manière dont il pense que ses étudiants traiteraient les items proposés.

Les séquences de la retranscription de l'entretien se trouvent en annexe 11.

3.4.1. Le cours de logique en début d'année

Il ressort de nos entretiens qu'un cours de logique est donné en début d'année dans le cadre de l'algèbre. En analyse, le cours de logique est axé sur les méthodes de démonstration.

D'après les notes de cours d'un étudiant que nous avons consultées, le cours de logique donné dans le cadre de l'algèbre porte sur la logique propositionnelle et les quantificateurs.

Nous avons demandé à l'enseignant si pendant les séances de travaux dirigés il revenait sur les connecteurs logiques et la quantification. Sa réponse est :

> **10 Es** : oui. Premier chapitre d'analyse premier semestre, il y a des exercices là-dessus. Sur les trois méthodes de démonstrations : méthodes directe, contraposée, par l'absurde. (annexe 11)

Ces exercices sont ceux que nous avons présentés dans l'analyse du cours sur les nombres réels. Toutefois, l'enseignant a précisé que c'est surtout en algèbre que tout est explicité, et qu'en analyse, ils « utilisent les concepts comme outils » (annexe 11, ligne 34).

En tant qu'observatrice, c'est le constat que nous avons fait. Lorsque les concepts sont utilisés de façon erronée par les étudiants, **Es** corrige l'erreur sans s'y attarder : c'est le volet mathématique qui est privilégié.

Par ailleurs, nous notons que Es sait que certains étudiants sont démunis du point de vue logique, et rien ne semble être entrepris pour palier aux besoins de ceux-là (lignes 24, 26).

3.4.2. L'usage des quantificateurs

Nous avons interrogé Es au sujet de la pratique de la quantification implicite des énoncés. Nous sommes partie de l'énoncé « *Une fonction dérivable est continue* » et lui avons demandé comment il interprète le *un* en précisant que généralement *un* est considéré par les enseignants comme renvoyant à une quantification universelle :

La réponse de **Es** :

> **40 Es** : non, c'est un problème d'existence. S'il existe une fonction dérivable, elle est continue. Il faut déjà que la fonction existe. Si elle n'existe pas, on ne va pas parler de fonction dérivable.

Es transforme notre énoncé en un énoncé existentiel, en explicitant le conditionnel.

> ***41 J** : non mais c'est le théorème qui dit que si une fonction est dérivable, elle est continue.*
>
> **42 Es** : oui, c'est si tu as une fonction, il faut déjà l'avoir, c'est un problème d'existence. Si on a une fonction dérivable, alors elle est continue.
>
> ***43 J** : donc là c'est un existentiel pour toi, le 1*
>
> **44 Es** : oui. Si elle existe. S'il existe une fonction dérivable, alors elle est continue. S'il n'existe pas de fonction dérivable, bon… (Annexe 11)

Nous notons une instabilité dans l'interprétation de *un* par ce dernier. En effet, dans la suite de l'échange :

> **46 Es** : oui, s'il existe une fonction dérivable, alors, elle est continue. Il faut déjà prouver qu'il n'existe pas de fonction dérivable, ou alors qu'il existe une fonction dérivable. S'il existe une fonction dérivable, alors elle est continue, et dans la preuve même, on dit : **soit**, ça veut dire qu'on suppose déjà qu'il y a une qui est dérivable. (Annexe 11)
>
> **47 J** : mais quand on dit : « soit », généralement ça envoie au général

48 Es : oui. Justement, justement. La question c'est : est ce qu'il existe des fonctions dérivables, ça veut dire qu'on suppose qu'il existe une dérivable, et on montre qu'elle est continue. C'est l'existentiel là-bas.

Dans cette séquence, l'utilisation de « soit » donne le statut d'élément générique à la fonction introduite pour la démonstration. Or à la ligne 44, *un* renvoi à une quantification existentielle, donc la lettre qui représente la fonction est une variable liée.

Par ailleurs, d'après Selden &Selden (1995), parce qu'un énoncé commence par « quel que soit ε … », la structure de sa preuve commence par l'introduction de ε dans la première phrase, et réciproquement. Du coup nous pouvons dire que **Es** en introduisant la fonction par « soit » quantifie universellement l'énoncé que nous lui avons proposé.

En 48, dire « il existe une fonction » assure l'existence de la fonction, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on suppose qu'il existe une fonction. Dans cette séquence, il traduit en fait la preuve sous hypothèse.

Nous lui avons présenté le questionnaire adressé aux étudiants.

3.4.3. Le point de vue d'un enseignant du supérieur au sujet du questionnaire étudiant

À l'exercice 1, il pense que les étudiants ne vont considérer que les nombres qui vérifient l'antécédent (ligne 59). En outre, sa réponse laisse penser que cette solution est aussi la sienne :

58 Es : le problème c'est de pouvoir écrire, d'aucun vont le faire manuellement, premier nombre pair c'est 2, son successeur c'est 3, il est premier. Après c'est 4, son successeur c'est 5, il est premier, après c'est 8, le successeur c'est 9, il n'est pas premier. Ensuite c'est 10, le successeur est premier. Donc d'aucun vont le faire manuellement, est ce qu'ils vont arriver à trouver tous les nombres ? Aussi qu'à partir d'un certain rang on se rend compte que bon… (Annexe 11)

***58 J** : de 0-20, c'est juste de 0-20*

59 Es : ok, de 0-20, manuellement, on va le faire, puisque ce n'est pas compliqué, on écrit tous les nombres pairs, on ajoute +1. Comme on avait 10, on additionne à 11, après on passe à 14, on a 15 qui n'est pas, ainsi de suite. Bon si ce n'est que ça, vraiment, 20, on le fait manuellement, sans avoir à poser une quelconque équation.

Pour résoudre l'exercice 6 du questionnaire des étudiants qui porte sur les inférences valides, Es a utilisé ses connaissances mathématiques (lignes 54, 56) ; il ne fait pas allusion aux règles d'inférence.

Concernant l'exercice 10, il pense que les étudiant auront beaucoup de mal à traduire l'énoncé proposé en langage formalisé. À son avis, ceux-ci risquent de donner une écriture linéaire où les deux nombres premiers dont n est la somme ne sont pas introduits.

Conclusion

En début d'université, les mêmes phénomènes observés dans l'enseignement secondaire apparaissent. Mais ils sont beaucoup plus accentués du fait de l'usage du formalisme pour exprimer des énoncés souvent très complexes.

Notre entretien avec un enseignant du supérieur montre une interprétation instable de *un* par ce dernier, et nous faisons l'hypothèse que cela peut se répercuter sur les enseignements. En outre, il semble averti des difficultés que les étudiants rencontrent dans l'utilisation des concepts de logique, mais cet entretien ne traduit pas de façon claire la manière dont il les prend en charge.

Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre nous avons mené une analyse de quatre chapitres d'un manuel de mathématiques de terminale C au programme au Cameroun et de deux chapitres du polycopié en usage en première année de la filière mathématique de l'École Normale Supérieure de Yaoundé. Cette analyse avait pour but d'une part, de mettre en évidence le type de transposition qui est faite des éléments de logique, et d'autre part, d'identifier dans le cours des situations qui peuvent engendrer des difficultés chez les élèves et les étudiants.

Il ressort de cette étude que la logique ne fait pas l'objet d'un apprentissage particulier, en dehors de la démonstration par récurrence qui est présentée dans le manuel et dont nous avons fait ressortir quelques éléments susceptibles d'être source de difficultés pour les apprenants. La logique est essentiellement utilisée comme outil : les connecteurs logiques apparaissent dans les définitions, les théorèmes, et dans les démonstrations ; la quantification universelle est surtout implicite dans les énoncés des théorèmes, et de ce fait la quantification multiple qui apparait est généralement celle de la forme $\exists x, \forall y\, P(x, y)$; dans le secondaire, les symboles sont utilisés pour faire des abréviations ; il y a une instabilité dans le statut des lettres, et cela s'observe surtout dans la démonstration. Il faut noter que de nombreuses situations que nous avons identifiées contiennent des implicites qui peuvent être difficilement partagés par les élèves et les étudiants.

Pour apporter des éléments complémentaire à cette analyse, nous avons mené des entretiens avec des enseignants qui interviennent dans le secondaire et à l'université.

Dans l'enseignement secondaire, l'enseignement de la logique est restreint et contrôlé par l'institution, ce qui ne donne pas aux enseignants rencontrés l'autonomie nécessaire pour pouvoir dispenser un enseignement de logique adéquat. L'accent est mis en priorité sur l'apprentissage des techniques de démonstration.

Dans l'enseignement supérieur, c'est la logique des propositions et la quantification qui font l'objet des enseignements de logique. Dans le cours d'analyse, l'accent est mis sur l'apprentissage des techniques de démonstration. Toutefois, nous avons rencontré dans le premier chapitre du polycopié une série d'exercices dont le traitement mobilise de façon explicite les concepts de logique, et qui sont traités dans les séances de travaux dirigés.

Nous sommes amenée à faire le constat que la prise en charge des concepts de logique par les enseignants est loin de lever les implicites contenus dans leur usage dans le cours de mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que les situations problématiques que nous avons rencontrées au cours de ces analyses représentent de bons candidats pour le but visé dans notre travail.

PARTIE 2 : EXPÉRIMENTATION AVEC LES ÉLÈVES ET LES ÉTUDIANTS

INTRODUCTION

L'enseignement des concepts de logique ne figurent ni dans les programmes de l'enseignement secondaire, ni dans ceux de première année de licence de mathématiques dans les universités camerounaises. Les analyses du manuel de terminale C et du polycopié d'analyse de première année de licence de mathématiques, les résultats des entretiens avec des enseignants de mathématiques qui sont contenus au chapitre 4 montrent que la prise en charge des concepts de logique par les enseignants est à l'heure actuelle peu significative à ces niveaux d'étude.

Dans cette partie, nous présentons la méthodologie expérimentale que nous avons mise en place pour conduire notre étude, et les résultats des expérimentations que nous avons menées.

Nous avons fait passer un questionnaire à l'ensemble des étudiants de la première année de la filière « Mathématiques », puis nous avons proposé à des étudiants volontaires ayant répondu au questionnaire de participer à un module de suivi visant à revenir sur le questionnaire et à ouvrir sur d'autres questions.

Dans la perspective de l'étude de la transition, nous avons également proposé à des élèves de Terminales C d'un lycée de Yaoundé un questionnaire comportant les mêmes questions que celui proposé aux étudiants, à l'exception de deux questions pour lesquelles les connaissances mathématiques en jeu n'étaient pas au programme de la classe de terminale.

Les questionnaires étaient composés d'exercices de mathématiques, dont la résolution nécessitait, outre les connaissances mathématiques en jeu, la mobilisation des concepts élémentaires de logique : négation, implication, équivalence, quantification.

Notre objectif principal était d'évaluer à partir des réponses des élèves et des étudiants, leur capacité à mobiliser les concepts de logique lorsque ceci s'avère nécessaire pour résoudre les problèmes posés. Plus précisément, nous avons construit les questionnaires afin qu'ils nous permettent :

- d'identifier et de préciser les difficultés éventuelles des élèves et des étudiants dans l'utilisation des concepts de logique, en nous appuyant sur les cadres théoriques que nous avons développés ;

- de repérer des tâches spécifiques qui permettent d'expliciter ces concepts dans leur dimension prédicative et opératoire.

Un apprentissage devrait se faire à l'aide d'une variété de situations, ordinaires et pas ordinaires. Pour des situations ordinaires, le sujet dispose des compétences nécessaires au traitement de la situation. Pour des situations inhabituelles pour lui, il va soit mettre en œuvre des schèmes qui font partie de son répertoire et qui pourront éventuellement le conduire à un échec, soit modifier les schèmes disponibles. Ainsi, pour chaque concept, nous avons identifié des variables didactiques, dont la modification dans un item va entrainer celle du schème de résolution. C'est en fonction de ces variables que nous avons choisi les exercices proposés aux élèves et aux étudiants.

Concernant le module de suivi, il a été organisé dans le but de :

- provoquer des débats entre les étudiants sur les thèmes abordés. À travers ces discussions, nous pouvons avoir une meilleure lisibilité de leurs conceptions, comparativement à ce qui ressort des productions écrites issues des questionnaires ;
- identifier les points sur lesquels une action didactique peut être menée, en vue de clarifier l'usage des concepts de logique.

Comme nous l'avons montré dans la revue des travaux antérieurs présentée au chapitre 3, plusieurs travaux relatifs aux difficultés de maniement des concepts que nous étudions ont déjà été menés La particularité de nos recherches réside dans le fait que, en même temps que nous identifions ces difficultés chez les élèves et les étudiants, nous explorons des champs de possibles dans l'activité mathématique, pour expliciter ces concepts.

CHAPITRE 5 : Présentation générale des questionnaires et du module de suivi

Dans cette partie, nous présentons les questionnaires et les raisons qui ont orienté le choix des items qui y figurent. Nous donnerons un aperçu du but visé par chacun des exercices que nous avons proposé, une analyse plus fine des items étant menée dans les analyses a priori.

1. Modalités de passation des questionnaires

La passation des deux questionnaires a eu lieu au mois de décembre 2010. Nous avons choisi cette période car les cours d'analyse dans l'enseignement secondaire et dans l'enseignement supérieur avaient déjà couvert les enseignements auxquels les exercices des questionnaires renvoient. Pour les deux populations, la durée du test était d'une heure.
Nous avons fait passer le questionnaire au lycée dans la classe de notre collègue Monsieur Joseph Fotsing, enseignant au lycée Général Leclerc de Yaoundé. Il a accepté de céder une heure de son cours à cet effet et nous l'en remercions très sincèrement. 61 élèves étaient présents ce jour-là.

Le questionnaire des étudiants a été passé pendant le cours de Monsieur Lawrence Diffo Lambo, enseignant à l'Ecole normale Supérieure de Yaoundé. Il a renoncé à une heure de ses enseignements, ce qui nous a permis d'interroger 68 étudiants présents ce jour. Nous l'en remercions.

La résolution des exercices s'est faite individuellement et par écrit. Nous avons récupéré les copies que nous avons dépouillées. Elles font l'objet de nos analyses a posteriori.

2. Présentation des exercices des questionnaires

Le questionnaire que nous avions rédigé pour les étudiants comporte onze exercices, celui pour les élèves de Terminale C en comportait neuf. Compte tenu du temps qui nous était imparti pour les tests, nous avons demandé aux étudiants et aux élèves respectivement, de ne pas traiter les exercices 9 et 11, et les exercices 7 et 9 de leurs questionnaires respectifs au moment du déroulement du test. Les exercices 9 et 11 du questionnaire destiné aux étudiants correspondent respectivement aux exercices 7 et 9 du questionnaire destiné aux élèves. Les exercices supprimés figurent dans les questionnaires que nous avons distribués à chacun, mais ils ne font pas l'objet d'une analyse de notre part. Finalement, les étudiants ont donc eu à traiter neuf exercices, tandis que les lycéens devaient en traiter sept. Ces exercices recouvrent les concepts logiques qui sont l'objet de notre étude, à savoir la négation, l'implication, l'équivalence et la quantification.

Pour alléger les écritures, nous appellerons Questionnaire 1, le questionnaire adressé aux étudiants et Questionnaire 2, celui qui était adressé aux élèves, en raison de l'ordre dans lequel nous les avons fait passer.

Tous les exercices du Questionnaire 2 sont contenus dans le Questionnaire 1. Dans l'exercice 5 du Questionnaire 2, en plus des cinq items à traiter, nous avons demandé aux élèves de donner la négation de « f est croissante », et de l'écrire dans le langage formel.

Compte tenu des décalages de numérotation pour certains exercices du questionnaire et afin d'éviter les répétitions, nous présentons les exercices du Questionnaire 1 et donnons lorsque c'est nécessaire, des précisions pour que le lecteur puisse identifier dans le Questionnaire 2, les exercices correspondants.

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons une classification des exercices en fonction des concepts qui y sont en jeu :

Questionnaire 1	**Quantification**	**Négation**	**Implication**	**Equivalence**	**Questionnaire 2**
Exercice 1			X		**Exercice 1**
Exercice 2	X			X	**Exercice 2**
Exercice 3	X	X	X		**Exercice 3**
Exercice 4	X	X	X	X	
Exercice 5	X	X*			**Exercice 4**
Exercice 6			X		**Exercice 5**
Exercice 7			X		**Exercice 8**
Exercice 8	X				**Exercice 6**
Exercice 10	X		X		

Comme le montre le tableau, à l'exception de l'exercice 1, tous les exercices mettent en jeu au moins deux des concepts logiques que nous étudions ; néanmoins, chaque exercice a été construit pour travailler un concept spécifique. Dans ce qui suit, nous regroupons les exercices en prenant en compte ce concept spécifique, ce qui nous permet de mettre en évidence la variété des tâches proposées pour un concept donné.

La négation : les exercices relatifs à ce connecteur logique sont les exercices 3 et 4

La négation des propositions singulières coïncide avec la forme négative de ces propositions. Il n'en est pas de même pour les énoncés complexes (quantifiés, conditionnels, conjonction, disjonction, ou alors une combinaison de plusieurs opérations) où la construction de la négation va mettre en œuvre des schèmes plus élaborés avec en l'occurrence, l'identification de la structure de l'énoncé à nier.

Nous nous intéressons aux énoncés complexes, c'est-à-dire aux énoncés qui, écrits dans le langage du calcul des prédicats contiennent des connecteurs logiques, et/ou des quantificateurs.

Les variables didactiques que nous avons retenues sont :

- le langage utilisé : langage naturel, formel, mixte ;
- le type de la quantification : explicite, implicite. Lorsque la quantification est explicite, nous regardons si c'est un énoncé existentiel, universel, si l'énoncé est sous forme prénexe ou non prénexe[122] ;

Dans *l'exercice 3*, nous proposons quatre énoncés dont il faut donner la négation. Le premier est un énoncé universellement quantifié, et le second est un énoncé existentiel. Le troisième énoncé est un conditionnel universellement quantifié dont la quantification est implicite. Le quatrième est un énoncé dont la complexité dans le traitement provient du mot *toujours.* Dans le contexte de cette phrase, ce mot renvoie à un quantificateur universel qui porte sur l'observation d'un phénomène (fini, pas fini). Par ailleurs, la forme langagière utilisée cache un conditionnel qu'une reformulation de la phrase fait ressortir.

L*'exercice 4* n'a été proposé qu'aux étudiants. Il comporte un énoncé conditionnel ouvert donné en langage formel. Il leur est demandé d'une part, d'écrire la négation et la contraposée de cet énoncé, et d'autre part, d'évaluer la valeur de vérité de sa réciproque. Pour la deuxième question, nous faisons l'hypothèse que les étudiants vont considérer qu'ils ont un énoncé comportant une quantification universelle implicite. L'antécédent est un énoncé universel, et la construction de la négation de la phrase met en défaut le théorème-en-acte ci-dessous qui ne s'applique de manière automatique qu'aux énoncés écrits sous forme prénexe :

« Lorsqu'un énoncé contient un quantificateur, on le change lorsqu'on construit la négation de cet énoncé »

[122] La forme de la quantification est prénexe lorsque tous les quantificateurs sont en tête de formule.

La quantification : les exercices relatifs à ce connecteur logique sont les exercices 2, 5 et 8. La quantification doit certes être prise en compte dans les exercices 3 et 4, mais ce n'est pas le concept qui y est central.

Les exercices 5 et 8 du Questionnaire 1 correspondent respectivement aux exercices 4 et 6 du Questionnaire 2.

La quantification implicite ne permet pas d'expliciter l'univers du discours, mais dans la classe de mathématiques, cet univers est institutionnalisé. La passation des questionnaires se déroule hors du contexte de la classe. De ce fait, il est possible que l'implicite sur l'univers du discours ne fonctionne plus, et cela peut conduire à des raisonnements erronés.

Les variables didactiques que nous avons retenues:

- explicitation ou non de l'univers du discours ;
- langage utilisé : langage naturel, formel, mixte ;
- quantification explicite ou implicite ;
- nature des quantificateurs : existentiel, universel ;
- quantification simple ou multiple
- si quantification multiple, quantificateurs différents ou non, et si différents, ordre d'apparition dans la formule.
- forme prénexe ou non prénexe
- statut des lettres: éléments génériques, variables liées ou variables libres.

Chacun des exercices renvoie à des tâches spécifiques :

Dans *l'exercice 2*, l'univers n'est pas explicité ; les énoncés sont donnés en langue naturelle. Les objets en jeu sont introduits par *un*, qui peut avoir plusieurs interprétations : la nature du quantificateur n'est pas déterminée et de ce fait, le statut de la variable non plus. En classe de mathématiques, l'interprétation faite généralement de *un* renvoie au quantificateur universel. Les enseignants l'utilisent dans l'énonciation des propriétés et des théorèmes généraux. Ici, l'énoncé **2.2** est un énoncé contingent et les deux autres sont toujours vrais.

Dans cet exercice, la tâche consiste à évaluer la vérité d'un énoncé –ce qui nécessite de choisir l'univers du discours et une interprétation de l'article *un*, et à justifier les raisons du choix effectué.

Dans *l'exercice 5*, les énoncés sont donnés en langage mixte. Nous avons demandé aux élèves de donner la négation de f *est croissante*, puis de l'écrire dans le langage formel.

Dans la suite, la tâche consiste à choisir parmi plusieurs énoncés donnés en langage mixte celui ou ceux qui correspondent à la définition de la propriété « f est majorée sur un intervalle I ». Le statut des lettres en jeu et l'ordre d'occurrence des quantificateurs sont cruciaux :

- l'item **5.1** est universellement quantifié, est sous forme prénexe, contient la variable libre M ;
- l'item **5.2** a une quantification universelle implicite ou un élément générique (x), contient la variable libre M dont le domaine n'est pas explicité, la variable x peut avoir le statut de variable libre ou d'élément générique ;
- les items **5.3** et **5.4** sont sous forme prénexe ; ils contiennent les deux quantificateurs dont l'ordre diffère dans l'un et l'autre des items ; les domaines sont explicités ;
- l'item **5.5** peut être vu comme un énoncé universel implicite ou comme possédant l'élément générique x ; l'univers du discours est explicité ; M est une variable liée.

L'exercice 8 est composé de deux phrases ouvertes en l'intervalle *I*, exprimées dans le langage mixte. Elles sont respectivement de la forme $\forall a, \exists b,\ R(a,b)$ et $\exists b, \forall a\ ,\ R(a,b)$, l'univers du discours étant I. Il est demandé aux élèves et aux étudiants de déterminer les intervalles *I* qui satisfont ces phrases. Dans cet exercice, nous accordons une place importante à l'univers du discours et à l'ordre des quantificateurs dans une quantification double avec deux quantificateurs différents.

<u>L'implication</u> : les exercices relatifs à ce connecteur logique sont les exercices 1, 6 et 7. Les exercices 6 et 7 correspondent respectivement aux exercices 5 et 8 du Questionnaire 2.

Au paragraphe 2.3.1 du chapitre 2, nous avons présenté quatre tâches dont la résolution mobilise l'implication : utiliser un théorème donné sous forme implicative dans une démonstration ; démontrer un théorème général de la forme $\forall x \in D, P(x) \Rightarrow Q(x)$; évaluer la valeur de vérité d'un énoncé conditionnel ; déterminer les éléments qui satisfont ou non une implication ouverte ; savoir si on peut ou non faire des déductions. Les deux premières tâches sont des tâches habituelles dans la classe de mathématiques. Pour le questionnaire, nous avons retenu les trois autres types de tâches qui sont reprises de travaux antérieurs

Les variables didactiques pour les exercices 1 et 7 :

- type d'énoncé : quantifié, ouvert, avec élément générique ;

- langage utilisé : formel, mixte, naturel ;

L'exercice 1 est un exercice peu habituel ; il s'agit de déterminer les éléments d'un domaine donné satisfaisant une implication ouverte, dont la résolution se ramène à l'évaluation d'implications matérielles. L'item est donné en langage naturel.

L'exercice 6 consiste à reconnaitre les situations où l'on peut ou non faire une déduction. Les règles de déduction qui peuvent être mobilisées ici sont le Modus Ponens et le Modus Tollens.

Dans *l'exercice 7*, les étudiants doivent évaluer une implication dont l'antécédent est toujours faux, ce qui est comme pour l'exercice 1, une situation inhabituelle pour eux.

<u>Exercice 10</u> :

Cet exercice met en jeu de manière articulée la quantification et l'implication, c'est la raison pour laquelle nous le traitons à part. Il ne figure pas dans le questionnaire des élèves, car nous avons pensé que son niveau de complexité n'est pas accessible à ces derniers. Nous l'avons étudié au paragraphe 3.2 du chapitre 2.

Il s'agit ici d'écrire dans le langage formel un énoncé qui a été donné dans la langue naturelle. Ce type d'activité, tout comme l'activité inverse (passage du langage formel au langage naturel) est peu pratiquée dans la classe de mathématiques, et est source de difficultés pour les étudiants. La formalisation de cet énoncé met à jour une implication et un énoncé existentiel dans le conséquent de cette implication, qui sont cachés dans l'énoncé en langue naturel.

Tableau récapitulatif des variables didactiques en fonction des exercices

Exercices	Univers du discours	Langage utilisé	Quantif explicite ou non	Nature du quantif	Quantif simple ou multiple	Prénexe ou non	Statut lettre
1	Explicité	naturel	ouvert				Var. libre
2	Non explicité	naturel	Non explicité				
3	Explicité	naturel	Explicite et non explicite	Universel (3.1) Existentiel (3.2)	Simple	Prénexe (3.1 ; 3.2)	
4	Explicité	Formel	Non explicite			Non prénexe	
5	explicité pour certains items	Mixte	Explicite pour certains items	Les deux quantificateurs	Quantification simple et multiple	Prénexe et non prénexe	Libre et lié (M) ; générique et lié (x)
6	Explicité	Mixte	Non explicite				
7	Explicité	Mixte	Explicite	Quantificateur universel	multiple	Prénexe	Variables liées
8	Non explicité	Mixte	Explicite	Les deux quantificateurs	Multiple	Prénexe	Variables liées et libre
10	Explicité	Naturel	Explicite et non explicite	Les deux quantificateurs	Multiple	Non prénexe	Variables liées

Conclusion

Nous avons présenté brièvement les différents exercices contenus dans les questionnaires respectifs des élèves et des étudiants, en précisant de façon succincte, l'intérêt de proposer chacun d'eux. Pour chaque concept de logique, nous avons choisi des tâches pour la plupart inhabituelles dans la classe de mathématiques, et dont le traitement met en jeu les différents concepts logiques que nous étudions en faisant varier les variables didactiques associées. Dans un certain nombre de cas, cela peut permettre de mettre en défaut certaines règles d'action utilisées par les étudiants en dehors de leur domaine de validité. Certains de ces exercices ont servi de support pour les activités proposées dans le module de suivi.

3. Présentation du module de suivi

Dans notre travail de thèse, une partie importante porte sur l'identification d'une part, des conceptions des élèves et des étudiants de l'usage des concepts de logique, et d'autre part, des situations d'enseignements qui permettent d'expliciter ces concepts. Nous faisons l'hypothèse qu'au cours de débats provoqués dans le cadre de la résolution de tâches centrées sur l'utilisation des concepts de logique, nous pouvons obtenir des informations beaucoup plus précises que celles fournies par les traces écrites. C'est ainsi qu'après la passation du questionnaire, nous avons proposé à des étudiants volontaires de participer à un module de suivi sur les questions de logique. Nous l'avons organisé en janvier 2011. Nous avons retenu les 8 premiers étudiants qui se sont présentés, et nous les avons répartis en deux groupes de 4 étudiants chacun.

Le module a eu lieu pendant les congés du premier semestre à l'École Normale Supérieure de Yaoundé, juste après les examens du premier semestre. Nous avons organisé 4 séances de travail qui portaient d'une part, sur le questionnaire des étudiants, et d'autre part sur des exercices complémentaires que nous présentons dans la suite.

Au cours des trois premières séances, les exercices étaient travaillés séparément par chacun des deux groupes. Cette phase de travail collectif était suivie d'une mise en commun des résultats des deux groupes.

Nous avons assisté à des débats dans les deux groupes, mais n'y avons pas pris part. Cela nous a permis de recueillir certaines informations que nous avons jointes à celles que la lecture des copies collectées nous a apportées. Ainsi nous avons pu identifier les besoins des étudiants en logique et cadrer nos interventions.

Nous avons enregistré entièrement les débats d'un groupe. Nous avons des enregistrements partiels du second groupe et quelques notes relevées pendant les échanges auxquelles nous avons assisté. Les phases de mise en commun des deux dernières séances ont été enregistrées entièrement.

Séance 1 : La séance a porté sur les exercices 1, 2, 3, 4 et 5 du questionnaire étudiant. Elle a duré 3 heures

Séance 2 : cette séance était consacrée au traitement des exercices 6, 7, 8 et 10. Elle a duré 2 heures

Séance 3 : cette séance portait sur l'analyse de la démonstration du théorème du point fixe[123]. Nous avons énoncé le théorème et nous en avons donné une démonstration. Nous avons demandé aux étudiants de :

1) Repérer
- la structure logique globale de la démonstration ;
- les modes de raisonnement utilisés ;

[123] Voir annexe 1

- les théorèmes mobilisés explicitement ;
- les théorèmes mobilisés sans être explicités.

2) Préciser le statut logique des lettres (variables libres, liées, éléments génériques, élément particuliers) et indiquer ce qui ne leur paraissait pas clair.

Cette séance a duré 1 heure.

Séance 4 : démonstrations du théorème des accroissements finis généralisé

Nous avons proposé deux démonstrations du théorème des accroissements finis généralisé, la première qui est la démonstration correcte et la seconde telle que reprise dans Durand-Guerrier & Arsac (2003)[124]. Nous avons demandé aux étudiants de les analyser et dire laquelle leur semblait être juste. La séance a duré 1 heure.

[124] Voir chapitre 2, section 1.2.1.5

CHAPITRE 6 : Les exercices centrés sur la négation

Introduction

La négation des énoncés est une opération unaire qui prend en compte pour sa construction, les aspects sémantique et syntaxique. Du fait de son utilisation courante dans la langue, elle n'est pas problématisée dans le cours de mathématiques. Pourtant certains résultats (Ben Kilani (2005), Durand-Guerrier & Njomgang (2009)) montrent que les étudiants éprouvent des difficultés à nier des énoncés mathématiques, en particuliers, les énoncés quantifiés[125].

Dans ce chapitre nous présentons les exercices 3 et 4 du questionnaire destiné aux étudiants. Pour chaque exercice, nous avons mené une analyse *a priori*. Les réponses des élèves et des étudiants aux items contenus dans ces exercices et le module de suivi font l'objet d'une analyse *a posteriori* présentée également dans ce chapitre.

Nous apportons la précision suivante concernant les analyses *a priori* et *a posteriori*, qui est valable pour ce chapitre et pour les chapitres 7, 8 et 9 également :

Les étudiants qui ont répondu au questionnaire sont désignés par la lettre E suivie de deux chiffres ; les étudiants qui ont assisté au module de suivi sont désignés par la lettre E suivie d'un seul chiffre ; nous avons nommé les élèves avec la lettre L suivie de deux chiffres.

1. Exercice 3

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

3.1 Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges

3.2 Certains nombres entiers sont pairs

3.3 Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

3.4 La limite d'une fonction est toujours finie.

1.1. Analyse a priori du questionnaire et du module de suivi

Les trois premiers items de cet exercice sont issus d'un questionnaire que la CI2U[126] a proposé à des étudiants nouvellement arrivés en première année d'université. Le questionnaire avait pour but de recueillir des informations sur les compétences des étudiants dans plusieurs champs, dont le champ de la logique, pour ce qui concerne particulièrement l'implication, la négation et la quantification. Nous avions également proposé ces items à des élèves des Classes Scientifiques Spéciales de l'École Normale Supérieure de Yaoundé au Cameroun en

[125] Ces aspects sont développés au chapitre 2.

[126] La CI2U (commission IREM inter université) regroupe des formateurs de différents IREM en France travaillant sur les questions de transition lycée université et sur l'enseignement universitaire.

janvier 2008. Les résultats du test et les analyses y relatifs sont présentés dans Durand-Guerrier & Njomgang Ngansop (2009)

Le questionnaire

Cet exercice a pour but de voir comment les apprenants construisent la négation des énoncés.

Les deux premières phrases sont des énoncés quantifiés, où les quantificateurs sont respectivement :

- « toutes », quantificateur universel qui est moins utilisé dans la classe de mathématiques que l'expression « quel que soit », très connue des apprenants ;
- « certains » qui renvoie au quantificateur existentiel et très peu utilisé en classe de mathématiques, le quantificateur existentiel apparaissant surtout sous la forme « il existe ».

Il est possible que « certains » ne soit pas identifié par les élèves d'une part, du fait qu'ils ne reçoivent aucun enseignement relatif au concept de quantification dans le secondaire, et d'autre part, par les étudiants qui passent sans transition aucune, de l'utilisation du langage courant au langage mixte[127] à l'université, où le quantificateur universel est noté $\forall$et le quantificateur existentiel $\exists$.

La troisième phrase est un énoncé conditionnel universellement quantifié dont la quantification est implicite. La présence de « un » est susceptible de générer plusieurs interprétations : il peut renvoyer à un élément générique ou singulier, à une quantification universelle ou existentielle.

La quatrième phrase est un énoncé conditionnel implicite. Ici aussi, la présence de « une » peu générer plusieurs formulations de la négation.

Toutes ces phrases sont données dans la langue courante.

Pour élaborer la classification des réponses que nous avons proposée pour les items **3.1** et **3.2**, nous avons pris en compte le changement du quantificateur, et regardé si la négation était portée ou pas sur le verbe.

Phrase 3.1 : *Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges*

[127] Langage naturel et langage formel

Cette phrase est une proposition simple, universellement quantifiée ; elle peut renvoyer à une situation mathématique, par exemple en probabilité.

La construction de sa négation permet de voir quelle conception ont les apprenants de la négation des énoncés universellement quantifiés, de mettre en évidence la différence entre la négation partielle, la négation totale et le contraire des énoncés.

Les réponses attendues sont :

- il existe au moins une boule dans l'urne qui n'est pas rouge (**B1**), qui est la réponse correcte ;
- les boules contenues dans l'urne ne sont pas toutes rouges (**B1**), qui est équivalent à dire qu'on peut trouver au moins une boule dans l'urne qui n'est pas rouge. C'est une réponse correcte ;
- parmi les boules contenues dans l'urne, il y en a qui ne sont pas rouges (**B1***), qui est une réponse correcte. L'expression « Parmi les boules » renvoie à une ou plusieurs exceptions, une particularité observée sur certaines boules de l'urne ;
- des boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges (**B1****), qui peut être considéré comme une réponse correcte. La présence de l'indéfini « des » suppose qu'il y a au moins deux qui sont concernées par la propriété énoncée. Par conséquent, de façon rigoureuse, l'existence d'une seule boule qui n'est pas rouge rendra cette réponse fausse ;
- Certaines boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges (**B1****), énoncé qui est de la même nature que la réponse précédente ;
- toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges (**B2**) qui est la forme négative enseignée dans le cours de français dès l'école primaire. Elle correspond à la négation dans la langue française, où elle est interprétée par (**B1**) dans la norme linguistique française. Cette formulation, comme nous le disions au chapitre 2, dans le langage courant, est souvent interprétée comme « aucune boule contenue dans l'urne n'est rouge », ce qui fait de la formulation (**B2**), une formulation ambigüe (Fuchs, 1996) ;
- toutes les boules qui ne sont pas contenues dans l'urne sont rouges (**B3**);

- il existe des boules rouges contenues dans l'urne qui sont rouges (**B4**), qui consiste seulement en un changement de quantificateur ;

- aucune boule contenue dans l'urne n'est rouge (**B5**) qui est le contraire, l'opposition radicale qu'Aristote a appelé la *contrariété* ;

- toutes les boules contenues dans l'urne sont non rouges. La négation n'affecte que l'attribut. Il n'est pas exclu que certains étudiants cherchent à exprimer « ne sont pas rouges » par une couleur autre que le rouge.

Pour nombre d'étudiants, parler de négation ou de forme négative, c'est la même chose. Cela provient de l'enseignement du français où on ne parle en général que de forme négative avec l'utilisation de *ne ... pas*, *ne ... plus*, …

De même, au chapitre 2, nous avons présenté la distinction entre négation et contraire ; elle n'est pas toujours très claire. C'est pourquoi l'utilisation de *aucune* peut s'expliquer par le fait que l'étudiant pense que pour construire la négation de la phrase, il faut appliquer le contraire à *toutes* et à la propriété. Dans le cas de l'utilisation de *aucune*, on peut faire l'hypothèse que soit l'étudiant ne sait pas que cela marque un quantificateur universel, soit qu'il ne sait pas que la négation d'une universelle est une particulière.

Nous noterons **B6** les autres types de réponses, et **B7** l'absence de réponse.

Phrase 3.2 : *Certains nombres entiers sont pairs*

Dans cet item, il s'agit de construire la négation d'un énoncé existentiel. Pour cela, il faudrait que les étudiants aient identifié *certains* comme un quantificateur existentiel. D'autre part, il y a un jeu entre les propriétés *pair* et *impair*[128], et nous sommes dans le cas où « être impair » est la négation de la propriété « être pair ».

Les réponses attendues à la question **3.2** sont :

- tous les nombres entiers sont impairs, qui est une formulation correcte.

- aucun nombre entier n'est pair, qui est une autre formulation correcte.

Nous noterons **C1** ces formulations et celles qui leur sont équivalentes.

- Certains nombres entiers ne sont pas pairs, qui est la forme négative de la phrase **3.2**.

[128] Voir chapitre 2

- Certains nombres entiers sont impairs, qui est une variante de la phrase précédente du fait que l'on peut remplacer « ne sont pas pairs » par « sont impairs ».

Ces réponses où le quantificateur « certains » n'est pas changé, peuvent provenir du fait qu'il n'a pas été identifié, ou alors s'il l'a été, les étudiants n'ont pu mettre en œuvre leurs connaissances relatives à la construction de la négation des énoncés quantifiés. Une autre hypothèse est la forte résistance du langage courant, où la négation s'identifie à la forme négative.

Nous noterons **C2** ces formulations et celles qui sont équivalentes.

- Tous les nombres entiers ne sont pas pairs ; qui comme nous l'avons dit dans notre étude théorique, est une formulation ambigüe. Nous notons cette réponse **C3**

Il est possible que l'étudiant, ayant identifié *certains* comme un quantificateur existentiel le change seul. On obtient ainsi la phrase:

- tous les nombres entiers sont pairs, qu'on note **C3***

Nous codons **C4** les autres réponses et **C5** les copies des étudiants n'ayant pas répondu à la question.

Phrase 3.3 : *Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.*

L'item **3.3** permet d'avoir une idée de la conception qu'ont les étudiants de la négation d'une implication. On retrouve assez souvent la négation d'une implication sous la forme d'une implication (Rogalski & Rogalski, 2004), bien qu'elle ait des formes différentes : la négation de $P \Rightarrow Q$, apparait sous les formes *non* $P \Rightarrow$ *non* Q, $non\, P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow non\, Q$, ou $non\, Q \Rightarrow non\, P$ (la contraposée). La négation de cette phrase pourra également nous renseigner sur l'interprétation qui est faite du terme *un*.

L'item **3.3** est un énoncé universellement quantifié, dont la quantification est implicite. On retrouve ainsi la forme habituelle sous laquelle les théorèmes sont énoncés dans le cours de mathématiques, avec la précision que les théorèmes sont des énoncés toujours vrais dans l'univers du discours où ils sont donnés. Il faut remarquer que cette quantification implicite n'est pas toujours partagée par les étudiants (Durand-Guerrier, 2005), d'où notre motivation de faire figurer cet item dans le questionnaire. Cet énoncé pourra être interprété comme une implication ouverte, c'est-à-dire de la forme $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

La classification des réponses est basée sur l'identification ou non du quantificateur implicite, la structure (conjonction ou implication), et dans le cas d'une implication, sur la forme de l'énoncé ($Q \Rightarrow P$, $non\ Q \Rightarrow P$, …).

Les réponses attendues sont les suivantes :

- il existe des nombres entiers divisibles par quatre et qui ne se terminent pas par quatre (**D1**), qui est la réponse correcte dans la mesure où on a un énoncé universellement quantifié, bien que la quantification soit implicite. Cette formulation renvoie à la notion de contre-exemple. En effet, un nombre entier qui ne satisfait pas la négation de la phrase ouverte associée à **3.3.** satisfait (**D1**) ;

- certains nombres entiers sont divisibles par 4 et ne se terminent pas par 4 : c'est une autre formulation de la réponse précédente ;

- un nombre entier est divisible par 4 et il ne se termine pas par 4 (**D1***). Cette formulation n'est pas très naturelle. L'article *un* peut avoir plusieurs interprétations. Considérée comme une phrase ouverte, elle est correcte du point de vue syntaxique. Comme Chellougui (2004) le relève, cette négation « ne donne pas lieu à l'apparition d'un quantificateur existentiel. […] La mobilisation/immobilisation de la quantification produit des interrogations sur la lecture des expressions » (op. cit. p. 97) ;

- un nombre entier n'est pas divisible par 4, et il se termine par 4 (**D1****). On a une conjonction dans laquelle la négation est appliquée à l'antécédent de l'énoncé de départ et le conséquent reste inchangé. C'est la négation de la réciproque de 3.3 ;

- si un nombre entier ne se termine pas par 4, alors il n'est pas divisible par 4 (**D2**), qui est la contraposée. Cette réponse est une implication de la forme $non\ Q(x) \Rightarrow non\ P(x)$: c'est la contraposée de **3.3** ;

- si un nombre entier n'est pas divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4 (**D3**), qui est de la forme $non\ P(x) \Rightarrow non\ Q(x)$. C'est la contraposée de la réciproque, elle est équivalente à $Q \Rightarrow P$;

- si un nombre entier n'est pas divisible par 4, alors il se termine par 4 (**D4**), qui est la forme $non\ P(x) \Rightarrow Q(x)$;

- si un nombre entier est divisible par 4 alors, il ne se termine pas par 4 **(D5),** qui est de la forme $P(x) \Rightarrow non\ Q(x)$;
- si un nombre ne se termine pas par 4, alors il est divisible par 4 (**D6**), qui est de la forme $non\ Q(x) \Rightarrow P(x)$.

Nous noterons **D7** les réponses qui ne sont pas d'une forme semblable à celles citées ci-dessus, et **D8** l'absence de réponse à cet item.

Phrase 3.4 : *La limite d'une fonction est toujours finie.*

Nous avons retenu une formulation proche de celles que l'on rencontre à l'oral dans la classe de mathématiques, comme par exemple :

« Une fonction dérivable est toujours continue ».

Afin de pouvoir en donner la négation, nous proposons tout d'abord une reformulation mettant en évidence la structure logique.

Nous savons qu'une fonction peut avoir une limite ou pas, et que si la fonction admet une limite, cette limite est unique. Dire que « la limite d'une fonction est toujours finie » signifie que chaque fois qu'on considère une fonction, lorsqu'elle admet une limite, alors cette limite est finie. Le fait qu'une fonction puisse admettre ou non une limite est un implicite dans cette formulation.

Le mot *toujours* est un adverbe de temps qui peut être considéré ici comme un quantificateur universel. Deux interprétations sont possibles :

La quantification ne porte pas sur l'objet fonction, mais sur l'observation d'un phénomène (fini, pas fini), ou alors la quantification porte sur l'objet fonction, ce qui fait disparaitre le marqueur temporel.

Nous considérons que telle que la phrase **3.4** est formulée, c'est une manière dans la langue naturelle d'expliciter la quantification universelle sur l'objet fonction. En mettant en œuvre la transformation du type « tout A est B » en un énoncé conditionnel implicitement universellement quantifié du type « Si A, alors B», on obtient la reformulation ci-dessous :

« Si une fonction admet une limite, alors cette limite est finie ».

Par ailleurs, « la limite de la fonction f est finie » se formalise par « il existe un réel tel que la limite de f soit égale à ce réel »

Au total, on a la paraphrase :

> « Si une fonction admet une limite, alors il existe un réel tel que la limite de cette fonction soit égale à ce réel ».

Nous avons ainsi transformé notre énoncé en un énoncé conditionnel comportant une quantification universelle implicite et pour lequel le conséquent est un énoncé quantifié existentiellement.

Il est possible d'une part que certains étudiants cherchent à écrire cette expression de manière formelle, puis à exprimer sa négation, et enfin, à la traduire en langage courant. Nous notons que la formalisation que nous proposons peut ne pas être naturelle chez les étudiants ; elle demande que l'énoncé de départ soit auparavant correctement paraphrasé. D'autre part, l'interprétation de la négation comme contraire par certains pourrait susciter des réponses avec *jamais* comme négation de *toujours*. D'autres enfin pourront donner la négation de l'énoncé directement, à savoir, « la limite d'une fonction n'est pas toujours finie ». Cette phrase ne porte pas d'ambigüité du point de vue mathématique, à cause de l'unicité de la limite d'une fonction lorsqu'elle existe. Dire donc que la limite n'est pas toujours finie signifie que la limite est soit finie, soit infinie. On ne peut dire de même du point de vue linguistique, car « pas toujours fini » peut avoir le sens « fini ou pas fini, de façon alternative »

L'interprétation qui sera faite de *une* aura une influence sur la construction de sa négation.

Selon cette interprétation, nous proposons les écritures formalisées suivantes, où $\mathcal{L}$ désigne le prédicat qui s'interprète par « avoir une limite » :

(1) $\forall f, (\mathcal{L}(f) \Rightarrow \exists l, (l \in \mathbb{R} \wedge \lim f = l))$; si on explicite la quantification universelle implicite.

(2) $\mathcal{L}(f) \Rightarrow \exists l, (l \in \mathbb{R} \wedge \lim f = l)$; *une* marque un élément générique.

Cet énoncé permettra de voir comment les étudiants construisent la négation d'un énoncé conditionnel dont le conditionnel est caché dans la formulation en langage courant, et s'il existe un lien entre sa négation en mathématiques et sa négation dans le langage courant, du fait qu'il est donné en langue courante.

Les réponses que nous attendons :

- la limite d'une fonction n'est pas toujours finie (**F1**). *Un* est interprété comme un générique. Cet énoncé est à la forme négative et coïncide avec la négation de la deuxième interprétation que nous avons proposée ;
- la limite d'une fonction est souvent (parfois) finie (**F1***). *Souvent* ou *parfois* sont mis à la place de *pas toujours.* Cette réponse n'est pas correcte, car, tant *souvent* que *parfois* ne sont pas des synonymes de *pas toujours*, mais ils sont sous-entendus *pas toujours*. *Toujours* renvoie à l'aspect pragmatique de la formulation, et *souvent* et *parfois* aussi. Au marqueur temporel, l'étudiant répond avec un marqueur temporel ;
- la limite d'une fonction peut être infinie (**F1****). Du point de vue langagier, ce n'est pas la négation. Mathématiquement, elle a la même signification que la réponse **F1**. En effet, lorsque la limite d'une fonction existe, elle est soit finie, soit infinie. Cette réponse a un aspect pragmatique ;
- la limite d'une fonction n'est jamais finie (**F1*****). *Un* est interprété comme un générique, cette formulation est le contraire de **3.4** ;
- la limite d'une fonction est infinie (**F1******)** qui mathématiquement a la même signification que « la limite d'une fonction n'est pas finie », mais du point de vue linguistique, n'est pas la négation de **3.4** ;
- il existe des fonctions dont la limite n'est pas finie **(F2**). Cette réponse montre que l'étudiant a interprété l'énoncé en portant le quantificateur universel sur la fonction. C'est la négation de la formulation (1) ;
- certaines fonctions n'ont pas de limite finie, qui est une réponse très proche de la précédente ;
- une fonction admet une limite qui n'est pas finie (**F2***) qui est une réponse correcte lorsque l'interprétation de *un* renvoie à un générique ; elle n'a pas de valeur de vérité. C'est une réponse rare a priori ;
- Il existe des fonctions dont la limite n'est pas toujours finie (**F3**). L'étudiant fait porter la quantification sur les fonctions, et conserve le marqueur temporel toujours.
- il existe des limites de fonctions qui ne sont pas finies **(F4)**: le quantificateur est porté par la limite. Cette réponse laisse penser que pour une fonction, il existe plusieurs limites parmi lesquelles une qui n'est pas finie.

Nous noterons **F5** toutes les autres réponses, et **F6** l'absence de réponse.

Le module de suivi

Cet exercice permet de mettre en évidence la distinction entre la négation mathématique et la négation dans le langage courant. En effet, dans le langage courant, nous avons vu que la négation correspond à la forme négative qui peut, pour les énoncés quantifiés, produire des formulations ambigües voire des énoncés incorrects. Les items **3.1** et **3.2** permettent d'aborder la négation des énoncés quantifiés. On regardera pour les énoncés ambigus –sous la forme « tous … ne … pas … », quelle interprétation en est faite.

Par ailleurs, plusieurs travaux (Rogalski & Rogalski (200, Durand-Guerrier & Njomgang (2009), Deloustal-Jorrand (2004)) montrent que pour les étudiants, la négation d'un énoncé conditionnel est un énoncé conditionnel. Un objectif que nous visons à travers l'item **3.3** est d'amener les étudiants à intégrer le fait que la négation d'une implication est une conjonction et non une implication. A partir de ce même item, on pourra faire le point sur la quantification implicite des énoncés, ce qui permet de passer au formalisme et ainsi d'introduire la notion de contre-exemple.

L'item **3.4** est une formulation qui peut avoir plusieurs interprétations. Il met en évidence les ambiguïtés de la langue, et les difficultés que peut générer l'utilisation du langage courant dans la construction de la négation : l'analyse a priori met en évidence la pluralité des possibilités de distribuer la quantification sur l'énoncé. Le module permettrait de discuter les différentes interprétations et de les écrire dans le langage formel avant leur traitement, puis de les traduire dans la langue une fois que la négation est construite. Cela permet d'évaluer l'écart entre ce qui est dit avec les mots de la langue, et ce qui est exprimé dans le langage formel.

1.2. Analyses a posteriori

1.2.1. Analyse des réponses des étudiants et du module de suivi

Enoncé 3.1 : *Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges*

Tableau des distributions des réponses

B1	B1*	B1**	B2	B3	B4	B5	B6	B7
37	0	2	13	0	3	7	3	3
54%	0%	3%	20%	0%	4,3%	10,1%	4,3%	4,3%
		E23/E65	E01/E03/E08/ E10/E16/E14/ E17/E32/E34/ E39/E48/E56/ E61		E40/E51/ E64	E12/E30/ E33/E59/ E60/ E62/ E66	E44/E57/ E04	E58/E25/ E38

Plus de la moitié des étudiants donnent une réponse correcte (réponses de catégorie **B1**). Parmi ces étudiants figure **E06** qui a écrit dans sa copie « *contraire :* » devant chaque réponse et donne la négation mathématique : cet étudiant fait une confusion entre *contraire* et *négation*.

20% des étudiants donnent une réponse de la catégorie « ambigüe » (**B2**), c'est-à-dire des réponses de la forme « tous …ne … pas … », qui est la forme négative de l'item de départ, et qui correspond à la négation dans la grammaire française. On ne peut se prononcer sur l'interprétation des 13 réponses, car nous n'avons aucune information sur la signification des phrases produites.Nous rapprocherons ces réponses de celles qu'ils ont produites à l'item **3.2** afin d'avoir une idée un peu plus précise de la conception qu'ils ont de la négation.

7 étudiants ont donné le contraire de l'énoncé. Ils ont changé le quantificateur « toutes » en « aucune » qui renvoie encore à la quantification universelle. Nous pouvons dire que ces étudiants identifient la négation au contraire.

Les 3 réponses de catégorie **B4** sont obtenues par un changement du quantificateur universel seulement, le verbe n'ayant pas été touché.

Au cours des échanges dans le module de suivi, la formulation **B2** n'est pas apparue. L'étudiant **E3** fait une reformulation de **3.1** : il remplace le quantificateur « tout » par « quel que soit » et obtient une expression connue, puis en donne la négation sous une forme opératoire (on peut trouver):

> 2 **E3** : Bon, moi je propose … On dit toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges, c'est-à-dire, quel que soit la boule qui se trouve dans l'urne, elle est rouge. On peut trouver des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges.

L'étudiant **E1** a proposé aux autres de mettre l'énoncé sous la forme d'une implication, puis d'en donner la négation :

4 E1 : Bon, si on veut mettre ça sous forme d'implication ?

Ils éprouvent des difficultés à le faire car ils conservent la quantification bornée :

7 E2 : Soit *x* appartenant à

12 E2 : quel que soit x appartenant à L,

14 E4 : quel que soit x dans l'urne, x est rouge

Enoncé 3.2 : *Certains nombres entiers sont pairs*

Tableau de distribution des réponses

C1	C2	C3	C3*	C4	C5
24	16	13	9	1	5
35,3%	23,5%	19,12%	13,25%	1,47%	7,36%
	E01/E04/E08/E13/E17/E34/E39/E41/E44/E60/E48/E56/E59/E61/E62/E66	E02/E11/E15/E16/E18/E20/E31/E35/E45/E50/E55/E63/E64	E05/E19/E28/E29/ E37/E40/E51/E54/E57/	E03	E53/E30/E58/E25/E38

Pour cet item, 46 étudiants sur les 63 qui ont répondu, ont bien identifié *certains* comme un quantificateur existentiel, et parmi ceux-là, 13 (catégorie **C3**) donnent une formulation ambigüe et 9 (catégorie **C3***) changent les quantificateurs sans appliquer *ne* ... *pas* au verbe.

Parmi les 13 étudiants qui ont donné la réponse de la catégorie *ambigüe* (**C3**) :

- Un seul (**E16**) a donné pour négation au premier item, la forme négative de cet item ; ses réponses à **3.1** et **3.2** sont respectivement :

  3.1 Toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges

  3.2 Tous les nombres entiers ne sont pas pairs
- Les douze autres ont produit la négation mathématique au premier item. Pour ceux-là, il y a bien un changement des quantificateurs qui est fait, et en plus la négation est portée par le verbe. Pour ceux-là, les réponses à **3.1** et **3.2** sont respectivement :

  3.1 Il existe au moins une boule contenue dans l'urne qui n'est pas rouge (ou son équivalent)

  3.2 Tous les nombres entiers ne sont pas pairs

Au vu de ces deux réponses, nous faisons l'hypothèse que l'interprétation donnée à leur réponse en **3.2** est *aucun nombre entier n'est pair*.

Comme nous l'annoncions précédemment, nous avons rapproché les réponses des étudiants de la catégorie **B2** (*toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges*) de l'item **3.1**, de celles de l'item **3.2**. Des 13 étudiants qui ont donné la réponse de la catégorie **B2** :

- 8 étudiants (**E01**, **E08**, **E17**, **E34**, **E39**, **E48**, **E56** et **E61**) ont donné la forme négative à l'item **3.2**. On ne peut donner une interprétation de la formulation qu'ils ont proposée en **3.1**, toutefois, ces réponses laissent penser que ces étudiants identifient la négation à la forme négative.
- **E10**, **E14**, et **E32** qui ont proposé la réponse correcte à l'item **3.2** (*tous les nombres entiers sont impairs/ aucun nombre entier n'est pair)*, ce qui nous amène à faire l'hypothèse que l'interprétation qu'ils donnent de leur réponse à l'item **3.1** est « il existe des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges ».
- **E16** a, quant à lui a proposé respectivement aux deux items les réponses :

  3.1 : toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges ;

  3.2 : tous les nombres entiers ne sont pas pairs

  Le changement du quantificateur dans **3.2** met en évidence l'identification de *certains* comme un quantificateur existentiel. Cette réponse nous conduit à choisir dans ce cas l'interprétation « aucun nombre entier n'est pair » ; nous ne pouvons nous prononcer pour **3.1**.

Les items **3.1** et **3.2** mettent en évidence les deux interprétations que peut avoir la formulation « tous … ne … pas » : comme négation d'un universel, on a une existentiel ; comme négation d'un existentiel, on a un universel (aucun).

Concernant le module de suivi[129], *certains* a bien été identifié comme un quantificateur existentiel. **E2** donne une négation correcte :

34 E3 : Certains nombres entiers sont pairs. Certains c'est dans le cas de …

35 E2 : De il existe. Je propose que « tous les nombres entiers sont impairs »

La négation qui est proposée par **E2** est reprise en d'autres termes par **E1**, par mesure de « prudence » :

[129] Voir annexe 3, à l'exercice 3

40 E1 : c'est vrai que c'est une partition, mais c'est plus prudent de dire « tous les nombres entiers ne sont pas pairs »

41 E3 : oui, c'est plus prudent

42 E2 : c'est plus prudent de dire ?

43 E1 : tous les nombres entiers ne sont pas pairs

La formulation de **E1** à la ligne 43 a la signification « aucun nombre entier n'est pair », c'est à dire que « tous .. ne … pas » renvoie à l'universel. En effet pour ce dernier, le changement de formulation vient de ce qu'il émet des réserves à déclarer que ce qui n'est pas pair est impair :

54 E1 : ne sont pas pairs. En fait, ce qu'on veut dire, c'est que, c'est pas d'abord prudent de dire que quand tu n'es pas pair, tu es impair.

Les échanges permettent également de relever que les étudiants prennent explicitement en compte le point de vue sémantique dans la construction de la négation :

48 E2 : C'est vrai ce que tu as dit, non ? Tous les nombres entiers ne sont pas pairs. Voilà la négation qui est vrai. Il faut donner une négation par rapport à la proposition

49 E3 : J'ai essayé de faire comme tout à l'heure.

50 E2 : tu as quelque chose qui est vrai, tu donnes sa négation c'est aussi vrai ?

51 E3 : Qu'est ce qui est vrai ?

52 E2 : quand on dit que certains nombres entiers sont pairs, c'est vrai ! Quand tu dis que certains nombres entiers sont impairs ?

Ce point de vue ne ressort pas dans les copies des étudiants de manière explicite. Certaines réponses (catégories **C2** et **C3***) traduisent même l'absence de cette prise en compte de l'aspect sémantique.

Dans ces échanges, les interventions de **E2** semblent renvoyer à une discussion sur la signification de « Tous les nombres entiers ne sont pas pairs » ; **E2** semble interpréter la phrase comme « Certains nombres entiers ne sont pas pairs » (ligne 52).

Enoncé 3.3 : *Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4*

Tableau de distribution des réponses

D1il existe	D1*générique	D1**	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
8	30	1	0	4	0	4	2	13	6
11,7%	44,1%	1,5%	0%	6%	0%	6%	2,9%	19,2%	8,8%
E09/E12/E13/ E35/E36/E37/ E40/E47/	E02/E03/E05/ E08/E14/E15/ E17/E18/E21/ E22/E23/E26/ E27/E28/E30/ E33/E42/E44/ E45/E46/E48/ E50/E53/E57/ E59/E60/E61/ E62/E65/E68	E29		E34/E39/ E54/E56		E10/E24/ E51/E66/	E49/E63	E01/E04/E06/ E07/E11/E19/ E20/E31/E32/ E43/E52/E55/ E64	E16/E25/ E38/ E41/E58/ E67

L'étudiant **E37** a donné la réponse « *P* est un nombre entier divisible par 4, et ne se termine pas par 4 » que nous avons classée dans la catégorie **D1**, car nous avons considéré que *P* était un élément singulier, et qu'il était exhibé comme un contre-exemple.

L'effectif de **D1*** (*un nombre entier est divisible par 4 et ne se termine pas par 4)* est important (44,1%), ceci contrairement à ce que nous avions supposé ; Les étudiants dont la réponse est dans cette catégorie ont appliqué correctement la règle syntaxique qui permet de produire la négation d'une implication, mais ils n'ont pas explicité la quantification existentielle, et de ce fait, la question de la valeur du *un* se pose, comme nous le disions dans notre analyse a priori : l'article *un* peut être un générique, à ce moment la phrase n'a pas de valeur de vérité. Il peut désigner un élément singulier, il renvoie alors à la quantification existentielle. Enfin, il peut être une quantification universelle.

10 étudiants répondent en donnant une implication.

Dans la catégorie **D5**, les étudiants conservent la structure conditionnelle de l'énoncé : l'antécédent ne change pas (*Si un nombre est divisible par 4*), et le conséquent est la négation du conséquent de la phrase de départ (*Il ne se termine pas par 4*).

Dans la catégorie **D7**, les étudiants **E06**, **E19**, **E20**, **E55** et **E64** ont donné des phrases ambigües :

E06, **E64** : Tout nombre divisible par 4 ne se termine pas par 4. (1)

E19, **E20**, **E55 :** Un nombre divisible par 4 ne se termine pas par 4. (2)

Ces réponses peuvent être interprétées comme :

La réponse (1) :

« Tout nombre est divisible par 4 et ne se termine pas par 4 » (3)

« Si tout nombre est divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4 » (4)

La réponse (2) :

« Un nombre est divisible par 4 ne se termine pas par 4 » (5)

« Si un nombre est divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4 » (6)

Les interprétations (3) et (4) sont toutes deux incorrectes, car nous avons vu dans notre analyse que la réponse doit être un énoncé existentiel.

Comme nous l'avons également dit ci-dessus, la correction de l'interprétation (5) dépend de l'interprétation de *un*.

L'interprétation (6) n'est pas correcte du fait que c'est un énoncé conditionnel.

Du tableau, il se dégage deux principaux schèmes : négation du conditionnel et implication. Dans le premier, selon qu'il y a identification ou non de la quantification universelle implicite, on a un énoncé existentiel ou un énoncé ouvert. Dans le deuxième, un conditionnel est donné avec la négation de l'antécédent ou du conséquent, le *ou* étant inclusif.

Des 10 étudiants qui ont donné un énoncé conditionnel en guise de négation, 5 ont proposé la forme $P \Rightarrow non\ Q$, et 4, la forme $non\ P \Rightarrow non\ Q$.

Lorsque nous rapprochons nos résultats de ceux du questionnaire proposé dans le cadre d'une enquête que la CI2U a menée en septembre 2006 dans des universités française, le pourcentage des étudiants camerounais ayant produit des énoncés conditionnels est moins élevé que celui de la population concernée par l'enquête du CI2U. Près de 50% des étudiants interrogés dans le cadre de l'enquête de CI2U ont produit un énoncé conditionnel, tandis que nos résultats donnent un pourcentage de 22% de réponse sous la forme d'un conditionnel.

Par ailleurs, l'effectif de la catégorie **D1*** (un nombre est divisible par 4 et il ne se termine pas par 4) représente près de 45% des étudiants, tandis que moins de 15% des étudiants de l'enquête de la CI2U avaient donné cette réponse.

La réponse de la catégorie **D1*** est apparue lors de la mise en commun[130] des réponses dans le module de suivi et a donné lieu à un débat entre les étudiants. La réponse de l'étudiant **E8** est la suivante :

> **170 E8** : un nombre entier divisible par 4 ne se termine pas par 4.

Celles de **E7** et **E2** sont :

> **171 E7** : la négation, c'est qu'on a une proposition $P \Rightarrow Q$, c'est-à-dire que la négation sera $P\ et\ non\ Q$. C'est-à-dire, si un nombre entier est divisible par 4, c'est-à-dire euh, on peut trouver, si on dit *si un nombre entier*, on a le quantificateur universel. On peut trouver des nombres entiers divisibles par 4, mais qui ne se terminent pas par 4.
>
> **172 E2** : Il existe des nombres divisibles par 4, mais qui ne se terminent pas par 4.

L'article un est explicitement interprété comme un quantificateur universel par ces deux étudiants. L'étudiant **E8** va faire évoluer sa première formulation et va proposer deux autres :

> **174 E8** : Que les nombres entiers divisibles par 4 ne se terminent pas forcément par 4.
>
> **175 P** : Les nombres entiers divisibles par 4
>
> **176 E8** : ne se terminent pas toujours par 4

Il appuie ses formulations en exhibant un contre-exemple à **3.3**, ce qui signifie que le *un* est une quantification universelle :

> **179 E8** : 14 se termine par 4 et n'est pas divisible par 4. C'est pour ça que je dis que les nombres entiers qui sont divisible par 4 ne se terminent pas toujours par 4.

Ici, le marqueur temporel que l'étudiant introduit est un quantificateur universel qui s'applique à *nombres entiers*. Sa proposition à la ligne 179 est un énoncé existentiel. Ces échanges lui ont permis d'expliciter la quantification qui au départ était implicite dans sa première réponse. On a ainsi un étudiant qui interprète *un* à la fois comme une quantification universelle et comme une quantification existentielle.

[130] Annexe 2, item 3.3

Enoncé 3.4 : *La limite d'une fonction est toujours finie*

Tableau de distribution des réponses

F1	F1*	F1**	F1***	F1****	F2	F2*	F3	F4	F5	F6
20	1	6	3	4	18	1	2	5	2	6
29,4%	1,5%	8,8%	4,4%	6%	26,5%	1,5%	2,9%	7,3%	2,9%	8,8%
E01/E03/ E06/E08/E10/ E11/E17/E22/ E23/E26/E30/ E39/E48/E49/ E52/E56/E60/ E61/E62/E64/	E45	E28/E38/ E42/E44/ E47/E68	E20/E55/ E59/	E05/E14/ E24/E57	E04/E07/E09/ E13/E15/E18/ E19/E27/E29/ E33/E35/E36/ E40/E41/ E43/E46/E54	E21	E16/E50	E31/E37/ E53/E63/ E65/	E34/ E67	E02/E12/E25/ E32/E51/E58/

Deux groupes de réponses se distinguent :

- la catégorie **F1** *(la limite d'une fonction n'est pas toujours finie)* : la quantification porte sur l'observation du phénomène fini/pas fini. 19 réponses figurent dans cette catégorie. Nous présentons la réponse de l'étudiant **E23** dans cette catégorie :

  « La limite d'une fonction n'est pas toujours finie, c'est-à-dire qu'elle peut être infinie comme elle peut ne pas exister ».

La deuxième partie de sa réponse explicite la première partie. En effet, si la limite existe, elle est infinie. Il explicite l'implicite contenu dans la formulation initiale : cette limite peut ne pas exister.

- La catégorie **F1**** (*la limite d'une fonction peut être infinie*) : 6 étudiants ont donné cette réponse qui recouvre un aspect pragmatique. Les étudiants se situent dans l'ensemble des fonctions qui ont une limite (finie ou infinie). A ce moment, la limite est soit finie, soit infinie ;
- la catégorie **F2** (*il existe des fonctions dont la limite n'est pas finie*) : la quantification porte sur l'objet fonction. Nous avons obtenu18 réponses de cette catégorie. Parmi ces réponses, il y en a 11 où *infinie* est mis à la place de *n'est pas finie*. Ces réponses sont équivalentes du point de vue mathématique (voir analyse a priori) ;
- les réponses de la catégorie **F4** (*il existe des limites de fonctions qui ne sont pas finies*) : l'étudiant a interprété la phrase en portant le quantificateur sur *limite*. De ce fait, on peut penser que, lorsqu'on considère une fonction, elle a plusieurs limites : les unes

sont finies et les autres sont infinies. Nous rapprochons cette réponse avec le point de vue linguistique, où « pas toujours fini » peut avoir le sens « fini ou pas fini, de façon alternative », ce qui génère donc l'idée de l'existence de plusieurs limites.

Les réponses de la catégorie **F5** :

> **E34** : « la limite d'une fonction n'est pas toujours finie ou encore la limite d'une fonction est infinie ».

Mathématiquement, cette réponse n'est pas correcte car dire que la limite n'est pas toujours finie signifie qu'elle peut être soit finie, soit infinie, mais pas nécessairement infinie.

> **E67** : la limite d'une fonction est souvent infinie

C'est une réponse de type pragmatique ; les étudiants rencontrent de nombreuses fonctions ayant une limite infinie. Par ailleurs, « être infinie » étant le contraire de « être finie », on peut faire l'hypothèse qu'il est mis à la place de « n'est pas finie ».

La grande variété des réponses met en valeur l'instabilité dans l'interprétation de cet énoncé formulé dans la langue.

Nous avons regroupé les réponses selon les invariants pris en compte pour la résolution des items[131]. Cela nous a permis de dégager trois catégories d'étudiants : ceux qui savent construire la négation des énoncés, ceux qui utilisent plutôt la forme négative et ceux qui ne sont pas stables, c'est-à-dire, ceux chez qui, la qualité des réponses est variable. Il est difficile de déterminer les règles-en-actes qu'ils utilisent.

Du tableau T3(1), nous dégageons les catégories d'étudiants suivantes :

(a) les étudiants qui réussissent la construction de la négation : **E09** et **E36**. On peut dire que ces derniers sont stables ;

(b) les étudiants dont la syntaxe est correcte, mais n'explicitent pas le quantificateur. Il y en a 10. La négation des deux premières phrases est correcte, et l'article *un* demeure dans l'énoncé de la négation de l'un au moins des deux items. Les séquences du module de suivi ont révélé que pour certains étudiants, la quantification existentielle peut être implicite. De ce point de vue, on peut dire que ces étudiants sont également stables ;

(c) les étudiants qui identifient la négation à la forme négative : ils répondent au premier item par un énoncé de la forme « tous … ne …pas… », la réponse au deuxième item

[131] Voir tableau T3(1) en annexe 6, exercice 3

est à la forme négative, la troisième réponse est la négation sans quantificateur ou (non $P \Rightarrow$non Q) et la quatrième est la négation. Il y a 7 étudiants dans cette catégorie ;

(d) instable : ce sont les étudiants dont les réponses ne permettent pas de dégager une règle d'action qu'ils ont utilisée. Une réponse peut être correcte, une autre renvoie à la forme négative, et une troisième résulte de la mise en œuvre d'un invariant opératoire différent des deux premiers. 46 étudiants sont dans ce cas. Parmi ces étudiants, il y en a qui semblent n'avoir pas identifié « certains » comme un quantificateur (**E13**, **E41**).

Concernant l'interprétation qui est faite de *un(e)* dans les deux derniers items, nous pouvons dire qu'elle est circonstancielle ; nous avons identifié des étudiants chez qui elle est assez instable car elle peut être en même temps celle d'une quantification universelle et d'une quantification existentielle. Chez d'autres étudiants, l'interprétation est celle d'un quantificateur universel, et de ce fait, lors de la formulation de la négation, ils explicitent le quantificateur existentiel.

1.2.2 Analyse des réponses des élèves

Les tableaux des réponses des élèves se trouvent en annexe 6, exercice 3.

Item3.1. : *Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges*

Tableau de comparaison des résultats des élèves et des étudiants

	B1	B1*	B1**	B1***	B2	B3	B4	B5	B6	B7
Elèves	29,6%	0%	1,6%	3,4%	18%	0%	13%	14,7%	18,1%	1,6%
Etudiants	54,4%	0%	3%	0%	20%	0%	4,3%	10,1%	4,3%	4,3%

Nous avons ajouté la catégorie **B1***** qui contient la réponse « il existe **une** boule dans l'urne qui n'est pas rouge ». Si « une boule » s'interprète par « une unique boule », cette réponse n'est pas correcte car il pourrait avoir au moins deux boules dans l'urne qui ne sont pas rouges. Si par contre « une boule » s'interprète par « au moins une boule », alors la réponse est correcte.

On retrouve beaucoup de réponses identiques à celles des étudiants dans cet item, mais aussi des formulations nouvelles comme par exemple :

L22, **L37 :** Au moins une boule contenue dans l'urne n'est pas rouge

L'expression « Au moins une » renvoie à un quantificateur existentiel.

L34 : Toutes les boules contenues dans l'urne sont non toutes rouges

Cette formulation n'est pas très naturelle dans la langue, mais on retrouve l'expression « non tous + adjectif » dans le langage mathématique. Par exemple « les vecteurs sont non tous nuls », qui signifie que, parmi les vecteurs, il y en a qui sont nuls et d'autres non.

L18 : Il y a au plus une boule dans l'urne qui n'est pas rouge

Cette réponse signifie que l'urne peut contenir exactement une boule qui n'est pas rouge, ou alors ne pas contenir de boule. Dans la première situation, la phrase initiale n'est pas vraie. Dans la deuxième situation, la phrase initiale est vraie. Du point de vue sémantique, cette phrase ne satisfait pas aux exigences de la construction de la négation car elle peut être vraie ou fausse.

La réponse de **L18** rentre dans la catégorie **B6.** Cette catégorie contient une grande variété de réponses, et toutes ont des significations différentes.

Item 3.2: *Certains nombres entiers sont pairs*

Tableau de comparaison des réponses des élèves et des étudiants

	C1	**C2**	**C2***	**C3**	**C3***	**C4**	**C5**
Elèves	16,4%	18%	19,6%	5,1%	21%	14,8%	5,1%
Etudiants	35,3%	23,5%	0%	19,12%	13,25%	1,47%	7,36%

Nous avons ajouté la catégorie **C2*** « *Certains nombres entiers sont impairs* », à cause du nombre de réponses de ce type, obtenues au cours du dépouillement. Les réponses de la catégorie **C2*** ont la même signification que celles de la catégorie **C2**, mais ces phrases n'ont pas la même forme. Ici, *ne… pas* n'est pas appliqué de façon explicite au verbe.

Parmi les réponses à cet item, nous retrouvons des réponses où :

- Ni la quantité ni la qualité de la proposition[132] n'ont changé, c'est l'expression du quantificateur existentiel qui a changé. Nous avons en exemple :

  (L36) « *Plus d'un nombre entier est pair* » ;

  (L41) « *Il existe des nombres entiers pairs* ».

  Ces deux réponses ont la même signification que la phrase initiale.

[132] La quantité d'un énoncé renvoie au type de quantification (existentiel ou universel) et la qualité renvoie à la forme affirmative ou à la forme négative.

- La quantité de la proposition ne change pas –c'est l'expression du quantificateur qui change, mais la qualité change comme c'est le cas des réponses de la catégorie **C2**. On a par exemple :

  (L54) « *Il existe un nombre entier qui n'est pas pair* » ;
- Les formes langagières sont assez éloignées de celles à quoi nous nous attendions, mais la signification des énoncés rejoint celle des réponses prévues dans notre analyse a priori. C'est le cas de :

  (L10) « *Ce n'est pas tous les nombres entiers qui sont pairs* »

  (**L53**) « *Il n'existe pas de nombres entiers pairs* »

  Cette réponse signifie que *tous les nombres entiers sont impairs*, ou encore qu'*aucun nombre entier n'est pair*.

Ici comme pour le premier énoncé, on retrouve une très grande variété de formulations de la négation. **L21**, **L36** et **L41** ont donné l'énoncé de départ mais dans une autre reformulation.

L21 : Il y a des nombres entiers pairs

L36 : Plus d'un nombre entier est pair

Les réponses de la catégorie **C2** et **C2***, nous amènent à nous interroger sur l'identification de *certains* comme quantificateur par les élèves. En effet, cette expression du quantificateur universel n'est pas utilisée dans la classe de mathématiques, où l'on rencontre surtout « il existe au moins un », « il y a au moins un », « on peut trouver au moins un ». Par ailleurs, tous les élèves qui ont donné en réponse la forme négative au premier item, ont leur réponse dans **C2** ou **C2***. Nous pouvons faire l'hypothèse que pour ces derniers, la négation s'identifie à la forme négative.

Item 3.3 : *Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.*

À cet item, nous obtenons 5 réponses correctes. 9 élèves n'ont pas donné de réponse, et le reste des réponses est en général une implication qui est soit implicite, soit explicite (Un nombre entier se termine par 4 s'il est divisible par 4).

On retrouve plusieurs implications où le conséquent contient les expressions « pas forcément », « pas toujours » :

L57 : Un nombre entier divisible par 4 ne se termine pas toujours par 4

L13, **L53** : Tout nombre entier divisible par 4 ne se termine pas forcément par 4

L04, L11 : Si un nombre entier se termine par 4, alors il n'est pas toujours divisible par 4

Le classement de ces réponses montre que les énoncés dont la structure générale est une implication où l'antécédent et le conséquent sont respectivement la négation de l'antécédent et du conséquent initiaux sont en grand nombre (20). Chez les étudiants nous n'avons obtenu que 4 réponses de ce genre. Ce résultat est à mettre en relation avec le cours de logique qui est dispensé en début d'année à l'université ; nous avons eu une réponse d'un étudiant, dans laquelle il explicitait la règle de construction de la négation d'un conditionnel

***Item 3.4** : La limite d'une fonction est toujours finie.*

Dans cet item, 9 élèves ont produit une réponse correcte en interprétant *toujours* comme une quantification universelle portée par *fonction*. 28 élèves utilisent la forme négative :

« la limite d'une fonction n'est pas toujours finie ».

Deux élèves ont fait porter le quantificateur par la limite :

L10 : Aucune limite d'une fonction n'est pas finie

L25 : Quel que soit la limite d'une fonction, elle est toujours finie

La réponse de **L10**, du point de vue syntaxique n'est pas correcte, et celle de **L25** est une explicitation du quantificateur universel avec conservation du marqueur temporel. Elle peut faire penser, du point de vue langagier, que la limite peut être finie ou pas finie, de façon alternative.

On retrouve ici les mêmes réponses que celles qu'ont produites les étudiants, et quelques formulations nouvelles comme :

L26 : La limite d'une fonction peut être une constante

L39 : La limite d'une fonction est aussi infinie

La réponse de **L39** traduit un aspect pragmatique.

Conclusion

L'exercice que nous avons analysé comporte quatre items dont les structures sont différentes. Les deux premiers sont respectivement des énoncés universellement et existentiellement quantifiés. Le troisième est un conditionnel universellement quantifié dont la quantification est implicite, et le quatrième est un énoncé conditionnel implicite, dont la quantification est exprimée par un marqueur temporel, et peut générer plusieurs interprétations.

Dans le premier item, parmi les réponses que nous avons obtenues figurent :

- celles qui sont obtenues par mobilisation de la forme négative, et qui sont comme nous l'avons vu, ambigües. Ces réponses peuvent être explicitées au cours d'un débat avec les étudiants afin que puissent ressortir les différentes interprétations. Cet énoncé permet également de travailler la notion de contre-exemple ;
- celles qui résultent seulement d'un changement du quantificateur, la négation n'étant pas appliquée au verbe, celles qui sont le contraire de l'énoncé initial. Cela traduit une mauvaise connaissance de la syntaxe et l'absence de prise en compte de l'aspect sémantique dans la construction de la négation.

Dans le deuxième item nous obtenons :

- des réponses qui sont à la forme négative. Elles donnent l'occasion de revenir sur la différence qu'il y a entre la négation mathématique et la négation dans la grammaire française, d'identifier des expressions peu usuelles qui désignent un quantificateur ;
- des réponses de la forme « tous … ne … pas …. » qui sont syntaxiquement correctes du fait qu'il y a bien un changement du quantificateur et application de la négation au verbe, mais génèrent une ambiguïté sémantique qui a émergé au cours du module de suivi. Cette ambiguïté mérite d'être soulignée, car dans **3.1** et dans **3.2**, les énoncés de la forme « tous … ne … pas …. » sont susceptibles de ne pas renvoyer à la même interprétation ;
- des réponses où c'est seulement le quantificateur existentiel qui a changé.

Le troisième item met en évidence deux principaux points :

- les ambiguïtés de la quantification implicite des énoncés : l'interprétation de *un* est problématique. Il peut être en même temps pour les étudiants, un quantificateur universel et un quantificateur existentiel ;
- la négation d'un énoncé conditionnel est donnée sous la forme d'un conditionnel. Le lien entre implication et disjonction pourrait être précisé, à savoir que $(P \Rightarrow Q)$ est logiquement équivalent à $(non\ P\ ou\ Q)$.

Le dernier item permet de mettre en valeur les différentes interprétations qu'on peut faire d'un énoncé donné dans la langue courante, et les incidences sur son traitement : pour certains le quantificateur est porté par *fonction*, et pour d'autres, il est porté par *limite*, ce qui ne donne pas la même négation.

Nous avons proposé une reformulation de cet item en un énoncé conditionnel. Au vu des résultats, cela n'est pas partagé par les étudiants.

2 Exercice 4

2.1 Analyse a priori

Le questionnaire

Donner la négation et la contraposée de l'énoncé suivant :

« $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ » où x et y désignent deux nombres réels.

La réciproque est-elle vraie ?

L'énoncé est de la forme $(\forall\varepsilon, P(\varepsilon, x, y)) \Rightarrow Q(x, y))$, exprimé à l'aide des symboles logico-mathématiques. C'est une phrase ouverte où les variables libres sont x et y et dont l'antécédent est une implication qui caractérise l'égalité de deux nombres réels. A la question de savoir si la réciproque est vraie, il s'agit pour l'étudiant de dire si la clôture universelle de la réciproque est vraie, étant donné que la réciproque elle-même est une phrase ouverte. Le fait que l'antécédent caractérise l'égalité de deux nombres réels permet de dire que l'énoncé proposé est une équivalence.

Il est important de noter ici qu'on ne peut pas avoir des formulations ambigües de la négation du fait du symbolisme utilisé. Pourtant dans la langue naturelle, un énoncé peut être interprété de plusieurs manières, ce qui affecte nécessairement sa négation. Il y a un écart dans le traitement de la négation des énoncés dans le langage formel et des énoncés donnés dans la langue naturelle : dans le langage formel, une fois qu'on a identifié la structure logique de l'énoncé, on applique les règles syntaxiques, mais dans la langue naturelle, la négation est tributaire des interprétations possibles de l'énoncé en jeu.

Cet exercice permet de pointer la différence entre la négation et la contraposée d'un énoncé conditionnel, qui n'est pas toujours claire pour les étudiants. La structure de l'énoncé est assez complexe ; c'est un conditionnel dont l'antécédent est un conditionnel universellement quantifié. De plus, le fait que les variables x et y soient libres peut être source de difficulté : les étudiants, dans la construction de la négation, peuvent quantifier ces variables en interprétant « x et y désignent un nombre réel » par « pour tous x et y éléments de $\mathbb{R}$ », ce qui est assez naturel. La présence du quantificateur dans l'antécédent est susceptible de perturber certains étudiants qui, d'une part, utilisent la règle d'action qui consiste à changer les quantificateurs lorsqu'ils construisent la négation et, d'autre part, ne prennent pas toujours en compte la portée du quantificateur qui apparait dans un énoncé.

Par ailleurs, le fait qu'on demande la négation et la contraposée peut laisser certains indifférents parce qu'ils pensent que c'est la même chose.

Il est habituel dans les pratiques de classe, de dissocier une équivalence en énonçant l'implication qui en découle et sa réciproque : au lieu d'écrire « P si et seulement Q », on écrit « si P, alors Q », puis plus loin, « si Q alors P ». Par ailleurs, le foisonnement d'énoncés conditionnels vrais dont la réciproque n'est « pas toujours vraie »[133] qu'on rencontre dans le cours de mathématiques, peut amener l'étudiant à donner la réponse « ce n'est pas toujours vrai » à la question de savoir si la réciproque est vraie.

Les réponses attendues sont les suivantes :

La négation

Nous ferons une analyse des réponses attendues selon deux directions :

- la gestion des quantificateurs : nous regardons si le quantificateur liant ε est changé ou pas, et dans le cas où l'étudiant a explicité la quantification universelle liant x et y, si le quantificateur change. Pour ce dernier cas, il est très peu probable que les étudiants conservent le quantificateur universel ;
- la structure de la négation de l'implication : nous avons identifié dans l'exercice 3, à l'item **3.3**, plusieurs structures logiques des énoncés que les étudiants ont produites en guise de négation.

1- $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ (**FN1**) qui est la bonne réponse. Sa structure est : $(\forall\varepsilon, P(\varepsilon, x, y)) \wedge (\neg Q(x,y))$
Cet étudiant a bien identifié la structure de l'énoncé et considère que les variables x et y sont des variables libres ; il sait construire la négation du conditionnel.

2- $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, [(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)]$ (**FN1***). Sa structure est : $\exists x, \exists y, [(\forall\varepsilon, P(\varepsilon, x, y)) \wedge (\neg Q(x,y))]$
Les variables x et y sont considérées par les étudiants comme implicitement liées au quantificateur universel. Cette réponse est correcte.

3- $(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ (**FN2**).
Sa structure est : $(\exists\varepsilon, P(\varepsilon, x, y)) \wedge (\neg Q(x,y))$. Cette réponse est celle de celui qui connait la règle de construction de la négation d'un énoncé conditionnel, à savoir, que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P\ et\ non\ Q$, et qui utilise le théorème-en-acte selon lequel,

[133] Voir analyse du manuel de terminale C, au chapitre 4

lorsqu'on construit la négation d'un énoncé qui contient des quantificateurs, on change ces quantificateurs. On peut faire l'hypothèse que l'étudiant a bien identifié la structure de cet énoncé.

4- $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, [(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)]$ (**FN2***), qui est la clôture existentielle de la réponse (**FN2**).
   Sa structure est : $\exists x, \exists y, (\forall \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)) \wedge (\neg Q(x, y))$. Pour produire cette réponse, l'étudiant a considéré que l'énoncé est universellement quantifié sur x et y, et a utilisé le théorème-en-acte ci-dessus.

5- $(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| \geq \varepsilon)) \Rightarrow (x \neq y)$ (**FN3**). Cette réponse a la structure suivante : $\neg\left(\forall \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)\right) \Rightarrow \neg\, Q(x, y)$. C'est la réciproque de la contraposée, et elle est logiquement équivalente à la réciproque de l'implication initiale.

6- $(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| \geq \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ **(FN4).** Sa structure est de la forme $\neg\left(\forall \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)\right)\ et\ \neg\, Q(x, y)$.

7- $(x \neq y) \Rightarrow (\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| \geq \varepsilon))$ **(FN5)** qui a la forme $\neg\, Q(x, y) \Rightarrow \neg\left(\forall \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)\right)$. C'est la contraposée.

8- $(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| \geq \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ **(FN6)** qui a la forme $\neg\left(\forall \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)\right) \Rightarrow Q(x, y)$

9- $(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x \neq y)$ **(FN7)** qui a la forme $\left(\forall \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)\right) \Rightarrow \neg Q(x, y)$;

10- $(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ **(FN8)** : il y a juste un changement de quantificateur. L'énoncé est de la forme $\left(\exists \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)\right) \Rightarrow Q(x, y)$.

Nous noterons **FN9** toute autre réponse différente des précédentes, et **FN10** l'absence de réponse.

La contraposée

Il est possible que les étudiants rencontrent des difficultés dans la construction de la contraposée, du fait de la présence du quantificateur et d'une deuxième implication dans l'antécédent. Comme pour la négation, certains étudiants pourront introduire le quantificateur universel pour lier les variables x et y.

Les résultats que nous attendons :

1- $(x \neq y) \Rightarrow (\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| \geq \varepsilon))$ (**FC1**) : c'est la réponse correcte. La négation de l'antécédent et du conséquent ont été pris en compte ;

2- $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, [(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ et \ |x-y| \geq \varepsilon))]$ **(FC1*)**. C'est la contraposée de la phrase de départ, que l'étudiant a considéré comme un énoncé universellement quantifié, dont la quantification est implicite.

3- $\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2, [(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ et \ |x-y| \geq \varepsilon))]$ **(FC1**). O**n peut justifier cette écriture par le fait que l'étudiant a considéré que l'énoncé était un universel, et a appliqué la négation sur le quantificateur.

4- $(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| \geq \varepsilon))$ **(FC2).** On retrouve dans le conséquent de cette réponse, la négation de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ sous la forme $(P \Rightarrow non\ Q)$. L'étudiant a modifié le quantificateur, mais la négation de l'implication est mal construite.

5- $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ (**FC3**), qui est la négation.

6- $\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2, (\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ **(FC3*).** C'est la négation appliquée à la clôture universelle de la phrase de départ.

7- $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, (\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ **(FC3**).** L'étudiant considère que l'énonce de départ est un universel, et ne change pas le quantificateur qui porte sur toute la phrase.

8- $(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ et \ |x-y| \geq \varepsilon)) \Rightarrow (x \neq y)$ **(FC4)** qui est la réciproque de la contraposée : c'est de la forme $non\ \big(\forall\varepsilon, P(\varepsilon,x,y)\big) \Rightarrow non\ Q(x,y)$.

Nous noterons **FC5**, toutes les autres réponses, et **FC6** la catégorie « pas de réponse ».

<u>La réciproque</u>

En général, les étudiants savent ce qu'est la réciproque d'une implication, et peuvent l'exprimer lorsque l'énoncé est en langage symbolique comme c'est le cas ici.

Les réponses possibles :

Nous faisons l'hypothèse que l'étudiant a considéré qu'il est en présence d'un énoncé clos.

1- Vrai pour ceux qui connaissent la définition formalisée de l'égalité de deux nombres réels, ou ceux qui montrent que le conséquent est vrai sous l'hypothèse $\big(\forall\varepsilon, P(\varepsilon,x,y)\big)$. ;

2- Faux : on suppose que l'étudiant ne connait pas l'écriture formelle la définition de l'égalité de deux nombres, et a des difficultés à montrer la vérité de $\big(\forall\varepsilon, P(\varepsilon,x,y)\big)$ sous l'hypothèse $x = y$;

3- Pas toujours, du fait qu'il est en présence d'un énoncé qui ne lui est pas familier et qu'il a intégré que lorsqu'on a un conditionnel qui est vrai, sa réciproque peut ne pas être vraie. On peut faire l'hypothèse qu'il n'a pas fait de tentative de preuve ;
4- Pas de réponse.

Le module de suivi

Cet exercice permet de mettre en défaut le théorème-en-acte qui consiste à changer les quantificateurs lorsqu'on construit la négation d'un énoncé.

D'après la structure de l'énoncé, seul le conséquent est nié dans la négation, et de ce fait, le quantificateur universel ne change pas dans l'antécédent. La construction de la contraposée aura un effet sur le quantificateur universel de l'antécédent.

En outre, la présence des variables libres x et y, peut comme nous l'avions mentionné, être perturbatrice pour les étudiants.

On pourra à partir de cet item :

- travailler sur la structure des énoncés, sur la portée des quantificateurs et les effets de la négation sur ces quantificateurs ;
- apporter des clarifications sur le statut de la lettre dans les énoncés mathématiques.

2.2 Analyses a posteriori des réponses des étudiants

Donner la négation et la contraposée de l'énoncé suivant :

« $(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ » où x et y désignent deux nombres réels.

La réciproque est-elle vraie ?

Les réponses des étudiants sont contenues dans l'annexe 6, exercice 4.

<u>La négation</u>

Tous les étudiants ont proposé une réponse

Les réponses sont contenues dans le tableau T4(1) en annexe 6.

Tableau des distributions des réponses : la négation

FN1	FN1*	FN2	FN2*	FN3	FN4	FN5	FN6	FN7	FN8	FN9	FN10
34	1	7	2	1	4	0	0	1	2	16	0

Les résultats que nous obtenons montrent que 35 étudiants ont donné une réponse correcte.

- ***Sur la gestion des quantificateurs :***

Trois étudiants (**E36**, **E12**, **E60**) ont considéré que la phrase initiale était un énoncé universellement quantifié, et ont proposé des énoncés existentiels en réponse :

E36 : $\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2/(\forall\varepsilon,(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$

Il a lié les variables x et y par le quantificateur universel dans l'énoncé de départ. Sa réponse est correcte.

E12, **E60** : $\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2,(\exists\varepsilon,(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$

La structure de l'énoncé produit par ces deux étudiants est :

$$\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2, P'(\varepsilon,x,y)\ et\ (non\ Q(x,y))$$

Le théorème-en-acte qu'ils utilisent ici consiste à changer les quantificateurs. Ils ont changé le quantificateur universel liant ε, pourtant sa portée se limite à l'antécédent de l'énoncé qui reste inchangé lorsqu'on construit la négation.

Les réponses de ces trois étudiants posent la question du statut des variables et de leur introduction dans les énoncés. Pour certains étudiants, toutes les variables doivent être au préalable définies, ce qui n'est pas le cas pour d'autres étudiants. La séquence ci-dessous, issue du module de suivi[134] montre que cette question est bien réelle :

104 E3 : C'est P⇒Q . Donc la négation sera P et non Q. c'est-à-dire, je prends exactement le premier, c'est-à-dire, $(\forall\varepsilon,(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))$ et $x \neq y$. Il y a quelque chose que j'ai omis. J'allais dire, il existe *x*, *y*,

E3 propose la négation en introduisant le quantificateur existentiel, ce qui suppose que c'est un énoncé universellement quantifié qu'il a considéré au départ. Il le précise dans la suite :

[134] Annexe 3, exercice 4

106 E3 : attends un peu n'est ce pas ? Au départ, pour toute la proposition, il y a *où x et y désigne deux réels*, c'est-à-dire qu'on a pris deux réels quelconques, c'est-à-dire que c'est un peu comme si on avait mis un quantificateur universel à la fin.

Or un quantificateur qui porte sur tout un énoncé est toujours placé en début d'énoncé, et non à la fin, si on se conforme à la syntaxe logique. Il arrive souvent que les enseignants introduisent les variables à la fin, soit à l'aide du quantificateur universel, soit sous la forme de génériques. C'est ce qui peut justifier l'intervention de **E3.** Nous notons que cet étudiant identifie élément générique (réel quelconque) à variable liée. Le statut de variables liées qu'il donne à x et à y rencontre la désapprobation de ses camarades :

107 E2 : Comment ? Ça c'est les précisions, non ?

108 E3 : Non, ça rentre dans la proposition.

109 E2 : Voici la proposition qui est dans les parenthèses non ?

110 E3 : on a dit *où x et y désigne deux réels*, ça veut dire que *x et y désignent deux réels quelconques.* Si on veut donner la négation maintenant, ça veut dire alors qu'il existe x et y appartenant à $\mathbb{R}$ tels que pour n'importe quel epsilon, ε strictement positif implique que $|x-y|<\varepsilon$ et $x \neq y$.

111 E2 : Moi je pense que là, on ne devrait pas regarder ça, tu devrais dire …

112 E1 : ça c'est juste une précision qu'on a faite, ça ne regarde plus la proposition.

113 E2 : Regarde la proposition qui est dans les parenthèses !

114 E3 : Bon, je vous pose une question ? x et y, ça sort d'où ?

115 E4 : C'est deux réels quelconques

Les étudiants ont identifié deux invariants opératoires : **E1**, **E2**, et **E4** traitent une phrase où x et y sont deux éléments génériques (ligne **115**), et que **E1** et **E2** appellent dans les lignes **112**, et **113**, à tort *proposition*. **E3** quant à lui a plutôt identifié une proposition, clôture universelle de la phrase ouverte qui a été proposée. Il ressort donc qu'on a deux interprétations de « x et y sont deux réels quelconques » : pour **E3** cela signifie « $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ », et pour les trois autres, x et y pourraient être des génériques. **E1** essaie d'expliquer pourquoi la phrase à nier n'est pas une phrase close, mais **E3** ne conçoit pas que les phrases ouvertes existent :

137 E1 : Pour que ce soit comme ça, ils devaient avant le premier guillemet-ci, mettre quel que soit *x* et *y*

138 E3 : Logiquement, c'est comme ça qu'on doit faire

139 E2 : attends, je vais lui poser une question. Si on ne précisait pas cela à la fin, tu allais dire quoi ?

140 E3 : non, on ne peut même pas écrire comme ça !

141 E2 : Supposons qu'on ne disait pas ça. Tu devais dire que c'est insuffisant ?

142 E3 : C'est insuffisant. Ça devait être insuffisant. Très insuffisant. Mais x et y, ça sort d'où ?

Un effet de la pratique qui consiste à introduire les variables à la fin de l'énoncé ressort aussi dans la réponse de **E30** pour qui le quantificateur universel implicite semble porter sur le conséquent :

$$(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x - y| < \varepsilon))\ et\ (\exists x, y \in \mathbb{R}, (x \neq y))$$

Le quantificateur existentiel apparait dans la négation du conséquent, ce qui laisse supposer que pour cet étudiant, le conséquent est universellement quantifié. On reste néanmoins sur une phrase ouverte à cause de l'antécédent où x et y sont libres, et du coup l'énoncé perd sa signification ; x et y sont en même temps des variables libres dans l'antécédent, et des variables liées dans le conséquent.

Les étudiants de la catégorie **FN2** qui sont au nombre de 7, ont mis en œuvre la règle de construction de la négation d'un énoncé conditionnel, avec en plus le théorème-en-acte qui consiste à changer les quantificateurs :

$$(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x - y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$$

- ***La structure de la négation de l'implication :***

Nous avons rapproché les réponses de la catégorie **D1**[135] et **D1***[136] de l'item **3.3** de l'exercice 3, de celles de cet item, afin de regarder s'il y a stabilité dans les schèmes de construction de la négation d'un énoncé conditionnel.

<u>Les catégories **FN1** et **FN1**</u>*(*les réponses correctes*):

34 étudiants ont construit correctement la négation de cet item. Parmi ces étudiants, on retrouve 24 qui ont donné des réponses de la catégorie **D1** et **D1*** de l'item **3.3** (4 dans la

[135] Catégorie **D1** : Négation correcte avec explicitation du quantificateur existentiel
[136] Catégorie **D1*** : Négation correcte sans explicitation du quantificateur existentiel

catégorie **D1** et 20 dans la catégorie **D1*)**. Nous pouvons faire l'hypothèse que ces étudiants sont stables.

Les 10 autres étudiants de la catégorie **FN1** ont donné en général des implications en guise de négation de l'item **3.3**.

<u>Les catégories **FN2** et **FN2***</u>

En rappel, on y trouve les réponses $[(\exists\varepsilon,(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y|<\varepsilon))\ et\ (x \neq y)]$ et $[\exists(x,y) \in \mathbb{R}2, \exists\varepsilon, (\varepsilon\in\mathbb{R}+* \Rightarrow x-y<\varepsilon)\ et\ (x\neq y)$ respectivement.

Dans la catégorie **FN2**, 4 étudiants **(E14**, **E15**, **E45**, **E68)** ont donné des réponses de la catégorie **D1*** à l'item **3.3** ; les deux étudiants de la catégorie **FN2*** ont donné des réponses des catégories **D1** et **D1*** respectivement. Nous pouvons dire que ces 6 étudiants savent que la forme générale d'un énoncé conditionnel $P \Rightarrow Q$ est $P\wedge\neg Q$, mais éprouvent des difficultés à l'utiliser lorsque l'énoncé se complexifie. Ceci met en valeur l'importance de croiser dans les apprentissages les deux aspects : structure de la négation des formules atomiques et gestion de la quantification.

<u>La catégorie **FN9** :</u>

Nous retenons la réponse de **E59** :

$$(\exists\varepsilon,(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y|<\varepsilon))\ et\ (x=y)$$

De l'item **3.3** où il donne une réponse de la catégorie **D1***, à celui-ci, il y a changement de d'invariant opératoire : la règle qu'il utilise ici est :

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A) et\ B$$

C'est la même que **E29** utilise à cet item et à l'item **3.3**. Nous pouvons dire que ce dernier est stable.

Le changement de l'invariant ressort également dans la réponse de l'étudiant **E40** de la catégorie qui propose la réponse suivante :

E40 : $(\forall\varepsilon,(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \ et\ \ |x-y|<\varepsilon))\ et\ (x \neq y)$

où le signe $\Rightarrow$ est remplacé dans l'antécédent par et, mais dont nous n'avons pas identifié l'invariant sous-jacent. On pourrait penser à une perturbation due à la présence des deux quantificateurs.

Les étudiants **E11** et **E31** ont proposé la réponse suivante :

$(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \vee \ |x-y| > \varepsilon)) \ \vee \ (x = y)$

Ils utilisent la règle : $\neg(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A) \vee B$, or $(\neg A) \vee B$ est logiquement équivalent à $A \Rightarrow B$

Plusieurs réponses de cette catégorie utilisent des invariants opératoires que nous n'avons pu identifier. C'est par exemple :

E51 et **E62** : $(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \Rightarrow \ |x-y| \geq \varepsilon)) \ et \ (x \neq y)$

Conclusion

Les réponses que nous avons recueillies permettent de faire le constat suivant :

- les étudiants réussissent mieux la négation dans le langage formel que dans la langue naturelle. Ce résultat renvoie aux travaux de Selden et Selden (1995), pour qui l'explicitation de la structure logique des énoncés informels qui représente une difficulté chez les étudiants de première année d'université permet une clarification conceptuelle ;
- pour quelques étudiants, la négation d'un énoncé conditionnel reste un énoncé conditionnel ;
- le théorème-en-acte qui consiste à changer le quantificateur lorsqu'ils construisent la négation est bien présent dans leurs productions ; ils ne prennent pas en compte la portée du quantificateur en question ;
- le statut des variables utilisées n'est pas toujours très clair ;

La contraposée

Les réponses se trouvent dans le tableau T4(2) en annexe 6.

Tableau des distributions des réponses : la contraposée

FC1	FC1*	FC1**	FC2	FC3	FC3*	FC4	FC5	FC6
39	0	0	13	0	0	0	13	3

Nous avons obtenu 39 réponses correctes (catégorie **FC1**), mais nous signalons tout de même qu'une d'entre elles n'a pas été explicitée, seule la formule est écrite :

E03 : $\neg(x = y) \Rightarrow \neg(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \Rightarrow \ |x-y| < \varepsilon))$

Cet étudiant a répondu en appliquant la règle logique sur l'implication externe, mais n'a pas traduit mathématiquement la négation. Sa réponse à la première question figure dans la catégorie **FN1** ; nous pouvons dire que cet étudiant est à mesurer d'expliciter la négation, plus particulièrement, celle du conséquent.

Nous proposons des commentaires sur les réponses dans lesquelles figurent un quantificateur qui lie les variables x et y :

E30 : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \neq y) \Rightarrow (\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; et \; |x-y| \geq \varepsilon))$

Nous faisons l'hypothèse que la portée du quantificateur universel liant x et y se limite à l'antécédent. En effet, cet étudiant a donné comme négation à l'énoncé initial :

$$\big(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)\big) \; et \; \exists x, y \in \mathbb{R}, (x \neq y)$$

C'est la négation de :

$$\big(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)\big) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, (x = y)$$

Nous faisons l'hypothèse que cet étudiant a utilisé la règle d'action suivante :

> « Pour construire la contraposée d'un énoncé conditionnel, on ne change pas le quantificateur »

car les deux quantificateurs sont restés inchangés.

Cette règle s'applique lorsque le quantificateur est situé au début de l'énoncé et porte sur toute la phrase.

L'étudiant **E12** a produit la même réponse avec une variante dans l'écriture des variables x et y :

E12 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq y) \Rightarrow (\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; et \; |x-y| \geq \varepsilon))$

Nous faisons l'hypothèse que dans cette réponse, le quantificateur liant x et y porte sur toute la phrase, bien qu'il ne l'ait pas spécifié par des parenthèses, comme il l'a fait pour la négation qu'il a proposée. À ce moment, le quantificateur en tête de phrase ne change pas, mais celui du conséquent devrait changer. Nous faisons l'hypothèse que la règle d'action ci-dessus a été utilisée.

Concernant l'étudiant **E60**, il donne respectivement en négation et en contraposée :

Négation : $\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2, \big(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \Rightarrow \ |x-y| < \varepsilon)\big)\ et\ (x \neq y)$

Contraposée : $(x \neq y) \Rightarrow (\exists x, \exists y \in \mathbb{R}), (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \wedge |x-y| \geq \varepsilon))$

Nous pouvons dire que le quantificateur liant x et y ne recouvre que l'antécédent, au vu de ce que l'étudiant propose en contraposée.

En dehors des trois réponses de la catégorie **FC6** et de deux conjonctions (**E43** et **E50**), toutes les réponses sont des implications où l'antécédent est « $x \neq y$ ». Contrairement à ce que nous avons supposé dans notre analyse a priori, nous pouvons dire qu'en général, les étudiants font bien la distinction entre la contraposée et la négation d'une implication.

La variété des conséquents nous amène à exprimer de façon plus détaillée l'énoncé que nous avons noté $(\forall\varepsilon, P(\varepsilon,x,y))$ et qui signifie $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \Rightarrow \ |x-y| < \varepsilon))$, de la manière suivante :

- $R(\varepsilon)$ c'est « $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ »
- $S(x,y,\varepsilon)$ c'est « $|x-y| < \varepsilon$ »

On a ainsi $\big(\forall\varepsilon, P(\varepsilon,x,y)\big) \equiv [\forall\varepsilon, (R(\varepsilon) \Rightarrow \ S(x,y,\varepsilon))]$
Sur les 13 réponses de la catégorie **FC5**, nous dénombrons 10 structures différentes de la négation de $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \Rightarrow \ |x-y| < \varepsilon))$ –antécédent de l'énoncé initial, dont la structure correcte est « $\exists\varepsilon, (R(\varepsilon)\ et\ non\ S(\varepsilon,x,y))$ ».

Nous résumons les différentes productions dans le tableau T4(3) en annexe 6.

Indications sur la lecture du tableau **:** la deuxième et la troisième colonne indique le quantificateur qui lie ε, dans la réponse de l'étudiant. La première colonne donne la formulation de la négation de $(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)$. L'étudiant qui se trouve à la 5$^{\text{ème}}$ ligne et 2$^{\text{ème}}$ colonne a donné la négation $(\forall\varepsilon,\ R(\varepsilon)\ et\ T(x,y,\varepsilon))$ qui est : $\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| < \varepsilon)$.

Commentaires du tableau

7 étudiants ayant donné une réponse de cette catégorie (**FC5**), ont construit correctement la négation de la phrase. Leur échec à cette question pourrait être dû à la complexité de l'antécédent, qui, à la question précédente restait invariant : il est possible qu'ils n'aient pas

identifié la structure de cet énoncé. Cette hypothèse nous conforte sur la question de la pertinence de l'analyse logique des énoncés mathématiques.

Nous avons réparti les étudiants de la catégorie **FC1** (les réponses correctes) en trois groupes :

- les étudiants stables : ce sont ceux qui ont réussi la négation de l'item **3.3** de l'exercice 3, de l'exercice 4 et la contraposée demandée. Il y en a 17 ;
- les étudiants qui font une mauvaise gestion des quantificateurs et qui savent que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \neg Q$: ce sont les étudiants qui ont répondu correctement à l'items **3.3**, à la contraposée, mais ont donné comme négation de la phrase, la phrase dont la structure logique est $\exists \varepsilon, P(\varepsilon, x, y) \wedge \neg Q(x, y)$;
- les étudiants qui ont réussi à deux items au plus.

Conclusion :

La construction de la contraposée met en évidence :

- l'importance de la prise en compte du champ des quantificateurs présents dans l'énoncé : l'analyse des réponses de **E60** et **E30** l'illustre ;
- le besoin pour les étudiants de pouvoir identifier la structure des énoncés conditionnels : sur 68 étudiants, on ne retrouve que 17 qui construisent de manière stable la négation d'un conditionnel. Pour ce qui concerne les autres, des schèmes différents sont utilisés pour le traitement des énoncés qui ont la même structure.

La réciproque

Concernant la question de savoir si la réciproque était vraie, nous avons le tableau suivant :

Tableau des distributions des réponses : la réciproque

Vrai	Faux	Pas toujours vrai	Pas de réponse
37	12	2	15

Sur 53 étudiants qui ont donné une réponse, 28 ont proposé une justification.

Des 37 qui ont répondu Vrai, 20 ont donné une justification correcte, tandis que 10 n'ont donné aucune justification. Nous avons identifié les preuves proposées :

- « en supposant que $x = y$, on a $|x - y| = 0$, ce qui est toujours inférieur à n'importe quel ε strictement positif » : 19 ont produit cette preuve ;

- un étudiant, **E36**, est passé par la réciproque de la contraposée, qui est la contraposée de la réciproque. Il écrit : si la valeur absolue de la différence entre x et y est supérieure ou égale à ε, alors, on a $x > y$ ou $y > x$. D'où $\neq y$. Sa justification est correcte car une implication et sa contraposée sont des énoncés équivalents.

Des deux qui ont répondu *pas toujours vrai*, seul **E34** a justifié par : car $P \Rightarrow Q$ est différent de $Q \Rightarrow P$, ce qui est vrai du point de vue logique, mais les deux propositions peuvent avoir la même valeur de vérité. Il a soutenu sa réponse en produisant les tables de vérité respectives de $P \Rightarrow Q$ et de $Q \Rightarrow P$. Cet étudiant, en répondant du point de vue de la logique, ne prend pas en compte le point de vue sémantique. Cette réponse peut amener à remettre en cause certaines pratiques qui consistent à dissocier une équivalence en énonçant une implication et sa réciproque ; certaines implications sont données avec en remarque « la réciproque n'est pas toujours vraie ».

Conclusion

Cet exercice a permis de mettre en valeur plusieurs éléments qui peuvent être travaillés avec les étudiants :

- le théorème-en-acte qui consiste à changer les quantificateurs dans un énoncé lors de la construction de sa négation est très présente. Nous constatons que les étudiants de la catégorie **FN2** ont tous donné une bonne contraposée, malgré la mauvaise formulation de la négation qui était due justement au changement du quantificateur universel dans l'antécédent. D'autre part, une règle d'action que nous n'avions pas prévue apparait ; elle consiste à laisser inchangé le quantificateur dans les énoncés lorsqu'on construit la contraposition. Ces deux phénomènes permettent d'aborder la question de la structure logique des énoncés incluant la portée des quantificateurs ;
- nous avons rapproché les résultats obtenus à l'item **3.3** et aux deux premières questions de cet exercice. Les résultats montrent 25% des étudiants sont stables dans la construction correcte de la négation des énoncés conditionnels, formulés dans la langue naturelle[137], comme dans le langage formel. Nous avons également comparé les réponses erronées des étudiants afin d'identifier s'il est possible, des invariants stables utilisés. Nous constatons que plusieurs invariants opératoires émergent pour la même tâche, cette tâche concernant des formulations différentes. Nous pensons qu'un outil idoine qui permettrait de réduire cette instabilité observée chez les étudiants

[137] Ce pourcentage ne prend pas en compte l'explicitation du quantificateur existentiel dans lé négation de 3.3. En prenant ce critère en compte, nous avons 3 étudiants seulement qui construisent correctement la négation d'un conditionnel.

consiste à une initiation à l'analyse logique des énoncés. Cela permet d'identifier leur structure, et de ce fait, contribue à leur traitement ;

- le statut des variables et des énoncés doit être clarifié. En effet, certains étudiants ne conçoivent pas l'existence des phrases ouvertes en mathématiques. Pour ces étudiants, toute lettre doit être soit une variable liée, soit un élément générique ; elle doit être introduite. On rencontre dans les différents échanges des étudiants, le mot « proposition » qui recouvre en même temps des phrases énoncées avec des éléments génériques et les propositions : ils ne font pas la différence entre ces deux types d'énoncés;
- le langage formel semble favoriser les transformations syntaxiques, néanmoins, on observe des difficultés dans l'identification du statut des lettres et la gestion des quantificateurs, d'autant plus qu'une ambiguïté apparait dans l'interprétation de l'énoncé proposé.

Conclusion du chapitre 6

Dans ce chapitre, nous avons regardé comment le concept de négation peut être mis en œuvre par les élèves et les étudiants, pour résoudre des tâches proposées en modifiant les variables didactiques que nous avons définies. Les exercices que nous avons proposés comportaient :

- du point de vue de la quantification, des énoncés universellement quantifiés dont la quantification était d'une part explicitée, et d'autre part implicite, un énoncé existentiel ;
- du point de vue du langage, des énoncés exprimés dans le langage formel, et dans la langue naturelle ;
- du point de vue de la complexité, des énoncés simples, c'est-à-dire ayant la structure sujet/verbe/attribut, et des énoncés conditionnels.

Les résultats que nous obtenons confirment que la construction de la négation des énoncés reste problématique chez les étudiants, et pointent les aspects qui peuvent être développés dans le cours de mathématiques en vue d'améliorer les performances des élèves et des étudiants dans l'utilisation de la négation.

- des difficultés dans la gestion des quantificateurs : certains étudiants changent systématiquement les quantificateurs qui apparaissent dans l'énoncé sans souvent tenir compte de leur portée, et pour quelques-uns parmi eux, n'appliquent pas la négation sur le verbe. Pour les énoncés donnés dans la langue naturelle, certains étudiants proposent le contraire en guise de négation des énoncés universels, et d'autres mobilisent la forme négative qui peut générer comme nous l'avons vu une ambiguïté sémantique. L'observation de ces phénomènes permet d'aborder la question de la portée des quantificateurs, de la structure logique des énoncés, et de la prise en compte des aspects sémantiques et syntaxiques dans la construction de la négation ;

- la quantification implicite : elle semble ne pas être partagée ; *un* peut être interprété en même temps comme un quantificateur universel et un quantificateur existentiel, ou alors comme l'un des deux, ou encore comme introduisant un élément générique. De ce fait, le statut des lettres n'est pas toujours très clair. Il est nécessaire de mettre en évidence les ambiguïtés générées par la quantification implicite, car ces ambiguïtés ont des effets sur le statut des lettres utilisées ;
- le langage : alors que le langage naturel est source d'interprétations multiples qui peuvent conduire à un résultat erroné, le langage formel semble favoriser les transformations syntaxiques. L'explicitation de la structure logique des énoncés donnés dans le langage courant (Selden & Selden, 1995) peut être un exercice en classe de mathématiques. Les étudiants seraient ainsi amenés à manipuler les énoncés « informels » et les énoncés « formels »[138] correspondants ;

- différentes structures de la négation d'un conditionnel : plusieurs étudiants produisent des énoncés conditionnels en guise de négation d'un conditionnel, et pour un même étudiant, il arrive que plusieurs règles-en-acte émergent ; ceci traduit une certaine instabilité qui peut être réduite en initiant les étudiants à l'analyse logique des énoncés.

[138] Formel et informel sont pris au sens de Selden & Selden (1995)

CHAPITRE 7 : Les exercices centrés sur la quantification

Introduction

Les travaux de Durand-Guerrier (1996, 2003) ont montré la nécessité d'une théorie de la quantification pour analyser les énoncés mathématiques, en l'occurrence le calcul des prédicats du premier ordre. À la suite de ces travaux, Chellougui (2004) pointe un certain nombre de difficultés que les étudiants éprouvent à manipuler les énoncés quantifiés, surtout lorsque ceux-ci contiennent plusieurs quantificateurs.

Les exercices que nous avons proposés aux élèves et aux étudiants, dont nous présentons une analyse a priori et des résultats, permettent de préciser davantage ces difficultés et de mener une réflexion sur des actions didactiques en vue de faciliter l'appropriation du concept de quantification.

Nous traiterons successivement les exercices 2, 5 et 8. Pour chacun d'eux nous donnons une analyse a priori. Nous présenterons ensuite les résultats des étudiants et des élèves à l'issue du questionnaire qu'ils ont passé ; cela fait l'objet d'une analyse a posteriori dans laquelle des éléments pertinents qui ressortent dans le module de suivi seront mis en évidence.

Nous rappelons la convention adoptée pour l'ensemble de nos analyses a posteriori :

Les étudiants qui ont répondu au questionnaire sont désignés par la lettre E suivie de deux chiffres ; les étudiants qui ont assisté au module de suivi sont désignés par la lettre E suivie d'un seul chiffre ; et nous avons nommé les élèves avec la lettre L suivie de deux chiffres.

1 Exercice 2

Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont vraies ; celles qui sont fausses et celles pour lesquelles on ne peut pas se prononcer. Vous justifierez soigneusement vos réponses (On se place dans la géométrie euclidienne classique enseignée au collège et au lycée).

2.1. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires ;

2.2. Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange ;

2.3. Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré.

1.1 Analyse a priori

On est en présence de trois phrases énoncées en langage courant. Pour l'analyse de cet exercice, nous nous plaçons dans l'ensemble des quadrilatères du plan que nous notons Q.

Il faut remarquer que la formulation faite est assez ambigüe du fait que dans chacune de ces phrases l'article *un* peut avoir plusieurs interprétations :

- il peut renvoyer à une quantification universelle ;
- il peut désigner un élément générique ;
- il peut désigner un élément singulier,
- il peut renvoyer à une quantification existentielle ;

Nous rappelons que du point de vue logique, les propriétés d'objets se traduisent par des phrases ouvertes comportant une variable libre, qui sont satisfaites ou non par les objets de l'univers du discours. Ces objets peuvent être des objets singuliers et dans ce cas on obtient une proposition qui a une valeur de vérité bien déterminée (éventuellement, elle peut ne pas être connu du sujet). Lorsqu'il existe au moins un élément singulier satisfaisant la propriété, la clôture existentielle est vraie ; sinon elle est fausse ; lorsque chaque objet de l'univers du discours satisfait la propriété, la clôture universelle est vraie ; sinon (existence d'un contre-exemple) elle est fausse. Les objets considérés peuvent aussi avoir le statut d'élément générique : dans le cas où la clôture universelle est vraie, une instance obtenue par un élément générique est vraie ; sinon, une telle instance n'a pas de valeur de vérité ; l'énoncé est contingent (Durand-Guerrier 1996, 1999, 2003).

Nous avons choisi de donner de tels items pour les raisons suivantes :

- repérer lorsque c'est possible, les interprétations que les élèves et les étudiants font de *un* à travers leur réponse à chacune des phrases. Dans la classe de mathématiques, il est le plus souvent utilisé par les enseignants comme un quantificateur universel, mais il est porteur d'ambiguïté ;
- regarder comment les apprenants s'y prennent pour montrer qu'un énoncé universel est faux (notion de contre-exemple) ;
- identifier le type d'arguments (arguments logiques ou mathématiques) que les étudiants utilisent pour justifier leurs réponses.

Analyse des différents items

Nous donnerons l'écriture formelle de chaque item, selon l'interprétation qui peut être faite de *un*, puis nous énoncerons les réponses possibles qu'on peut rencontrer et les justifications éventuelles de ces réponses. Mais avant, nous proposons les définitions des mots *définition*, et *théorème* telles que contenues dans Durand-Guerrier (2011), et que nous allons utiliser dans la suite.

Définition :

Une définition est une phrase ouverte, associée à une propriété d'objets, satisfaite par certains objets d'un domaine donné et pas par d'autres. Elle n'est donc ni vraie, ni fausse.

Théorème :

Dans une théorie mathématique donnée, un théorème est un énoncé clos vrai dont la vérité peut être établie au moyen d'une démonstration.
Propriété :

Une propriété est une phrase ouverte, satisfaite ou non par des objets d'un domaine donné.

2.1. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.

« Avoir les diagonales perpendiculaires » est une propriété du losange, donc, quel que soit l'interprétation qui est faite de *un* (existentielle, universelle, singulier ou générique), la phrase est vraie. La propriété se modélise par une formule atomique. Dans le domaine des losanges, selon l'interprétation de *un,* l'énoncé se formalise $\forall x, d(x)$ (universelle) ; $\exists x, d(x)$ (existentielle) ; $d(a)$ où a est un élément générique ou un élément singulier. d désigne le prédicat « avoir des diagonales perpendiculaires ».

Lorsque *un* est interprété comme un élément générique (dans n'importe quel losange) ou comme renvoyant à une quantification universelle implicite (dans tout losange), la reformulation, en prenant comme domaine d'objets (univers du discours) l'ensemble des quadrilatères du plan, conduit à un énoncé conditionnel vrai dont la réciproque est un énoncé faux (la condition avoir ses diagonales perpendiculaires et nécessaire et non suffisante) ; dans l'univers des parallélogrammes, on obtient une équivalence vraie (avoir ses diagonales perpendiculaire est une propriété caractéristique des losanges parmi les parallélogrammes).

Lorsque *un* est interprété comme renvoyant à une quantification existentielle, la reformulation conduit à une conjonction dans les deux cas.

Dans le domaine des quadrilatères, l'écriture formelle de la phrase pour chaque interprétation de *un* est :

$\forall x, (x \in \mathcal{L} \Rightarrow d(x))$ (1) : *un* est une quantification universelle ;

$(a \in \mathcal{L} \Rightarrow d(a))$ (2) : *un* désigne un élément générique ;
$\exists x, (x \in \mathcal{L} \wedge d(x))$ (3) : *un* est une quantification existentielle ;

$(a \in \mathcal{L} \wedge d(a))$ (4) : *un* désigne un élément singulier.

$\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des losanges.

Dans les réponses au questionnaire, l'interprétation (3) peut se manifester par l'exhibition d'un élément qui satisfait la phrase ouverte (2), ce qui permet la généralisation existentielle, même si celle-ci reste à un niveau implicite. Néanmoins, on ne peut pas exclure qu'un exemple soit utilisé de manière erronée pour justifier un énoncé universel.

On peut avoir la réponse « Vrai », avec les justifications suivantes :

- c'est une propriété des losanges, ce qui est correct ;
- l'étudiant énonce la définition du losange :

  « Un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur. »

  Cette justification est incomplète ; elle requiert une démonstration car la définition ne prouve en rien que les diagonales sont perpendiculaires ;

- c'est la définition : « Avoir les diagonales perpendiculaires » est une propriété des losanges. Or, dire que c'est la définition d'un losange, transforme cette propriété en propriété caractéristique des losanges : dans l'ensemble des parallélogrammes c'est vrai, ce qui n'est plus le cas dans l'ensemble des quadrilatères. Nous avons par exemple le cerf volant qui satisfait cette propriété dans l'ensemble des quadrilatères. Cet argument doit être complété, en outre, pour ce qui concerne le losange, il n'est pas habituel de le définir dans le secondaire par la propriété caractéristique des diagonales ;

- par un dessin qui peut aussi être une figure[139]. Cela signifie que l'élève travaille avec un élément singulier (dessin) ou un générique (figure). Il est difficile de savoir quelle interprétation est retenue avec la seule réponse au questionnaire ;
- par une démonstration : on part de la définition du losange donnée par les propriétés des côtés.

Nous pouvons également avoir les réponses « Faux » et « on ne peut pas se prononcer », ou ne pas avoir de réponse. Cela pourrait être dû au fait que l'élève ne sache pas ce qu'est un losange ou alors ne connaisse pas les propriétés du losange.

Une justification possible de la réponse « Faux » :

C'est le carré qui a des diagonales perpendiculaires, et un carré n'est pas un losange. Cette réponse peut provenir des habitudes scolaires : d'une part, le carré est pratiquement le seul parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires qu'on manipule, et d'autre part, certains étudiants peuvent considérer que les classes des carrés et des losanges sont disjointes[140].

2.2. Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange

Nous rappelons qu'on se place dans l'ensemble des quadrilatères du plan. Suivant l'interprétation retenue de *un*, on obtient les formulations ci-dessous :

$\forall x, (\mathcal{C}(x) \wedge d(x)) \Rightarrow x \in \mathcal{L})$ (5) : *un* est une quantification universelle ;

$(\mathcal{C}(a) \wedge d(a)) \Rightarrow (a \in \mathcal{L})$ (6) : *un* désigne un élément générique ;

$\exists x, \big(\mathcal{C}(x) \wedge d(x)\big)\ et\ x \in \mathcal{L})$ (7) : *un* est une quantification existentielle ;

$(\mathcal{C}(a) \wedge d(a)) \wedge (a \in \mathcal{L})$ (8) : *un* désigne un élément singulier.

$\mathcal{C}$ est le prédicat « être convexe », $\mathcal{L}$ et d sont les objets définis précédemment.

Dans l'ensemble des quadrilatères convexes, les énoncés (1) et (5) sont réciproques l'un de l'autre. Il en est de même des énoncés (2) et (6).

Contrairement à ce que l'on avait dans l'énoncé **2.1**, la valeur de vérité de l'énoncé **2.2** dépend de l'interprétation qui est donnée à *un*. La phrase est fausse si *un* est interprété comme

[139] Un dessin est une représentation particulière d'un objet géométrique, alors qu'une figure est une représentation déclarée quelconque. (Voir Deloustal-Jorrand, 2004, page 151)
[140] Voir Durand-Guerrier (1996)

renvoyant à une quantification universelle ; elle est vraie si *un* est considéré comme renvoyant à une quantification existentielle ; elle est contingente si *un* renvoie à un élément générique ; elle est contingente pour le sujet si *un* renvoie à un singulier non connu précisément. Nous proposons ci-dessous les différentes justifications a priori en prenant en compte l'interprétation qui est faite de *un*, les connaissances mathématiques en jeu, les modes de raisonnement éventuellement mobilisés.

1- Justifications possibles pour les réponses « on ne peut pas se prononcer ». La réponse s'appuie implicitement sur la notion de satisfaction d'une phrase ouverte et conduit à l'affirmation de l'existence d'exemple et de contre-exemple. Dans cette catégorie, nous avons retenu trois types de réponses a priori :

   a. L'apprenant cite le cas du *losange* qui satisfait la phrase ouverte, puis il produit une figure géométrique qui est un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires, mais qui n'est pas un losange ; c'est par exemple le cas du cerf volant.

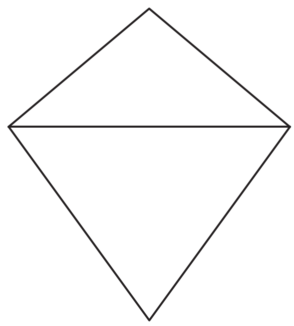


Schéma 1

Le losange et le cerf volant rendent respectivement vraie et fausse la phrase **2.2**.

   b. « tous les quadrilatères convexes dont les diagonales sont perpendiculaires ne sont pas des losanges ». Cette formulation dont nous avons dit plus haut[141] qu'elle pouvait être ambigüe est utilisée dans ce cas comme exprimant l'existence de contre-exemple, le fait que les losanges sont des exemples restant implicite. L'autre interprétation (aucun quadrilatères n'a ses diagonales perpendiculaires) devraient conduire à répondre que la phrase est fausse, c'est pourquoi elle est très peu vraisemblable ici.

[141] Voir chapitre 3, au paragraphe 3

c. « Il y a des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne sont pas des losanges », réponse appuyée ou pas par un dessin. Cette réponse sous-entend que l'étudiant admet que le losange est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires.

   Les réponses du type « On ne peut pas se prononcer » correspondent à une interprétation de *un* comme élément générique dans l'énoncé initial.

2- On peut avoir la réponse « Faux », les justifications possibles étant :

   a. un dessin qui représente un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires mais qui n'est pas un losange (production d'un contre-exemple) ;
   b. « il y a des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne sont pas des losanges » (affirmation de la négation de l'énoncé initial);
   c. le carré n'est pas un losange (affirmation de ce que la classe des carrés et des losanges sont disjointes et que seuls les carrés ont des diagonales perpendiculaires) ;
   d. « tous les quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires ne sont pas des losanges ». Comme nous l'avons rappelé plus haut, cet énoncé est ambigu ; les deux interprétations peuvent conduire à répondre Faux ;

Dans chaque cas, *un* est interprété au moins implicitement comme renvoyant à une quantification universelle et un dessin donné représente un contre-exemple. Pour l'étudiant qui justifie sa réponse comme en c., le carré est un contre-exemple.

3- On peut enfin avoir « Vrai », réponse qui peut être justifiée par :

   a. « Les losanges ont des diagonales perpendiculaires » ou alors « c'est un losange, donc c'est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires ». L'étudiant utilise la réciproque de l'énoncé donné qui est vraie, pour justifier sa réponse : $\forall x, (x \in \mathcal{L} \Rightarrow d(x))$ ou alors $a \in \mathcal{L} \Rightarrow d(a)$.

   Cette réponse soulève la question de l'identification de la *condition nécessaire* et de la *condition suffisante* dans un énoncé conditionnel. Comme nous le faisions remarquer plus haut, lorsque l'univers du discours est l'ensemble des quadrilatères convexes du plan, les phrases (1) et (5), tout comme les phrases (2) et (6) sont réciproques l'une de l'autre. De ce fait, il est possible que l'étudiant en situation fasse un traitement de cet énoncé conditionnel comme s'il était en présence d'une équivalence, par exemple en se plaçant dans le domaine des parallélogrammes.

L'interprétation de *un* pour cette réponse est celle renvoyant à une quantification universelle.

b. Un dessin représentant un losange avec ses diagonales perpendiculaires. On a une preuve par élément singulier ;

L'interprétation faite de *un* est celle du quantificateur existentiel.

2.3. Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré.

Cette phrase est énoncé conditionnel vrai, dont l'antécédent est donné sous une forme linguistique complexe. Dans la formulation « *un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires* », le pronom relatif *dont* laisse supposer que la phrase « *les diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires* » est un énoncé vrai. Selon cette interprétation, la phrase ***2.3*** peut se reformuler en :

Si un quadrilatère est tel que ses diagonales sont perpendiculaires et est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré.

L'article *un* peut être interprété comme renvoyant à une quantification universelle ou comme désignant un élément générique. Il nous semble peu probable de rencontrer une interprétation comme renvoyant à une quantification existentielle en raison de la présence du connecteur « si …, alors … ».

Dans l'ensemble des quadrilatères du plan, on a la structure logique ci-dessous selon que *un* renvoie à une quantification universelle (1) ou à un élément générique (2) :

$$\forall x, \big((d(x) \wedge \mathcal{R}(x)) \Rightarrow c(x)\big) \; (1)$$

$$(d(a) \wedge \mathcal{R}(a)) \Rightarrow c(a) \; (2)$$

c, $\mathcal{R}$ et d sont trois lettres de prédicats interprétées respectivement par « être un carré », « être un rectangle » et « avoir les diagonales perpendiculaires ».

Si le domaine de référence est l'ensemble $\mathcal{Q}_{dp}$ des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires, (1) se reformule comme ci-dessous :

$$\forall x \in \mathcal{Q}_{dp}, (\mathcal{R}(x) \Rightarrow c(x)) \; (3)$$

On est en présence d'une quantification bornée. Lorsque, partant de l'énoncé (3), nous nous plaçons dans l'univers des quadrilatères, nous obtenons l'énoncé (4) ci-dessous :

$$\forall x, (d(x) \Rightarrow (\mathcal{R}(x) \Rightarrow c(x))) \text{ (4)}$$

Cet énoncé est logiquement équivalent à (1) (ces deux énoncés ont la même valeur de vérité pour toute interprétation de leurs lettres dans tout univers non vide).

Le pronom relatif *dont* peut engendrer des difficultés d'interprétation pour les étudiants : ces derniers peuvent penser que l'antécédent est un conditionnel $(d(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x))$, et ce d'autant plus que cette interprétation conditionnelle peut avoir été mobilisée à juste titre pour l'énoncé **2.2**. Cette interprétation conduit à l'énoncé formel ci-dessous :

$$\forall x, \left(\left(d(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x)\right) \Rightarrow c(x)\right) \text{ (5)}$$

Cet énoncé formel ne traduit pas adéquatement l'énoncé **2.3**. Il n'est pas logiquement équivalent aux énoncés (1) et (4) ; en particulier, son interprétation dans l'ensemble des quadrilatères est un énoncé faux ; les rectangles non carrés sont des contre-exemples à l'énoncé (l'antécédent est vrai et le conséquent est faux).

Ce phénomène souligne à nouveau la polysémie des termes de la langue, non seulement sur le plan lexical, mais aussi sur le plan grammatical ; plus précisément, cette analyse logique met en évidence la difficulté à identifier les conditionnels cachés dans certains énoncés complexes donnés en langue naturelle.

Dans ce qui suit, nous nous attachons aux modalités d'évaluation de la valeur de vérité de l'énoncé 2.3 donné sous la forme :

$$\forall x, \left(d(x) \wedge \mathcal{R}(x)\right) \Rightarrow c(x) \text{ (1)}$$

L'antécédent est une conjonction. Dès lors que l'une des propriétés n'est pas vérifiée, l'implication est vraie. Lorsque les deux propriétés sont vérifiées, on peut établir mathématiquement que la conclusion est vraie. En effet, considérons un rectangle a dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est un losange qui a des angles droits, par conséquent, a est un carré. On a alors $d(a)$ vrai, $\mathcal{R}(a)$ vrai et $c(a)$ vrai, l'implication est donc vraie.

L'énoncé ouvert est satisfait par chaque élément du domaine, de ce fait, sa clôture universelle est vraie.

Notons que l'étude du cas où l'on considère un rectangle, correspond à la preuve par élément générique ; en général, on ne précise pas le cas où l'antécédent est faux.

Les réponses attendues sont « Vrai », « Faux » ou « On ne peut pas se prononcer ».

Présentation des justifications a priori suivant la valeur de vérité attribuée à l'antécédent l'énoncé

Nous proposons une classification des justifications, non en fonction des trois catégories de réponses ci-dessus, mais en prenant en compte la valeur de vérité de l'antécédent. Pour chaque justification proposée, nous donnerons la réponse en accord avec le raisonnement tenu.

1- L'étudiant peut considérer que l'antécédent est une affirmation vraie, c'est-à-dire qu'il va admettre qu'il a un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires, et que ce quadrilatère est un rectangle –ce qui signifie que $d(x)$ et $\mathcal{R}(x)$ sont tous deux vrais. Dans ce cas, il y a plusieurs éventualités :
   (a) il déduit que nécessairement le quadrilatère est un carré. La réponse donnée est « Vrai » ;
   (b) il fait la distinction entre la classe des rectangles et la classe des carrés (il considère que les classes des carrés et des rectangles sont disjointes[142]). La réponse est « Faux » avec comme arguments qu'un rectangle ne saurait être un carré, ce qui attribue implicitement à $c(x)$ la valeur de vérité « Faux » ;
   (c) l'étudiant dessine un carré qu'il présente comme un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui est un rectangle. Il produit un élément a tel que $d(a)$ et $\mathcal{R}(a)$. La réponse est « Vrai ». Cette justification renvoie au traitement de la réciproque ;
   (d) ou encore ce dernier suppose que le conséquent peut être vrai ou être faux, ce qui donne les valeurs de vérité respectives « Vrai » et « Faux » pour l'énoncé, d'où la réponse « on ne peut pas se prononcer ».
2- Un certains nombre d'étudiants et de lycéens peuvent considérer que la classe des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires et la classe des rectangles sont disjointes ; dans ce cas, l'antécédent de l'énoncé **2.3** est nécessairement faux. Quatre éventualités se présentent :

[142] Ceci peut relever des habitudes scolaires : lorsqu'un enseignant demande à ses élèves de dessiner un rectangle, il sous entend en général un rectangle non carré Deloustal Jorrand (2004).

a- l'étudiant connait les règles de vérité d'une implication et l'applique, ce qui lui donne la réponse « Vrai » ;

b- l'étudiant utilise l'implication courante ; il donne la réponse « Faux » ou ne donne aucune valeur de vérité, voire considère que l'implication est « absurde » (Rogalski & Rogalski, 2004).

c- il suppose que le conséquent peut être vrai ou être faux. Si le conséquent est faux, il donne la valeur de vérité « Faux », et si le conséquent est vrai, il donne la valeur de vérité « Vrai », d'où la réponse « on ne peut pas se prononcer » ;

d- un autre mode de justification est la réalisation d'une figure de rectangle avec des diagonales non perpendiculaires, pour justifier que ce n'est pas possible que les diagonales d'un rectangle soient perpendiculaires.

Il est possible que l'étudiant tienne le raisonnement suivant : « comme on a un carré, ses diagonales sont perpendiculaires et c'est un rectangle ». L'étudiant montre en fait que la réciproque de $(d(x) \wedge \mathcal{R}(x)) \Rightarrow c(x)$ est vraie, en déduisant $(d(x) \wedge \mathcal{R}(x))$ sous l'hypothèse $c(x)$. La réponse dans ce cas est « Vrai ».

<u>Remarque</u> : cet énoncé est en fait une équivalence illustrée par le *schéma (2)*: la classe des carrés $(\mathcal{C})$ est à l'intersection des classes des rectangles $(\mathcal{R})$, des losanges $(\mathcal{L})$ et des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires $(\mathcal{D})$.

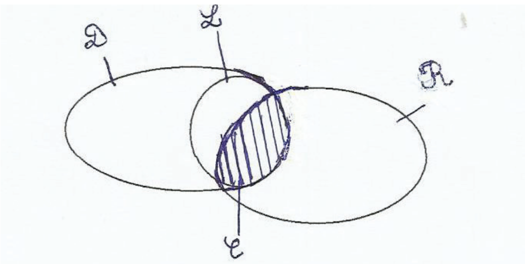


Schéma 2

Les énoncés proposés dans cet exercices mettent en–évidence les ambiguïtés que peut engendrer l'utilisation de *un* dans les énoncés mathématiques donnés en langage naturel, en lien avec la pratique de la quantification implicite des énoncés mathématiques et, avec les connaissances du domaine mathématique concerné. Les résultats obtenus par Durand-Guerrier (1996) à un item proche de celui-ci ont mis en évidence le fait qu'un nombre non négligeable d'étudiants de sa population[143] avaient des connaissances fragiles sur les quadrilatères et leurs propriétés. En outre, les travaux de cette auteure et ceux de Deloustal-Jorrand (2003) montrent

[143] 273 étudiants arrivant à l'université en France en 1993

que ces difficultés sont étroitement imbriquées avec les difficultés liées au maniement de l'implication

Les éléments que cet exercice devrait permettre de travailler dans le module de suivi

L'analyse a priori de cet exercice met en lumière les questions d'interprétation liées à la pratique de la quantification implicite des énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques. En effet, lorsque *un* est utilisé dans des énoncés par les enseignants, il désigne en général un quantificateur universel[144]. Mais il est possible que cette interprétation ne soit pas partagée par tous les étudiants dans le cas où l'énoncé universel associé est faux comme dans l'énoncé **2.2**. Dans de tels cas, les étudiants pourraient répondre en utilisant des arguments de nature pragmatique :

- s'ils ne disposent dans leur répertoire d'aucun objet qui rende faux cet énoncé, mais seulement des objets qui le rendent vrai, ils pourront répondre qu'il est vrai. ;
- si au contraire, ils disposent de quelques objets qui rendent vrai cette phrase et quelques objets qui la rendent fausse, ils pourront répondre, soit que la phrase est fausse, soit que « on ne peut pas se prononcer ». Dire que la phrase est fausse renvoie à une interprétation de *un* comme une quantification universelle, et répondre « on ne peut pas se prononcer » renvoie à une interprétation de *un* comme un générique ou un élément singulier qui n'est pas précisé.

Le module de suivi va permettre d'aborder les points suivants :

1. la pratique de la quantification implicite des énoncés et la variabilité dans l'interprétation de *un ;* en particulier les effets sur la négation. Par ailleurs, la construction de la négation d'un tel énoncé va se poser : si *un* apparait dans la négation, quelle interprétation devrait-on en faire ?
2. la mise en évidence des énoncés contingents en mathématiques ;
3. les notions de condition suffisante et de condition nécessaire ;
4. les conditions de vérité d'une implication ;
5. les ambiguïtés de la langue naturelle et le rôle du formalisme mathématique comme outil pour lever ces ambiguïtés.

[144] Nous avons interrogé des enseignants de lycée et d'université à ce sujet

1.2 Analyses a posteriori

1.2.1.1 Analyse a posteriori des réponses des étudiants et du module de suivi

Nous regroupons dans un premier temps les réponses selon les trois catégories « Vrai », « Faux » et « on ne peut pas se prononcer », et dans un deuxième temps nous procédons à une analyse des réponses suivant ces catégories.

Tableau T2(1)

Distributions des réponses

	Enoncé 2.1	Enoncé 2.2	Enoncé 2.3
V	58 - (85,2%)	16 - (23,5%)	42 - (61,7%)
F	3 - (4,5%)	45 - (66,2%)	9 - (13,2%)
ONPPSP	1 - (1,5%)	1 - (1,5%)	5 - (7,4%)
Pas de réponse	6 - (8,8%)	6 - (8,8%)	12 - (17,7%)

Enoncé 2.1.

Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires

Analyse des justifications des étudiants qui répondent « Vrai »

Nous avons obtenu 58 réponses Vrai, parmi lesquelles 26 seulement ont été justifiées. Nous présentons, dans le tableau qui suit, les justifications données par les 26 étudiants :

Tableau T2(2)

Définition du losange	**E09, E29, E37, E47, E50**
Propriété du losange	**E06, E09, E34, E38**
Parallélogramme	**E13**
Côtés égaux	**E14, E26, E39, E46, E49, E53**
Côtés parallèles	**E14, E49, E53**
Dessin	**E38** (dessine un carré et un losange qui n'est pas un carré), **E36** (dessine un losange et montre à partir du dessin que les diagonales sont perpendiculaires)
Justifications par les triangles isocèles	**E30** (Réunion de deux triangles isocèles avec pour hauteur les demi-diagonales du losange) ; **E54** (D'un on peut extraire exactement deux triangles isocèles, admet un seul côté en commun qui est distinct des côtés qui leur donne la caractéristique d'isocèle) ; **E55** (Car l'une comprend la hauteur d'un triangle isocèle qui coupe l'autre)
Justifications par le carré	**E52** (Un losange est un carré particulier) **E62** (un losange est un carré incliné) **E56** (nous pouvons avoir un losange carré)
Justifications à l'aide des angles droits	**E46** (les côtés se coupent en formant un angle droit) **E41** (Le losange possède deux diagonales qui se coupent en formant un angle de 90°, d'où la perpendicularité) **E51** (Dans un losange, les quatre angles sont droits)
Autre justification	**E25** (Les angles formés par les segments font des diagonales des bissectrices, car divisent ces angles en deux parties égales) **E35** (Le losange fait appel à la notion de médiatrice d'un segment sur son point d'intersection. Ainsi, si ABCD est un losange, alors (BD) est la médiatrice de [AC] et AB=BC)

Sur les interprétations de *un* telles qu'elles apparaissent dans les justifications :

Nous faisons l'hypothèse qu'à travers les justifications que les étudiants proposent, il est possible de repérer les différentes interprétations que ces derniers vont faire de l'indéfini *un*.

Quatre étudiants ont justifié leur réponse en disant que cette phrase est une propriété des losanges. Cette réponse est en accord avec une interprétation de *un* comme renvoyant à une quantification universelle.

Cinq étudiants ont dit que c'est la définition du losange, argument qui doit être complété. En effet, d'après leur réponse, nous pouvons dire que l'interprétation de *un* renvoie à une quantification universelle. De ce fait, selon le domaine où l'on se place, la valeur de vérité de **2.1** change : dans l'ensemble des quadrilatères, l'énoncé est faux, et dans l'ensemble des parallélogrammes, il est vrai ; le domaine doit être précisé.

Ceux qui ont justifié leur réponse par l'égalité des côtés sont au nombre de 6, et trois parmi eux ont ajouté que les côtés sont parallèles. Mais comme nous l'avons dit, cet argument ne suffit pas. Il faut une démonstration car la perpendicularité des diagonales ne suit pas immédiatement.

L'étudiant **E52** fait rentrer les losanges dans la classe des carrés : « *un losange est un carré particulier* ». C'est plutôt le contraire. Une raison de ce classement pourrait provenir d'une part de ce que les côtés du losange sont tous égaux comme ceux du carré, et d'autre part, du fait que le carré est beaucoup plus étudié en géométrie que le losange qui n'est pas un objet familier. Cette réponse traduit une mauvaise connaissance des quadrilatères.

Pour ces étudiants, l'interprétation donnée à *un* peut être vue comme une quantification universelle ou comme un générique.

Les étudiants **E30**, **E54**, **E55** ont une preuve pragmatique ; ils exploitent la « décomposition » du losange en deux triangles isocèles semblables. Cet argument leur permet de conclure à la perpendicularité des diagonales du losange. L'interprétation donnée à *un* pourrait être celle d'un générique.

La réponse de **E56** « vrai, car nous pouvons avoir un losange carré », correspond à une interprétation de *un* renvoyant à une quantification existentielle.

Pour les étudiants proposant un dessin pour justifier leur réponse, on ne peut pas savoir dans cet item s'ils considèrent ce dessin comme un élément générique (un représentant quelconque de la figure *losange*) et dans ce cas la justification peut-être considérée comme valide pour l'interprétation de *un* renvoyant à une quantification universelle, ou s'ils considèrent qu'il s'agit d'un élément singulier pour une preuve par l'exemple, qui est valide si l'interprétation de *un* renvoie à une quantification existentielle, non valide sinon.

Les étudiants ont donné des justifications assez approximatives, et parfois fausses, en dehors de ceux qui ont justifié leur réponse en disant que c'est une propriété du losange. Pour ces derniers, l'interprétation qu'ils donnent de *un* est celle d'un quantificateur universel.

Analyse des justifications des étudiants qui répondent Faux

Seuls 3 étudiants on donné cette réponse. Nous avons obtenu

Tableau T2(3)

CODE ETUDIANT	REPONSE
E16	Les diagonales perpendiculaires n'impliquent pas le fait qu'elles se coupent en leur milieu
E17	C'est un carré
E18	Ce sont les supports des diagonales qui sont perpendiculaires

On pourrait penser que **E16** n'a pas repéré que dans l'item, « avoir des diagonales perpendiculaires » est une condition nécessaire que doit vérifier un losange. C'est une propriété du losange, et non une propriété caractéristique, comme semble vouloir le dire cet étudiant. Il a besoin d'informations supplémentaires, à savoir, que les diagonales se coupent en leur milieu. Il estime que tout n'a pas été dit : c'est le principe du maximum d'information.
La réponse de **E17** laisse penser que ce dernier considère que « avoir les diagonales perpendiculaires » est une propriété du carré, et qu'il fait une distinction entre la classe des carrés et des losanges.
E18 quant à lui évoque un problème de vocabulaire, tout en semblant être en accord avec le fait que les supports des diagonales sont perpendiculaires.

Analyse des justifications des étudiants qui répondent « On ne peut pas se prononcer »

> **E20** : Si le losange est un carré, alors ses diagonales sont perpendiculaires, mais lorsque les angles d'un losange ne sont pas droits, alors ses diagonales ne sont pas perpendiculaires.

Cet étudiant attribue au carré la propriété de perpendicularité des diagonales ; le losange doit être un carré pour avoir des diagonales perpendiculaires. Cet étudiant a des connaissances insuffisantes du losange.

En conclusion à la question **2.1**, nous pouvons dire que, bien que les réponses soient majoritairement correctes, les justifications qui ont été apportées aux réponses « Vrai » montrent que certains étudiants ont des connaissances mathématiques insuffisantes sur les losanges. Le vocabulaire utilisé dans les justifications n'est pas très précis ; il traduit souvent l'aspect pragmatique des raisonnements :

E30 : Réunion de deux triangles isocèles avec pour hauteur les demi-diagonales du losange

E55 : Car l'une comprend la hauteur d'un triangle isocèle qui coupe l'autre (*l'une est mise pour diagonale*)

E62 : Un losange est un carré incliné

Quelques tentatives de preuves ont été réalisées. Les étudiants **E30** et **E35** qui justifient respectivement leur réponse « Vrai » par :

« Réunion de deux triangles isocèles avec pour hauteur les demi-diagonales du losange » et

« Le losange fait appel à la notion de médiatrice d'un segment sur son point d'intersection. Ainsi, si ABCD est un losange, alors (BD) est la médiatrice de [AC] et AB=BC »

On retrouve dans le module de suivi[145], des échanges qui mettent en évidence cette insuffisance des connaissances de l'objet *losange* :

128 E1 : D'abord c'est quoi un losange ?

129 E3 et E4 : C'est évident

Cette évidence n'est pas visible dans la suite :

130 E1 : La justification maintenant, c'est ça qui est important

131 E3 : Un losange c'est, comment dire

132 E1 : Quadrilatère

133 E4 et E1 : dont les diagonales sont perpendiculaires qui ont quatre

134 E1 : C'est une figure géométrique qui a quatre côtés

135 E4 : Un quadrilatère ? Non, non, le losange a souvent les côtés

136 E1 : Je dis quatre côtés deux à deux égaux et dont les diagonales sont perpendiculaires. C'est la définition du

137 E3 : Est-ce que ceci est un losange ? (l'étudiant dessine un cerf volant comme celui de notre analyse *a priori*)

138 E1 : Oui, non. Avec la définition d'un losange, ça c'est un losange

[145] Voir annexe 4

Le dessin de **E3** met en évidence l'ambiguïté de l'expression « deux à deux »[146], car en dessinant le cerf volant, on a effectivement les côtés qui sont deux à deux égaux : en considérant un côté, il y en a un autre qui a la même longueur. La définition du losange que **E1** donne (ligne 136) et cette interprétation de « deux à deux » légitiment le dessin du cerf volant, dessin que **E1** approuve comme étant celui d'un losange.

> **139 E4** : ça c'est pas un losange. La définition du losange, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu

E4 donne ici deux propriétés des diagonales d'un losange en guise de définition : « être perpendiculaires » et « se couper en leur milieu ». La conjonction de ces deux propriétés est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit un losange ; c'est une propriété caractéristique des losanges parmi les quadrilatères.

Par ailleurs, l'interprétation de *un* chez les étudiants qui participent au module de suivi est majoritairement celle d'une quantification universelle, du fait que c'est une propriété du losange connue d'eux.

Cet item n'a pas posé de problème dans la mise en commun des réponses des deux groupes. Nous l'avons utilisé pour parler de la transformation d'un énoncé universel dont la quantification est implicite en un énoncé conditionnel (Epp, 1999), en prenant en compte l'univers du discours[147].

Enoncé 2.2 :
Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Analyse des justifications des étudiants qui répondent « Vrai »

Sur les 16 étudiants qui ont donné la réponse « Vrai », 7 n'ont pas justifié leur réponse. Aucun dessin n'est donné comme justification, ou pour appuyer une justification.

[146] Durand-Guerrier (2011)

[147] Voir annexe 2, ligne 66

Tableau T2(4)

Définition du losange	**E37**
Côtés égaux	**E60 :** Car les deux côtés opposés aux diagonales sont égaux
Justifications par les triangles isocèles	**E55** : Car superposition de deux triangles isocèles dont les hauteurs se joignent deux à deux et se coupent en angle droit
Justifications par le carré	**E07, E63 :** le carré est un losange **E20** : Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré, or un carré est un losange, donc ce même quadrilatère est un losange **E52** : Un carré a des diagonales perpendiculaires et un carré est un losange
Autre justification	**E13** : On aurait à faire à un parallélogramme **E51** : les diagonales issues des sommets du quadrilatère sont ses bissectrices

Dans cette série de réponses, 4 étudiants (**E07**, **E20**, **E52**, **E63**) interprètent *un* (un quadrilatère …) comme une quantification existentielle. En effet, 3 prennent le carré pour illustrer ce quadrilatère :

> **E07 et E63** : Car même le carré est un losange.
>
> **E52** : Un carré a des diagonales perpendiculaires et un carré est un losange

E20 montre que le quadrilatère dont il est question dans l'énoncé est bien un losange :

> **E20** : Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré, or un carré est un losange, donc ce même quadrilatère est un losange.

Dans ce raisonnement, l'inférence n'est pas correcte parce qu'une prémisse –la première proposition– est fausse. Cependant, la forme logique sous jacente est correcte. On peut noter cependant un changement du statut de A. Le raisonnement est du type « Tout A est B ; or un B est un C ; donc ce A est un C » (quantification universelle – élément singulier).

L'étudiant **E52** quant à lui, fait plutôt un traitement de la réciproque. Il montre que si on a un losange, ses diagonales sont perpendiculaires.

> **E37** : Par définition

Cette réponse traduit une interprétation de *un* comme un universel. La justification de cet étudiant n'est pas correcte car « avoir les diagonales perpendiculaires » dans l'ensemble des quadrilatères convexes est une condition nécessaire pour être un losange, mais elle n'est pas suffisante.

Analyse des justifications des étudiants qui répondent « Faux »

Sur les 45 étudiants qui ont répondu « Faux » à cet item, 13 n'ont pas donné de justification.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous, les justifications des 32 autres étudiants :

Tableau T2(5)

Côtés égaux	**E59**
Côtés parallèles	**E59**
Dessin	**E36, E47, E49** : dessin d'un trapèze **E29, E38, E53, E54** : dessin d'un cerf volant
Justifications par le carré	**E14, E19, E25, E26, E27, E28, E30, E32, E39, E45, E46, E50, E56, E57, E62, E66**, **E67** (cas du carré) ; **E35** (cas du carré qui n'est pas **forcément** un losange) ; **E06** (Les diagonales du carré sont perpendiculaires).
Autre	**E17** (car c'est le carré) ; **E18** (Pour les mêmes raisons qu'au 2.1 : ce sont les supports des diagonales qui sont perpendiculaires) ; **E41** (le losange n'est pas la seule figure dont les diagonales sont perpendiculaires) ; **E12** ; **E34** (On peut construire un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pas un losange)

Les réponses que nous obtenons nous amènent à faire un classement en quatre catégories que nous nommons :

- **R1** la réponse « le carré est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires ». 20 citent le carré en contre-exemple, sans toutefois utiliser le mot *contre-exemple*. Ces réponses, en dehors de celle de **E35**, traduisent bien la distinction que les étudiants font entre la classe des carrés et celle des losanges : pour les 19 étudiants, ces deux classes sont disjointes ; ils ne considèrent pas la classe des carrés comme une sous-classe des losanges ;

La réponse de **E35** (Cas du carré qui n'est pas **forcément** un losange) laisse supposer qu'il y a des carrés qui sont des losanges et des carrés qui ne le sont pas, c'est-à-dire encore que l'ensemble des carrés n'est pas inclus dans l'ensemble des losanges, mais leur intersection est non vide. Cette réponse n'était pas prévue dans notre analyse a priori.

- **R2** le dessin d'un trapèze ou d'un cerf volant ; 7 le donnent en contre-exemple.
- **R3** toute réfutation de l'énoncé sans support : 3 étudiants sont dans ce cas.

  E41 : Le losange n'est pas la seule figure aux diagonales perpendiculaires

  E12 et E34 : On peut construire un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pas un losange
- **R4** toute autre réponse : 3 étudiants sont concernés. Nous retenons la réponse de **E17** (car c'est le carré) pour qui, un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est le carré. *Un* désigne un élément générique.

Nous présentons le tableau statistique récapitulant les réponses ci-dessus.

Tableau T2(6)

	R1	R2	R3	R4
Effectifs	19	7	3	2

Au vu de ces résultats, nous pouvons dire que 29 étudiants (catégories **R1**, **R2** et **R3**) ont donné à *un*, et de manière assez précise, l'interprétation d'un quantificateur universel.

Les réponses de **E17** aux items **2.1**. et **2.2** montrent que d'après lui, avoir les diagonales perpendiculaires est une propriété caractéristique du carré, ce qui signifie que, du point de vue ensembliste, l'ensemble des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires et égal à l'ensemble des carrés, ce qui n'est pas vrai.

Analyse des justifications des étudiants qui répondent « On ne peut pas se prononcer »

Seul l'étudiant **E61** a donné cette réponse, sans justification.

En conclusion, l'interprétation qui est faite de *un* est majoritairement celle renvoyant à une quantification universelle. Les justifications se font soit par désignation d'un objet, soit par exhibition d'un élément : on a des preuves par contre-exemple, mais cela n'est pas explicité. Ceci montre que la règle du contre-exemple fonctionne pour ces étudiants comme une règle d'action (un invariant opératoire).

Nous en avons l'illustration dans le module au sein du premier groupe :

> **146 E1** : C'est faux. Est-ce qu'on peut trouver un quadrilatère
>
> **147 E2** : Certains trapèzes
>
> **148 E4** : Comme c'est faux, on donne un contre-exemple, c'est tout
>
> **149 E2** : Certains trapèzes
>
> **150 E1** : Même un rectangle contredit ça !

Les étudiants utilisent le mot *contre-exemple*, ce qui renvoie à une quantification universelle. En effet, produire un contre-exemple, permet d'établir ou de justifier la fausseté d'un énoncé universel.

Pendant la mise en commun[148] des réponses des deux groupes, cette interprétation a encore été mentionnée explicitement par les étudiants :

> 67 E3 : On trouvait faux, parce qu'on peut avoir un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pas un losange.
>
> 68 P : Vous avez dit que c'est faux. Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange. Vous dites que c'est faux pourquoi ?
>
> 69 E2 : Parce qu'on peut trouver un contre exemple.

Le mot *contre-exemple* apparait dans la réponse de **E2**. Dans la suite, l'expérimentatrice dessine un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne se coupent pas en leur milieu, ce qui amène **E7** et **E3** à clarifier le statut qu'ils donnent à *un* :

> **78 E7** : c'est faux, puisque notre proposition est universellement quantifiée

Pour **E7**, un est un quantificateur universel ;

> **79 E3** : On a dit un quadrilatère, c'est-à-dire n'importe quel quadrilatère, dont les diagonales

Pour **E3**, *un* introduit un élément générique.

> **80 P** : ça c'est ton interprétation
>
> **81 E3** : puisque c'est

[148] Voir annexe 2, exercice 2, item 2.2

82 E1 : un quadrilatère c'est quel que soit le quadrilatère

E1 quant à lui interprète *un* comme un quantificateur universel

83 E3 : N'importe quel quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires

E3 reste sur le statut de générique

Les étudiants soutiennent que *un* a la signification d'une quantification universelle, ou d'un élément générique. Mais lorsque l'expérimentatrice attire leur attention sur le fait que d'autres interprétations sont possibles, **E2** propose :

85 E2 : c'est il existe.

87 E2 : Madame, vous prenez votre part comme celui-là (générique), et si je prends ma part comme celui-ci (universel) ?

88 P : ça c'est vrai (losange) et ça c'est faux (trapèze)

89 E1 : ce n'est ni vrai, ni faux

La remarque de **E1** ouvre sur la possibilité d'une interprétation conduisant à un énoncé contingent. Les dessins du trapèze et du losange ont été faits pour montrer aux étudiants qu'il était possible d'avoir plusieurs interprétations de *un*. Nous avons à l'occasion introduit la notion d'élément générique, et d'énoncé contingent. Nous sommes revenue sur l''item **2.1** pour préciser le lien entre la vérité d'un énoncé formulée avec un générique, la vérité de sa clôture universelle et la vérité de sa clôture existentielle : lorsqu'un énoncé est donné avec un élément générique, s'il est vrai, alors sa clôture universelle est vraie, de même que sa clôture existentielle. Si on ne peut se prononcer sur la vérité de cet énoncé, alors sa clôture universelle est fausse et sa clôture existentielle est vraie. Si enfin cet énoncé est faux, alors sa clôture universelle et sa clôture existentielle sont fausses.

Nous avons également abordé la question des conditions nécessaire et suffisante, suite à la demande d'un étudiant d'écrire **2.2** sous la forme d'un énoncé conditionnel :

103 E1 : On peut mettre sous forme d'implication ?

107 E4 : Est-ce que ça ne doit pas vouloir dire que *il suffit qu'un quadrilatère ait les diagonales perpendiculaires pour que ce soit un losange* ?

L'analyse du polycopié montre que l'expression « il suffit » est souvent utilisée dans les démonstrations. Cette question de **E4** concernant une autre formulation possible de l'item **2.2** peut être la manifestation d'un besoin de clarifier cette expression ; mais il faut remarquer qu'il n'a pas mis l'énoncé **2.2** sous la forme d'une implication.

Enoncé 2.3 *Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors c'est un carré.*

Les réponses à cet item sont contenues dans le tableau T2(20) en annexe 6, exercice 2

Analyse des justifications des étudiants qui répondent Vrai[149]

Sur les 42 réponses « Vrai », 21 sont données sans justification.

Tableau T2(7) : ***répartitions des étudiants selon leur réponse***

1a : antécédent vrai et déduction math du conséquent,	E06 ; E20 ; E46 ; E47 ; E49 ; E50 ; E52 ; E53 ; E63
2a : classe des quadrilatères et rectangles disjoints, antécédent faux et règle logique	E17 ; E26 ; E19
2d : dessin de rectangle avec les diagonales non perpendiculaires	E36
Réciproque	E12 ; E14 ; E29 ; E38 ; E39
Autre	E18 ; E51 ; E66

Trois étudiants (**E17**, **E19**, **E26**) justifient leur réponse par des arguments logiques, mais la démonstration n'est pas explicitée dans les copies. A partir de notre analyse a priori, nous pouvons faire l'hypothèse que, soit, ils considèrent que la classe des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires et la classe des rectangles sont disjointes, soit, ils considèrent que les classes des carrés et des rectangles sont disjointes.

La réponse de l'étudiant **E17** *:* « Antécédent faux et conséquent vrai, donc implication vraie »

[149] Voir les réponses dans l'annexe 6 exercice 2, item 2.2 (tableau T2(20))

Les justifications que cet étudiant produit aux questions **2.1** (faux, C'est un carré) et **2.2** (faux, car c'est le carré), montrent que pour lui, « *avoir les diagonales perpendiculaires* » est une propriété caractéristique du carré. Par conséquent, nous pouvons dire qu'il fait la distinction entre la classe des rectangles et celle des carrés.

Concernant la vérité du conséquent, nous faisons l'hypothèse qu'elle est établie par le fait que le quadrilatère a des diagonales perpendiculaires, et d'après la conception de cet étudiant, c'est un carré.

La réponse de l'étudiant **E26** : « la proposition de départ est fausse »

Pour cet étudiant, nous pouvons dire que *un* a une interprétation qui renvoie à une quantification universelle, en nous référant à la valeur de vérité Faux qu'il donne en **2.2** et à la phrase « *un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle* » (elles sont toutes les deux fausses avec production de contre-exemple en **2.2**).

Toutes les autres justifications s'appuient sur des connaissances mathématiques.

Six étudiants traitent l'implication $c(x) \Rightarrow (\, d(x)$ et $\mathcal{R}(x))$ qui est la réciproque de $(d(x)$ et $\mathcal{R}(x)) \Rightarrow c(x)$:

> **E06** : « Pour qu'un rectangle devienne un carré, il faut que ses diagonales soient perpendiculaires »

Cet énoncé est de la forme logique $(\mathcal{R}(x) \Rightarrow c(x)) \Rightarrow d(x)$ qui est la réciproque de l'énoncé **2.3.** On pourrait aussi avoir la forme $\forall x, \mathcal{R}(d(x)) \Rightarrow c(x)$. Nous notons l'utilisation du mot « devienne », qui peut renvoyer à un processus de transformation d'un rectangle en un carré[150] : le mot « soit » serait mieux adapté. Notons que la propriété « avoir les diagonales perpendiculaires » est une propriété caractéristique des carrés parmi les rectangles.

> **E12 : «** un carré est un losange particulier donc ses diagonales sont perpendiculaires, de plus, un rectangle possède au moins un angle droit »

> **E14** : « pour que les diagonales d'un quadrilatère soit perpendiculaire, il faut qu'il soit un losange ou un carré, et on sait qu'un carré est un rectangle dont la longueur est égale à la largeur »

> **E38** : « un carré est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires »

Pour le reste des étudiants, il y a toute une variété de réponses, les unes différentes des autres.

---

[150] Ce qui est possible en géométrie dynamique

On a par exemple :

> **E46** : « le seul rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est le carré »

Cette réponse traduit le fait que l'étudiant pose la vérité de l'antécédent et en déduit le conséquent. Il n'évalue pas l'énoncé, mais il affirme plutôt que sous l'hypothèse $(d(x)$ et $\mathcal{R}(x))$, il a nécessairement $c(x)$. « *le* » a ici le statut de générique. On n'a pas besoin dans ce cas de considérer les cas où l'antécédent est faux.

> **E47 et E50** : « par définition du carré »

D'après cette réponse, la définition du carré serait « *un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, qui est un rectangle* ». Or la définition du carré qui est celle d'un quadrilatère qui a quatre côté égaux et un angle droit[151] n'en découle pas immédiatement. En outre, la vérité de l'antécédent est assumée, ce qui ressort également dans les réponses des étudiants :

> **E20 :** Dans un rectangle, si les diagonales ne sont pas perpendiculaires, alors les côtés sont égaux deux à deux. Donc si les diagonales sont perpendiculaires, alors tous les côtés sont égaux et on a donc un carré

> **E49** : Un rectangle a ses quatre côtés perpendiculaires entre eux, si en plus les diagonales sont perpendiculaires, c'est un carré ;

> **E52** : Un rectangle a des diagonales qui se coupent en leur milieu mais ne forment pas un angle droit, or un carré a des diagonales perpendiculaires

L'interprétation que **E20**, **E49**, **E52** font de *un,* renvoie à un générique ou à la quantification universelle. La réponse de **E47** et **E50** renvoie l'interprétation de *un* à une quantification universelle.

Le constat que nous faisons est que :

- certains étudiants ont produit des arguments logiques pour justifier leur réponse, et cette production s'articule avec l'utilisation des connaissances mathématiques ;
- l'interprétation de *un* dans les réponses des étudiants renvoie à un générique ou à une quantification universelle ;
- certaines productions des étudiants consistent à traiter la réciproque de l'énoncé **2.3**.

Analyse des justifications des étudiants qui répondent « Faux »

[151] Manuel de mathématiques 6ème, collection Cosinus, CEPER S.A

Une seule réponse n'est pas justifiée.

Tableau T2(8)

1b : distinction entre la classe des rectangles et des carrés, F	E25 ; E34 ; E48 ;
Réciproque	E64 (justification erronée)
Autre	E05 (Ce quadrilatère peut aussi être un losange) ; E13 (Il faudrait que les diagonales soient égales) ; E30 (Les diagonales d'un quadrilatère convexes peuvent être perpendiculaires) ; E56 (Dans un rectangle, les côtés ne sont pas deux à deux égaux)

Tous les étudiants ayant répondu « Faux », utilisent leurs connaissances mathématiques pour répondre à la question posée.

Leurs justifications laissent penser qu'ils ont considéré que l'antécédent est vrai, et que le conséquent est faux. On peut alors faire l'hypothèse que pour ces derniers, l'énoncé se ramène à : « lorsqu'un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est rectangle, alors c'est un carré ».

On retrouve 5 étudiants qui font la distinction entre les classes des carrés, des rectangles et des losanges, ce qui renforce le fait que le conséquent ne peut se déduire de l'antécédent :

E25 : Rectangle ≠ carré ;

E34 : le rectangle a deux côtés égaux alors que le carré a les quatre côtés égaux ;

E48 : un rectangle ne saurait être un carré ;

E56 : Dans un rectangle, les côtés ne sont pas deux à deux égaux.

Il y a séparation entre la classe des rectangles et des carrés. Nous notons dans la réponse de **E56** l'utilisation de « deux à deux » qui a la signification « chaque fois qu'on prend deux côtés, ils sont égaux ». Cette interprétation diffère de celle de l'étudiant **E1** du groupe 1 (Annexe 4, ligne 136), pour qui la signification est « si je considère un côté, je peux en trouver un autre qui lui est égal ».

E05 : Ce quadrilatère peut aussi être un losange

E05 semble considérer qu'un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires n'est pas nécessairement un carré

La justification de **E56** fait une fois de plus apparaitre l'ambiguïté de l'expression « *deux à deux* ». Étant donné qu'il s'agit d'un rectangle, « *les côtés ne sont pas deux à deux égaux* » serait dans le sens où, si l'on prend deux côtés quelconques, ils ne sont pas nécessairement égaux.

Analyse des justifications des étudiants qui répondent « On ne peut pas se prononcer »

Cinq étudiants on donné cette réponse. Deux étudiants n'ont pas justifié leur réponse (**E60** et **E37**)

Tableau T2(9)

1b : distinction entre la classe des rectangles et des carrés, F	E03 ; E62
Autre	E35

Les justifications des trois étudiants s'appuient sur la distinction qu'ils font entre la classe des rectangles et la classe des carrés. Dès lors, la valeur de vérité du conséquent est « Faux ».

Cette distinction n'est pas suffisante pour justifier la réponse « on ne peut pas se prononcer » :

Les trois réponses sous-entendent qu'on a un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui est un rectangle. De ce fait, on ne peut avoir un carré à cause de la distinction.

Pour évaluer l'énoncé **2.3**, il faut considérer un élément qui vérifie l'antécédent et :

- montrer que le conséquent suit nécessairement : seuls 2 étudiants l'ont fait ;
- donner un contre-exemple pour montrer que c'est faux, ce qui ne ressort dans aucune réponse des étudiants ayant répondu que l'item est faux.

On observe dans les justifications que l'insuffisance des connaissances des étudiants sur les quadrilatères a une influence significative sur les réponses proposées :

- la distinction entre les classes des carrés, des rectangles, des quadrilatères à diagonales perpendiculaires et des rectangles, génère des réponses erronées comme :

a) faux, car un rectangle n'est pas un carré ;

b) faux car les diagonales d'un rectangle ne sont pas perpendiculaires ;

- les réponses sont souvent peu claires ou incomplètes ; c'est le cas des réponses « *vrai car c'est la définition* », «*faux car les diagonales d'un quadrilatère convexe peuvent être perpendiculaires* » ;

Par ailleurs, 6 étudiants mobilisent la réciproque de l'énoncé **2.3** en guise de justification de la réponse « Vrai ».

Dans le module de suivi, de vifs échanges ont eu lieu entre les étudiants au sujet de la distinction entre carré et rectangle[152], ce qui a induit les échanges sur les conditions de vérité de l'implication :

L'étudiant **E3** propose la réponse suivante à l'item :

> **159 E3** : Voilà comment j'ai raisonné ici. Je dis, si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle ça fait vérifier une proposition fausse. Les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle. Un rectangle ne peut pas avoir des diagonales perpendiculaires. Ca c'est une proposition qui est fausse, *alors* c'est l'implication

Il considère que la prémisse est fausse du fait qu'un rectangle ne peut avoir les diagonales perpendiculaires, et utilise une règle logique pour conclure à la vérité de l'implication. Cet avis n'est pas partagé par les autres dont l'un dessine un carré en guise de rectangle.

> **172 E3** : Je n'ai jamais entendu dire ça, que le carré est un rectangle. Dans un rectangle on parle de longueur et largeur, dans un carré on parle de côtés.

Ces discussions les conduisent à la question de la vérité des implications à antécédent faux.

> **183 E1** : C'est vrai. Moi j'ai trouvé que c'est vrai avec mon raisonnement[153]. Lui, il disait qu'une proposition fausse qui entraine une proposition fausse est vraie

On a une mauvaise formulation de la règle logique. Ce qui est exprimé, c'est que dans un énoncé conditionnel, lorsque l'antécédent et le conséquent sont faux, l'énoncé est vrai. Dire qu' « une proposition fausse entraine une proposition fausse » signifie qu'à partir d'une proposition fausse, on peut déduire une autre qui soit fausse, ce qui n'est pas toujours vrai.

---

[152] Voir annexe 4

[153] Il suppose que l'antécédent est vrai et montre que le conséquent suit (voir annexe 2, ligne 143)

Ceci illustre la confusion entre affirmer une implication et faire une déduction à partir d'une implication, confusion déjà repérée par Frege[154] et Russell.

> **184 E2** : Si on se place dans le cas de $P \Rightarrow Q$, si P est faux, on peut s'arrêter. $P \Rightarrow Q$ sera vrai.
>
> **187 E4** : Non, non, comment vous pouvez dire ça ? Tu ne peux pas commencer avec un truc qui est faux ici et que tu dis que tu vas toujours te baser sur ça. C'est pas la même chose

D'après la réplique de **E4**, nous pouvons faire l'hypothèse que, soit ce dernier ne conçoit pas la vérité d'une implication lorsque son antécédent est faux, soit il se place dans l'idée d'une déduction.

En conclusion des trois items, nous pouvons dire que :

1) l'utilisation du langage courant est problématisée par les items de cet exercice :
- les étudiants ont en majorité interprété *un* comme un quantificateur universel, et cela ressort dans les items **2.1** et **2.2** : dans l'item **2.1**, sur trente étudiants qui ont proposé une justification, il y en a vingt-six, et dans l'item **2.2**, il y en a trente-quatre sur quarante-six ;
- le langage courant ne permet pas de rendre compte clairement de la structure des énoncés, comme c'est le cas pour les énoncés conditionnels implicites, les énoncés universellement quantifiés : dans les trois items, l'interprétation de *un* et la prise en compte de l'univers du discours génèrent des structures différentes de ces énoncés. En outre, le traitement de la réciproque de l'énoncé proposé en lieu et place de cet énoncé peut résulter de ce que la structure de l'énoncé n'est pas identifiée ;
- les signifiants de la langue ne renvoient pas toujours aux mêmes signifiés pour les uns et les autres, comme par exemple « *deux à deux* », « *un* », « *rectangle* », …

2) Les étudiants rencontrent des difficultés dans la construction des preuves. L'identification des éléments importants comme les hypothèses, la conclusion, n'est pas avérée. De plus, les inférences établies ne sont pas toujours valides. Plusieurs tentatives de construction de preuve renvoient à une preuve de la réciproque de l'énoncé donné.

[154] Voir chapitre 2, section 2.2

3) La notion de phrase ouverte, d'énoncé contingent ne leur est pas familière. Le mot « proposition » revient assez souvent dans les débats, et le faible effectif des réponses « on ne peut pas se prononcer » à l'item **2.2** en sont des indices.
4) Il y a beaucoup d'erreurs mathématiques qui traduisent l'insuffisance des connaissances des quadrilatères.

1.2.2 Analyse a posteriori des réponses des élèves et mise en perspective avec les réponses des étudiants

Soixante et un élèves ont participé à ce test.

Tableau T2(10) *: distributions des réponses des élèves et des étudiants*

	Enoncé 2.1		Enoncé 2.2		Enoncé 2.3	
	Elèves	**Etudiants**	**Elèves**	**Etudiants**	**Elèves**	**Etudiants**
V	88,5%	85,3%	19,6%	23,5%	41%	61,8%
F	1,6%	4,4%	29,5%	66,2%	36,2%	13,2%
ONPPSP	1,6%	1,5%	37,7%	1,5%	11,4%	7,4%
Pas de réponse	8,3%	8,8%	13,2%	8,8%	11,4%	17,6%

Comparaison des deux résultats

Les distributions des réponses en pourcentage de l'item **2.1** sont sensiblement les mêmes pour les deux populations. À l'énoncé **2.2**, plus d'un tiers des élèves répondent « on ne peut pas se prononcer » alors que seul un étudiant avait donné cette réponse. Le pourcentage d'élèves donnant la réponse « Vrai » est sensiblement le même tandis que le pourcentage d'élèves donnant la réponse « Faux » est de moins d'un tiers contre deux tiers pour les étudiants. Concernant l'énoncé **2.3**, à peine plus de 40% des élèves donnent la réponse « Vrai » contre plus de 60% chez les étudiants, tandis que la réponse « on ne peut pas se prononcer » est un peu moins représentée chez les étudiants que chez les élèves.

Concernant les taux de non réponses des élèves, comparés avec les taux de non réponses des étudiants, ils sont identiques pour l'item **2.1**, il est plus élevé pour **2.2** et plus faible pour **2.3**.

Dans la suite, nous analysons les différentes réponses et justifications des élèves en nous appuyant sur notre analyse a priori, puis nous mettons ces résultats en perspective avec ceux des étudiants.

<u>Enoncé 2.1</u> : Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires ;

Les réponses VRAI justifiées

Tableau T2(11)

Définition du losange	L36
Propriété du losange	L03
Côtés égaux	L04, L15, L20, L23, L28, L35, L37, L39
Côtés parallèles	L53, L17
Dessin	L06, L11, L22, L31, L61, L27
Justifications par les triangles isocèles	L19, L34, L40
Justifications par le carré	L42, L45, L59, L08
Justifications à l'aide des angles droits	L21, L24, L29, L30, L32, L33, L38, L44, L46, L49, L51, L54, L56
Autre justification	**L10** (car il y a au moins deux côtés associés) ; **L25** (car 4 côtés deux à deux égaux, ainsi chaque est perpendiculaire à l'autre) ; **L26** (car les sommets des angles sont toujours opposés deux à deux).

La réponse FAUX

L14	Faux car les côtés sont égaux deux à deux dans certains cas et le losange est une forme irrégulière de quadrilatère

La réponse « on ne peut pas se prononcer »

L05	On peut pas se prononcer car le losange ayant 4 côtés égaux, un quadrilatère peut aussi avoir des diagonales perpendiculaires

Il n'y a que 5 élèves qui n'ont pas donné de réponse à cet item. Sur 61 élèves présents au test, 54 ont répondu que la phrase est vraie et 41 ont proposé une justification. Un seul a dit explicitement que c'est une propriété des losanges. On pourrait le rapprocher des élèves **L21**, **L24**, **L29**, **L30**, **L32**, **L33**, **L46**, **L51**, **L52** qui ont justifié leur réponse en énonçant la même propriété en des termes différents : « les diagonales du losange se coupent en formant un angle ». Nous rencontrons quelques justifications incomplètes :

> Vrai, car les 4 côtés sont égaux (**L04**, **L15**, **L20**, **L23**, **L28**, **L35**, **L37**, **L39**)
>
> Vrai, définition (**L36)**

Et des justifications erronées :

> Vrai car 4 côtés 2 à 2 égaux, ainsi chaque est perpendiculaire à l'autre (**L25**)
>
> Vrai car le losange est un parallélogramme et les diagonales d'un parallélogramme se coupent en formant un angle droit (**L44**)
>
> Vrai car le losange est un carré et les diagonales d'un carré sont toujours perpendiculaires (**L42**)

Dans sa justification, ce dernier élève rentre la classe des losanges dans celle des carrés, ce qui est le contraire. On retrouve ce classement chez deux autres élèves.

Quelques preuves pragmatiques apparaissent comme par exemple celle de l'élève **L34** :

> Vrai, car le losange est formé de deux triangles isocèles et semblables. En prolongeant la hauteur du premier triangle sur le second, on retrouve la hauteur de ce dernier et la hauteur des deux triangles liant les deux sommets qui n'est autre qu'une diagonale est perpendiculaire à la base commune aux deux triangles qui est aussi une diagonale, d'où les diagonales sont perpendiculaires dans le losange (**L34**)

En général, nous retrouvons ici les mêmes justifications que nous avions chez les étudiants : pratiquement tous justifient à l'aide de leurs connaissances mathématiques.

<u>Enoncé 2.2</u> : ***Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.***

Les réponses « on ne peut pas se prononcer » justifiées

Tableau T2(12)

Parallélogramme	L24 (dans le parallélogramme aussi les diagonales se coupent en formant un angle droit) ;
Côtés égaux	L15 **(**les 4 côtés ne sont pas égaux) ;
Contre-exemple	L10; L14 ; L33 ; L44 ; L27 (Oui si c'est carré et non si c'est un rectangle parce qu'il n'a pas 4 côtés égaux) ; L49 (car se vérifie pour d'autres quadrilatères que le losange) ;
Autre justification	**L01** ; **L36** (dépend de la position des points que l'on choisit dans le quadrilatère) ; **L39** (pour un quadrilatère convexe, seulement deux côtés sont parallèles entre eux) ; **L46** (car il faudrait que les segments de celui-ci soient deux à deux égaux) ; **L60** (Pas toujours vrai) ;

Les réponses VRAI justifiées

Tableau T2(13)

Côtés égaux	L28, L37
Justifications à l'aide des angles droits	L32
Autre justification	**L13** (car dans un carré ou un losange les diagonales ne sont pas perpendiculaires, mais dans le losange elles le sont) ; **L23** (car le quadrilatère admet à ses sommets des angles de même mesure lorsque la diagonale coupe ces angles) ; **L56** (car un losange a des diagonales perpendiculaires donc un quadrilatère ayant cette propriété est un losange) ; **L57** (car ses angles sont opposés et complémentaires) ; **L29** (car tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle)

Les réponses FAUX justifiées

Tableau T2(14)

Parallélogramme	L09 (parallélogramme)
4 Côtés égaux	**L05 ;**
Justifications par le carré	L11 (le carré) ; L20 (le carré) ; L26 (le carré) ; L40(le carré) ; L41 (le carré)
Autre justification	L25 (un losange a 4 côtés deux à deux égaux ce qui n'est pas le cas dans un quadrilatère convexe) ; L45 (Faux, un quadrilatère convexe ne peut pas être un losange) ; L54 (Faux car dans un losange les côtés sont deux à deux égaux et les diagonales sont perpendiculaires). L08 (le rectangle en contre-exemple).

Du point de vue langagier, dans certaines justifications de la catégorie Faux, on a l'impression que les élèves traitent la phrase comme si l'item était l'affirmation de la définition du losange, et que cette définition était incomplète :

> **L05** : Faux car le losange est formé de 4 côtés égaux
>
> **L25** : Faux car un losange a 4 côtés deux à deux égaux ce qui n'est pas le cas dans un quadrilatère convexe
>
> **L53** : Faux car les côtés n'ont pas la même longueur

La distinction entre le carré et le losange est très marquée. La règle du contre-exemple est utilisée en prenant en compte cette distinction :

> **L11 :** Faux car les diagonales du carré qui est un quadrilatère convexe sont perpendiculaires ; il existe au moins un quadrilatère convexe (carré) dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne soit pas un losange. (Dessin du carré)
>
> **L40** : faux, car un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires peut être un carré

La plupart des réponses reflètent l'insuffisance des connaissances mathématiques relatives aux quadrilatères.

L'une des raisons du choix de la réponse « on ne peut pas se prononcer » porte sur le fait que, d'une part, ce qu'ils estiment être la définition du losange n'est pas complète, et d'autre part, ils proposent d'autres objets géométriques (bien que pas toujours adaptés) dont les diagonales sont perpendiculaires. Nous pouvons alors faire l'hypothèse que dans ce deuxième cas, *un* désigne un générique :

L24 : on ne peut pas se prononcer car dans le parallélogramme aussi les diagonales se coupent en formant un angle droit

L27 : Oui si c'est carré et non si c'est un rectangle parce qu'il n'a pas 4 côtés égaux

L33 : on ne peut pas se prononcer car vrai pour d'autres quadrilatères tels que le rectangle et le carré

Quelques-uns produisent un raisonnement appuyé sur la réciproque de l'énoncé **2.2**. Par exemple, on des réponses telles que :

L56 : Vrai car un losange a des diagonales perpendiculaires donc un quadrilatère ayant cette propriété est un losange ;

L13 : Vrai car dans un carré ou un losange les diagonales ne sont pas perpendiculaires, mais dans le losange elles le sont ».

Par rapport aux étudiants, ils sont plus d'un tiers à avoir répondu « on ne peut pas se prononcer (contre 1 chez les étudiants). On a une interprétation de *un*, autre que celle d'une quantification universelle, elle renvoie à un élément générique. 30% environ des élèves ont répondu que l'énoncé est faux, alors que deux tiers des étudiants ont donnés cette réponse, avec principalement le même argument : *un carré a des diagonales perpendiculaires mais n'est pas un losange*, qui est la production du contre-exemple inapproprié « carré ».

<u>Enoncé 23</u>. : Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré.

Les réponses « Vrai » justifiées

Tableau T2(15)

1a : antécédent vrai et déduction math du conséquent, V	L11
1c : antécédent vrai et dessin carré, V	L11 ; L31 ;
2d : dessin de rectangle avec les diagonales non perpendiculaires,	L11
Réciproque	L20 ; L14 ; L36 ; L53
Autre	L01 ; L03; L04 ; L10 ; L31; L34 ; L37 ; L39 ; L51 ; L45 ; L57

Nous avons recensé 25 réponses Vrai dont 18 ont été justifiées. Parmi les justifications proposées par les élèves, quatre mobilisent la réciproque de l'énoncé **2.3**.

Un élève énonce la réciproque comme justification :

> **L20** : Vrai car un carré est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ;

Quatre élèves **(L14**, **L20**, **L36**, **L53)** partent de ce qu'ils ont un carré pour conclure à la perpendicularité des diagonales, sans énoncer explicitement cette réciproque.

Quatre élèves (**L01**, **L04**, **L10**, **L34**) partent du fait que l'antécédent est vrai (*un rectangle qui a des diagonales perpendiculaires*) et énoncent la conclusion sans toutefois donner une preuve de ce qu'ils disent.

L11 fait une preuve par ostension : il dessine un rectangle qui n'est pas un carré en précisant que les diagonales ne sont pas perpendiculaires, et il dessine un carré en marquant les diagonales perpendiculaires. Il montre ainsi qu'un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ne peut être qu'un carré.

L'élève **L03** donne une justification non valide que nous allons expliciter à l'aide du langage formel :

> « Vrai, le rectangle peut être un carré alors qu'un carré ne peut jamais être un rectangle »

La formalisation de cet énoncé dans l'ensemble des quadrilatères est :

$$(\exists x, \mathcal{R}(x) \wedge c(x)), \text{ et } (\forall x,\ non\ (c(x) \wedge \mathcal{R}(x))$$

On a par instanciation existentielle de a sur x :

$$(c(a) \wedge \mathcal{R}(a)) \wedge non\ (c(a) \wedge \mathcal{R}(a))$$

qui est toujours faux.

Du point de vue ensembliste cette phrase signifie que, l'intersection de la classe des carrés et des rectangles est à la fois non vide et vide, il ne prend pas en compte la symétrie entre les formules « quelque A est B » et « quelque B est A ».

Concernant les réponses Faux, 4 élèves n'ont pas donné de justification.

Les réponses « Faux » justifiées

Tableau T2(16)

1b : antécédent vrai et distinction carré/rectangle, F	L05 ; L08 ; L15 ; L19 ; L25 ; L28 ; L29 ; L30 ; L38 ; L42 ;
2c : antécédent faux et implication courante, F	L32 ; L33 ;
Autre	L07 ; L17 ; L52 ; L46 ; L59

On retrouve la principale raison qui figurait dans les justifications des étudiants, à savoir la distinction entre la classe des carrés et celle des rectangles :

> **L08**, **L15**, **L25**, **L30** : Faux Car dans un carré les côtés sont successivement égaux alors que dans le rectangle les côtés sont deux à deux égaux.

Nous faisons l'hypothèse que pour ces étudiants, l'antécédent et le conséquent ne peuvent être simultanément vraies du fait de la distinction entre la classe des carrés et des rectangles.

Une autre justification qui porte sur la perpendicularité des diagonales est proposée :

L09 : le rectangle n'est pas un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires ;

L28 : lorsque les diagonales sont perpendiculaires, il ne peut s'agir d'un rectangle ;

L17 : le rectangle a des diagonales non perpendiculaires

Ces réponses semblent correspondre à « l'antécédent est nécessairement faux ». On retrouve le théorème-en-acte selon lequel, *l'implication est fausse lorsque l'antécédent est faux*.

Les réponses de **L09** et **L28** excluent les carrés de la classe des rectangles : on a une fois de plus une distinction mais cette fois implicite entre les deux classes.

Comme les étudiants, les élèves ont produit des preuves qui ne sont pas toujours correctes. C'est par exemple le cas de l'élève **L56** sur lequel nous nous attardons **:**

(1) un rectangle est un quadrilatère convexe et (2) un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange. Or (3) le carré est un losange donc la proposition est vraie[155] ;

Nous formalisons son raisonnement ainsi en supposant que *un* désigne une quantification universelle implicite, mais auparavant, nous rappelons la signification des lettres que nous allons utiliser :

Q désigne l'ensemble des quadrilatères convexes, $\mathcal{R}$ est la propriété « être un rectangle », d est la propriété « avoir les diagonales perpendiculaires », $\mathcal{L}$ est la propriété « être un losange », et c signifie « être un carré ».

$\mathcal{R}(x) \Rightarrow x \in Q$ (1);

$((x \in Q) \wedge d(x)) \Rightarrow \mathcal{L}(x)$ (2)

Or, $c(x) \Rightarrow \mathcal{L}(x)$ (3)

La conclusion, $[d(x) \wedge \mathcal{R}(x) \Rightarrow c(x)]$ est vraie.

Pour sa preuve, **L56** énonce deux prémisses : la prémisse (1) qui est vraie et la prémisse (2) qui est fausse (il s'agit d'une erreur mathématique). On peut penser qu'il fait implicitement l'inférence correspondant à $(\mathcal{R}(x) \wedge d(x)) \Rightarrow \mathcal{L}(x)$ (4)

qui suit logiquement de (1) et (2).

Mais cependant de (4) et (3)

$[(\mathcal{R}(x) \wedge d(x)) \Rightarrow \mathcal{L}(x)]$ (4)

$[c(x) \Rightarrow \mathcal{L}(x)]$(3)

on ne peut pas déduire $[d(x) \wedge \mathcal{R}(x) \Rightarrow c(x)]$.

Cet élève commet une erreur de logique lorsqu'il conclut que la proposition est vraie.

---

[155] C'est nous qui avons numéroté les phrases

Les élèves qui ont répondu « on ne peut pas se prononcer », pensent que l'antécédent est faux. De ce fait, on peut faire l'hypothèse que pour ces derniers, la phrase n'a pas de valeur de vérité.

A la suite des analyses des réponses des élèves, nous pouvons établir les constats suivants :

- les réponses des élèves sont basées sur leurs connaissances des propriétés des quadrilatères. Elles mettent en évidence l'insuffisance de ces connaissances ;
- l'interprétation de *un* comme un générique apparait dans ce groupe, ce que nous n'avons pas rencontré chez les étudiants. Ceci conduit à une proportion significative de réponse « on ne peut pas se prononcer » à l'item **2.2**.
- les énoncés conditionnels sont interprétés dans le cadre de la logique naturelle : lorsque l'antécédent est faux, soit on ne peut rien dire, soit l'implication est fausse ;
- quelques élèves traitent la réciproque de l'item en lieu et place de cet item ;
- les élèves éprouvent des difficultés à produire des preuves correctes.

Conclusion

L'exercice 2 a été proposé aux élèves et aux étudiants dans le but de problématiser l'usage de l'article *un* dans les énoncés mathématiques. Cet exercice comporte trois énoncés écrits en langue naturelle, où les objets sont introduits par *un*. Selon l'interprétation à laquelle *un* renvoie –quantification universelle, quantification existentielle ou élément générique, les réponses peuvent varier.

Des phénomènes communs ont été observés dans les deux populations :

- plusieurs tentatives de constructions de preuve amènent les élèves et les étudiants à traiter la réciproque de l'énoncé qui est en jeu, et à souvent établir des inférences non valides ;
- la notion de contre-exemple est utilisée de façon implicite. Elle est explicitée chez les étudiants au cours du module de suivi ;
- les réponses que les élèves et les étudiants produisent sont basées sur leurs connaissances des propriétés des quadrilatères, et ceci met en évidence l'insuffisance de ces connaissances. La distinction entre la classe des carrés, des rectangles et des losanges produit des réponses erronées : dans certains cas, le traitement du troisième item fait émerger le conditionnel courant, du fait de la fausseté supposée de l'antécédent.

Quelques phénomènes observés sont spécifiques à chaque groupe:

- près de 67% des étudiants font un usage de *un* qui renvoie à une quantification universelle contre 30% des élèves à l'énoncé **2.2**. Dans ce même item, près de 40% des élèves utilisent *un* comme un générique contre 1,5% des étudiants. Ce résultat pourrait entrer en contradiction avec les pratiques des enseignants du secondaire que nous avons rencontrés, qui utilisent *un* comme un quantificateur universel ;
- l'explicitation de l'argument logique pour justifier qu'une implication est vraie apparait chez les étudiants, ce qu'on ne rencontre pas chez les élèves. Nous faisons l'hypothèse que cette connaissance provient des enseignements que les étudiants ont reçus en début d'année.

2 Exercice 5

2.1 Analyse a priori

Nous donnons ci-dessous l'énoncé tel qu'il était donné dans les questionnaires étudiants et élèves.

Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle peut être utilisée ou non pour compléter la phrase qui suit, afin d'obtenir une définition mathématique correcte. Vous justifierez soigneusement vos réponses :

*« Une fonction numérique f de la variable réelle x est majorée sur un intervalle **I** de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels* si et seulement si*…………………………………..»,*

***5.1** Pour tout x élément de I, f(x)≤M*

***5.2** Si x est un élément de **I**, alors f(x)≤M*

***5.3** Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que f(x)≤M*

***5.4** Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, f(x)≤M*

***5.5** Si x est un élément de **I**, alors il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Le questionnaire

Dans l'énoncé proposé aux élèves, nous avons utilisé le terme proposition ; en toute rigueur le terme assertion aurait été plus approprié, le statut logique des cinq énoncés proposés étant celui de phrase ouverte (les variables libres sont ici f et I). Néanmoins, nous faisons l'hypothèse que ceci n'a pas eu d'incidence sur les réponses des élèves ; en effet le terme « proposition » est utilisé dans la classe de mathématiques pour désigner en général différents types d'énoncés bien qu'en général une définition soit donnée.

Dans cet exercice, il s'agit de déterminer parmi les assertions proposées écrites en langage mixte, celle qui définit correctement la relation[156] « f est majorée sur l'intervalle I », au sens où un couple (f, I) satisfait cette relation *si et seulement* s'il satisfait l'assertion considérée.

La définition de « f est majorée sur I » ne doit pas contenir d'autre variable libre que f et I. Parmi les cinq énoncés proposés, seul l'énoncé **5.4** correspond à la définition demandée.

Cet exercice a pour but de :

- préciser la distinction à faire entre la définition d'un objet, d'une propriété d'objet ou d'une relation faisant intervenir cet objet : définir la relation « f est majoré sur I » fait intervenir implicitement l'objet « majorant ». Affirmer qu'un couple $(f,\ I)$ donné satisfait la relation ci-dessus équivaut à affirmer l'existence d'un réel M (un objet) ayant la propriété d'être un majorant de f sur I. « être un majorant de f sur I » est une relation entre un nombre réel, une fonction numérique et un intervalle ; elle se formalise par la phrase ouverte en f, I et y ci-dessous:
  « $\forall x \in I, f(x) \leq y$ » ;
- vérifier si les étudiants font bien la distinction entre les différents statuts des lettres dans les énoncés, et s'ils se conforment ou non à la pratique habituelle de la quantification implicite des énoncés conditionnels. Il est possible qu'ils identifient les phrases **5.1** à **5.2**, et **5.3** à **5.5**, ce qui revient à considérer que les phrases **5.2** et **5.5**. sont implicitement quantifiées. Cela nous amène à regarder si les étudiants font la distinction entre les phrases ouvertes, leurs clôtures universelle et existentielle.
- attirer l'attention sur l'importance de l'explicitation des quantificateurs ;
- marquer la différence entre les énoncés de la forme $(\forall x, \exists y, P(x,y))$ et $(\exists y, \forall x, P(x,y)$. Pour beaucoup d'étudiants, ces énoncés ont la même signification (Chellougui, 2004) ;
- faire ressortir la notion de condition nécessaire et condition suffisante. La confusion entre équivalence et implication est contextuelle, comme l'a montré V. Durand-Guerrier (1996) ;

[156] Cette relation s'exprime par une phrase ouverte qui peut être satisfaite ou pas par un couple $(f, I\ )$ donné où I est un intervalle de l'ensemble des nombres réels et f est une fonction numérique définie sur I .

- problématiser le passage du langage courant au langage formel et mixte : l'étudiant doit pouvoir reconnaitre une formulation écrite dans le langage formel (Selden & Selden, 1995).

Dans toutes les propositions de réponse, l'énoncé « $f(x) \leq M$ » est présent. Il est possible que certains étudiants considèrent que ceci suffit pour définir la relation, soit qu'ils ne prennent pas en compte les quantifications nécessaires, soient qu'ils considèrent qu'elles peuvent rester implicites, ce qui revient à ne pas prendre en compte le fait que l'ordre d'apparition des quantificateurs affecte la signification.

Les réponses auxquelles on peut s'attendre :

Item 5.1 : C'est un énoncé ouvert qui contient trois variables libres M, f et *I*.

Elle ne correspond donc pas à la définition demandée.

On peut néanmoins trouver la réponse « Oui » en relation avec la pratique qui consiste à définir une relation en introduisant un élément générique du domaine considéré, comme par exemple :

> « soit M un réel. *M* est un majorant de f sur *I* si et seulement si $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
> On dit alors que f est majoré par *M* ».

Dans l'énoncé « $\forall x \in I, f(x) \leq M$ », l'étudiant reconnait la définition d'un majorant de f et conclut à son existence, ce qui n'est pas avéré.

Item 5.2 : On est en présence d'un énoncé ouvert qui comporte quatre variables libres f, *I, x* et *M*. Elle ne correspond donc pas à la définition demandée.

Notons que *x* peut être interprétée comme une variable liée par une quantification universelle implicite, ce qui ferait de **5.2** une reformulation de **5.1**. Certains étudiant ayant accepté **5.1** pourraient rejeter cette assertion parce qu'il manque le quantificateur universel ; ceci serait alors un indicateur de non conformité à la pratique habituelle de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels.

L'étudiant peut répondre « Oui » parce que, comme dans **5.1**, il a identifié la formule « $\forall x \in I, f(x) \leq M$ » qui correspond à la définition d'un majorant M. Il considère par ailleurs que l'énoncé est universellement quantifié, et n'est qu'une reformulation de **5.1**. Il répondrait « Oui » à l'item **5.1** aussi.

Les étudiants ayant rejeté l'énoncé **5.1** devraient rejeter également l'énoncé **5.2**.

Item 5.3 : Il s'agit d'un énoncé ouvert comportant exactement deux variables libres f et *I*. C'est une condition nécessaire pour que la fonction f soit majorée sur I, mais cette condition n'est pas suffisante ; en effet, un couple (*f*, *I*) peut satisfaire cet énoncé sans que la fonction soit majorée sur *I*. Dans la définition formelle, l'ordre des quantificateurs n'est pas respecté, ce qui induit que « M dépend de x ». Cette assertion ne convient donc pas pour définir la relation considérée.

La réponse « Oui » peut néanmoins apparaître :

(1) il y a une erreur sur la signification de la relation : dire que f est majoré sur I signifie que tout élément $f(x)$ pour $x \in I$, est majoré. Les étudiants choisissant **5.3** et rejetant **5.4** pourraient être dans ce cas ;

(2) l'ordre des quantificateurs n'est pas pris en compte: les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et $\exists y, \forall x, P(x,y)$ ont la même signification, ce qui en général n'est pas vrai. On peut faire l'hypothèse que les étudiants ayant choisit **5.3** et **5.4** sont dans ce cas.

<u>Item 5.4</u> : Cette assertion est la seule des cinq assertions proposées qui correspond à la définition de la relation « f est majorée sur I ».

La réponse « Oui » : on peut faire l'hypothèse que l'étudiant connait la définition d'une fonction majorée ; s'il a en outre rejetée l'item **5.3**, on peut faire l'hypothèse qu'il fait bien la distinction entre les énoncés $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et $\exists y, \forall x, P(x,y)$. Par contre, on peut faire l'hypothèse que les étudiants ayant acceptés les deux items **5.3** et **5.4** ne prennent pas en compte l'ordre des quantificateurs.

La réponse « Non » **:** Certains étudiants ayant accepté **5.3** pourraient rejeter **5.4**, ceci pouvant être un indicateur d'une mauvaise compréhension de la signification de la relation.

<u>Item 5.5</u> : C'est un énoncé ouvert qui comporte trois variables libres x, f et I. Il ne correspond donc pas à la définition. Il peut néanmoins être considéré comme un énoncé comportant exactement deux variables libres f et I en considérant que l'énoncé conditionnel est implicitement quantifié universellement sur la variable x. Dans ce cas, **5.5** est une reformulation de l'assertion **5.3** ; c'est une condition nécessaire pour que f soit majorée, mais elle n'est pas suffisante. Les étudiants ayant rejeté **5.3** devraient rejeter **5.5**.

Les étudiants ayant accepté **5.5** et considérant une quantification universelle implicite sur x devraient accepter aussi **5.3** ; néanmoins, certains étudiant ayant accepté **5.3** pourraient rejeter **5.5** parce qu'il manque le quantificateur universel ; ceci serait alors un indicateur de non conformité à la pratique habituelle de quantification universelle implicite des énoncés conditionnels, ceci d'autant plus si c'est aussi le cas pour **5.1** et **5.2.**

Il est possible que des étudiants ne donnent aucune réponse à cet item.

Le module de suivi

Dans cet exercice, le concept de quantification est central car il permet de préciser le statut logique des lettres contenues dans les différents énoncés proposés, et de connaitre leur nature par explicitation de l'univers du discours.

Dans le module de suivi on pourra :

- travailler sur le statut de la lettre dans les énoncés : dans un énoncé, certaines lettres sont dans le champ d'un quantificateur, ce sont les variables liées. D'autres, ne sont pas dans le champ d'un quantificateur, ce sont les variables libres. D'autres enfin sont désignées, ce sont les éléments génériques lorsqu'ils représentent les objets d'une classe, ou des objets singuliers lorsqu'ils désignent un objet particulier ;
- expliciter les ambiguïtés générées par la pratique de la quantification implicite : les énoncés **5.1** et **5.2** sont différents du point de vue logique. Mais du point de vue langagier, ils peuvent renvoyer à un même signifié, pour autant que l'on considère une quantification qui soit implicite ;
- expliciter les quantifications multiples avec alternance de quantificateurs, et travailler sur la relation entre ordre des quantificateurs et signification de l'énoncé (dépendance des variables).

Dans le questionnaire adressé aux élèves, nous leur avons demandé de donner la négation de « f est croissante », puis de l'écrire en langage formel.

Nous avons dans la section 1.2.2.3 du chapitre 2, évoqué la mise en correspondance de la négation avec le contraire des mots de la langue qui peut être erronée. Nous faisons l'hypothèse qu'à travers cet item, cette correspondance pourra être précisée.

En classe de terminale l'accent est mis sur l'étude des fonctions dérivables, car la dérivée d'une fonction est le principal outil qui permet d'étudier la monotonie de cette fonction.

Dans cet item, nous n'avons pas précisé que la fonction est dérivable. Toutefois, nous faisons l'hypothèse que certains élèves mobiliseront la dérivée pour exprimer que la fonction n'est pas croissante.

Les réponses attendues pour la négation :

- f n'est pas croissante qui correspond à la forme négative dans la grammaire française et qui est la réponse correcte ;
- f est décroissante, qui consiste à donner le contraire en lieu et place de la négation ;

- f est constante ou décroissante. Nous pouvons l'expliquer par le fait que lorsqu'on définit la monotonie d'une fonction, on parle de croissance, de décroissance ou même de constance ;
- f est strictement croissante.

Les réponses attendues pour l'écriture formelle de la négation :

- $\exists(a,b) \in I^2, (a < b \wedge f(a) \geq f(b))$ qui est la formulation correcte et qui correspond à la négation de la définition de « f est croissante » qui est donnée dans les classes antérieures ;
- $f' < 0$ sur I qui correspond au contraire exprimé à l'aide de la dérivée, et peut s'expliquer par le fait que, dire que f est croissante sur I équivaut à dire que $f' \geq 0$ sur I : l'étudiant considère la négation de $f' \geq 0$;
- $\forall(a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ qui correspond à « f est décroissante » ;
- $f' < 0$ ou $f' = 0$ qui correspond à la réponse « f est décroissante ou constante » ;

2.2 Analyses a posteriori

2.2.1.1 Analyse des réponses des étudiants et du module de suivi

Item 5.1 : *Pour tout x élément de I, f(x)≤M*

Les réponses des étudiants sont contenues dans le tableau T5(3), en annexe 6.

À cet item, 12 personnes n'ont pas donné de réponse. Sur 56 étudiants qui ont répondu, 5 pensent que l'énoncé **5.1** peut compléter la phrase, et les 51 autres ne le pensent pas.

Les justifications des réponses Non :

Dans cette catégorie de réponses, c'est-à-dire, des étudiants (51) qui ont dit qu'il n'est pas possible de compléter la phrase avec **5.1**, 37 ont donné une justification qui en général, interroge le statut, la nature et l'introduction de la variable M.

1- Ils affirment l'absence d'un quantificateur liant M:

E57 : Non, on ne connait pas l'existence de M

E01 et **E42** sont plus explicites et précisent le quantificateur absent sans toutefois préciser sa place dans l'énoncé :

E01, **E42** : non, il manque « *il existe M* »

2- La question de l'introduction de la lettre M est posée. Vingt-et-un étudiants sont concernés par cette interrogation :

Non, M non défini (15 étudiants)

Non, on ne sait pas d'où sort M (5 étudiants)

Non, car on ne sait d'où vient M. Est-il unique ?

Nous pouvons dire qu'ils savent que M doit être introduit. On peut faire l'hypothèse que certains pourront l'introduire par un quantificateur existentiel, un quantificateur universel, ou encore comme un élément générique ce qui confère dans chacun des cas un statut précis de M.

3- Le statut de M doit être précisé d'après l'étudiant **E16** :

E16 : On ne sait pas si M est quelconque dans $\mathbb{R}$

Cette réponse montre une incertitude dans le statut de la lettre M, qui pourrait être un élément générique ou un élément singulier.

Pour les étudiants **E19**, **E39**, si la lettre M a le statut d'élément générique, alors l'énoncé devient contingent :

E19 : Pour M pris quelconque, cela ne marche pas toujours

E39 : non, $f(x)$ peut être supérieur à M à cause du quantificateur universel

De même, la nature de M doit être précisée (**E05** : M peut désigner une matrice pour certains) ; le domaine des objets doit être connu.

Les justifications des réponses Oui :

Cinq étudiants répondent qu'ils peuvent compléter la phrase avec **5.1**, se référant à la manière dont on énonce la définition de « f est majorée » dans les cours[157] :

« *Soit M un réel et f une fonction définie sur un intervalle I. M est un majorant de f si et seulement si « pour tout x élément de I, $f(x) \leq M$ ». On dit alors que la fonction f est majorée par M.* »

Le réel M est introduit comme un générique, puis on indique ensuite la caractérisation d'*un* majorant de f, l'affirmation de M majorant reste implicite.

[157] Source, cours de terminale C

On peut faire l'hypothèse que c'est ce qui a motivé la justification des étudiants **E06** et **E54** qui ont énoncé l'équivalence entre la caractérisation de l'objet majorant et l'affirmation de M est majorant de f **:**

> **E06** : oui, si on désigne par M ce majorant.
>
> **E54** : oui, car $\forall x \in I, f(x) \leq M \Leftrightarrow M$ est majorant de I

Pour l'étudiant **E66**, il y a la nécessité de préciser le domaine de M.

> « vrai en supposant M appartenant à $\mathbb{R}$ »

Pour cet item, nous concluons qu'en l'absence d'un marqueur explicite de quantité, les commentaires des étudiants qui portent essentiellement sur la lettre M sont de plusieurs types. Nous les reformulons :

- cette lettre devrait être introduite et liée par un quantificateur ;
- son statut est inconnu ; elle peut être un élément singulier ou encore un générique. Dans le deuxième cas, on obtient un énoncé contingent qui ne peut pas être la définition de « f est majorée sur I » ;
- le domaine de la lettre M doit être précisé ;
- la propriété « être majoré » est subordonnée à la définition de l'objet *majorant*.

<u>Item 5.2</u> : *Si x est un élément de* ***I****, alors f(x)≤M*

Les justifications des réponses sont contenues dans le tableau T5(4) en annexe 6

58 étudiants ont donné une réponse à cet item, et 38 (36 ont dit *non* et 2 ont dit *oui*) ont proposé des explications qui ne sont pas très éloignées de celles produites à l'item 1. Un point marquant est que, en dehors des étudiants **E42** et **E66** dont les réponses semblent donner à *un* la signification d'une quantification existentielle (**E42** : non, cette définition exclut certains $f(x)$ tels que $x \in I$, **E66** : non, le fait que $x \in I$ ne garantit pas $f(x) \leq M$), personne ne fait allusion de façon explicite au quantificateur universel sur x qui a disparu. On pourrait alors se poser la question de savoir si c'est un effet de la quantification implicite, où le terme *un* est interprété comme renvoyant à un quantificateur universel. Nous faisons l'hypothèse que c'est le cas pour l'étudiant **E54**, qui explicite une équivalence entre les deux formulations.

Par ailleurs, lors des échanges pendant le module de suivi, deux questions se posent pour la variable M :

- la manière dont il est introduit dans l'énoncé ;
- le moment où il est introduit : avant ou après l'introduction de x.

3 E1 : Est-ce qu'on peut dire qu'une fonction numérique f de la variable réelle x est majorée sur un intervalle I de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels si et seulement si pour tout x élément de I, $f(x) \leq M$?

4 E2 : Je pense que ce n'est pas vrai

5 E4 : Ce n'est pas vrai

6 E1 : Pourquoi ?

7 E2 Parce que dans ce cas-ci … parce que là c'est comme si tu prends d'abord les *x* avant d'aller… On doit fixer d'abord M ! C'est *M* qu'il faut fixer, et ici-là

La variable M doit être « fixée », c'est-à-dire, introduite.

8 E1 : Donc en fait ici, M dépend de *x*

Cette réponse laisse penser que **E2** introduit M après x

9 E2 : Voilà

10 E4 : *M* n'est pas fixe

11 E3 : Moi je trouve que c'est faux plutôt parce qu'on ne nous a pas donné une condition sur *M*.

Lorsque l'étudiant dit n'avoir pas de « condition sur M » cela signifie en fait qu'il n'a aucune information sur M, et c'est une manière d'exprimer que la variable M est une variable libre.

12 E2 : C'est la même chose qu'on est entrain de dire

13 E3 : Il fallait une condition sur *M*. *M* sort d'où ? Bon, si tu considères toute la proposition-là, *M* sort d'où ?

14 E1 : C'est vrai, c'est vrai quand même.

15 E3 : Il n'y a pas une condition sur *M*. On ne sait pas si *M* est là, avant ou après *x*. Il n'y a pas une condition sur *M*.

Le statut de la lettre M est questionné, ainsi que sa place dans l'énoncé, par rapport à la variable x, en lien avec la dépendance des variables.

En comparant les réponses aux items **5.1** et **5.2**, nous vérifions si les étudiants ont pris en compte la structure des énoncés.

Le tableau comparatif se trouve en annexe 6, tableau T5(1).

La comparaison des réponses aux items **5.1** et **5.2** montre que sur les 43 étudiants n'ayant pas retenu les deux items, 27 ont donné la même justification en **5.2** qu'en, **5.1** ce qui laisse supposer qu'ils ont interprété *un* comme renvoyant à un quantificateur universel.

Ceci est corroboré par les échanges sur cet exercice dans le cadre du module de suivi[158] :

> **19 E1** : Je pense qu'il n'y a pas de différence entre le 1 et le 2
>
> **20 E4** : Le 1 et le 2 n'ont pas de différence. Le 1 et le 2 c'est la même chose.

Ces étudiants interprètent en acte le *un* comme une quantification universelle sans toutefois l'expliciter : dire que le 1 et le 2 n'ont pas de différence revient à identifier la phrase **5.2** à un énoncé universellement quantifié. On aurait alors en **5.2** une reformulation de **5.1**.

À la suite de **5.2**, nous traitons l'item **5.5**, en raison de la similarité des structures : énoncé conditionnel implicitement quantifié sur la variable x, puis l'item **5.3** proche de **5.5**. Nous terminons par l'item 5.4 qui est la définition correcte.

Item 5.5 : *Si x est un élément de* ***I****, alors il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Les justifications des réponses sont contenues dans le tableau T5(5) en annexe 6, exercice 5

52 étudiants ont répondu à cet item et parmi eux, seuls 23 ont proposé des arguments pour justifier leur choix.

Les justifications des réponses négatives :

- les étudiants évoquent de plusieurs manières la dépendance des variables M et x : Pour 6 étudiants, « M dépend de x ». **E13** et **E26** explicitent davantage cette dépendance, mais ont des difficultés dans la mise en mots de leurs justifications :

  > **E13** : non, à chaque $x \in I$, on associe une image bien précise qui peut être différente de M

  Ici, le mot *image* semble désigner le réel M qui est associé à x dans l'énoncé, et non $f(x)$.

  > **E26** : faux, car x est unique et M l'est aussi et les autres éléments de I n'auront pas M comme majorant

[158] Annexe 3, exercice 5

E26 exprime que, à un x correspond un M, qui n'est pas le même pour les autres éléments de I. Il faut noter que l'affirmation « les autres éléments de *I* n'auront pas *M* comme majorant » n'est pas nécessairement vraie, car rien n'indique que si M est un majorant d'un élément $f(x)$, il ne peut l'être pour un autre élément de $f(I)$.

La réponse de **E44 :**

E44 : non, $\forall x_1, x_2 \in I / \ x_1 \neq \ x_2$, à x_1, x_2 il correspond M_1, M_2 et on peut avoir

$$M_1 \leq f(x_2)$$

E44 fait une explicitation de la dépendance des variables.

- **E62**, **E63**, **E65** interprètent le *un* comme un quantificateur existentiel : *non, c'est pour tous les éléments x de I que* $f(x) \leq M$. Cette réponse laisse penser que la relation $f(x) \leq M$ ne s'applique qu'à un seul élément *x* de *I*.
- La réponse de **E67** est ambigüe : *M n'est pas fonction de x*. Est-ce à dire que *M* ne doit pas être fonction de x, ce qui est probable, ou alors que dans l'énoncé que nous avons, *M* n'est pas fonction de *x* ?

Les réponses positives :

Nous ne comprenons pas ce que dit l'étudiant **E06**, lorsqu'il déclare qu'il n'y a pas de commutativité entre les deux quantificateurs, car dans cet item il n'y a qu'un seul quantificateur, et on ne sait pas avec quoi ce quantificateur commute. Une piste à cette justification serait que ce dernier a considéré que *x* est lié par le quantificateur universel : *un* renvoie à la quantification universelle.

Item 5.3 : *Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Les justifications sont contenues dans le tableau T5(6) en annexe 6, exercice 5.

57 étudiants ont répondu à cet item.

Des 43 qui ont dit qu'on ne pouvait pas compléter la phrase par **5.3**, 15 n'ont pas justifié leur réponse. Des 14 étudiants qui ont répondu par l'affirmative, 6 n'ont pas donné d'explication.

Les justifications des réponses négatives :

Nous nous intéressons ici aux justifications des réponses négatives.

- Dépendance de M à x :

Il y a 10 étudiants qui l'énoncent : « M dépend de x, il doit être le même pour tous les éléments x de I ». C'est la même justification que **E42** donne, mais utilise $f(x)$ à la place de x :

E42 : non, M est variable et est fonction de $f(x)$, $x \in I$

Les étudiants **E05**, **E37**, **E52**, quant à eux, proposent une explicitation de cette dépendance :

E05 : non car pour chacun des $x_0 \in I$, on aura toujours un M_0 tel que $f(x_0) \leq M_0$, mais pas forcément $f(x) \leq M_0$;

Il part d'un élément générique x_0, lui associe un réel M_0 pour montrer la dépendance entre les deux lettres, et conclut à une contingence qui se traduit par l'expression « pas forcément » : il ne peut affirmer que $f(x) \leq M_0$. On peut alors faire l'hypothèse que, soit la variable x qui apparait dans sa réponse est une variable muette universellement quantifiée, soit c'est un générique.

E37 : non, si M est fixé, il ne majore pas tous les éléments de $f(x)$ sur $f(I)$

E37 énonce la négation de l'énoncé universel « M majore tous les $f(x)$ de $f(I)$ » dont l'écriture formelle est :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M$$

Sa formulation est une phrase ambigüe comme nous l'avons vu : elle peut signifier « M ne majore aucun élément $f(x)$ de $f(I)$ », qui est le contraire, et qui est peu probable du fait que ce M va majorer au moins le $f(x)$ qui lui est associé dans l'assertion **5.3**, ou signifier que « M ne majore pas certains éléments $f(x)$ de $f(I)$ ».

E52 : « si pour a dans I il existe M_1 et pour b dans I il existe M_2, tels que $f(a) \leq M_1$ et $f(b) \leq M_2$, si $a < b$ et f croissante, alors $f(a) < f(b) \Rightarrow M_1 \leq f(b)$, donc f n'admet pas de majorant »

E52 fait une tentative de preuve avec une conclusion qui n'est pas valide. Dans cette preuve, nous pouvons dire que cet étudiant a perçu le statut de f comme variable libre en choisissant f croissante. Concernant la conclusion, un argument mathématique erroné a été utilisé : de « $f(a) \leq M_1$ », « $f(b) \leq M_2$ » et « $f(a) < f(b)$ », il déduit que « $M_1 \leq f(b)$ ». Cette conclusion n'est pas nécessaire contrairement à ce qu'affirme l'étudiant, elle est contingente et ne permet pas de conclure que f n'est pas majorée.

E05 conclut à la contingence (il peut exister des x tels que $f(x) \leq M_0$, et il peut en exister tels que $f(x) \geq M_0$), **E37** a une conclusion ambigüe et **E52** a une conclusion nécessaire qui n'est pas correcte. Toutefois, les réponses de ces trois étudiants peuvent s'interpréter comme une utilisation en acte de la règle de dépendance des variables.

- La position des quantificateurs $\forall$ et $\exists$: Huit étudiants ont argumenté sur la position des quantificateurs. On a par exemple :

  E06, **E11**, **E39** : pas de commutativité entre $\forall$ et $\exists$

  E61, E63 : non, mauvaise définition et permutation des quantificateurs

  Ces réponses renvoient à la distinction entre un énoncé de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et un énoncé de la forme $\exists y, \forall x, P(x,y)$. Le vocabulaire utilisé est différent selon les réponses. On retrouve les expressions telles que *commutativité*, *permutation*, *pas bien disposé*. Alors que ces derniers mettent l'accent sur l'aspect syntaxique, l'étudiant **E30** met en avant et explicitement la relation entre la syntaxe et la sémantique ; il évoque la notion de valeur de vérité pour les expressions $\forall x, \exists x$ et $\exists x, \forall x$ (**E30** : $(\exists x, \forall x)$ et $(\forall x, \exists x)$ n'ont pas la même valeur de vérité). Pour cet étudiant, la modification de la syntaxe modifie la valeur de vérité de l'énoncé. Dans cette formulation, il garde les mêmes lettres, ce qui n'est pas correct. En effet la même variable ne peut être liée simultanément à deux quantificateurs tout en étant dans le champ de ces quantificateurs.

  L'étudiant **E65** a produit une justification assez originale : « la phrase est en quelque sorte à la forme négative ». Nous notons une confusion entre forme négative et négation. Il semble que pour cet étudiant, la modification de la syntaxe qui consiste à changer l'ordre des quantificateurs lui fait penser à la négation. En effet, la négation de $\forall \boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{y}, P(x,y)$ est $\exists \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y}, \neg P(x,y)$).

Il est possible que la réponse de **E14** (non, on doit d'abord trouver M) aille dans le même sens que celle des huit étudiants ci-dessus. En effet, au cours des observations que nous avons menées sur les pratiques enseignantes en cours dans les classes, nous avons noté que la lecture que les enseignants faisaient de la notation « $\exists x$ » était « on peut trouver x ». L'étudiant peut vouloir signifier que « il existe un réel M » vient avant « pour tout x élément de I ».

Les deux groupes d'étudiants mentionnés ci-dessus ont donné des justifications renvoyant à l'articulation entre syntaxe et sémantique.

- Unicité de M : trois étudiants (**E16**, **E26**, **E29**) pensent que M doit être *unique*, et que **5.3** ne traduit pas cette unicité. Une interprétation de « M doit être unique » serait qu'il y a un M pour tous les x, contrairement à ce que dit la phrase, à savoir, à chaque x donné correspond un M.

Dans la catégorie des étudiants ayant donné la réponse « Non », trois groupes de réponses se dégagent :

(1) Les réponses qui prennent en compte la dépendance des variables : 10 étudiants l'explicitent en répondant que « M dépend de x, il doit être le même pour tous les x ». Cette réponse que nous attendions des étudiants est correcte et renvoie à l'aspect opératoire de la quantification.

Dans ce groupe, 3 étudiants (**E05**, **E37**, **E52**) développent en acte la dépendance entre les variables M et x : les justifications qu'ils produisent expriment la mise en œuvre en acte de la dépendance ;

(2) Les réponses qui mettent en avant la syntaxe : les étudiants prennent en compte la place des quantificateurs $\forall$ et $\exists$;

(3) Une réponse d'où ressortent les aspects syntaxique et sémantique de l'utilisation des quantificateurs (**E16, E26, E30, E56**).

Les réponses positives :

En nous référant aux réponses aux items précédents, nous pouvons penser que les étudiants qui ont donné la réponse positive à cet item avaient besoin que la variable M soit introduite. En effet, neuf parmi eux interrogent explicitement l'identité de la variable M dans les items **5.1** et **5.2**.

Nous rapprochons les réponses des étudiants en **5.3** et **5.5**, ce qui nous permettra de regarder si l'absence du quantificateur universel liant x en **5.5** a un effet sur ces réponses.

Le tableau de comparaison T5(7) figure en annexe 6, exercice 5.

Pour comparer les réponses des étudiants aux deux items **5.3** et **5.5**, nous faisons l'hypothèse que l'absence du quantificateur universel liant x peut entraîner chez certains étudiants des réponses différentes aux deux items.

- <u>Les réponses différentes aux deux items :</u>

Dans cette catégorie, seul les étudiants **E41** et **E62** donnent des justifications aux deux items. Tous deux ont proposé **5.3** comme définition de « f majorée », mais ont rejeté l'item **5.5.** Leurs réponses à ce dernier item sont respectivement :

E41 : non, car la condition n'est pas sur la variable x

E62 : Non, la majoration de f s'applique à tout x de I.

On peut faire l'hypothèse que pour **E62** le *un* renvoie à une quantification existentielle.

Les étudiants **E10**, **E48** et **E66** qui ont également retenu l'énoncé de l'item **5.3** comme définition de « f majorée », ont répondu Non à l'item **5.5** sans toutefois donner d'explication.

Un retour à l'item **2.2** de l'exercice 2 montre que les étudiants **E41**, **E62** et **E66** ont interprété en acte, *un* comme une quantification universelle, à travers la mise en œuvre de la règle du contre-exemple dans leur réponse.

On peut faire l'hypothèse que pour ces trois étudiants, *un* n'est pas automatiquement interprété comme un universel ou un générique.

- Les réponses identiques aux deux items

Dans cette catégorie, lorsque les justifications sont proposées aux deux items, elles sont en général identiques. Nous ne prenons pas en compte les réponses sans justification car nous ne sommes pas en mesure de les analyser.

L'étudiants **E44** énonce la dépendance des variables M et x en **5.3**, et l'explicite en **5.5**.

Alors qu'en **5.3**, **E63** met en avant l'aspect syntaxique de l'utilisation des quantificateurs (non, problème d'ordre des quantificateurs), en **5.5**, il interprète *un* comme un existentiel (**E63** : non, la majoration de f s'applique à tout x de *I*). Il exprime de façon implicite la dépendance de M et x.

E20 a quant à lui donné la réponse *oui* aux deux items, et en **5.5**, justifie sa réponse par l'item **5.3**. Nous pouvons dire que cet étudiant considère que **5.5** est un énoncé universellement quantifié.

Il faut noter que les étudiants présents dans le module de suivi ont considéré que les items **5.5** et **5.3** sont identiques :

> **37 E1** : Si x est un élément de I, alors il existe un réel *M* tel que $f(x)$ soit inférieur ou égal à *M*.
>
> **38 E2** : C'est la même chose que la proposition 3, non ?

Pendant la mise en commun, nous sommes revenus sur la pratique qui consiste à identifier *un* à une quantification universelle, à la demande d'un étudiant :

> **278 E8** : Vous étiez entrain de souligner quelque chose là et j'ai voulu attirer votre attention pour vous demandez si, quand on dit « si *x* appartient à *I* » et quand on dit « pour tout *x* appartenant à *I* », je me dis que c'est la même chose.

Cette intervention de l'étudiant a permis de parler de la quantification implicite des énoncés et les erreurs possibles que sa pratique peut engendrer, le statut des lettres dans les énoncés, la notion de phrase ouverte, de clôture universelle et existentielle d'une phrase ouverte.

Item 5.4 : *Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de* ***I****, f(x)≤M*

Les réponses sont contenues dans le tableau T5(8) en annexe 6, exercice 5.

9 étudiants n'ont pas répondu à cet item, 7 ont répondu « Non » et 52 ont répondu « Oui », et parmi eux 22 ont donné une justification.

Les réponses positives :

En dehors de **E53**, tous les étudiants donnent un argument mathématique.

- 6 étudiants disent que c'est la définition d'une fonction majorée ;
- Les étudiants **E13** et **E49** proposent une reformulation de « M majore f » en guise de justification :

  E13 : oui, aucune image de x par f ne dépasse M

  Il reformule négativement la phrase. Quant à **E49**, il fait une reformulation dans la langue naturelle :

  E49 :« M est plus grand que tous les éléments de I »

  Nous pensons que ce dernier parle plutôt des éléments de $f(I)$ dans sa reformulation.
- La réponse de **E24** et **E39** montre que l'existence de M permet son introduction comme un élément bien déterminé.
- Dans la réponse de **E17** :

  E17 : vrai, l'existence de M est d'abord et $\forall x \in I$ dépend de l'existence de M.

  « D'abord » marque la temporalité qui rend compte de l'ordre d'introduction des variables. En outre, l'aspect syntaxique est mis en avant.
- Les réponses de **E26** aux items **5.3** (Non, M n'est pas nécessairement unique) et **5.5** (faux, car x est unique et M l'est aussi et les autres éléments de I n'auront pas M comme majorant) nous amènent à penser que l'unicité de M dont il est question pour cet item, s'oppose à la multiplicité des valeurs de M pouvant exister lorsque la variable M dépend de x, comme c'est le cas dans les items **5.3** et **5.5**. On pourrait alors interpréter « M est unique » comme « M est fixé ».
- **E53** avait identifié la dépendance de M à x dans les items **5.3** et **5.5**. il reste cohérent dans ses réponses :

  E53 : oui, M est indépendant de x

Les justifications des réponses négatives :

Quatre étudiants (**E01**, **E07**, **E57** et **E62**) justifient leur réponse négative en s'appuyant sur la syntaxe : *il y a permutation des quantificateurs*. On peut penser qu'ils n'ont pas identifié correctement la position des quantificateurs dans la définition de « f est majorée ». Les justifications produites à l'item **5.3** le confirment. En effet, en dehors de **E01** qui a répondu

« Non » du fait qu'on n'ait pas précisé que M doit être strictement positif, les trois autres ont répondu que **5.3** est la définition.

À ce groupe, nous rajoutons les étudiants **E58**, **E51**, **E48**, **E38**, **E08**, qui ont également répondu « Oui » pour **5.3** et Non pour **5.4**. N'ayant pas de justification de leur réponse, nous pouvons faire l'hypothèse que, soit l'interprétation qu'ils font des énoncés n'est pas correcte, soit ils n'ont pas identifié correctement la place des quantificateurs dans la définition de « f est majorée ».

Un croisement des réponses[159] aux items **5.3** et **5.4** nous permet de vérifier si la permutation des quantificateurs a un effet sur les étudiants :

37 étudiants répondent correctement aux deux items. Nous faisons l'hypothèse qu'ils connaissent la définition d'une fonction majorée sur un intervalle I.

9 ont donné la réponse « Oui » en **5.3** et « Non » en **5.4**. Pour ces étudiants, il y a inversion des quantificateurs. Nous faisons l'hypothèse qu'ils n'ont pas bien identifié la position des quantificateurs dans la définition. Ces étudiants ne prennent pas en compte l'aspect sémantique des formulations.

Les étudiants **E10**, **E34**, **E41**, **E45** et **E66** ont répondu « Oui » aux deux items. On peut faire l'hypothèse que pour ceux-là, les énoncés de la forme $\forall x, \exists y,\ P(x,y)$ et ceux de la forme $\exists y, \forall x, P(x,y)$ ont la même signification.

Nous avons voulu étudier la stabilité des étudiants dans leurs réponses, et pour cela nous avons croisé les réponses à tous les items dans le tableau T5(11) en annexe 6. Le tableau montre que dix étudiants n'ont répondu à aucun item ; 14 ont donné des réponses sans justification. Parmi eux, 8 ont répondu correctement à tous les items ; deux étudiants ont considéré que **5.3** et **5.5** convenaient à l'exclusion des trois autres items.

Le reste des étudiants a produit au moins une justification sur laquelle (sur lesquelles éventuellement) nous nous appuyons pour essayer d'éclairer des réponses qui ne s'accompagnent d'aucun commentaire.

En prenant en compte les catégories définies ci-dessus, nous avons fait une classification de ces étudiants :

(1) Les étudiants qui sont stables dans leurs réponses. Dans cette classe, nous avons défini deux sous-classes en prenant en compte les réponses aux items **5.3** et **5.5**.

[159] Tableau T5(9) en annexe 6

Tous ces étudiants interrogent le statut et la nature de la variable M qui n'a pas été introduite en **5.1** et **5.2**, ils reconnaissent en **5.4** la bonne définition pour le premier sous-groupe (23 étudiants), et pour le second sous-groupe, ils reconnaissent en **5.3** et **5.5** les bonnes définitions (2 étudiants).

On a par exemple pour le premier sous-groupe :

E14	non car M n'est pas fixé	non, M doit être choisi	non, on doit d'abord trouver M	oui, car définition	Oui

Pour le second sous-groupe :

E57	Non, on ne connait pas l'existence de M	non, on ne connait pas l'existence de M	Oui	non, on a permuté les quantificateurs	Oui

(2) Les étudiants qui savent que les deux quantificateurs interviennent dans la définition de « f est majorée », mais ne font pas la différence dans l'ordre d'apparition de ces quantificateurs, et en outre pensent que les lettres doivent être introduites : **E10**, **E41**, **E66**.

E10	non M non défini	non, pas de sens	vrai, définition de majorant	Oui	Non

E41	non, n'est pas complète du fait de l'absence du majorant	Non, incomplète	Oui, M majore	Oui	non, car la condition n'est pas sur la variable x.

(3) Nous n'avons pu ressortir des caractéristiques communes aux 16 étudiants restants dont nous présentons quelques séries de justifications :

E01	non, il manque *il existe M*	non, il manque *il existe M*	non, $\forall x \in I, \exists M$ mais M n'est pas strictement supérieur à 0	non, il existe M vient après pour tout $x \in I$	non, manque $\exists M > 0$

Cet étudiant a trois exigences : l'introduction de la variable M par le quantificateur existentiel doit se faire après celle de x, et cette variable doit être positive.

E06	oui si on désigne par M ce majorant	Oui si M est le majorant	pas de commutativité entre $\forall$ et $\exists$	Oui	Oui, par commutativité du quantificateur existentiel

E06 reconnait la définition d'un majorant en **5.1** et **5.2** lorsque ce majorant est au préalable désigné. De plus, les réponses à **5.3** et **5.4** laissent penser qu'il connait la définition de « f est majorée », mais la justification de sa réponse en **5.5** laisse un peu perplexe ; nous ne la comprenons pas.

Conclusion de l'analyse des réponses des étudiants

Les conclusions que nous présentons sont établies sur les réponses qui s'accompagnent de justification, car en dehors de celles-ci, nous ne pouvons rien dire.

Les analyses que nous avons menées ont permis d'identifier des catégories dans le traitement des énoncés quantifiés :

- l'introduction des lettres de variable : cela concerne surtout la lettre M pour laquelle, la nature et le statut sont questionnés. Ce problème ne se pose pas pour la lettre x, car en général, le *un* qui l'introduit est interprété comme un quantificateur universel. Néanmoins on a quelques étudiants qui n'en font pas la même interprétation ;
- la dépendance des variables : en général, elle se manifeste en acte pour la plupart des étudiants, et elle est surtout opératoire. Quelques tentatives d'explicitations de la dépendance des variables ont été proposées ;
- la prise en compte de la syntaxe : elle se manifeste par l'identification de la place des quantificateurs $\exists$ et $\forall$. Dans cette catégorie, on retrouve des étudiants qui articulent la syntaxe et la sémantique, en précisant qu'il y a une différence de signification entre les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et ceux de la forme $\exists y, \forall x, P(x,y)$. Toutefois, on retrouve dans les réponses des étudiants pour qui l'ordre des quantificateurs n'affecte pas la signification.

Sur le langage : le fait que certaines justifications soient données en langue naturelle ne permet pas d'interpréter de façon fiable les réponses des étudiants.

Cet exercice peut permettre de travailler sur la quantification multiple avec une prise en compte des points de vue syntaxique et sémantique, sur la quantification implicite des énoncés, le statut des lettres de variables. Cela pourrait se faire dans le cadre de la classe, en prolongement, en proposant une discussion collective sur les différentes réponses obtenues.

2.2.2 Analyse des réponses des élèves

Nous rappelons que l'exercice 5 dans le questionnaire des étudiants correspond à l'exercice 4 dans le questionnaire des élèves.

Première partie : négation de « f croissante » et écriture formelle de la négation

Les réponses sont contenues dans le tableau T5(12) en annexe 6, exercice 5.

Sur les 53 élèves qui ont répondu à la question, 17 ont répondu « f n'est pas croissante », ce qui est correct, 27 ont donné en guise de négation « f est décroissante », et deux, « f est strictement décroissante ».

Nous avons obtenu la réponse « f est décroissante ou constante ».

Concernant la formalisation, personne ne l'a écrite correctement. Quelques écritures sont en lien avec la dérivée ($\forall x \in D_f, f'(x) \leq 0$; $f^{'} = 0 \; ou \; f' \leq 0$) pourtant les élèves n'avaient aucune information sur la dérivabilité de la fonction. Cela peut s'expliquer par l'utilisation de la dérivée comme outil, comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori. Nous confortons cette explication avec la réponse de l'enseignant En2 avec qui nous avons eu un entretien :

> (120) En2 : je pense que ceux qui ont la mémoire vont écrire. Mais je dis, l'énoncé en langage formel va être le plus donné par les élèves de seconde C. parce que c'est là qu'on utilise le langage formel pour démontrer soit qu'une fonction est croissante, soit qu'elle est décroissante.
>
> (121) J : Pas en terminale ?
>
> (122) En2 : Dans les terminales, on les utilise dans les cas rares de démonstration. Très souvent, ce sont les dérivées qu'on utilise. À partir de la première, terminale là, ce sont les dérivées. Dès que f' est positive, on sait que f est croissante, mais en seconde, c'est le langage formel qu'on utilise pour prouver qu'une fonction est croissante ou décroissante. […] Non mais si c'est pour prouver que la fonction est croissante, c'est la dérivée.

L'utilisation de la dérivée pour formaliser « f n'est pas croissante » est la mise en œuvre en acte d'une connaissance opératoire.

D'autres écritures formelles portent sur le signe de la fonction :

> **L47** : f est décroissante, et $f < 0$
>
> **L49** : f n'est pas croissante, et $\forall x, f(x) > 0$

Ce qui est remarquable, c'est que personne n'a utilisé le quantificateur existentiel pour écrire la négation, c'est exclusivement le quantificateur universel qui apparait :

> **L03** : f n'est pas croissante, et $\forall a, b \in D_f, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
>
> **L56** : f n'est pas croissante et $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

La négation que les élèves ont proposée correspond au contraire au sens d'Aristote : le quantificateur universel est conservé, et « croissante » est changée en son contraire qui, dans la langue courante est « décroissante ».

Nous avons rencontré le symbole ↗ qui apparaît dans le tableau de variations des fonctions pour signifier que la fonction est croissante dans un intervalle, et que les enseignants utilisent comme une abréviation pour exprimer que la fonction est croissante.

Nous terminons avec des remarques sur le statut des lettres dans les énoncés. Nous avons par exemple, $\forall a, b \in D_f$; $\forall a, b, c \in D_f$ qui sont des écritures incorrectes. Elles peuvent être mises en rapport des habitudes des enseignants ; dans ce cas, il n'y a pas d'ambiguïté sur la signification des énoncés concernés.

Les résultats de la formalisation de la négation de « f croissante » sont à mettre en relation avec l'absence d'une initiation au formalisme en fin de lycée.

Deuxième partie : analyse des cinq items

Nous analysons les items dans le même ordre que celui que nous avons adopté pour l'exercice 5 du questionnaire 1.

Item 4.1 : *Pour tout x élément de I, f(x)≤M*

Les réponses des élèves sont contenues dans le tableau T5(13) de l'annexe 6, exercice 5.

Comme chez les étudiants, la question de l'introduction et de l'identité de la variable M est posée.

> **L37** : Non cette définition ne qualifie pas M comme un réel

Cette réponse renvoie à l'identité de M.

> **L01**, **L05**, **L09** : Non car M n'est pas défini

Ces élèves questionnent l'introduction de la lettre M.

L04 quant à lui, répond positivement à la question en utilisant la contraposée de « si M est un majorant de f, alors $\forall x, f(x) \leq M$ » :

> **L04** : Oui, car s'il existe un x tel que $f(x) \geq M$, alors M ne sera plus le majorant

On a l'impression que cet élève répond à la question de savoir si M est un majorant de f. On passe de la définition d'une propriété de structure à celle d'un objet.

La réponse de **L24** est la négation mal formulée :

> **L24** : Non car $\forall x \in I$, $f(x)$ n'est pas toujours inférieur à M

Elle peut vouloir signifier qu'aucun $f(x)$ n'est inférieur à M, ou qu'il existe des $f(x)$ supérieurs à M. La temporalité introduite par « pas toujours » est à l'origine de cette ambiguïté.

Item 4.2 : *Si x est un élément de **I**, alors f(x)≤M*

Les réponses des élèves sont contenues dans le tableau T5(14) de l'annexe 5.

On retrouve également dans cet item, des réponses où les élèves questionnent le statut de la lettre M. Outre ce questionnement, certains élèves (**L11**, **L19**, **L42**) prennent en compte la structure de la phrase qui est un conditionnel explicite, ce qui n'est pas le cas pour le **4.1** :

> **L11** : Non car *M* n'est pas défini et en plus c'est une implication

Pourtant, **4.1** peut être reformulé en un énoncé conditionnel si on lève la quantification bornée.

L'absence du quantificateur universel liant la lettre x n'est explicitée que par l'élève **L59** qui d'une part s'interroge sur l'existence de M, et d'autre part, donne à x le statut d'élément singulier :

> **L59** : Non car on n'a pas admit l'existence de *M* et on a pris le cas d'un *x* particulier et non pour tout *x*

Cette réponse se rapproche de celle de **L37** au sujet de la lettre M :

> **L37** : non car cette définition ne montre pas l'existence d'un réel *M*

Ces deux élèves savent que M est une variable liée par le quantificateur existentiel, mais l'ordre d'introduction n'est pas précisé.

En général, les élèves n'interrogent pas l'absence du quantificateur universel liant x dans cet item.

Nous rapprochons les réponses de **4.1** et **4.2** que nous faisons figurer dans le tableau T5(2) en annexe 6.

Ce tableau permet d'identifier des élèves qui interrogent l'identité de M dans les deux items, ils sont 13. **L11** et **L19** ont la même réaction, mais ils ajoutent à leur justification, la structure de l'énoncé **4.2**. Nous ne voyons pas en quoi cette structure pourrait avoir une influence sur le résultat de cet item, tel que l'exprime **L42**.

L24 a identifié en acte que la phrase est ouverte en M : ce M là n'est pas nécessairement un majorant de f.

En conclusion à ces deux items, nous pouvons dire que les interrogations qui émergent sont identiques à celles rencontrées chez les étudiants : il s'agit du statut de la lettre M et de son identité.

Item 4.5 : *Si x est un élément de **I**, alors il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Les réponses sont contenues dans le tableau T5(15) en annexe 5

Trois catégories se dégagent de ces réponses :

(1) L'introduction de la lettre M : l'ordre d'apparition de M n'est pas pris en compte.
Deux élèves sont concernés :

L05 : Vrai car *M* est défini

L51 : Oui car M et *x* sont définis

(2) La dépendance des variables M et x :

L35 : Non car la condition d'existence de *M* ne dépend pas de celle de *x*

L53 : Non car l'existence de *M* ne dépend pas de *x* comme élément de I

Ces deux étudiants expriment que la variable M devrait être indépendante de x.

L55 et **L58** expriment plutôt la dépendance de ces variables dans l'énoncé :

L55 : Non, à tout x correspond un M particulier

L58 : Non, on n'est pas fixé sur la nature du réel *M*, et de plus si on l'était, $f(x)$ doit être inférieur ou égal à *M* pour tout *x* de *I* car chaque *x* de *I* peut avoir un *M*

(3) x est un élément singulier : trois étudiants interprètent *un* comme une quantification existentielle :

L09 : Non car on donne une valeur fixe à x en disant « si x est un élément de I », or x est une inconnue

L59 : Non, on a pris le cas d'un x et non pour tout x de I

Pour ces deux étudiants, x est un élément particulier qu'on a désigné. **L10** énonce une phrase négative dans la langue courante, universellement quantifiée, et qui pourrait correspondre à la négation de « tout x élément de I appartient à f ». Si c'est le cas, nous avons une fois de plus une négation qui est mal construite.

L'élève **L11** a proposé la réponse suivante :

L11 : proposition non acceptable car elle signifie en quelque sorte que si $x \notin I$, alors f n'aura pas de majorant (M n'existera pas). Or f est majorée sur I signifie que $M \in \mathbb{R}$, existe et est supérieur à tous les $x \in I$. Même si $x' \in \mathbb{R}, \notin I$, M existe.

La première chose à relever est que la phrase **5.5** n'exprime pas que M est un majorant de f, ce qu'on a l'impression que cet élève pense. Par ailleurs, il traite cet item comme s'il signifiait que $x \in I$ est une condition nécessaire pour l'existence d'un majorant de f, et dans son argumentation, construit comme la « négation » de « Si $x \in I$, alors, il existe un réel M qui majore f » dans ces termes : « si $x \notin I$, alors il n'existe pas de majorant de f ». C'est de la forme $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$, forme que l'on rencontre souvent dans la construction de la négation des énoncés conditionnels. En outre, il énonce la définition d'une fonction majorée avec une erreur de syntaxe « $M \in \mathbb{R}$, existe » au lieu de « il existe M appartenant à I ».

Nous pouvons mettre cette réponse en parallèle avec celles des élèves **L42**, **L37**, **L19** et **L01** aux items **4.2** et **4.5**, où ils évoquent la structure des phrases qui sont des « implications ». Lorsqu'on considère que *un*, dans ces deux items renvoie à une quantification universelle implicite, les énoncés **4.1** et **4.2** (resp. **4.3** et **4.5**) sont logiquement équivalents : il y a eu transformation d'une quantification bornée en un énoncé conditionnel. Cette opération n'est généralement pas explicitée dans le secondaire, et ces items peuvent contribuer à les travailler.

Item 4.3 : *Pour tout x élément de* ***I****, il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Les réponses sont contenues dans le tableau T5(16) en annexe 6, exercice 5.

Nous avons vu que la phrase **4.3** est une condition nécessaire pour qu'une fonction définie sur un intervalle I soit majoré, et que cette condition n'est pas suffisante.

Des justifications que nous avons recensées, il ressort :

(1) Introduction de M: la position de cet item dans le questionnaire (il vient juste après le **4.1** et le **4.2**) pourrait avoir favorisé la prise en compte du mode d'introduction de la variable M par les élèves. C'est également l'avis de l'enseignant En1 :

(135) En1 : […] Pour tout x élément de I, $f(x) < M$. Si x est un élément de I, alors $f(x)$ est inférieur à M. Pour tout x élément de I, il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$. Ils vont d'abord vous dire oui là parce qu'ils vont confondre tout ça. Et maintenant, quand ils vont arriver ici (c'est-à-dire au 3) il va un peu réfléchir en disant pourquoi il y a *il existe M* ? parce que c'est ça qui manque dans les deux parties là. Il existe un réel *M* tel que pour tout *x*. Même là, ils risquent croire que ceci (la 3) c'est encore ça (la 4.

Sept élèves répondent positivement, en justifiant leur réponse par le fait que M a été introduit. Parmi eux :

L05, **L09** : vrai car M est défini

L12 : oui car renseigne sur la condition de M

Parmi ceux-là, trois justifient leur réponse par le fait que x aussi est introduit :

L59 : oui car on a admis l'existence de M et on a pris le cas de tous les x

Cela montre comme nous l'avons vu chez les étudiants, que certains savent que les quantificateurs doivent être présents dans la définition, sans pouvoir identifier leur place exacte. C'est le cas de **L20** :

L20 : oui, grâce aux quantificateurs

(2) Dépendance des variables : seuls deux élèves en parlent.

L11 : non, car définit le réel M pour chaque élément de x

L55 : non, car M peut changer de valeur

Tandis que **L11** explicite cette dépendance, chez **L55**, elle est implicite ; mais les deux l'expriment en acte.

L24 et **L32** donnent comme une paraphrase de **4.3** ; chez **L24**, l'unicité de M est rajoutée.

L24 : Oui car pour tout *x*, il existe un unique *M*

Dans la réponse de **L32**

L32 : Oui car nous avons existence de tout *x* dans I, il existe *M*

le mot *existence* renvoie probablement aux deux quantificateurs qui ne figuraient pas dans l'item **4.2**.

Reconnaitre la formulation mathématique de « f est majorée », contrairement à l'argument de **L01** (Oui car traduit parfaitement ce qui est dit en langage courant), semble représenter une difficulté pour les élèves.

Dans cet item, nous pouvons dire que :

- la syntaxe n'est pas prise en compte dans l'utilisation des quantificateurs, c'est d'une part leur présence dans l'item qui semble être significative pour les élèves, et d'autre part l'identité de M qui est mise en avant. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes interrogée sur l'impact de l'item **4.2** dans ces réponses ;
- l'explicitation de la dépendance des variables apparait moins que chez les étudiants, seuls deux élèves y font allusion.

Item 4.4 : *Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, f(x)≤M*

Les réponses sont contenues dans le tableau T5(17) en annexe 6, exercice 5.

Nous avons regroupé les réponses des élèves selon ce qu'elles expriment :

(1) Identification de M comme majorant de f : les étudiants **L01**, **L11**, **L14**, **L55** et **L56** sont concernés :

L01 : Oui, montre l'existence d'un majorant réel pour toute image de *x* par *f*

Cet élève exprime l'existence de l'objet majorant, mais produit une phrase ambigüe qui peut être interprétée de deux façons : existence d'un majorant pour chacune des images $f(x)$, ou existence d'un réel qui majore tous les $f(x)$. La réponse qu'il a produite en **4.3** (Oui, car traduit parfaitement ce qui est dit en langage courant) ne nous avance pas beaucoup dans l'interprétation qu'il faut faire de sa réponse, car la réponse de **4.3** n'est pas correcte.

L11 : Oui car définit le réel *M* qui est supérieur ou égal à tous les éléments *x* de *I*

L11 exprime également l'existence du réel M, et reprend en langue naturelle la phrase « $\forall x, f(x) \leq M$ », bien que cela soit énoncé avec des erreurs : x est à la place de $f(x)$ et I à la place de $f(I)$. Par rapport à sa réponse à l'item **4.3** (Non car définit le réel M pour chaque élément *x* de *I*), nous pouvons dire que pour cet élève, la différence entre les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ et les énoncés de la forme $\exists y, \forall x, P(x,y)$ se manifeste de façon opératoire.

L14 et L55 font une sorte de paraphrase de **4.4**.

L14 : Oui, car pour tout élément *x* de I, *f(x)* doit être majoré par le même élément *M*

L55 : Oui car M est une valeur fixe que quel que soit x pris dans I, $f(x)$ ne peut pas dépasser

(2) La présence des quantificateurs est suffisante : pour les étudiants **L05**, **L12**, **L51**, et **L20**, l'introduction des variables M ou x par les quantificateurs suffit. Leur ordre d'occurrence ne semble pas être significative. En effet, les réponses de ces étudiants :

L05 : vrai car M est défini

L20 : Oui grâce aux quantificateurs

L12 : Oui car renseigne sur la condition de M

L51 : Oui car M et x sont définis

sont respectivement les mêmes qu'à l'item **4.3**.

Trois étudiants manifestent de façon explicite l'identité entre **4.3** et **4.4**, ce qui nous donne la dernière catégorie :

(3) Pas d'articulation entre syntaxe et sémantique : **4.3** et **4.4**, c'est la même chose. On a les réponses suivantes :

L09 : Vrai, M a été défini et ceci n'est qu'une reformulation de 4.3

L53 : Oui, c'est la même chose que 4.3, seulement qu'on commence ici par il existe un réel M

L32 : Oui car $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, tel\ que\ f(x) \leq M$

On peut faire l'hypothèse que pour ces trois élèves, « $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, tel\ que\ f(x) \leq M$ » a la même signification que « $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) \leq M$ », surtout chez **L32** qui formalise **4.4** en inversant l'ordre des quantificateurs. Nous pouvons dire que **L53** a perçu et il le dit, que l'ordre des quantificateurs a changé.

Au total, le changement dans la syntaxe ne modifie pas la signification des deux énoncés.

L'élève **L15** est le seul à avoir justifié sa réponse négative :

L15 : Non car x appartient d'abord à I avant que M existe

c'est-à-dire que $\forall x \in I$ vient avant $\exists M \in \mathbb{R}$. Il répond sur la syntaxe et conditionne l'existence de M par l'appartenance de x à I.

Les catégories que nous avons dégagées dans les items **4.3** et **4.4** mettent en avant la question de l'articulation entre syntaxe et sémantique dans les énoncés contenant une double quantification. C'est la raison pour laquelle nous croisons les réponses à ces deux items, afin de mesurer la sensibilité des élèves à cette question[160].

Le croisement des réponses fait ressortir deux grands groupes :

[160] Voir tableau T5(18) en annexe 6, exercice 5

- les réponses qui donnent les deux items comme définitions de fonction majorée (18 réponses) ;
- les réponses pour lesquelles, soit **4.3**, soit **4.4** est la définition (25 réponses).

Douze étudiants n'ont répondu à aucun des deux items, et les six réponses restantes sont assez disparates.

Pour le premier groupe, les justifications en **4.3** et en **4.4** sont quasiment identiques.

- **L09**, et **L53** expriment qu'ils ont identifié un changement de syntaxe sans que cela ait des effets sur la sémantique ;
- la réponse est muette sur la modification de la syntaxe : **L05**, **L12**, **L20**, **L32**, **L33**, **L35**, **L51**, et **L59** sont concernés. Comparativement aux réponses en **4.1** et **4.2**, ils restent tous sur le statut de M.

Dans le second groupe, 9 étudiants ont répondu Oui au premier item, et Non au second, sans nécessairement produire de justifications. **L11** et **L55** sont les seuls dont les arguments traduisent une prise en compte de la syntaxe et manifestent en acte la différence entre les deux énoncés.

De ceux qui ont répondu Oui au **4.3** et Non au **4.4** seul **L15** a produit deux justifications :

> **En 4.3** : Oui car x doit appartenir à l'intervalle I et M à $\mathbb{R}$
>
> **En 4.4** : Non car x appartient d'abord à I avant que M existe

Les domaines respectifs de x et de M sont précisés, et en **4.4**, il répond sur la syntaxe : le quantificateur universel apparait avant le quantificateur existentiel. Cette réponse n'est pas correcte, car c'est bien **4.4** qui exprime que « f est majorée ».

Conclusion de l'analyse réponses des élèves

Les réponses des élèves ont permis de mettre en exergue plusieurs points :

- le statut de la lettre : les items **4.1** et **4.2** les ont amenés à questionner le statut et même la nature de la lettre M qui n'avait pas été introduite. Les items **4.2** et **4.5** ont provoqué de rares interrogations sur le statut de la lettre x. On peut faire l'hypothèse qu'ils ont été pensés comme des énoncés universellement quantifiés.
- la dépendance des variables : contrairement à ce qui a été observé chez les étudiants, seuls deux élèves l'ont exprimée. Les élèves sont beaucoup plus focalisé sur les domaines respectifs de M et de x.

L'ordre d'apparition des quantificateurs n'est pas très significatif pour certains élèves pour qui les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x, y)$ et $\exists y, \forall x, P(x, y)$ ont la même signification.

Conclusion
Les analyses des productions des élèves et des étudiants ont permis d'identifier plusieurs phénomènes dans la gestion des énoncés quantifiés.

Concernant la première question posée aux élèves, l'expression de la négation de « f est croissante » met en lumière les difficultés rencontrées par les élèves pour passer de la formulation des énoncés d'un langage à un autre, et particulièrement du langage naturel au langage formel (Selden & Selden, 1995).

Concernant les cinq items de l'exercice 5 (4 pour les élèves) :

- certains élèves et étudiants font un glissement de la définition de « f est majorée sur I » à « M est un majorant de f », et de ce fait, acceptent les énoncés **5.1** et **5.2** ;
- le statut de la lettre M est largement interrogé : pour les deux groupes, l'objet majorant doit être défini ou introduit ;
- la place de ce quantificateur existentiel n'est pas toujours précisée par rapport au quantificateur universel. Par ailleurs, la règle de dépendance de M à x dans les items **5.3** (**4.3**) et **5.5** (**4.5**) est manifestée en acte. Le statut de la lettre x dans les items **5.2** (**4.2**) et **5.5** (**4.5**) est variable selon les sujets : il est soit une variable liée par un quantificateur universel implicite, soit un élément singulier. Dans le second cas, la quantification implicite n'est pas en conformité avec les pratiques de classe ;
- la modification de la syntaxe dans les énoncés n'est pas toujours significative pour certains élèves et étudiants, tandis que d'autres la perçoivent bien et l'interprètent surtout en acte avec parfois une prise en compte de l'aspect sémantique de cette opération ;
- de nombreux élèves mettent l'accent sur la présence des deux quantificateurs dans la définition et l'explicitent. De ce fait, ils écartent toutes les propositions de réponse où ces deux objets n'apparaissent pas. Ce phénomène est presqu'inexistant chez les étudiants.

3 Exercice 8[161]

3.1 Analyse a priori

Indiquer dans la liste suivante, les intervalles I qui vérifient :

[161] Dans le questionnaire 2, cet exercice correspond à l'exercice 6

8.1 Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $a < b$;

8.2 *Il existe b dans I tel que, pour tout a dans I, $a < b$.*

$$I =]0,1] \ ; \ I = [0,1[\ ; \ I = [-5,+\infty[\ ; \ I =]-\infty,1000]$$

Dans les deux items, le prédicat est le même. La seule modification concerne l'ordre des quantificateurs qui lient a et b. Les structures respectives des items sont les suivantes :

(8.1) $\forall x, \exists y, P(x, y, z)$

(8.2) $\exists y, \forall x \ P(x, y, z)$

x, et y désignent des variables liées et z est une variable libre. Il s'agit ici d'instancier la variable z par les intervalles proposés.

Cet exercice a pour but d'évaluer le comportement des étudiants face aux énoncés mathématiques ayant une double quantification, les quantificateurs étant différents. La tâche qui est demandée est différente de celle qui a été proposée en **5.3** et **5.4**. où il était demandé de reconnaitre la définition d'une propriété d'objet –être majorée– exprimée dans le langage mixte, où l'ordre d'occurrence des quantificateurs joue un rôle crucial. Dans cet exercice, il s'agit de déterminer si un objet donné (un intervalle de $\mathbb{R}$) satisfait une propriété complexe. La propriété 8.1, qui correspond à la propriété « I n'a pas de plus grand élément » est satisfaite par certains intervalles de $\mathbb{R}$, mais pas par tous ; la propriété **8.2**. n'est satisfaite par aucun intervalle non vide car on ne peut avoir pour un élément b de I, $b < b$. Notons que cette propriété ressemble à la propriété « avoir un plus grand élément » obtenue en considérant une inégalité large.

L'item **8.1** est la négation de « I a un plus grand élément ».

Nous proposons les transformations suivantes :

Item 8.1 : Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $a < b$;

(1) Pour tout élément *a* de I, il existe un élément *b* de I tel que *a* soit strictement plus petit que *b*, qui est la formulation dans la langue naturelle ;

(2) Tout élément *a* de *I* peut être dépassé par un autre élément *b* de *I*, formulation dans le langage naturel, qui a une dimension opératoire. Nous avons introduit *autre*, absent de l'énoncé formalisé, pour marquer l'inégalité stricte. La disparition du quantificateur existentiel est un effet du langage ;

(3) Tout élément a de I est majoré par un élément b de I, différent de a. Cette formulation renvoie au discours mathématique et a une dimension prédicative. Le quantificateur existentiel a disparu, absorbé par la propriété « être majoré ».

Item 8.2 : Il existe b dans I tel que, pour tout a dans I, $a < b$

(4) Il existe un élément b de I tel que tout élément a de I soit strictement plus petit que lui ;

(5) Il existe un élément b de I, strictement plus grand que tous les éléments a de I ; ceci est une reformulation de (4) ;

(6) I contient un élément b strictement plus grand que tous les éléments de I.

Dans les formulations (4) et (5), les deux quantificateurs sont présents, mais dans la dernière, le quantificateur existentiel est absorbé dans l'expression « I contient un élément tel que.. »
Les deux énoncés des items **8.1** et **8.2** ont respectivement une structure logique analogue à celle des énoncés des items **5.3**[162] et **5.4**[163] de l'exercice 5 ; la différence étant dans le nombre de variable libre (2 pour l'exercice 5, une pour l'exercice 8. Par contre, les items diffèrent par le type de tâche demandé : dans l'exercice 5, il s'agissait de reconnaître si une propriété donnée fournissait une définition de la relation « être majorée sur » entre une fonction et un intervalle ; dans l'exercice 8, il s'agit de reconnaître si un objet donné (un intervalle) satisfait ou non une phrase ouverte, la première correspondant à la propriété « ne pas avoir de plus grand élément ». Il est possible que les étudiants considèrent que l'énoncé **8.2** traduit le fait que l'intervalle I est majoré.
Notons qu'il faut faire la distinction pour un intervalle réel, entre « être majoré » et « avoir un plus grand élément ». Ces deux propriétés sont équivalentes pour des ensembles discrets ou finis, et dans ces ensembles, ces deux notions se ramènent à une seule. Mais lorsque les ensembles ne sont ni discrets, ni finis, les deux propriétés ne sont pas équivalentes : une partie qui admet un plus grand élément est majorée, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
L'intervalle $]0,1]$ est majoré et a un plus grand élément tandis que $[0,1[$ est majoré mais n'a pas de plus grand élément du fait de la densité de $\mathbb{R}$. Les expressions formelles respectives des deux propriétés « être majoré » et « avoir un plus grand élément » sont les mêmes, à la différence près du choix du domaine de la lettre de variable qui désigne l'objet majorant.

[162] Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que f(x)≤M

[163] Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, f(x)≤M

Cette distinction entre les deux propriétés met en évidence l'articulation entre formalisation logique et signification mathématique, et l'importance des objets qui sont en jeu.
L'intervalle $[-5,+\infty[$ tout comme l'intervalle $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément. Cela est plus facilement perceptible pour le premier que pour le second.
L'intervalle $]-\infty,1000]$ n'est pas borne, mais a un plus grand élément.

Les réponses attendues pour **8.1** :

Q1 : $[0,1[$ et $[-5,+\infty[$ qui est la réponse correcte ;
Q1* : $[-5,+\infty[$ qui est la réponse d'un étudiant qui pourrait penser que, « avoir un plus grand élément » et « être majoré », c'est la même chose. De ce fait, il exclut les intervalles majorés, dont $[0,1[$.
Une autre justification possible de cette réponse proviendrait de la représentation des intervalles $[-5,+\infty[$ et $[0,1[$. $[-5,+\infty[$ peut être vu comme l'ensemble des réels plus grands que -5 et « aussi grand que l'on veut ». Par contre, dans l'intervalle $[0,1[$ on ne peut avoir les nombres aussi grands que l'on veut car il est majoré.
Q2 : $]0,1]$ et $]-\infty,1000]$ qui est la réponse de ceux qui interprètent les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x,y)$ comme les énoncés de la forme $\exists y, \forall x, P(x,y)$ et donnent à 8.1 la signification « I a un plus grand élément ». Il est possible également que cette réponse provienne de l'inversion de l'inégalité, les quantificateurs conservant leur position ;
Q2* : $[0,1[$, $]0,1]$ et $]-\infty,1000]$ qui se justifie comme en **Q2**, avec en plus la confusion qui est faite entre « être majoré » et « avoir un plus grand élément » ;
Q3 : Autre réponse
Q4 : aucune réponse n'est donnée

Les réponses attendues pour **8.2** :
R1 : aucun intervalle ne satisfait cette propriété. C'est la réponse correcte ;

R2 : $]0,1]$ et $]-\infty,1000]$, qui est la réponse de celui qui considère que la propriété **8.2** s'interprète par « I a un plus grand élément ». Cette réponse n'est pas correcte. Soit l'étudiant, pour produire cette réponse n'a pas identifié la contradiction que l'inégalité stricte produit ($b < b$), soit il n'a pas fait attention à l'inégalité stricte entre a et b ;

R2* : $[0,1[$, $]0,1]$ et $]-\infty,1000]$. L'étudiant peut donner à cet énoncé la signification « I est majoré ». Cette réponse peut s'expliquer par la ressemblance de la propriété **8.2** avec la définition d'une partie majorée. Sa réponse ne prend pas en compte le domaine dans lequel b est défini.

R3 : $[0,1[$ et $[-5,+\infty[$ qui proviendrait de la permutation de quantificateurs. Il traite alors l'item **8.1** ;

R3* : $[-5,+\infty[$ qui pourrait être dû à une permutation des quantificateurs. A ce moment, il est légitime de considérer aussi l'intervalle $[0,1[$, mais pour les raisons évoquées en **Q1***, on l'exclut.

R4 : autres réponse que celles proposées ci-dessus ;
R5 : pas de réponse.
Il est possible que pour le même étudiant, on retrouve des réponses identiques aux deux items. On peut faire l'hypothèse que pour cet étudiant, la permutation des quantificateurs n'est pas significative.

Le module de suivi
Du point de vue de la logique, cet exercice permet de travailler la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, l'aspect sémantique dans l'utilisation des deux quantificateurs et l'impact sur la signification d'une modification de l'ordre des quantificateurs lorsqu'ils sont différents, de mettre en évidence l'importance du domaine de quantification, et plus généralement de mettre en évidence l'articulation entre formalisation d'un énoncé et sa signification mathématique.

3.2 Analyses a posteriori

3.2.1.1 Analyse des réponses des étudiants et du module de suivi

Indiquer dans la liste suivante, les intervalles I qui vérifient :

8.1 Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $a < b$;

8.2 Il existe b dans I tel que, pour tout a dans I, $a < b$.

$$I =]0,1]\ ;\ I = [0,1[\ ;\ I = [-5,+\infty[\ ;\ I =]-\infty,1000]$$

Item 8.1: *Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $a < b$*

Tableau T8(1) : effectifs des réponses des étudiants

Q1 Réponse correcte	**Q1*** $[-5, +\infty[$	**Q2** Inversion de $\forall$ et $\exists$	**Q2*** Q2 et $]0, 1]$	**Q3** Autre rép.	**Q4** Pas de rép.
16	10	6	0	7	29

Sur 68 étudiants qui ont participé au questionnaire, seuls 39 ont répondu à cet item. Nous avons obtenu 16 réponses correctes (catégorie **Q1**).

Six étudiants ont donné les réponses que nous avons justifiées dans notre analyse a priori par l'inversion des quantificateurs ou l'inversion de l'inégalité (catégorie **Q2**).

Parmi ceux-ci, **E09** a explicité ses réponses :

$]0,1]$ car il suffit de prendre $b = \frac{1}{2}a$

$]-\infty, 1000]$, car il suffit de prendre $b = a - 1$

Pour cet étudiant, l'inversion de l'inégalité justifie sa réponse. En effet, lorsqu'il explicite la dépendance des variables a et b, il choisit b plus petit que a et les deux ensembles qu'il propose satisfont la phrase ouverte en I :

Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $b < a$

L'étudiant **E30** répond qu'aucun intervalle ne convient :

E30 : « Aucun intervalle ne convient : **8.1** signifie que tout élément de *I* admet un autre plus grand que lui, c'est-à-dire *I* n'est pas majoré »

Il a fait une bonne interprétation de **8.1.**, mais sa conclusion est erronée. L'interprétation de **8.1** l'aurait amené à choisir à tout le moins l'intervalle $[-5, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas.

L'étudiant **E33** choisit comme seul intervalle $[0,1[$; il justifie ainsi son choix :

E33 : car *I* n'a pas de plus grand élément

On pourrait alors s'interroger sur l'absence de l'intervalle $[-5, +\infty[$ de son choix.

Item 8.2 : *Il existe b dans I tel que, pour tout a dans I, $a < b$*

Sur 68 étudiants, 37 ont répondu à cet item.

Tableau T8(2) : effectifs des réponses des étudiants

R1	R2	R2*	R3	R3*	R4	R5
7	11	1	1	4	13	31

Des 13 étudiants de la catégorie **R4**, 10 ont donné des intervalles majorés. Nous pouvons faire l'hypothèse que ces étudiants on interprété la propriété **8.2** comme « être majoré ». Cela peut s'expliquer par la ressemblance de la propriété énoncée en **8.2** avec la définition d'une partie majorée. Mais seulement ces étudiants n'ont pas pris en compte toutes les parties majorées qui ont été proposées.

Nous pouvons dire que 7 étudiants (catégorie **R1**) ont donné une réponse correcte, en supposant que l'étudiant **E67**, en écrivant « $I = \emptyset$ » a voulu signifier que l'ensemble des intervalles qui vérifient **8.2** est vide. Une autre interprétation de cette écriture consiste à dire que pour l'étudiant, le seul ensemble qui satisfait **8.2** est l'ensemble vide.

Nous retrouvons dans ce groupe d'étudiants, **E30** qui, après avoir paraphrasé correctement l'item **8.1**, a conclu que l'intervalle I cherché est majoré. Sa réponse :

> « aucun intervalle ne convient ; **8.2** signifie que I n'est pas majoré »

laisse croire qu'il y a une inversion dans la signification des items **8.1** et **8.2**, pour autant que ce dernier pense que **8.2** signifie que l'intervalle I est majoré.

E26 est le seul à avoir justifié sa réponse, et l'argument qu'il produit est correct et néanmoins incomplet :

> **E26** : Pas existante car on a $a < b$ et non $a \leq b$

Il devrait préciser qu'on ne peut avoir $b < b$.

Dans le module de suivi, les étudiants ont proposé la réponse correcte ; il y a cependant eu un débat sur la nature de la lettre b:

> **17 E5** : Là je n'ai trouvé aucun intervalle qui marche. On peut trouver un élément b, un peu comme si c'était le maximum

Pour **E5**, l'introduction de b ressemble à celle d'un élément maximum, mais l'expression « un peu comme si » est une manifestation du doute quant à la qualité de cet élément. Dans la suite, il identifie la raison de son doute qui fait écho à celle produite par **E26** :

> **23 E5** : c'est… si b était le max, n'est ce pas, ça allait être $a \leq b$. Ce n'est pas le max

Il faut remarquer qu'aucun de ces deux étudiants n'a relevé de façon explicite, la contradiction à laquelle l'utilisation de l'inégalité stricte conduit.

Les étudiants son partagés entre la signification qu'il faut donner à b :

> **24 E4** : mais c'est un max

du fait que b est un élément de I et qu'il majore « tous »[164] les éléments de I ;

> **25 E5** : c'est un majorant

du fait qu'il est plus grand que « tous » les éléments de I, et qu'on n'a pas, comme il le dit ci-dessus, $a \leq b$. Tant pour **E4** que pour **E5**, l'univers de b est pris en compte, même si cela n'est pas explicite ; le changement de dénomination le montre. La séquence qui suit le précise :

> **27 E5** : il y a quelque chose de bizarre, puisqu'il est dans *I*, ça ne peut pas être vrai ! On ne peut pas trouver un pareil élément
>
> **28 E7** : b c'est un majorant
>
> **29 E5** : b est un élément de I, et si on prend un x quelconque élément de *I*, ces éléments-là sont plus petits que b. Moi je n'ai trouvé aucun intervalle qui marche.

Nous pouvons dire que les justifications que les étudiants avancent ont un aspect opératoire.

Nous avons croisé les réponses correctes à l'item **8.1**, avec les réponses des étudiants concernés aux items **8.2**, **5.3** et **5.4**. Cela permet de vérifier si ces derniers manifestent une certaine stabilité dans le traitement des énoncés quantifiés contenant les deux quantificateurs. Les étudiants en question sont au nombre de16. Nous obtenons le tableau T8(7) que nous faisons figurer en annexe 6.

---

[164] Nous traduisons le quantificateur universel

Il y a 3 étudiants (**E29**, **E42**, **E67**) qui ont réussi les items **8.1**, **8.2.**, **5.3** et **5.4** ; nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils sont stables dans le traitement des énoncés contenant les deux quantificateurs.

Parmi les 16 étudiants, 9 ont donné en réponse à ce deuxième item, les intervalles $]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$. Cela renvoient l'interprétation de l'énoncé **8.2** à « I a un plus grand élément », donc le domaine de a et de b a bien été identifié ; nous faisons l'hypothèse qu'ils n'ont pas relevé la contradiction $b < b$.

- **E11**, **E13**, **E14**, **E43**, **E49** et **E55** donnent des réponses correctes aux items **5.3** et **5.4**. Nous pouvons dire, n'eut égard à la mauvaise interprétation de **8.2**, qu'ils sont assez stables dans le traitement des énoncés contenant deux quantificateurs différents.
- Lorsque nous rapprochons les réponses de **E62** et **E66** aux items **8.1**, **8.2**, **5.3** et **5.4**, nous pouvons dire que l'articulation entre la syntaxe et la sémantique n'est pas effective chez ces étudiants. En effet, tant **8.1** et **8.2**, que **5.3** et **5.4** sont obtenus par inversion des quantificateurs. Chez **E66**, les réponses à **8.1** et **8.2** sont différentes, et résulteraient de l'aspect opératoire des connaissances. Or pour ce même étudiant, les réponses à **5.3** et **5.4** sont identiques, ce qui laisse penser qu'il se serait plus focalisé sur la formule « $f(x) \leq M$ » sans prendre en compte l'inversion des quantificateurs.
  Concernant l'étudiant **E62**, nous avions justifié ses réponses à **5.3** et **5.4** par une mauvaise identification de la place des quantificateurs dans la définition d'une fonction majorée, mais les réponses aux items **8.1** et **8.2** laissent penser que l'étudiant s'est limité au point de vue syntaxique pour répondre à **5.3** et **5.4**.

Conclusion de l'analyse des réponses des étudiants

Le nombre de réponses à cet exercice est relativement bas, et les justifications sont pratiquement inexistantes. Néanmoins quelques résultats apparaissent :

- six étudiants (sur 29 ayant donné une réponse) ont donné une réponse résultant de l'inversion des quantificateurs ;
- l'item **8.2** est interprété par la propriété « être majoré », les formulations respectives de cet item et de cette propriété étant presque semblables ; cela laisse penser que les étudiants n'ont pas identifié la contradiction ;

le croisement des réponses aux deux items avec celles des items **5.3** et **5.4**, permet de dire que seuls trois étudiants sur les 16 qui ont répondu correctement à l'item **8.1** traitent les énoncés quantifiés contenant une double quantification d'une façon stable.

3.2.2 Analyse des réponses des élèves

Nous utiliserons la même catégorisation pour les élèves, que celle qui a été utilisée pour les étudiants.

Item 6.1 : *Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que* $a < b$

Seuls 46 élèves ont répondu à cet item. Nous récapitulons les effectifs des catégories de réponses dans le tableau ci-dessous que nous rapprochons avec les réponses des étudiants :

Tableau T8(3) : récapitulatif des réponses des élèves et des étudiants

	Q1 **Bonne réponse**	**Q1*** $[-5,+\infty[$	**Q2** **Inversion de $\forall$ et $\exists$**	**Q2*** **Q2 et $]0,1]$**	**Q3** **Autre rép.**	**Q4** **Pas de rép.**
Les étudiants	16	10	6	0	7	29
	24%	15%	9%	0%	10%	42%
Les élèves	16	8	3	0	19	15
	26%	13%	5%	0%	31%	25%

Dans la catégorie **Q3**, la réponse $[0,1[$ figure 7 fois.

Par ailleurs, parmi les 19 réponses de la catégorie **Q3**, 13 sont des intervalles majorés dont 6 ont une borne supérieure.

Les distributions des réponses des élèves ne sont pas éloignées de celles des étudiants, comme le montre le tableau.

Item 6.2 : *il existe b dans I tel que pour tout a dans I,* $a < b$

Parmi les élèves, aucun ne donne la réponse correcte (aucun intervalle ne convient).

Dans la catégorie **R4**, il y a 9 fois la réponse $]-\infty, 1000]$.

Nous présentons le tableau récapitulatif des réponses des élèves que nous rapprochons avec celles des étudiants :

Tableau T8(4)

	R1	R2	R2*	R3	R3*	R4	R5
Etudiants	7	11	1	1	4	13	31
	10%	16%	1,5%	1,5%	6%	19%	46%
Elèves	0	12	0	5	6	22	16
	0%	20%	0%	8%	10%	36%	26%

Conclusion

Dans le premier item, on retrouve les mêmes réponses chez les étudiants que chez les élèves, mais dans des proportions différentes. Dans le second item, aucun élève n'a produit la réponse correcte contre 10% chez les étudiants. Des phénomènes tels que l'inversion des quantificateurs, la confusion entre « avoir plus grand élément » et « être majoré » ont été relevés dans les deux populations. Nous pouvons faire l'hypothèse que certains schèmes mis en œuvre dans le traitement de cet item par les deux populations sont identiques.

Conclusion du chapitre 7

Les exercices que nous avons proposés aux élèves et aux étudiants recouvrent deux principaux aspects de la quantification : la quantification implicite des énoncés universels qui se manifeste généralement par l'usage de *un* dans les énoncés, et la quantification multiple.

Les résultats montrent que, tandis que la majorité des étudiants se conforment à l'usage de *un* comme renvoyant à la quantification universelle, près de la moitié des élèves l'interprètent comme un générique. Dans les deux populations, on rencontre des sujets qui en font une interprétation qui renvoie à la quantification existentielle ou la désignation d'un élément singulier. Concernant les énoncés où les objets sont introduits avec *un*, la construction de la négation a fait émerger des ambiguïtés dans l'interprétation de *un*. En effet, chez un étudiant, la phrase initiale et la négation s'exprime avec *un* qui dans chaque cas renvoie à une interprétation différente : un universel dans la phrase initiale et un existentiel dans la négation. Ceci va dans le sens des résultats de Durand-Guerrier (1996, 2003) montrant que la quantification implicite n'est pas toujours partagée par les étudiants. Par ailleurs, l'instabilité dans l'interprétation de *un* a un impact sur l'évaluation par les étudiants et les élèves de la valeur de vérité de l'énoncé en jeu comme le montrent les réponses variées que nous avons enregistrées à l'item **2.2**, et fait émerger la contingence de certains énoncés mathématiques qui n'est pas une notion familière aux étudiants.

La dépendance des variables se manifeste en acte chez les étudiants, elle est surtout opératoire. Quelques-uns ont essayé de l'expliciter. Chez les élèves par contre nous en avons rencontré très peu (2) dont les réponses renvoient à la dépendance des variables. Cette différence pourrait s'expliquer par l'importance des démonstrations des énoncés en (ε, η) (Durand-Guerrier & Arsac, 2003) dans le cours d'analyse à l'université. De tels énoncés sont presqu'inexistant dans le secondaire.

Dans la quantification multiple, chez les étudiants, la prise en compte de la syntaxe se manifeste par l'identification de la place des quantificateurs ∀ et ∃. Dans cette catégorie, on retrouve des étudiants qui articulent la syntaxe et la sémantique, en précisant qu'il y a une différence de signification entre les énoncés de la forme $\forall x, \exists y, P(x, y)$ et ceux de la forme $\exists y, \forall x, P(x, y)$. Toutefois, en accord avec les résultats de Chellougui (2004), on trouve des réponses pour lesquelles il semble que leurs auteurs ne prennent pas en compte l'impact de la modification de l'ordre des quantificateurs universel et existentiel sur la signification de l'énoncé. C'est la position de la majorité des élèves ayant justifié leur réponses aux items **4.3** et **4.4** (18 sur 31). Ces derniers ont focalisé leurs arguments sur l'introduction des lettres *M* et *x* par un quantificateur, et comme les étudiants, questionnent le statut des lettres qui ne sont pas liées par un quantificateur. L'aspect sémantique n'est pas pris en compte.
Il y a une amorce d'utilisation des concepts de logique par certains étudiants (règle du contre-exemple, vérité de l'implication), mais les réponses obtenues aux items montrent une insuffisance des connaissances relatives à ces concepts. Chez les élèves, en dehors de la règle du contre-exemple, les justifications que l'on rencontre sont essentiellement basées sur les connaissances mathématiques. Dans les deux populations, la construction des preuves fait apparaître des nombreuses de difficultés : traitement de la réciproque en lieu et place de l'énoncé de départ, inférences invalides, utilisation simultanée de la même lettre de variable liée dans le champ de deux quantificateurs.

Nous pouvons au vu de ces résultats, conclure en écho à Chellougui (2004), que l'utilisation des quantificateurs est loin d'être maîtrisée par la plupart des élèves et des étudiants ayant répondu à notre questionnaire. On peut s'interroger sur les effets sur les apprentissages de cette maîtrise insuffisante des quantificateurs, compte tenu de ce que la quantification est au cœur de la formulation des énoncés mathématiques rencontrés en début d'université au Cameroun comme en France, en particulier en ce qui concerne les théorèmes qui établissent des relations entre les concepts mathématiques (Selden & Selden, 1995) et qui sont généralement sous la forme d'un énoncé conditionnel.

Chapitre 8 : Les exercices centrés sur l'implication

Introduction

L'implication est un concept polysémique dont les multiples aspects sont au cœur du raisonnement mathématique. Nous nous proposons dans ce chapitre de présenter les analyses a priori de trois exercices de notre questionnaire et les analyses a posteriori de l'expérimentation que nous avons menée avec les élèves et les étudiants. La résolution de chacun des exercices fait intervenir le concept d'implication sous un ou plusieurs aspects. L'exercice 1 porte sur la détermination d'un ensemble dont une propriété caractéristique est un conditionnel énoncé en langue naturelle. Sa résolution fait appel à la notion d'implication ouverte et aux conditions de vérité d'une implication matérielle. L'exercice 6 porte sur les règles d'inférence ; on s'intéresse à la question de la reconnaissance des situations qui permettent ou ne permettent pas de faire des déductions ; dans l'exercice 7, on s'intéresse à la détermination de la valeur de vérité d'un énoncé conditionnel universellement quantifié donné en langage formel, dont l'antécédent n'est satisfait par aucun élément du domaine de quantification.

1 Exercice 1

Déterminer l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 *vérifiant la propriété : « si* x *est pair, alors son successeur est premier ».*

Cet exercice est repris de Durand-Guerrier (2005, p.47).

1.1 Analyse a priori

Dans cet exercice, il s'agit de déterminer un ensemble défini par une propriété caractéristique, qui est un conditionnel, marqué par la présence de « si …, alors … », et donné en langage courant. Il s'agit de passer d'une définition en compréhension à une définition en extension.

Comme nous l'avons dit, cette propriété caractéristique est une implication ouverte ; la variable x n'est liée par aucun quantificateur. On peut la formaliser ainsi :

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \text{ (1).}$$

Chaque instance de cette phrase pour une valeur de x contenue dans l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20, est une proposition, plus précisément une implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$ qui est soit vraie, soit fausse. La résolution de cet exercice convoque la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un objet de l'univers du discours (Tarski, 1933), donc renvoie à l'aspect sémantique du traitement de l'implication. L'ensemble recherché est constitué des objets qui satisfont (1).

Nous rappelons qu'un entier naturel est dit *premier*, lorsqu'il possède deux diviseurs distincts, et deux seulement. Par conséquent, 1 n'est pas un nombre premier.

Plusieurs méthodes de résolution peuvent être envisagées :

1. La « méthode directe » qui consiste à remplacer *x* par chaque valeur de l'univers du discours et à donner la valeur de vérité de la proposition obtenue. A l'aide de ce mode opératoire, on pourrait avoir différents résultats :
   1.1. L'apprenant utilise l'implication courante[165] qui consiste à évaluer l'implication seulement dans les cas où l'antécédent est vrai. Ici, les nombres impairs sont rejetés systématiquement. On peut avoir les résultats suivants :
      1.1.1. L'ensemble des nombres pairs privés de 0, 8, 14 et 20 ;
      1.1.2. L'ensemble des nombres pairs privés de 8, 14 et 20, 1 étant pris comme un nombre premier.
      1.1.3. L'ensemble des nombres pairs privé de 20 dans la mesure où 1 est considéré comme un nombre premier ;
      1.1.4. L'ensemble des nombres pairs non nuls, privé de 20 ;

Ces deux réponses peuvent provenir de la confusion entre *nombres premiers* et *nombres impairs*.

Dans les deux premiers cas, l'étudiant fait bien la distinction entre *nombre premier* et *nombre impair*. Produire ces réponses revient à traiter l'implication comme une conjonction. Ce résultat peut également se justifier par la conception sous-jacente suivante : « l'énoncé ne concerne que les pairs » (Durand-Guerrier, 2003, 2005, p.47).

Il faut préciser que, du point de vue linguistique, la mise en œuvre de l'implication courante est congruente[166] à l'énoncé : elle consiste à prendre un nombre et voir s'il est pair :

- S'il est pair, je regarde son successeur, si son successeur est un nombre premier, je le retiens, sinon je le rejette.

Si ce nombre n'est pas pair, je le rejette.

[165] L'implication utilisée en dehors du cadre mathématique, dans des situations de la vie courante.
[166] Duval (1998)

1.2. L’apprenant connait les règles de vérité d’une implication matérielle, à savoir qu’une implication est vraie lorsque l’antécédent est faux, ou alors antécédent et conséquent sont simultanément vrais. Elle est fausse dans le seul cas où l’antécédent est vrai et le conséquent faux. Ceci peut conduire aux deux résultats ci-dessous selon que 1 est considéré comme un nombre premier ou non :

1.2.1. L’ensemble des entiers naturels plus petits que 20 privé de 0, 8, 14 qui est le résultat correct ;

1.2.2. L’ensemble des entiers plus petits que 20, privé de 8 et de 14. Il considère ici que 1 est un nombre premier.

2. La deuxième méthode consiste à utiliser la négation de la phrase, ce qui suppose que l’apprenant connaisse la signification de la négation d’une phrase, plus particulièrement d’une phrase ouverte, et sache construire la négation d’un énoncé conditionnel.

   En passant par la négation, il va rechercher les éléments de l’univers du discours qui rendent vraie cette négation, c’est-à-dire les contre-exemples, qu’il va retirer de la liste des valeurs considérées. Ces contre-exemples rendent la phrase initiale fausse.

   La négation de la phrase ouverte $\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$ est $(P(x)\ et\ (non\ Q(x)))$ et s’interprète ici par « *x* est un nombre pair et son successeur n’est pas un nombre premier ».

Les entiers pour lesquels la négation est vraie sont 0, 8, 14 et 20. Il est possible que 0 ne figure pas dans cette liste, 1 étant considéré comme un nombre premier. L’ensemble donné sera alors l’univers privé de 8, 14 et 20.

Il faut noter que l’étudiant peut produire d’autres formes de la négation inappropriées. Elles conduiraient probablement à un résultat erroné. Par exemple si l’étudiant considère que la négation est $\left(non\ P(x) \Rightarrow non\ Q(x)\right)$ et utilise l’implication courante, il va retirer tous les nombres impairs dont le successeur n’est pas premier.

3. La troisième méthode met en œuvre la contraposition.

Pour cela, l’étudiant doit savoir qu’une implication matérielle et sa contraposée ont la même valeur de vérité. Comme pour l’énoncé direct, l’utilisation de la contraposée demande une bonne connaissance des conditions de vérité d’une implication, puisqu’en effet la contraposée est aussi une implication.

Nous rappelons que la contraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $(non\ Q(x)) \Rightarrow (non\ P(x))$. Il s’agit de travailler avec la phrase ouverte « *Si le successeur de x n’est pas premier, alors x n’est pas pair* », qui est plus complexe que la phrase initiale. La propriété « ne pas être premier » s'applique au successeur de x et non à x. L'évaluation de la valeur de vérité d'une instance de cette phrase pour un entier inférieur à 20 a donné consiste à x regarder si le successeur de ce nombre est premier :

a) S'il est premier, je rejette a ;
b) S'il n'est pas premier, je regarde si a est pair ou non ;
   - si a n'est pas pair, je le retiens,
   - si a est pair, je le rejette ;

Il faut remarquer que, du point de vue de la logique naturelle, en utilisant la contraposée, tous les nombres passent au crible, contrairement à l'utilisation de l'énoncé initial où on ne considère systématiquement que les nombres pairs.

L'utilisation de la contraposée permet de faire émerger les nombres impairs sauf 1. Les nombres pairs ne sont pas retenus, sauf dans le cas d'un usage incorrect de la contraposée.

Il est possible de voir apparaître en réponse, un ensemble de successeurs plutôt que les nombres dont il est question.

Catégorisation des réponses :

Cet exercice appartient au domaine de l'arithmétique ; la manière de présenter la propriété caractérisant les éléments de l'ensemble est inhabituelle. Il vise à évaluer si les étudiants connaissent les conditions de vérité d'une implication, ou s'ils savent utiliser la négation d'une implication, les deux aspects étant étroitement liés. Notre hypothèse, fondée sur les résultats de recherche et les observations naturalistes, est qu'une majorité d'étudiants ne considérera pas les nombres impairs (Durand-Guerrier, 2003).

Nous indiquons ci-dessous les réponses que l'on peut trouver selon les modalités d'évaluation des implications matérielles mise en œuvre :

A1 : $\{1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$ qui est la bonne réponse, celle qu'obtiendraient ceux qui connaissent les règles de vérité de l'implication matérielle et qui ont utilisé la phrase donnée en énoncé ou sa contraposée, ou encore ceux qui sont passé par la négation de la phrase en identifiant les contre-exemples. L'utilisation correcte de la contraposée permet aussi d'obtenir ce résultat.

A1* : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$ qui est la réponse de ceux qui connaissent les règles de vérité de l'implication matérielle, qui ont utilisé la phrase donnée en énoncé ou sa contraposée et qui ont compté 1 comme un nombre premier.

A2 : $\{2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$ qui est la réponse de ceux qui ont mis en œuvre l'implication courante ou la conception selon laquelle l'énoncé ne concerne que les nombres pairs (Deloustal-Jorrand (2000-2001), Rogalski & Rogalski (2004)).

A2* : $\{0, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$ qui provient de la même conception que la réponse **A2,** les étudiants ayant considéré 1 comme un nombre premier.

A3 : Un sous-ensemble de l'ensemble des entiers compris entre 0 et 20 qui contient toutes les valeurs qui rendent l'énoncé faux (0, 8, 14, 20). On peut faire l'hypothèse que l'étudiant ne les a pas identifiées, ou fait une confusion entre impair et premier.

A3* : Un sous-ensemble de l'ensemble des entiers compris entre 0 et 20 qui contient deux ou trois valeurs rendant faux l'énoncé.

A4 : $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ qui est la réponse de ceux qui ont utilisé la contraposée de l'énoncé et l'implication courante. Celui qui aurait utilisé en guise de contraposé l'énoncé $non\ P(x) \Rightarrow non\ Q(x)$, et l'implication courante produit également cette réponse.

A5 : L'ensemble de tous les nombres premiers. On mettra également dans cette catégorie l'ensemble des nombres premiers où figure 1, du fait que certains pensent que 1 est premier.

A6 : Toute réponse autre que celles qui ont été énumérées ci-dessus

A7 : pas de réponse

1.2 Analyses a posteriori

1.2.1 Analyse des réponses des étudiants et du module de suivi

Tableau T1(1) : Classement des réponses des étudiants

A1	A1*	A2	A2*	A3	A3*	A4	A5	A6	A7
6 E36/E37/ E46/E54/ E55/E60	4 E22/E44/ E45/E49	27 E02/E03/E08/E09/E10/ E15/E20/E21/E25/E27/ E28/E29/E30/E33/E40/ E42/E43/E47/E51/E52/ E53/E58/E59/E61/E63/ E65/E67/	2 E13/E19	3 E16/E18/ E62	4 E14/E24/ E38/E57	0	2 E01/E64	12 E05/E06/E12/ E17/E23/E26/ E35/E39/E50/ E56/E66/E68	8 E04/E07/ E31/E32/ E34/E41/ E48/E11

Dans la catégorie **A6**, les réponses sont assez disparates :

E23 a donné tous les nombres impairs et aucun nombre pair ; c'est le phénomène que nous avons prévu dans la 3ème méthode de notre analyse a priori.

E56 a donné tous les nombres premiers auxquels il a adjoint 9 et 15. Il est possible que ce dernier fasse une confusion entre nombre premier et nombre impair. En dehors de 2, les nombres qu'il donne sont les successeurs respectifs des valeurs qui rendent l'antécédent vrai : cet étudiant a considéré les successeurs des nombres pairs.

E66 a donné les nombres pairs et premiers : dans sa copie, il donne l'ensemble des nombres pairs, puis l'ensemble des nombres premiers. Il traite cette implication comme s'il s'agissait de $P(x) \vee Q(x)$.

Les étudiants **E05**, **E06**, **E12**, **E17**, **E50** et **E68** ont donné des ensembles constitués essentiellement de nombres pairs. Par exemple :

E05, E12 : $\{2, 4, 6, 12, 16, 18\}$

E50 : $\{2, 4, 6, 10, 12, 16\}$

Ces réponses sont proches de celles de la catégorie **A2**. Nous faisons l'hypothèse que ces étudiants utilisent l'implication courante en faisant des erreurs sur la reconnaissance des nombres premiers.

Les réponses de la catégorie A1 et A1*

Nous faisons l'hypothèse que les étudiants qui ont donné les réponses dans ces catégories, connaissent les règles de vérité d'une implication. Dix réponses se retrouvent dans ces deux catégories soit moins de 15% de l'effectif total.

Les réponses de catégorie A2

Elles représentent 41,2% de la population. Les étudiants mettent en œuvre le conditionnel courant, et ceci montre une persistance le l'usage courant de l'implication, même en contexte mathématique : la règle-en-acte selon laquelle on évalue seulement les cas où l'antécédent est vraie, est utilisée. Ce résultat est conforme aux observations naturalistes déjà réalisées (Durand-Guerrier, 2003).

Lors des échanges qui ont eu lieu autour de cet exercice pendant le module de suivi, des désaccords entre les étudiants sont apparus pendant la phase de travail en groupe. Cette conception a été explicitée par certains d'entre eux[167].

> **4 E1** : Nous sommes à la première question. On dit « déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 vérifiant la propriété : « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier » ». […] Moi, je pense que puisque la propriété s'intéresse aux nombres inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient une certaine propriété, il fallait essayer de considérer le fait que le successeur du nombre est premier dans le cas où le nombre lui-même est pair. Ça ne veut pas forcément dire que tous les nombres qu'on doit proposer sont les nombres pairs. Pour cela, je propose que dans l'ensemble qu'on doit donner pour réponse, tous les nombres impairs doivent y figurer.

E1 propose la réponse correcte et donne un argument de type pragmatique pour son choix ; il manifeste une connaissance-en-acte : « considérer le successeur qui est premier dans le cas où le nombre est pair, et prendre les impairs ». Il prend en compte la possibilité pour l'antécédent d'être faux, mais n'explicite pas les raisons du choix des nombres impairs. Ceci pourrait être dû à l'indisponibilité des règles de vérité de l'implication qui renvoie à l'aspect prédicatif de la connaissance. Cette réponse n'est pas partagée par ses camarades qui ne prennent ne compte que les nombres pairs.

> **22 E1** : Deux est pair, donc son successeur doit être 3. On prend 4. Comme 4 est pair, son successeur va être 5 qui est premier. On prend 6. 6 est pair, son successeur est 7 qui est

[167] Voir Annexe 4, exercice 1

premier. On va prendre maintenant 8, 8 est pair, mais 9 ne peut pas être son successeur parce que 9 n'est pas premier.

23 E2 : Non, 9 est son successeur, mais n'est pas premier. 8 ne doit pas être pris.

24 E3 : 8 doit être pris, c'est 9 qui ne doit pas être pris.

25 E2 : On doit prendre les nombres dont les successeurs sont premiers.

26 E3 : Même 9.

27 E2 : Pourquoi 9 ? Comprends bien. Si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier. On prend les nombres qui sont tels que, lorsque ce nombre est pair, son successeur doit être premier

La reformulation proposée par **E2** à la réplique 27 rend explicite le fait qu'il met en œuvre l'implication courante qui consiste à ne considérer que les nombres pairs ; il rejette automatiquement les nombres impairs : on retrouve le phénomène qui consiste à ne prendre en compte l'implication que lorsque l'antécédent est vrai :

64 E3 : Si x est pair

65 E1 : Et sinon ?

66 E2 : Si x est pair et que son successeur est premier

67 E1 : Si x n'est pas pair, qu'est ce qu'on fait ?

68 E2 : Maintenant…, C'est justement.. ;

69 E3 : On ne le prend pas

E3 à la ligne 69 a une réplique qui renvoie au traitement de l'implication comme une équivalence :

« si P, alors Q, et si non P, alors non Q »

Dans son souci de convaincre ses camarades sur la nécessité de retenir les nombres impairs, **E1** change de stratégie :

72 E1 : je vais vous proposer un énoncé, vous allez me répondre. […] Si on me dit maintenant *Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20 tels qu'ils soient pairs et que leur successeur soit premier*. Vous allez proposer quoi ?

78 E1 : J'ai changé le fait que le *si*, la place du *si*. J'ai imposé une condition pour les nombres qui sont pairs

E1 change la formulation de l'énoncé. Il propose de déterminer un ensemble dont la propriété caractéristique est une conjonction, $P(x) \wedge Q(x)$, et qui est celle de l'ensemble donné par ses camarades (catégorie **A2**).

Cet étudiant met en évidence deux propriétés qui ne sont pas équivalentes, et qui caractériseraient deux ensembles. En effet, les phrases ouvertes $P(x) \wedge Q(x)$ et $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ne sont pas équivalentes ; interprétées dans l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20, elles ne peuvent caractériser un même ensemble.

Deux théorèmes-en-acte se dégagent de ces échanges :

- une implication ouverte est satisfaite par un élément de l'univers du discours lorsque cet élément satisfait l'antécédent et le conséquent (**E2**) ;
- les éléments qui satisfont une implication ouverte sont ceux qui satisfont l'antécédent et le conséquent, et ceux qui ne satisfont pas l'antécédent (**E1**).

À la fin des débats en groupe, nous avons fait une mise en commun[168] des résultats, et avons obtenu des résultats différents dans chaque groupe : le premier groupe a produit la réponse correcte, et le second, l'ensemble de nombres pairs dont le successeur est premier. Nous avons demandé à l'étudiant **E3** du premier groupe de justifier leur résultat. Nous présentons sa justification :

> **5 E7** : […]. Notre ensemble est comme ça du fait qu'on a demandé les nombres entiers inférieurs ou égaux à 20. On se place d'abord dans l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20. Maintenant dans ces nombres entiers-là, on dit maintenant que certains vérifient une certaine propriété qu'on nous a donnée. C'est-à-dire que si x est un nombre pair, c'est-à-dire que la propriété qu'on nous a donnée concerne seulement les nombres pairs. C'est-à-dire que les impairs d'office on doit les prendre. alors son
>
> **6 P** : vous devez les prendre pourquoi ?
>
> **7 E3** : on doit les prendre parce qu'ils sont dans l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 20.
>
> **8 P** : ce que tu dis, c'est que la propriété ne concerne que les nombres pairs.
>
> **9 E3** : Oui, madame, la condition est fixée pour les nombres pairs, maintenant les impairs n'ont aucune condition, et ils sont inférieurs ou égaux à 20. On doit les prendre, parce qu'ils sont inférieurs ou égaux à 20. Maintenant on doit prendre maintenant les pairs sous la condition qu'on nous a donnée aussi.

[168] Voir annexe 2

10 P : Oui, …

11 E3 : et la condition qu'on nous a donnée c'est *si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier*. Sous cette condition on prend le reste des nombres impairs.

Il y a chez **E3**, la manifestation d'une connaissance-en-acte, elle n'est pas prédicative.

Pour les amener à expliquer leur résultat, nous avons commencé par identifier la structure de l'énoncé :

13 P : quelle est la forme de l'énoncé que vous avez, sa structure ?

14 E5 : je pense qu'on a un énoncé de la forme $P \Rightarrow Q$

16 E3 : $P \Rightarrow Q$

18 E2 : $P \Rightarrow Q$

Les étudiants donnent une proposition, et ce qui donne une occasion idoine pour préciser la différence entre une proposition et une phrase ouverte. Nous avons rectifié la forme de l'énoncé formalisé en précisant qu'il s'écrivait $P(x) \Rightarrow Q(x)$, puis nous avons demandé de trouver la valeur de vérité de l'implication $P(0) \Rightarrow Q(0)$:

20 E2 : C'est faux madame, la proposition sera fausse.

21 P : Si 0 est pair, alors 1 est premier. Pourquoi c'est faux ?

22 E3 : C'est faux parce que 1 n'est pas premier et 0 est pair. L'implication sera fausse parce qu'on a Q qui est fausse et P qui est vraie. Ça donne l'implication fausse.

Cette réponse de **E3** montre qu'il sait que l'implication est fausse lorsque l'antécédent est vrai et le conséquent est faux, ce qui est conforme à la logique naturelle.

Nous sommes revenus sur la table de vérité de l'implication que nous avons explicitée. D'où la question de **E3** :

33 E3 : Je voudrais savoir, est ce qu'on devait prendre les trois cas qui sont là ?

34 P : lesquels ?

35 E3 : Faux-vrai ; faux-faux et vrai-vrai ?

Nous nous sommes appuyée sur la phrase ouverte et quelques éléments du domaine pour répondre : nous avons proposé aux étudiants de déterminer la valeur de vérité des implications matérielles obtenues pas instantiation de x par des valeurs du domaine. Toutes les distributions des valeurs de vérité sur l'antécédent et sur le conséquent ont émergé. Cela a permis de mettre en lumière un exemple d'usage des tables de vérité.

1.2.2 Analyse des réponses des élèves

Tableau T1(2) : Classement des réponses élèves

A1	A1*	A2	A2*	A3	A3*	A4	A5	A6	A7
0	**0**	**18** L07, L11, L12, L18, L28, L35, L36, L40, L42, L45, L47, L48, L52, L55, L57, L59, L60	**4** L01, L06, L44, L61	**0**	**1** L29	**0**	**3** L16, L27, L31	**16** L02, L04, L08, L09, L10, L13, L30, L32, L33, L34, L39, L46, L49, L51, L53, L54, L58	**19** L03, L05, L14, L15, L17, L19, L20, L21, L22, L23, L24, L25, L26, L37, L38, L41, L43, L50, L56

Deux différences significatives apparaissent dans les réponses des élèves : tout d'abord aucun d'entre eux ne propose les impairs parmi les nombres retenus ; d'autre part, le nombre de non réponses et de réponses « autres » est beaucoup plus important (près des deux tiers contre moins d'un tiers pour les étudiants).

<u>Dans la catégorie A6</u>

Nous avons distingué les réponses du type :

- $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19\}$ constituées des nombres pairs dont le successeur est premier, et le successeur de ces nombres pairs. Il y a des variantes de cet ensemble composées de tous les nombres ci-dessus avec en plus les nombres 0, 1, ou 20. 6 élèves ont produit ce type de réponse. On lit dans la copie de **L49** :

  « *pour les pairs,*$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, *et les premiers* $\{1, 3, 7, 11, 13, 17, 19\}$, donc ils sont au nombre de $\{16\}$ ».

  Cet élève fait la réunion des nombres pairs, et des nombres premiers. On peut faire l'hypothèse que les autres ont utilisé le même schème, à la différence qu'ils n'ont considéré que les pairs à successeur premier (pour certains 1 est un nombre premier). Ce traitement de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ renvoie au traitement de $P(x) \vee Q(x)$.

- Les autres réponses que nous n'arrivons pas à caractériser (voir tableau T1(3) en annexe 6)

Nous présentons ci-dessous le tableau comparatif des réponses des élèves et des étudiants que nous avons interrogés :

Tableau comparatif des réponses

	A1	A1*	A2	A2*	A3	A3*	A4	A5	A6	A7
Les étudiants	8,8%	5,9%	39,7%	2,9%	4,4%	5,9%	0%	2,9%	17,7%	11,8%
Les élèves	0%	0%	29,6%	6,6%	0%	1,6%	0%	4,9%	26,2%	31,1%

L'absence des réponses des catégories **A1** et **A1*** pourrait provenir du fait que les notions de logique qui sont généralement dispensées au lycée ne portent que sur les techniques de démonstration (démonstration par l'absurde, démonstration par récurrence, démonstration par la méthode « directe »[169]…). Les notions de logique propositionnelle, en l'occurrence les tables de vérité, ne rentrent pas dans ces notions. Nous faisons l'hypothèse que la pratique de la démonstration des énoncés conditionnels sous hypothèse est une cause de ces réponses. Cette hypothèse est corroborée par les prévisions des enseignants **En1** et **En2** concernant les réponses probables de leurs élèves à cet exercice :

D'après **En1**[170] :

> **(113) En1** : et là, celui qui va essayer de faire, se dire bon, x et on va dire qu'il y a beaucoup qui vont raisonner en disant *supposons x est pair,* il dit x est égal à $2k$. Alors, $x+1$ est premier, $x+1=2k+1$. Là il se met à rechercher qu'est ce qu'un nombre premier en voyant voir comment il peut, s'il peut prouver ça.

D'après **En2** :

> **(102) En2** : […] Je pense que, par rapport à moi, sur dix élèves que j'ai encadrés, la moitié peut répondre, la moitié pas. Pas parce que les autres, les autres, ils n'auront pas… Les autres je précise vous donnerons la solution uniquement dans l'ensemble des nombres pairs inférieurs à vingt, c'est-à-dire, ils iront chercher les solutions dans les nombres pairs.

Conclusion

Les résultats à l'issue de l'analyse de cet exercice vont dans le même sens que ceux de Durand-Guerrier (2003) et de Rogalski & Rogalski (2004) : pour un certain nombre

[169] C'est la démonstration des énoncés de la forme $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$, où on démontre $Q(x)$ sous l'hypothèse $P(x)$.

[170] Voir annexe 9

d'étudiants (40% pour ce qui nous concerne), ils ne considèrent que les éléments qui vérifient l'antécédent ;

Plusieurs réponses des élèves dans la catégorie **A6** renvoient au traitement de la disjonction. Chez les étudiants, les réponses renvoient plutôt au traitement de la conjonction, avec quelques « oublis ».

Cet exercice pourrait permettre :

- de travailler sur les règles de vérité de l'implication ;
- de mettre en valeur l'utilisation des tables de vérité ;
- de mettre en défaut la règle-en-acte qui consiste, pour évaluer une implication, à évaluer d'abord l'antécédent de cette implication, et de ce fait, faire un traitement de l'implication comme une conjonction ou une disjonction ;
- de préciser, du point de vue du langage, la différence entre les deux énonciations suivantes qu'on retrouve dans les débats des étudiants : « si … alors… », et « lorsque …, alors … ».

2 Exercice 6[171]

Dans ce qui suit, (u_n) *désigne une suite définie par récurrence sous la forme «* $u_{n+1} = f(u_n)$ *», où* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*. On a alors le résultat suivant :*

(P) « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) *si :*

6.1 *L'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*

6.2 *L'équation « f(x)=x » a au moins une solution.*

Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si :

6.3 *La suite* (u_n) *est convergente*

6.4 *La suite* (u_n) *n'est pas convergente*

2.1 Analyse a priori

L'exercice que nous proposons est tiré de (Durand-Guerrier, 1996, p.151). Il figure dans le questionnaire qui a été proposé à la rentrée universitaire 1992 à 273 étudiants arrivant en Deug A première année au centre Scientifique Joseph Fourier de Valence (Drôme)[172].

Dans son questionnaire, l'énoncé de (P) est :

---

[171] Il correspond à l'exercice 5 dans le questionnaire des élèves.

[172] En France

(P') Si la suite (u_n) converge vers le réel L, alors L est solution de l'équation (E) : « $f(x) = x$ ».

Notre motivation pour le choix de cet exercice vient de ce que l'implication est au centre de son traitement, mais elle est mise en œuvre de façon différente des exercices 1 et 7. Dans l'exercice 1, il s'agit de déterminer un ensemble défini à l'aide d'une propriété qui est une implication ouverte. L'ensemble cherché est constitué des entiers naturels qui satisfont cette propriété. Dans l'exercice 7, les étudiants doivent évaluer une implication dont l'antécédent est faux. L'exercice 6 porte sur les règles d'inférence : on s'intéresse à la question de la reconnaissance des situations qui permettent ou ne permettent pas de faire des déductions. Sans méconnaitre l'importance des formulations langagières, nous ne les avons pas prises en compte dans nos analyses.

Pour notre analyse a priori, nous commençons par une étude de la structure logique de l'énoncé :

(P) ***« Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation f(x)=x ».***

Cette étude prend appui sur les analyses de V. Durand-Guerrier (1996), contenues en pages 151-153. Sa formulation de départ n'est pas la même, mais les transformations qu'elle effectue l'amènent à la même formulation que celle qui est la nôtre.

Nous précisons que le théorème général qui est énoncé, est connu dès la classe de terminale. On le rencontre dans le manuel de mathématiques, terminale C au programme, au Cameroun[173], mais il ne figure pas dans le cours d'analyse de première année de licence de mathématiques contenu dans le polycopié que nous avons analysé ; il est toutefois utilisé au cours des séances de travaux dirigés. La manière d'en faire usage ici n'est pas habituelle.

Structure logique de (P) :

On est en présence d'un énoncé conditionnel dont la structure logique est complexe. Il fait intervenir trois objets mathématiques distincts : la suite (u_n), une équation, et la fonction numérique f qui relie les deux premiers objets. La limite qui est évoquée dans le conséquent, est implicite dans l'antécédent. En effet, dire que la suite converge signifie qu'elle admet une limite.

---

[173] Dans le manuel de la collection CIAM Terminale S, on le rencontre au chapitre 13 (Suites numériques), paragraphe 3 (Compléments sur les suites), page 286) et voir analyse de manuel au chapitre 3 section 2.4

(P) peut se ramener à l'énoncé minimal, où l'équation n'est plus explicite :

« Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de la fonction f »

D'après Durand-Guerrier,

> « La simplicité apparente de cet énoncé cache en fait une structure complexe qui apparait lorsqu'on cherche à le formaliser, même partiellement. L'énoncé donné est d'ailleurs un intermédiaire nécessaire ; en effet, pour formaliser l'énoncé, la présence d'un pronom nous oblige à introduire l'objet « limite ». » (op. cit. p.151).

En effet, comme nous le disions plus haut, dire que la fonction converge revient à affirmer l'existence d'un nombre réel l tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Pour formaliser cet énoncé, V. Durand-Guerrier prend comme univers du discours la réunion des ensembles suivants : l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des suites numériques.

Elle choisit également :

- un symbole de relation à deux places R, exprimant qu'une suite converge vers un réel donné ;
- un prédicat à deux places noté S, qui exprime la relation entre une telle suite et la fonction associée ;
- un prédicat T à deux places exprimant la relation entre une fonction et son point fixe.

À l'énoncé (P), on peut associer la formule :

$$S(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow T(y,z) \text{ (1)}$$

L'interprétation de la clôture universelle de (1) dans l'univers considéré est un théorème, donc un énoncé vrai.

Lorsqu'on se place dans l'univers du discours, par instanciation des variables x, y et z respectivement par u qui désigne une suite, f qui désigne une fonction continue et l un réel, le théorème se formalise par :

$$\forall u, \forall f, \forall l, S(u,f) \wedge R(u,l) \Rightarrow T(f,l) \text{ (2)}$$

Étant donné que $S(u,f)$ qui s'interprète dans le domaine considéré par $u_{n+1} = f(u_n)$ est vrai, l'énoncé (P) va alors s'écrire :

$$R(u,l) \Rightarrow T(f,l) \text{ (3)}$$

qui s'interprète par « Si la suite (u_n) converge vers l, alors l est un point fixe de f ». Cet énoncé est en fait implicitement quantifié. Son écriture est :

$$\forall l, R(u,l) \Rightarrow T(f,l) \text{ (4)}$$

Et s'interprète par :

$$\forall l, \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow f(l) = l \text{ (5)}$$

Le réel l est un objet intermédiaire, nécessaire au traitement de cette situation, où les objets en jeu sont la suite (u_n) et l'équation $f(x) = x$.

Contrairement à ce qu'on peut penser, la lettre l est liée par le quantificateur universel qui porte sur toute la phrase. Si on l'introduit à l'aide du quantificateur existentiel qui porte sur l'antécédent pour traduire la convergence de la suite on obtient l'énoncé ouvert en l :

$$\forall f, \forall (u_n), (\exists l, \lim_{n\to+\infty} u_n = l) \Rightarrow f(l) = l \text{ (6)}$$

ce qui est en contradiction avec le fait qu'un théorème est un énoncé clos. Par ailleurs, cette formulation produit une contraposée qui n'a plus sa signification originale, à savoir, « si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, alors la suite (u_n) ne converge pas ».

Des résultats antérieurs

Nous présentons les résultats obtenus par Durand-Guerrier pour cet exercice, qu'elle a appelé « énoncé A4 » dans sa thèse. Nous rappelons au préalable la catégorisation qu'elle a choisie pour les réponses :

- le codage 0 correspond à un cas de non réponse ;
- la réponse de type 1 correspond à une réponse positive que l'on obtient en appliquant la règle du Modus Ponens, y compris lorsque cette application n'est pas légitime parce que la réponse donnée correspond à ce que l'on obtiendrait en appliquant cette règle à la réciproque de l'énoncé qui n'est pas un théorème ;
- la réponse de type 2 correspond à une réponse négative, que l'on obtient en appliquant la règle du Modus Tollens, y compris de manière illégitime, ou en transformant la question posée ;
- la réponse de type 3 correspond à une réponse du type « on ne peut pas savoir », « pas forcément », « pas toujours », …

- la réponse de type 9 correspond à une réponse qui ne rentre pas explicitement dans l'un des quatre cas précédents.

La répartition des résultats est contenue dans le tableau ci-dessous :

Tableau T6(1)

	Question a	**Question b**	**Question c**	**Question d**
Réponse de type 1	0%	52%	**<u>79,1%</u>**	0,4%
Réponse de type 2	**<u>81,3%</u>**	2,9%	0,4%	53,4%
Réponse de type 3	5,9%	**<u>19,8%</u>**	2,2%	**<u>18,7%</u>**
Réponse de type 9	10,6%	21,6%	15,8%	22%
Non réponses (type 0)	2,1%	3,7%	2,6%	5,5%

Les pourcentages pour les réponses exactes sont en gras et soulignées.

Une analyse plus affinée fait ressortir le fait que certains sujets traitent l'implication comme s'ils étaient en face d'une équivalence, c'est-à-dire que leurs réponses sont celles qui seraient correctes si l'énoncé biconditionnel correspondant était un théorème.

Les réponses aux quatre items satisfont le codage 2112 et concerne 71 copies. Les réponses toutes correctes donnent le codage 2313, et concerne 19 copies seulement.

Analyse a priori :

Nous rappelons que les règles d'inférence du Modus Ponens et du Modus Tollens permettent de faire des déductions lorsqu'on se trouve en présence d'un énoncé conditionnel vrai dont l'antécédent est vrai ou dont le conséquent est faux[174]. Lorsque la réciproque de l'énoncé n'est pas un énoncé vrai, on ne peut faire les déductions que dans ces deux cas.

Dans le cas ou l'antécédent est faux, le conséquent peut être soit vrai, soit faux ; dans le cas où le conséquent est vrai, l'antécédent peut également être soit vrai, soit faux.

Dans le traitement des suites récurrentes définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, dans l'enseignement secondaire ou en début d'université on rencontre très peu de cas où la suite n'est pas convergente lorsque l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. Dans la quasi totalité des exercices que le manuel de terminale C propose, il est demandé de déterminer les points fixes de la suite, puis d'étudier dans le cas où au moins un point fixe existe, la convergence de la suite. Ceci favorise le développement de connaissances-en-acte

[174] Voir chapitre 2, section 1.2.1.4

qui sont susceptibles de pousser les élèves ou les étudiants à faire des inférences non valides, par exemple lorsqu'on a établi que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution et qu'il faut se prononcer sur la convergence de la suite (u_n). Cependant, dans le manuel ci-dessus cité, dans la partie consacrée au cours, sur les trois exemples de suites définies par récurrence, il y en a un (le troisième) qui présente une suite non convergente dont la fonction associée a un point fixe.

Pour les propositions de réponses, nous n'allons pas conserver la même catégorisation que celle de V. Durand-Guerrier présentée ci-dessus, du fait que nous nous intéressons non seulement aux conduites inférentielles, mais au contenu des réponses des étudiants. Toutefois, nous en tiendrons compte dans l'exploitation globale des réponses.

Énoncé 6.1 : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si l'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*

Les réponses attendues sont :

1. la suite (u_n) ne converge pas (**R1_1**). Cette réponse résulte de l'application du Modus Tollens. Ceci est conforme à la logique naturelle. Elle peut également provenir du cours de mathématiques. A l'université, l'accent est mis sur l'étude de la convergence des suites, et lorsqu'elle est avérée, on résout l'équation $f(x) = x$;
2. on ne peut rien dire (**R1_2**), pour celui qui ne connait pas ou ne sait pas utiliser la règle du Modus Tollens ;
3. d'autres réponses peuvent être proposées (**R1_3**), mais il est très peu probable que la réponse « la suite converge » apparaisse dans cet item ;
4. l'étudiant ne donne aucune réponse (**R1_4**).

Énoncé 6.2 : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si l'équation « $f(x) = x$ » a au moins une solution.*

1. On ne peut rien dire ou on ne peut pas conclure (**R2_1**). C'est la réponse correcte. L'étudiant reconnait ici un cas où on ne peut pas faire une déduction. Cette réponse peut aussi provenir d'une situation vécue par l'étudiant, où des exemples et des contre-exemples sont disponibles chez ce dernier.
2. La suite converge (**R2_2**). On peut supposer ici qu'il y a utilisation de l'équivalence en lieu et place de l'implication. On peut également mettre en cause une mauvaise compréhension de la pratique mathématique : les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont

généralement déterminées lorsqu'on a l'assurance que la suite converge. Or dans la plupart des exercices où l'on est amené à résoudre cette équation, la première question est de résoudre l'équation en question, puis de montrer que la suite est convergente. Ne considérer que les fonctions convergentes va dans le sens des objectifs de l'enseignement sur les suites ; nous lisons dans le livre des programmes de l'enseignement des mathématiques de l'enseignement secondaire général au Cameroun[175] :

> « Un des objectifs de cette partie est l'étude sur quelques exemples simples des méthodes d'approximation d'un nombre réel au moyen d'une suite »

Pour remplir cet objectif, les enseignants sont amenés à faire travailler leurs élèves prioritairement sur des suites convergentes.

3. La suite converge si la solution de l'équation $f(x) = x$ est unique (**R2_2***), pour ceux qui ont fait le transfert de l'unicité de la limite aux solutions de l'équation ;
4. Des réponses autres que celles qui sont proposées ci-dessus (**R2_3**). Il est peu probable que la réponse « la suite ne converge pas » soit donnée ;
5. Pas de réponse (**R2_4)**

Énoncé 6.3 : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation «$f(x) = x$» si la suite (u_n) est convergente*

1. L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution (**R3_1**), qui est une réponse incomplète. Nous pensons qu'elle sera donnée par une majorité d'étudiants ; c'est une situation ordinaire qu'ils rencontrent assez souvent dans l'étude des suites numériques. En effet, dans la pratique, ils montrent que la suite est convergente, puis déterminent la limite en résolvant cette équation.

   Il faut toutefois noter que le passage de « la suite (u_n) est convergente » à « $f(x) = x$ admet une solution » n'est pas une inférence immédiate : de « la suite (u_n) est convergente », on déduit via la définition d'une suite convergente l'existence d'un réel l qui est la limite de la suite. En effet, la convergence de la suite assure l'existence du réel l comme nous le disions ci-dessus. D'après le théorème, l satisfait l'équation $f(x) = x$, ce qui permet de déduire par la règle du Modus Ponens que cette équation admet au moins une solution.

[175] Programmes en vigueur depuis le 18 août 1998.

2. Il est possible que les étudiants imposent à l'équation d'avoir une solution unique pour les raisons que nous avons évoquées ci-dessus. La réponse est alors, « l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution » (**R3_1***).
3. L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution, dont une est la limite de la suite. Cette réponse est correcte (**R3_2**) ;
4. Des réponses autres que les précédentes (**R3_3**) ;
5. L'étudiant ne donne aucune réponse (**R3_4)**.

Enoncé 6.4 : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation* « $f(x) = x$» *si la suite* $(u_n\ )$ *n'est pas convergente*

1. On ne peut rien dire, ou on ne peut pas conclure (**R4_1**) : c'est la bonne réponse. On peut supposer que l'étudiant reconnait là un cas où on ne peut pas faire une déduction. Cette réponse peut également venir des habitudes scolaires : le fait qu'il n'ait pas à résoudre l'équation en dehors de la situation où la suite est convergente peut laisser l'étudiant indécis.
   Les étudiants peuvent passer par la contraposée de **6.2** pour faire cette déduction. En effet, dire que « si *la suite* (u_n) *n'est pas convergente, alors* $f(x) = x$ *n'admet pas de solution* », est équivalent à sa contraposée qui est « si $f(x) = x$ *admet au moins une solution*, alors *la suite* (u_n) *est convergente* ». Or si pour le second on ne peut rien dire de la vérité, il en sera de même pour le premier du fait de l'équivalence des énoncés.
2. L'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution (**R4_2**). L'étudiant répond comme s'il est en face d'une équivalence.
3. L'équation $f(x) = x$ admet plus d'une solution ou pas de solution (**R4_3**). Certains étudiants pensent que si la suite (u_n) est convergente, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution. Le traitement de l'implication comme une équivalence va donc susciter cette réponse chez l'étudiant, et qui correspond à la négation de « l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution » ;
4. Toute autre réponse différente des précédentes (**R4_4**) ;

Pas de réponse (**R4_5**).

2.2 Analyses a posteriori

Dans ce qui suit, (u_n) *désigne une suite définie par récurrence sous la forme «* $u_{n+1} = f(u_n)$ *», où* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*. On a alors le résultat suivant :*

(P) « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si :

***6.1** L'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*

***6.2** L'équation « f(x)=x » a au moins une solution.*

Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si :

***6.3** La suite (u_n) est convergente*

***6.4** La suite (u_n) n'est pas convergente*

Nous dissocions le traitement des questions. Nous commençons par les questions **6.1** et **6.2**, puis nous terminons avec les questions **6.3** et **6.4**.

Item 6.1 : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si l'équation « f(x)=x » n'a pas de solution ?*

Les réponses détaillées de cet item sont contenues dans le Tableau T6(6) de l'annexe 6.

Tableau T6(2) : répartitions des réponses de l'item 6.1

	R1_1 La suite ne converge pas	**R1_2** On ne peut rien dire	**R1_3** Autre réponse	**R1_4** Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E02, E06, E07, E10, E12, E15, E17, E19, E22, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E33, E34, E37, E38, E39, E42, E43, E44, E45, E49, E52, E53, E55, E56, E57, E58, E61, E62, E63, E65, E66, E67, E68	**E21, E40, E59**	**E14, E41, E46, E48, E50**	E01, E03, E04, E05, E08, E09, E11, E13, E16, E18, E20, E23, E24, E35, E36, E41, E47, E51, E54, E60, E64
EFFECTIFS	**39**	**3**	**5**	**21**

21 étudiants n'ont pas répondu à la question. Des 47 qui ont proposé une réponse, 39 ont donné la bonne réponse. Cet effectif relativement élevé (représente <u>83% de ceux qui ont répondu</u>) était à prévoir, car la règle d'inférence utilisée qui est le Modus Tollens, vaut aussi bien en logique mathématique qu'en logique naturelle (Deloustal-Jorrand, 2004). De plus ce résultat est connu des étudiants. Le pourcentage de réussite à cet item est proche de celui de Durand-Guerrier (1996).

La proportion de bonnes réponses ne garantit pas toutefois la disponibilité de la règle du Modus Tollens chez certains étudiants comme le montre ces échanges entre les étudiants du groupe 2[176]. Leurs réponses sont des manifestations des connaissances-en-acte, avec des tentatives de justifications :

[176] Voir annexe 3, les étudiants du second groupe

1 E6 : **si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution**, on déduit de manière immédiate que f n'est pas convergente. Parce que si l'on essaie de regarder la … la réciproque … la contraposée de si f est convergente, sa limite est solution de $f(x) = x$, heuuu, non, attendez un peu

5 E5 : $f(x) = x$. Elle est fausse. Tu vois un peu, donc cela me parait un peu clair dans ma tête que si, que la position 6.1, donc, si $f(x) = x$ n'a pas de solution, alors u_n n'est pas convergente. Moi, ça me parait très clair.

16[177] E5 : et par conséquent $f(x) = x$ n'est pas convergente

17 E7 : par conséquent u_n n'est pas convergente.

18 E5 : u_n n'est pas convergente

Les étudiants utilisent à la règle du Modus Tollens en acte. Le fait que pour **E5** « ça parait très clair » et que chez **E6** « c'est immédiat » montre que cette règle est naturalisée. Le passage à la contraposée pour justifier la réponse met en évidence l'indisponibilité de l'aspect prédicatif de cette règle d'action chez ces étudiants. Ils ont des connaissances prédicatives sur la contraposée, mais pas sur le Modus Tollens qui apparait ici comme un invariant opératoire.

25 E5 : et la contraposée est très claire ! La contraposée dit « si la limite de la suite u_n

26 E7 : n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$

27 E6 : Il y a un problème, parce que, quand il a dit « si la limite »

Le passage à la contraposée va faire émerger les difficultés liées à la quantification implicite. Dans le langage courant, l'expression littérale de la contraposée met en évidence une contradiction entre la négation du conséquent « si la limite de la suite ne satisfait pas l'équation » et la négation de l'antécédent « la suite n'est pas convergente » qui signifie que la suite n'a pas de limite finie. Cela est dû au phénomène d'anaphore.

L'écriture formelle permet d'expliciter la quantification implicite sur l'objet *limite* dans l'expression de la convergence de la suite (u_n) ; il est introduit par le quantificateur universel. Cette écriture permet de construire la contraposée car elle lève l'ambiguïté sur le statut de la limite. Les difficultés dues au passage à la contraposition font l'objet des débats qui suivent :

28 E7 : Oui, c'est ça que je dis !

29 E6 : ça veut dire que la limite existe mais elle n'est pas solution. Mais la contraposition sera donnée, parce que dès que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution

30 E5 : Non, non, non …

31 E7 : Dès que l'équation $f(x) = x$

32 E5 : il y a un problème, il y a un problème. Non, dans la contraposée, je ne pense pas qu'on ait utilisé le mot *limite*.

33 E7 : Attend, on dit, la contraposée c'est

34 E5 : Je ne pense pas que le mot *limite* puisse être dedans

[177] Une erreur s'est glissée au cours de la numérotation, 16 vient immédiatement après 5.

35 E7 : la contraposée sera quoi ?

36 E6 : parce que la limite doit d'abord exister. Elle doit d'abord exister. Parce que si on dit la limite, si tu dis maintenant que

37 E5 : Heuu, si la limite, si la limite de la suite (u_n) est solution de, c'est-à-dire que,

38 E6 : si la limite, elle existe déjà, tu vois un peu, elle existe déjà

39 E5 : et dire après que la suite (u_n) est non convergente, ça n'a pas de sens. Tu me suis, donc moi je me dis maintenant que comme contraposée on doit dire que, si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors la suite n'est pas convergente. Moi je me dis que c'est ça la contraposée. Parce que dès lors que l'on met le mot *limite*, ça crée comme une sorte de quiproquo, on ne comprend plus rien.

Ces échanges mettent en évidence les difficultés liées aux relations entre les différents objets introduits. **E5** doit évacuer (ligne 39) le mot *limite* par transformation de la phrase, pour pouvoir énoncer la contraposée. Il obtient la contraposée correcte qui correspond à celle qui est obtenue à partir de la formalisation de l'énoncé de départ en quantifiant universellement la lettre de variable qui désigne la limite. En effet, la contraposée de (4) est :

$$\forall l, nonT(f, l) \Rightarrow non\ R(u, l) \text{ (7)}$$

Qui s'interprète par :

$$\forall l, f(l) \neq l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \neq l \text{ (8)}$$

C'est-à-dire que si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, alors, la suite (u_n) ne converge pas. C'est la formulation de **E5**. Ce dernier souligne la difficulté créée par la présence de *limite*.

Dans la catégorie **R1_3**, l'étudiant **E50** a répondu :

E50: « la suite n'existe pas »

On peut lier cette réponse au fait que les suites qui sont données en exercice sont telles que cette équation a généralement au moins une solution. L'étudiant ne concevrait donc pas qu'il puisse exister une suite telle que la fonction f associée n'ait pas de point fixe.

Item 6.2 : *Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite* (u_n) *si l'équation « $f(x) = x$ » a au moins une solution ?*

Les réponses détaillées de cet item sont contenues dans le Tableau T6(7) de l'annexe 6.

Tableau T6(3) : répartitions des réponses de l'item 6.2

	R2_1 On ne peut rien dire	R2_2 La suite cv	R2_2* La suite cv si sol unique	R2_3 Autre réponse	R2_4 Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E10, E15, E19, E22, E30, E37, E46, E63	E02, E06, E07, E12, E17, E21, E24, E26, E28, E29, E31, E32, E33, E38, E39, E43, E44, E45, E53, E57, E58, E59, E61	E49, E25, E62, E65, E68,	E14, E27, E34, E40, E42, E48, E50, E52, E55, E56, E66, E67	E01, E03, E04, E05, E08, E09, E11, E13, E16, E18, E20, E23, E35, E36, E41, E47, E51, E54, E60, E64
EFFECTIFS	**8**	**23**	**5**	**12**	**20**

48 étudiants ont donné une réponse à cet item, et parmi eux, 8 ont donné une réponse correcte. **E10** et **E30** ont donné les réponses respectives :

E10 : la suite peut être convergente

E30 : u_n n'est pas forcément convergente. L'une de ces solutions peut être la limite de u_n.

Les 6 autres ont répondu « on ne peut rien dire ».

Elles rejoignent la réponse « on ne peut rien dire », qui sous-entend que la suite peut être convergente comme elle peut être divergente. Par ailleurs, **E30** apporte une précision quant à la limite éventuelle de la suite.

Analyse des réponses de la catégorie R2_2*

Les étudiants qui ont donné les réponses dans cette catégorie ont subordonné la convergente de la suite à l'unicité des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$; **E49**, **E68**, **E65** sont explicites dans leur réponse :

« Si l'équation a une unique solution, la suite converge, sinon elle diverge. »

E25 l'exprime de façon plutôt implicite :

« La suite n'admet pas de limite car la limite de u_n est unique. »

Pour placer **E25** l'étudiant dans la catégorie **R2_2***, nous avons regardé ses réponses aux autres items, et il en ressort que l'unicité de la limite est mise en avant.

E62 interprète « l'équation admet au moins une solution » comme « l'équation a plusieurs solutions », d'où sa réponse :

E62 : La suite a plusieurs limites, ce qui contredit l'unicité de la limite, la suite diverge

On pourrait rapprocher les réponses de **E24**, **E33**, **E38** et **E45** à celles de cette catégorie. En effet, leur réponse, « la suite converge vers **cette** solution » laisse entendre que cette équation n'admet qu'une seule solution. Cette réponse pourrait également provenir d'une mauvaise compréhension de l'expression « au moins une solution », et c'est la raison pour laquelle nous l'avons rangée dans la catégorie **R2_2**. Nous pouvons dire que pour les étudiants ayant produit les réponses **R2_2***, l'énoncé « la suite (u_n) est convergente si et seulement si l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution » est vrai.

<u>Analyse des réponses de la catégorie R2_2</u> <u>(23 réponses)</u>

En dehors des étudiants **E21**, **E24** et **E59**, tous ont répondu à l'item **6.1** que la suite ne convergeait pas. On pourrait penser que ces étudiants considèrent qu'ils sont en présence d'une équivalence. Cela découle, comme nous l'avons présenté dans l'analyse a priori, des habitudes scolaires. Les réponses aux deux items suivants pourront éventuellement nous éclairer davantage.

Nous retrouvons les conséquences de cette pratique de classe derrière les réponses des étudiants **E02**, **E26**, **E27**, **E34**, et **E56** :

> **E02** : La suite converge et la limite en cas de solution multiple aura le signe des termes de la suite
>
> **E26** : u_n converge vers la solution qui vérifie les conditions de f

Au cours du module de suivi, nous avons eu les mêmes réponses qui ont déclenché une longue discussion entre les étudiants du groupe 1 pendant la phase de recherche par groupe. Ceux qui soutenaient que la suite était convergente prenaient en exemple un exercice qu'ils ont résolu en cours : la suite (u_n) était à termes positifs et l'équation $f(x) = x$ avait deux solutions, une positive et la deuxième négative. « Les conditions de la suite », « les propriétés de (u_n) », d'après les débats, c'est que la suite est à termes positifs, donc la limite doit être positive ; c'est aussi la conception de **E56** :

> **E56** : La suite converge vers cette solution à condition qu'elle soit positive

Nous présentons un extrait de ces débats contenus dans l'annexe 3[178] :

Nous rappelons la question :

Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si l'équation « $f(x) = x$ » a au moins une solution ?

> **13 E1** : **Deuxième**, l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, a au moins une solution.
>
> **21 E2** : Que peut-on dire au sujet de … l'équation *f(x)* a au moins une solution.
>
> **22 E4** : Il y a une condition, si la solution est négative ?
>
> **23 E3** : Non, là n'est pas le problème !
>
> **24 E2** : La limite d'une fonction peut être négative
>
> **28 E4** : tel que c'est, ça converge.
>
> **29 E2** : Vous racontez quoi-là ?

[178] Voir exercice 6

30 E4 : ça converge

L'étudiant **E4** soutient la convergence de la suite à partir du moment où l équation $f(x) = x$ admet au moins une solution, ce qui n'est pas l'avis des autres. Par ailleurs, il évoque la condition sur la limite.

38 E4 : Il y a une condition maintenant sur la limite, deux solutions distinctes

40 E2 : Non, il y a parfois que cette équation a deux solutions, une négative et une positive, et la limite est la solution positive.

42 E4 : c'est pourquoi je demandais si l'unique solution est négative ?

44 E3 : ça peut être une suite à termes positifs

45 E1 : Non, là se sont déjà des résultats de cours, on va commencer

56 E4 : Oui, je sais. Si et seulement si il n'y a qu'une seule solution qui vérifie la définition de la limite.

…

62 E4 : là alors tu dis déjà autre chose parce qu'on a une solution ; on a travaillé déjà … on dit sur la fiche de TD, on a trouvé deux solutions, il y avait une qui était négative, une qui était positive, on a éliminé celle qui était négative parce que la suite était à termes positifs.

Ce résultat provient des pratiques scolaires (62). Ils ont recours aux connaissances mathématiques pour répondre du fait de l'indisponibilité des connaissances logiques.

63 E1 : On résout l'équation-là lorsqu'on sait déjà que la suite converge non ?

Cette intervention renvoie au mode de traitement des suites récurrentes à l'université.

64 E2 : On peut aussi résoudre pour vérifier si la suite converge !

65 E1 : Comment-ça ?

66 E4 : Parce que si ça n'admet pas de solution, on saura que ça ne converge pas.

Cette réplique de **E4** montre qu'il mobilise le Modus Tollens en acte.

67 E1 : Si ça admet des solutions, tu conclus que ça converge ?

68 E4 : Oui

La réponse de **E4** renvoie au traitement de l'énoncé comme une équivalence :

À la ligne 64, il admet que $\neg Q \Rightarrow \neg P$, puis en (68), il répond que $Q \Rightarrow P$. Or $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est logiquement équivalent à $P \Rightarrow Q$. On a au total $P \Leftrightarrow Q$.

69 E1 : Ah bon ?

70 E4 : Si ça admet une solution qui définit les conditions de définition de la suite,

71 E1 : Quelles conditions de définition ?

72 E4 : La suite peut être à termes positifs, ça admet

73 E1 : deux solutions positives, tu fais comment ?

74 E4 : deux solutions positives, tu ne peux pas conclure.

En ligne 73, **E1** propose une situation qui met à défaut les connaissances sur lesquelles **E4** s'appuie pour répondre.

75 E1 : c'est justement pourquoi je dis que, est ce que quand il y a les solutions tu conclus ?

76 E4 : mais si ça admet une solution et que cette solution vérifie les conditions, elle converge. Et si elle admet deux solutions qui ne vérifient pas, qui vérifient les conditions et qui sont distinctes, tu conclus que la suite ne converge pas.

E4 essaie de catégoriser les situations dans lesquelles la suite converge afin de ne pas rester sur la réponse « on ne peut pas savoir » il reste sur les arguments mathématiques.

Dans cette séquence, le traitement d'un exercice dans le cadre des enseignements a permis d'installer le théorème-en-acte que nous avons énoncé ci-dessus et qu'on retrouve chez l'étudiant **E4**, ce qui l'amène à faire un traitement de l'énoncé (P) comme s'il avait affaire à une équivalence. On peut faire l'hypothèse que c'est le cas de plusieurs étudiants ayant adopté la réponse de la catégorie **R2_2**.

Dans le cas du groupe 2[179] la question de la convergence de la suite a été également l'objet de débats. L'étudiant **E5** affirme, qu'on ne peut rien dire de la convergence, mais a du mal à justifier cette affirmation. Il essaie de le faire à l'aide des outils logiques, en vain :

58 E5 : […] moi je me dis qu'on ne peut absolument rien dire par rapport à la fonction. Parce qu'on dit.

59 E6 : par rapport à la

60 E5 : par rapport à la nature de la convergence de la suite. […] Essayons un peu voir de prendre la négation de la contraposée.

E5 a répondu qu'on ne peut **absolument** rien dire au sujet de la convergence de la suite si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution et propose pour justifier sa réponse, d'utiliser la négation de la contraposée.

À partir de cette séquence, on peut faire l'hypothèse que l'étudiant sait que dans cette situation on ne peut pas faire de déduction. Mais le lien entre cette connaissance et la règle du Modus Ponens n'est pas disponible. C'est pourquoi il a recours à la négation de la contraposée.

Il propose à ses camarades :

81 E5 : […] Essayons de trouver une suite qui soit non convergente, une suite récurrente, non convergente telle que l'équation-ci admette des solutions.

Il s'agit de trouver un contre-exemple à l'énoncé :

« Si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, alors, la suite (u_n) est convergente »

[179] Annexe 3, les étudiants du second groupe, exercice 6, ligne 42 à 73

implicitement quantifié sur la suite et sur la fonction. Le groupe arrive à produire ce contre-exemple : ils trouvent une suite dont la fonction associée admet un point fixe, et qui n'est pas convergente, comme le montrent ces échanges :

87 E7 : essayons de construire une suite

88 E5 : Le problème qui est là, c'est que pour être clair, trouvons une suite, qui est récurrente et non convergente, mais pourtant, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. C'est tout ! Si on réussit à trouver pareille suite …

Pour arriver à conclure qu'on ne peut rien dire au sujet de la convergence de la suite (u_n), les étudiants doivent produire un exemple et un contre-exemple à l'énoncé :

« si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, alors la suite (u_n) converge »

Nous faisons l'hypothèse que c'est parce que les exemples sont disponibles chez les étudiants qu'ils ne cherchent qu'à exhiber un contre-exemple.

89 E6 : c'est fini.

90 E5 : Donc en fait, moi je pense qu'on ne peut absolument rien dire.

93 E7 : Si on prend même la fonction, la suite définie par $u_{0=1}$ et peut-être $u_{n+1} = u_n^2$

94 E5 : On a une suite constante, mon garçon, change le 1 là !

95 E6 : mets 2. C'est une suite croissante

96 E5 : elle est croissante, mais elle n'est pas majorée. Est-ce que l'équation…

97 E7 : on veut seulement regarder les solutions de l'équation $f(x) = x$

98 E5 : ça c'est une suite croissante et non majorée, cela veut dire qu'elle n'est pas convergente. Et maintenant, résolvons maintenant l'équation $x = x^2$

100 E5 : on a quoi, 0 et 1, n'est ce pas ? Voilà par exemple un cas particulier que tu as pu construire qui justifie que l'on ne peut rien dire à propos de la convergence de la suite. Cette suite est une suite qui est non convergente

Les séquences des deux groupes présentent deux manières distinctes de justifier la même réponse :

- le premier groupe explicite le fait que dans certains cas ils peuvent conclure et dans d'autres ils ne le peuvent pas. Pour cela, ils s'appuient sur un exemple rencontré en cours. L'argument mathématique qu'ils produisent n'est pas correct ;
- Dans le deuxième groupe, les étudiants vont développer une succession de schèmes (utilisation de la contraposée, de la négation de la contraposée, et enfin production d'un contre-exemple) pour aboutir à une conclusion. Ils déterminent un contre-exemple et concluent « on ne peut rien dire » ; ils ne reviennent pas sur le fait qu'il y a de nombreux exemples.

Ces deux séquences nous permettent de dire, en accord avec Durand-Guerrier (1996), que « ce sont les connaissances mathématiques qui permettent de répondre dans les cas où les règles classiques d'inférence ne s'appliquent pas » (op. cit, p. 202).

Item 6.3 : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si la suite (u_n) est convergente ?*

Les réponses détaillées de cet item sont contenues dans le **Tableau T6(8)** de l'annexe 6.

Tableau T6(4) : répartitions des réponses à l'item 6.3

	R3_1 L'équation a une solution	**R3_1*** L'équation a une seule solution	**R3_2** Sol dont une est limite	**R3_3** autres	**R3_4** Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E15, E24, E26, E29, E38, E46, E53, E32	E14, E31, E33, E34, E39, E42, E44, E49, E50, E55, E62, E63, E65, E66, E67, E68 E06, E43, E48 E37	E17, E19, E22, E28, E30, E35, E40, E59,	E02, E07, E21, E25, E41, E52, E56, E58, E61	E01, E03, E04, E05, E08, E09, E10, E11, E12, E13, E16, E18, E20, E23, E27, E36, E45, E47, E51, E54, E57, E60, E64
EFFECTIFS	**8**	**20**	**8**	**9**	**23**

23 étudiants n'ont pas répondu à cet item qui nous semblait pourtant leur être familier. Sur les 45 qui ont répondu, 36 admettent clairement l'existence d'une solution (qu'elle soit unique ou non).

Analyse des réponses de la catégorie R3_2 :

Nous avons fait figurer la réponse de **E30** dans cette catégorie :

> **E30** : $f(x) = x$ admet une seule solution vérifiant les conditions de u_n

Nous référant au débat du groupe 1 ci-dessus, cette réponse pourrait se traduire par :

> « l'équation admet au moins une solution, et parmi ces solutions, il n'y en a qu'une seule qui satisfasse les contraintes imposées par la suite ».

Il est sous-entendu que cette solution est la limite de la suite. Cet implicite peut renvoyer cette réponse dans la catégorie **R3_3.**

Analyse des réponses de la catégorie R3_1* :

Comme nous l'avons dit dans notre analyse a priori, on pourrait penser que les étudiants transfèrent l'unicité de la limite à celle des solutions de l'équation, du fait que cette équation permet de déterminer la limite de la suite lorsqu'elle est convergente. La conception d'une solution unique pourrait également provenir des habitudes scolaires : très souvent dans les exercices (au lycée), le point fixe de la fonction est unique[180].

La réponse de l'étudiant **E37** renvoie à l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = x$.

> **E37** : $f(x) = x$ a pour solution la limite de la suite

En effet, d'après cette réponse, si cette équation admet une solution, elle est nécessairement limite de la suite, et l'unicité de la limite contraint à l'unicité de la solution.

Une des raisons évoquées précédemment pourrait motiver les réponses de **E07** et **E25** qui se situent dans la catégorie **R3_3** :

> **E07**, **E25** : Elles sont égales

On retrouve ce glissement de l'unicité de la limite aux solutions de l'équation dans les débats des étudiants[181].

E3 énonce la question :

> **82 E3** : C'est possible. Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$ si 6.3, la suite u_n est convergente ?
>
> **83 E2** : elle admet une unique solution
>
> **84 E1** : Non, au moins
>
> **85 E2** : Une unique gars, une unique solution ;

E2 reste dans cette posture, rejoint par **E4**, malgré les arguments de E1 allant contre cette réponse.

> **94 E4** : je suis entrain de voir dans mon cahier, que c'est l'unique solution

E4 se réfère à son cahier, et probablement à un exercice qui a été résolu en classe : il faut noter la différence entre « une unique solution » et « l'unique solution » en référence à un exercice qui aurait été traité en classe.

> **125 E2** : Moi j'insiste là-bas. Quand la suite converge, la limite $f(x) = x$ est unique. Admet une unique solution ;
>
> **128 E2** : On peut avoir ça dans CIAM ?
>
> **130 E1** : Il y a des exercices comme ça dans le CIAM, partout !
>
> **131 E2** : Je dis une propriété du genre ?
>
> **132 E1** : Non, on ne précise pas. On dit seulement que ça doit être solution de l'équation $f(x) = x$. ça doit être solution de l'équation $f(x) = x$. ça ne veut pas dire que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution.
>
> **133 E2** : ça doit être **une solution**, alors que **la limite est unique**. Si ça doit être solution, qu'est ce que tu dis alors ?

---

[180] Voir analyse du manuel CIAM, « Mathématiques, terminale S » au chapitre 4.

[181] Voir annexe 2, les étudiants du premier groupe

134 **E1** : Est-ce que je dis que toutes les solutions sont limites. **Je n'ai pas dit que toutes les solutions sont limites**. Il y a d'abord plusieurs solutions, mais **une des solutions est limite**. Ça ne contredit pas le fait que la limite existe

Cette observation de **E2** rejoint la réponse de l'étudiant **E37** ($f(x) = x$ a pour solution la limite de la suite).

Cette séquence montre que conformément à notre analyse a priori, la pratique de classe contribue fortement à installer des connaissances-en-acte chez les étudiants, et qu'elles sont réutilisées dans des situations où elles sont mises en défaut : le fait de souvent trouver une seule solution à l'équation $f(x) = x$ peut conforter les étudiants dans l'idée d'une solution unique pour l'équation.

Analyse des réponses de la catégorie R3_3 :

E02, **E52** et **E56** imposent des conditions à la solution de l'équation :

E02 : Ces solutions pourront être soit majorant, soit minorant de la suite

E52 : $f(x) = x$ a une seule solution positive

E56 : $f(x) = x$ admet au moins une solution positive

Les trois admettent l'existence d'une solution de l'équation, et la condition imposée provient comme le montre la séquence ci-dessus du groupe 1, de la pratique enseignante.

Nous avons eu des réponses contingentes dans cette catégorie :

E21 : L'équation peut soit avoir des solutions, soit ne pas avoir de solution

E61 : On ne peut se prononcer car ce n'est pas une équivalence

Item 6.4 : *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si la suite (u_n) n'est pas convergente*

Tableau T6(5) : récapitulatif des réponses à l'item 6.4

	R4_1 On ne peut savoir	**R4_2** L'équation n'a pas de solution	**R4_3** Plus d'une sol ou rien	**R4_3***	**R4_3****	**R4_4** autres	**R4_5** Pas de réponse
CODES ETUDIANTS	E15, E37, E40, E46, E48	E06, E17, E21, E27, E28, E29, E32, E33, E35, E38, E39, E41, E56, E59, E61 E19, E30	E43, E44, E49, E50, E55, E62, E63, E65, E66, E68	E26, E34, E53	E14, E25, E42	E02, E31, E58, E67,	E01, E03, E04, E05, E07, E08, E09, E10, E11, E12, E13, E16, E18, E20, E22, E23, E24, E36, E45, E47, E51, E52, E54, E57, E60, E64
EFFECTIFS	**5**	**17**	**10**	**3**	**3**	**4**	**26**

Au cours du dépouillement de cet item, nous avons ajouté les catégories **R4_3*** et **R4_3**** :
R4_3* correspond à la réponse « l'ensemble des solutions est vide ou la solution ne respecte pas les contraintes sur la suite » ;
R4_3** correspond à « l'équation a plus d'une solution »

<u>Analyse des réponses de la catégorie R4_1</u>

Les étudiants **E15**, **E37**, **E40**, **E46** et **E48** ont des réponses de cette catégorie. Lorsque nous rapprochons cette catégorie de **R2_1** (on ne peut rien dire) à l'item **6.2**, nous retrouvons les étudiants **E15**, **E37** et **E46**. Mais de ces trois, le seul qui ait répondu correctement aux quatre items est **E15 :** ses quatre réponses correspondent au codage **2313** adopté par V. Durand-Guerrier.
Cet étudiant utilise correctement les règles du Modus Ponens et du Modus Tollens, et sait à quel moment on ne peut pas les utiliser.

<u>Analyse des réponses de la catégorie R4_2</u>

17 répondent que l'équation n'admet pas de solution. Nous retenons la formulation de **E19**, **E30 :** « $f(x) \neq x$ ». Nous faisons l'hypothèse qu'elle sert d'abréviation pour signifier que l'équation n'admet pas de solution. Mais cette abréviation a la particularité de faire disparaitre l'équation.
La réponse « l'équation n'admet pas de solution » pourrait provenir de ce que les étudiants traitent l'implication comme une équivalence, tout comme celle de la catégorie **R2_2** de l'item **6.2**. Nous avons rapproché ces deux catégories :
11 étudiants se retrouvent dans les deux catégories. Pour affiner notre analyse, nous avons recherché les réponses de ces étudiants dans les catégories **R1_1**[182] et **R3_1**[183] ou **R3_2**[184] des items **6.1** et **6.3** respectivement.
Nous obtenons le résultat suivant :
E06, **E17**, **E28**, **E29**, **E38** et **E56** considèrent qu'ils sont en présence d'une équivalence. Leurs quatre réponses correspondent au codage **2112** adopté par V. Durand-Guerrier.
Ils utilisent correctement le Modus Ponens et le Modus Tollens, et utilisent la règle invalide « ($P \Rightarrow Q$ vrai, et $non\, P$ vrai), alors $non\, Q$ vrai ». Cette règle n'est valide que si on a l'équivalence.
Les quatre autres de cette catégorie :

---
182 La suite ne converge pas
183 L'équation $f(x) = x$ admet une solution
184 L'équation admet une solution dont une est la limite de la suite

E27 : ses réponses correspondent au codage **2902**

E35 : ses réponses correspondent au codage **0012**

E41 : ses réponses correspondent au codage **9092**

<u>**Analyse des réponses des catégories R4_3, R4_3* et R4_3****</u>

Nous avons réuni ces trois catégories à cause de leur proximité. Les réponses à l'item **6.3** des étudiants correspondant prennent en compte l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = x$: 9 étudiants sur les 10[185] de la catégorie **R4_3** ont répondu :

> $f(x) = x$ a une seule et unique solution

Il en est de même pour **E34** dans la catégorie **R4_3***et de tous les étudiants de la catégorie **R4_3**.**

En dehors de **E14** et de **E50**, tous les étudiants des trois catégories ont répondu à l'item **6.1** que la suite divergeait.

C'est dans l'item **6.2** que ces étudiants sont partagés. 6 étudiants posent comme condition de convergence de la suite, l'unicité de la solution de l'équation.

Nous récapitulons cette analyse dans le tableau T6(9) en annexe 6.

Du tableau il ressort que **E25**, **E49**, **E62**, **E65** et **E68** traitent l'implication comme s'ils étaient en face d'une équivalence. On peut faire l'hypothèse qu'il en est de même de **E42**, au vu de sa réponse en **6.2,** et de **E50** et **E66 :** le fait que l'équation admette <u>au moins</u> une solution pourrait avoir motivé leur réponse qui est « la suite ne converge pas ».

Dans les débats au cours du module de suivi, une autre réponse émerge :

> « la solution de l'équation n'appartient pas au support de la suite »

Ceci renvoie aux exemples qu'ils ont rencontrés en cours.

Conclusion

L'analyse des résultats de cet exercice montre que :

1- l'énoncé en jeu est complexe et peut faire l'objet d'une analyse logique au cours d'une séance de travail avec les étudiants. On pourrait également leur proposer la construction de sa contraposée dans la langue naturelle et dans le langage formel, cela permet de mettre en lumière les implicites de la langue ;

2- les étudiants lient l'existence des solutions de l'équation $f(x) = x$ à la convergence de la suite ; un phénomène ne peut se produire sans l'autre. En outre, pour certains, la solution doit être unique, et c'est même une condition nécessaire à la convergence de

[185] E43 n'a pas donné cette réponse en 6.3

la suite. Chez ces étudiants, il y a identification de l'existence d'une solution de l'équation à la limite de la suite ;

3- certaines abréviations utilisées par les étudiants, et même par les enseignants peuvent modifier la structure d'un énoncé, et de ce fait, transformer le problème. Nous avons repéré une écriture qui a priori est compréhensible par les étudiants, mais qui est problématique : $f(x) \neq x$ Elle est utilisée par l'étudiant pour traduire le fait que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution. Cette écriture, d'une part, a fait disparaitre l'équation, et d'autre part, cache la quantification ;

4- les étudiants justifient leurs réponses surtout avec des arguments mathématiques. Des arguments logiques sont utilisés mais, ils sont complétés par les connaissances mathématiques ; les inférences établies se font en acte et on constate qu'il y a chez eux une indisponibilité des connaissances prédicatives en logique qui leur permettrait de soutenir leur raisonnement. Cet exercice pourrait permettre d'expliciter certaines règles d'inférence qui contribueraient à alléger certains raisonnements[186], préciser les situations dans lesquelles ces règles ne peuvent pas être utilisées ;

5- certains étudiants ont des conduites inférentielles qui renvoient à celles de l'équivalence. Pour ces étudiants, des constructions de contre-exemples comme celui des étudiants du second groupe à l'exercice **6.2**, peuvent être des exercices qui leur permettent de réviser leur position ;

6- les échanges relatifs à l'item **6.1** montrent que l'énoncé (P) est bien approprié pour travailler sur le choix des quantificateurs dans des activités de formalisation d'une part et, d'autre part, sur l'importance de l'explicitation des quantificateurs pour prendre la contraposée d'un énoncé.

3 Exercice 7

Que pensez-vous de la propriété suivante :

« Pour tout nombre réel x, pour tout nombre réel y, si ($x < y$ et $y < x$), alors $x = y$ » ?

3.1 Analyse a priori

L'énoncé proposé est un énoncé conditionnel universellement quantifié écrit en langage mixte, de la forme:

$$\forall x, \forall y, (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$$

[186] Voir par exemple le débat relatif à la justification de la réponse à la question 6.1

Cet énoncé est inhabituel dans la classe de mathématiques dans la mesure où la propriété antécédente qui se présente comme une conjonction de deux propriétés incompatibles n'est satisfaite par aucun élément du domaine de quantification. Les résultats des travaux antérieurs (Durand-Guerrier, 1996, 2003, Deloustal-Jorrand, 2000-2001, Rogalski & Rogalski, 2004) mettent en évidence le fait que même des étudiants avancés en mathématiques tendent à assimiler les énoncés conditionnels au conditionnel courant pour lequel on ne considère pas les cas où l'antécédent est faux. Ce point a déjà fait l'objet de l'exercice 1 analysé ci-dessus ; la différence ici est qu'aucun cas ne satisfait la propriété antécédente. Nous avons fait l'hypothèse que les justifications demandées conduiraient les étudiants à expliciter leurs arguments.

Notons que cette propriété traduit l'antisymétrie de la relation d'ordre strict.

Par définition, une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall a \in E, \forall b \in E, \big((a\,\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}a) \Rightarrow (a = b)\big)$$

Le passage à la contraposée permet de se ramener à un énoncé dont l'antécédent est vrai de certains couples et faux d'autre couples, ce qui nous ramène à une situation habituelle :

« *Pour tout nombre réel x, pour tout nombre réel y, si $x \neq y$, alors* $(x \geq y \text{ } ou \text{ } y \geq x)$ » (1)

Plusieurs possibilités de traitement de cet exercice peuvent être envisagées :

<u>Utilisation de l'énoncé de départ :</u>

(a) les étudiants constatent que la propriété antécédente n'est jamais vérifiée et concluent à la vérité de l'implication, pour ceux qui connaissent les règles de vérité de l'implication ;
(b) ils font une preuve de l'énoncé en supposant que l'antécédent est vrai. Ils mettent en œuvre une preuve par élément générique en considérant deux éléments quelconques vérifiant la propriété antécédente. Cette méthode de preuve ne s'applique pas ici puisqu'elle s'appuie implicitement sur l'existence d'au moins un élément (ici un couple d'éléments) satisfaisant la propriété antécédente, ce qui est le plus souvent passé sous silence lorsque l'on met en œuvre ce type de preuve dans la classe de mathématiques ;

(c) ils disent que c'est vrai et justifient leur réponse en transformant l'antécédent sous la forme : « $x \leq y$ et $y \leq x$ », ceci en utilisant le fait que « $x < y \Rightarrow x \leq y$ « et « $y < x \Rightarrow y \leq x$ » ; puis en appliquant la propriété d'antisymétrie de la relation d'ordre large ;

(d) ils disent que c'est faux car on ne peut avoir à la fois $x < y$ et $y < x$. Cette réponse renvoie aux résultats présentés dans Rogalski & Rogalski (2004), où pour les étudiants, évaluer une implication consiste à évaluer d'abord son antécédent ;

(e) ils disent que c'est faux et proposent une preuve par éléments singuliers :
Ils considèrent deux réels u et v distincts. Soit ils obtiennent $u < v$, soit $v < u$, mais pas les deux ;

(f) Ils répondent que c'est faux car on ne peut avoir à la fois $x < y$, $y < x$ et $x = y$, réponse qui renvoie au traitement de l'implication comme une conjonction ;

(g) L'énoncé n'a pas de valeur de vérité, avec le même argument que dans (d).

<u>Utilisation de la contraposée :</u>

Cette implication rentre dans la catégorie des implications calculables au sens de Rogalski & Rogalski (2004)[187]. On peut mettre en œuvre une preuve par élément générique en considérant un couple (x, y) tel que $x \neq y$

(h) Les étudiants pensent que cette implication est vraie, car $x \neq y$ est équivalent, du point de vue mathématique, à $x < y$ ou $y < x$, et de $x < y$ ou $y < x$, on conclut à la vérité de $x \leq y$ ou $y \leq x$. Ils font une preuve par élément générique.

(i) Ils peuvent réfuter cette implication à cause de l'inégalité au sens large dans le conséquent. En effet, ce n'est pas très naturel de penser que lorsque deux nombres sont distincts, ils peuvent être mis en relation par l'inégalité au sens large.

Il est possible que la contraposée soit mal construite. L'étudiant peut proposer la forme $non\ P \Rightarrow non\ Q$ en guise de contraposée. On obtient l'énoncé ci-dessous

«*Pour tout nombre réel* x*, pour tout nombre réel* y*, si* $(x \geq y\ ou\ y \geq x)$*, alors* $x \neq y$ »

Cet énoncé est faux.

Les possibilités de traitement de l'item peuvent amener les étudiants à produire les réponses suivantes :

1 La propriété est vraie (Vrai): c'est la bonne réponse. On peut faire l'hypothèse que l'étudiant connait les règles de vérité d'un énoncé conditionnel, qu'il est passé par la contraposée de la propriété, ou encore qu'il connait cette propriété. Nous avons également

[187] Voir revue des travaux de Rogalski

fait l'hypothèse que l'étudiant peut essayer de démontrer cette propriété sous l'hypothèse « $x < y$ et $y < x$ », qui est une hypothèse fausse dans $\mathbb{R}$. Il fait une preuve par élément générique sans prendre en compte la valeur de vérité de l'antécédent : il essaie dans ce cas d'établir un lien causal entre l'antécédent et le conséquent ;

2 La propriété est fausse (Faux), du fait de la fausseté de l'antécédent, où, lorsqu'ils ont utilisé la contraposée, du fait de l'écriture des inégalités au sens large ;

3 La propriété n'a pas de valeur de vérité (on ne peut rien dire), parce que l'antécédent est faux ; ceci peut s'exprimer sous plusieurs formes : pas de valeur de vérité ou pas de sens ou absurde.

4 Autre réponse ;

Pas de réponses.

3.2 Analyses a posteriori

Nous précisons que lorsque les étudiants passaient le test, nous leur avions dit verbalement qu'il s'agissait de dire si cette proposition était vraie ou fausse, en justifiant soigneusement leur réponse.

Tableau T7(1) : distribution des réponses

Vrai	Faux	On ne peut rien dire	Pas de réponse
22	24	2	20
E02, E09, E11, E13, E14, E15, E26, E32, E33, E34, E38, E39, E43, E44, E45, E48, E50, E51, E56, E61, E62, E66	E01, E04, E08, E10, E17, E19, E23, E24, E25, E27, E28, E29, E30, E31, E35, E40, E49, E55, E57, E58, E59, E65, E67, E68	E06/E20	E03, E05, E07, E12, E16, E18, E21, E22, E36, E37, E41, E42, E46, E47, E52, E53, E54, E60, E63, E64

On constate que les avis sont assez partagés sur cet item.

Les justifications sont de deux types : logique et mathématique.

On peut assimiler les réponses de **E06** et **E20** à la catégorie **« on ne peut rien dire » :**

E06 : $x < y$ *et* $y < x$ est impossible, on pourrait avoir $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$

E20 : Cette proposition est vraie si $x \leq y$ et $y \leq x$

Celles de **E26** et **E51** peuvent être assimilées à la catégorie **Vraie** :

E26 : C'est l'antisymétrie

E51 : Cette propriété marque l'antisymétrie

En effet, la formulation de la question n'oblige en rien l'étudiant à donner la réponse Vrai ou Faux. La reconnaissance de la propriété d'antisymétrie attribue de façon implicite la valeur de vérité Vrai à la propriété. À ce moment, la catégorie « autre réponses » peut alors disparaitre. On a la nouvelle répartition des réponses suivante :

Tableau T7(2) : distributions des réponses

V	**F**	**On ne peut rien dire**	**Pas de réponse**
22 E02/E09/E11/E13*/E14/E15/E32/E33/E34/E38/E39/E43/E44/E45/E48/E50//E51/E56/E61/E62/E66/E26	24 E01/E04/E08/E10/E17/E19*/E23 E24/E25/E27/E28/E29/E30/E31/E35/E40/E49/E55/E57/E58/E59/E65/E67/E68	2 E06/E20	20 E03/E05/E07/E12/E16/E18/E21/E22/E36/E37/E41/E42/E46/E47/E52/E53/E54/E60/E63/E64

Nous analysons les réponses des étudiants telles qu'elles sont distribuées dans le tableau 2.

Analyse des réponses « Vrai »

Cinq étudiants sur les 22 n'ont pas justifié leur réponse.

Dans le travail sur l'implication, les réponses font ressortir deux modes de traitements[188] distincts :

- travailler sur la vérité de l'implication, c'est-à-dire évaluer une implication. Le principe de vérifonctionnalité, qui consiste à prendre en compte la valeur de vérité des énoncés qui composent cette implication est appliqué à l'énoncé. C'est le cas des étudiants **E44**, **E45** et **E62** dont la réponse est de manière globale :

  « $P \Rightarrow Q$ est vrai, car P est faux »
- transformer l'antécédent afin d'obtenir un antécédent qui est vérifié par certaines valeurs du domaine dans le but de faire une preuve par hypothèse.
  1- Preuve par élément générique : on suppose que l'antécédent est vrai, puis on montre que sous cette hypothèse, le conséquent est vrai. Ce mode de traitement de l'implication se ramène au processus standard de preuve.
  2- Preuve par contraposition : l'étudiant **E15** utilise la contraposée et propose une preuve correcte, conforme au traitement (h) dans notre analyse a priori ;

[188] Voir Tableau T7(4) de l'annexe 6

3- Transformation de l'antécédent : cela concerne les étudiants **E13**, **E38**, **E43** et **E50**. La preuve produite par ces quatre étudiants :

E43 : $x < y \Rightarrow x \leq y$ et $y < x \Rightarrow y \leq x$. D'où $x = y$

Les étapes que **E43** suit sont :

$x < y \Rightarrow x \leq y$ (1)

$y < x \Rightarrow y \leq x$ (2)

L'invariant qui lui permet de conclure à l'égalité de x et y consiste à inférer de (1) et (2) que ($x \leq y$ et $y \leq x$) (3). Cette étape n'apparait pas dans sa production.

Il fait une transformation de l'énoncé de départ « $x < y$ et $y < x$ » qui est un énoncé faux, et dont on ne peut rien inférer. **E43** a travaillé comme s'il y avait deux prémisses indépendantes au départ, puis il les coordonne pour obtenir son résultat.

E50 a adopté la même démarche que **E43**, à la différence qu'il a explicité l'étape (3).

E13 : On a $x < y$ et $y < x \Rightarrow x < y < x$. il n'y a aucun réel entre x à gauche et x à droite, donc y est obligatoirement égal à x, donc $x = y$

La déduction $x < y$ et $y < x \Rightarrow x < y < x$ de **E13** est correcte, seulement, elle ne permet pas de conclure à l'égalité de x et y. On ne peut trouver deux entiers qui vérifient cette double inégalité.

Nous faisons l'hypothèse que la preuve de **E13** renvoie à l'utilisation du théorème-en-acte :

> *« Pour montrer la vérité d'un énoncé conditionnel universellement quantifié, on montre que le conséquent est vrai sous l'hypothèse que l'antécédent est vrai »*

Il ne prend pas en compte le fait que l'hypothèse n'est jamais vraie.

Toujours dans la catégorie « Vrai », six étudiants reconnaissent la définition formelle de l'antisymétrie qui est une propriété, satisfaite par la relation $<$. Cette justification relève des connaissances mathématiques.

Les étudiants **E11** et **E33** ont pour leur part, des arguments mathématiques respectivement insuffisamment explicités (**E11**) et insuffisamment explicités et erroné (**E33**):

E11 : $\mathbb{R}$ est ordonné

E33 : $(\mathbb{R}, <)$ est une relation d'ordre total

<u>Analyse des réponses « Faux »</u>

Sept réponses ne sont pas justifiées.

Pour les étudiants **E01**, **E06** et **E49**, l'énoncé est faux parce que l'inégalité au sens strict ne permet pas de conclure à la vérité du conséquent, ce qu'ils explicitent :

> « Il faut que l'inégalité soit au sens large. »

La réponse de **E25 :**

> **E25** : Il n'existe pas de nombre (x, y) tels que ($x < y$ *et* $y < x$) alors, $x = y$

Dans cette réponse, cet étudiant, tout comme les trois premiers, traduit le fait qu'il est impossible que $x = y$ soit réalisé lorsque $x < y$ *et* $y < x$. Par ailleurs, sa réponse est le contraire de l'énoncé initial, et se formalise par :

$non\ (\exists x, \exists y, \big(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)\big)$, qui est équivalent à $\forall x, \forall y, non\ (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$.

E08, **E20**, **E24**, **E29** et **E59** sont moins explicites dans leur réponse :

> **E08, E29, E59 :** L'inégalité est stricte
>
> **E24 :** L'inégalité doit être au sens large

Ces deux réponses laissent sous-entendre que si l'inégalité était au sens large, alors l'énoncé serait vrai parce qu'ils pourraient conclure que $x = y$.

E19 et **E28** expriment la fausseté de l'énoncé d'une autre manière, en déduisant de l'antécédent $x \neq y$.

> **E19** : $x < y$ *et* $y < x$ implique $x \neq y$
>
> **E28** : Si $x < y$, alors $x \neq y$

Les étudiants **E04**, **E35** et **E40** procèdent par preuves par éléments singuliers, et montrent que l'antécédent est faux pour les instantiations de x et y par ces éléments. Ce traitement correspond à l'éventualité (e) dans notre analyse a priori.

En général, les étudiants de cette catégorie (hormis **E35** et **E40**) justifient leur réponse en montrant qu'il n'est pas possible de conclure à la vérité du conséquent en supposant que l'antécédent est vrai. Les trois derniers étudiants ci-dessus mentionnés explicitent la fausseté de l'antécédent. Certains, pour conclure à l'égalité des deux réels, proposent une modification de l'antécédent, et trois affirment l'impossibilité pour l'antécédent d'être réalisé.

Mise en perspective des réponses avec celles de l'exercice 1

Nous avons croisé les réponses de cet exercice avec celles de l'exercice 1, en raison de la ressemblance des tâches ; le traitement des deux exercices amène à l'évaluation une implication. Dans l'exercice 1, on a une implication ouverte et on s'intéresse aux éléments d'un domaine fini donné qui la satisfont ; pour cela on doit examiner la valeur de vérité des implications matérielles obtenues par instanciation, en prenant en compte le caractère vériconditionnel (la valeur de vérité ne dépend que de la valeur de vérité des propositions élémentaires). Son traitement nécessite de mobiliser les conditions de vérité d'une implication. Dans l'exercice 7, on a une implication formelle dont l'antécédent est toujours faux ; elle peut être traitée soit en considérant les conditions de vérité d'une implication, soit en engageant une preuve mathématique de l'énoncé.

Nous rappelons que dans l'exercice 1, les catégories **A1** et **A1*** sont celles des réponses des étudiants qui ont donné la réponse correcte : on peut faire l'hypothèse que ces derniers connaissent le principe de vérité d'une implication. Dans les catégories **A2** et **A2***, on retrouve les réponses des étudiants qui mobilisent le conditionnel courant.

On a obtenu le tableau suivant :

Tableau T7(3) : mise en perspective des réponses des exercices 1 et 7

Exercice 1 / **Exercice 7**	**Réponses de catégorie A1 ou A1***	**Réponses de catégorie A2 ou A2* Et <u>A2</u> ou <u>A2</u>* + ou - un nombre pair**
Vrai	**E45**, **<u>E44</u>** : réponse en Ex. 7 avec argument logique valide	E02, E13, E43, <u>E50</u>, E09, E15, E62, E33, E51, E61,
Faux	**E49**, **E55** : évaluation de l'antécédent	<u>E06</u>, E08, E10, <u>E17</u>, E19, E20, E25, E27, E28, E29, E30, E40, E58, E59, E65, <u>E67</u>, E68

<u>Commentaire du tableau</u> :

(1) Réponses des catégories A1 et A1 de l'exercice 1, et « Vrai » de l'exercice 7*

E45 et **E44**[189] justifient leur réponse à l'exercice 7 avec des arguments logiques valides : $P \Rightarrow Q$ est vrai dès que P est faux. Nous faisons l'hypothèse que la correction de leur réponse à l'exercice résulte de l'utilisation de cette règle logique.

(2) Réponses des catégories A1 et A1* de l'exercice 1, et « Faux » de l'exercice 7

E49 et **E55** évaluent d'abord l'antécédent dans l'exercice 7. Nous faisons l'hypothèse que ces deux étudiants ont identifié une implication « calculable », et de ce fait, ont mobilisé l'invariant consistant à démontrer le conséquent sous hypothèse, d'où leur réponse.

(3) Réponses des catégories A2 et A2* de l'exercice 1, et « Vrai » de l'exercice 7

E13 conclut à la vérité du conséquent, dans l'impossibilité de trouver deux réels satisfaisant $x < y < x$, alors qu'à l'exercice 1 il ne considère que les valeurs qui satisfont l'antécédent.

E02, **E43** et **E50** transforment implicitement l'énoncé de départ et obtiennent un énoncé qui a un antécédent qui peut être vrai et qui correspond à l'antisymétrie de $\leq$.

E15 utilise un argument logique (la contraposée) et un argument mathématique. Il montre que sous l'hypothèse $x \neq y$, on a $x < y$ et $y < x$. Il a transformé l'énoncé, et de ce fait, il dispose de l'invariant qui lui permette de passer de l'antécédent au conséquent. Des schèmes différents sont mis en œuvre dans le traitement de l'implication dans les deux exercices, néanmoins, il ramène l'item de 7 à un conditionnel dont l'antécédent peut être satisfait.

Nous pouvons faire l'hypothèse que pour **E02**, **E15**, **E43** et **E50** il y a eu une évaluation de l'antécédent.

E62 justifie sa réponse dans l'exercice 7 par un argument logique correct : il connait le principe d'évaluation de la vérité d'une implication. On pourrait dire que l'exercice 1 énoncé avec « si …, alors … » est pris au sens courant, et ainsi subit un traitement dans la logique naturelle, bien que le contexte soit mathématique. Cette hypothèse nous incite interroger le sens qui est attribué aux différents signifiants de l'implication, à savoir, « $\Rightarrow$ » ; « si …, alors … » ; « entraine » ; « implique »…

E33, **E51** et **E61** quant à eux ont identifié la définition de l'antisymétrie de la relation $<$. Leur réponse à l'exercice 1 montre qu'ils mettent en œuvre l'implication courante. Mais nous ne pouvons donner davantage de précision sur leur conduite, la réponse à un seul item ne permettant pas de se prononcer. Il en est de même de **E09** qui n'a pas justifié sa réponse à l'exercice 7.

(4) Réponses des catégories A2 et A2* de l'exercice 1, et « Faux » de l'exercice 7

[189] Nous avons souligné E44 car il manquait la valeur 15 dans sa réponse à l'exercice 1.

E06[190], **E08**, **E19**, **E20**, **E28**, **E29**, **E40**, **E59**, **E67** considèrent que l'implication est fausse lorsque son antécédent est faux, pour les deux exercices.

Le reste des étudiants de ce groupe n'a pas justifié sa réponse à l'item 7, donc nous ne pouvons nous prononcer.

Nous retrouvons cette réponse de l'étudiant **E2** dans le module de suivi :

> **2 E5** : on dit, que pensez-vous de la propriété suivante : pour tout nombre réel x (lecture de l'exo 7). Qu'est ce qu'on pense de la proposition suivante ?
>
> **3 E2** : Moi je pense qu'elle est fausse, parce que $x<y$ et $y<x$ est une proposition fausse. Ça c'est faux, une proposition fausse qui entraine quelque chose qu'on ne sait si c'est vrai ou c'est faux.

Cet étudiant confond l'évaluation d'une implication à la démonstration de l'implication. Il le précise dans la suite :

> **7 E2** : Attends, si la proposition-ci est fausse, si la première proposition-ci est fausse, elle doit toujours impliquer une vérité, quand …
>
> **8 E7** : Non, si elle est fausse, l'implication est d'office vraie

E7 utilise les règles de vérité de l'implication pour justifier la vérité de l'implication.

Nous signalons que l'exercice 1 a été corrigé et commenté la veille du jour où les étudiants ont traité l'exercice 7. Nous avions rappelé les règles de vérité d'une implication et la table de vérité de l'implication.

Conclusion

Nous avons demandé aux étudiants ce qu'ils pensaient de l'item proposé, avec en consigne de répondre par vrai ou faux, en justifiant leur réponse. Trois postures se dégagent de cet exercice :

- celle qui consiste à utiliser l'outil logique : évaluation de la valeur de vérité de l'implication à l'aide du principe de vérifonctionnalité ;
- celle qui consiste à démontrer que le conséquent est vrai sous hypothèse. L'étudiant utilise à la fois des connaissances logiques et mathématiques ;
- celle qui consiste à utiliser essentiellement des compétences mathématiques.

[190] Les codes soulignés sont ceux des réponses où il manque une valeur dans l'exercice 1, ou il y en a une de plus.

Pour enrichir nos analyses, nous avons rapproché les résultats obtenus de ceux de l'exercice 1. Il ressort que les procédés dominants du traitement de cette implication consistent d'une part, à évaluer l'antécédent, et d'autre part, à faire une preuve sous hypothèse.
Pour ceux qui ont évalué l'antécédent, ils proposent une modification de ce dernier qui puisse leur permettre de conclure à la vérité du conséquent.
Par ailleurs, on retrouve un étudiant chez qui le traitement de l'énoncé en « si …, alors, … » est différent du traitement de l'énoncé formulé avec le signe « ⇒ ».
Cet exercice peut permettre de travailler sur :

- la valeur de vérité d'une implication formelle ;
- la preuve sous hypothèse ;
- la validité d'une inférence en relation avec la vérité des énoncés en jeu ;
- les différents signifiants de l'implication, en s'appuyant sur les exercices 1, 6 et 7.

Conclusion du chapitre 8

Les exercices qui font l'objet des analyses dans ce chapitre sont centrés sur le concept d'implication. Nous avons proposé des exercices inhabituels dans le but de repérer le traitement que les étudiants font de l'implication pour des tâches variées où le concept n'est pas mobilisé de la même manière.

Les résultats de l'exercice 1 montrent que pour déterminer un élément qui satisfait une implication ouverte, la plupart des étudiants ne s'intéressent qu'à ceux qui vérifient l'antécédent. Ces résultats vont dans le même sens que ceux de Durand-Guerrier (2003) et Rogalski & Rogalski (2004). En outre, les résultats à l'issue de ce mode opératoire renvoient au traitement de la conjonction.

Dans l'exercice 7 qui est une implication calculable[191], la règle d'action dominante qui est à l'œuvre consiste d'une part à évaluer l'antécédent, et d'autre part, à faire une preuve sous hypothèse. Parmi ceux qui ont évalué l'antécédent, certains procèdent à une modification qui puisse leur permettre de conclure à la vérité du conséquent.

Ces deux résultats viennent en écho aux prévisions des enseignants que nous avons interviewés, sur les réponses éventuelles des élèves : le traitement de l'implication se limite très souvent à la démonstration sous hypothèse.

[191] Voir revue des travaux de Rogalski

Concernant l'exercice 6 centré sur les règles d'inférence, nous avons constaté que les étudiants justifient leurs réponses surtout avec des arguments mathématiques. Des arguments logiques sont utilisés, mais en général complétés par des connaissances mathématiques là où seule une argumentation logique suffirait : le Modus Tollens est surtout utilisé en acte, et les échanges des étudiants dans le module de suivi montrent une indisponibilité de l'aspect prédicatif de cette règle d'inférence chez les étudiants. Les résultats montrent également que certains étudiants ont des conduites inférentielles qui renvoient à l'équivalence.

Les phénomènes observés dans le traitement de ces items indiquent qu'ils sont pertinents pour travailler les points suivants :

- les règles de vérité d'une implication formelle : le premier exercice met en valeur l'utilisation des tables de vérité ;
- la preuve sous hypothèse et la validité d'une inférence en relation avec la vérité des énoncés en jeu ;
- la distinction du point de vue langagier de « si … alors » et « lorsque, … alors » d'une part, et de « si …alors » et du symbole ⇒ ;

- le choix des quantificateurs dans des activités de formalisation d'une part, et d'autre part sur l'importance de l'explicitation des quantificateurs pour prendre la contraposée d'un énoncé : le théorème de l'exercice 6 est un énoncé approprié pour valoriser cette activité.

Chapitre 9 : Du langage naturel au langage formel

Introduction

En mathématiques, en début d'université, la plupart des théorèmes et définitions sont donnés dans la langue naturelle, ce qui cache la structure logique des énoncés. D'après Selden & Selden (1995), la capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels participe fortement de la construction de la structure de la preuve de ces énoncés et, a une part importante dans la construction et la validation des preuves. En outre, le passage d'un langage à un autre dans l'activité mathématique peut être source de difficultés pour des étudiants qui arrivent nouvellement à l'université, du fait que dans l'enseignement secondaire le cours de mathématiques est donné dans la langue naturelle. C'est ce que Duval (1988) souligne :

> « Le passage d'un énoncé du discours naturel à une expression écrite symboliquement avec des variables, des symboles de relation, ou d'opération, constitue pour beaucoup d'élèves un fossé difficilement franchissable. » (op.cit.p. 18)

Nous faisons l'hypothèse que dans le contexte universitaire camerounais, les résultats des auteurs sus-cités restent actuels, l'apprentissage du langage du calcul des prédicats n'étant pas effectif dans le secondaire. À ceci s'ajoutent les difficultés éventuelles liées à l'apprentissage des mathématiques dans une langue autre que la langue maternelle (Durand-Guerrier & al. 2014)

Dans notre questionnaire, les relations entre logique et langage sont présentes dans la plupart des exercices que nous avons analysés jusqu'à présent. Nous n'y revenons pas ici. Ce chapitre est consacré aux analyses a priori et a posteriori de l'exercice 10 dont nous rappelons ci-dessous l'énoncé :

Exercice 10 [1] : Ecrire en langage formel l'énoncé suivant :

(E) « Tout entier pair n, supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers »

1 Analyse a priori

Lors de la passation du questionnaire, nous avons précisé aux étudiants que nous nous plaçons dans l'ensemble des entiers naturels.

L'énoncé en jeu est appelé « conjecture de Goldbach ». Il se trouve dans une lettre de Christian Goldbach adressée à Léonhard Euler en 1742.

La tâche des étudiants est d'écrire en langage formel l'énoncé donné en langage naturel.

Nous avons proposé une analyse logique de cet énoncé au chapitre 2 dans la section 3.2. Comme nous l'avons indiqué lors de cette analyse, le but de cet exercice est de problématiser le passage du langage courant au langage formel. Ce passage permet de faire ressortir les quantificateurs – pour cet énoncé le quantificateur existentiel, et les connecteurs cachés dans la formulation en langage courant.

Nous sommes en présence d'un énoncé universellement quantifié sur la variable n ; on peut considérer comme domaine de quantification l'ensemble $\mathbb{N}$ ou la partie A de $\mathbb{N}$ définie par : $A = \{n \in \mathbb{N}\ /\ n\ est\ pair\ et\ supérieur\ ou\ égal$ à $4\}$. On peut aussi considérer que le domaine de quantification est l'ensemble des entiers pairs, ou la partie de cet ensemble définie par $B = \{n \in 2\mathbb{N}\ /\ n \geq 4\}$.

Selon le domaine de quantification choisi, cet énoncé peut se mettre ou non sous la forme d'un énoncé conditionnel (Epp, 1999). Par ailleurs, la formalisation de la propriété « *être la somme de deux nombre premiers* » nécessite l'explicitation de deux quantificateurs existentiels.

Nous faisons l'hypothèse que cela peut ne pas être repéré par certains étudiants. On assisterait plutôt à une reproduction littérale de la phrase à l'aide des symboles logico-mathématiques (Gueudet, 2007) : on obtient alors des phrases « linéaires » où vont apparaitre des variables libres. C'est le phénomène de congruence sémantique des énoncés étudié par Duval (1988).

Les paraphrases successives de cette proposition donnent :

(1) <u>Explicitation du conditionnel :</u>
Pour tout entier n, si n est pair et supérieur ou égal à 4, alors n est la somme de deux nombres premiers.

(2) <u>Explicitation du quantificateur existentiel</u>
Pour tout entier n, si n est pair et supérieur ou égal à 4, alors, il existe deux nombres premiers dont n est la somme.

Étudions de façon plus approfondie l'antécédent et le conséquent.

L'antécédent : « n est pair et supérieur ou égal à 4 »

C'est la conjonction de « n est pair », et de « n est supérieur ou égal à 4 ». Alors que la formalisation de « n est supérieur ou égal à 4 » va se réduire à la seule écriture « $n \geq 4$ », celle de « n est pair » aura plusieurs variantes : « n pair » (1), « $n \in 2\mathbb{N}$ » (2), « $\exists k \in \mathbb{N}, n =$

$2k$ » (3), « $n = 2k$ » (4) qui est souvent un raccourci, et la forme très présente dans l'élocution et que nous avons également rencontré dans un manuel de mathématiques dont nous avons fait une analyse au chapitre 4, « $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ » (5). Il est possible d'introduire une lettre de prédicat P correspondant à « … être pair … » ; on obtient la formalisation $P(n)$ (6). Si l'étudiant utilise les formulations (4) ou (5), il introduit la variable libre k, et transforme la proposition en un énoncé ouvert.

Le conséquent : « n est la somme de deux nombres premiers »

Contrairement à l'expression « n est pair » qui n'a pas nécessairement besoin d'être exprimée sous la forme d'un énoncé existentiel (voir (1) et (2)), les deux nombres premiers doivent ressortir dans l'écriture du conséquent. Le conséquent peut aussi avoir plusieurs formulations :

- « $n = p + q$, p et q premiers » (6) qui est congruent à l'énoncé ci-dessus, mais ne respecte pas la syntaxe logique, bien que d'usage fréquent dans les textes mathématiques. En outre, il y a introduction dans la phrase de deux variables libres, du point de vue formel ;
- « $\exists p, q \in \mathbb{N}, n = p + q$, p et q premiers » (7), qui ne comporte pas de variable libre, mais comme le précédent ne respecte pas la syntaxe logique ;
- « $\exists (p, q) \in P^2, n = p + q$ », (8) P étant l'ensemble des nombres premiers ; cet énoncé formel est correct du point de vue de la syntaxe logique.

Une variante de ces réponses consiste à expliciter la propriété « *être premier* », mais on ne peut la caractériser avec un critère algébrique. On peut introduire la lettre R pour la formaliser, et on obtient $\exists p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, (R(p) \wedge R(q) \wedge n = p + q)$. Sur le plan opératoire, cette formule semble plus pertinente. En effet, contrairement à l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers n'est pas familier en tant qu'ensemble. Il y a toujours un travail à faire pour vérifier qu'un nombre est premier.

On peut introduire l'ensemble $\mathcal{D}(x)$ des diviseurs de x, sachant que si x est premier, il n'a que deux diviseurs, 1 et x :

(6) va s'expliciter : $n = p + q, \mathcal{D}(p) = \{1, p\}$ et $\mathcal{D}(q) = \{1, q\}$ (6');

(7) va s'écrire : $\exists p, q \in \mathbb{N}, n = p + q, \mathcal{D}(p) = \{1, p\}$ et $\mathcal{D}(q) = \{1, q\}$ (7');

(8) va s'expliciter : $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, \mathcal{D}(p) = \{1, p\} \wedge \mathcal{D}(q) = \{1, q\} \wedge n = p + q$ (8').

Cette explicitation entraine l'introduction d'une variable supplémentaire et augmente la complexité logique de l'énoncé formalisé.

L'explicitation de l'antécédent et du conséquent mettent en évidence plusieurs niveaux de formalisations possibles de cet énoncé, et nous amène à considérer les réponses possibles suivant deux axes :

1) Structure globale de la phrase et domaine explicite de quantification en tête de phrase ou non. On distingue :
   (a) des énoncés conditionnels universellement quantifiés ou non, où l'antécédent et le conséquent sont respectivement l'expression correcte ou non dans le langage formalisé de « n est un entier naturel pair, plus grand que 4 », et de « n peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » ;
   (b) une équivalence
   (c) Des formulations qui ne sont pas des énoncés conditionnels, et que nous avons appelés « linéaires ». C'est une suite de conjonctions, ou d'énoncés séparés par une virgule ;
2) Traduction des propriétés et introduction des variables (avec ou sans quantificateur).

Nous adoptons le codage *suivant le premier axe* :

ECQ : énoncé conditionnel universellement quantifié

ECnonQ : énoncé conditionnel non quantifié

EquQ : équivalence universellement quantifiée

Equ*non*Q : équivalence non quantifiée

ELQ : énoncé linéaire universellement quantifié

ELnonQ : énoncé linéaire non quantifié

Nous faisons suivre ces codes du domaine de la quantification entre parenthèses :

Suivant le second axe :

Vlib : variable libre

Nous ne signalons pas les variables liées car toutes doivent l'être étant donné qu'on a un énoncé clos.

Certains étudiants peuvent faire la confusion entre nombres premiers et nombres premiers entre eux. Nous signalerons ces erreurs, ainsi que celles qui relèvent d'une mauvaise syntaxe.

Exemples : P désigne l'ensemble des nombres premiers

$\forall n \in \mathbb{N}, (((\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k)\ et\ n \geq 4) \Rightarrow (\exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n = p + q)),$
avec p et q premiers (1)

$\forall n \in \mathbb{N}, n = 2k, et\ \ n \geq 4 \Rightarrow\ n = p + q, p$ et q premiers (2)

$\forall n \in A, (\exists (p,q) \in P \times P, n = p + q)$, où A=$\{n \in \mathbb{N}\ / n \geq 4\ et\ n\ pair\}$ (3)

$\forall n \in 2\mathbb{N}$, et $n \geq 4$, $\exists (p,q) \in P^2, n = p + q$ (4)

Énoncé	Structure	Être pair et supérieur à 4	Être la somme de deux nombres premiers
(1)	Conditionnel universellement quantifié sur ℕ **ECQ**	Correctement énoncé	Les nombres premiers sont introduits par le QE mais la propriété être premier est énoncée à la fin
(2)	A priori énoncé conditionnel universellement quantifié, sur ℕ **ECQ**	Est énoncé avec une variable libre pour exprimer que n est pair : $\boldsymbol{k}$ **: Vlib**	Les nombres premiers sont désignés par des lettres de variables libres, et la propriété est énoncée à la fin du conséquent **Vlib :**$\boldsymbol{p, q}$
(3)	Énoncé linéaire universellement quantifié sur l'ensemble des nombres pairs supérieurs à 4 **ELQ**	Elle caractérise l'ensemble A, et est énoncée correctement	Les nombres premiers sont introduits au début du conséquent par un QE, la formulation est correcte
(4)	Énoncé linéaire universellement quantifié sur 2ℕ : **ELQ**	Le domaine est constitué de nombres pairs, et la propriété être supérieur à 4 est énoncée	Les nombres premiers sont introduits par un QE, la formulation est correcte

Compte tenu de ce qui précède, au delà du petit nombre de structures globales possibles, on peut s'attendre à rencontrer une très grande diversité de formulation pour cet énoncé, ceci d'autant plus que comme nous l'avons déjà dit, les usages mathématiques ne sont pas homogènes de ce point de vue.

2 Analyse a posteriori des réponses

Sur les 68 étudiants qui ont participé au test, seuls 25 ont proposé une écriture formelle de l'item, dont l'étudiant **E04** qui semble avoir écrit un début de preuve. Nous ne prenons pas cette réponse en compte dans nos analyses car nous leur avons demandé de donner l'écriture formelle seulement, nous l'analyserons plus loin.

Comme on pouvait s'y attendre, les productions sont en général différentes les unes des autres, mais on retrouve tout de même des structures semblables.

Le tableau qui contient les réponses des étudiants figure dans l'annexe 6, exercice 10.

Nous présentons les réponses des étudiants suivant le premier axe de notre analyse a priori. Dans ce tableau nous supprimons les colonnes Equ*nonQ* et ELnonQ car tous les étudiants qui ont répondu ont proposé des énoncés universellement quantifiés :

Tableau T10(1) : répartition des réponses suivant la structure

ECQ	ECnonQ	EquQ	ELQ
10	1	1	13
E02*, E05, E15, E16, E24, E45, E30, E43, E44, E67	E29	E32	E20, E25, E26, E27, E28*, E31, E33, E39, E40, E41, E42, E50, E68

<u>**Analyse suivant le premier axe**</u> : Structure globale de la phrase et domaine explicite de quantification en tête de phrase ou non

Nous avons rencontré cinq types de formulations :

- des énoncés conditionnels universellement quantifiés : il y en a 10 de ce type ;
- un énoncé conditionnel non quantifié ;
- une équivalence ;
- des énoncés linéaires quantifiés : il y en a 13 ;

Sur la quantité de la phrase, excepté les réponses des étudiants **E02** et **E29**, la portée du quantificateur universel liant l'entier naturel n n'est pas précisée :

E02 : $(\forall n)\big((n \in \mathbb{N}, n \geq 4) \Rightarrow (\forall (a,b)\ premiers\ n = a + b)\big)$

E29 : $(\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in N - \{0,1\}, n = 2p) \Rightarrow (\exists p, q \in \mathbb{N}, p\ et\ q\ premiers\ / \ n = p + q)$

Dans la réponse de **E29**, la quantification sur n porte sur l'antécédent.

Nous pouvons attribuer les imprécisions relatives à la portée des quantificateurs aux habitudes scolaires où l'usage des parenthèses pour marquer la portée du quantificateur en début de phrase n'est pas très courant. C'est lorsque le quantificateur est « interne » à l'énoncé qu'on en précise la portée. Nous pouvons donc faire l'hypothèse pour ces réponses-là, que le quantificateur recouvre toute la phrase.

Les énoncés conditionnels : il y a 10 étudiants qui ont produit des énoncés conditionnels universellement quantifiés, dont 8 pour lesquelles le domaine de quantification est $\mathbb{N}$. Parmi ces 8 réponses l'explicitation de la conjonction de « n est pair » et « $n \geq 4$ » est présente une seule fois (**E43**). Dans l'antécédent des autres réponses, ces deux énoncés sont séparés par une virgule :

E15 : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 4)\ \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k \Rightarrow \exists p_1, p_2 \in P/n = p_{1+}p_2$

E30 : $\forall n \in \mathbb{N}, n\ pair, n \geq 4 \Rightarrow \exists p, q \in P, n = p + q$

E16 : $\forall n \in \mathbb{N}/\ n = 2k, k \in \mathbb{N}\ n \geq 4 \Rightarrow \exists p_1\ et\ p_2 \in \mathbb{N}$ et premiers / $n = p_1 + p_2$

Nous faisons l'hypothèse que c'est la traduction littérale de « Tout entier pair n, supérieur ou égal à 4 ».

Cinq conséquents de ces énoncés conditionnels sont des énoncés existentiels comme les trois ci-dessus, d'autres non comme le montrent ces deux exemples :

E43 : $\forall n \in \mathbb{N}, n\ pair\ et\ n \geq 4 \Rightarrow n = p + q$ avec $p \wedge q = 1$

E24, E45 : $\forall n, n \geq 4 \Rightarrow n = x + y$ (avec x et y des nombres premiers)

Les énoncés linéaires

L'étudiant **E28** a produit un énoncé « linéaire » correct :

E28 : Posons P l'ensemble des nombres premiers ; A=$\{n \in \mathbb{N}/\mathrm{n} \geq 4\ et\ n\ pair\}$

$$\forall n \in A, \exists (a, b) \in \mathrm{P}^2\ /n = a + b$$

Comme pour les énoncés conditionnels, nous retrouvons la traduction littérale de « Tout entier pair n, supérieur ou égal à 4 » dans quelques énoncés « linéaires » :

E27 : $\forall n, n = 2k\ (k \in \mathbb{Z}_+^2)\ n > 4, \exists n_1\ et\ n_2$ premiers tels que $n = n_1 +\ n_2$

E39 : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k, n \geq 4, n = (2k' + 1) + (2k'' + 1)\ k', k'' \in \mathbb{Z}, 1/2k' + 1, 1/2k'' + 1$

La réponse de l'étudiant **E31**:

$\forall n \in 2\mathbb{N}, \exists (p, q) \in P^2$ tels que $\geq 4 \wedge n = p + q$, avec P ensemble des nombres premiers

Cet énoncé a une syntaxe incorrecte, et cela entraine une modification de la signification de la phrase de départ. Nous paraphrasons cette réponse ainsi :

> « Pour tout entier naturel pair n, il existe un couple de nombres premiers (p, q) tel que n soit supérieur à 4 et soit la somme de ces deux nombres premiers »

La formulation ne convient pas car 2 est un contre-exemple à l'énoncé ouvert associé. Par ailleurs, il faut noter la disparition de l'implication. Comme p et q n'apparaissent pas dans la première partie, on peut les ramener en début de formulation de la deuxième partie.

<u>Analyse selon le deuxième axe</u> : Traduction des propriétés et introduction des variables

Dans la suite, nous analysons les réponses suivant le deuxième axe, c'est-à-dire, selon la façon dont les propriétés sont traduites et les variables introduites. D'après notre analyse a priori, en dehors de n qui est donné dans la phrase initiale, des variables auxiliaires sont introduites pour définir les deux nombres premiers et éventuellement la parité d'un entier. Dans le tableau ci-dessous, nous avons classé les réponses des étudiants selon leur structure et les différentes variables libres qui y sont contenues.

Nous nommons k la variable qui permet de définir la parité, p et q les variables qui désignent les deux nombres premiers.

Tableau T10(2)

	$\boldsymbol{k}$ **Vlib**	$\boldsymbol{p, q}$ **Vlib**	$\boldsymbol{k, p, q}$ **Vlib**	$\boldsymbol{n}$ **Vlib**	**Enoncés clos**	**Totaux**
Les énoncés conditionnels	E16	E24, E43, E45	E44, E67	E29	E05, E15, E30, E02	11
Les énoncés linéaires	E27, E42, E68	E26, E39	E20, E40, E41		E25, E28, E31, E33, E50	13
L'équivalence	E32					1

Sur la variable n :

Dans la réponse de l'étudiant **E29**, elle est une variable libre dans le conséquent et liée dans l'antécédent :

E29 : $(\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in N - \{0,1\}, n = 2p) \Rightarrow (\exists p, q \in \mathbb{N}, p\ et\ q\ premiers\ / \ n = p + q)$

Cela est dû à une erreur dans l'écriture des parenthèses ; le quantificateur universel liant n ne porte que sur l'antécédent. **E29** propose une traduction de la première propriété, autre que celles que nous avions envisagées :

$$\exists p \in N - \{0,1\}, n = 2p$$

On a bien n qui est pair et supérieur à 4.

Sur la variable k

Cette variable, nous le rappelons, est utilisée pour définir algébriquement la parité de l'entier n. 14 étudiants ont choisi d'expliciter la parité sous cette forme.

11 étudiants ont produit des énoncés où k est une variable libre (catégorie (**k Vlib et k, p, q Vlib)**. Parmi leur réponse, on retrouve des syntaxes incorrectes :

E16 : $\forall n \in \mathbb{N} / \, n = 2k, k \in \mathbb{N} \; n \geq 4 \Rightarrow \exists p_1 \; et \; p_2 \in \mathbb{N}$ et premiers / $n = p_1 + p_2$

E40 : $\forall n \in \{2k\}, k \in \mathbb{N}, \; n \geq 4, n = p_1 + p_2$ avec $p_{1,} \; p_2$ premiers

Dans la réponse de **E16**, on peut penser qu'il a lié les deux variables $p_1 \; et \; p_2$, mais la syntaxe est incorrecte.

Dans la réponse de **E40**, la propriété « être premier » est énoncée à la fin, pourtant elle devait venir avant l'écriture de n, et les nombres premiers devraient être liés par le quantificateur existentiel.

3 étudiants (**E15**, **E29** et **E42**) ont utilisé le quantificateur existentiel pour l'introduire ; k est une variable liée dans leur réponse.

Les autres étudiants n'en ont pas fait usage, du fait qu'ils ont utilisé des ensembles dont la parité des éléments est une caractéristique :

- **E28** a introduit l'ensemble A comme on l'a vu précédemment, où « n pair » est exprimé en langage naturel ;
- **E30** et **E43** ont écrit « $\forall n, n \; pair$ » ;
- 4 étudiants ont utilisé l'ensemble $2\mathbb{N}$ (ou $2\mathbb{Z}$) comme univers du discours.

Sur les variables p et q :

Elles doivent apparaitre dans la formalisation de la phrase, dans l'écriture de n comme somme de deux entiers premiers. Elles sont introduites par le quantificateur existentiel. Un étudiant les a introduites avec le quantificateur universel (**E02**), ce qui change la signification de l'énoncé qui devient : *tout entier naturel pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers quel qu'ils soient*. Les variables p et q apparaissent comme variables libres dans 10 réponses (éventuellement avec un autre nom) :

E26 : $\forall n \in 2\mathbb{Z}, n \geq 4 \;\; n = a + b$ avec a, b des entiers premiers

E67 : $\forall n = 2p, p \geq 2, p \in \mathbb{N} \Rightarrow n = T_1 + T_2$ avec $T_1 et\, T_2 \in \mathbb{N}$ et $D(T_1) = \{1, T_1\}$; $D(T_2) = \{1, T_2\}$

E44 : $\forall n \in \mathbb{Z} / n = 2k; k \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 4 \Rightarrow n = a + b$ avec $pgcd(a, n_1) = 1, n_1 < a$ et $pgcd(b, n_2) = 1, n_2 < b$

E44 introduit deux variables libres auxiliaires, n_1 et n_2, pour exprimer que a et b (qui correspondent à p et q tels que nous les avons définies plus haut) sont des nombres premiers. On a un conséquent qui contient quatre variables libres. On peut faire l'hypothèse que l'étudiant considère n_1 et n_2 comme des génériques.

Nous avons rapproché les réponses des étudiants avec celles qu'ils avaient données à l'exercice 5. Pour l'item que nous traitons, l'introduction des lettres est à la charge des étudiants ; elle nécessite d'eux une prise en compte des catégories logiques produites. La question à laquelle nous nous proposons de répondre est de savoir si les étudiants ont pris en compte les catégories logiques pour la définition de « f est majorée » et pour l'écriture formelle de cette la conjecture.

Des 25 étudiants qui ont donné des réponses à l'exercice 10, 16[192] ont donné des énoncés ouverts. Parmi les 16 étudiants en question, 11 avaient questionné le statut (la variable n'est pas introduite ; M n'est pas fixé, …) et la nature (réel, matrice …) de M aux items **5.1** et **5.2** : 4 étudiants (**E40**, **E41**, **E44**, **E67**) n'introduisent ni les lettres qui réfèrent aux nombres premiers, ni la variable k ; 3 étudiants (**E26**, **E39**, **E45**) n'introduisent pas les lettres qui réfèrent aux nombres premiers ; 3 étudiants (**E16**, **E42**, **E68**) n'introduisent pas k. Ces lettres dans leur réponse sont des variables libres.

En dehors de **E29** qui a donné une phrase ouverte en n du fait de la mauvaise position des parenthèses, dans les 16 réponses ci-dessus mentionnées, les étudiants ont précisé le domaine des variables libres après les avoir écrites :

« $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ », « $n = p + q, p, q$ premiers », « $n = p + q$, où p et q sont des entiers premiers » ...

On peut faire l'hypothèse que pour ces étudiants, ce sont des éléments génériques. Ils les introduisent en quelque sorte.

[192] E16, E20, E24, E26, E27, E29, E32, E39, E40, E41, E42, E43, E44, E45, E67, E68

Au cours du module de suivi, les étudiants ont eu un bref échange sur le choix du domaine de la variable n. Certains ont proposé $\mathbb{N}$, d'autres $2\mathbb{N}$. Pour les deux choix, la réponse était correcte.

Conclusion du chapitre 9

Cet exercice a permis de mettre en évidence les difficultés rencontrées par un certain nombre d'étudiants pour identifier les implicites dans les formulations en langage courant d'une part, la gestion que font les étudiants des variables d'autre part. Nous pouvons dégager les résultats suivants :

- la transformation d'un énoncé de la forme « tout A est B » en un énoncé de la forme « $\forall x, (A(x) \Rightarrow B(x))$ » ne va pas de soi : les réponses des étudiants sont proches des énoncés congruents à l'énoncé de départ, surtout pour ce qui concerne l'antécédent : lorsque le domaine est $\mathbb{N}$, la formalisation de l'expression de « n pair et supérieur à 4 » n'est pas faite sous la forme une conjonction (hormis **E43**). Chellougui (2004, 2009) a montré que ceci était également présent chez certains auteurs de manuels universitaires ; on peut faire l'hypothèse que ceci est lié à l'absence de l'usage du symbole logique de la conjonction dans les énoncés mathématiques ; lorsque le domaine est $2\,\mathbb{N}$, la quantification bornée absorbe la conjonction, et l'antécédent est énoncé correctement ;
- aucun énoncé conditionnel qui a été proposé n'est correct ;
- la syntaxe dans l'usage des symboles est approximative et le phénomène d'imitation repéré chez les étudiants (Gueudet, 2007) est bien présent. En outre, certaines écritures que les enseignants utilisent et que nous avons rencontrées dans les analyses du manuel et du polycopié se retrouvent dans les productions ;
- le statut des variables n'est pas toujours pris en compte. Certains étudiants ont donné en formulation symbolique un énoncé ouvert, où apparaissaient souvent plusieurs variables libres. La nature de ces variables est précisée, mais dans une syntaxe incorrecte du point de vue logique. On peut penser que pour les étudiants il s'agit d'éléments génériques ;
- l'absence du quantificateur existentiel produit des énoncés congruents à l'énoncé de départ, qui ne traduisent pas cet énoncé.
- Nous retrouvons dans les productions des étudiants, les mêmes phénomènes repérés par Selden & Selden (1995), à savoir, la faible capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVE

Notre travail porte sur l'enseignement et l'apprentissage des concepts de logique en relation avec la pratique des mathématiques, à la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Le cœur de nos recherches concerne l'identification de phénomènes didactiques pouvant apparaitre dans le maniement de ces concepts pendant l'activité mathématique, et l'exploration des pistes possibles à développer dans le cours ordinaire de la classe pouvant contribuer à une meilleure appropriation de ces concepts par les étudiants, en lien avec les apprentissages mathématiques à l'université.

Pour mener ce travail, nous nous sommes placée dans le cadre de la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud, qui offre un cadre pour penser les relations entre les aspects opératoires et prédicatifs des connaissances, en prenant en compte les catégories logiques fondamentales pour l'analyse du processus de conceptualisation, en prenant également en compte la dialectique outil/objet introduite par Régine Douady. Nous avons ensuite présenté brièvement les éléments de logique du premier ordre auxquels nous nous référons dans nos analyses, ainsi que les résultats issus de quelques travaux antérieurs qui ont contribué à éclairer nos recherches en nous fournissant des pistes pour nos analyses et pour d'éventuelles actions didactiques. Afin de préciser le contexte d'enseignement concernant les notions de logique à la transition lycée-université au Cameroun, nous avons analysé quelques chapitres d'un manuel de terminale et une partie d'un cours polycopié de l'université de Yaoundé ; nous avons également conduit quelques entretiens avec des enseignants. Cela constitue la première partie de notre étude. Dans la deuxième partie, nous rendons compte de l'expérimentation que nous avons conduite auprès d'étudiants de l'École Normale de Yaoundé. Nous présentons les analyses a priori et a posteriori du questionnaire que nous leur avons proposé, ainsi que les éléments complémentaires obtenus dans le cadre d'un module de suivi proposé à quelques étudiants volontaires. Nous avons complété cette étude en proposant une partie du questionnaire des étudiants à quelques élèves de terminale scientifique.

Cadres théoriques

Nous avons montré au chapitre 1 que l'enseignement et l'apprentissage des concepts de logique relèvent des compétences complexes au sens de Vergnaud. Le concept ne se réduisant pas à sa définition, nous soutenons avec cet auteur l'élaboration pragmatique des connaissances relatives au concept : c'est en situation de résolution de problème qu'un concept prend du sens pour l'apprenant. L'opérationnalité de son activité est sous-tendue par des schèmes dont l'analyse permet de mettre en lumière les invariants opératoires qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents dans la situation. De ce fait, nous considérons que pour l'apprentissage des concepts logiques à l'université, il est nécessaire d'établir le lien entre la forme prédicative et la forme opératoire des connaissances relatives à ces concepts qui sont utilisés comme des outils dans l'activité mathématique, et les transformer en objet d'étude. Ces opérations doivent prendre en compte le rôle du langage dans l'activité, qui a d'abord une fonction d'identification. Il permet de désigner les signifiants, de représenter les signifiés de la langue. Il permet également de mettre en mots les opérations de pensée, de structurer et d'accompagner l'activité, en bref, d'aider le sujet en activité à construire un raisonnement.

Ce sont ces éléments qui nous ont permis de justifier le choix de la dialectique outil/objet et de la théorie des champs conceptuels comme cadres théoriques de référence pour l'étude de nos questions de recherche.

Dans le chapitre 2, nous avons montré en nous appuyant sur les travaux de Durand-Guerrier & Arsac (2003), que le calcul des propositions ne permet pas d'analyser le discours mathématique, et que la théorie idoine était le calcul des prédicats. À cet effet, nous avons présenté quelques éléments du calcul des prédicats, en lien avec les concepts que nous avons étudiés. Une analyse logique de deux énoncés nous a permis de mettre en lumière la complexité logique de ces énoncés qu'on rencontre à la transition lycée-université, et nous avons fait l'hypothèse que cette complexité a des effets sur leur usage dans l'activité mathématique.

Le calcul des prédicats nous a servi de théorie logique de référence pour analyser le manuel au programme en terminale C au Cameroun, le polycopié d'analyse utilisé en première année de mathématiques à l'École Normale Supérieure de Yaoundé, et les productions des élèves et des étudiants à l'issue de notre expérimentation.

Quelques résultats antérieurs

Au chapitre 3, nous avons conduit une revue de littérature de quelques travaux antérieurs sur la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Ces travaux font ressortir les difficultés que les étudiants nouvellement arrivés à l'université rencontrent dans les apprentissages, et mettent en évidence le fait que ces difficultés sont dues en partie à la modification importante du type de tâches proposé dans le secondaire, qui se réduit le plus souvent à un travail dans le bloc technico-pratique alors que l'enseignement à l'université requiert en outre des connaissances théoriques et une flexibilité entre toutes ces connaissances (Selden & Selden (1995), Gueudet (2008)). Par ailleurs, les contenus enseignés, la manière dont ces contenus sont enseignés –l'usage des pratiques expertes, le changement de langage dans l'activité mathématique sont des facteurs qui contribuent largement à accroitre le degré de difficulté d'appropriation des concepts dans les institutions d'enseignement supérieur. Parmi les éléments contribuant à accroître ces difficultés, nous avons relevé principalement la pratique largement répandue de quantification implicite des énoncés mathématiques (Durand-Guerrier & Arsac (2003), Chellougui (2004), Durand-Guerrier (2005)), les difficultés à expliciter la structure logique des énoncés informels ((Epp (1999), Selden & Selden (1995)), les difficultés dans le maniement de l'implication (Rogalski & Rogalski (2003)), la nécessité de la prise en compte de l'articulation syntaxe et sémantique dans la construction de la négation des énoncés complexes (Durand-Guerrier & Ben Kilani (2004)). Les résultats annoncés par les auteurs cités ci-dessus et les propositions d'actions didactiques qu'ils suggèrent nous ont donné des pistes pour élaborer les questionnaires des élèves et des étudiants, organiser le module de suivi avec les étudiants et analyser les productions des deux populations.

Quelle transposition pour les concepts de logique ?

À la suite de ces trois chapitres, nous avons mené une analyse du manuel de terminale C utilisé actuellement au Cameroun et du polycopié du cours d'analyse de première année de la filière mathématique de l'École Normale Supérieure de Yaoundé. Nous avons choisi comme cadres de notre analyse, la transposition didactique, avec comme savoir de référence pour les notions logiques le calcul des prédicats du premier ordre. Le but de cette analyse était de mettre en lumière des éléments de transposition didactique mis en place dans le manuel et le polycopié, et dans la classe de mathématiques, pour ce qui concerne les concepts de logique. Nous avons, à l'issue de nos investigations, apporté des éléments de réponse à la première question que nous nous sommes posée, à savoir, comment les textes à destination des élèves de fin de lycée et des étudiants de début d'université rendent-ils compte de la complexité de ces concepts et de leur utilisation ?

Il s'avère que, dans le manuel, en dehors du point de logique sur la démonstration par récurrence, les concepts logiques ne sont pas pris en charge. Ils sont presqu'exclusivement utilisés comme outils et ne sont pas problématisés. Les phénomènes tels que l'instabilité dans le statut des lettres –cela s'observe surtout dans la démonstration, les implicites dans les énoncés et les démonstrations, la pratique de la quantification implicite ont été observés. Ces phénomènes sont aussi présents dans le polycopié où nous avons néanmoins rencontré dans le premier chapitre une série d'exercices dont le traitement mobilise de façon explicite les concepts de logique.

Des éléments complémentaires à cette analyse, provenant des entretiens avec des enseignants qui interviennent dans le secondaire et à l'université font ressortir que dans le secondaire, l'enseignement de la logique met l'accent en priorité sur l'apprentissage des techniques de démonstration. Dans l'enseignement supérieur, le cours de logique qui est dispensé dans le cadre de l'algèbre porte sur la logique des propositions et sur la quantification appliquée à des formules atomiques[193] ; dans le cours d'analyse, l'accent est mis sur l'apprentissage des techniques de démonstration. À l'issue de cette étude, nous faisons l'hypothèse que les éléments de logique présentés tant dans le secondaire que dans le supérieur ne permettent pas une appropriation adéquate des concepts de logique pour l'activité mathématique en début d'université.

L'expérimentation

La deuxième partie de notre mémoire de thèse rend compte de l'expérimentation que nous avons conduite avec des lycéens et des étudiants de première année de la filière mathématique. Les exercices que nous avons proposés dans le questionnaire ont été traités ensuite au cours du module de suivi avec quelques étudiants volontaires. Les concepts logiques que nous avons retenus pour notre étude sont *la négation*, *l'implication* et *la quantification*. Les exercices des questionnaires ont été choisi pour travailler certains aspects de ces concepts : les exercices 3, 4 sont centrés sur la négation et leur traitement fait l'objet du chapitre 6 ; les exercices 2, 5 et 8 quant à eux mobilisent la quantification et sont traités au chapitre 7 ; les exercices 1, 6 et 7 sont l'objet du chapitre 8 et enfin l'exercice 10 dont le traitement articule de façon explicite les phénomènes langagiers et la quantification est l'objet du chapitre 10.

La négation

Dans le chapitre 6, nous avons regardé comment le concept de négation peut être mis en œuvre par les élèves et les étudiants, pour résoudre des tâches proposées en modifiant les variables didactiques que nous avons définies : nous avons demandé aux étudiants de donner la négation des énoncés quantifiés exprimés dans la langue naturelle et dans le langage formel. Nous avons également proposé un énoncé universel implicitement quantifié afin de problématiser la quantification implicite des énoncés. Les résultats obtenus pointent des

[193] Les formules de la forme $\forall x, P(x)$ et $\exists x, P(x)$.

phénomènes et des aspects qui peuvent être développés dans le cours de mathématiques en vue d'améliorer les performances des élèves et des étudiants dans l'utilisation de la négation :

- des structures différentes de la négation d'un énoncé conditionnel provenant souvent d'un même sujet : cette instabilité peut être réduite en initiant les étudiants à l'analyse logique des énoncés;
- les difficultés dans la gestion des quantificateurs avec quelques fois un changement systématique des quantificateurs qui apparaissent dans les énoncés. Cela fait ressortir l'absence de la prise en compte de l'articulation entre les aspects syntaxiques et sémantiques dans la construction de la négation : cela permet d'aborder la question de la portée des quantificateurs, de la structure logique des énoncés et de la prise en compte des aspects sémantiques et syntaxiques dans la construction de la négation ;
- des interprétations différentes de *un* qui introduit des objets dans les énoncés et de ce fait problématise la quantification implicite et le statut des lettres : il est nécessaire de mettre en évidence les ambiguïtés générées par la quantification implicite ;
- l'impact du langage. Alors que les énoncés dans le langage naturel s'interprètent de diverses façons, le formalisme semble favoriser les transformations syntaxiques : l'explicitation de la structure logique des énoncés donnés dans le langage courant peut être un exercice en classe de mathématiques. Les étudiants seraient ainsi amenés à manipuler les énoncés informels et les énoncés formels correspondants.

La quantification

Les exercices proposés aux élèves et aux étudiants recouvrent la quantification implicite des énoncés universels qui se manifeste généralement par l'usage de *un* dans les énoncés, et la quantification multiple.

Les résultats mettent en évidence plusieurs interprétations possibles de *un.* La construction de la négation a fait émerger des ambiguïtés dans l'interprétation de *un* : elle renvoie à un existentiel ou à un universel.

Concernant la quantification multiple, on rencontre des réponses pour lesquelles il semble que leurs auteurs ne prennent pas en compte l'impact de la modification de l'ordre des quantificateurs universel et existentiel sur la signification de l'énoncé : l'aspect sémantique n'est pas pris en compte.

Il y a une amorce d'utilisation des concepts de logique par certains étudiants (règle du contre-exemple, vérité de l'implication), mais les réponses obtenues aux items montrent une insuffisance des connaissances relatives à ces concepts. Chez les élèves, en dehors de la règle du contre-exemple, les justifications que l'on rencontre sont essentiellement basées sur les connaissances mathématiques. Dans les deux populations, la construction des preuves fait apparaître de nombreuses de difficultés : traitement de la réciproque en lieu et place de l'énoncé de départ, inférences invalides, utilisation simultanée de la même lettre de variable liée dans le champ de deux quantificateurs. En outre, la dépendance des variables se manifeste en acte chez les étudiants, elle est surtout opératoire.

L'implication

Le but des exercices analysés dans ce chapitre était de repérer le traitement que les étudiants font de l'implication dans des tâches variées mettant en jeu différents aspects de ce concept : la détermination des éléments d'un ensemble dont la propriété caractéristique est une implication ouverte, l'évaluation d'une implication, l'utilisation des règles d'inférence. Nous présentons les résultats avec quelques propositions d'actions didactiques :

- pour déterminer un élément qui satisfait une implication ouverte, la plupart des étudiants ne s'intéressent qu'à ceux qui vérifient l'antécédent : le premier exercice peut permettre de mettre en valeur l'utilisation des tables de vérité et les règles de vérité d'une implication formelle peuvent être travaillées ;
- dans l'évaluation d'une implication dont l'antécédent est toujours faux, les étudiants cherchent d'une part à évaluer l'antécédent et, d'autre part, à faire une preuve sous hypothèse. Parmi ceux qui ont évalué l'antécédent, certains procèdent à une modification qui puisse leur permettre de conclure à la vérité du conséquent. Cette observation motive un retour sur la preuve sous hypothèse et la validité d'une inférence en relation avec la vérité des énoncés en jeu ;
- Concernant les règles d'inférence, les étudiants justifient leurs réponses surtout avec des arguments mathématiques. Le Modus Tollens est surtout utilisé en acte, et les échanges des étudiants dans le module de suivi montrent une indisponibilité de l'aspect prédicatif de cette règle d'inférence chez ces derniers. Les résultats montrent également que certains étudiants ont des conduites inférentielles qui renvoient à l'équivalence : une explicitation des règles d'inférence peut être présentée aux étudiants et élèves, avec des situations que nous avons repérées dans un manuel où on pouvait lire « la réciproque n'est pas toujours vraie »[194].

[194] Voir chapitre 4, section 2.2

Le théorème de l'exercice 6 est un énoncé approprié pour valoriser l'activité de formalisation ; il met en valeur le choix des quantificateurs dans des activités de formalisation d'une part et, d'autre part, l'importance de l'explicitation des quantificateurs pour prendre la contraposée d'un énoncé.

Le changement de langage

La capacité des étudiants à identifier les implicites dans les formulations en langage courant était au centre de l'exercice 10. Nous avons pu identifier les difficultés des étudiants, ce qui nous permis de dégager un certain nombre de résultats : pour transformer un énoncé de la forme « tout A est B » en un énoncé de la forme « $\forall x, (A(x) \Rightarrow B(x))$ » les étudiants produisent des énoncés proches de ceux qui sont congruents à l'énoncé de départ ; la syntaxe dans l'usage des symboles est approximative et le phénomène d'imitation repéré chez les étudiants par Gueudet (2008) est bien présent ; le statut des variables n'est pas toujours pris en compte ; l'absence du quantificateur existentiel conduit certains étudiants à produire des énoncés congruents à l'énoncé de départ, dont la signification ne renvoie pas à l'énoncé initial.

Perspectives de recherche :

Les résultats que nous avons obtenus nous invitent à approfondir notre travail sur des actions didactiques spécifiques qui pourraient être engagées, dans le but de rendre opératoires les concepts de logique chez les étudiants et de stabiliser leur utilisation. Nous proposons quelques perspectives pour orienter ce travail d'approfondissement.

1. Proposition d'enseignement

Les résultats de notre expérimentation, en lien avec les analyses du manuel et du polycopié nous ont amenés à identifier des situations qui pourraient être porteuses pour la prise en charge des concepts de logique dans la classe de mathématiques. Il s'agit d'items contenus dans le cours de mathématiques de chaque niveau d'étude. Une piste que nous nous proposons d'explorer dans la suite de notre travail est la mise en place d'un module de suivi des étudiants sur une durée longue. Il porterait sur la clarification et l'explicitation de l'usage des concepts de logique. Une telle action serait basée sur l'exploitation des énoncés et des exercices de cours. Nous proposons en annexe des énoncés qui pourraient être pertinents pour cette activité, en précisant que la liste n'est pas exhaustive. Pour chaque item choisi, nous proposons des questions qui pourront orienter les débats avec les élèves dans la classe. Les questions de recherche afférentes concernent les effets d'un tel travail pour l'appropriation des concepts logiques d'une part, pour les apprentissages mathématiques d'autre part.

2. La formation des enseignants

Les travaux de Rogalski & Rogalski (2003) et Durand-Guerrier (2005) montrent qu'il y a un besoin de formation sur les questions de logique à l'intention des enseignants de mathématiques. Tels que ces deux auteurs le proposent, et que nous proposons en perspective, des modules complémentaires peuvent être organisés au cours de la formation des enseignants afin que ces derniers puissent prendre la mesure de la place de la logique dans l'activité mathématique et puissent en faire un bon usage :

> « Nous disons que le fait que la logique ne soit plus aujourd'hui un objet d'enseignement dans le secondaire, ne signifie pas qu'un enseignant de mathématiques puisse se passer des connaissances en logique ; en effet, même si la logique doit rester un outil pour l'enseignant, encore faut-il que celui-ci ait une connaissance idoine de l'objet, faute de quoi, comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, il risque de ne pas comprendre ce qui se joue devant lui. » (Durand-Guerrier, 1996, p.293)

3. Étudier les effets du bilinguisme sur l'apprentissage des concepts logiques

Dans l'introduction, nous avons évoqué les difficultés d'ordre linguistique qui pouvaient survenir dans les apprentissages de logique dans un contexte multilingue. Les travaux de Ben Kilani pour ce qui concerne la Tunisie, ont montré que la syntaxe de la négation varie d'une langue à l'autre, pour ce qui concerne le français et l'arabe, et que cela est une source de difficultés supplémentaires pour les étudiants dont la langue naturelle est l'arabe, et qui étudient les mathématiques en français. Nous avons fait l'hypothèse que ceci est également vrai dans le contexte camerounais où les langues maternelles utilisées en famille ne sont pas le français, et qu'il en est de même pour les autres concepts. En effet, les travaux de F. Tsoungui (1980) montrent que la langue ewondo déteint fortement sur la pratique du français, et nous pouvons faire l'hypothèse que cela est vrai pour les autres langues.

En 2011, nous avons présenté une première ébauche de ce que pourrait être un travail sur cette question à la conférence de l'étude ICMI 21[195]. Dans la communication que nous avions présentée avec V. Durand-Guerrier, il s'agissait d'essayer d'identifier d'éventuelles influences de la langue maternelle sur les apprentissages en mathématiques, particulièrement sur les questions de logique. Nous avons choisi la langue ewondo du fait que c'est l'une des langues les plus parlées dans la zone de Yaoundé d'une part et, d'autre part, nous disposions des travaux de F. Tsoungui (1980) qui a mené une étude comparative entre les grammaires française et ewondo, et auxquels nous pouvons nous référer. Nous nous sommes penchée sur l'étude de la construction de la négation et les premiers éléments que nous avons recueillis

[195] Voir texte en annexe 13

montrent quelques différences significatives avec le français. Une piste de recherche va consister à confirmer et préciser ces différences, puis rechercher leurs effets sur la pratique de l'activité mathématique ; les travaux développés en sémantique formelle, qui s'appuient sur l'analyse logique du langage, nous semblent offrir des portes prometteuses pour ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

ALIBERT, D. & THOMAS, M. (1991). Research in mathematical proof, in D. Tall (ed.), *Advance Mathematical Thinking*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp.215-230.

ARISTOTE *Organon I (Catégories) – II (Sur l'interprétation) Introduction générale à l'Organon par Pierre Pellegrin - , trad. du grec ancien, notes et index des Catégories par Pierre Pellegrin et Michel Crubellier - , trad. du grec ancien, notes et index de Sur l'interprétation par Catherine Dalimier* Paris : Flammarion (2007).

ARSAC, G. & al. (1992). Initiation au raisonnement déductif au collège. Presses universitaires de Lyon, I.R.E.M. de Lyon.

BALACHEFF, N. (1982). Preuve et démonstration, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol 3(2), pp.261-304.

BALACHEFF, N. (1988), *Une étude des processus des preuves en mathématiques chez les élèves de Collège*, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourrier, Grenoble.

BALAGUER, B. (1999, p.10), *La leçon d'analyse au CAPES de mathématiques. Paris* ; Ellipses.

BARWELL, R. & BARTON, B. & SETATI, M (2007). Multilingual issues in mathematics education: introduction, *Educational Studies in Mathematics,* Vol 64, pp.113-119

BARRIER, T. (2009). *Une perspective sémantique et dialogique sur les situations de validation en mathématiques*. Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon 1.

BATTIE, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique (Specificity and potential of elementary number theory for the learning of mathematical reasoning)*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VII.

BEN KILANI, I. (2005) *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*, Thèse en cotutelle de l'université de Tunis et l'université Claude Bernard Lyon 1

BERGER, M. (2004). The functional use of a mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics*, *Volume* 55, pp.81–102.

BLOCH, I. ET GHEDAMSI, I. (2005). Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie. *Petit X, Vol 69, pp.7-30.*

BOSCH, M., FONSECA, C., & GASCON, J. (2004). Incompletud de las organisaziones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Vol. 24 (2-3)*, pp. 205-250

CASTELA, C. (2004). Institutions influencing mathematics students' private work: A factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics*, *Vol 57*, pp.33-63.

CHELLOUGUI, F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*, Thèse en cotutelle, diplôme de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, Université de Tunis, décembre 2004.

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage, 1991.

COPI, I. (1954), *Symbolic logic*. New York.

CORBLIN, F. (1997). Les indéfinis : variables et quantificateurs, in langue française, vol 116, n°1 pp.8-32

DELOUSTAL-JORRAND, V. (2000-2001). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs, *Petit X*, *Vol 55*, pp.35-70.

DELOUSTAL-JORRAND, V. (2004) *L'implication mathématique : Etude épistémologique et didactique. Etude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle, et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier- Grenoble I, décembre 2004.

DOUADY, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n°2, pp. 5-31*

DUBINSKY, E., & YIPARAKI, O. (2000). On students understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics Education, Vol 8*, pp.239-289. American Mathematical Society, Providence.

DURAND-GUERRIER, V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, octobre 1996.

DURAND-GUERRIER, V. (1999), l'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit X n°50, pp.57-79.* IREM de Grenoble.

DURAND-GUERRIER V., LE BERRE M., PONTILLE M.C., REYNAUD-FEURLY J., (2000). Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Eléments d'analyse pour les enseignants, Lyon : IREM.

DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. : 2003, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol.* 23/3, pp. 295-342.

DURAND-GUERRIER, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *Vol 53*, pp.5-34.

DURAND-GUERRIER, V., & BEN KILANI, I. (2004). Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. *Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien. Les Cahiers du Français Contemporain, Vol. 9*, pp.29-55.

DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* Habilitation à Diriger les Recherches, Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER, V. & NJOMGANG NGANSOP, J. (2009). Questions de logique et de langage à la transition secondaire supérieur. L'exemple de la négation. *Actes du colloque EMF 2009*.

DURAND-GUERRIER, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, *Actes de l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* Carcassonne 2011.

DURAND-GUERRIER, V., KAZIMA, M., LIBBRECHT, P., NJOMGANG NGANSOP, J., SALEKHOVA, L., TUKTAMYSHOV, N., Winsløw, C., (à paraître en 2014): Challenges and opportunities for second language learners in undergraduate mathematics In ICMI Study 21 Book, Springer

DUVAL R., EGRET M.A. (1993), Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repère n°12* (pp.114-140). Topiques Editions.

DUVAL, R. (1988) Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence in *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, Vol 1, pp. 7-23, ULP, IREM de Strasbourg.
DUVAL, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine.* Bern ; Peter lang.

EDMONDS-WATHEN C., DURAND-GUERRIER V., TRINICK T., (to appear in 2014), *Impact of Differing Grammatical Structures in Mathematics Teaching and Learning*, in ICMI 21 study Book, Springer.

EL FAQHI, E.M. (1991). *Place de la Logique dans l'Activité Mathématique des Étudiants du Premier Cycle Scientifique*. Thèse de Doctorat de l'Université de Strasbourg, France.

FREGE, G. (1879). Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete formelsprache des reinen denkens, Halle a. S. : Louis Nebert.

FREGE, G. (1892) Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik NF* 100:25-50. Traduction française par C. Imbert de (Frege, 1971: 127-154), 1971.

FUCHS, C. (1996) *Les ambiguïtés du français.* Collection l'essentiel du français Orphys.

GUEUDET, G. (2008) Investigating the secondary-tertiairy transition. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 67, pp.237-254.

HOTTOIS, G. (1989), *Penser la logique*. De Boeck Université.

HOUDEBINE, J. (1998), *La démonstration. Ecrire des démonstrations au collège et au lycée*. Hachette Education.

IANONE, P. & NARDI, E. (2008) The interplay between syntactic and semantic knowledge in proof production: Mathematicians' perspectives, Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5), Larnaca, Cyprus (in press).
LEGRAND, M. (1990). « Circuit » ou les règles du débat mathématique. In commission Inter-Irem Univresité (CI2U) (Eds.), *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année,* pp. 129-161, Paris VII : IREM.

LITHNER, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. Educational Studies in Mathematics, *Volume* 41, pp. 165–190.

LITHNER, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 52, pp. 29-55.*

LOI, M. (1982). Rigueur et ambiguïté, in Penser les mathématiques, séminaire de philosophie et mathématiques de l'école normale supérieure, J. Dieudonné, M. Loi, R. Thom, pp.108-122, éditions du Seuil.

NJOMGANG NGANSOP, J. (2008) Comment enseigner les concepts de logique aux étudiants de première année de licence : Cas de la négation.

NJOMGANG NGANSOP, J. & DURAND-GUERRIER, V. (à paraître 2014). Negation of Mathematical Statements In French In Multilingual Contexts – *An example in Cameroon. Actes du colloque ICMI 21.*

OUVAROV (1984), *Analyse mathématique*, Editions de Moscou, traduction française, MIR, 1988.

PRASLON, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/ DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat de l'université de Paris 7.

REY, B., CAFFIEAUX, C., COMPERE, D., LAMME, A., PERSENAIRE, E., PHILIPPE, J. & al. (2003). Les caractéristiques des savoirs enseignés dans les universités et les hautes écoles (Characteristics of the knowledge taught at universities and colleges), Université Libre de Bruxelles – Service des Sciences de l'Education.

ROBERT, A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université (Tools for the analysis of the mathematical content taught at high school and university). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 18(2), pp. 139–190.

ROGALSKI, J. & ROGALSKI, M. (2004) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques*, Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 9*, pp. 175- 203. IREM de Strasbourg.

ROLLAND J. (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication,* Thèse, Université Joseph Fourier, IMAG, Grenoble.

RUSSELL, B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique*. PUF : Paris 1989

RUSSELL, B. (1910) *Principia Mathematica* traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique.* PUF : Paris 1989

SELDEN J. & SELDEN A. (1995), Unpacking the logic of mathematical statements, in *Educational Studies in Mathematics, Vol 29, pp. 123-151*

SIERPINSKA, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra, In J.-L. DORIER, (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209–246). Dordrecht: Kluwer.

TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer, Dordrecht

TARSKI, A. (1933). Le concept de vérité dans les langages formalisés. Traduction française dans Tarski (1972), pp. 157–269.

TARSKI, A. (1936). Le concept de vérité dans les langages formalisés in *Logique, sémantique et métamathématique, Vol.1* : pp. 157-269. Armand Colin, 1972.

TARSKI, A. (1944). La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique in *Logique, sémantique et métamathématiques, Vol. 2*, pp. 265-305. Armand Colin, 1972.

TSOUNGUI, F. (1980) *Le français écrit en classe de 6ème à Yaoundé. Recherches des interférences de l'Ewondo dans le français et proposition pédagogiques*. Thèse de 3ème cycle, Université de la Sorbonne Nouvelle, mars 1980. Directeur Maurice Houis.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 2/3, pp.133-170.

VERGNAUD, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. *Montréal Mai 2001, conférence publiée dans les actes du Colloque* GDM-2001 *; (Jean Portugais (Ed) La notion de la compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation)*.

QUINE, W. V. O. (1950). Methods of Logic. New York : Holy, Rinehart & Winston.

WINSLOW, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle, In Rouchier, A. et al (Eds.), *Actes de la XIIIième école d'été de didactique de mathématiques*, la Pensée Sauvage Editions Grenoble France.

WITTGENSTEIN L. (1921). *Tractatus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig ; traduction française, Gallimard, 1961.

OUVRAGES MATHEMATIQUES

ALASSANE, T. (1999) *Mathématiques, terminale SM*. Collection Inter Africaine, EDICEF.

CAGNAC G., RAMIS E., COMMEAU J. (1963), Nouveau Cours de Mathématiques Spéciales, Tome 2, Analyse. Paris ; MASSON.

GODEMENT, R. (1973). Cours d'algèbre, quatrième édition parue en 1973.

LAFAILLE, G. & PAULY, C. (année). Cours d'analyse en ligne sur le site de l'université de Montpellier 2.

N° d'ordre 224-2013 Année 2013

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

délivrée par

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

et préparée en cotutelle avec

L'UNIVERSITE DE YAOUNDE 1

ECOLE DOCTORALE

Education, Psychologie, Informatique et Communication

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006 / arrêté du 6 janvier 2005)

soutenue publiquement le 29 novembre 2013

par

NJOMGANG NGANSOP Judith

Spécialité : Didactique des Mathématiques

TITRE :

Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. ***Une étude de cas au Cameroun***

Directeur de thèse :

DURAND-GUERRIER Viviane

Co-directeur

DIFFO LAMBO Lawrence

ANNEXES

Sommaire

LES QUESTIONNAIRES

QUESTIONNAIRE ETUDIANTS

1. Déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à vingt vérifiant la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ».
2. Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont vraies ; celles qui sont fausses et celles pour lesquelles on ne peut pas se prononcer. Vous justifierez soigneusement vos réponses (*On se place dans la géométrie euclidienne classique enseignée au collège et au lycée*).
   2.1. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires
   2.2. Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
   2.3. Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré
3. Donner la négation de chacune des phrases suivantes :
   3.1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges
   3.2. Certains nombres entiers sont pairs
   3.3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.
   3.4. La limite d'une fonction est toujours finie.
4. Donner la négation et la contraposée de l'énoncé suivant :
   « $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ » où x et y désignent deux nombres réels.
   La réciproque est-elle vraie ?
5. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle peut être utilisée, ou non, pour compléter la phrase qui suit afin d'obtenir une définition mathématique correcte. Vous justifierez soigneusement vos réponses :
   « Une fonction numérique f de la variable réelle x est majorée sur un intervalle **I** de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels *si et seulement si*……………………………………»,
   5.1. Pour tout x élément de I, $f(x) \leq M$
   5.2. Si x est un élément de **I**, alors $f(x) \leq M$
   5.3. Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$
   5.4. Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, $f(x) \leq M$
   5.5. Si x est un élément de **I**, alors il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$
6. Dans ce qui suit, (u_n) désigne une suite définie par récurrence sous la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ », où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On a alors le résultat suivant :
   « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x)=x$ »
   Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si :
   6.1. L'équation « $f(x)=x$ » n'a pas de solution
   6.2. L'équation « $f(x)=x$ » a au moins une solution.
   Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « $f(x)=x$ » si :
   6.3. La suite (u_n) est convergente
   6.4. La suite (u_n) n'est pas convergente

7. Que pensez-vous de la propriété suivante :
   « Pour tout nombre réel x, pour tout nombre réel y, si ($x < y$ et $y < x$), alors $x = y$ » ?

8. Indiquer dans la liste suivante, les intervalles I qui vérifient :
   8.1. pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $a < b$;
   8.2. il existe b dans I tel que, pour tout a dans I, $a < b$.
   $$I =]0,1] \; ; \; I = [0,1[\; ; \; I = [-5, +\infty[\; ; \; I =]-\infty, 1000]$$
9. On considère la famille de fonctions f_a définie par $f_a(x) = \ln(1 + ax)$ où a est un réel non nul. Montrer que toutes les courbes C_a passent par un même point.
10. Ecrire en langage formel l'énoncé suivant :
    « Tout entier pair n, supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers »
    Comment pensez-vous mettre en œuvre l'étude de cette conjecture ?
11. On a posé la question suivante à un étudiant : La proposition (P) suivante est-elle vraie ?
    (P) « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $y^2 - 2xy + 8x + 9 \leq 0$, alors $|y| \leq 2|x| + 4$ »
    Il a donné la réponse suivante :
    « l'assertion (P) est fausse. En effet, l'hypothèse signifie que l'on a $(y - x)^2 \leq$
    $(x - 4)^2 - 25$; mais si
    $-1 < x < 9$, alors $(x - 4)^2 - 25 < 0$, donc l'hypothèse n'est pas vérifiée, et n'impose donc aucune contrainte à y (on est dans la bande $]-1,9[\times \mathbb{R}$) ; mais la conclusion, dans ce cas entrainerait sur y la contrainte $|y| \leq 22$, ce qui serait absurde ».

Que diriez-vous à cet étudiant ?

QUESTIONNAIRE DES ELEVES

7. Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à vingt vérifiant la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ».
8. Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont vraies ; celles qui sont fausses et celles pour lesquelles on ne peut pas se prononcer. Vous justifierez soigneusement vos réponses (*On se place dans la géométrie euclidienne classique enseignée au collège et au lycée*).
   8.1. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires
   8.2. Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
   8.3. Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré
9. Donner la négation de chacune des phrases suivantes :
   9.1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges
   9.2. Certains nombres entiers sont pairs
   9.3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.
   9.4. La limite d'une fonction est toujours finie.
10. Donner la négation de « *f* est croissante », puis écrire cet énoncé en langage formel
   Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle peut être utilisée, ou non, pour compléter la phrase qui suit afin d'obtenir une définition mathématique correcte. Vous justifierez soigneusement vos réponses :
   « Une fonction numérique *f* de la variable réelle *x* est majorée sur un intervalle **I** de l'ensemble ℝ des nombres réels *si et seulement si*………………………………….»,
   10.1. Pour tout x élément de I, *f(x)*≤M
   10.2. Si *x* est un élément de **I**, alors *f(x)*≤M
   10.3. Pour tout *x* élément de **I**, il existe un réel M tel que *f(x)*≤M
   10.4. Il existe un nombre réel M tel que pour tout *x* élément de **I**, *f(x)*≤M
   10.5. Si x est un élément de **I**, alors il existe un réel M tel que *f(x)*≤M
11. Dans ce qui suit, (u_n) désigne une suite définie par récurrence sous la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ », où f est une fonction continue sur ℝ. On a alors le résultat suivant :
   « Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est solution de l'équation *f(x)=x* »
   Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si :
   11.1. L'équation « *f(x)=x* » n'a pas de solution
   11.2. L'équation « *f(x)=x* » a au moins une solution.
   Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « *f(x)=x* » si :
   11.3. La suite (u_n) est convergente
   11.4. La suite (u_n) n'est pas convergente
12. Indiquer dans la liste suivante, les intervalles I qui vérifient :
   12.1. pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $a < b$;
   12.2. il existe b dans I tel que pour tout a dans I, $a < b$.

$$I =]0,1] \; ; \; I = [0,1[\; ; \; I = [-5,+\infty[\; ; \; I =]-\infty, 1000]$$

7. On considère la famille de fonctions f_a définie par $f_a(x) = \ln(1 + ax)$ où a est un réel non nul. Montrer que toutes les courbes C_a passent par un même point.
8. Que pensez-vous de la propriété suivante :

« Pour tout nombre réel x, pour tout nombre réel y, si ($x < y$ et $y < x$), alors $x = y$ » ?

9. On a posé la question suivante à un élève : La proposition (P) suivante est-elle vraie ?
   (P) « $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $y^2 - 2xy + 8x + 9 \leq 0$, alors $|y| \leq 2|x| + 4$ »
   Il a donné la réponse suivante :
   « l'assertion (P) est fausse. En effet, l'hypothèse signifie que l'on a $(y - x)^2 \leq (x - 4)^2 - 25$; mais si $-1 < x < 9$, alors $(x - 4)^2 - 25 < 0$, donc l'hypothèse n'est pas vérifiée, et n'impose donc aucune contrainte à y (on est dans la bande $]-1,9[\times \mathbb{R}$) ; mais la conclusion, dans ce cas entrainerait sur y la contrainte $|y| \leq 22$, ce qui serait absurde ».

Que diriez-vous à cet élève ?

ANNEXE 1

1. « Les bonbons de la maîtresse »

Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves et leur dit : « cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons ».

Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbon et les distribue aux enfants ? Ceux-ci protestent : « ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons ». Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat.

Quel commentaire vous inspire ce récit ?

2. Version « Radford » de la tâche de sélection de Wason

Dans une urne, on dispose d'un certain nombre de boules numérotées. Les boules sont soit blanches soit noires. On s'intéresse à la question suivante : « est-ce que, dans l'urne,toutes les boules blanches ont un numéro pair ? »

On envisage 4 procédures pour répondre à la question :

Procédure 1 : on sort de l'urne les boules de numéro pair, puis on regarde leurs couleurs ;

Procédure 2 : on sort de l'urne les boules de numéro impair, puis on regarde leurs couleurs ;

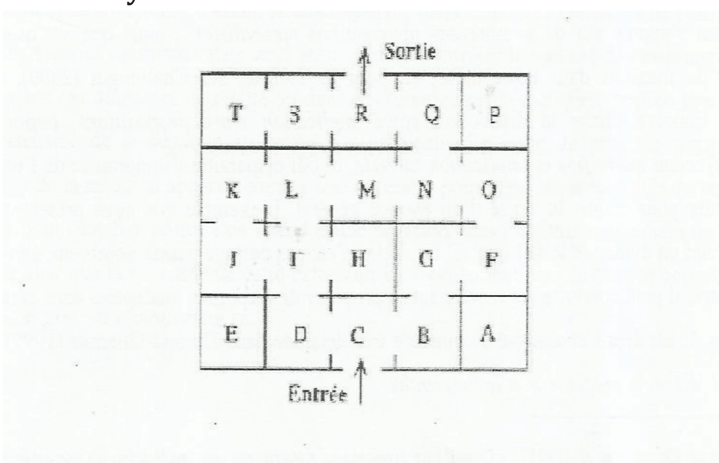
Procédure 3 : on sort de l'urne les boules blanches, puis on regarde leurs numéros ;

Procédure 4 : on sort de l'urne les boules noires, puis on regarde leurs numéros ;

Pour chacune des deux procédures, choisissez les deux options :

(a) la procédure me permettra de répondre sûrement à la question ;
(b) la procédure risque de ne pas me permettre de conclure.

3. Le labyrinthe



Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.

Une personne que nous appelons X a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte.

Les pièces sont nommées A, B, C, … comme il est indiqué sur la figure.

Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase « X est passé par C » est une phrase VRAIE.

En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n°1 : « X est passé par P »

Phrase n°2 : « X est passé par N »

Phrase n°3 : « X est passé par M »

Phrase n°4 : Si X est passé par O, alors X est passé par F »

Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »

Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K ».

Brève analyse de la tâche et des résultats par l'auteur

Cette tâche a été proposée dans le cadre d'EVAPM2 91 : il s'agit d'une évaluation proposée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public à des enseignants volontaires en fin de seconde, dont les résultats sont publiés dans APMEP (1992). Le labyrinthe est le premier exercice d'une série de six présentée aux élèves sous la rubrique :

Epreuve portant sur le thème

ARGUMENTATION – RAISONNEMENT – EXPRESSION (Modalité T)

L'exercice contient six phrases. Il s'agit pour chacune des phrases proposées, de dire si elle est *vraie*, si elle est *fausse* ou si *on ne peut pas savoir*.

L'auteure répartit les phrases en deux groupes ; les trois premières correspondent à des évènements élémentaires, tandis que les trois autres correspondent à des implications.

L'auteure propose en premier lieu une résolution de la tâche avec des arguments empiriques, ce qui produit les réponses suivantes :

Phrase n°1 : FAUSSE

Phrase n°2 : VRAI

Phrase n°3 : ON NE PEUT PAS SAVOIR

Phrase n°4 : VRAIE

Phrase n°5 : VRAIE

Phrase n°6 : ON NE PEUT PAS SAVOIR

<u>Résultats et discussion</u>

Pour les trois premières phrases, les taux de réussite se répartissent ainsi :

Phrase n°1 : 100% - Phrase n°2 : 96% - Phrase n°3 : 85%. Ils correspondent au pourcentage de réussite vis-à-vis des réponses considérées comme exactes par les auteurs, à savoir : Phrase n°1 : FAUSSE – PHRASE n°2 : VRAIE – Phrase n°3 : ON NE PEUT PAS SAVOIR.

Le taux de réussite encore très élevé pour la première implication (93%) chute pour la phrase n°5 (69%) et s'effondre pour la phrase n°6 (29%). Ces taux correspondent aux réponses considérées comme exactes par les auteurs de l'évaluation : Phrase n°4 : VRAIE – Phrase n°5 : VRAIE – Phrase n°6 : FAUSSE.

L'auteure pointe la forte divergence qui apparait entre les professeurs et les élèves qui ont répondu majoritairement « *on ne peut pas savoir* » là où les auteurs considèrent que la phrase est fausse. D'après elle, pour tenter d'expliquer la réponse « *on ne peut pas savoir* » pour la phrase n°6, les enseignants avancent l'idée selon laquelle, pour la majorité des élèves, l'assertion « Si X est passé par O, alors X est passé par F » se traduit par la question : « sachant que X est passé par O, X est-il passé par F ? », ou même « Sachant que X est passé par O, X est-il passé par F avant ? ». (p.84)

Dans les premiers éléments d'analyse de ces réponses, l'auteure identifie une incertitude sur le statut logique de la lettre X, qui conduit à une divergence d'interprétation sur la nature de la question : d'un côté une question de nécessité liée à un quantificateur universel implicite ; de l'autre une question sur un cas particulier dans une situation où la valeur de vérité n'est pas contrainte par la situation. Elle choisit le trajet comme variable pertinente qui permet de traduire les informations en vue d'une formalisation de la tâche.

La formalisation de la tâche dans le calcul des prédicats que l'auteure propose l'amène à faire trois interprétations de la lettre X :

Première interprétation (celle de l'auteure) : X est un nom de personne, un nom propre. On peut lui associer son trajet qui est également un élément singulier.

Le raisonnement qu'elle conduit à partir de la formalisation qu'elle a proposée, permet de retrouver les réponses proposées par les auteurs, elle-même et la majorité des élèves. (p.88)

Deuxième interprétation : X est une lettre de variable implicitement quantifiée universellement sur les individus qui ont réussi à traverser le labyrinthe sans jamais passer deux fois par la même porte, on associe à X son trajet *t*, qui est donc une variable implicitement quantifiée universellement. D'après l'auteure, dans cette interprétation, les phrases 3 et 6 sont toutes deux fausses. (p.89)

Troisième interprétation : X est une lettre pour un individu générique. L'auteure note τ le trajet générique associé. Elle a les mêmes conclusions que dans la première interprétation, mais en outre dans ce cas, les énoncés 3 et 6 sont intrinsèquement contingents puisque ce sont des instances génériques de phrases ouvertes ayant à la fois des exemples et des contre-exemples. (p.89)

4. Théorème du point fixe

DEMONSTRATION DU THEOREME DU POINT FIXE

Définitions :

1- Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite contractante lorsque :

$$\exists k \in]0,1[\; tel\ que, \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

2- Si f est fonction définie en *a*, *a* est un point fixe pour l'application *f* si $f(a) = a$

Théorème du point fixe

Soit f est une fonction numérique d'une variable réelle, continue sur $\mathbb{R}$. Si f est contractante, alors elle admet un unique point fixe.

Démonstration :

Deux étapes : on montre l'existence du point fixe, puis son unicité.

Existence :

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, (u_0 est donné).
Nous allons montrer que cette suite est de Cauchy.
Soit p et n deux entiers naturels non nuls.

$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n|$ (Inégalité triangulaire)

f étant contractante, pour $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a
$|u_{n+i} - u_{n+i-1}| = |f(u_{n+i-1}) - f(u_{n+i-2})| \leq k|u_{n+i-1} - u_{n+i-2}|$

En utilisant la méthode des approximations successives, on obtient :

$|u_{n+i} - u_{n+i-1}| \leq k^{n+i-1}|u_1 - u_0|$.

$$\sum_{i=1}^{p} |u_{n+i} - u_{n+i-1}| \leq |u_1 - u_0| \left(\sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1} \right) = |u_1 - u_0| k^n \left(\sum_{i=1}^{p} k^{i-1} \right)$$

$\left(\sum_{i=1}^{p} k^{i-1}\right) = \frac{1-k^p}{1-k} \leq \frac{1}{1-k}$, $\sum_{i=1}^{p} k^{i-1}$ étant la somme des p premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison k.

Au total, $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

$(u_n)_n$ est une suite de Cauchy donc converge. Nommons a sa limite, et montrons qu'elle est un point fixe de f.

$f(a) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$, car f est continue.

On a ainsi, $f(a) = a$.

On a montré que f admet un point fixe qui est la limite de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Unicité du point fixe :

On va faire une démonstration par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux points fixes, a et b, avec $a \neq b$.

On a alors $|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq k|a - b| < |a - b|$, (parce que $a \neq b$) c-à-d que $|a - b| \neq |a - b|$, ce qui est absurde.

On ne peut avoir $a \neq b$.

Repérer :
- la structure logique globale de la démonstration
- les modes de raisonnement utilisés
- les théorèmes mobilisés explicitement
- les théorèmes mobilisés sans être explicités

Préciser le statut logique des lettres (variables libres, liées, éléments génériques, élément particuliers) et indiquer ce qui ne vous parait pas clair.

5. Une preuve en topologie

Question : (E, d) est un espace métrique, A et B sont deux parties de E.

On définit $d(A, B) = inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}$. Montrer que si A est compact et B est fermé et $A \cup B \neq \emptyset$, alors $d(A, B) \neq 0$.

Démonstration :

1 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B, 0 \leq d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

2 Comme $x \in A$, et A fermé $\Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A, x_n \to x$

3 Or $d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y)$

4 Et, comme $x_n \to x$, $\exists n_0, n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

5 d'où, pour $n \geq n_0, d(x_n, y) < \varepsilon$, ainsi $x_n \to y$ et comme $(x_n) \subset A$,

6 $y \in \bar{A} = A$, or $y \in B \Rightarrow y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ (p.319)

Une formulation de la preuve à l'aide des règles de Copi :

« On peut la formaliser en désignant par une lettre de prédicat, par exemple F, la propriété sur la distance de x à y.

L'énoncé de la ligne n°1 est de la forme :

(1) $\forall z \exists x \exists y\ Fxyz$

On applique I.U

(2) $\exists x \exists y\ Fxyt$

On applique deux fois I.E.

(3) $\exists y\ Fuyz$ $\qquad u$

(4) $Fuvt$ $\qquad v$

u et v sont deux variables libres obtenues par une instantiation existentielle ; elles sont donc introduites dans l'ordre alphabétique et signalées sur la ligne instantiée.

Après quelques transformations mathématiques, on arrive à

(5) $Guvt$

(où G désigne la propriété ad hoc). Comme t est antérieur alphab&tiquement à u et v, on ne peut pas faire une instantiation universelle sur t ; autrement dit, la déduction :

(6) $\forall z\ Guvz$

est incorrecte. » (p.322)

6. Réduction de la fonction vectorielle de Leibniz : démonstration du théorème

Démonstration

1. $F(M) = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2}$ +..........+$\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$= $\sum_{j=1}^{j=n}\overrightarrow{MA}_{\mathrm{j}}$ (1)

2. Pour simplifier l'expression de cette somme on choisit un point A.

3. alors

4. $F(A) = \alpha_1\overrightarrow{AA_1} + \alpha_2\overrightarrow{AA_2}$ +.........+ $\alpha_{\mathrm{n}}\overrightarrow{AA_n} = \sum_{j=1}^{j=n}\overrightarrow{AA}_{\mathrm{j}}$ (2)

5. en soustrayant membre à membre (1) et (2) on obtient :

6. $F(M) - F(A) = \alpha_1(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{AA_1}) + \alpha_2\ (\overrightarrow{MA_2} - \overrightarrow{AA_2})$ +............

7. $\alpha_n\ (\overrightarrow{MA_n} - \overrightarrow{AA_n}) = \sum_{j=1}^{j=n}(\overrightarrow{MA_j} - \overrightarrow{AA_j})$

8. d'où

9. $F(M) - F(A) = \alpha_1\overrightarrow{MA} + \alpha_2\overrightarrow{MA}$ +....$\alpha_n\overrightarrow{MA}$

10. $F(M) - F(A) = \left(\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j\right)\overrightarrow{MA}$

11. posons alors $m = (\alpha_1 + \alpha_2$ +......+α_n)= $\left(\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_{\ j}\right)$

Le nombre est appelé

12. masse totale du système. La relation précédente peut alors s'écrire :

13. $F(M) = F(A) + m\overrightarrow{MA}$

14. distinguons deux cas :

15. si $m = 0$, alors pour tout $M, F(M) = F(A)$, autrement dit la fonction est

16. constante.

17. si $m \neq 0$, montrons alors que l'équation $F(M) = \vec{0}$ admet une solution

18. unique.

19. $F(M) = \vec{0} \Leftrightarrow F(A) + m\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{m}F(A)$

20. cette dernière relation montre que M est l'image de A par la translation de

21. vecteur, $\frac{1}{m}F(A)$ et par suite M est unique. Si on appelle G ce point,

22. on a donc $F(G) = \vec{0}$ et pour tout M, $F(M) - F(G) = F(M) = m\overrightarrow{MG}$

23. autrement dit $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2}$ +…..+$\alpha_n\overrightarrow{MA_n} = m\overrightarrow{MG}$

Nous nous intéressons au statut de la lettre M dans l'énoncé du théorème et dans la démonstration :

Les différents statuts de la lettre dans l'énoncé du théorème

D'après l'auteure, dans le cas où $m = 0$, la lettre M apparait sans avoir été introduite avec le statut d'élément générique puis de lettre de variable fonctionnelle ensuite ;

Dans le cas où $m \neq 0$, la lettre M apparait comme *variable liée* (logique) ou *variable muette* (mathématiques) puisqu'elle se trouve dans le champ d'un quantificateur.

Les différents statuts de la lettre M dans la démonstration

À la ligne 1, M apparait sans être introduite, ce qui d'après l'auteure, et suivant l'habitude, peut avoir le statut d'élément générique. À la ligne 15, M a le statut de *variable muette* ou encore *variable liée*. On est en présence de l'application de la règle de généralisation universelle[1]. A la ligne 17, M a le statut d'inconnue (mathématique) ou encore de variable libre (logique) puisqu'elle intervient dans une équation.

À la ligne 19, l'auteure repère une incertitude sur le statut de la lettre qui peut soit désigner un *élément générique*, soit être une lettre de *variable libre* ou *liée* (avec une quantification universelle implicite), ou encore désigner le *point dont on veut prouver l'existence et l'unicité*. Aux lignes 20 et 21, d'après l'auteure, M est la solution de l'équation, dont l'existence n'est pas problématisée. À la ligne 21, M est débaptisée pour être rebaptisée G, et rendue disponible pour jouer le rôle de *variable muette*.

[1] Voir chapitre 4, section 5.1

7. Démonstration de la propriété 3, page 19 CIAM

Démonstration

• Soit u et v deux entiers relatifs.
au et bv sont multiples de δ, donc $au + bv$ est multiple de δ.
• Considérons l'ensemble A des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $au + bv$ ($u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$). On a : $a = a \times 1 + b \times 0$; donc : $a \in$ A.
A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément p.
Il existe deux entiers relatifs u' et v' tels que : $p = au' + bv'$.
Effectuons la division euclidienne de a par p ; on obtient : $a = pq + r$, avec $0 \leq r < p$.
Donc : $r = a(1 - qu') + b(-qv')$; r est de la forme : $au + bv$.
Si r était non nul, il serait un élément de A strictement inférieur à p. Donc : $r = 0$ et p divise a.
De même p divise b ; donc p divise δ.
Or, p est multiple de δ ; donc : $p = \delta$.

8. Tableau (1) : étude des manuels de quatrième (Deloustal-Jorrand)

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
(H)	A l'intérieur du cours : chapitre de géométrie	Donne des définitions de termes associés à l'implication	Au raisonnement, dans un cadre démonstratif	Outils pour de futures démonstrations	Aucun symbole, seulement des expressions langagières
(AC)	A l'intérieur du cours : addition dans D ; exemple de démonstration	Définition de l'équivalence sur un exemple, et pas de définition de l'implication, mais un exemple	Au raisonnement, dans un cadre démonstratif	Outils pour de futures démonstrations	Aucun symbole, seulement des expressions langagières
(N)	Dans deux fiches techniques : pour justifier le raisonnement	Définition basée sur des exemples te définition de l'équivalence	Au raisonnement, dans un cadre démonstratif	Outils pour de futures démonstrations	Aucun symbole, seulement des expressions langagières
(I)	Chapitre de logique : Notions de logique	Définition basée sur des exemples : définit l'implication et la relie à l'inclusion	A la logique et aux ensembles : interprétation ensembliste de l'implication	Outils pour de futures démonstrations	Expressions langagières, et symboles $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ et $\subset$
(B)	Chapitre de logique : le langage de la logique	Définition issue de la logique formelle	A la logique et aux ensembles : interprétation ensembliste de l'implication	Outils à la théorie des ensembles et à la démonstration : utilisation de l'implication au service des ensembles	Symboles $\vdash$ et $\subset$, expressions langagières avec une présentation plus formaliste

9. Tableau (2) : étude manuels de DEUG scientifique (Deloustal-Jorrand)

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
LFA	Implication comme outil à la théorie des ensembles, définie dans le chapitre 1 et n'apparait plus explicitement après	Définitions issues de la logique formelle : c'est la relation (non A ou B) et on note A⇒B	Théorie des ensembles et logique formelle : l'implication est reliée aux ensembles	Propriété de l'inclusion et raisonnement mathématique	Prédominance du symbolisme
AF	Implication comme outil à la théorie des ensembles, définie dans le chapitre 1 et n'apparait plus explicitement après	Définitions issues de la logique formelle	Théorie des ensembles et logique formelle : l'implication est reliée aux ensembles	Propriété de l'inclusion et raisonnement mathématique	Prédominance du symbolisme
ROD	Implication comme outil à la théorie des ensembles, définie dans le chapitre 1 et n'apparait plus explicitement après	Définitions issues de la logique formelle	Théorie des ensembles et logique formelle : l'implication est reliée aux ensembles	Propriété de l'inclusion et raisonnement mathématique	Prédominance du symbolisme
C	Implication comme outil à la théorie des ensembles, définie dans le chapitre 1 et n'apparait plus explicitement après	Définitions issues de la logique formelle : proposition (Q ou ¬P) que l'on note P⇒Q	Théorie des ensembles et logique formelle : l'implication est reliée aux ensembles ; confusion de contraposée et raisonnement par absurde	Propriété de l'inclusion et raisonnement mathématique	Prédominance du symbolisme
P	Objet de la logique formelle	Définitions issues de la logique formelle ;	Théorie des ensembles et logique formelle et raisonnement mathématique	Raisonnement mathématique et aide aux étudiants	Symbolisme et expressions langagière
FU	Objet de la logique formelle	Définitions issues de la logique formelle ;	Théorie des ensembles et logique formelle et raisonnement mathématique	Raisonnement mathématique et aide aux étudiants	Symbolisme et expressions langagière
LM	Implication comme outil pour le raisonnement mathématique	Définitions issues de la logique formelle ;	Raisonnement mathématique et logique formelle	Aide aux élèves et raisonnement mathématique	Prédominance des expressions langagières
Le	Implication comme outil pour le raisonnement mathématique	Définition pour l'utilisation du raisonnement déductif		Aide aux élèves et raisonnement mathématique	Symbolisme et expressions langagière

L	Implication comme outil pour le raisonnement mathématique	Définition pour l'utilisation du raisonnement déductif ; évoque la règle du détachement	Raisonnement mathématique et logique formelle	Aide aux élèves et raisonnement mathématique	Symbolisme et expressions langagière

10. Questionnaire (Deloustal-Jorrand, 2000-2001)

Question 1-2 :

Que pensez-vous des implications suivantes ?

Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque,

a) k pair $\Rightarrow k+1$ pair
b) k pair $\Rightarrow k+1$ impair
c) k impair $\Rightarrow k+1$ pair
d) k impair $\Rightarrow k+1$ impair

Tableau 1

Vrai	Faux	NP	NS

a') 3 pair ⇒4 pair

b') 3 pair ⇒4 impair

c') 3 impair ⇒4 pair

d') 3 impair ⇒4 impair

Justifier vos réponses.

Tableau 2

Question 1-3 :

Voici trois phrases :

Pl: « Le soleil est une étoile»

P2 : « Il fait jour »

P3 : « Il fait nuit»

Y a-t-il des implications entre ces phrases que vous considérez vraies?

Y a-t-il des implications entre ces phrases que vous considérez fausses?

Justifiez vos réponses.

Question 7

Dans un manuel (Algèbre générale par A. Calvo et B. Calvo, Masson), on a trouvé la phrase:

« [la proposition] « 5 est un nombre pair » ⇒ « 3 est un nombre pair » est vraie ».

Qu'en pensez-vous ?

Echanges 1[2]

1 V : Finalement, pourquoi t'avais mis «on ne peut pas savoir» ?

2 X : Parce que j'étais déstabilisé, si tu veux.

3 V : Pourquoi ?

4 X : Parce que je ne maîtrise pas ce genre de trucs. En fait, je ne sais pas dans quel monde me placer! On a des infos mais on ne sait pas si on a le droit de les utiliser!

5 V : Quoi comme genre d'infos ?

6 X: Par exemple : 4 est pair ou 3 est impair. (Xavier, entretien à l'issue du questionnaire)

[2] C'est nous qui numérotons

ANNEXE 2 : MISE EN COMMUN

Exercice 1
1P : Bon, on va corriger. Le premier exercice, (lecture de l'énoncé). Qu'est ce que vous avez pris comme solutions ?

2 E4 : (donne les valeurs correctes dans son groupe). Oui, c'est bon. (Pointant E7) et vous ?

3 E2 : il donne tous les nombres pairs dont le successeur est premier.

4 P : Il y a déjà une différence entre les deux. Je constate que vous avez les nombres impairs dans votre ensemble et vous ce n'est que les pairs, certains pairs

5 E7 : Madame, on s'explique. Notre ensemble est comme ça du fait qu'on a demandé les nombres entiers inférieurs ou égaux à 20. On se place d'abord dans l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20. Maintenant dans ces nombres entiers-là, on dit maintenant que certains vérifient une certaine propriété qu'on nous a donnée. C'est-à-dire que si x est un nombre pair, c'est-à-dire que la propriété qu'on nous a donnée concerne seulement les nombres pairs. C'est-à-dire que les impairs d'office on doit les prendre. alors son

6 P : vous devez les prendre pourquoi ?

7 E3 : on doit les prendre parce qu'ils sont dans l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 20.

8 P : ce que tu dis, c'est que la propriété ne concerne que les nombres pairs.

9 E3 : Oui, madame, la condition est fixée pour les nombres pairs, maintenant les impairs n'ont aucune condition, et ils sont inférieurs ou égaux à 20. On doit les prendre, parce qu'ils sont inférieurs ou égaux à 20. Maintenant on doit prendre maintenant les pairs sous la condition qu'on nous a donnée aussi.

10 P : Oui,

11 E3 : et la condition qu'on nous a donnée c'est *si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier*. Sous cette condition on prend le reste des nombres pairs.

12 E7 : on dit « déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20 ». Donc en fait, on demande de déterminer l'ensemble des nombres entiers qui vérifient la propriété. Donc on a plutôt regardé les nombres qui vérifient cette propriété. La propriété dit que *si x est*

un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier. On a d'abord recensé les nombres pairs, puis on a pris les nombres pairs dont le successeur est premier.

13 P : quelle est la forme de l'énoncé que vous avez, sa structure ?

14 E5 : je pense qu'on a un énoncé de la forme $P \Rightarrow Q$

15 P : C'est un énoncé conditionnel

16 E3 : $P \Rightarrow Q$

17 P : et qui est en plus un énoncé ouvert, et vous avez l'univers du discours qui est l'ensemble des entiers compris entre 0 et 20. Etant donné que c'est un énoncé ouvert, c'est chaque fois que vous affectez une valeur à x que vous avez la vérité ou la fausseté de la proposition que vous obtenez. C'est de la forme $P(x) \Rightarrow Q(x)$

18 E2 : $P \Rightarrow Q$

19 P : Oui, c'est … Pas $P \Rightarrow Q$. C'est x est un nombre pair, si j'ai *P(x)*, alors j'ai *Q(x)*. c'est un énoncé de la forme $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Et x appartient à l'ensemble des entiers compris entre 0 et 20. C'est une implication en fait. Pour avoir la valeur de vérité, il faut donner une valeur à x. pour que ce soit une proposition, parce que là c'est une phrase ouverte. Pour avoir une proposition, il faut donner une valeur à x. et ayant donc donné une valeur à x, vous vérifiez que l'implication que vous avez est vraie ou fausse. Pour 0 par exemple, prenons 0. Si 0 est pair, son successeur est un nombre premier. Prenons par exemple ce cas.

20 E2 : C'est faux madame, la proposition sera fausse.

21 P : Si 0 est pair, alors 1 est premier. Pourquoi c'est faux ?

22 E3 : C'est faux parce que 1 n'est pas premier et 0 est pair. L'implication sera fausse parce qu'on a Q qui est fausse et P qui est vraie. Ça donne l'implication fausse.

23 E1 : l'implication est vraie lorsque P est vrai et Q faux

24 E3 : C'est ça, ça donne l'implication fausse, ce qui est le cas ici.

25 E7 : 0 vérifie la négation de l'autre implication

26 P : De quelle implication ?

27 E7 : Puisqu'on a dit que *si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier*. On peut considérer ça comme une implication.

28 P : C'est une implication

29 E7 : oui. Étant donné que 0 est un nombre pair et son successeur n'est pas premier. Donc si 0 vérifie, doit vérifier la négation.

30 P : Oui, 0 vérifie effectivement la négation. La négation c'est quoi ? 0 pair et son successeur non premier. 0 vérifie bien la négation, ça veut dire que l'affirmation est fausse. En fait ça revient un peu à la maîtrise des tables de vérité de l'implication. Une implication est vraie lorsque l'antécédent … Lorsqu'on dit P⇒Q, P c'est l'antécédent et Q c'est le conséquent, la conclusion… c'est conséquent, conclusion. L'autre c'est prémisse, antécédent. Dans une implication on parle de prémisse ou antécédent, c'est P la première proposition, et l'autre, la deuxième proposition c'est le conséquent ou alors la conclusion. Donc si vous avez… une implication est fausse seulement dans le cas où son antécédent est vrai et son conséquent est faux. Ce n'est que dans ce cas que l'implication est fausse. Bon avec ça, si on a… Le cas de 1. 1 n'est pas pair, 2 est premier, c'est un cas où l'implication est vraie. Le cas de trois… En fait, tous les nombres impairs vérifient cette propriété. Pourquoi, à partir du moment où dans une implication l'antécédent est faux, votre implication est vraie. Vous connaissez la table de vérité de l'implication ? (table de vérité au tableau). Voilà la table de vérité. Le seul cas où l'implication est fausse c'est quand vous avez l'antécédent vrai et le conséquent faux. Mais si vous avez une implication, à partir du moment où l'antécédent est faux, votre implication est toujours vraie. Pour ceux qui ont travaillé en ne considérant que les valeurs de x pair, si vous prenez la contraposée, en prenant la contraposée, vous allez voir que les nombres impairs entrent en jeu. « si le successeur d'un nombre x est premier, alors ce nombre est impair »

31 E7 : Non, non, non. Si le successeur n'est pas premier

32 P : Si le successeur d'un nombre x est premier pardon, alors son successeur est un nombre impair. Quand vous prenez la contraposée, vous voyez que les nombres impairs entrent en jeu. Les nombres impairs vérifient cette contraposée. Et l'implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

33 E3 : Je voudrais savoir, est ce qu'on devait prendre les trois cas qui sont là ?

34 P : lesquels ?

35 E3 : Faux-vrai ; faux-faux et vrai-vrai ?

36 P : Oui, si en remplaçant x par les valeurs comprises entre 0 et 20, tu as l'un des trois cas Faux-vrai ; faux-faux et vrai-vrai, nécessairement ton implication est vraie. Ce x là tu le retiens. Le x qui va rendre ton implication vraie, sera euh … comment dire, solution de ta… de ton problème.

37 E5 : Bon madame si je comprends bien l'ensemble-là sera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19

38 P : C'est l'ensemble qu'il ont donné. C'est bien ce que vous avez donné ?

39 E3 : On a oublié 2

40 P : Vous avez oublié 2 ?

41 E3 : Oui

42 P : Ah oui, il manque 2 donc.

43 E5 : Ils ont mis 15

44 P : Non, 15, ils n'ont pas mis.

45 E7 : Ils ont mis 18 qui n'appartient pas

46 E3 : Non 18 appartient

47 E7 : 19 est premier

48 P : 19 est bon. Tous les nombres impairs.

49 E6 : Madame, il y a aussi 15

50 P : Oui, 15

51 E5 : Madame vous avez dit que les nombres qui ne vérifient pas l'antécédent

52 P : Tous les nombres qui ne vérifient pas l'antécédent rentrent dans les solutions. Maintenant ceux qui vérifient l'antécédent, vous voyez si le conséquent est vrai ou il est faux. Si le conséquent est faux, vous les enlevez, conséquent vrai, vous le gardez.

53 E6 : Je n'ai pas encore bien compris l'énoncé-là

54 P : Je dis la chose suivante : C'est un énoncé ouvert que tu as sous la forme P(x)⇒Q(x). tu as des valeurs de x, tu travailles dans un univers. L'univers, c'est l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 20. On te demande l'ensemble des nombres entiers qui vérifient *si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier*, tel que P(x)⇒Q(x) est vrai. En fait, quand on dit *si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier*, c'est la proposition, je ne dirais pas la proposition ; la phrase ouverte P(x)⇒Q(x) ? Est-ce que cette phrase est vraie pour un x que je me donne ? Pour une valeur de x que je me donne ?

55 E6 : Si je comprends bien, on s'est référé à cette table de vérité.

56 P : c'est la table de vérité de l'implication.

57 E6 : Et la proposition P c'est x est

58 P : P(x), c'est P(x). C'est *x est pair*

59 E6 : x est pair. Et on sait que c'est vrai, P⇒Q est vrai dans les cas où P est vrai, Q est vrai ; ou P est faux, Q est vrai ; ou c'est faux pour tous les deux.

60 P : Oui. Donc si tu prends, disons 10, qu'est ce que tu as ? Tu as P(10), c'est-à-dire 10 est pair, c'est vrai. Le conséquent c'est quoi ? Le successeur de 10 est premier, c'est-à-dire 11 est premier. Ça c'est vrai. C'est le premier cas dans ta table de vérité. *10 pair implique 11 premier*, c'est vrai. C'est une implication qui est vraie. C'est une implication qui est vraie. Si je prends 13, 13 est pair, faux, 14 premier faux. C'est le dernier cas. Donc 13 pair implique 14 premier, c'est vrai, pardon, c'est vrai. C'est le dernier cas. J'ai mes deux propositions qui sont fausses et mon implication, l'implication qui lie les deux propositions est vraie. Ça va ?

61 E6 : ça va maintenant.

Exercice 2

Item 2.1

62 P : on passe au deuxième exercice. (Lecture)… le 2.1. Dans un losange les diagonales sont perpendiculaires

63 E1 : nous pensons que c'est vrai.

64 P : Tu penses que c'est vrai, enfin, votre groupe

65 E5 : pour nous aussi c'est vrai

66 P : C'est vrai. Effectivement dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires. Quand on regarde, ça c'est une implication implicite. On peut dire lorsqu'on se situe dans l'ensemble des quadrilatères du plan, « si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires ». Mais l'univers dans lequel on travaille peut changer, et être l'ensemble des losanges. Dans ce cas, ce n'est plus une implication. Se sont des énoncés qui sont très fréquents en mathématiques. Vous avez par exemple *toute fonction dérivable est continue* c'est un énoncé conditionnel. Ça (l'item 1) c'est exactement de la même forme que *toute fonction dérivable est continue*. C'est pourquoi en mathématiques, il faut bien faire attention au langage. On a souvent l'impression que … On va atteindre l'item sur les limites. Vous verrez que la formalisation de l'écriture courante peut poser d'énormes problèmes. On a besoin souvent pour faire des démonstrations, de passez du langage courant au langage formel. Il est difficile de faire des démonstrations élaborées en mathématique avec le langage courant. Le langage formel est tel que l'énoncé est clairement exprimé, il n'y a pas d'ambiguïté possible. **(Lecture de l'item 2.2)**

Item 2.2

67 E3 : On trouvait faux, parce qu'on peut avoir un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pas un losange.

68 P : Vous avez dit que c'est faux. Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange. Vous dites que c'est faux pourquoi ?

69 E2 : Parce qu'on peut trouver un contre exemple.

70 P : Oui.

71 E1 : On dit *Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange*. Si on considère un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires mais ne se coupent pas en leur milieu, ça ne sera plus un losange.

72 P : Mais moi je prends le losange (dessin au tableau). C'est bien un losange ! Voilà les diagonales perpendiculaires. Ça c'est Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires

73 E1 : Il y a de cas qui ne sont pas vrais. Je dis donc que si on prend un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires mais ne se coupent pas en leur milieu

74 P : On prend ça (dessin d'un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires mais ne se coupent pas en leur milieu). Les diagonales sont perpendiculaires

75 E1 : Voilà, mais ne se coupent pas en leur milieu

76 P : ça ce n'est pas un losange, et ça c'est un losange

77 E2 : ça contredit notre

78 E7 : c'est faux, puisque notre proposition est universellement quantifiée

79 E3 : On a dit un quadrilatère, c'est-à-dire n'importe quel quadrilatère, dont les diagonales

80 P : ça c'est ton interprétation

81 E3 : puisque c'est

82 E1 : un quadrilatère c'est quel que soit le quadrilatère

83 E3 : N'importe quel quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, avec les autres, ils soutiennent que *un* a la signification du quantificateur universel

84 P : Est-ce que *un quadrilatère* c'est n'importe quel quadrilatère ? quand je dis un quadrilatère, un est indéfini, est ce que c'est la même chose que quel que soit le quadrilatère. C'est pourquoi je dis que c'est votre interprétation ;

85 E2 : c'est il existe.

86 P : Ce n'est pas la même chose que *les quadrilatères*. Lorsque je dis *les quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires sont des losanges*, je vais dire que c'est faux car j'ai un contre exemple.

87 E2 : Madame, vous prenez votre part comme celui-là, et si je prends ma part comme celui-ci ?

88 P : ça c'est vrai (losange) et ça c'est faux (trapèze)

89 E1 : ce n'est ni vrai, ni faux

90 P : Ce n'est ni vrai ni faux car je ne sais pas à quoi renvoie *un*. C'est un énoncé contingent, c'est-à-dire, un énoncé qui peu être vrai, comme il peut être faux. C'est exactement la même chose que lorsque je parle et je dis x est un nombre pair. Je me situe dans l'ensemble des

nombres entiers et si je vous donne la phrase suivante *x est un nombre pair*, qu'est ce que vous allez me dire ? Je suis dans l'ensemble des entiers. Vous allez me dire que c'est faux, vous allez me dire que c'est vrai ? ou alors je dis, *un nombre entier est un nombre pair*, qu'est ce que vous allez me dire ?

91 E1, E5 : On ne peut rien dire

92 P : On ne peut rien dire parce qu'on ne sait pas à quoi renvoie le un. C'est vrai et c'est aussi faux. Mais si je dis *les nombres entiers sont pairs*, là j'ai quantifié mon énoncé.

93 E7 : Donc, en réalité c'est parce qu'on ne peut pas attribuer un quantificateur ?

94 P : Là, c'est un problème d'interprétation ; c'est différent du premier où c'est vrai pour tout losange car c'est une propriété des losanges. Lorsque je me situe dans n'importe quel losange, c'est vrai, quel que soit le losange que je considère, les diagonales sont perpendiculaires. Ce n'est pas le cas pour un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, on en a qui sont des losanges et d'autres pas. C'est bon pour tout le monde ?

95 E1, E3 : euh, madame … (rires)

96 P : Qu'est ce qui te gêne ? Jai l'impression qu'il y a quelque chose qui te gêne.

97 E1 : je pense que lorsqu'on dit un quadrilatère, le pronom *un* ou *des*, je pense que ça aura le même rôle.

98 P : Quand on dit des, c'est comme si l'on exclue, quand je dis, des enfants jouent dans la cour, est ce que ça signifie que tous les enfants jouent ?

99 E1 : Je dis dans le cas précis. **2 heures 44 s**

100 P : non, justement c'est au niveau des articles que tout se joue. Quand je dis, voilà les enfants qui sont dans la cour, des enfants sont entrain de jouer au ballon. Est-ce que c'est tous les enfants qui sont entrain de jouer au ballon ? *les* sous-entend la totalité.

101 E2 : Si je comprends bien, le *un*, il ne définit en fait rien.

102 P :Il ne définit rien de bien précis. C'est ce qu'on appelle un générique. Quand je dis *soit x*, c'est exactement comme lorsque je dis *soit x appartenant à R*. Qui est x ? c'est un élément quelconque que je prends pour faire ma démonstration. Lorsqu'on vous demande de montrer que pour tout x, telle propriété est vérifiée, qu'est ce que vous faites ? On prend un élément,

un générique, il représente tous les éléments de l'ensemble, et je montre que la propriété est vraie pour cet élément.

103 E1 : On peut mettre sous forme d'implication ?

104 P : Quoi ça ?

105 E1 : Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange

106 P : Oui, un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange

107 E4 : Est-ce que ça ne doit pas dire que *il suffit qu'un quadrilatère ait les diagonales perpendiculaires pour que ce soit un losange* ?

108 P : C'est ce que ça veut dire ?

109 E4 : On n'a pas besoin de dire qu'il suffit que des quadrilatères. Il suffit qu'un quadrilatère ait des diagonales perpendiculaires pour qu'il soit un losange

110 P : Bon là, tu es entrain de beaucoup transformer. Ce qu'on dit c'est, je prends un quadrilatère et je regarde ses diagonales, lorsqu'elles sont perpendiculaires, ma conclusion c'est que c'est un losange. C'est ça que tu as. Si un quadrilatère a des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

111 E4 : Je prends un quadrilatère dans l'ensemble des quadrilatères

112 P : Je prends un quadrilatère

113 E4 : Dès que je constate que les diagonales sont perpendiculaires,

114 P : Je conclus que c'est un losange. Avoir les diagonales perpendiculaires c'est une condition nécessaire et non suffisante. On ne doit pas dire « il suffit », c'est « il faut », parce que si les diagonales ne sont pas perpendiculaires, on ne peut pas avoir un losange.

115 E1 : Est-ce que c'est alors vrai ?

116 P : ça dépend maintenant de l'interprétation qui est faite de un.

117 E2 : parce qu'il y a des gars qui ont vérifié

119 P : je prends un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires. Est-ce que c'est un losange ?

120 E1 : pas nécessairement.

121 P : pas nécessairement.

122 E2 : (**murmure**) Ce n'est ni vrai, ni faux !

123 P : ce n'est ni vrai, ni faux. Tu es convaincu ?

124 E1 : C'est bon madame.

125 P : ce n'est ni vrai, ni faux. Ça peut être vrai comme ça peut être faux. Soit un quadrilatère, je prends le cas de ce quadrilatère-là (un trapèze). Les diagonales sont perpendiculaires mais je n'ai pas un losange. Voilà le deuxième quadrilatère, les diagonales sont perpendiculaires et j'ai bien un losange. Troisième ! ça va pour le deuxième ?

126 E2, E1 : oui madame.

Item 2.3

127 P : troisième (**lecture de l'énoncé**)

Arrivée de E8

128 E2 : on a trouvé vrai

129 P : C'est vrai. Comment vous justifiez ?

130 E2 : on justifie comme à la première madame, c'est-à-dire euh, ici, P est déjà faux, donc ça va impliquer. On dit que *si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle*, c'est déjà faux.

131 P : *un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle*, c'est déjà faux.

132 E2 : Donc comme c'est une implication, quel que soit ce qui va suivre, la proposition sera vraie.

133 P : Oui, *un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle*, ça peut être aussi vrai !

134 E4 : ça peut être vrai, le carré !

135 P : tu as le carré, c'est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires

136 E2 : Mais le carré, c'est un rectangle ?

137 P : Un carré est un rectangle !

138 E7 : Un carré est un rectangle, mais un rectangle n'est pas un carré. Un rectangle n'est pas un carré

139 E2 : un rectangle n'est pas toujours un carré.

140 P : pas toujours un carré.

141 E1 : J'ai une autre explication

142 P : Oui,

143 E1 : On peut définir un carré comme un losange qui a des côtés …, des angles droits. Un losange qui a des angles droits, et on sait que lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires, selon la première question, *dans un losange les diagonales sont perpendiculaires,* est un rectangle… Si c'est un rectangle, premièrement les diagonales doivent se couper en leur milieu. Et le fait que les diagonales sont perpendiculaires va nous donner un losange. On aura déjà un losange, et puisque ce losange est un rectangle, on aura un losange avec des angles droits

144 E8 : Est-ce qu'un losange c'est un rectangle ?

145 E1 : non, selon l'énoncé. On dit *si c'est un rectangle*. Lis d'abord l'énoncé, tu ne connais pas l'énoncé et tu réponds ? Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, ce quadrilatère premièrement aura les diagonales qui se coupent en leur milieu parce que c'est un rectangle. Deuxièmement ça aura des angles droits toujours parce que c'est un rectangle. Et troisièmement ça sera un losange parce que les diagonales sont perpendiculaires. On aura donc un losange qui a des angles droits. **On a démonstration sous hypothèse quadrilatère à diagonales perpendiculaires et rectangle.**

146 E8 : Donc un carré

Exercice 3

Item 3.1

147 P : Un carré. On passe au 3. Donner la négation des phrases suivantes : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges. **2 h 07 mn 26 s** Vous, qu'est ce que vous avez fait ?

148 E6 : on a dit *on peut trouver des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges.*

149 E8 : ouuuu, Il existe des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges

150 E2 : il y a des boules dans l'urne

151 P : et vous ?

152 E4 : il existe au moins une boule dans l'urne qui ne soit pas rouge

153 P : oui, Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges. C'est un énoncé quantifié. Je suivais leur débat, il y a eu un problème au niveau de la construction de la négation. Lorsque vous prenez la négation, vous l'appliquez au quantificateur et à la propriété. Le problème de la négation, c'est au niveau de la valeur … Comment dire ? Quand on construit la négation, il tenir compte de la valeur de vérité de la

154 E2 : Proposition

155 P : Une proposition… Quand je prends la négation d'une proposition, si la proposition est vraie, la négation sera fausse et si la proposition est fausse, la négation sera vraie. Maintenant si vous avez une phrase ouverte, si j'en prends la négation, ça sera la phrase telle que, lorsque vous assignez les objets de l'univers du discours, si la première est vraie, la négation est fausse et si c'est faux, la négation est vraie.

156 E2 : et concernant la contraposée ? Est ce que la contraposée peut aussi influencer les quantificateurs ?

157 P : La contraposée c'est pour les implications. Si tu as une proposition, je prends par exemple $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Ce que tu as là, la contraposée ne s'applique qu'à l'implication. Maintenant, dans $P(x)$ tu peux avoir des quantificateurs, puisque c'est la négation de la proposition qui contient les quantificateurs, la négation va toucher les quantificateurs nécessairement, nécessairement ça touche les quantificateurs. Mais si c'est *pour tout x, y,* $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$, si on te demande la contraposée, tu ne touches pas au quantificateur qui lie x et y. on parle de contraposée d'une implication. Donc quand on dit la négation de Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges, la négation c'est la phrase qui dit que *il est faux que toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.* La deuxième, *certains nombres entiers sont pairs*. Bon ici, vous avez le quantificateur *quel que soit*, tout dans le langage courant, chaque, chaque élément de tel ensemble vérifie… chaque-là c'est

158 E1 : pour tout

159 P : Dans le langage courant vous avez plusieurs mots qui peuvent désigner le quantificateur universel.

160 E2 : Même existentiel ; il y a

161 P : Il y a, il faut bien pouvoir les identifier, on peut trouver, certains, des, on dit, des nombres entiers sont pairs. Ça veut dire certains nombres, oui, oui. Il y a des mots et des expressions qui traduisent le quantificateur universel, il y a des mots qui traduisent le quantificateur existentiel. Donc, *certains nombres entiers sont pairs.* Qu'est ce que vous avez mis ?

Item 3.2

162 E2 : tout nombre entier sont impairs

163 E1 : tous les nombres entiers sont impairs

164 E5 : c'est la même chose

165 P : la même chose. Bon, là, il y a le jeu pair/impair. Lorsque j'ai fait ça, j'ai eu des réponses ne sont pas pairs, sont impairs, ainsi de suite. Je voudrais faire quand même cette remarque sur les négation et contraire. On dit souvent euh, j'avais posé une fois une question. Si une fonction n'est pas paire, qu'est ca que vous pouvez en dire ? Beaucoup m'ont répondu, la fonction est impaire

166 E1 : Non,

167 P : Ce qui n'est pas vrai. Pair, impairs, dans les entiers, c'est négation, c'est contraire, mais dans les fonctions, ce n'est pas contraires. C'est comme croissant et décroissant dans les fonctions. Une fonction qui n'est pas croissante n'est pas nécessairement décroissante. Ce sont de petites choses qui n'ont souvent l'air de rien mais qui jouent souvent de très sales tours. Le certains ça dénote l'existentiel, il existe. La négation ça sera tous les. Si c'est faux que certains nombres entiers sont pairs, la négation c'est que tous les nombres entiers sont pairs. Le troisième, *si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4*.

Item 3.3

168 E3 : On a trouvé que c'était faux. Parce

169 P : La négation ?

170 E8 : un nombre entier divisible par 4 ne se termine pas par 4.

171 E7 : la négation, c'est qu'on a une proposition $P \Rightarrow Q$, c'est-à-dire que la négation sera $P\ et\ non\ Q$. C'est-à-dire, si un nombre entier est divisible par 4, c'est-à-dire euh, on peut trouver, si on dit *si un nombre entier*, on a le quantificateur universel. On peut trouver des nombres entiers divisibles par 4, mais qui ne se terminent pas par 4.

172 E2 : Il existe des nombres divisibles par 4, mais qui ne se terminent pas par 4.

173 P : *si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4*. Vous dites, Il existe au moins un nombre divisible par 4, mais qui ne se termine pas par 4. Et toi (E8) tu disais quoi ?

174 E8 : Que les nombres entiers divisibles par 4 ne se terminent pas forcément par 4.

175 P : Les nombres entiers divisibles par 4

176 E8 : ne se terminent pas toujours par 4

177 P : ne se terminent pas toujours par 4. Moi je prendrais beaucoup plus, un *nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4*, il existe des nombres entiers

178 E7 : quand on prend le cas de 24, 24 est divisible par 4 et il se termine par 4. Si on prend le cas de 16, 16 est divisible par 4 et il ne se termine pas par 4.

179 E8 14 se termine par 4 et n'est pas divisible par 4. C'est pour ça que je dis que les nombres entiers qui sont divisible par 4 ne se terminent pas toujours par 4.

180 E2 : Il existe des nombres entiers

181 P : C'est au niveau de la quantification

182 E1 : c'est la négation d'une implication.

183 P : Oui, c'est vrai. Si un nombre entier est… En fait ça se formalise comment ? Pour tout x, pour tout x,

184 E2 : x est entier

185 P : Il existe x tel que x est divisible par 4 et x ne se termine pas par 4

186 E7 : J'ai une question, les autres conjonctions, comme on dit et, on peut aussi mettre mais ?

187 P : Mais ne se termine pas par 4. X est divisible par 4 mais il ne se termine pas par 4. Mais si on va en langage mathématique, il faut utiliser les connecteurs. Mais n'est pas un connecteur. Les connecteurs, vous avez *l'implication*, la *négation*, le *et*, le *ou*. Mais si tu dis mais ne se termine pas par 4, c'est juste

188 E7 : En langage courant ?

189 P : en langage courant c'est juste. Ensuite le dernier, la limite d'une fonction est toujours finie.

Item 3.4

190 E2 : nous avons proposé, il existe au moins une fonction dont la limite n'est pas finie.

191 E5 : certaines fonctions n'ont pas de limite finie

192 P : donc les deux. Vous voyez que le certains revient, il existe. Il existe au moins une fonction dont la limite n'est pas finie, certaines fonctions n'ont pas leur limite finie. Exercice 4, donner la négation et la contraposée de l'exercice suivant (lecture).

Exercice 4

193 E2 : Négation, on a dit : $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \Rightarrow\ |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$.

194 P : C'est la même chose que vous ?

195 E5 : Non, c'est pas la même chose. On a trouvé comme négation, $\exists(x,y) \in \mathbb{R}^2/(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}+* \Rightarrow x-y<\varepsilon)\ et\ (x\neq y)$

196 P : ce qu'ils ont fait c'est quoi, ils ont considéré que x et y sont des nombres quelconques. Mais vous pouvez également quantifier le x et y, et à ce moment si vous prenez la négation, vous aller quantifier existentiellement le x et le y. donc en fait c'est pour tous x, y, x et y appartenant à R… en quantifiant le x et le y, c'est un peu compliqué. C'est pourquoi j'ai

197 E3 : Mais madame, quand l'énoncé a été donné ainsi, c'est un peu comme si on travaille avec ce qui est entre les guillemets.

198 P : C'est ce que j'ai dit. J'ai ajouté la précision que x et y désignent deux nombres réels.

199 E3 : je comprends, je suis entrain de dire que, si on travaille avec cet énoncé, sans mettre le…

200 P : sans quantifier le x et y, ça sera comme si on utilise des choses qu'on n'a pas spécifiées au départ.

201 P : Je ne comprends pas, si on travaille sans les x, y

202 E3 : si on donne peut être la négation sans ça, c'est comme si on travaille avec des choses qu'on n'a pas spécifiées, donc on ne connait pas qui est x

203 P : On vous a dit qui est x

204 E5 : Lorsqu'on met les x et y en dehors de la proposition, je ne pense pas qu'on puisse donner la négation.

205 P : En dehors de la proposition ? Pourquoi ? je prends cette proposition entre guillemets, tu ne peux pas donner la négation ? C'est un énoncé conditionnel ! Quand tu regardes la structure, c'est un énoncé conditionnel dont la prémisse elle-même est un énoncé conditionnel.

206 E5 : moi je me demande alors maintenant pourquoi on doit mettre x et y en dehors de la proposition ?

207 P : C'est la proposition que je vous ai donnée. Ou alors je pouvais dire x et y étant deux nombres réels… Voilà, je pouvais prendre l'énoncé suivant : « x et y étant deux nombres réels, pour tout epsilon et tout le reste ». Je pouvais prendre cet énoncé, je l'écris. Quel que soient x et y étant deux nombres réels …x, y appartiennent à R^2 implique que… en fait vous avez deux choses pour la quantification. Vous avez la quantification bornée : $\forall x \in E, P(x)$, qui a son écriture normale en logique $\forall x, (x \in E \Rightarrow P(x)$. La quantification bornée contribue à faire disparaitre l'implication.

208 E1 : et si l'on dit $\forall x \in R, x > y$

209 P : quel que soit $x \in R, x > y \Rightarrow \cdots$un certain P de quelque chose.

210 E1 : oui

211 P : tu écris, $\forall x, (x \in R \Rightarrow x > y) \Rightarrow P$

212 E1 : ça veut dire que si on veut prendre la négation, on va prendre pour tout et on va nier

213 P : Il existe x tel que

214 E1 : on va dire x n'appartient pas à R

215 P : et il faut avoir l'expression de ce P, car il peut dépendre de x ou non. C'est complexe et pour essayer d'atténuer cette complexité, on utilise la quantification bornée. La prochaine fois je vais vous montrer des écritures qui sont faites avec quantification bornée et sans quantification bornée, vous allez voir comment c'est complexe. Pour la quantification bornée, il est essentiel de définir l'univers du discours. Si je suis dans R et je dis $\forall x \in N$, j'ai une quantification bornée. Si je suis dans R, je n'ai plus besoin de borner, puisque mon univers c'est R, on sait que je prends les valeurs dans R. je dis $\forall x, x > y \Rightarrow \cdots$

216 E8 : je voulais essayer de nier la proposition-là. Je peux dire, il existe *x* appartenant à R implique $x \leq y$.

217 P : oui,

218 E8 : parce que j'ai cru entendre quelque part que *x n'appartenant pas à R*

219 P : Je ne pense pas, personne n'a dit que x n'appartenait pas à R. Ce que vous pouvez dire, x et y … vous pouvez dire, $\forall x, y \in R$

220 E2 : Quel que soit ε

221 P : pour tout ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x - y| < \varepsilon$. Vous pouvez choisir… la proposition que j'ai donnée, je l'ai bien définie, c'est pour ça que je l'ai mise entre guillemets.

222 E3 : On a travaillé surtout comme ça parce que en donnant la contraposée, on devait dire $x \neq y$. C'est un préalable.

223 P : la contraposée ne pose aucun problème à ce niveau-là. Ce n'est que la négation qui va poser un problème avec ce quantificateur (désignant le $\forall$ liant x et y). La négation, ça va poser, vous allez changer de quantificateur, vous allez mettre il existe ceci, vous allez mettre il existe x, y tels que ceci et non ça. C'est tout, c'est juste la différence si vous quantifiez le x et y. mais si vous ne quantifiez pas, si vous prenez juste cette quantité-là, la négation c'est ça et non ça. Ce qui m'intéressait dans cet exercice, c'était au niveau du quantificateur. Tel que j'ai écrit, pour tout ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x - y| < \varepsilon$. J'aurais pu écrire, ($\forall \varepsilon \in R_+^*, |x - y| <$

$\varepsilon) \Rightarrow x = y$. Voilà par exemple un cas de quantification dont j'ai levé les bornes, que je n'ai pas écrit sous forme de quantification bornée. Et du coup, j'ai l'implication qui s'est introduite. Si vous avez mis $\forall x, y$, la négation c'est $\exists x, y$ avec ce que vous avez donné comme négation. Maintenant pour la contraposée, qu'est ce que vous avez écrit ?

224 E5: on a dit $x \neq y \Rightarrow \exists \varepsilon$ ...

225 P : et vous avez mis votre quantificateur où ?

226 E5 : il est toujours là, c'est il existe x, y appartenant à R. (lecture de la réponse bonne)

227 P : Il existe x et y, x différent de y implique il existe epsilon appartenant à R_+^* tel que c'est ce que vous avez fait ? OK et vous ? Ici vous avez comme contraposée, d'un côté le x différent de y et de l'autre un énoncé conditionnel quantifié dont il faut donner la négation. Par rapport à la négation, vous avez $P ou\ Q$ dont la négation est $\neg P\ et\ \neg Q$. Le conditionnel est équivalent à une disjonction. 2 h 30 mn 51 s

228 E2 : Madame, je n'ai pas bien compris la quantification bornée.

229 P : Oui ?

230 E2 : La quantification bornée

231 P : Ce que je dis, c'est que la quantification bornée c'est ne manière de faire disparaitre le conditionnel. Quand tu écrit $(\forall \varepsilon \in R_+^*, |x - y| < \varepsilon) \Rightarrow (x = y)$, quand tu écris ça, l'écriture correcte en logique c'est quoi ? C'est $(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in R_+^* \Rightarrow |x - y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$. Lorsque tu écris $\forall \varepsilon \in R_+^*$, tu restreins la variable à un ensemble, c'est pourquoi on parle de borné. Maintenant si au départ tu as dit que ton univers du discours est R_+^*, tu n'as plus besoin de préciser que ε est dans R_+^*. Dans la pratique en classe c'est la quantification bornée qui est utilisé, mais il faut tout de même savoir comment ça se passe. Bon, on demande si la réciproque est vraie.

232 E5 : Oui madame.

233 E7 : on a dit que la réciproque est vraie. La réciproque c'est $(x = y) \Rightarrow (\forall \varepsilon \in R_+^*, |x - y| < \varepsilon)$. Puisque ε est strictement positif, la valeur absolue de $x - y$, puisque $x = y$, est égale à 0. Ce qui veut dire que c'est toujours inférieur à epsilon.

234 P : Ceci c'est la définition de l'égalité. Cette propriété-là, c'est la définition de l'égalité de deux nombres. Dire que deux nombres sont égaux, c'est dire que quel que soit epsilon, leur différence est toujours plus petite que cet epsilon. On peut les rapprocher autant que l'on veut. C'est ce que vous retrouvez dans la définition de la limite, de la continuité. Ça rejoint un peut toutes ces écritures formelles. Dans le secondaire, comment est ce que on vous définit la limite ? La limite quand x tend vers x_0, de $f(x)$ qui est égale à l ? dire que $\lim_{x_0} f = l$, c'est dire que je peut rendre la distance de $f(x)$ à l aussi petite que je veux dans un voisinage de x_0. Or une distance que vous pouvez rendre aussi petite que vous voulez, ça vous amène à quoi ? à l'égalité. **Le 5, Pour chacune des propositions ci-dessous (définition de la fonction majorée)**. Le 5.1 ? est ce qu'on peut compléter avec ça ?

Exercice 5

235 E1 : Non, parce qu'on n'a aucune information sur M.

236 P : On n'a aucune information sur M. la deuxième ?

237 E1 : Non aussi.

238 E7 : En fait la première même là, c'est comme la deuxième

239 P : La troisième ?

240 E2 : Non

241 E7 : Non, c'est vrai, la troisième est vraie, madame.

242 E1 : Elle est fausse

243 E2 : Elle est fausse

244 E7 : Oui, elle est fausse

245 P : Pour tout élément x de I

246 E6 : Parce que le M va dépendre de x

247 P : parce que le M va dépendre de x. Est-ce que la réciproque est vraie, c'est-à-dire, si vous avez la 5.3, est ce que la fonction est majorée sur I ?

248 E5 : la première implication est vraie

249 P : oui, dans le sens f majorée implique que 5.3 est vrai. Ça c'est vrai ! Est-ce que vous êtes déjà d'accord que c'est vrai ?

250 E2 : Oui

251 P : à partir du moment où la fonction est majorée, si vous choisissez un x, le M qui lui correspond, vous prenez le majorant. Le M qui dépend de x pour utiliser votre expression, ça peut être le majorant. Vous prenez ce M égal au majorant, vous avez toujours $f(x) \leq M$. Ce M_x si on l'appelle ainsi, c'est M. je l'écris ainsi car lorsqu'en général, dans la pratique lorsqu'une variable dépend d'une autre, on la met en indice chez la deuxième. Maintenant c'est la réciproque. Pourquoi est ce qu'elle est fausse ?

252 E2 : parce que les quantificateurs existentiel et universel ne peuvent pas être… changer de place

253 E8 : ne commutent pas.

254 P : C'est-à-dire ?

255 E2 : Que *il existe pour tout* n'est pas équivalent à *pour tout, il existe*.

256 P : ce que je voudrais comprendre, c'est pourquoi est ce que vous dites que ça ne commute pas ? Ça quelle influence sur la phrase ? Est-ce que … Je ne comprends pas, en fait je ne comprends pas très bien.

257 E5 : Il dit que dire *pour tout* après *il existe* c'est différent de dire *il existe* après *pour tout*.

258 P : Oui, mais quelle influence cela a dans ce que nous faisons, car tu dis « dire *pour tout* après *il existe* c'est différent de dire *il existe* après *pour tout*. » nous sommes au 5.3 ?

259 E5 : Ici, comme la première implication était vraie, on a voulu montrer que la réciproque est fausse. On a voulu justifier que la réciproque était fausse, mais nous ne sommes pas parvenus à le faire

260 P : prenez par exemple le cas d'une fonction qui est strictement croissante.

261 E5 : On a pris ce cas de figure et on a voulu extraire x tel que $f(x)$ est toujours supérieur à n'importe quel

262 P : Prenez la fonction qui à x associe x^2 dans $[0,+\infty[$. C'est une fonction qui satisfait bien 5.3. vrai ou faux ?

263 E5, E3 : Vrai

264 P : Pour chaque x que vous prenez, vous avez toujours un M tel que $f(x) \leq M$. Mais est ce que vous pouvez trouver un majorant de

265 E5 : Non, non

266 P : Lorsque vous regardez de manière graphique la courbe c'est ça (tracé de la courbe). La limite tend vers plus l'infini, donc c'est une fonction que vous ne pouvez pas majorer. Cette fonction montre bien que la réciproque n'est pas vraie. **5.4 :**

267 E5 : 5.4, oui madame. On peut compléter avec 5.4.

268 P : Oui, la 5.4 est bonne

269 E5 : c'est la définition de fonction majorée.

270 P : 5.5 ?

271 E5 : C'est la même chose que 5.3.

272 E7 : C'est presque la même chose

273 P : C'est presque la même chose.

274 E7 : C'est presque la même chose, parce que 5.3 est une quantification implicite. Est-ce qu'on peut parler de quantification bornée en 5.4, en 5.5 par rapport au 5.2 ?

275 P : Si x est un élément de I. c'est $x \in I \Rightarrow \exists M, \dots$ Si on l'écrit comme ça. Alors que l'autre c'est quel que soit x appartenant à I, il existe. Là par exemple en 5.3

276 E8 : Est-ce que c'est la même chose ?

277 P : Pour tout x appartenant à I, ce que je peux écrire, pour tout x appartenant à I, c'est une quantification bornée. L'écriture correcte c'est pour tout x, x appartient à I,…tu demandais si quoi était la même chose ?

278 E8 : Vous étiez entrain de souligner quelque chose là et j'ai voulu attirer votre attention pour vous demandez si, quand on dit « si x appartient à I » et quand on dit « pour tout x appartenant à I », je me dis que c'est la même chose.

278 bis P : Ici, x est générique quand je dis si x. Quand je dis pour tout x. quand je prends « si x appartient à I, alors … » et je prends « pour tout x appartenant à I, il existe … », vous avez une différence entre ces deux choses-là. Le premier dans l'ordre où c'est écrit (le deuxième au tableau était avant le premier), c'est une proposition et le deuxième c'est un énoncé ouvert. C'est comme si je me place dans l'ensemble des nombres entiers et je dis « x est pair ». Je prends « $\forall x \in N,$ x est pair », c'est une proposition. Pour le premier, je ne peux pas dire si c'est vrai ou c'est faux, mais pour le premier, je le peux. **2 heures 46 mn 43 s** c'est la clôture universelle de la phrase ouverte

279 E8 : La ?

280 P : Clôture universelle de cette phrase ouverte-là. Or ça c'est une proposition, mais ça n'est pas une proposition. Je ne peux pas lui donner la valeur vraie ou la valeur fausse, mais à celle-ci oui.

281 E8 : Mme, quand on utilise le *si*, quand on démontre souvent en classe on dit que *ceci est vrai dès que*… quand on dit *dès que*, c'est comme si on disait *si* ?

282 P : euh, non, *c'est il suffit*. Ceci est vrai dès que c'est il suffit d'avoir ceci pour que ceci soit vrai. Mais tout de même c'est deux choses différentes sauf si je n'ai pas bien compris ta question. Par exemple « si x est pair, si x est pair alors son successeur est premier ». Qu'est ce que je peux dire de ça ? il faut bien que j'ai les valeurs de *x* pour savoir si c'est vrai ou c'est faux. Si je n'ai pas une valeur de *x*, je vais dire que c'est vrai ? Tu diras que c'est faux ? Si je prends la phrase isolée « si *x* est un élément de I, alors il existe un réel M tel que, qu'est ce que je peux dire de ça ?

283 E8 : c'est pas une proposition

284 P : ce n'est pas une proposition ! Mais quand je dis « pour tout x », si je prends par exemple une fonction précise, est ce que je peux dire « pour tout x, il existe M tel que $f(x) \leq M$? pour $f(x) = \frac{1}{x}$ dans l'intervalle $]0,1]$. C'est vrai exemple mal choisi car vrai pour tout x 2h 50 57

2h 51mn 10s

285 E8 : quand vous prenez $si\ x \neq 0$, c'est comme vous pouvez aussi dire $\forall \in I, x \neq 0$

286 P: Non, il y a un quantificateur d'un côté et pas de l'autre. Si tu dis « si x est pair …. » est ce que c'est la même chose que de dire « pour tout x, si x est pair ? »

287 E8 : non

288 P : c'est la même chose ici ; c'est comme si $\forall x, P(x)$ est la même chose que $P(x)$

289 E ?: question 2.2

290 P : Oui, c'est exactement ça. C'est même la même chose que la question 1. Si j'ai $\forall x, si\ x\ est\ pair, alors\ son\ successeur\ est\ premier$. Là c'est différent. Ça va ? **on termine avec le 6** (lecture de l'énoncé) 6.1

Exercice 6

Item 6.1
291 E8 : la suite diverge

292 P : et vous, vous avez dit que quoi ?

293 E2 : elle ne converge pas

294 P : la suite ne converge pas ! en fait c'est la contraposée qu'il faut utiliser. **Le deuxième**,

Item 6.2
295 E2 : on ne peut rien dire, on ne peut rien dire.

296 P : Et justement, par rapport à cette proposition, quand on dit f continue… ici vous pouvez avoir deux niveaux de formalisation. En quantifiant le f, ou alors en prenant f comme un générique et en quantifiant la suite u_n. La suite u_n est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. Je prends l, quand je dis « sa limite est solution de l'équation », ça veut dire que je peux trouver l appartenant à R, tel que la limite de u_n quand n tend vers plus l'infini est l et j'ai $f(l) = l$. C'est ça que ça veut dire, pour revenir à là où vous aviez beaucoup d'hésitations. Deux conditions : que la limite existe et cette limite est solution de l'équation

297 E6 : est ce qu'on peut trouver d'autres solutions à part la solution limite-là ?

298 P : Oui, c'est possible

299 E6: et s'il y a d'autres solutions, est ce qu'on peut dire qu'on ne peut rien dire ? pour la convergence de u_n

300 P : S'il y a …

301 E6 : Une autre solution à part l

302 P : Si tu as des solutions de cette équation $f(x) = x$, est ce que tu peux dire que la fonction converge ? C'est ça la question ? Que la suite converge ?

303 E6 : Oui Mme

304 P : Pas nécessairement. Tu ne peux rien dire

305 E8 : Moi je me dis que

306 P : Quand vous calculez $f(l) = l$, vous vérifiez d'abord que le suite est convergente, non ? c'est toujours ça. Vous vérifiez que le suite est convergente, et ensuite vous résolvez l'équation $f(l) = l$, vous trouvez la solution

307 E2 : f est continue et convergente

308 P : Oui, sous les hypothèses, vous vérifiez que la suite converge, vous vérifiez les autres hypothèses, ensuite vous résolvez l'équation $f(x) = x$. Vous trouvez la limite. Quand vous trouvez la limite, vous savez qu'une suite admet une et une limite. Maintenant si vous résolvez sans avoir vérifié convergence et autre, vous résolvez l'équation, vous trouvez des solutions. Est-ce à dire que la suite définie par $f(u_n) = u_{n+1}$ est convergente ? Pas nécessairement, vous avez par exemple pris le cas de la fonction x^2. Vous avez résolu l'équation et trouvé deux valeurs. La suite définie par $u_{n+1} = {u_n}^2$n'est pas convergente. Avec $u_0 = 2$, je crois, enfin, différent de 1. u_0 n'étant pas dans l'intervalle $[0,1]$, il faut enlever cet intervalle, sinon vous avez une suite qui converge. Si vous êtes supérieur ou égal à 1 pour la valeur de u_0, la suite diverge. La suite ainsi définie a deux points fixes, et ne converge pas.

308 E4 : Si dans ce cas on montrait que notre suite était une suite à termes positifs, on peut rejeter la réponse

309 P : quelle réponse ?

310 E4 : la solution négative

311 P : Si vous avez une limite négative avec une suite à termes positifs ? Non, c'est pas possible, votre suite ne converge pas ! Vous ne pouvez pas avoir une suite à termes positifs et vous tombez sur une limite négative !

312 E1 : non, il veut dire ceci, si l'équation admet deux solutions,

313 E4 : une négative et une positive

314 P : oui, la plus probable c'est la positive, la négative non. Quand vous avez une suite à termes positifs, la limite doit être positive. Ça se démontre (démonstration) Une suite à termes positifs a une limite positive ou nulle. A la rigueur nulle, mais pas négative. **Lecture de 6.3**

Item 6.3

315 E3 : elle admet au moins une solution

316 E8 : elle admet une solution.

317 P : qu'est ce qu'on peut dire au sujet des solutions éventuelles ?

318 E1 : Elle admet au moins une solution

319 P : oui, qu'est ce qu'on peut en dire ?

320 E7 : On peut dire que parmi ces solutions, il existe une limite qui soit la limite de la suite.

321 P : oui, une solution est limite de la suite. Si vous avez votre suite convergente, vous avez les solutions de l'équation qui existeraient. Si vous avez des solutions de l'équation $f(x) = x$ et que votre suite converge, ce que vous savez, c'est qu'il y a parmi les solutions de l'équation une qui est la limite de la suite. Et si la suite n'est pas convergente ?

Item 6.4

322 E4 : Aucune n'est solution, aucune n'est limite de la suite.

323 E5 : Nous allons dire que si la suite n'est pas convergente, les solutions de l'équation n'appartiennent pas à l'ensemble des valeurs prises par u_n, c'est-à-dire n'appartiennent pas au support de la suite u_n. Et on le justifie en disant que si les solutions appartenaient au support de la suite u_n, il existerait un élément de n_0 pour lequel on aurait u_{n_0} égal à cette solution-là. Et tous les autres termes d'indice supérieur seraient égaux à la même valeur. La suite est convergente à partir d'un certain rang. On ne peut donc rien dire.

324 P : on ne peut rien dire, il n'y a aucune information qui nous permette de conclure. On a donc terminé. Est-ce qu'il y a des questions ?

325 E6 : Il y en a encore, au niveau du 6.2. Est ce qu'on peut avoir une suite qui vérifie les critères de convergence, croissante et majorée par exemple, et on essaie de résoudre l'équation $f(x) = x$. On a plusieurs solutions, puisqu'ici, je crois on a dit que on ne pouvait rien dire

326 P : Oui, on a dit qu'on ne pouvait rien dire

327 E6 : Une suite qui vérifie les critères de convergence, on essaie de résoudre l'équation et on a au moins une solution. En résolvant on a une solution. Puisque vous avez posé $f(l) = l$, est ce que on ne va pas encore trouver un autre l, une autre limite, bref un autre réel qui vérifie aussi ça ?

328 P : Tu parles de l'unicité de la solution ? Si tu as une fonction croissante et majorée, qui vérifie les conditions de convergence, la limite que tu trouves est unique, dans un espace séparé. Dans un espace métrique séparé, toute suite admet une limite unique. Dans R précisément, toute suite admet une limite unique. La limite est unique. Si tu trouves une solution, c'est la seule, ta limite est unique.

329 E6 : Je ne comprends pas. Quand vous dites « on ne peut rien dire » je ne comprends pas très bien. On dit la chose suivante, si la suite u_n est convergente… tu pars de la proposition « si la suite u_n est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. On te demande « que peux-tu dire au sujet de la convergence de la suite u_n si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution ? On te demande, lorsque l'équation $f(x) = x$ a une solution, est ce que ta suite converge, est ce qu'elle ne converge pas ? ce que tu sais, c'est que cette équation a au moins une solution et tu sais par ailleurs que si la suite u_n est convergente, sa limite est solution de l'équation. Je sais que l'équation a au moins une solution. Est-ce que la suite converge ou pas ?

330 E6 : On ne peut pas dire qu'elle converge vers une de ces solutions ? Pourquoi ? Qu'est ce qui te permet de dire qu'elle converge ? Tu as une implication, tu as P⇒Q. Je prends un truc simple. On prend P⇒Q, d'accord ?

331 E6 : Nous sommes d'accord.

332 P : Tu sais que Q est vrai, qu'est ce que tu peux dire de P ?

333 E6 : On ne sait pas.

334 P : s’il ne pleut pas je sors. Prenons un cas simple, s’il ne pleut pas je sors. A 15 heures je décide de sortir. Est-ce que tu peux me dire s’il a plu ou s’il n’a pas plus ?

335 E6 : Je suis déjà sorti ?

336 P : oui, je décide de sortir, à 15 heures je sors.

337 E6 : là on ne sait pas s’il va pleuvoir ou pas.

338 P : Qu’est ce que tu peux dire de la pluie ? est ce qu’elle est tombée, est ce qu’elle n’est pas tombée ? Tu nous as dit que s’il ne pleut pas tu sors, OK. On arrive chez toi et on constate que tu es sorti

339 E6 : ça veut dire qu’il n’a pas plu.

340 P : ça veut dire quoi ?

341 E6 : qu’il n’a pas plu.

342 E2 : Jamais, c’est pas vrai

343 P: là c’est bien, on tombe dans ce qu’on appelle le conditionnel courant

344 E3 : Est-ce que si tu sors, c’est suffisant pour dire qu’il ne pleut pas ?

345 E7 : S’il ne pleut pas je sors, si tu sors, est ce que tu penses que c’est suffisant pour dire qu’il pleut ?

346 P : je dis s’il ne pleut pas je sort. C’est un énoncé conditionnel, nous sommes d’accord ? Bon. Je viens chez toi et ne te rencontre pas. Je vais chez E5 et je dis, j’étais chez E6 l’autre jour et il m’a dit que s’il ne pleut pas il sortait. Il était sorti, toi tu penses qu’il a plu ou il n’a pas plu ? tu vas me répondre quoi ?

347 E5 : Je ne sais pas.

348 P : Tu ne sais pas parce que tu peux sortir quand il pleut. Quand tu dis s’il ne pleut pas je sors, est ce que ça veut dire que s’il pleut tu vas sortir ?

349 E2 : le fait de sortir n’est pas suffisant pour dire s’il a plu ou pas.

350 P : on a juste l’assurance que s’il fait beau ça ne sert à rien de venir chez toi. Mais qu’est ce qui nous dit que tu seras à la maison s’il pleut ? Tu ne dis pas que s’il pleut tu ne sors pas. C’est la même situation ici. Mon équation a au moins une solution, la propriété dit que si la suite converge, j’ai l’assurance que l’équation a au moins une solution. Mais si l’équation a une solution, qu’est ce que je peux dire de la convergence ? ça ne m’apporte aucune information sur la convergence, aucune. Ça va ?

351 E6 : oui, ça va Mme 2 heures 12 mn 06 secondes

ANNEXE 3 : RETRANSCRIPTION DU MODULE DE SUIVI EXERCICES 2 à 6

Exercice 2.2 : un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange

Groupe 1 :

- E1 Bonyohé
- E2 Martial
- E3 Ngougni
- E4 Zang

Groupe 2 :

- E5 : Enopa
- E6 : Nzemegni
- E7 : Sokeng
- E8 : Etoundi Gilles

1 E1 : c'est faux

2 E2 : c'est faux

3 E3 : On peut trouver un quadrilatère dont les diagonales sont, … Certains trapèzes

4 E2 : Comme c'est faux on donne un contre exemple

5 E3 : Certains trapèzes

6 E2 : C'est tout, même un rectangle qui peut contredire ça !

7 E3 : on peut trouver un trapèze

8 E4 : Est-ce que les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires ?

9 E3 : Si tu peux trouver un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne se coupent pas en leur milieu

10 E1 : Il suffit que les deux diagonales n'aient même pas la même longueur. Non, ne se coupent pas au milieu.

11 E4 : Il suffit que les deux diagonales ne se rencontrent pas en leur milieu

12 E3 : (**exo 2.3**) Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré.

13 E2 : Voilà comment j'ai raisonné ici. J'ai dit « si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, comme ça fait une proposition fausse, les diagonales sont

perpendiculaires. C'est un rectangle, et un rectangle ne peut pas avoir des diagonales perpendiculaires. Ça, ça fait une proposition qui est fausse.

14 E1 : Pourquoi un rectangle ne peut pas avoir des diagonales perpendiculaires ? c'est pas vrai !

15 E3 : Quelle est la définition d'un rectangle ?

16 E2 : Un rectangle est un parallélogramme qui a quatre côtés deux à deux parallèles.

17 E4 : Dis que c'est une figure géométrique, ne dit pas parallélogramme

18 E1 : Est-ce que le carré

19 E3 : Voilà un rectangle, le côté-ci est égal à ça. Est-ce que ce n'est pas un rectangle ? (dessin du carré à l'appui)

20 E2 : Ce n'est pas un rectangle

21 E1 ; Hé ! tout carré est un rectangle

22 E3 : Le carré est d'abord un rectangle

23 E2 : Je n'ai jamais entendu dire ça, que le carré est un rectangle. Dans un rectangle on parle déjà de longueur et largeur, dans un carré on parle de côtés

24 E1 : Non mais la longueur peut être égale à la largeur.

25 E2 : Jamais, quand la longueur est égale à la largeur, c'est un carré.

26 E3 : Le carré est un rectangle

27 E2 : Sinon il n'existerait pas de carré

28 E1 : le carré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux

29 E2 : Je n'ai jamais entendu ça

30 E1 : on apprend ça toujours

31 E2 : Tu viens d'apprendre alors

32 E3 : Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré. Là je crois que c'est vrai

33 E1 : c'est vrai

34 E2 : Moi-même j'ai trouvé que c'est vrai avec mon raisonnement. Lui, il disait qu'une proposition fausse qui entraine une proposition fausse est vraie.

35 E3 : Si on se place dans le cas de $P \Rightarrow Q$, si P est faux et Q est faux

36 E1 :On peut même s'arrêter

37 E4 : Voilà, c'est une proposition vraie, c'est comme ça que j'ai rédigé

38 E1 : Non, non, comment vous pouvez dire ?

39 E2 : Oui

40 E1 : Tu ne peux pas commencer avec un truc qui est faux ici et puis tu dis que tu vas toujours te baser sur ça. C'est pas la même chose !

41 E4 : Si on me donne une proposition qui est fausse, la proposition qui est fausse va toujours entrainer une proposition fausse.

Exercice 3
Donner la négation de chacune des phrases suivantes

1 E1 : toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges. On demande la négation.

2 E3 : Bon, moi je propose … On dit toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges, c'est-à-dire, quel que soit la boule qui se trouve dans l'urne, elle est rouge. On peut trouver des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges.

3 E2 : il existe des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges. C'est bon !

4 E1 : Bon, si on veut mettre ça sous forme d'implication ?

5 E2 : Non, tu peux mettre ça comme ça, sous forme d'implication ? Essaie un peu !

6 E1 : On peut mettre ça sous forme d'implication, non ?

7 E2 : Soit x apparten ant à

8 E3 : toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges

9 E2 : alors…

10 E1 : on peut prendre que la proposition P ici c'est quoi ?

11 E4 : les boules sont dans l'urne !

12 E2 : quel que soit x appartenant à L,

13 E3 : x est rouge

14 E4 : quel que soit x dans l'urne, x est rouge

15 E3 : on ne peut pas mettre ça sous forme d'implication

16 E2 : ça ne peut pas aller sous forme d'implication, gars

17 E4 : la négation c'est simplement comme on a fait là

18 E1 : donc tu penses que ça c'est faux ?

19 E2 : Ce n'est pas forcément faux

20 E1 : quel que soit la boule qui est dans l'urne, si une boule est dans l'urne, alors elle est rouge.

21 E2 : et si tu veux donner la négation de ça, ça va t'embrouiller

22 E1 : non, comment ?

23 E4 : il existe des boules dans l'urne et

24 E1 : elles ne sont pas rouges

25 E2 : c'est absurde, c'est bizarre

26 E1 : C'est absurde comment ? Il existe des boules dans l'urne

27 E3 : mais qui ne sont pas rouges !

28 E2 : mais ces boules ne sont pas rouges

29 E3 : bien sûr !

30 E2 : mais une conjonction ?

31 E4 : quand on dit *et* là, on peut aussi mettre *mais*. Oui, on peut aussi mettre *mais*.

32 E1 : il existe des boules dans l'urne, mais qui ne sont pas rouges. C'est bon !

33 E2 : ça ne contredit même pas ce qu'on a dit **(phrase 3)** Certains nombres entiers sont pairs

34 E3 : Certains nombres entiers sont pairs. Certains c'est dans le cas de …

35 E2 : De il existe. Je propose que « tous les nombres entiers sont impairs »

36 E4 : tous les nombres entiers pairs

37 E2 : tous les nombres entiers sont impairs

38 E1 : Certains nombres entiers sont pairs

39 E2 : oui, je dis que tous les nombres entiers sont impairs, pour la négation

40 E1 : c'est vrai que c'est une partition, mais c'est plus prudent de dire « tous les nombres entiers ne sont pas pairs »

41 E3 : oui, c'est plus prudent

42 E2 : c'est plus prudent de dire ?

43 E1 : tous les nombres entiers ne sont pas pairs

44 E4 : Regarde, ce que tu dis-là est vrai, mais la négation de ce qui est vrai, c'est ce qui est vrai, c'est déjà faux ! ça ne donne plus.

45 E1 : Est-ce que ce que je dis est vrai ?

46 E2 : Quand tu dis que quoi ? Redis ce que tu as dit

47 E1 : tous les nombres entiers ne sont pas pairs.

48 E2 : C'est vrai ce que tu as dit, non ? Tous les nombres entiers ne sont pas pairs. Voilà la négation qui est vrai. Il faut donner une négation par rapport à la proposition

49 E3 : J'ai essayé de faire comme tout à l'heure.

50 E2 : tu as quelque chose qui est vrai, tu donnes sa négation c'est aussi vrai ?

51 E3 : Qu'est ce qui est vrai ?

52 E2 : quand on dit que certains nombres entiers sont pairs, c'est vrai ! Quand tu dis que certains nombres entiers sont impairs ?

53 E3 : il n'a pas dit certains, il a dit « tous les nombres entiers sont non pairs »

54 E1 : ne sont pas pairs. En fait, ce qu'on veut dire, c'est que, c'est pas d'abord prudent de dire que quand tu n'es pas pair, tu es impair.

55 E2 : parce que quoi ? Il y a quelque chose entre les deux ?

56 E1 : c'est pas prudent

57 E2 : de dire que quand tu n'es pas

58 E4 : de dire que quand tu n'es pas pair, tu es impair.

59 E2 : ça dépend

60 E3 : mais dans le cas-ci, on peut dire ça, parce qu'on est dans N.

61 E2 : On est dans N.

62 E4 : est ce que 0 est pair ?

63 E1 : 0 est pair !

64 E3 :0 a deux valeurs

65 E1 : non 0 n'est pas impair, 0 est pair. Pourquoi tu dis que c'est impair ?

66 E4 : 2k+1, 0 est de la forme 2k+1.

67 E1 : tu peux mettre 0 sous la forme 2k+1 ?

68 E3 : On a dit que « certains nombres entiers sont pairs » ; il existe x tel que x est pair

69 E2 : Moi je dis que tous les nombres entiers sont impairs

70 E3 : alors, x…. ça ne marche pas

71 E1 : ça va. Tous les nombres entiers sont impairs. **(Item 3)** si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4. Là c'est une implication non ? Si P alors Q.

72 E2 : si un nombre entier. Un nombre entier, on a… si un nombre entier est divisible par 4

73 E3 : alors il se termine par 4

74 E4 : On a 16 qui est divisible par 4

75 E1 : On peut mettre quel que soit avant. On a si.. .

76 E2 : ça c'est P⇒Q non ?

77 E3 : Oui.

78 E4 : Il existe

79 E2 : c'est-à-dire que la négation c'est P⇒non Q

80 E3, E4 : P et non Q

81 E4 : il existe des nombres entiers divisibles par 4 qui ne se terminent pas par 4

82 E2 : Reprends

83 E4 : il existe des nombres entiers divisibles par 4

84 E1 : ne se terminant pas par 4

85 E2 : qui ne se terminent pas par 4. Oui, c'est bon.

86 E3 : donc la négation est vraie par conséquent l'énoncé est faux

87 E1 : Oui, l'énoncé est faux.

88 E3 : **(Item 4)** la limite d'une fonction est toujours finie

89 E4 : on a demandé de donner la négation. La limite d'une fonction est toujours finie. Il existe des fonctions qui ont des limites pas finies.

90 E1 : Pas finies

91 E3 : oui, pas fini, parce que les limites peuvent ne pas exister

92 E1 : il existe des fonctions qui n'ont pas des limites finies. C'est clair non ?

Exercice 4

93 E2 : on essaie d'écrire non ? On dit …, chacun écrit. Donner la négation et la contraposée de l'énoncé suivant :

> « $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\Rightarrow\; |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ » où x et y désignent deux nombres réels.
> Chacun écrit après on lit
> L'énoncé c'est d'abord $\forall\varepsilon$ avec ε

94 E3 : supérieur à 0

95 E1 : Strictement supérieur à 0

96 E2 : on a $|x-y| < \varepsilon$ implique que $x = y$

97 E1 : c'est une implication non ?

98 E2 : c'est une implication

99 E4 : $\forall\varepsilon$, laisse nous un peu écrire pour qu'on puisse bien discuter

100 E3 : J'ai fini

101 E2 : tu as fini ? Bon, allons-y à la négation.

102 E3 : je propose, bon, puisqu'ici nous sommes dans le cas de P⇒Q

103 E2 : Nous voyons deux flèches-là. L'implication

104 E3 : C'est P⇒Q . Donc la négation sera P et non Q. c'est-à-dire, je prends exactement le premier, c'est-à-dire, $(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\Rightarrow\; |x-y| < \varepsilon))$ et $x \neq y$. Il y a quelque chose que j'ai omis. J'allais dire, il existe x, y,

105 E2 : reprends un peu

106 E3 : attends un peu n'est ce pas ? Au départ, pour toute la proposition, il y a *où x et y désigne deux réels*, c'est-à-dire qu'on a pris deux réels quelconques, c'est-à-dire que c'est un peu comme si on avait mis un quantificateur universel à la fin.

107 E2 : Comment ? ça c'est les précisions, non ?

108 E3 : Non, ça rentre dans la proposition.

109 E2 : Voici la proposition qui est dans les parenthèses non ?

110 E3 : on a dit *où x et y désigne deux réels*, ça veut dire que *x et y désignent deux réels quelconques.* Si on veut donner la négation maintenant, ça veut dire alors qu'il existe x et y appartenant à R tels que pour n'importe quel epsilon, ε strictement positif implique que $|x-y| < \varepsilon$ et $x \neq y$. 31mn 21s

111 E2 : Moi je pense que là, on ne devrait pas regarder ça, tu devrais dire …

112 E1 : ça c’est juste une précision qu’on a faite, ça ne regarde plus la proposition.

113 E2 : Regarde la proposition qui est dans les parenthèses !

114 E3 : Bon, je vous pose une question ? x et y , ça sort d’où ?

115 E4 : C’est deux réels quelconques

116 E2 : On te précise que c’est deux réels

117 E4 : il n’y a pas de condition sur eux !

118 E3 : Regarde, la proposition finit entre les guillemets n’est ce pas ?

119 E2 : Oui.

120 E3 : ça sera travaillé avec des choses qu’on ne s’est pas fixées au départ.

121 E2 : c’est donc les choses-là qu’on te fixe à la fin.

122 E4 : tu sais dans quel domaine tu travailles

123 E3 : ça entre dans la proposition !

124 E2 : Non, non.

125 E4 : C’est l’ensemble dans lequel… On te donne l’ensemble de définition de tes valeurs, de x et y, c’est une information.

125 E1 : Ils ont délimité leur proposition-là.

127 E3 : Même s’ils ont délimité, le x et y, ça sort d’où ?

128 E4 : Avec ça, donnes-nous donc la contraposée.

129 E3 : Il existe…

130 E4 : donnes-nous la contraposée avec les *ou* en considérant les *ou*, *y*,

131 E1 : il va te dire *il existe*

132 E2 : Et lui, il est étonné de voir une proposition comme ça sans *il existe*, c’est ça qui le dérange.

133 E4 : Le problème c’est que c’est nécessaire qu’on nous parle de x et y, mais ici il ont limité

134 E2 : Ici, on t’a réduit le champ de boulot mon ami !

135 E3 : Et si tu regardes la proposition entre guillemets (montrant x et y), et ça, ça sort d’où ?

136 E2 : C’est ça qu’on te précise.

137 E1 : Pour que ce soit comme ça, ils devaient avant le premier guillemet-ci, mettre quel que soit x et y

138 E3 : Logiquement, c'est comme ça qu'on doit faire

139 E2 : attends, je vais lui poser une question. Si on ne précisait pas cela à la fin, tu allais dire quoi ?

140 E3 : non, on ne peut même pas écrire comme ça !

141 E2 : Supposons qu'on ne disait pas ça. Tu devais dire que c'est insuffisant ?

142 E3 : C'est insuffisant. Ça devait être insuffisant. Très insuffisant. Mais x et y, ça sort d'où ?

143 E2 : En fait, ça n'entre pas dans ta proposition, voilà ta proposition dans les guillemets. Tu veux déjà augmenter les choses …

144 E4 : donnes-nous un peu la contraposée

145 E3 : La contraposée ?

146 E4 : En tenant compte de x et y, où x et y sont là.

147 E3 : voilà, je vais alors dire, *quel que soit x, y appartenant à R,* $x \neq y$ ... je vais alors dire, *quel que soit x, y appartenant à R,* $x \neq y$ *implique,* $\forall \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $|x - y| \geq \varepsilon$

148 E1 : En fait, la question commence lorsqu'on a déjà x et y.

149 E2 : Oui, c'est clair.

150 E1 : Si tu mets ça (les quantificateurs) dans l'énoncé, ça sera touché par la négation.

151 E4 : ta proposition commence lorsqu'on a déjà x et y.

152 E3 : Si lorsqu'on a déjà

153 E1 : c'est là que la question commence.

154 E3 : Donc on me dit, x et y sont dans R

155 E1 : Oui

156 E3 : Nier la proposition suivante

157 E2 : Voilà !

158 E1 : on n'a pas dit nier la proposition suivante, « x et y sont dans R … »

159 E3 : tu me contredis

160 E2 : il ne te contredit pas, voilà ça dans la proposition, voilà les guillemets, non ?

161 E1 : les guillemets veulent dire que la proposition que l'on doit considérer …

162 E2 : ce qu'il a dit-là, il pouvait même aussi dire ça après

163 E1 : je peux dire ça après ou avant

164 E4 : On est d'accord pour la contraposée ?

165 E2 : Oui, mais avec les pour tout qu'il met avec les x et les y là ! Non.

166 E1 : Je ne suis pas d'accord

167 E3 : On aurait pu fermer les guillemets après réels. Après le mot *réels*, on devait fermer les guillemets, ça devait devenir une proposition.

168 E2 : Donc pour la contraposée, on peut prendre $x \neq y \Rightarrow$pour tout epsilon strictement positif,

169 E1 : Maintenant c'est *il existe*, maintenant on veut la négation de la première proposition

170 E4 : La contraposée c'est « non Q⇒non P », et toi tu mets non et tu ne changes pas.

171 E1 : Donne un peu la négation de la première proposition. Il y a beaucoup de choses qui vont changer.

172 E2 : La première proposition ? Non, rien ne change

173 E1 : la première proposition c'est la négation !

174 E2 : Non, rien ne change, c'est *pour tout*

175 E3 : Là n'est pas le problème !

176 E2 : Ça ne change même pas

177 E1 : vous allez laisser l'implication comme ça ?

178 E4 : donne-moi un peu ta contraposée

179 E3 : Ma négation, n'est ce pas ?

180 E2 : C'est ça que je suis entrain de dire que

181 E3 : Le problème c'est quoi ? je m'intéresse à ça. Ça c'est non P et ça c'est non Q

182 E1 : maintenant tu vas nier P, non ?

183 E3 : Non, on ne dit pas P, c'est P et non Q, non ?

184 E1 : On est à la contraposée.

185 E4 : C'est non P implique non Q, non ?

186 E1 : Tu n'es pas avec nous. Nous sommes maintenant à la contraposée.

187 E3 : La contraposée ? Ok, c'est que c'est ça.

188 E2 : On va encore nier les quantificateurs ?

189 E1 : Non, quand tu dis P⇒Q, ici, P c'est quoi ?

190 E4 : Suivez ce que j'ai proposé.

191 E2 : Moi je propose pour la contraposée

192 E1 : P est où ? P commence à quel que soit ε

193 E2 : Oui.

194 E4 : Suis un peu ma contraposée. $x \neq y \Rightarrow$ il existe ε positif et $|x - y| \geq \varepsilon$

195 E1 : c'est bon

196 E3 : mais moi je dis quand même qu'il fallait prendre

197 E2 : Non, gars c'est bon.

198 E1 : La réciproque est-elle vraie ? est ce que si $x = y$, alors $\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x - y| < \varepsilon)$ *?*

199 E4 : On peut prendre $\varepsilon = 1$

200 E1 : La réciproque de P⇒Q c'est Q⇒P, non ?

201 E2 : moi je ne pense pas que ce soit vrai. La réciproque ça veut dire que, est ce que $(x = y) \Rightarrow$ maintenant tout le reste là.

202 E4 : Si on prend $\varepsilon = 1$

203 E2 : Non, gars c'est pas possible

204 E4 : Comment ?

205 E1 : Dès que x est égal à y

206 E4 : Prenons $\varepsilon = 1$, n'est ce pas.

207 E2 : on prend $x = y = 2$, égal à 3 par exemple

208 E1, E2 : Non

209 E4 : Bon, oui, prends même 3

210 E1 : Ce qui est dans la valeur absolue va devenir 0.

211 E2 : Est-ce qu'un nombre, … peut toujours être strictement

212 E1 : Elle sera toujours vraie.

213 E4 : Est-ce que tout ε est toujours supérieur à 0 ?

214 E1 : C'est vrai puisqu'on a pris ça dans $\mathbb{R}_+^*$

215 E2 : ça sera toujours vrai, la réciproque est toujours vraie

Exercice 5

1 E1 : ça veut dire que, on a un énoncé qui n'est pas complet

2 E4 : on nous donne des propositions qui peuvent compléter. On dit, pour tout x de I, $f(x) \leq M$

3 E1 : Est-ce qu'on peut dire qu'une fonction numérique f de la variable réelle x est majorée sur un intervalle I de l'ensemble R des nombres réels si et seulement si pour tout x élément de I, $f(x) \leq M$?

4 E2 : Je pense que ce n'est pas vrai

5 E4 : Ce n'est pas vrai

6 E1 : Pourquoi ?

7 E2 Parce que dans ce cas-ci … parce que là c'est comme si tu prends d'abord les x avant d'aller… On doit fixer d'abord M ! c'est M qu'il faut fixer, et ici-là

8 E1 : Donc en fait ici, M dépend de x

9 E2 : Voilà

10 E4 : M n'est pas fixe

11 E3 : Moi je trouve que c'est faux plutôt parce que on ne nous a pas donné une condition sur M.

12 E2 : C'est la même chose qu'on est entrain de dire

13 E3 : Il fallait une condition sur M. M sort d'où ? Bon, si tu considères toute la proposition-là, M sort d'où ?

14 E1 : C'est vrai, c'est vrai quand même.

15 E3 : Il n'y a pas une condition sur M. On ne sait pas si M est là, avant ou après x. Il n'y a pas une condition sur M.

16 E2 : Si x est un élément de I, alors $f(x) \leq M$.

17 E3 : C'est toujours faux, c'est pas bon.

18 E2 : Pour quelle raison ?

19 E1 : Je pense qu'il n'y a pas de différence entre le 1 et le 2

20 E4 : Le 1 et le 2 n'ont pas de différence. Le 1 et le 2 c'est la même chose.

21 E2 : Pour tout x élément de I, il existe un réel M tel que

22 E1 : Là ça devient intéressant

23 E2 : Mais jusque-là…

24 E1 : Mais là c'est faux

25 E2 : C'est toujours faux

26 E1 : Pourquoi c'est faux ?

27 E3 : c'est maintenant là où tu peux avancer la première justification, parce que ici

28 E2 : M là dépend de x.

29 E1 : M n'est pas fixe 42mn 08 s

30 E3 : M n'est pas fixe

31 E2 : Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de I

32 E4 : f(x) soit inférieur ou égal à M

33 E2 : C'est ça qui est vrai maintenant

34 E3 : Ceci est vrai

35 E4 : ça c'est la définition même de l'élément majorant

36 E2 : Oui. C'est bon, donc 5.4 est vrai

37 E1 : Si x est un élément de I, alors il existe un réel M tel que $f(x)$ soit inférieur ou égal à M.

38 E2 : C'est la même chose que la proposition 3, non ?

39 E4 : C'est faux parce que le M aussi dépend de…

40 E2 : Il n'y a que le 4, le 5.4 qui est vrai

Exercice 6
Lecture de l'énoncé

1 E1 : que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite u_n si 1) l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution ?

2 E2 : elle ne converge pas.

3 E3 : Pourquoi ?

4 E2 : Parce que sa solution devait être, … sa limite devait être une solution de l'équation $f(x) = x$. La suite devait être… alors si sa limite n'existe pas, elle ne converge pas !

5 E1 : Si on prend avec la contraposée de la proposition qu'on nous a donnée ?

6 E2 : Je ne vous ai pas suivi

7 E1 : Je reprends un peu l'énoncé. On dit que, si $f(x) = x$ n'a pas de solution, que peut-on dire à propos de la convergence de la suite u_n ?

8 E2 : Dans le cas suivant, l'équation

9 E1 : Sachant que si la suite u_n converge, sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. Donc si la suite u_n est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. Ça veut dire que si la suite converge, l'équation $f(x) = x$ a des solutions. Je dis donc la contraposée.

10 E3 : Ici on suppose …Ce n'est pas la contraposée. On peut supposer que l'on a dit que si u_n converge, sa limite est solution de l'équation, … s'il arrive que maintenant l'équation n'ait pas de solution,

11 E1 : c'est pourquoi je dis la contraposée. Si u_n converge même, le fait que ce soit solution veut dire que l'équation a des solutions. Maintenant si on dit que l'équation n'a pas de solution, la contraposée veut dire que la suite ne converge pas.

12 E2 : Ah, oui, oui, je vois.

13 E1 : **Deuxième**, l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, a au moins une solution.

14 E4 : ça continue ?

15 E2 : Que peut-on dire

16 E1 : au sujet des solutions éventuelles

17 E2 : au sujet des solutions éventuelles

18 E1 : Voilà, ça c'est autre chose.

19 E4 : A au moins une solution. C'est la même question.

20 E1 : Ah oui, c'est pas exactement la même chose. C'est pas la même chose.

21 E2 : Que peut-on dire au sujet de … l'équation f(x) a au moins une solution.

22 E4 : Il y a une condition, si la solution est négative ?

23 E3 : Non, là n'est pas le problème !

24 E2 : La limite d'une fonction peut être négative

25 E3 : Là n'est pas le problème !

26 E1 : A au moins une solution

27 E3 : Bon, a au moins une solution

28 E4 : tel que c'est, ça converge.

29 E2 : Vous racontez quoi-là ?

30 E1 : ça converge

31 E3 : C'est une suite réelle ?

32 E2 : quand la limite existe, elle est unique, si je ne me trompe pas. La limite d'une fonction est unique.

33 E1 : Mais est ce qu'on peut dire que cette limite-là est parmi les solutions ?

34 E3 : Oui, est parmi les solutions de l'équation ? C'est ça, c'est parmi les solutions de l'équation.

35 E4 : moi j'ai l'impression que si ça admet les solutions, si l'équation-ci a déjà deux solutions, ça n'aura pas de limite.

36 E1 : Non, pas forcément.

37 E2 : ça peut avoir de la limite pour peut être à gauche, peut être à droite

38 E4 : Il y a une condition maintenant sur la limite, deux solutions distinctes

39 E2 : Mais ça ne peut pas avoir la limite.

40 E4 : Non, il y a parfois que cette équation a deux solutions, une négative et une positive, et la limite est la solution positive.

41 E2 : Voilà pourquoi alors, ça rejoint…

42 E4 : c'est pourquoi je demandais si l'unique solution est négative ?

43 E1 : ça c'est pas le seul cas. Il peut aussi arriver que une est peut-être inférieure à zé…, à un, l'autre est supérieure à 10 et nous on sait déjà que la limite est supérieure à 9. Il y a juste deux cas. Pas forcément négatif

44 E3 : ça peut être une suite à termes positifs

45 E1 : Non, là se sont déjà des résultats de cours, on va commencer

46 E4 : on dit « l'équation $f(x) = x$ » n'admet pas de solution. On a répondu l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution. Au moins une, ça veut dire que ça peut avoir plus d'une solution.

47 E1 : Oui, au moins une solution.

48 E4 : ça peut avoir une solution, ça peut avoir deux solutions, ça peut avoir trois solutions, même quatre solutions. Qu'est ce qu'on peut dire ?

49 E1 : moi je pense que ce qu'on peut dire c'est que c'est possible que ça converge

50 E4 : Dans ce cas, ça converge dans un seul cas. Si on a une solution ça converge. S'il y a plusieurs solutions, ça converge si et seulement si toutes les solutions sont … égales.

51 E1 : et ça plusieurs solutions ?

52 E4 : Oui.

53 E1 : ça converge si toutes les solutions sont égales ?

54 E3 : Non, pas forcément

55 E1 : les solutions peuvent être différentes, mais l'une des solutions peut être la limite.

56 E4 : Oui, je sais. Si et seulement si il n'y a qu'une seule solution qui vérifie la définition de la limite.

57 E1 : Bon, le problème donc c'est que, on a dit que lorsque ça converge, la limite est parmi les solutions. Est-ce que quand il y a les solutions, il y a toujours la limite dedans ?

58 E2 : Pas toujours !

59 E3 : ça c'est déjà

60 E2 : on résout souvent l'équation-là pour trouver la limite. Quand c'est déjà deux, ça veut dire que cette fonction-là n'a pas de limite.

61 E1 : Lorsqu'on sait déjà que la suite converge. Là on sait déjà que la suite converge

62 E4 : là alors tu dis déjà autre chose parce qu'on a une solution ; on a travaillé déjà on dit sur la fiche de TD, on a trouvé deux solutions, il y avait une qui était négative, une qui était positive, on a éliminé celle qui était négative parce que la suite était à termes positifs.

63 E1 : On résout l'équation-là lorsqu'on sait déjà que la suite converge non ?

64 E2 : On peut aussi résoudre pour vérifier si la suite converge !

65 E1 : Comment-ça ?

66 E4 : Parce que si ça n'admet pas de solution, on saura que ça ne converge pas.

67 E1 : Si ça admet des solutions, tu conclus que ça converge ?

68 E4 : Oui

69 E1 : Ah bon ?

70 E4 : Si ça admet une solution qui définit les conditions de définition de la suite,

71 E1 : Quelles conditions de définition ?

72 E4 : La suite peut être à termes positifs, ça admet

73 E1 : deux solutions positives, tu fais comment ?

74 E4 : deux solutions positives, tu ne peux pas conclure.

75 E1 : c'est justement pourquoi je dit que, est ce que quand il y a les solutions tu conclus ?

76 E4 : mais si ça admet une solution et que cette solution vérifie les conditions, elle converge. Et si elle admet deux solutions qui ne vérifient pas, qui vérifient les conditions et qui sont distinctes, tu conclus que la suite ne converge pas.

77 E1 : Et si on ne te donne même pas, si tu n'arrives pas à voir que la suite est à termes positifs

78 E4 : Là, ça fait un autre problème.

79 E1 : Je dis, si l'équation a des solutions, est ce que c'est sûr que la suite a une limite ?

80 E4 : Non

81 E1 : C'est pourquoi je dis qu'on ne peut rien dire, on peut seulement dire que c'est possible que la suite converge, n'est ce pas ?

82 E3 : C'est possible. Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$ si 6.3, la suite u_n est convergente ?

83 E2 : elle admet une limite solution

84 E1 : Non, au moins

85 E2 : Une unique gars, une unique solution ;

86 E1 : ça veut dire que vous ne comprenez pas ce qu'on dit depuis-là !

87 E2 : On comprend gars, une unique solution

88 E1 : l'équation-ci peut avoir une solution négative et une solution positive, et que la limite c'est la solution positive. J'ai déjà résolu des équations comme ça

89 E4 : Non, elle n'admet pas une unique solution, une unique solution qui vérifie les conditions de la suite.

90 E1 : Tu n'as pas vu l'exercice où il y avait une suite négative qui donnait -1 et l'autre donnait $\sqrt{2}$, mais la suite était à termes positifs et elle était croissante. On a dit que ça ne peut pas être -1, tu n'as pas fait l'exercice-là ?

91 E4 : Il y a une solution qu'on exclut par rapport à la définition de la suite

92 E1 : Voilà !

93 E2 : Donc elle peut avoir plusieurs solutions, mais une seule vérifie les conditions de notre suite.

94 E4 : je suis entrain de voir dans mon cahier, qu'est c'est l'unique solution

95 E2 : C'est une unique solution

96 E1 : Non, non, vous mentez, vous-même vous avez eu à voir cet exercice.

97 E2 :C'est dans le cas où ça ne converge pas que je pense que ça n'a pas de solution, ou ça admet plusieurs solutions

98 E1 : Non, non, non. Donc tu veux dire que tu n'as jamais résolu un exercice où tu trouves que le truc-ci a deux solutions, tu n'as jamais fait ça ? où tu trouves peut être les solutions -1 et 2 ?

99 E2 : En tout cas, peut-être que je ne me souviens plus que j'ai fait.

100 E1 : tu as déjà fais ça.

101 E2 : Qu'est ce qu'on dit alors ? Que ça n'admet pas de solution tout simplement

102 E1 : Que peut-on dire ?

103 E3 : On a déjà dit que ça admet au moins une solution.

104 E4 : je dis dans le cas où ça ne converge pas ?

105 E3 : On ne peut rien dire

106 E4 : ça admet deux solutions

107 E3 : Non, on ne peut rien dire

108 E4 : ça admet deux solutions distinctes

109 E1 : dans le cas où la suite ne converge pas ?

110 E4 : ça admet des solutions distinctes

111 E1 : dans le cas où la suite ne converge pas ?

112 E4 : Oui

113 E1 : On a dit quand la suite converge, il peut avoir deux solutions distinctes

114 E2 : On peut avoir deux solutions distinctes, mais on peut avoir une seule qui vérifie les conditions de la suite.

115 E4 : Mais il y a d'abord deux solutions

116 E2 : Plusieurs solutions même

117 E4 : bon il y a plusieurs

118 E2 : Mais ici je parle qu'on a toutes les

119 E1 : quand la suite ne converge pas ?

120 E2 : on a toutes les limites, mais on ne doit avoir qu'une seule solution qui vérifie. On peut avoir plusieurs solutions qui ne vérifient, qui vérifient les conditions de définition de la suite

121 E4 : Qui sont dans le domaine de définition de la suite. Si on a plusieurs solutions qui sont dans le domaine de définition de la suite, on a la suite qui ne converge pas, parce que on doit avoir une seule solution qui est dans le domaine de définition de la suite. Celle qu'on rejette-là n'est pas dans le domaine de définition de la suite, c'est pourquoi on la rejette.

122 E1 : Quand on ne connait pas encore chaque solution, qu'est ce qu'on peut dire à propos des solutions ?

123 E4 : Là, le cours dit qu'ici on admet une seule solution.

124 E1 : Non, le cours n'a pas dit ça !

125 E2 : Moi j'insiste là-bas. Quand la suite converge, la limite $f(x) = x$ est unique. Admet une unique solution ;

126 E1 : Pourquoi c'est une unique solution ?

127 E4 : C'est dans le cas ci que ça admet plusieurs ou ça n'admet pas.

128 E1 : faut pas transformer le problème. Tu veux dire que tu n'as pas encore fait un exercice où tu trouves plusieurs solutions ?

128 E2 : On peut avoir ça dans CIAM[3] ?

130 E1 : Il y a des exercices comme ça dans le CIAM, partout !

131 E2 : Je dis une propriété du genre ?

132 E1 : Non, on ne précise pas. On dit seulement que ça doit être solution de l'équation $f(x) = x$. ça doit être solution de l'équation $f(x) = x$, ça ne veut pas dire que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution.

133 E2 : ça doit être une solution, alors que la limite est unique. Si ça doit être solution, qu'est ce que tu dis alors ?

[3] Livre au programme

134 E1 : Est-ce que je dis que toutes les solutions sont limites. Je n'ai pas dit que toutes les solutions sont limites. Il y a d'abord plusieurs solutions, mais une des solutions est limite. Ça ne contredit pas le fait que la limite existe

135 E2 : J'ai le CIAM ici

136 E4 : J'ai encore l'exercice-là. Hier on était encore avec le groupe de Michel-là, on était là-bas l'autre jour. On a trouvé deux, je crois que c'était le truc où il y avait les pairs et impairs. Une solution était négative, l'autre était positive. On a dit que comme la suite est à termes positifs, on choisit la solution positive.

137 E1 : Comment vous pouvez dire les choses comme ça ?

138 E2 : Limite d'une suite, c'est pour une suite ou pour une fonction ? (il feuillette le livre)

139 E1 : imagine que tu as par exemple une suite qui est en n^2. Quand tu va résoudre, tu ne vas pas trouver deux solutions ? tu ne peux pas trouver deux solutions ? la suite peut converger en une limite fixe, mais la résolution n'a rien à voir avec

140 E3 : Regarde, si on essaie un peu d'utiliser les valeurs de vérité, tu vois un peu ? on dit quel que soit x dans I, il existe M appartenant à ℝ tel que $f(x) \leq M$, la proposition-là peut avoir quelle valeur de vérité ?

141 E4 : Elle est vraie

142 E3 : elle est vraie, n'est ce pas ? puisqu'on a essayé de reformuler la négation de la réciproque. Et maintenant, quel que soit γ dans ℝ, il existe x dans I tel que $f(x) > \gamma$. Elle est comment ?

143 E1 : Tu dis ?

144 E3 : quel que soit γ dans ℝ, je veux retrouver la valeur de vérité de la proposition-ci (désignant celle qu'il a donnée)

145 E2 : quel que soit γ dans ℝ, je veux retrouver la négation de f majorée-ci ; quel que soit γ dans ℝ, il existe x dans I tel que $f(x) > \gamma$. Elle a quelle valeur de vérité cette proposition ?

146 E2 : f majorée

147 E3 : sa négation.

148 E2 : f majorée, sa négation, pour tout γ dans ℝ, il existe x dans I tel que $f(x) > \gamma$.

149 E3 : Si elle est fausse ? on aura vrai et faux

150 J : Qu'est ce qui est vrai, qu'est ce qui est faux,

151 E3 : la première proposition-ci, on a dit quel que soit x appartenant à I, il existe M appartenant à ℝ tel que $f(x) \leq M$. On a jugé bon que la première proposition-ci est vraie. Et la négation de la seconde, quel que soit γ dans ℝ, il existe un x dans I tel que $f(x) > \gamma$. Moi

je pense que la seconde-ci est fausse. Quel que soit γ dans $\mathbb{R}$, on peut toujours trouver un x dans I tel que

152 J : Attends, il faut bien préciser ce que tu cherches. Qu'est ce que tu veux montrer ? Tu veux montrer que la réciproque de ta proposition est fausse. C'est-à-dire quoi ? C'est-à-dire, pour tout x dans I, il existe M tel que $f(x) \leq M$ et f non majorée. Bon, là tu as défini f non majorée.

153 E3 : Oui. Bon j'essaie de prendre la négation de la réciproque. Je dis donc quel que soit x appartenant à I, il existe un M dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M(1)$. Et quel que soit γ dans $\mathbb{R}$, il existe un x dans I tel que $f(x) > \gamma(2)$. Moi je dis que la première (1) a une valeur de vérité vrai, et la seconde (2), ça ne sera pas toujours vrai pour un γ qu'on va prendre dans $\mathbb{R}$. puisque par définition on a supposé que

Les étudiants du second groupe
154 E5 : Moi je me dis qu'on doit cherche un x qui soit supérieur à n'importe quel élément de $\mathbb{R}$. on doit chercher un x tel que $f(x)$ soit toujours plus grand qu'un élément de $\mathbb{R}$. Là, c'est compliqué puisqu'on n'a même pas une condition sur x.

155 E7 : Si on essaye même, …Puisqu'on a dit que c'est une fonction numérique d'une variable réelle. Essayons de définir une fonction ; 1 heure 01mn

156 E5: On sait qu'une fonction est une correspondance entre deux ensembles, alors si on prend un élément de l'ensemble de départ, il admet au plus une image dans l'ensemble d'arrivée.

157 E7 : Essayons alors de définir une fonction quelconque. Si on prend même la fonction qui à x associe quoi ? On essaie de définir une fonction quelconque

158 J : parce que votre fonction… Quand vous regardez l'énoncé, c'est quel type d'énoncé ? il faut déjà savoir quel type d'énoncé vous avez !

159 E7 : Une fonction numérique de la variable réelle f est majorée si et seulement si

160 E5 : La réciproque-là nous pose des problèmes. Montrer la réciproque nous pose des problèmes. Ça nous pose sérieusement des problèmes. Traversons d'abord ça, on va revenir dessus après

161 E7 : Moi je dis qu'on doit essayer de définir une fonction. Tu vois on a dit une fonction quelconque, une fonction numérique d'une variable réelle x. Essayons de prendre n'importe quelle fonction, c'est-à-dire que, telle que la réciproque ne marche pas pour cette fonction-là.
162 E5 : la réciproque ne marche pas pour cette fonction ?

163 E7 : On prend une fonction telle que la réciproque ne peut pas marcher pour cette fonction

164 E5 : telle que la réciproque ne marche pas pour cette fonction

165 E7 : On prend une fonction telle que la réciproque ne peut pas marcher pour cette fonction

166 E5 : Fabriquons alors une pareille fonction, ça va prendre un peut de temps

167 E7 : parce que, regarde, n'est ce pas ?

168 E5 : Bon, on sait qu'une fonction est une correspondance entre deux ensembles A et B telle que si on prend un élément dans l'ensemble A, alors cet élément va avoir, a au plus une image. Si on essaie par exemple… parce que si, n'est ce pas, on part d'un intervalle de la forme ouverte, un intervalle ouvert I de la forme $]a, b[$ et tel que l'intervalle image de celui-là par f nous donne un intervalle de la forme un $[c, +\infty[$

169 E7 : Bon regarde un peu ça ?

170 E5 : un $[c, +\infty[$, cela veut dire quoi ? Cela veut dire que si on prend un élément x dans I, alors cet élément-là sera toujours … puisqu'il va appartenir à $[0, +\infty[$

171 E7 : Un élément où, dans I ?

172 E5 : Puisque $f(x)$ va appartenir à $[0, +\infty[$ puisque x est supérieur à a. Considérons f une fonction telle que $f(I)$ égale peut être l'intervalle $[a, +\infty[$, $f(I) = [a, +\infty[$. On considère une pareille fonction. Cela veut dire quoi ? Cela veut dire que pour tout x appartenant à I, f(x) sera supérieur ou égal à a. mon problème c'est chercher un x tel que si on prend un élément quelconque dans R, notre *f(x)* sera toujours plus grand que cet élément-là.

173 E7 : Tu cherches un x tel que quoi ?

174 E5 : si on prend un élément quelconque dans R, alors le f(x)-là sera toujours plus grand que lui. Si maintenant on a f(I)= $[a, +\infty[$, $a \in R$, cela veut dire quoi, cela veut dire qu'il existe … c'est-à-dire, il y a un élément de f(I), donc un élément f(x) dans R qui appartient au voisinage de $+\infty$. Donc si on peut l'identifier à $+\infty$, tu vois un peu ? on essaie un peu de l'identifier à $+\infty$, donc il est tellement grand, on le suppose tellement grand qu'on puisse l'identifier à l'élément $+\infty$. A ce moment-là, si son image c'est $+\infty$, on sait que $+\infty$ est plus grand que n'importe quel élément de R, et $+\infty$ n'appartient pas à R, c'est un peu comme la borne supérieure de R. Tu vois un peu non ? $+\infty$ c'est un peu comme la borne supérieure de R qui n'est pas élément de R, mais qui est pourtant plus grand que tous les éléments de R. donc, si on essaie d'identifier un pareil élément, parce que moi je trouve ça vraiment compliqué hein ?

175 E6 : Ma question est la suivante, s'il existe vraiment un x appartenant à I tel que limite de f(x) lorsque x tend vers ce x_0 nous donne $+\infty$, c'est tout à fait logique, parce que à ce moment-là, f(a) ne …, est ce que f(a) va d'abord exister ?

176 E5 : Je suis perdu, je ne comprends pas, ça me dépasse un peu. Si on arrive au 5.4, on dit qu'il existe un élément M tel que … C'est exactement la définition, donc a n'a pas besoin de trop se casser

177 E7 : 5.5

178 E5 : *lecture de 5.5* le 5.5 et le 5.3 c'est pareil

179 E6 : j'ai remarqué ça. Ça ressemble au

180 E2 : C'est la même chose

181 E6 : si tu vois bien, le 5.5 et le 5.3 c'est la même position. Le 5.1 et le 5.2 sont également les positions similaires. Le 5.3 là vraiment, si les Bonny[4] voient ça, ils vont nous aider

182 E7 : lecture de 5.5

183 E6 : C'est la position 5.3. Maintenant allons-y au petit 6.

Exercice 6
Lecture de l'énoncé 6 par E6

1 E6 : **si l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$ n'a pas de solution**, on déduit de manière immédiate que f n'est pas convergente. Parce que si l'on essaie de regarder la … la réciproque … la contraposée de si f est convergente, sa limite est solution de $f(x) = x$, heuuu, non, attendez un peu

2 E7 : oui, la contraposée ; si elle est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. La contraposée ça sera quoi ? 1 h 09mn 14s

3 E5 : Regarde un peu, analysons un peu ça. Si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, cela veut dire qu'on ne peut pas trouver un élément tel que, qui puisse vérifier $f(x) = x$, par conséquent, la limite de la suite, la limite de u_n ne peut pas exister ! puisqu'il n'existe aucun élément x tel que $f(x) = x$. Et il n'existe pas d'élément dans R vérifiant $f(x) = x$, n'est ce pas, on peut déduire quoi ? puisque si une suite est convergent, alors sa limite appartient à R. et comme maintenant ici on dit « si la suite u_n est convergente, alors sa limite est solution de l'équation-là, c'est automatique. Et si maintenant cette fonction-ci n'a pas de solution, il parait très évident que la suite n'est pas convergente. Mon problème maintenant est le suivant : si on voit bien la négation de cette proposition-ci, on dit « si la suite u_n est convergente et sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$ », elle est bel et bien fausse. Puisqu'il y a certains résultats qui en découlent. Si elle est fausse n'est ce pas, sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$, cela veut dire que si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, c'est-à-dire que si ceci n'a pas de solution, on ne peut pas avoir u_n convergente. Puisque regarde, la négation ci est fausse. Si on connaissait la négation, si la suite u_n était convergente …, la suite u_n convergente et sa limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$.

4 E7 : sa limite n'est pas solution de l'équation

[4] Leurs camarades de classe

5 E5 : $f(x) = x$. Elle est fausse. Tu vois un peu, donc cela me parait un peu clair dans ma tête que si, que la position 6.1, donc, si $f(x) = x$ n'a pas de solution, alors u_n n'est pas convergente. Moi, ça me parait très clair.

16 E5 : et par conséquent $f(x) = x$ n'est pas convergente

17 E7 : par conséquent u_n n'est pas convergente.

18 E5 : u_n n'est pas convergente

19 J : Vous dites que si la limite

20 E7 : La contraposition

21 J : Oui. La dernière phrase que tu as dite c'est quoi ? Si la limite n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$

22 E7 : puisqu'on a dit ici, $f(x)$ n'est ce pas égal à x n'a pas de solution, donc ça veut dire que même la limite, si bien, donc même la limite de u_n si bien elle existe

23 J : Si tu dis « même la limite », ça suppose qu'elle est convergente. Ça suppose que la suite peut être convergente. Si tu parles de la limite, ça veut dire que tu supposes que la suite peut converger

24 E7 : Non, pas la limite

25 E5 : et la contraposée est très claire ! la contraposée dit « si la limite de la suite u_n

26 E7 : n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$

27 E6 : Il y a un problème, parce que, quand il a dit « si la limite »

28 E7 : Oui, c'est ça que je dis !

29 E6 : ça veut dire que la limite existe mais elle n'est pas solution. 1 heure 13 mn 13 s mais la contraposition sera donnée, parce que dès que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution

30 E5 : Non, non, non …

31 E7 : Dès que l'équation $f(x) = x$

32 E5 : il y a un problème, il y a un problème. Non, dans la contraposée, je ne pense pas qu'on ait utilisé le mot *limite*.

33 E7 : Attend, on dit, la contraposée c'est

34 E5 : Je ne pense pas que le mot *limite* puisse être dedans

35 E7 : la contraposée sera quoi ?

36 E6 : parce que la limite doit d'abord exister. Elle doit d'abord exister. Parce que si on dit la limite, si tu dis maintenant que

37 E5 : Heuu, si la limite, si la limite de la suite u_n est solution de, c'est-à-dire que,

38 E6 : si la limite, elle existe déjà, tu vois un peu, elle existe déjà

39 E5 : et dire après que la suite u_n est non convergente, ça n'a pas de sens. Tu me suis, donc moi je me dis maintenant que comme contraposée on doit dire que, si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution dans R, n'admet pas de solution dans R, alors la suite n'est pas convergente. Moi je me dis que c'est ça la contraposée. Parce que dès lors que l'on met le mot limite, ça crée comme une sorte de quiproquo, on ne comprend plus rien.

40 E7 : tu es d'accord E6 ?

41 E6 : je suis d'accord.

42 E5 : maintenant, on dit, l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$ a au moins une solution. Bon, on prend le cas, si elle a une solution n'est ce pas ?

43 E8 : Oui

44 E5 : (Rires) On essaie un peu voir. Si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution

45 E6 : si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution

46 E5 : moi je pense qu'on ne peut rien dire sur la convergence de la suite u_n

47 E6 : quand on dit $f(x) = x$, ça veut dire qu'on va tracer la fonction $f(x)$, tu vois un peu, on va tracer la droite $y = x$? Cette droite pose, cette droite se touche en deux points. Ensuite en ces deux points il y aura le point de convergence de u_n.

48 E5 : Moi je me dis, … point de convergence de u_n ! Moi je pense, ce que tu dis là, n'est ce pas, parce regarde bien. On définit, la suite est telle que si on a u_1, on définit u_2 en fonction de u_1 et on sait que u_1 doit appartenir à l'intervalle image de I. Parce que si f est une fonction définie sur I, u_n doit appartenir à l'intervalle image de I. Or d'après ce que tu es entrain de dire-là, au niveau des suites, quand on veut déterminer les valeurs à partir de la première bissectrice, et autre et tout ça, on a notre u_0, u_1, tout ça, on calcule notre u_1, on bombarde là. Après on dit on trace les intervalles et autres. Mais là, est ce que c'est pour les fonctions récurrentes ?

49 E6 : Avec les fonctions récurrentes ça donne.

50 E5 : ça donne aussi hein ? Tu es sûr ?

51 E6 : Parce que je me rappelle en première on a tracé une fonction

52 E5 : Moi, je me dis que cela donne lorsqu'on veut rapprocher la fonction $f(x)$ à une suite. Quand on veut rapprocher la suite à une fonction, c'est à ce moment-là que …

53 E6 : parce que il y a un problème, dans cet exercice. On dit souvent au début, « utilisez cette fonction ». Maintenant on donne la fonction $u_n = f(x)$

54 E5 : Regarde, si tu as bien remarqué dans ce que tu disais-là non, quand on avait u_n, elle allait de N vers R, n'est ca pas ! et ce n là appartenait automatiquement au domaine de définition de f.

55 E6 : C'était une fonction, c'était du genre …

56 E5 : Après on supposait une fonction $f(x)$ égale à un truc. On posait u_n tu vois un peu …c'est pas trop ça, moi j'ai l'impression que ce n'est pas ça. Je ne pense pas. Je ne crois pas. Parce que tu vois déjà, $f(0)$ d'abord ou $f(1)$ n'est plus un élément de N, on ne sait même plus si c'est un élément de I. forcément il doit appartenir à I si on veut pouvoir trouver une image par f. Il faut qu'il appartienne à I.

57 E6 : Nous sommes au niveau de la limite, c'est ça ?

58 E5 : Je ne refuse pas, moi je parle par rapport à ce que tu as dit là que tracer la première bissectrice, après tracer la fonction, après voir les points d'intersection. En ce qui me concerne, moi je me dis ici là n'est ce pas, que si l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, moi je me dis qu'on ne peut absolument rien dire par rapport à la fonction. Parce qu'on dit

59 E6 : par rapport à la

60 E5 : par rapport à la nature de la convergence de la suite. On dit ici là quoi en énoncé, on dit « si la suite u_n est convergente, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. essayons un peu voir de prendre la négation de la contraposée.

61 E6 : La négation de la contraposée ?

62 E5 : Oui

63 E5 : La contraposée dit ceci… la négation de la contraposée. La contraposée dit ceci « si l'équation … l'équation $f(x) = x$

64 E6 : tu cherche la négation de la contraposée ?

65 E5 : Oui. Si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution dans R, alors la suite u_n n'est pas convergente. Tu me suis un peu. Quand on est

66 E6 : la négation de la contraposée ?

67 E5 : Non, je dis d'abord la contraposée. Et si maintenant on construit la négation de la contraposée. Si n'est ce pas, on sait dès le début qu'elle est fausse. Si $f(x) = x$ n'admet pas de solution, et la suite u_n est convergente … Elle est fausse

68 E6 : C'est aussi faux. Et qu'est ce que, où tu veux en venir là ?

69 E5 : Attends, attends, je suis entrain de tourner en rond. Moi je dis qu'on ne peut rien dire. Parce que si l'équation $f(x) = x$ a une solution, et que la suite u_n est convergente, cela veut dire que cette solution-là sera la limite de la suite. Tu me suis ? Et si maintenant l'équation $f(x) = x$ a deux solutions, et que la suite u_n est convergente, cela veut dire que l'une des deux va être la limite de notre suite. Supposons maintenant que cette équation ait deux solutions et que la suite ne soit pas convergente, donc c'est pour cela qu'on ne peut rien dire. Parce que si la suite u_n est convergente et que, et que, si maintenant $f(x) = x$ admet des solutions et que la suite u_n n'est pas convergente

70 E7 : par rapport au critère de convergence

71 E5 : moi je dis qu'on ne peut rien dire

72 E7 : Moi je pense qu'on ne peut rien dire. Puisque avant de dire d'abord

73 E5 : Moi je me dis qu'on ne peut rien dire dans ce cas. Rien de particulier, on ne peut rien dire 1heure 21mn 34s Parce ce que, identifions les différents cas. Si l'équation admet une solution unique, et que la suite est convergente, forcément cette solution sera la limite de la suite. Si l'équation admet deux solutions

74 E6 : deux solutions distinctes

75 E5 : cela veut dire que l'une des deux solutions sera la limite de notre suite convergente. Maintenant imaginons comme c'est dit là, qu'elle n'admet aucune solution et que la suite soit non convergente

76 E6 : Tu dis que si l'équation $f(x) = x$ admet une solution, ça veut dire que …

77 E5 : si l'équation $f(x) = x$ admet une solution et que la suite est convergente, cela veut dire qu'elle est limite

78 E6 : De cette suite-là

79 E5 : Si l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions et que la suite u_n est convergente, je dis l'une des deux solutions-là sera la limite de notre suite. Et imaginons maintenant un seul instant que notre admet plus d'une solution ou admet au moins une solution et que notre suite soit non convergente on peut conclure quoi ?

80 E6 : le problème est que, quand on définit la suite de manière récurrente, quand on essaie de résoudre comme ça $f(x) = x$, si on trouve une solution, est ce que cette solution-là, elle est nécessairement la limite de la suite ?

81 E5 : Non, si vous voulez, vous faites… Essayons de trouver une suite qui soit non convergente, une suite récurrente, non convergente telle que l'équation-ci admette des solutions.

82 E7 : C'est ça que je cherche. Avant de parler de l'équation $f(x) = x$, on définit d'abord la critère de convergence, voir d'abord si la suite est convergente avant d'étudier les solutions.

83 E5 : Avant de trouver les solutions de l'équation-là.

84 E7 : On voit d'abord si la suite est convergente. Si ta suite est convergente, tu peux utiliser les solutions de l'équation $f(x) = x$. Par exemple tu as des suites qui ont croissantes et majorées, et dès que tu le sais, tu sais que c'est convergent. Tu résous l'équation $f(x) = x$,

85 E5 : Une personne parle

86 E6 : moi, j'ai réfléchi comme ça : Si elle a deux solutions, elle peut être bornée par les deux solutions-là

87 E7 : essayons de construire une suite

88 E5 : Le problème qui est là, c'est que pour être clair, trouvons une suite, qui est récurrente et non convergente, mais pourtant, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. C'est tout ! si on réussit à trouver pareille suite …

89 E6 : c'est fini.

90 E5 : Donc en fait, moi je pense qu'on ne peut absolument rien dire.

91 E6 : Une suite récurrente non convergente

92 E5 : Moi je dis, si l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution, on ne peut rien dire sur la convergence de la suite u_n. Donc en fait il s'agit de montrer ici-là que la réciproque de la proposition qu'on a au départ est fausse. C'est la conclusion que moi je tire, donc il s'agit en fait de montrer que la réciproque de la proposition qu'on a est fausse.

93 E7 : Si on prend même la fonction, la suite définie par $u_0 = 1$ et peut-être $u_{n+1} = {u_n}^2$

94 E5 : On a une suite constante, mon garçon, change le 1 là !

95 E6 : mets 2. C'est une suite croissante

96 E5 : elle est croissante, mais elle n'est pas majorée. Est-ce que l'équation…

97 E7 : on veut seulement regarder les solutions de l'équation $f(x) = x$

98 E5 : ça c'est une suite croissante et non majorée, cela veut dire qu'elle n'est pas convergente. Et maintenant, résolvons maintenant l'équation $x = x^2$

99 E6 : On a deux solutions

100 E5 : on a quoi, 0 et 1, n'est ce pas ? Voilà par exemple un cas particulier que tu as pu construire qui justifie que l'on ne peut rien dire à propos de la convergence de la suite. Cette suite est une suite qui est non convergente

101 E6 : tu dis que c'est une suite comment ? C'est une suite qui est ?

102 E5 : ça c'est une suite qui est non convergente. Il y a une proposition dans le cours qui dit je pense, que si une suite est croissante et non majorée, alors la limite tend, la limite est infinie.

103 E7 : Si une suite est croissante et

104 E5 : croissante et non majorée, sa limite est $+\infty$. Et si une suite est décroissante et non minorée, alors sa limite tend vers $-\infty$.

105 E6 : parce que si elle est croissante et majorée, ça sera borné, ça sera, ça sera convergent.

106 J : elle est croissante et non majorée

107 E5 : elle est croissante et non majorée. Elle ne converge pas puisque sa limite sera infinie. Et ici là, quand on résout l'équation $x = x^2$, elle admet deux solutions et pourtant la suite n'est pas convergente. On ne peut rien dire par rapport à la convergence de la suite. Maintenant on continue. Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$ si la suite u_n est convergente ? Bon on sait que si la suite u_n est convergente, elle admet au moins une solution. C'est clair

108 E7 : Maintenant on dit, que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles ? Donc si la suite u_n est convergente il existe, c'est-à-dire, parmi ces solutions, il existera une qui soit la limite de la suite u_n.

109 E5 : cela vaut dire que l'équation-là admet au moins une solution.

110 E7 : Le problème n'est pas de voir si ça admet au moins une solution. Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles ?

111 E5 : Oui, oui.

112 E7 : Tu vois un peu, si elle est convergente, parmi ces solutions, il en existera une unique qui soit la limite de la suite u_n

113 E5 : Et si la suite u_n n'est pas convergente ?

114 E7 : On ne peut rien dire

115 E5 : Si la suite u_n n'est pas convergente, cela veut dire que pour toutes les solutions-là, cela veut dire que si l'on prend n'importe quel élément de R, on aura toujours u_n qui est différent de toutes ces solutions-là. Parce que dès que u_n est égale à une de ces solutions-là, on a la suite qui est constante. Tu vois ça non ?

116 E7 : Attend, tu dis que si u_n n'est pas convergente

117 E5 : si u_n n'est pas convergente cela veut dire que pour tout $l \in R$, u_n n'est ce pas, c'est-à-dire l'écriture des éléments, u_n sera toujours différents de ces éléments-là, ou alors le support de u_n

118 E7 : Attend, attend

119 E5 : Ces éléments ne vont pas appartenir au support de u_n. Si pour tout $l \in R$, alors les solutions ne vont pas appartenir au support de u_n, les solutions de l'équation $f(x) = x$ n'appartiennent pas au support de u_n.

120 E6 : Vous êtes au 6.4 non ?

121 E5 : Oui

122 E7 : On dit « que peut-on dire des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$ si la suite u_n est convergente » ?

123 E5 : la suite u_n est convergente, cela veut dire quoi, cela veut dire que parmi les solutions, il existe au moins une qui soit la limite de la suite

124 E6 : on dit des solutions !

125 E5 : Cela veut dire qu'il existe au moins un x qui soit la limite de la suite.

126 E7 : Il existe un unique.

127 E5 : Il existe un unique qui soit la limite de notre suite. Le second cas maintenant, si la suite n'est pas convergente, cela veut dire que les solutions de l'équation n'appartiennent pas au support de notre suite, tu vois un peu non ?

128 J : Qu'est ce que tu appelles support d'une suite ?

129 E5 : L'ensemble des valeurs prises par la suite. Tu vois un peu.

130 E7 : L'ensemble des termes …

131 E5 : Cela veut dire que nos solutions n'appartiennent pas à son support, pourquoi, parce que si nos solutions appartenaient à ce support-là, cela devait dire qu'il devait exister un n tel que quoi, tel que si u_n était égal à cet élément-là. Et dès que u_n sera égal à cet élément-là, on aura u_{n+1} qui sera encore égal à cet élément-là, u_{n+2} égal encore à celui-là, à la fin elle sera constante à partir de ce rang. Et si elle est constante à partir d'un certain rang, lors elle converge.

132 E7 : mais qu'est ce qui te fait dire que ? Est-ce que la limite est d'abord obligée d'appartenir au support ?

133 E5 : Je dis que, si la suite u_n n'est pas convergente, cela veut dire que toutes ces solutions-ci n'appartiennent pas au support de la suite u_n. Et je voulais maintenant explique rle pourquoi il ne doit pas appartenir. Je suis entrain de dire pourquoi il ne doit pas appartenir, parce que si ça appartenait au support de la suite u_n, dire qu'il devait exister un n dans N tel que quoi, tel que si u_n était égal à une des solutions-là.

134 E7 : Comment ?

135 E5 : qu'il existe un n_0 dans N tel que quoi, tel que si u_{n_0} est égal à une des solutions-là.

136 E7 : et qui vont vérifier ?

137 E5 : Et dès que il est égal à cette solution-là, on aura u_{n_0+1} qui sera encore égal à cet α, et u_{n_0+2} sera égal à α … et on va se rendre compte que la suite sera maintenant bornée à partir d'un certain rang

138 E7 : Constante à partir d'un certain rang

139 E5 : Et si elle est constante à partir d'un certain rang, alors elle est convergente. Donc c'est la raison pour laquelle je dis que ces solutions-là ne doivent pas appartenir au support de la suite u_n. Elle ne doivent pas appartenir à l'ensemble des valeurs prises pas u_n.

139 E7 : Je ne suis pas toujours convaincu. Attend. Tu dis que les solutions n'appartiennent pas

140 E5 : Elles ne doivent pas

141 E7 : Ne doivent pas appartenir au support de la suite u_n

142 E5 : C'est ce que moi je déduis de 6.4

143 J : Bon, je crois que c'est bon avec vous. C'est fini non ? au 6 ?

ANNEXE 4
RETRANSCRIPTION DE LA SCEANCE DE CORRECTION

DU QUESTIONNAIRE DES ETUDIANTS exercices 1, 2 et 3

Exercice 1

1 J : ce que vous faites, vous traitez les six premiers exercices, on va faire 6 et 5. Vous les traitez en groupe, vous essayez de discuter et argumenter pour soutenir vous réponses

2 E2 : Est-ce qu'il faut rédiger ?

3 J : Oui, mais la mise en commun sera orale. Chacun doit défendre ses idées

4 E1 : Nous sommes à la première question. On dit « déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 vérifiant la propriété : « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier » ». On demande de déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 vérifiant la propriété : « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ». Moi, je pense que puisque la propriété s'intéresse aux nombres supérieurs ou égaux à 20 qui vérifient une certaine propriété, il fallait essayer de considérer le fait que le successeur du nombre est premier dans le cas où le nombre lui-même est pair. Ça ne veut pas forcément dire que tous les nombres qu'on doit proposer sont les nombres pairs. Pour cela, je propose que dans l'ensemble qu'on doit donner pour réponse, tous les nombres impairs doivent y figurer.

5 E2 : Tous les nombres impairs ?

6 E1 : Impairs doivent y figurer. Premièrement

7 E2 : Pourquoi ?

8 E1 : Maintenant pour ceux qui sont pairs, on doit extraire de cette liste, ceux dont les successeurs sont premiers.

9 E2: On doit extraire de cette liste, ceux dont les successeurs sont premiers. Je comprends ce qu'il est entrain de dire.

10 E1 : Donc

11 E2 : Je comprends ce qu'il est entrain de dire. Il dit que, vu que c'est pair, dont les successeurs sont premiers, on a plus de chance d'avoir des nombres impairs qui sont des nombres premiers, donc il sort la liste des nombres premiers, des nombres impairs

12 E1 : Prendre tous les nombres impairs qui ne sont pas premiers

13 E2 : C'est pour annuler

14 E1 Attendez, voici ce qu'on demande ; on dit « déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 vérifiant la propriété : « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier » ». Si x est un nombre pair,

15 E2 : Le successeur d'un entier, c'est l'entier qui vient juste…

16 E1 : Oui

17 E2 : Après lui, c'est-à-dire que si on prend 0, son successeur sera 1. 1 est un nombre premier ?

18 E1 : Oui

19 E3 : 1 n'est pas premier

20 E1 : 1 n'est pas premier. Bon, prenons 2, Comme deux est premier,

21 E2 : Deux est pair

22 E1 : Deux est pair, donc son successeur doit être 3. On prend 4. Comme 4 est pair, son successeur va être 5 qui est premier. On prend 6. 6 est pair, son successeur est 7 qui est premier. On va prendre maintenant 8, 8 est pair, mais 9 ne peut pas être son successeur parce que 9 n'est pas premier.

23 E2 : Non, 9 est son successeur, mais n'est pas premier. 8 ne doit pas être pris.

24 E3 : 8 doit être pris, c'est 9 qui ne doit pas être pris.

25 E2 : On doit prendre les nombres dont les successeurs sont premiers.

26 E3 : Même 9.

27 E2 : Pourquoi 9 ? Comprends bien. Si *x* est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier. On prend les nombres qui sont tels que, lorsque ce nombre est pair, son successeur doit être premier

28 E3 : Son successeur doit être premier

29 E1 : Lorsque ce nombre est pair, son successeur c'est là que cette proposition-ci devient valable

30 E4 : On ne peut pas prendre 8

31 E1 : Tu prends 9

32 J : Je voudrais apporter la précision qu'il s'agit de l'ensemble des entiers naturels

33 E1 : Le problème c'est que cette proposition devient valable lorsque le nombre est pair

34 E3 : 9, lui n'est pas pair, c'est pourquoi on ne peut plus appliquer la proposition

35 E4 : Mais neuf est inférieur ou égal à 20 !

36 E1 : On dit les nombres inférieurs ou égaux à 20

37 E1 : Qui sont pairs

38 E2 : On n'a pas dit les nombres inférieurs ou égaux à 20 qui sont pairs et tels que… C'est pas ce qu'on a dit. On a dit que « lorsqu'ils sont pairs »

39 E2 : Est-ce que 9 vérifie la propriété ici ?

40 E1 : Le problème donc c'est que, si *x* est pair, si x est pair, c'est-à-dire que lorsque le nombre 5mn31s que j'ai est pair, c'est là que je m'intéresse à son successeur. C'est ce qu'on veut dire ici, lorsque le nombre est pair, je m'intéresse à son successeur

41 E2 : Si le nombre n'est pas pair ?

42 E1 : Si le nombre n'est pas pair, il d'office là parce qu'on n'a aucune condition sur lui. Tout ce qu'on sait c'est qu'il doit être inférieur ou égal à 20

43 E2 : Vous embrouillez encore l'histoire-ci dans ma tête

44 E1 : Les guillemets s'ouvrent à partir de, après les guillemets on a *si x est un nombre pair*

45 E2 : Ça veut dire qu'on devait prendre 3 ?

46 E1 : je propose que tous les nombres impairs doivent déjà figurer dans l'ensemble –ci.

47 E2 : Tous les nombres impairs ! Je ne suis pas d'accord pour ça. L'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient la propriété *si x est pair, son successeur*

48 E1 : Si, si x est pair

49 E2 : tu as fait l'informatique qu'on faisait, *si* la condition, on faisait *si la propriété est vraie, alors, si la propriété n'est pas vraie, on n'entre rien, on laisse, on saute, on continue.* Ça veut dire qu'ici…

50 E1 : C'est que c'est plus le même énoncé de l'exercice

51 E2 : C'est le même énoncé, c'est comme ça qu'on énonce une condition *si*. On énonce une condition *si*, on donne la propriété, si elle n'est pas vérifiée, on ne s'intéresse pas. En fait, moi je pensais qu'on devait citer tous les entiers inférieurs ou égaux à 20 de manière à ce que, si cet entier est pair, son successeur, c'est comme ça que moi..

52 E3 : Si son successeur est premier, on les

53 E1 : Bon attendez, je vais vous proposer deux énoncés

54 E2 : On va prendre plutôt peut-être 4, 5 et 9. 8 on ne doit pas prendre, 9, on ne doit pas prendre. Tu vois un peu, comme le successeur de 8 c'est 9, 8 est pair et 9 n'est pas premier, cela veut dire que 8 et 9 ne seront pas

55 E3 : Puisqu'ils ne vérifient pas la propriété

56 E2 : Il faut que ça soit tel que son successeur soit premier, c'est-à-dire que, 0 ne sera pas premier parce que 1 n'est pas premier

57 E1 : Bon, écoutez un peu

58 E2 : 4, 3. Je prends 4, je prends

59 E1 : Il faut qu'on s'arrange d'abord ; Il y a 4, je prends 5, je prends 6, je prends 7, je pars encore prendre euh …

60 E2 : Tu prends 7 ? Pourquoi ?

61 E1 : Parce que 6 est premier, 6 est pair et 7 qui est son successeur est premier

62 E2 : Ce ne sont pas les successeurs qu'on prend, ce sont les x qu'on prend. Tu t'intéresses au successeur pour prendre x. Quand on dit que 6 est pair, après 6 c'est 7, 7 est premier, c'est pas 7 que tu prends. Tu prends 6 parce que 7 est premier. La propriété est au niveau de x

63 E1 : Oui, oui, tu as raison. Si x est pair et sinon

64 E3 : Si x est pair

65 E1 : Et sinon ?

66 E2 : Si x est pair et que son successeur est premier

67 E1 : Si x n'est pas pair, qu'est ce qu'on fait ?

68 E2 : Maintenant…, C'est justement.. ;

69 E3 : On ne le prend pas

70 E1 : On ne le prend pas pourquoi ? Si x n'est pas pair, dès qu'il est inférieur ou égal à 20, la condition…

71 E2 : Si x n'est pas pair, x vient maintenant faire quoi dans

72 E1 : je vais vous proposer un énoncé, vous allez me répondre. Si on dit *l'ensemble des nombres inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient la propriété « si x est un nombre pair ... »*. Je vais un peu changer l'énoncé, vous allez me donner vos réponses. Je dis maintenant *Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20 pairs tels que leur successeur est premier ».* Donc, dans ma proposition je n'ai plus les guillemets et je n'ai plus *si*. Si on me dit maintenant *Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20 tels qu'ils soient pairs et que leur successeur soit premier*. Vous allez proposer quoi ?

73 E2 : Tels qu'ils soient pairs

74 E1 : Je n'ai pas mis de condition. Je veux les nombres inférieurs ou *égaux à* 20 tels que leur successeur soit premier

75 E2 : Je prends 4

76 E1 : Maintenant vous allez prendre ce que vous dites là. Vous allez prendre les nombres pairs tels que le successeur soit premier

77 E2 : J'ai changé quoi dans l'énoncé ?

78 E1 : J'ai changé le fait que le *si*, la place du *si*. J'ai imposé une condition pour les nombres qui sont pairs

79 E2 : Entendons-nous

80 E1 : Mais on est entrain de discuter

81 E4 : Est-ce qu'on va s'entendre sans discuter

82 E2 : Moi je pense que dans ce cas, il va falloir que nous prenions 4, nous prenions 6, après 6, quand tu vas encore chercher un nombre pair dont

83 E3 : 6

84 E2 : Dont le successeur est premier

85 E1 : N'oublie pas qu'un nombre entier est soit pair, soit impair

86 E2 : Tout à fait 10mn 18s

87 E4 : On n'a pas besoin de dire que si x est impair, il n'y a pas de condition

88 E1 : On va prendre 10 aussi, 10, il y a 18 aussi. Je pense qu'on s'arrêtera là

89 E2 : Pourquoi vous laissez 12 ?

90 E1 : Oui, 12

91 E3 : 16

92 E1 : 16, oui, 18, je crois que c'est tout

93 E3 : 20 lui même

94 E1 : 20 lui-même, voilà ce que nous avons trouvé

95 E3 : 21 n'est pas premier

96 E2 : 21 n'est pas premier. Donc c'est-à-dire, 4, 6

97 E4 : Moi justement, je pense que si on propose ceci, on n'a pas répondu à cette question

98 E2 : Prenons un peu ta proposition aussi. 4,

99 E1 : Non, commence à 1, j'ai dit tous les nombres impairs. Dans la liste-ci, tu as tous les nombres impairs

100 E2 : 3. Les nombres impairs vérifient quelles conditions là-bas ?

101 E3 : Non, laisse

102 E1 : Les nombres impairs ne sont pas influencés par la condition-ci.

103 E2 : Ca veut dire que le nombre impair ne fait pas partie de l'ensemble

104 E1 : Non, la condition-ci ne me donne pas l'ensemble, ça me donne une condition sur une partie de l'ensemble. La partie des nombres pairs

105 E2 : Ca veut dire que tout nombre que tu dois prendre doit vérifier ça

106 E1 : Oui

107 E2 : Ton nombre impair vérifie ça ?

108 E1 : Mon nombre impair n'est pas pair, c'est pourquoi je n'ai même pas besoin de regarder

109 E2 : Quand on définit par exemple une fonction par *f(x)=1* si par exemple $x \neq 0$ et $f(0) = 2$ La première condition ne concerne pas

110 E4 : Ca concerne une partie, est ce que parce que l'autre n'est pas dans les x négatifs qu'il ne va pas être dans l'ensemble de définition

111 E1 : Parce que, regarde un peu la phrase « Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 20. On se place d'abord dans l'ensemble des nombres inférieurs ou égaux à 20.

112 E4 : Premièrement …

113 E2 : Quand …

114 E4 : Maintenant dans l'ensemble là

115 E2 : Quand il est pair, quand il est pair

116 E1 : On doit déjà prendre tous les impairs

117 E2 : Quand il est pair

118 E1 : Et prendre les pairs sous la condition qu'on nous a donnée

119 E3 : On a deux propositions

120 E1 : On doit déjà prendre tous les impairs parce que l'ensemble des nombres pairs et impairs forment une partition de ℕ. On a d'un côté les nombres pairs et les nombres impairs. Comme on nous a donné la propriété sur les nombres pairs, on prend d'abord tous les impairs inférieurs ou égaux à 20 parce que la propriété ne les intéresse pas. C'est qu'il y a deux parties dans l'ensemble

121 E4 : La propriété est rigoureuse juste pour une partie

122 E1 : Pour les pairs

123 E4 : La deuxième partie, on n'a pas de condition, l'essentiel c'est qu'il faut qu'il soit inférieur ou égal à 20

124 E1 : Ouai. C'est-à-dire qu'on va prendre tous les impairs et pour les pairs, on va prendre ceux dont le successeur est premier.

Exercice 2 13mn 26s

125 E4 : Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont vraies ; celles qui sont fausses et celles pour lesquelles on ne peut pas se prononcer. Vous justifierez soigneusement vos réponses. On se place dans la géométrie euclidienne classique enseignée au collège et au lycée

Première question : dans un losange les diagonales sont perpendiculaires

126 E1 : Dans un losange

127 E4 : Vrai

128 E1 : D'abord c'est quoi un losange ?

129 E3 et E4 : C’est évident

130 E1 : La justification maintenant, c’est ça qui est important

131 E3 : Un losange c’est, comment dire

132 E1 : Quadrilatère

133 E4 et E1 : dont les diagonales sont perpendiculaires qui ont quatre

134 E1 : C’est une figure géométrique qui a quatre côtés

135 E4 : Un quadrilatère ? Non, non, le losange a souvent les côtés

136 E1 : Je dis quatre côtés deux à deux égaux et dont les diagonales sont perpendiculaires. C’est la définition du

137 E3 : Est-ce que ceci est un losange ? Montre une figure comme celle de l’analyse *a priori*

138 E1 : Oui, non. Avec la définition d’un losange, ça c’est un losange

139 E4 : Ca c’est pas un losange. La définition du losange, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu

140 E1 : C’est que c’est bon.

141 E2 : Même le carré c’est un losange

142 E4 : Puisqu’on dit que dans un losange les diagonales sont perpendiculaires

Le 2.1. est donc vrai

143 E4 : Dans un losange les diagonales sont perpendiculaires. C’est vrai

144 E1 : Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange

145 E3 et E4 : Faux

146 E1 : C’est faux. Est-ce qu’on peut trouver un quadrilatère

147 E2 : Certains trapèzes

148 E4 : Comme c’est faux, on donne un contre-exemple, c’est tout

149 E2 : Certains trapèzes

150 E1 : Même un rectangle contredit ça !

151 E4 : Est-ce que les diagonales d’un rectangle sont perpendiculaires ?

152 E1 : Est-ce que les diagonales d’un rectangle sont perpendiculaires ?

153 E4 : Et si tu contredis

154 E1 : Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne se coupent pas en leur milieu

155 E3 : Qui n'est pas un losange

156 E2 : Il suffit que les deux diagonales n'aient pas la même longueur, non, ne se coupent pas au milieu

157 E4 : il suffit que les deux diagonales ne se rencontrent pas en leur milieu pour que ce ne soit pas un losange**15mn 53s**

158 E4 : Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré

159 E3 : Voilà comment j'ai raisonné ici. Je dis, si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle ça fait vérifier une proposition fausse. Les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle. Un rectangle ne peut pas avoir des diagonales perpendiculaires. Ca c'est une proposition qui est fausse, *alors* c'est l'implication

160 E4 : Pourquoi un rectangle ne peut pas avoir des diagonales perpendiculaires

161 E2 : Quelle est la définition d'un rectangle ?

162 E3 : Un rectangle c'est un parallélogramme qui a quatre côtés deux à deux parallèles…

163 E4 : Bon est ce que le carré est

164 E1 : Dis que c'est une figure géométrique, ne dis pas parallélogramme

165 E3 : Oui, c'est une figure géométrique

166 E1 : Voilà un rectangle. Une figure géométrique, tu as quatre côtés deux qui soient longs et qui sont deux à deux parallèles, c'est tout

167 E3 : Exactement, ça va.

168 E2 : Le côté-ci est égal à ça.

169 E4 : Est-ce que ce n'est pas un rectangle ?

170 E1 : Le carré est d'abord un rectangle, c'est ça que je suis entrain de dire ? Le carré est d'abord un rectangle.

171 E4 : Un parallélogramme avec un angle droit

173 E4 : Non mais la longueur est égale à la largeur

174 E1 : C'est ça que je suis entrain de dire

175 E3 : Jamais. Quand la longueur est égale à la largeur c'est un rectangle ? C'est un carré !

176 E1 : Le carré est un rectangle

177 E3 : Non

178 E4 : Le carré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux

179 E3 : c'est … je n'ai jamais entendu ça

180 E4 : On apprend chaque jour

181 E1 : Tu viens d'apprendre alors

182 E4 : Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré. Là, je crois que c'est vrai

183 E1 : C'est vrai. Moi j'ai trouvé que c'est vrai avec mon raisonnement. Lui, il disait qu'une proposition fausse qui entraine une proposition fausse est vraie

184 E2 : Si on se place dans le cas de $P \Rightarrow Q$, si P est faux, on peut s'arrêter. $P \Rightarrow Q$ sera vrai.

185 E4 : Je crois que son raisonnement doit être vrai

186 E3 : C'est comme ça que j'ai réfléchi

187 E4 : Non, non, comment vous pouvez dire ça ? Tu ne peux pas commencer avec un truc qui est faux ici et que tu dis que tu vas toujours te baser sur ça. C'est pas la même chose

188 E3 : Si on me donne une proposition qui est fausse, une proposition fausse va toujours entrainer une proposition fausse, que ça c'est vrai ou vrai…

189 E1 Oui c'est vrai.

190 E2 Ce n'est pas donc faux, c'est dans le cas de l'implication.

191 E3 Jusqu'à présent, je sais que ceci est faux (parlant de la prémisse), à moins que madame ne vienne nous prouver que c'est vrai

192 E4 : Non mais sincèrement, un carré est un rectangle

193 E1 : La définition du rectangle, je n'ai pas dit une définition

194 E3 : C'est un quadrilatère qui a un angle droit

195 E2 : Non c'est un parallélogramme

196 E4 : Un parallélogramme qui a un angle droit

197 E3 : Alors tu peux donner ça aux enfants de l'école primaire comme définition du rectangle ?

198 E4 : C'est ce que j'ai vu dans le livre

199 E 3 : Mais c'est ce qu'on donne aux enfants

200 E2 : Un parallélogramme qui a un angle droit

201 E1 : Un parallélogramme qui a un angle droit, à l'école primaire ?

202 E3 et E1 : Oui

203 E1 : Je n'ai jamais entendu

Un rectangle est un parallélogramme qui a quatre côtés deux à deux égaux de même longueur

204 E4 : Un parallélogramme c'est quoi ? Deux à deux

205 E1 : Un rectangle c'est un parallélogramme qui a quatre côtés deux à deux parallèles et de même longueur

206 E2 : Un parallélogramme a déjà ça. Quand tu dis deux côtés de même longueur, un parallélogramme a déjà ça. **19mn 49 s**

207 E1 : Deux à deux de même longueur

208 E4 : Un parallélogramme a déjà ça.

209 E1 : Le carré est un parallélogramme

210 E4 et E3 : Oui

211 E1 : Le carré est un parallélogramme, mais le carré n'a pas la pression que deux à deux de même …

212 E1 : Le carré est un parallélogramme, mais c'est plus qu'un parallélogramme

213 E4 : C'est un parallélogramme qui a encore d'autres propriétés

214 E1 : C'est un cas particulier

215 E4 : Tu penses que quatre comme ça nous sommes égaux ? On ne peut pas dire que nous sommes égaux deux à deux ? Tu penses qu'on ne peut pas dire ça ?

(Rire)

216 E3 : C'est très différent

217 E4 : C'est différent comment ?

218 E3 : On parle de deux longueurs

219 E4 : Donc quand tu traitais les propriétés de grand l et petit l au cours moyen deux tu avais exclu le cas où grand l peut être égal à petit l ?

220 E3 : Oui

221 E4 : On dit que grand l est un nombre, petit l est un nombre

222 E2 : Dans tous les cas tu as établi que c'est vrai, non ?

223 E1 : Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré, là c'est vrai.

Exercice 3
224 E2 : Donner la négation de chacune des phrases suivantes : toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

225 E4 : On demande la négation.

226 E2 : Bon, moi je propose. On dit « toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges », c'est-à-dire que quelque soit la boule qui se trouve dans l'urne, elle est rouge. On peut trouver des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges.

227 E3 : Il existe des boules dans l'urne, il existe des boules dans l'urne qui ne sont pas rouges.

228 E1 : Qui ne sont pas rouges.

229 E2 : Bon si on veut mettre ça sous forme d'implication ?

230 E1 : D'implication, tu veux dire quoi ?

231 E2 : Quelque soit …, Il faut laisser ça comme ça.

232 E2 : On peut mettre ça sous forme d'implication, on peut

233 E1 : Quelque soit x appartenant à

234 E2 : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges. On peut prendre que la proposition P ici c'est quoi ?

235 E1 : Les boules qui sont dans l'urne. Non, P par exemple « x est dans l'urne ».

236 E2 : Quelque soit la boule dans l'urne

237 E1 : Non, x dans l'urne, pour tout x dans …………………x est rouge

238 E3 : Quelque soit x dans l'urne,

239 E2 : x est rouge

240 E1 : On ne peut pas mettre ça sous forme d'implication

241 E3 : Ca ne peut aller sous forme d'implication

242 E1 : Ca ne peut aller sous forme d'implication

243 E3 : La négation c'est simplement comme on fait là

244 E4 : Donc tu penses que ça c'est faux ?

245 E2 : Ce n'est pas forcément faux. Quelque soit la boule qui est dans l'urne, si une boule est dans l'urne, alors elle est rouge.

246 E1 : Et si tu veux donner la négation de ça, ça va t'embrouiller

247 E2 : Non, pourquoi ?

248 E3 : Il existe des boules dans l'urne et

249 E1 : Voilà, c'est absurde, c'est bizarre

250 E2 : Absurde comment ? Il existe des boules dans l'urne mais qui ne sont pas rouges

251 E3 : Il faut alors mettre une conjonction

252 E1 : Ces boules ne sont pas rouges, et une conjonction

253 E2 : Bien sûr

254 E1 : Et une conjonction

255 E2 : Quand on dit « et », on peut aussi mettre « mais », oui, on peut aussi mettre « mais ». Il existe des boules dans l'urne mais qui ne sont pas rouges. **22mn 43s**

256 E3 : Ca ne contredit même pas ce qu'on a dit

257 E4 : Il faut qu'on s'arrête à ça

258 E1 : Certains nombres entiers sont pairs

259 E2 : Certains nombres entiers sont pairs **22mn 58s**

ANNEXES 5 : RETRANSCRIPTION EXERCICES 7, 8 ET 10

Groupe 1 :

- E1 Bonyohé
- E2 Martial
- E3 Ngougni
- E4 Zang

Groupe 2 :

- E5 : Enopa
- E6 : Nzemeni
- E7 : Sokeng
- E8 : Etoundi Gilles

Exercice 7

1 P : c'est le 7, 8, 9, 10 et 11, il y en a quatre. C'est 5, il y en a 5.

2 E5 : on dit, que pensez-vous de la propriété suivante : pour tout nombre réel x (lecture de l'exo 7). Qu'est ce qu'on pense de la proposition suivante ?

3 E2 : Moi je pense qu'elle est fausse, parce que x<y et y<x est une proposition fausse. Ça c'est faux, une proposition fausse qui entraine quelque chose qu'on ne sait si c'est vrai ou c'est faux.

4 E1 : on a dit que …

5 E5 : ça c'est une implication, n'est ce pas ? elle est fausse dès que la proposition de euh…dès que la proposition qui… qui…, dès que la proposition Q, comme on peut écrire P⇒Q, dès que la proposition est fausse. Là l'implication est toujours vraie ou elle est toujours fausse ? Elle est toujours vraie. Non, elle est fausse lorsque la première propo….

6 E7 : lorsque P est vrai et Q faux. C'est là où c'est toujours faux.

7 E2 : Attends, si la proposition-ci est fausse, si la première proposition-ci est fausse, elle doit toujours impliquer une vérité, quand …

8 E7 : Non, si elle est fausse, l'implication est d'office vraie

9 E2 : Donc comme c'est faux, x, donc c'est toujours vrai.

10 E1 : oui, ça va, c'est une implication toujours vraie.

11 E5 : parce qu'on ne peut pas avoir en même temps x<y et y<x, donc l'implication est toujours vraie. Parce que la première proposition est fausse.

Exercice 8
(c'est E5 qui continue de parler) **Maintenant on dit, indiquez dans la liste suivante lecture de l'exo 8**. On demande d'indiquer dans la liste, les intervalles qui vérifient ça. Bon, ici, 8.1 j'ai trouvé deux intervalles. J'ai trouvé les intervalles $[0, 1[$ et $[-5, +\infty[$. Voilà les deux intervalles que j'ai trouvé qui vérifient le 8.1. On dit pour tout a dans I, n'est ce pas, si on prend un quelconque élément dans I, alors on va toujours trouver un élément dans b, et ce b-là va dépendre du a. On peut toujours trouver un élément dans b, dans I, tel que a soit toujours strictement inférieur à b. Et moi j'ai trouvé deux intervalles

12 E7 : il n'y a que 2 et 3 (les mêmes que E5 a cités), fermé $[0,1[$et fermé $[-5, +\infty[$. On ne peut pas prendre le premier parce que 0 n'appartient pas à cet intervalle. Si tu prends 0, tu auras… 0 n'appartient pas d'abord.

13 E5 : Ce n'est pas ça, ce n'est même pas question de 0 parce que si tu prends par exemple $a = 1$, tu ne peux pas trouver un élément b dans I tel que $a < b$. C'est la simple raison.

14 E7 : Ah, oui.

15 E5 : si tu prends $a = 1$, ça ne marche pas. De même dans 4) si tu prends $a = 1000$ ça ne marche pas.

16 E7 : Il n'y a que les deux intervalles

17 E5 : **Maintenant 8.2 lecture.** Là je n'ai trouvé aucun intervalle qui marche. On peut trouver un élément b, un peu comme si c'était le maximum

18 E7 : non

19 E5 : un peu comme si c'était le maximum.

20 E7 : Comme si b était le max ?

21 E5 : b c'est le max, et quand tu vois même b là. Même pas que b c'est le max, b c'est pas le max

22 E7 : b c'est le max

23 E5 : c'est… si b était le max, n'est ce pas, ça allait être $a \leq b$. Ce n'est pas le max

24 E4 : mais c'est un max

25 E5 : c'est un majorant

26 E7 : c'est un majorant

27 E5 : il y a quelque chose de bizarre, puisqu'il est dans I, ça ne peut pas être vrai ! On ne peut pas trouver un pareil élément

28 E7 : b c'est un majorant

29 E5 : b est un élément de I, et si on prend un x quelconque élément de I, ces éléments-là sont plus petits que b. moi je n'ai trouvé aucun intervalle qui marche.

30 E2 : c'est une autre chose !

31 E5 : il faut être d'accord

32 E7 : ça ne marche pas, il n'y a aucun…6mn 22s puis **11mn, 46s,** exo 10

Exercice 10
33 E2 : lecture exo 10

34 E7 : quel que soit n appartenant à 2Z

35 E2 : non, oui. Pour tout n appartenant à 2Z

36 E7 : $n \geq 4 \Rightarrow$, implique il existe u et v

37 E5 : quand on dit c'est comme si… -4 c'est un nombre pair ?

38 E7 : hein ?

39 E5 : -4 ?

40 E2 : oui, -4 est pair

41 E7 : on a dit entier, on n'a pas dit entier naturel.

42 E5 : et -4 est pair n'est ce pas ?

43 E7 : quand je dis quel que soit n appartenant à 2Z,

44 E2 : oui, 2Z est toujours pair.

45 E7 : oui, 2Z

46 E2 : 2Z est toujours pair

47 E7 : quel que soit n appartenant à 2Z,

48 E2 : C'est l'ensemble des entiers pairs !

49 E7 : n $\geq$ 4 implique il existe

50 E2 : tu vas matérialiser, tu va écrire en langage formel les nombres premiers comment ?

51 E3 : il existe u et v, u et v appartenant à Z tels que

52 E2 : attention

53 E7 : il existe u et v, a et b, tels que $au + bv = 1$. N'est ce pas ?

54 E2 : attention, quand tu écris comme ça, quand tu $au + bv = 1$, qu'est ce qui te fait croire que c'est a et b qui sont des nombres premiers ou

55 E7 : ils ont dit, tout entier pair, supérieur ou égal à 4 est la somme

56 E2 : de deux nombres premiers.

57 E7 : est la somme de deux nombres premiers.

58 E5 : Moi j'ai dit que pour tout n appartenant à N, il existe k appartenant à N tel que n=2k , $n \geq 4$ implique il existe a, b premiers tels que $n = a + b$.

59 E2 : Non, c'est pour tout n appartenant à N, pas égal à Z.

60 E7 : pourquoi ?

61 E5 : Si c'est égal à Z, c'est qu'il y a problème.

62 E2 : Le problème viendra de quoi ?

63 E5 : Quand je dis que deux nombres sont premiers

64 E7 : Ah, oui, oui, oui.

65 E5 : c'est lorsqu'ils ont quatre diviseurs.

66 E2 : $-1, 1$, lui-même et son opposé. On ne peut pas écrire nombre premier en langage formel ?

67 E5 : Moi, j'écris a, b premiers, point. On ne peut par hasard prendre grand P ? l'ensemble des nombres premiers ?

68 E7 : C'est P dans le livre, je ne sais pas si c'est une notation

69 E5 : générale ? est ce que les nombres premiers sont seulement dans N ?

70 E7 : Tu dis ?

71 E5 : ce que les nombres premiers sont seulement dans N ?

72 E7 : Si $n \geq 4$, ça veut dire qu'on se situe déjà dans n.

73 E2 : Non, non, tu ne dois pas dire n

74 E5 : -7 est un nombre premier, n'est ce pas ?

75 E7 : Oui, -7 est premier.

76 E5 : si tu fais -7+9, ça donne 2. Attends un peu. Si tu fais par exemple

77 E7 : Si tu fais -7+11, ça donne 4.

78 E5 : C'est vrai, ceci est vari, la propriété-ci est vraie.

79 E6 : Quelle propriété ?

80 E5 : Celle-là, la proposition est vraie

81 E6 : Comment tu peux dire que c'est vrai ?

82 E5 : La proposition est vraie

83 E5 : C'est il existe que tu as écrit comme ça ? a et b appartenant à Z^2, et … ce que tu écris là c'est pour dire qu'ils sont premiers entre eux.

84 E2 : Quand tu écris au+bv=1, ça veut dire qu'ils sont premiers entre eux

85 E5 : Quelle est la définition de nombre premier ? Un nombre premier est un nombre qui a quatre diviseurs, -1, 1, lui et son opposé.

86 E2 : Mieux vaut dire premier, parce que quand tu regardes bien, il n'y a pas de formule pour obtenir un nombre premier. Tu ne peux pas facilement trouver une formule qui va te permettre de trouver un nombre premier.

87 E7 : On a dit en langage formel

88 E2 : Oui, c'est le mot premier là… en langage formel

89 E5 : Bon, moi… Toi, tu écris quoi ? montre un peu ce que tu écris.

90 E7 : pour tout n appartenant à 2Z

91 E5 : 2Z c'est quoi ?

92 E7 : c'est l'ensemble des nombres pairs

93 E5 : et quand on te dira que n est impair ? tu devais écrire quoi ? 2Z+1 ?

94 E2 : oui, si tu dis 2Z+1, c'est impair non ?

95 E5 : je ne pense pas que c'est impair.

96 E7 : Non 2Z c'est

97 E2 : L'ensemble des entiers pairs.

98 E5 : je ne refuse pas. nombre impairs ? On va écrire 2Z+1

99 E2 : (Montrant les deux écritures) ça, les deux ci c'est la même chose, parce que quand tu prends ton k appartient à Z, non ? alors, c'est la même chose ! ton k est dans Z

100 E5 : et comme k est un groupe, 2Z c'est l'ensemble des éléments qui s'écrivent 2k

101 E2 : Oui ! k appartenant à Z

102 E7 : Comment on écrit l'ensemble des diviseurs

102 E2 : C'est D. L'ensemble des diviseurs de 24 par exemple, c'est D(24)

104 E7 : C'est un singleton (désignant les diviseurs d'un nombre premier qu'il a nommé)

105 E5 : C'est un quadruplet

106 E7 : C'est sous forme de

107 E2 : c'est l'ensemble des diviseurs d'un nombre entier

108 E7 : l'ensemble des diviseurs de a est égal à $\{1, a\}$, l'ensemble des diviseurs de b est égal à $\{1, b\}$.

109 E2 : parce que le mot premier, ça fait un genre

110 E6 : ça ce n'est pas un nombre premier. Je pense que c'est l'ensemble des diviseurs positifs. Mais quand on dit un nombre premier, il a quatre diviseurs, -1, 1 lui-même et son opposé. Tu as agrandi le cercle. Bon comment

111 E2 : je pense que c'est aussi une écriture pour les nombres premiers, c'est-à-dire qu'il a l'ensemble des diviseurs, 1, -1, lui-même et son opposé. (21 mn 35s)

ANNEXES 6 : LES TABLEAUX DES REPONSES

Exercice 1

Tableau T1(3)

Tableau des réponses des élèves

CODE ETUDIANT	REPONSE
L01, L06, L44, L61	A2* : 4 personnes
L02, L13	Tous les nombres pairs (A6)
L08	A6 $\{2, 4, 8, 12, 14, 18, 20\}$
L09	A6 $\{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
L10	A6 $[0\ ;\ 9]$
L07, L11, L12, L18, L28, L35, L36, L40, L42, L45, L47, L48, L52, L55, L57, L59, L60	**A2** : 17 personnes
L16, L27, L31	**A5** $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
L03, L05, L14, L15, L17, L19, L20, L21, L22, L23, L24, L25, L26, L37, L38, L41, L43, L50, L56	**A7 Pas de réponse** : 19 personnes
L29	A3*
L30	A6 $\{5, 7, 13, 19\}$
L32	A6 (A2* et 0)
L33	A6 $\{0, 4, 6, 10, 13, 16, 19\}$
L34	A6
L46	A6 $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20\}$
L49	A6 :1, les nombres pairs et les premiers sauf 0, 5(voir copie)
L04	A6 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19\}$
L51	A6 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20\}$

Exercice 2

Enoncé 2.2 : ***Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.***

Tableau T2(…)

CODE ETUDIANTS	JUSTIFICATION DES REPONSES
E06	Les diagonales du carré sont perpendiculaires
E14	Nous avons l'exemple du carré
E19	Le carré est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires
E25	Le carré n'est pas un losange
E26	Cas du carré qui n'est pas un losange
E27	Cas du carré
E28	Cas du carré
E30	Cas du carré
E32	Cas du carré
E39	Cas du carré
E45	Le carré aussi
E46	Cas du carré
E50	Cas du carré
E56	Cas du carré
E57	Cas du carré
E62	Cas du carré
E66	Cas du carré
E67	Cas du carré
E35	Cas du carré qui n'est pas **forcément** un losange
E29	Dessin : le cerf volant est un quadrilatère dont les diagonales sont

	perpendiculaires
E36	Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires n'est pas un losange ; en exemple, dessin d'un trapèze
E38	Dessin d'un cerf volant
E47	Dessin d'un trapèze
E49	Dessin d'un trapèze
E53	Dessin d'un cerf volant
E54	Dessin d'un cerf volant
E17	Car c'est le carré
E41	Le losange n'est pas la seule figure aux diagonales perpendiculaires
E12	On peut construire un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pas un losange
E34	On peut construire un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pas un losange
E18	Pour les mêmes raisons qu'au 2.1 (ce sont les supports des diagonales qui sont perpendiculaires)
E59	Les côtés doivent être égaux et parallèles

Enoncé 2.3 :

REPONSES DES ETUDIANTS

Tableau T2(20) : réponses VRAI

CODE ETUDIANTS	**JUSTIFICATIONS DES REPONSES**
	2a : antécédent faux et application des règles de vérité de l'implication
E17	Antécédent faux et conséquent vrai, donc implication vraie
E19	Antécédent vrai et conséquent vrai, donc implication vraie
E26	La proposition de départ est fausse
	Réciproque
E12	Un carré est un losange particulier donc ses diagonales sont perpendiculaires, de plus, un rectangle possède au moins un angle droit
E14	($c(x)$ ou $x \in \mathcal{L}$)$\Rightarrow d(x)$, et $c(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x)$
E29	Le carré a quatre angles droits et ses diagonales sont perpendiculaires

E38	Un carré est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires
E39	Un carré a des diagonales perpendiculaires
	2d
E36	Démonstration basée sur le dessin d'un rectangle non carré qui a des diagonales perpendiculaires (pas bonne)
	Antécédent vrai et déduction mathématique du conséquent
E46	Le seul rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est le carré
E49	Un rectangle a ses quatre côtés perpendiculaires entre eux, si en plus les diagonales sont perpendiculaires, c'est un carré.
E47	D'après la définition du carré
E50	Par définition du carré
E53	Les quatre côtés du carré sont égaux et deux à deux parallèles
E06	Pour qu'un rectangle devienne un carré, il faut que ses diagonales soient perpendiculaires
E20	Dans un rectangle, si les diagonales ne sont pas perpendiculaires, alors les côtés sont égaux deux à deux. Donc si les diagonales sont perpendiculaires, alors tous les côtés sont égaux et on a donc un carré
E52	Un rectangle a des diagonales qui se coupent en leur milieu mais ne forment pas un angle droit, or un carré a des diagonales perpendiculaires
E63	Le carré est un rectangle dont la longueur est égale à la largeur
	Autres justifications
E51	Un losange est un carré particulier
E66	Contrairement au rectangle, les diagonales du carré passent par le milieu des sommets et se rencontrent au centre du carré formant ainsi quatre triangles isocèles dont les angles à la base mesurent 45° et l'angle au sommet 90°
E18	« Dénomination pas correcte »

REPONSES DES ELEVES

***<u>Enoncé 2.2</u>* : Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.**

Tableau T2(21)

CODE ELEVES	REPONSES
	VRAI
L03	Vrai, c'est une propriété du losange
L01, L02, L07, L09, L13, L16, L41, L43,	Vrai

L47, L48, L50, L56, L60 (13)	
L36	Vrai, définition
	VRAI : LES CÔTES SONT EGAUX
L04, L15, L20, L23, L28, L35, L37, L39	(8) Vrai, car les 4 côtés sont égaux
L25	Vrai car 4 côtés 2 à 2 égaux, ainsi chaque est perpendiculaire à l'autre
L53	Vrai car les côtés sont perpendiculaires et parallèles deux à deux
L10	Vrai car il y a au moins deux côtés égaux associés
L17	Vrai car un losange est un quadrilatère aux côtés deux à deux parallèles de même mesure et dont l'une des diagonales est le double de l'autre
	VRAI : DESSIN
L06, L11, L22, L31, L61 (5)	Vrai, avec le dessin d'un losange
L27	Oui, dessin et théorème de Pythagore
	VRAI : Association de deux triangles isocèles
L19	Vrai car le losange est formé de deux triangles isocèles
L40	Vrai car le losange est une superposition de deux triangles isocèles ayant un côté commun qui est l'une des diagonales et ayant une médiatrice qui est la deuxième diagonale
L34	Vrai, car le losange est formé de deux triangles isocèles et semblables. En prolongeant la hauteur du premier triangle sur le second, on retrouve la hauteur de ce dernier et la hauteur des deux triangles liant les deux sommets qui n'est autre qu'une diagonale est perpendiculaire à la base commune aux deux triangles qui est aussi une diagonale, d'où les diagonales sont perpendiculaires dans le losange.
	VRAI : LES DIAGONALES
L21, L24, L29, L30, L32, L33, L46, L51, L52 (9)	Vrai, les diagonales du losange se coupent en formant un angle droit **(8 personnes)**
L38	Vrai car les deux diagonales passent par le milieu du losange et se rencontrent en un point formant ainsi un angle de $\frac{\pi}{2}$
L44	Vrai car le losange est un parallélogramme et les diagonales d'un parallélogramme se coupent en formant un angle droit
L49	Vrai car elles sont concourantes en un point
L54	Vrai car dans un losange, la plus grande diagonale est la médiatrice de la petite
	VRAI : LES ANGLES
L26	Vrai car les sommets des angles sont toujours opposés deux à deux
	VRAI : LE CARRE
L42	Vrai car le losange est un carré et les diagonales d'un carré sont toujours perpendiculaires
L45	Vrai car c'est un carré incliné
L59	Vrai car le losange est un carré particulier et les diagonales d'un carré sont perpendiculaires

L08	Vrai car losange association de deux carrés. Or dans le carré, les côtés successivement sont égaux et perpendiculaires donc les diagonales dans les losanges sont perpendiculaires
	FAUX
L14	Faux car les côtés sont égaux deux à deux dans certains cas et le losange est une forme irrégulière de quadrilatère
	ONPPS
L05	ONPPSP car le losange ayant 4 côtés égaux, un quadrilatère peut aussi avoir des diagonales perpendiculaires
	Pas de réponse
L12, L18, L55, L57, L58 **(5)**	

Tableau T2(21)

CODE ELEVES	**REPONSES 2.2**
L03, L12, L18, L22, L42, L51, L55, L58	Aucune réponse
L10	Vrai si les diagonales se coupent en leur milieu et faux sinon
L01	ONPPSP car elle a un caractère vrai mais on ne peut dire forcément que le losange se définisse de cette manière
L04, L06, L07, L17, L19, L21, L34, L48, L52, L59	ONPPSP
L14	ONPPSP car un losange peut être soit un carré, soit un rectangle, et les diagonales d'un rectangle ne sont pas perpendiculaires
L15	ONPPSP car les 4 côtés ne sont pas égaux
L24	ONPPSP car dans le parallélogramme aussi les diagonales se coupent en formant un angle droit
L27	Oui si c'est carré et non si c'est un rectangle parce qu'il n'a pas 4 côtés égaux
L33	ONPPSP car vrai pour d'autres quadrilatères tels que le rectangle et le carré
L36	ONPPSP car dépend de la position des points que l'on choisit dans le quadrilatère ????
L39	ONPPSP car pour un quadrilatère convexe, seulement deux côtés sont parallèles entre eux
L44	ONPPSP car le losange n'est pas le seul quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires, nous avons aussi le carré et bien d'autres
L46	ONPPSP car il faudrait que les segments de celui-ci soient deux à deux égaux
L49	ONPPSP car se vérifie pour d'autres quadrilatères que le losange
L60	Pas toujours vrai

L02, L16, L35, L43, L50, L61	Faux
L05	Faux car le losange est formé de 4 côtés égaux
L08	Faux car le rectangle a les diagonales perpendiculaires mais n'est pas un losange
L09	Faux car il peut aussi être un parallélogramme
L11	Faux car les diagonales du carré qui est un quadrilatère convexe sont perpendiculaires ; il existe au moins un quadrilatère convexe (carré) dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne soit pas un losange. Dessin du carré
L20	Faux car le carré est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires
L25	Faux car un losange a 4 côtés deux à deux égaux ce qui n'est pas le cas dans un quadrilatère convexe
L26	Faux car un quadrilatère convexe peut être un rectangle, un carré
L40	Faux car un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires peut être un carré
L41	Faux car le carré est un quadrilatère convexe mais il n'est pas un losange parce qu'il a des diagonales égales
L45	Faux, un quadrilatère convexe ne peut pas être un losange
L53	Faux car les côtés n'ont pas la même longueur
L54	Faux car dans un losange les côtés sont deux à deux égaux et les diagonales sont perpendiculaires,
L30, L31, L38, L47,	Vrai
L13	Vrai car dans un carré ou un losange les diagonales ne sont pas perpendiculaires, mais dans le losange elles le sont
L23	Vrai car le quadrilatère admet à ses sommets des angles de même mesure lorsque la diagonale coupe ces angles
L28	Vrai car si les diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un losange parce que les côtés seront tous égaux, par conséquent les diagonales sont perpendiculaires
L29	Vrai car tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle
L32	Vrai en effet, si leurs côtés sont deux à deux égaux et plus l'angle droit
L37	Vrai car un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires a 4 côtés égaux donc est un losange
L56	Vrai car un losange a des diagonales perpendiculaires donc un quadrilatère ayant cette propriété est un losange
L57	Vrai parce que ses angles sont opposés et complémentaires

Exercice 3

Tableau T3(1)

CODE ETUDIANT	3.1	3.2	3.3	3.4
E09	NM	NM	NM	NM1
E36	NM	NM	NM	NM1
E43*	NM	NM	NO	NM1
E21*	NM	NM	NO	NM1
E46*	NM	NM	NO	NM1
E47*	NM	NM	NM	NM2* g
E22**	NM	NM	NO	NM2 g
E26**	NM	NM	NO	NM2 g
E42**	NM	NM	NO	NM2* g
E68**	NM	NM	NO	NM2* g
E23**	NM	NM	NO	NM2*g
E65*	NM	NM	NO	QL
E35	NM	Tous ne pas	NM	NM1
E15*	NM	Tous ne pas	NO	NM1
E18*	NM	Tous ne pas	NO	NM1
E45**	NM	Tous ne pas	NO	Autre réponse
E50*	NM	Tous ne pas	NO	Autre réponse
E02*	NM	Tous ne pas	NO	Pas de réponse
E08**	Tous ne pas	FN	NO	NM2 g
E17**	Tous ne pas	FN	NO	NM2 g
E48**	Tous ne pas	FN	NO	NM2 g
E61**	Tous ne pas	FN	NO	NM2 g
E34**	Tous ne pas	FN	Non P⇒non Q	Autre réponse
E39**	Tous ne pas	FN	non P⇒non Q	NM2 g

E56**	Tous ne pas	FN	non P⇒non Q	NM2 g
E01**	Tous ne pas	FN	Autre réponse : si P et ¬Q	NM2 g
E03**	Tous ne pas	Autre réponse :inchangée	NO	NM2 g
E04**	Autre réponse QE	FN	Autre réponse : implication	NM1
E05**	NM	Changement quantificateur ∃ en ∀	NO	Contraire
E06*	NM	NM	P⇒non Q	NM2 g
E07**	NM	NM	Autre réponse :si P et ¬Q	NM1
E10**	Tous ne pas	NM	P⇒non Q	NM2 g
E11**	NM	Tous ne pas	Autre réponse : ¬P ou Q	NM2 g
E12	contraire	NM	NM	Pas de réponse
E13	NM	FN	NM	NM1
E14**	Tous ne pas	NM	NO	Contraire
E16*	Tous ne pas	Tous ne pas	Pas de réponse	Contraire
E19*	NM	Changement quantificateur ∃ en ∀	P⇒non Q	NM1
E20**	NM	Tous ne pas	P⇒non Q	Contraire
E24**	NM	NM	P⇒non Q	Contraire
E25	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E28**	NM	Changement quantificateur ∃ en ∀	NO	NM2* g
E29*	NM	Changement quantificateur ∃ en ∀	non P et Q	NM1
E30**	contraire	Pas de réponse	NO	NM2 g
E31*	NM	Tous ne pas	Autre réponse : ¬P ou Q	QL
E32*	Tous ne pas	NM	Autre réponse : ¬P et ¬Q	Pas de réponse
E33*	contraire	NM	NO	NM1
E37	NM	Changement quantificateur ∃ en ∀	NM	QL
E38*	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	NM2* g
E40	Changement quantificateur ∀ en ∃	Changement quantificateur ∃ en ∀	NM	NM1
E41	NM	FN	Pas de réponse	NM1
E44**	Autre réponse : (reformulation de la phrase)	FN	NO	NM2* g
E49**	NM	NM	non Q⇒P	NM2 g

E51*	Changement quantificateur ∀ en ∃	Changement quantificateur ∃ en ∀	P⇒non Q	Pas de réponse
E52**	NM	NM	Autre réponse	NM2 g
E53*	NM	Pas de réponse	NO	QL
E54*	NM	Changement quantificateur ∃ en ∀	non P⇒non Q	NM1
E55**	NM	Tous ne pas	P⇒non Q	Contraire
E57**	Autre réponse	Changement quantificateur ∃ en ∀	NO	Contraire
E58	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E59**	contraire	FN	NO	Contraire
E60**	contraire	FN	NO	NM2 g
E62**	Contraire	FN	NO	NM2 g
E63*	NM	Tous ne pas	P⇒non Q	QL
E64*	Changement quantificateur ∀ en ∃	Tous ne pas	P⇒non Q	NM2 g
E66**	contraire	FN	P⇒non Q	NM2 g
E67	NM	NM	Pas de réponse	Autre réponse

NM : négation mathématique

FN : forme négative

NO : négation non quantifié

NM2 : négation mathématique du (2) : générique sur f (NM2* : la limite peut être infinie)

NM1 : négation mathématique du (1) : universel sur f

QL : quantification sur les limites

Vert : négation dans le langage courant ou encore la logique naturelle (FN/FN/non P⇒non Q/NO/NM2). Nous avons choisi de classer les réponses NO qui ont la forme *P(x) et non Q(x)*, dans la catégorie *langage courant* car leur structure correspond à la négation dans le langage courant. Cette structure coïncide avec celle de la négation mathématique de l'implication.

Rose : négation mathématique

Bleu : contraire

*l'un des deux derniers est un générique

**les deux derniers sont des génériques

Tableau T3(2)

Item 3.1. : *Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges*

CODE ELEVES	**REPONSES 3.1**
L02, L05, L11, L12, L19, L26, L28, L30, L33, L41, L42, L46, L51, L53, L54, L56	Il existe au moins une boule contenue dans l'urne qui n'est pas rouge (16)
L22, L37	Au moins une boule contenue dans l'urne n'est pas rouge
L58	Les boules contenues dans l'urne ne sont pas toutes rouges
L44	Certaines boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges
L01	Il existe une boule contenue dans l'urne qui n'est pas rouge
L35	De toutes les boules contenues dans l'urne, une n'est pas rouge
L06, L13, L15, L27, L29, L38, L43, L45, L47, L49, L59	Toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges
L09	De toutes les boules contenues dans l'urne, il existe certainement au moins une qui n'est pas rouge
L03, L20, L21	Il existe dans l'urne des boules rouges
L36, L40	Au moins une boule contenue dans l'urne est rouge
L24	Une des boules contenues dans l'urne est rouge
L04, L55	Certaines boules contenues dans l'urne sont rouges
L32	L'ensemble des boules figurant dans l'urne ne sont pas rouges
L07, L14, L16, L48, L60, L61	Aucune boule contenue dans l'urne n'est rouge
L39	L'urne ne contient pas de boule rouge
L08	Soit B=boule, R=rouge : $\forall x \in B \notin R$

L10	Il n'existe pas de boules qui ne sont rouges dans l'urne ≡ toutes sont rouges
L17	Il existe au plus une boule dans l'urne qui est rouge
L18	Il a au plus une boule dans l'urne qui n'est pas rouge
L23	Il existe au moins des boules contenues dans l'urne qui ne sont pas rouges
L25	Soit toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges
L34	Toutes les boules contenues dans l'urne sont non toutes rouges
L50	Toutes les boules non rouges ne sont pas contenues dans l'urne
L52	L'urne ne peut contenir que des boules rouges
L57	Il existe une boule dans l'urne qui est verte
L31	

Tableau T3(3)

Item 3.2: *Certains nombres entiers sont pairs*

CODE ELEVES	REPONSE 3.2
L03, L09, L11, L12, L20, L32, L33	Tous les nombres entiers sont impairs
L05, L14, L60	Aucun nombres entiers n'est pair
L01, L04, L17, L23, L25, L30, L45, L46, L55, L56, L57,	Tous les nombres entiers sont pairs
L13, L15, L26, L29, L35, L38, L49, L47, L50, L59,	Certains nombres entiers ne sont pas pairs
L06, L27, L28, L37, L39, L40, L43, L48, L58, L61	Certains nombres entiers sont impairs
L22, L34	Il existe des nombres impairs
L54	Il existe un nombre entier qui n'est pas pair
L53	Il n'existe pas de nombre entier pair
L42, L44,	Tous les nombres entiers ne sont pas pairs

L19	Tout nombre entier n'est pas pair
L21	Il y a des nombres entiers pairs
L36	Plus d'un nombre entier est pair
L41	Il existe des nombres entiers pairs
L51	Il existe certains nombres entiers qui ne sont pas pairs
L02	Il existe au moins des nombres entiers qui ne sont pas pairs
L10	Ce n'est pas tous les nombres entiers qui sont pairs
L08	$\forall x \in R, x \nmid 2$
L52	Certains nombres entiers ne sont pas impairs
L18	Il y a au plus un entier pair
L07, L24, L31	Aucune réponse

Item 3.3 : *Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.*

Tableau T3(4)

CODE ELEVES	**REPONSES 3.3**
	$P(x)$ *et non* $Q(x)$ / $\exists x, P(x)$ *et non* $Q(x)$
L46, L55, L51	Il existe des nombres entiers divisibles par 4 qui ne se terminent pas par 4
L08, L42	Un nombre entier est divisible par 4 et il ne se termine pas par 4
L03	Si un nombre n'est pas divisible par 4 et il se terminera par 4
	$non\ Q(x) \Rightarrow non\ P(x)$
L09	Si un nombre entier ne se termine pas par 4, alors il n'est pas divisible par 4
	$non\ P(x) \Rightarrow non\ Q(x)$ et structure semblable
L01, L10, L14, L15, L20, L27, L29, L33, L39, L40, L43, L44, L45, L47, L49, L48, L56, L59, L60, L61 (12)	Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4
L58	Si 4 ne divise pas un nombre, alors il ne se termine pas par 4
L50	Un nombre entier n'est divisible par 4 alors il se termine par $R - \{4\}$

L16, L21, L24, L38	Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas toujours par 4
L17	Tout nombre divisible par 4 ne se termine pas par 4
L32	Quel que soit un nombre entier est divisible par 4, alors il ne termine pas forcément par 4
	$non\ P(x) \Rightarrow\ Q(x)$ et $Q(x)$ avec toujours ou forcément
L06	Si un nombre entier n'est pas divisible par 4, alors il se termine par 4
L13, L53	Tout nombre entier divisible par 4 ne se termine pas forcément par 4
L57	Un nombre entier divisible par 4 ne se termine pas toujours par 4
L26	Si un nombre entier est divisible par 4, alors il peut se terminer par 4
L35	Si un nombre est divisible par 4, alors il ne peut toujours se terminer par 4
L41	Si un nombre entier n'est pas divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4 ou encore il existe au moins un nombre entier divisible par 4 qui ne se termine pas par 4
L04, L11	Si un nombre entier se termine par 4, alors il n'est pas toujours divisible par 4
L07	Si un nombre entier est divisible par 4, et il ne se termine pas par 4 ou si un nombre entier est divisible par 4 ou il se termine par 4
L36	Tout nombre se terminant par 4 n'est pas toujours divisible par 4
L23	Si tout nombre entier se termine par 4, alors tout nombre entier est divisible par 4
L25	Pour tout nombre entier divisible par 4, alors il se termine par 4
L30	Si tout entier est divisible par 4, alors il se termine par un multiple de 4
L37	Un nombre entier se termine par 4 s'il est divisible par 4
L02	Pour tout nombre entier divisible par 4, il existe au moins un nombre qui ne se termine pas par 4
L52	Alors il est multiple de 4
	EQUIVALENCE
L05	Un nombre entier est divisible par 4 équivaut à il se termine par 4
L12	Un nombre entier est divisible par 4 si et seulement si il ne se termine pas par 4
L18, L19, L22, L28, L31, L34, L54 **(9)**	Pas de réponse

Item 3.4 *: La limite d'une fonction est toujours finie.*

Tableau T3(5)

CODE ELEVES	REPONSES 3.4
L01, L41, L51, L54, L57	Il existe une fonction dont la limite n'est pas finie

L05, L56	Il existe au moins une fonction dont la limite est infinie
L53	Il existe des fonctions ayant des limites infinies
L34	Il existe des fonctions dont la limite n'est pas toujours finie
L02, L04, L12, L13, L14, L15, L16, L19, L21, L22, L24, L27, L29, L30, L32, L35, L36, L38, L40, L43, L44, L45, L46, L47, L49, L50, L58, L59 **(28)**	La limite d'une fonction n'est pas toujours finie
L06, L37, L61	La limite d'une fonction est toujours infinie
L28	La limite d'une fonction peut ne pas être finie
L42	La limite d'une fonction peut être infinie
L09	La limite d'une fonction est parfois infinie
L11	Une fonction peut avoir une limite infinie
L17	La limite d'une fonction n'est pas finie
L18	La limite d'une fonction est infinie
L26	La limite d'une fonction peut être une constante
L39	La limite d'une fonction est aussi infinie
L48	La limite d'une fonction n'est jamais infinie
L52	La limite d'une fonction est finie sur un intervalle
L23, L33,	La limite d'une fonction peut être finie
L55	La limite d'une fonction est parfois finie
L60	La limite d'une fonction n'est jamais finie
L20	Il existe une fonction dont la limite est finie
L10	Aucune limite d'une fonction n'est pas finie
L25	Quel que soit la limite d'une fonction, elle est toujours finie
L03	L'infini n'est pas la limite d'une fonction
L08	Soit x ce nombre entier, $x \nmid 4$
L07, L19, L31	Pas de réponse

Exercice 4

Donner la négation et la contraposée de l'énoncé suivant :

« $(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ » *où x et y désignent deux nombres réels.*

Tableau des réponses : la négation

Tableau T4(1)

	Réponses correctes
E01, E02, E03, E05, E08, E09, E13, E17, E18, E20, E21, E22, E26, E27, E28, E33, E34, E37, E39, E42, E43, E44, E46, E49, E50, E52, E53, E54, E55, E57, E58, E61, E65, E67 **FN1**	$(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$
	$\left(\exists \varepsilon, P(\varepsilon, x, y)\right)\ et\ \ non\ Q(x,y)$
E07, E14, E15, E19, E45, E64, E68 **FN2**	$(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ $P\ et\ non\ Q$ avec changement de quantificateur, problème de la portée du quantificateur et règle-en-acte (E07 : si P et non Q) et les deux autres $P \Rightarrow non\ Q$
E10 **FN7**	$(\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x \neq y)$ $A \Rightarrow non\ B$
E41 **FN3**	$(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| \geq \varepsilon)) \Rightarrow (x \neq y)$ $non\ A \Rightarrow non\ B$
E16, E56 **FN8**	$(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$ changement du quantificateur
E04, E32, E35, E47 **FN4**	$(\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ |x-y| \geq \varepsilon))\ et\ (x \neq y)^*$ $\equiv non\ (\forall \varepsilon(\varepsilon \in R \Rightarrow P(x,y,\varepsilon)))$ et $non\ Q(x,y)$
	Réponses avec quantificateur
E36 **FN1***	$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (\forall \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ réponse correcte avec quantification sur x et y
E12, E60 **FN2***	$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (\exists \varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |x-y| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ $P'\ et\ non\ Q$ avec changements des quantificateurs

E06, E25	$(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x-y\| > \varepsilon)) \Rightarrow (x \neq y)^*$ $A \Rightarrow non\ B$ est sa négation dans 3.3
E23	$(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \|x-y\| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$ bonnes réponses négations, a mal pris l'énoncé
E24	$(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \wedge \|x-y\| > \varepsilon)) \wedge (x = y)$ $non\ A\ et\ B$
E40	$(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x-y\| < \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$
E51, E62	$(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x-y\| \geq \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$
E29, E59	$(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x-y\| < \varepsilon))\ et\ (x = y)^*$ $non\ A\ et\ B$ utilisé
E30	$(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon))\ et\ \exists x, y \in \mathbb{R}, (x \neq y)$
E11, E31	$(\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \vee \|x-y\| > \varepsilon)) \vee (x = y)$ $(non\ A\ ou\ B) \equiv (A \Rightarrow B)$
E48	$(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon)), (x \neq y)$ $A, non\ B$
E63	$(x \neq y) \Rightarrow (\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon))$ $non\ B \Rightarrow A$
E66	$(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon)) \vee (x \neq y)$ A ou non B
E38	Parle de la négation de la contraposée et donne la négation correcte de l'énoncé

Jaune réponses correctes dans 3.3

Vert : même schème de construction que dans 3.3

Tableau des réponses : la contraposée

Tableau T4(2)

E02, E04, E05, E07, E09, E13, E14, E15, E18, E19, E20, E21, E22, E26, E27, E28, E34, E36, E37, E39, E40, E41, E42, E45, E46, E47, E49, E52, E53, E54, E55, E57, E58, E61, E62, E65, E67, E68 **38**	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x-y\| \geq \varepsilon))$ **(FC1)**

E03	$\neg(x = y) \Rightarrow \neg(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x - y\| < \varepsilon))$
E12	$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq y) \Rightarrow (\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x - y\| \geq \varepsilon))$ le quantificateur sur ε n'a pas changé : portée du quantificateur universel et peut-être règle en acte (invariance du quantificateur dans la contraposée)
E30	$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \neq y) \Rightarrow (\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x - y\| \geq \varepsilon))$ le quantificateur sur ε n'a pas changé : portée du quantificateur universel et peut-être règle en acte (invariance du quantificateur dans la contraposée)
E60	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists x, \exists y \in \mathbb{R}), (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \wedge \|x - y\| \geq \varepsilon))$ $\exists x, \exists y, R(\varepsilon)\ et\ non\ S(x, y, \varepsilon)$: portée du quantificateur universel définition de x et y à la fin de l'énoncé
E06, E08, E10, E24, E25, E32, E33, E35, E48, E51, E56, E63, E66 **(13)**	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x - y\| \geq \varepsilon))$ **FC2** $\exists\varepsilon, R(\varepsilon) \Rightarrow non\ S(x, y, \varepsilon)$
E11	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \vee \|x - y\| \geq \varepsilon))$ forme conséquent $\exists\varepsilon, R(\varepsilon) \vee non\ S(x, y, \varepsilon)$
E31	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \vee \|x - y\| < \varepsilon))$ $\exists\varepsilon, R(\varepsilon) \vee S(x, y, \varepsilon)$
E17	$(x \neq y) \Rightarrow (\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x - y\| < \varepsilon))$ $\forall\varepsilon, R(\varepsilon)\ et\ S(x, y, \varepsilon)$
E23	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \|x - y\| \geq \varepsilon))$ $\exists\varepsilon, R(\varepsilon), non\ S(x, y, \varepsilon)$ (a mal pris l'énoncé)
E29, E59	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x - y\| < \varepsilon))$ $\exists\varepsilon, R(\varepsilon)\ et\ S(x, y, \varepsilon)$
E44**	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \neq \mathbb{R}_+^*))$* $\exists\varepsilon, non\ S(x, y, \varepsilon) \Rightarrow nonR(\varepsilon)$
E01	$(x \neq y) \Rightarrow (\exists\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \|x - y\| < \varepsilon))$ $\exists\varepsilon, R(\varepsilon) \Rightarrow S(x, y, \varepsilon)$: changement de quantificateur
E43	$(\forall\varepsilon, (\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \|x - y\| > \varepsilon))\ et\ (x \neq y)$* $\forall\varepsilon, R(\varepsilon) et\ non\ S(x, y, \varepsilon)$ (conjonction)
E50	$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* / \|x - y\| < \varepsilon\ et\ x \neq y$ $\exists\varepsilon, R(\varepsilon) et\ S(x, y, \varepsilon)$ (conjonction) on a la forme $A\ et\ non\ B$ avec changement de quantificateur

E38	Non classé : voir négation. Autre réponse
E64	Pas de réponse
E16	Pas de contraposée et pas de réponse sur la réciproque

Tableau récapitulatif de la négation de $(\forall \boldsymbol{\varepsilon}, (\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \boldsymbol{\varepsilon}))$

Tableau T4(3)

	$\forall$	$\exists$
$R(\varepsilon)$ et non $S(x, y, \varepsilon)$	E12, E30	E02, E04, E05, E07, E09, E13, E14, E15, E18, E19, E20, E21, E22, E26, E27, E28, E34, E36, E37, E39, E40, E41, E42, E45, E46, E47, E49, E52, E53, E54, E55, E57, E58, E61, E62, E65, E67, E68 E43*
$R(\varepsilon), non$ $S(x, y, \varepsilon)$		E23
$R(\varepsilon)$ et non $S(x, y, \varepsilon)$		
$R(\varepsilon)$ et $S(x, y, \varepsilon)$	E17	E29, E59, E50*
$R(\varepsilon) \vee non$ $S(x, y, \varepsilon)$		E11
$R(\varepsilon) \vee S(x, y, \varepsilon)$		E31
$R(\varepsilon) \Rightarrow non$ $S(x, y, \varepsilon)$		E06, E08, E10, E24, E25, E32, E33, E35, E48, E51, E56, E63, E66
non $S(x, y, \varepsilon) \Rightarrow non$ $R(\varepsilon)$		E44
$R(\varepsilon) \Rightarrow T(x, y, \varepsilon)$		E01

Exercice 5

Tableau T5(1) : comparaison des réponses aux items 5.1 et 5.2

CODE ETUDIANT	**REPONSES 5.1 :** *Pour tout x élément de I, f(x)≤M*	**REPONSES 5.2 :** *Si x est un élément de **I**, alors f(x)≤M*
E02, E04, E15, E18, E23, E24, E25, E32, E36, E56, E65	Aucune réponse	E16
E08, E20, E22, E27, E31, E33, E43, E46, E50, E51, E58, E59, E60, E67	**Non**	**E02 ; E35 ; E40 ; E45** (en plus de 14 autres)
E03	Non, E03 donne la bonne définition de f majorée	Non, E03 donne la définition de f majorée
E57	Non, on ne connait pas l'existence de M	Non, on ne connait pas l'existence de M
E14	non car M n'est pas fixé	non, M doit être choisi
E01	non, il manque *il existe M*	non, il manque *il existe M*
E42	non, il manque *il existe M*	non , cette définition exclut certains $f(x)$ tels que $x \in I$
E07, E09, E10, E11, E12, E13, E17, E21, E28, E30, E34, E40, E48, E49, E65	non M non défini ; **(15)**	non M non défini ; non M est inconnu non M non défini, et pour certaines valeurs de M, 5.2 est faux ; pas de sens ; pas de lien entre I et M ; pas possible car M n'est pas défini, ainsi la première proposition est vraie et la seconde fausse ; non il faut définir M ; car c'est pour tout x élément de I ; non
E38, E47, E63, E68	non, on ne sait pas d'où sort *M*	non, on ne sait pas d'où sort *M*
E26	non, on ne sait à quel ensemble appartient *M*	M est inconnu
E37	non, on ne sait à quel ensemble appartient *M*	non, on ne sait à quel ensemble appartient M ;
E05	non car M qui peut désigner une matrice pour certains ;	non car M peut désigner une matrice pour certains
E29	non car M n'est pas fixé	non, M n'est pas fixé

E53	non, le choix de M n'a pas été opéré, il pourrait exister des M tels que M $\leq f(x)$	non, le choix de M n'a pas été opéré, il pourrait exister des M tels que $M \leq f(x)$
E16	non, on ne sait pas si M est quelconque dans R	non, on ne sait pas si M est quelconque dans R
E19	non car pour M pris quelconque dans R cela ne marche pas toujours	non car pour M ∈ R est quelconque
E44	non, M peut être pris dans tout R	non, M peut être pris dans tout R
E41	non, n'est pas complète du fait de l'absence du majorant	Non, incomplète
E45	non, et donne la définition du majorant M d'une partie I, avec $M > 0$	Non
E62	non, car on ne sait d'où vient M. Est-il unique ?	non, car on ne sait d'où vient M (E62 : M est-il unique ?)
E39	non, $f(x)$ peut être supérieur à M à cause du quantificateur universel	non, $f(x)$ peut être supérieur à M à cause du quantificateur universel
E52	non, $f(x)$ peut être positif et il suffit de prendre $M = -3$	non, $f(x)$ peut être positif et il suffit de prendre $M = -3$
E06	oui si on désigne par M ce majorant	Oui si M est le majorant
E35	Oui, il donne cet item en définition	Non
E54	oui, car, $\forall x \in I, f(x) \leq M \Leftrightarrow M$ est majorant de I	oui, car équivalence entre 1 et 2
E55	oui	Oui
E61	On ne sait pas d'où sort M	Oui
E66	vrai en supposant M appartenant à R	Faux, le fait que $x \in I$ ne garantit pas que $f(x) \leq M$

Tableau T5(2)

Comparaison des réponses aux items 4.1 et 4.2

CODE ELEVES	Item 4.1	Item 4.2
L01, L05, L09, L12, L20, L35, L36, L51, L55 (9)	Non car M n'est pas défini	Non car M n'est pas défini
L37	Non cette définition ne qualifie pas M comme un réel	Non car cette définition ne montre pas l'existence d'un réel M
L53	Non car M n'est pas défini	Non car on ne sait pas dans quel ensemble M

		est défini, et de plus, $f(x) \leq M$ ne dépend pas de x comme élément de I
L58	Non car on ne sait pas ce que désigne M, de plus, x peut ne pas appartenir à l'intervalle	Non car on ne sait pas ce que représente M
L59	Non car on n'a pas admit l'existence de M	Non car on n'a pas admit l'existence de M et on a pris le cas d'un x particulier et non pour tout x
L04	Oui, car s'il existe un x tel que $f(x) \geq M$, alors f ne sera plus le majorant	
L02, L03, L07, L08, L14, L21, L25, L27, L28, L29, L30, L32, L33, L38, L40, L45, L46, L47, L56, L57, L60, L61 (22)	Non	Non
L11	Non car M n'est pas défini	Non car M n'est pas défini et en plus c'est une implication
L19	Non car M n'est pas défini	Non car M n'est pas défini et l'implication entraine une réciproque qui n'est pas toujours vraie
L42	Non car M n'est pas défini	Non car implication
L10	Non car tout élément de I n'appartient pas à f	Non car x n'a toujours l'image sur f
L13, L18, L22	Non car M n'est pas défini	Non
L15	Non car M n'est pas défini	Non car x doit appartenir à un intervalle I
L24	Non car $\forall x \in I$, $f(x)$ n'est pas toujours inférieur à M	Non car si x appartient à I, f(x) n'est pas forcément inférieur à M
L26	Non car tous les x contenus dans I n'ont pas toujours l'image majoritaire	Non car un x quelconque n'a pas toujours un antécédent majoritaire
L41	Oui	Oui
L49	Oui car $I \subset R$	Oui
L54	Non	Oui
L06, L16, L17, L23, L31, L34, L39, L43, L44, L48, L50, L52 (12)	Pas de réponse	Pas de réponse

Énoncé 5.1: *Pour tout x élément de I, f(x)≤M*

Tableau T5(3)

CODE ETUDIANT	REPONSES

E02, E04, E15, E18, E23, E24, E25, E32, E36, E56, E64, E65	Aucune réponse **(12)**
E08, E20, E22, E27, E31, E33, E43, E46, E50, E51, E58, E59, E60, E67	**Non (14)**
E03	Non, E03 donne la bonne définition de f majorée
E57	Non, on ne connait pas l'existence de M
E01, E42	non, il manque *il existe M* **(2)**
E07, E09, E10, E11, E12, E13, E17, E21, E28, E30, E34, E40, E48, E49	non M non défini ; **(15)**
E38, E47, E61, E63, E68	non, on ne sait pas d'où sort M **(5)**
E26, E37	non, on ne sait à quel ensemble appartient M **(2)**
E05	non car M qui peut désigner une matrice pour certains ;
E14, E29	non car M n'est pas fixé **(2)**
E53	non, le choix de M n'a pas été opéré, il pourrait exister des M tels que $M \leq f(x)$
E16	non, on ne sait pas si M est quelconque dans R
E19	non car pour M pris quelconque dans R cela ne marche pas toujours
E44	non, M peut être pris dans tout R
E41	non, n'est pas complète du fait de l'absence du majorant
E45	non, et donne la définition du majorant M d'une partie I, avec $M > 0$
E62	non, car on ne sait d'où vient M. Est-il unique ?
E39	non, $f(x)$ peut être supérieur à M à cause du quantificateur universel
E52	non, $f(x)$ peut être positif et il suffit de prendre $M = -3$
E06	oui si on désigne par M ce majorant
E35	Oui, il donne en définition
E54	oui, car, $\forall x \in I, f(x) \leq M \Leftrightarrow M$ est majorant de I
E55	oui
E66	vrai en supposant M appartenant à $\mathbb{R}$

Enoncé 5.2 : *Si x est un élément de **I**, alors f(x)≤M*

Tableau T5(4)

CODE ETUDIANT	REPONSES
E04, E15, E18, E23, E24, E25, E32, E36, E56, E64	Pas de réponse **(10)**
E02, E08, E20, E22, E27, E31, E33, E35, E40, E43, E45, E46, E50, E51, E58, E59, E60, E67	Non **(18)**
E03	Non, il donne la définition de f majorée
E57	non, on ne connait pas l'existence de M
E01	non, il manque *il existe M*
E41	Non, incomplète
E14	non, M doit être choisi
E05	non car M peut désigner une matrice pour certains
E11, E26	non M est inconnu
E37, E38, E47, E63, E68, E62*,	non, car on ne sait d'où vient M (E62 : M est-il unique ?) ;
E07, E09, E21, E28, E48, E49, E34, E65	Non, M non défini
E12	Non, M non défini, et pour certaines valeurs de M, 5.2 est faux
E16	non, on ne sait pas si M est quelconque dans R
E19	non car pour M pris quelconque dans R lie M au QU
E17	pas possible car M n'est pas défini, ainsi la première proposition est vraie et la seconde fausse la première était pourtant non
E29	non M n'est pas fixé
E30	non il faut définir M
E42	non , cette définition exclut certains $f(x)$ tels que $x \in I$ *l'élément x est considéré comme un élément singulier*
E44	non, M peut être pris dans tout R
E53	non, le choix de M n'a pas été opéré, il pourrait exister des M tels que $M \leq f(x)$ contradictoire

E10	non, pas de sens
E13	non, pas de lien entre I et M
E39	non, $f(x)$ peut être supérieur à M à cause du quantificateur universel
E52	non, $f(x)$ peut être positif et il suffit de prendre $M = -3$
E66	non, le fait que $x \in I$ ne garantit pas $f(x) \leq M$
E06	Oui si M est le majorant
E54	oui, car équivalence entre 1 et 2 un est-il un QU
E55	oui
E61	Oui

Enoncé 5.5 : *Si x est un élément de **I**, alors il existe un réel M tel que f(x)≤M*

TABLEAU T5(5)

CODE ETUDIANT	REPONSE
E02, E03, E05, E10, E22, E27, E29, E30, E31, E33, E35, E40, E43, E46, E48, E50, E51, E53, E55, E59, E60, E61, E66	Non (23)
E28, E42, E47, E68, E12	non, M dépend de x.
E13	non, à chaque $x \in I$, on associe une image bien précise qui peut être différente de M
E09	non, M dépend de x et n'est pas général
E62, E63	non, la majoration de f s'applique à tout x de I
E65	non, car c'est pour toutes les valeurs x appartenant I, x n'est pas spécifié dans I.
E26	faux, car x est unique et M l'est aussi et les autres éléments de I n'auront pas M comme majorant
E44	non, $\forall x_1, x_2 \in I /\ x_1 \neq\ x_2$, à x_1, x_2 il correspond M_1, M_2 et on peut avoir $M_1 \leq f(x_2)$
E67	non, car M n'est pas fonction de x
E49	non, car M existe toujours et ainsi toute fonction sera majorée, ce qui est impossible
E52	non, il suffit de prendre x plus petit élément de I. On peut donc prendre $b \in I$ et $b > x$. $f(x) < f(b)$ et $f(b)$ n'est pas le majorant de $f(x)$ car b n'est pas le majorant de I.
E01	non, manque $\exists M > 0$

E41	non, car la condition n'est pas sur la variable x.
E07	non, (, alors)≠tel que
E37	non, proposition fausse
E17	faux, car la première proposition est vraie et la seconde fausse
E08, E14, E34, E39, E57, E58	Oui (6)
E06	Oui, par commutativité du quantificateur existentiel
E20	Oui, après avoir donné en définition l'énoncé 5.3
E45	je ne sais pas
E04, E11, E15, E16, E18, E19, E21, E23, E24, E25, E32, E36, E38, E54, E56, E64	Pas de réponse (16)

Enoncé 5.3 : *Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Tableau T5(6)

CODE ETUDIANT	REPONSES
E02, E22, E27, E31, E33, E35, E40, E43, E46, E50, E54, E55, E59, E60,	Non **(14)**
E01	non, $\forall x \in I, \exists M$ mais M n'est pas strictement supérieur à 0
E16	non, M n'est pas unique dans R
E26	non, M n′est pas nécessairement unique
E29	non, on peut trouver plusieurs M répondant à la question
E14	non, on doit d'abord trouver M
E07, E09, E12, E21, E28, E44, E47, E53, E67, E68	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x **(10)**
E42	non, M est variable et est fonction de $f(x)$, x∈ I
E05	non car pour chacun des $x_0 \in I$, on aura toujours un M_0 tel que $f(x_0) \leq M_0$, mais pas forcément $f(x) \leq M_0$;
E37	non, si M est fixé, il ne majore pas tous les éléments de $f(x)$ sur $f(I)$
E52	non, si pour a dans I il existe M_1 et pour b dans I il existe M_2, tels que $f(a) \leq M_1$ et $f(b) \leq M_2$, si $a < b$ et f croissante, alors $f(a) < f(b) \Rightarrow M_1 \leq f(b)$, donc f n'admet pas de majorant tentative de preuve : idée de a peut vérifier mais pas tous les x

E06, E11, E39	pas de commutativité entre ∀ et ∃
E61, E63	non, mauvaise définition, et permutation des quantificateurs impossible
E65	non, la phrase est en quelque sorte à la forme négative
E17	$\exists, et\ \forall$ pas bien disposés
E30	Non, $(\exists x, \forall x)$ et $(\forall x, \exists x)$ n'ont pas la même valeur de vérité
E49	non, M peut être dans I et on pourra trouver a dans I tel que $a > M$
E13	non, à chaque x on associe une image bien précise
E19	oui car si $f(x)$ majoré, l'ensemble des majorants de $f(x)$ non vide
E34	oui, M est défini
E41	oui, M majore
E48	oui, tous les paramètres sont bien définis
E08, E20, E45, E51, E57, E58	Oui
E38	oui, f est bornée, par conséquent f est majorée
E10, E66, E62	vrai, définition de majorant
E03, E04, E15, E18, E23, E24, E25, E32, E36, E56, E64	**Pas de réponse (11)**

Tableau T5(7) : Comparaison des réponses aux items 5.3 et 5.5

CODE ETUDIANT	**REPONSES 5.3 :** *Pour tout x élément de I, il existe un réel M tel que f(x)≤M*	**REPONSES 5.5 :** *Si x est un élément de **I**, alors il existe une réel M tel que f(x)≤M*
E01	non, $\forall x \in I, \exists M$ mais M n'est pas stricment supérieur à 0	non, manque $\exists M > 0$
E02, E22, E27, E31, E33, E35, E40, E43, E46, E50, E55, E59, E60	Non	Non
E03	Pas de réponse	Non
E04, E15, E18, E23, E24, E25, E32, E36, E56, E64	Pas de réponse	Pas de réponse
E05	non car pour chacun des $x_0 \in I$, on aura toujours un M_0 tel que $f(x_0) \leq M_0$, mais pas forcément $f(x) \leq M_0$;	Non
E06	Pas de commutativité entre ∀ et ∃	Oui, par commutativité du quantificateur

		universel
E07	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	non, (, alors)≠tel que
E08, E57, E58	Oui	Oui
E09	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Non, M dépend de x et n'est pas général
E10	Vrai, définition de majorant	Non
E11	Pas de commutativité entre $\forall$ et $\exists$	Pas de réponse
E12	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Non, M dépend de x
E13	Non, à chaque x on associe une image bien précise	non, à chaque $x \in I$, on associe une image bien précise qui peut être différente de M
E14	Non, on doit d'abord trouver M	Oui
E16	Non, M n'est pas unique dans R	Pas de réponse
E17	$\exists$ et $\forall$ pas bien disposés	Faux car la première proposition est vraie et la seconde est fausse
E19	Oui, si $f(x)$ majoré, l'ensemble des majorants de $f(x)$ est vide	Pas de réponse
E20	Oui	Oui, après avoir donné en définition la 5.3
E21	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Pas de réponse
E26	Non, M n'est pas nécessairement unique	faux, car x est unique et M l'est aussi et les autres éléments de I n'auront pas M comme majorant
E28	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Non, M dépend de x
E29	Non, on peut trouver plusieurs M répondant à la question	Non
E30	Non, $(\exists x, \forall x)$ et $(\forall x, \exists x)$ n'ont pas la même valeur de vérité	Non
E34	Oui, M est défini	Oui
E37	non, si M est fixé, il ne majore pas tous les éléments de $f(x)$ sur $f(I)$	Non, proposition fausse
E38	Oui, f est bornée, par conséquence f est majorée	Pas de réponse
E39	Pas de commutativité entre $\forall$ et $\exists$	Oui
E41	Oui, M majore	Non, car la condition n'est pas sur la variable

		x
E42	non, M est variable et est fonction de $f(x)$, x$\in I$	Non, M dépend de x
E44	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	non, $\forall x_1, x_2 \in I / \ x_1 \neq x_2$, à x_1, x_2 il correspond M_1, M_2 et on peut avoir $M_1 \leq f(x_2)$
E45	Oui	Je ne sais pas
E47	M dépend de x, sinon f ne sera plus majoré. il doit être le même pour chaque x	M dépend de x, sinon f ne sera plus majoré. il doit être le même pour chaque x
E48	Oui, tous les paramètres sont bien définis	Non
E49	non, M peut être dans I et on pourra trouver a dans I tel que $a > M$	non, car M existe toujours et ainsi toute fonction sera majorée, ce qui est impossible
E51	Oui	Non
E52	non, si pour a dans I il existe M_1 et pour b dans I il existe M_2, tels que $f(a) \leq M_1$ et $f(b) \leq M_2$, si $a < b$ et f croissante, alors $f(a) < f(b) \Rightarrow M_1 \leq f(b)$, donc f n'admet pas de majorant tentative de preuve : idée de a peut vérifier mais pas tous les x	non, il suffit de prendre x plus petit élément de I. On peut donc prendre $b \in I$ et $b > x$. $f(x) < f(b)$ et $f(b)$ n'est pas le majorant de $f(x)$ car b n'est pas le majorant de I.
E53	Non, car pour tout x, M ne majore pas $f(x)$ et aussi M dépend de x	Non
E54	Non	Pas de réponse
E61	Non, mauvaise définition et permutation des quantificateurs	Non
E62	Vrai, définition de fonction majorée	Non, la majoration de f s'applique à tout x de I
E63	Non, problème d'ordre des quantificateurs	Non, c'est pas pour tout élément de x qu'il va exister un réel M tel que $f(x) \leq M$
E65	Non, la phrase est en quelque sorte à la forme négative	non, car c'est pour toutes les valeurs x appartenant I, x n'est pas spécifié dans I.
E66	Vrai, car définition de majorant	Non
E67	Non, car M n'est pas fonction de x	Non, car M n'est pas fonction de x
E68	Non, bien que M soit un réel, il varie selon x. il peut donc y avoir des éléments de x qui ne sont pas supérieurs à M	Non, bien que M soit un réel, il varie selon x. il peut donc y avoir des éléments de x qui ne sont pas supérieurs à M

Enoncé 5.4 : *Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, f(x)≤M*

TABLEAU T5(8)

CODE ETUDIANT	**REPONSE 5.4 :** *Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, f(x)≤M*
E02, E03, E05, E06, E09, E10, E11, E12, E16, E22, E27, E30, E31, E33, E37, E39, E41, E43, E44, E45, E50, E52, E55, E59, E60, E61, E63, E65, E67, E68	Oui **(30)**
E14, E28, E40, E42, E47, E66	oui, car définition **(6)**
E13	oui, aucune image de *x* par *f* ne dépasse M
E21	oui, car pour tout x dans I, M vérifie $f(x) \leq M$
E29, E34	oui, M est fixé et majore *f*
E17	vrai, l'existence de M est d'abord et $\forall x \in I$ dépend de l'existence de M
E49	oui, car *M* est supérieur à tous les éléments de I
E26	vrai, M est unique $\forall x \in I$
E53	oui, *M* est indépendant de *x*
E01	non, il existe M vient après pour tout $x \in I$, n'a pas identifié correctement l'ordre des quantificateurs dans la définition
E07	non car $\exists, \forall \not\Rightarrow \forall, \exists$ n'a pas identifié correctement l'ordre des quantificateurs dans la définition 5.3 vrai
E57	non, on a permuté les quantificateurs
E62	non car position des quantificateurs non respectée
E48	non, *x* est fonction de *M*
E08, E19, E20, E35, E38, E46, E51, E58,	Non **(7)**
E15, E18, E23, E24, E25, E32, E36, E54, E64	Pas de réponse **(9)**

Tableau T5(9): comparaison des justifications à 5.3 et 5.4

CODE ETUDIANT	**REPONSES 5.3 :** *Pour tout x élément de I, il existe un réel M tel que f(x)≤M*	**REPONSES 5.4 :** *il existe une réel M tel que, pour tout x est un élément de* ***I****, on a f(x)≤M*
E02, E22, E27, E31, E33, E50, E55, E59, E60	Non	Oui
E05	non car pour chacun des $x_0 \in I$, on aura toujours un M_0 tel que $f(x_0) \leq M_0$, mais pas forcément $f(x) \leq M_0$;	Oui
E06	Pas de commutativité entre ∀ et ∃	Oui
E09	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Oui
E01	non, $\forall x \in I, \exists M$ mais M n'est pas stricment supérieur à 0	non, il existe M vient après pour tout $x \in I$, n'a pas identifié correctement l'ordre des quantificateurs dans la définition
E03	Pas de réponse	Oui
E07	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	non car $\exists, \forall \not\Rightarrow \forall, \exists$ n'a pas identifié correctement l'ordre des quantificateurs dans la définition 5.3 vrai
E11	Pas de commutativité entre ∀ et ∃	Oui
E12	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Oui
E13	Non, à chaque x on associe une image bien précise	oui, aucune image de x par f ne dépasse M
E14	Non, on doit d'abord trouver M	Oui car définition
E16	Non, M n'est pas unique dans R	Oui
E17	∃ et ∀ pas bien disposés	vrai, l'existence de M est d'abord et $\forall x \in I$ dépend de l'existence de M
E08	Oui	Non
E10	Vrai, définition de majorant	Oui
E19	Oui, si $f(x)$ majoré, l'ensemble des majorants de $f(x)$ est vide	Non
E20	Oui	Non
E21	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	oui, car pour tout x dans I, M vérifie $f(x) \leq M$

E26	Non, M n'est pas nécessairement unique	vrai, M est unique $\forall x \in I$
E28	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Oui car définition
E29	Non, on peut trouver plusieurs M répondant à la question	oui, M est fixé et majore f
E30	Non, $(\exists x, \forall x)$ et $(\forall x, \exists x)$ n'ont pas la même valeur de vérité	Oui
E32	Pas de réponse	Pas de réponse
E34	Oui, M est défini	oui, M est fixé et majore f
E35	Non	Non
E37	non, si M est fixé, il ne majore pas tous les éléments de $f(x)$ sur $f(I)$	Oui
E38	Oui, f est bornée, par conséquence f est majorée	Non
E39	Pas de commutativité entre ∀ et ∃	Oui
E40	Non	Oui car définition
E41	Oui, M majore	Oui
E42	non, M est variable et est fonction de $f(x)$, x$\in I$	Non, M dépend de x
E43	Non	Oui
E44	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Oui
E45	Oui	Oui
E46	Non	Non
E47	M dépend de x, sinon f ne sera plus majoré. il doit être le même pour chaque x	Oui car définition
E48	Oui, tous les paramètres sont bien définis	Non car x est fonction de M
E49	non, M peut être dans I et on pourra trouver a dans I tel que $a > M$	oui, car M est supérieur à tous les éléments de I
E51	Oui	Non
E52	non, si pour a dans I il existe M_1 et pour b dans I il existe M_2, tels que $f(a) \leq M_1$ et $f(b) \leq M_2$, si $a < b$ et f croissante, alors $f(a) < f(b) \Rightarrow M_1 \leq f(b)$, donc f n'admet pas de majorant tentative de preuve : idée de a peut vérifier mais pas tous les x	Oui

E53	Non, car pour tout x, M ne majore pas $f(x)$ et aussi M dépend de x	Oui M est indépendant de x
E54	Non	Pas de réponse
E57	Oui	Non on a permuté les quantificateurs
E58	Oui	Non
E61	Non, mauvaise définition et permutation des quantificateurs	Oui
E62	Vrai, définition de fonction majorée	Non car la position des quantificateurs non respectée
E63	Non, problème d'ordre des quantificateurs	Oui
E65	Non, la phrase est en quelque sorte à la forme négative	Oui
E66	Vrai, car définition de majorant	Oui car définition
E67	Non, car M n'est pas fonction de x	Oui
E68	Non, bien que M soit un réel, il varie selon x. il peut donc y avoir des éléments de x qui ne sont pas supérieurs à M	Oui
E04, E15, E18, E23, E24, E25, E32, E36, E56, E64	Pas de réponse	Pas de réponse

Tableau T5(11): Croisement des toutes les réponses

Etudiants	Item 5.1	Item 5.2	Item 5.3	Item 5.4	Item 5.5
E01	non, il manque *il existe M*	non, il manque *il existe M*	non, $\forall x \in I, \exists M$ mais M n'est pas strictement supérieur à 0	non, il existe M vient après pour tout $x \in I$,	non, manque $\exists M > 0$
E03	Non, E03 donne la bonne définition de f majorée	Non, avec définition de f majorée	Pas de réponse	Oui	Non
E05	non car M qui peut désigner une matrice pour certains ;	non car M peut désigner une matrice pour certains	non car pour chacun des $x_0 \in I$, on aura toujours un M_0 tel que $f(x_0) \leq M_0$, mais pas forcément $f(x) \leq M_0$;	Oui	Non
E06	oui si on désigne par M ce majorant	Oui si M est le majorant	pas de commutativité entre $\forall$ et $\exists$	Oui	Oui, par commutativité du quantificateur existentiel
E07	non M non define	Non, M non défini	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	non car $\exists, \forall \not\Leftrightarrow \forall, \exists$	non, (, alors)≠tel que
E09	non M non define	Non, M non défini	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	Oui	non, M dépend de x et n'est pas général
E10	non M non define	non, pas de sens	vrai, définition de majorant	Oui	Non
E11	non M non define	non M est inconnu	pas de commutativité entre $\forall$ et $\exists$	Oui	Pas de réponse
E12	non M non define	Non, M non défini, et pour certaines valeurs de M, 5.2 est faux	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	Oui	non, M dépend de x.
E13	non M non defini	non, pas de lien entre I et M	non, à chaque x on associe une image bien précise	oui, aucune image de x par f ne dépasse M	non, à chaque $x \in I$, on associe une image bien précise qui peut être

					différente de M
E14	non car M n'est pas fixé	non, M doit être choisi	non, on doit d'abord trouver M	oui, car définition	Oui
E16	non, on ne sait pas si M est quelconque dans R	non, on ne sait pas si M est quelconque dans R	non, M n'est pas unique dans R	Oui	Pas de réponse
E17	non M non define	pas possible car M n'est pas défini, ainsi la première proposition est vraie et la seconde fausse	$\exists, et\ \forall$ pas bien disposés	vrai, l'existence de M est d'abord et $\forall x \in I$ dépend de l'existence de M	faux, car la première proposition est vraie et la seconde fausse
E19	non car pour M pris quelconque dans R cela ne marche pas toujours	non car pour M pris quelconque dans R	oui car si $f(x)$ majoré, l'ensemble des majorants de $f(x)$ non vide	Non	Pas de réponse
E20	Non	Non	Oui	Non	Oui, après avoir donné en définition l'énoncé 5.3
E21	non M non define	Non, M non défini	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	oui, car pour tout x dans I, M vérifie $f(x) \leq M$	Pas de réponse
E26	non, on ne sait à quel ensemble appartient M	non M est inconnu	non, M n'est pas nécessairement unique	vrai, M est unique $\forall x \in I$	faux, car x est unique et M l'est aussi et les autres éléments de I n'auront pas M comme majorant
E28	non M non define	Non, M non défini	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	oui, car définition	non, M dépend de x.
E29	non car M n'est pas fixé	non M n'est pas fixé	non, on peut trouver plusieurs M répondant à la question	oui, M est fixé et majore f	Non
E30	non M non define	non il faut définir M	Non, $(\exists x, \forall x)$ et $(\forall x, \exists x)$ n'ont pas la même valeur de vérité	Oui	Non
E34	non M non define	Non, M non défini	oui, M est défini	oui, M est fixé et majore f	Oui

E35	Oui, il donne 5.1 en définition	Non	Non	Non	Non
E37	non, on ne sait à quel ensemble appartient M	non, car on ne sait d'où vient M	non, si M est fixé, il ne majore pas tous les éléments de $f(x)$ sur $f(I)$	Oui	non, proposition fausse
E38	non, on ne sait pas d'où sort M	non, car on ne sait d'où vient M	oui, f est bornée, par conséquent f est majorée	Non	Pas de réponse
E39	non, $f(x)$ peut être supérieur à M à cause du quantificateur universel	non, $f(x)$ peut être supérieur à M à cause du quantificateur universel	pas de commutativité entre $\forall$ et $\exists$	Oui	Oui
E40	non M non define	Non	Non	oui, car définition	Non
E41	non, n'est pas complète du fait de l'absence du majorant	Non, incomplète	Oui, M majore	Oui	non, car la condition n'est pas sur la variable x.
E42	non, il manque *il existe M*	non, cette définition exclut certains $f(x)$ tels que $x \in I$	non, M est variable et est fonction de $f(x)$, x$\in I$	oui, car définition	non, M dépend de x.
E44	non, M peut être pris dans tout R	non, M peut être pris dans tout R	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	Oui	non, $\forall x_1, x_2 \in I / \ x_1 \neq x_2$, à x_1, x_2 il correspond M_1, M_2 et on peut avoir $M_1 \leq f(x_2)$
E45	non, et donne la définition du majorant M d'une partie I, avec $M > 0$	Non	Oui	Oui	Je ne sais pas
E47	non, on ne sait pas d'où sort M	non, car on ne sait d'où vient M	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	oui, car définition	non, M dépend de x.
E48	non M non défini	Non, M non défini	oui, tous les paramètres sont bien définis	non, x est fonction de M	Non
E49	non M non défini	Non, M non défini	non, M peut être dans I et on pourra trouver a dans I tel que $a > M$	oui, car M est supérieur à tous les éléments de I	non, car M existe toujours et ainsi toute fonction sera majorée, ce qui est

					impossible
E52	non, $f(x)$ peut être positif et il suffit de prendre $M = -3$	non, $f(x)$ peut être positif et il suffit de prendre $M = -3$	non, si pour a dans I il existe M_1 et pour b dans I il existe M_2, tels que $f(a) \leq M_1$ et $f(b) \leq M_2$, si $a < b$ et f croissante, alors $f(a) < f(b) \Rightarrow M_1 \leq f(b)$, donc f n'admet pas de majorant	Oui	non, il suffit de prendre x plus petit élément de I. On peut donc prendre $b \in I$ et $b > x$. $f(x) < f(b)$ et $f(b)$ n'est pas le majorant de $f(x)$ car b n'est pas le majorant de I.
E53	non, le choix de M n'a pas été opéré, il pourrait exister des M tels que $M \leq f(x)$	non, le choix de M n'a pas été opéré, il pourrait exister des M tels que $M \leq f(x)$	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	oui, M est indépendant de x	Non
E54	oui, car, $\forall x \in I, f(x) \leq M \Leftrightarrow M$ est majorant de I	oui, car équivalence entre 1 et 2	Non	Pas de réponse	Pas de réponse
E57	Non, on ne connait pas l'existence de M	non, on ne connait pas l'existence de M	Oui	non, on a permuté les quantificateurs	Oui
E61	non, on ne sait pas d'où sort M	Oui	non, mauvaise définition, et permutation des quantificateurs impossible	Oui	Non
E62	non, car on ne sait d'où vient M. Est-il unique ?	non, car on ne sait d'où vient M. M est-il unique ?	vrai, définition de majorant	non car position des quantificateurs non respectée	non, la majoration de f s'applique à tout x de I
E63	non, on ne sait pas d'où sort M	non, car on ne sait d'où vient M	non, mauvaise définition, et permutation des quantificateurs impossible	Oui	non, la majoration de f s'applique à tout x de I
E65	Pas de réponse	Non, M non défini	non, la phrase est en quelque sorte à la forme négative	Oui	non, car c'est pour toutes les valeurs x appartenant I, x n'est pas spécifié dans I.
E66	vrai en supposant M	non, le fait que $x \in I$ ne garantit pas $f(x) \leq M$	vrai, définition de majorant	oui, car définition	Non

	appartenant à R				
E67	Non	Non	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	Oui	non, car M n'est pas fonction de x
E68	non, on ne sait pas d'où sort M	non, car on ne sait d'où vient M	M dépend de x, or il doit être le même pour tous les x	Oui	non, M dépend de x.
E55	Oui	Oui	Non	Oui	Non
E02	Pas de réponse	Non	Non	Oui	Non
E51	Non	Non	Oui	Non	Non
E08	Non	Non	Oui	Non	Oui
E58	Non	Non	Oui	Non	Oui
E22	Non	Non	Non	Oui	Non
E27	Non	Non	Non	Oui	Non
E31	Non	Non	Non	Oui	Non
E33	Non	Non	Non	Oui	Non
E43	Non	Non	Non	Oui	Non
E50	Non	Non	Non	Oui	Non
E59	Non	Non	Non	Oui	Non
E60	Non	Non	Non	Oui	Non
E46	Non	Non	Non	Non	Non
E04	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E15	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E18	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E23	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E24	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E25	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E32	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E36	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse
E56	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse		Pas de réponse
E64	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse	Pas de réponse

REPONSES DES ELEVES

Enoncé : *Donner la négation de « f est croissante » et écrire cet énoncé en langage formel*

Tableau T5(12)

CODE ELEVES	Négation	Ecriture formelle
L01	f est décroissante	$\forall x, x' \in D_f, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$
L02	f est décroissante	$f \leq 0$
L03	f n'est pas croissante	$\forall a, b \in D_f, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
L04	f est décroissante	$f' > 0$
L05	f est soit décroissante, soit constante, soit non bijective	$\forall u, v \in D_f, u \neq v, supposons\ u \geq v\ \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$
L06	f est décroissante	
L07	f est décroissante	$f' > 0$, ou $f' \geq 0$
L08	f est décroissante (f ↘)	
L09	f est décroissante	
L10	f n'est pas décroissante	$f > 0$
L11	f n'est pas croissante	$f' = 0\ ou\ f' \leq 0$
L12	f n'est pas croissante (f est décroissante ou f est constante, ou f n'est ni croissante ni décroissante	Formalisation de f décroissante f constante : $\forall a, b \in D_f, a < b \Rightarrow f(a) = f(b) = k\ (k \in R)$ f n'est ni croissante ni décroissante : $\forall a, b, c \in D_f$, $(a < b < c)$ $f(a) < f(b)$; $f(c) < f(a)$
L13	f constante ou f décroissante	$f(a) = f(b)$ ou $f(a) \geq f(b)$
L14	f est décroissante	
L15	f est décroissante	$\forall x \in D_f, f'(x) \leq 0$
L16		
L17	f est décroissante	
L18	f est décroissante	
L19	f est décroissante	f(x)<0
L20	f est strictement décroissante	Soit A un ensemble, u, v appartenant à A tels que u<v, u<v⇒f(u)>f(v)
L21	f n'est pas croissante	f>0
L22	f n'est pas croissante	$f(x) \leq 0$
L23		

L24	f est décroissante	$\forall x \in D_f, f'(x) \leq 0$
L25	f est décroissante	
L26	f est décroissante	$f(x) < 0$
L27	f est décroissante	$f \searrow$
L28	f n'est pas croissante	
L29	f n'est pas croissante	
L30	f est décroissante	$f \searrow$
L31		
L32	f est décroissante	$\forall x \in R, f(x) \leq 0$
L33	f n'est pas croissante	$f \nearrow$ la flèche est barrée
L34	f est constante et décroissante	f est croissante
L35	f est décroissante	
L36	f n'est pas croissante	
L37	f est décroissante	Pour tout x appartenant au domaine de dérivabilité, sa dérivée $f'(x) \leq 0$
L38	f n'est pas croissante	
L39		
L40	f est décroissante	$f(x) \geq 0$
L41	f n'est pas croissante	
L42	f est décroissante	$\forall a, b \in R, f(a) \geq f(b)$
L43	f est décroissante	f <0
L44	f n'est pas croissante	$\forall x \in D_f, f \searrow$ ou $f(x+1) = f(x)$
L45	f n'est pas croissante	
L46	f n'est pas croissante	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) > 0$
L47	f est décroissante	$f < 0$
L48		
L49	f n'est pas croissante	$\forall x, f(x) > 0$
L50		
L51	f est décroissante	$f \in]-\infty, 0]$
L52		
L53	f est strictement décroissante	$f \geq 0$
L54	f est décroissante	
L55	f est décroissante ou constante	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$; $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \Rightarrow f(a) =$

		$f(b)$
L56	f n'est pas croissante	$\forall a, b \in R, a > b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
L57	f n'est pas toujours croissante	$f(x+1) \geq f(x)$
L58	f n'est pas croissante	
L59	f est décroissante	
L60	f n'est pas croissante	$\forall x \in D_f, f'(x) \leq 0$
L61		

Énoncé 4.1 : *Pour tout x élément de I, f(x)≤M*

Tableau T5(13)

CODE ELEVES	Réponses
L37	Non cette définition ne qualifie pas M comme un réel
L58	Non car on ne sait pas ce que désigne M, de plus, x peut ne pas appartenir à l'intervalle
L59	Non car on n'a pas admit l'existence de M
L01, L05, L09, L11, L12, L13, L15, L18, L19, L20, L22, L35, L36, L42, L51, L53, L55 **(17)**	Non car M n'est pas défini
L02, L03, L07, L08, L14, L14, L21, L25, L27, L28, L29, L30, L32, L33, L38, L40, L45, L46, L47, L54, L56, L57, L60, L61 **(24)**	Non
L04	Oui, car s'il existe un x tel que $f(x) \geq M$, alors f ne sera plus le majorant
L24	Non car $\forall x \in I$, $f(x)$ n'est pas toujours inférieur à M
L06, l16, L17, L34	
L10	Non car tout élément de I n'appartient pas à f
L23, L31, L39, L48, L50, L52 **(6)**	Pas de réponse
L26	Non car tous les x contenus dans I n'ont pas toujours l'image majoritaire
L41	Oui
L49	Oui car $I \subset R$

Énoncé 4.2: *Si x est un élément de **I**, alors f(x)≤M*

Tableau T5(14)

CODE ELEVES	Réponses
L01, L05, L09, L12, L20, L35, L36, L51, L55	Non car M n'est pas défini
L58	Non car on ne sait pas ce que représente M
L37	Non car cette définition ne montre pas l'existence d'un réel M
L53	Non car on ne sait pas dans quel ensemble M est défini, et de plus, $f(x) \leq M$ ne dépend pas de x comme élément de I
L59	Non car on n'a pas admit l'existence de M et on a pris le cas d'un x particulier et non pour tout x
L11	Non car M n'est pas défini et en plus c'est une implication
L42	Non car implication
L19	Non car M n'est pas défini et l'implication entraine une réciproque qui n'est pas toujours vraie
L02, L03, L07, L08, L13, L14, L18, L21, L22, L25, L27, L28, L29, L30, L32, L33, L38, L40, L45, L46, L47, L56, L57, L60, L61	Non **(25)**
L04, L06, L16, L17, L23, L31, L34, L39, L48, L50, L52	Pas de réponse **(11)**
L10	Non car x n'a toujours l'image sur f
L15	Non car x doit appartenir à un intervalle I
L24	Non car si x appartient à I, f(x) n'est pas forcément inférieur à M
L26	Non car un x quelconque n'a pas toujours un antécédent majoritaire
L41, L49, L54	Oui

Énoncé 4.5 : *Si x est un élément de **I**, alors il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Tableau T5(15)

CODE ELEVES	Réponses
L01	Non car le « si » n'a pas sa place
L02, L03, L07, L13, L14, L18, L20, L22, L24, L25, L27, L28, L29, L30, L32, L33, L38, L40, L41, L45, L46, L47, L54, L56, L57, L60, L61	Non
L04, L06, L16, L31, L34,	

L39, L50, L17, L23, L48, L54	
L05	Vrai car *M* est défini
L08, L21, L26, L36, L49	Oui
L09	Non car on donne une valeur fixe à x en disant « si x est un élément de I », or x est une inconnue
L10	Non car tout x élément de I n'appartient pas à f
L11	Non car signifie que si x n'appartient pas à I, alors f n'aura pas de majorant, (M n'existera pas) voir copie
L12	Non à cause de la reformulation voir copie (si et seulement si si)
L15	Non car x doit appartenir à I
L19	Non présence de l'implication
L35	Non car la condition d'existence de M ne dépend pas de celle de x
L37	Faux car l'hypothèse n'est pas fixée sur $f(x) \leq M$, mais $x \in I$
L42	Non car c'est une implication
L51	Oui car M et x sont définis
L53	Non car l'existence de M ne dépend pas de x comme élément de I
L55	Non car à tout x correspond un M particulier
L58	Non, on n'est pas fixé sur la nature du réel M, et de plus si on l'était, $f(x)$ doit être inférieur ou égal à M pour tout x de I car chaque x de I peut avoir un M
L59	Non, on a pris le cas d'un *x* et non pour tout x de I

Enoncé 4.3 : *Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Tableau T5(16)

CODE ELEVES	Réponse
L01	Oui car traduit parfaitement ce qui est dit en langage courant
L03	Oui, car on ne peut débuter une hypothèse mathématique avec le caractère existentiel
L04, L06, L16, L17, L19, L23, L34, L39, L48, L50, L52	
L20	Oui, grâce aux quantificateurs
L51	Oui car M et x sont définis
L05, L09	Vrai car M est défini
L12	Oui car renseigne sur la condition de M
L59	Oui car on a admis l'existence de M et on a prit le cas de tous les x de I

L15	Oui car x doit appartenir à l'intervalle et M à R
L07, L08, L14, L18, L25, L27, L29, L40, L45, L54, L56, L57, L60 (13)	Non
L11	Non car définit le réel M pour chaque élément x de I
L55	Non car M peut changer de valeur
L02, L13, L21, L22, L26, L28, L30, L31, L36, L38, L41, L42, L46, L46, L49, L61 (16)	Oui
L24	Oui car pour tout x, il existe un unique M
L32	Oui car nous avons existence de tout x dans I, il existe M
L33	Oui car si *f* est majoré sur *I*, il est majoré sur tout point de cet intervalle
L35	Oui car M appartient à R, I inclus dans R
L37	Non car l'hypothèse ici n'est pas $f(x) \leq M, c'estx \in I$
L53	Oui car $M \in R\ et\ x$ à I
L58	Non car on n'est pas fixé sur la nature réelle de M
L10	Non car $\exists x \in I, x \notin f$

Enoncé 4.4 : *Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de* ***I****, f(x)≤M*

Tableau T5(17)

CODE ELEVES	**REPONSES DES ELEVES**
L02, L07, L18, L22, L24, L25, L26, L27, L36, L40, L41, L42, L45, L60 **(14)**	Oui
L01	Oui, montre l'existence d'un majorant réel pour toute image de *x* par *f*
L11	Oui car définit le réel *M* qui est supérieur ou égal à tous les éléments *x* de *I*
L56	Oui parce que le majorant M doit être un nombre réel car $f(x)$ est un nombre réel et *M* doit être supérieur à tous les *x* de *I*
L14	Oui, car pour tout élément *x* de I, *f*(*x*) doit être majoré par le même élément *M*
L55	Oui car M est une valeur fixe que quel que soit *x* pris dans I, $f(x)$ ne peut pas dépasser
L04, L06, L16, L17, L23, L31, L34, L39,	Pas de réponse

L48, L50, L52 **(11)**	
L05	Vrai car *M* est défini
L12	Oui, car renseigne sur la condition de *M*
L51	Oui car M et *x* sont définis
L20	Oui grâce aux quantificateurs
L59	Oui car on a admit l'existence de M et on a prit le cas de tous les x de I
L09	Vrai, *M* a été défini et ceci n'est qu'une reformulation de 4.3
L53	Oui, c'est la même chose que 4.3, seulement qu'on commence ici par il existe un réel M
L32	Oui car $\forall x \in I, \exists M \in R, tel\ que\ f(x) \leq M$
L10	Oui, $f(x) \leq M$ si *M* est l'image de x ∈ *I*
L29	Oui car *M* un point quelconque du plan *f(x)*≤ *M* parce que après *M*, il n'y a plus de trace de la fonction
L35	Oui car M ∈ $R, x \in I, I$ inclus dans R
L57	Oui, M doit être un réel et x appartenir à I
L58	Oui car on a toutes les informations nécessaires sur M et I
L37	Vrai car cette définition montre l'existence de M comme réel et conditionne $x \in I, f(x) \leq M$
L15	Non car *x* appartient d'abord à *I* avant que *M* existe
L19	Oui car majoration sur un intervalle, donc on définit le majorant avant les éléments de l'intervalle
L33	Oui car *f* est majoré en tout point de I
L03, L08, L13, L21, L28, L30, L38, L46, L47, L49, L54, L61 **(11)**	Non

Tableau T5(18) comparant les réponses aux items 4.3 et 4.4

CODE ELEVES	4.3	4.4
L02, L22, L26, L36, L41, L42	Oui	Oui
L01	Oui, car traduit parfaitement ce qui est dit en langage courant	Oui, montre l'existence d'un majorant réel pour toute image de *x* par *f*
L09	Vrai car *M* est défini	Vrai, *M* a été défini et ceci n'est qu'une reformulation de 4.3
L12	Oui car renseigne sur la condition de M	Oui, car renseigne sur la condition de *M*
L20	Oui, grâce aux quantificateurs	Oui grâce aux quantificateurs
L24	Oui car pour tout x, il existe un unique M	Oui
L32	Oui car nous avons existence de tout x dans I, il	Oui car $\forall x \in I, \exists M \in R, tel\ que\ f(x) \leq M$

	existe M	
L33	Oui car si f est majoré sur I, il est majoré sur tout point de cet intervalle	Oui car f est majoré en tout point de I
L35	Oui car M appartient à R, I inclus dans R	Oui car M $\in R, x \in I, I$ inclus dans R
L51	Oui car M et x sont définis	Oui car M et x sont définis
L53	Oui car $M \in R$ et x à I	Oui, c'est la même chose que 4.3, seulement qu'on commence ici par il existe un réel M
L59	Oui car on a admis l'existence de M et on a prit le cas de tous les x de I	Oui car on a admit l'existence de M et on a prit le cas de tous les x de I
L05	Vrai car M est défini	Vrai car M est défini
L07, L18, L25, L27, L40, L45, L60	Non	Oui
L37	Non car l'hypothèse ici n'est pas $f(x) \leq M, c'est x \in I$	Vrai car cette définition montre l'existence de M comme réel et conditionne $x \in I, f(x) \leq M$
L55	Non car M peut changer de valeur	Oui car M est une valeur fixe que quel que soit x pris dans I, $f(x)$ ne peut pas dépasser
L56	Non	Oui parce que le majorant M doit être un nombre réel car $f(x)$ est un nombre réel et M doit être supérieur à tous les x de I
L57	Non	Oui, M doit être un réel et x appartenir à I
L58	Non car on n'est pas fixé sur la nature réelle de M	Oui car on a toutes les informations nécessaires sur M et I
L10	Non car $\exists x \in I, x \notin f$	Oui, $f(x) \leq M$ si M est l'image de x $\in I$
L11	Non car définit le réel M pour chaque élément x de I	Oui car définit le réel M qui est supérieur ou égal à tous les éléments x de I
L14	Non	Oui, car pour tout élément x de I, $f(x)$ doit être majoré par le même élément M
L29	Non	Oui car M un point quelconque du plan f(x)$\leq M$ parce que après M, il n'y a plus de trace de la fonction
L21, L28, L30, L38, L46, L49, L61	Oui	Non
L15	Oui car x doit appartenir à l'intervalle I et M à R	Non car x appartient d'abord à I avant que M existe
L03	Oui car on ne peut débuter une hypothèse mathématique avec le caractère existentiel	Non
L13, L31	Oui	
L47		Non
L08, L54	Non	Non
L19		Oui car majoration sur un intervalle, donc on définit le majorant avant les éléments de l'intervalle
L04, L06, L16, L17,		

L23, L34, L39, L43, L44, L48, L50, L52		

Exercice 6

Tableau T6(6) (Item 6.1)

CODE ETUDIANTS	REPONSES 6.1
E02, E06, E07, E10, E12, E15, E17, E19, E22, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E33, E34, E37, E38, E39, E42, E43, E44, E45, E49, E52, E53, E55, E56, E57, E58, E61, E62, E63, E65, E66, E67, E68	La suite diverge **(39)**
E41	f n'est pas bijective donc la suite ne converge pas
E14, E46, E48,	La suite converge **(3)**
E50	La suite n'existe pas
E21	La suite peut converger
E40	On ne peut rien dire car u_0 n'est pas donné
E59	On ne peut rien dire au sujet de la convergence de la suite
E01, E03, E04, E05, E08, E09, E11, E13, E16, E18, E20, E23, E24, E35, E36, E41, E47, E51, E54, E60, E64	Pas de réponse **(21)**

Tableau T6(7) (Item 6.2)

CODE ETUDIANTS	REPONSES 6.2
E15, E19, E22, E37, E46, E63	On ne peut rien dire
E10	La suite peut être convergente
E30	u_n n'est pas forcément convergente. L'une de ces solutions peut être la limite de u_n
E02	La suite converge et la limite en cas de solution multiple aura le signe des termes de la suite
E26	u_n converge vers la solution qui vérifie les conditions de f
E06, E07, E12, E17, E21, E28, E31, E32, E39, E43, E44, E53, E57, E58, E59, E61	La suite converge

E27	Le résultat peut dépendre des propriétés de u_n. Si u_n est positive, u_n est négative par exemple, on peut avoir des résultats différents
E29	La suite converge vers l'image par f de l'une de ces solutions
E24, E33, E38, E45	La suite converge vers cette solution
E14, E48, E50, E52, E66,	La suite ne converge pas
E25	La suite n'admet pas de limite car la limite de u_n est unique
E49, E68, E65	Si une unique solution, la suite converge, sinon elle diverge
E34	Dépend des conditions de l'exercice
E40	On ne peut rien dire car u_0 n'est pas donné
E42	On ne dira rien car avoir une solution unique est contenu dans la proposition avoir au moins une solution
E56	La suite converge vers cette solution à condition qu'elle soit positive
E55	La suite admet au moins une sous suite convergente
E62	La suite a plusieurs limites, ce qui contredit l'unicité de la limite, la suite diverge
E67	La suite n'est pas monotone
E01, E03, E04, E05, E08, E09, E11, E13, E16, E18, E20, E23, E35, E36, E41, E47, E51, E54, E60, E64	Pas de réponse (18)

Tableau T6(8) (Item 6.3)

CODE ETUDIANTS	REPONSES 6.3
E15, E24, E26, E29, E38, E46, E53	L'équation a au moins une solution
E14, E31, E33, E34, E39, E42, E44, E49, E50, E55, E62, E63, E65, E66, E67, E68 (16)	$f(x) = x$ a une seule et unique solution
E06, E43, E48	$f(x) = x$ a une solution
E37	$f(x) = x$ a pour solution la limite de la suite
E07, E25	Elles sont égales
E17, E28, E40, E59	La limite est solution de l'équation
E19, E22, E35,	Il existe une unique solution entre les solutions trouvées qui soit la limite

E58	La suite cv vers les solutions
E30	$f(x) = x$ admet une seule solution vérifiant les conditions de u_n
E32	$f(x) = x$ admet une solution réelle qui est l'image de a par f
E52	$f(x) = x$ a une seule solution positive
E56	$f(x) = x$ admet au moins une solution positive
E61	On ne peut se prononcer car ce n'est pas une équivalence
E02	Ces solutions pourront être soit majorant, soit minorant de la suite
E21	L'équation peut soit avoir des solutions, soit ne pas avoir de solution
E41	Si la suite est convergente, la fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
E01, E03, E04, E05, E08, E09, E10, E11, E12, E13, E16, E18, E20, E23, E27, E36, E45, E47, E51, E54, E57, E60, E64	Pas de réponse (23)

Tableau T6(9) : croisement des réponses des catégories R4_3, R4_3*, et R4_3**

	6.1	6.2	6.3
E25	La suite diverge	La suite n'admet pas de limite car la limite de u_n est unique	$f(x) = x$ a une unique solution
E49	La suite diverge	Converge si une solution, sinon diverge	$f(x) = x$ a une unique solution
E62	La suite diverge	La suite a plusieurs limites, ce qui contredit l'unicité de la limite, la suite diverge	$f(x) = x$ a une unique solution
E65	La suite diverge	Converge si une solution, sinon diverge	$f(x) = x$ a une unique solution
E68	La suite diverge	Converge si une solution, sinon diverge	$f(x) = x$ a une unique solution
E42	La suite diverge	On ne dira rien, car avoir une solution unique est contenue dans la proposition avoir au moins une solution	$f(x) = x$ a une unique solution
E34	La suite diverge	Dépend des conditions de l'exercice	$f(x) = x$ a une unique solution
E63	La suite diverge	On ne peut rien dire	$f(x) = x$ a une unique solution
E14	La suite converge	La suite ne converge pas	$f(x) = x$ a une unique solution

E50	La suite n'existe pas	La suite ne converge pas	$f(x) = x$ a une unique solution
E66	La suite diverge	La suite ne converge pas	$f(x) = x$ a une unique solution
E26	La suite diverge	u_n converge vers la solution qui vérifie les conditions de f	L'équation a au moins une solution
E43	La suite diverge	La suite converge	$f(x) = x$ a une solution
E44	La suite diverge	La suite converge	$f(x) = x$ a une unique solution
E53	La suite diverge	La suite converge	L'équation a au moins une solution
E55	La suite diverge	La suite admet au moins une sous-suite convergente	$f(x) = x$ a une unique solution

Exercice 7

Tableau T7(4) : La catégorie « Vrai »

Code étudiants	Justifications
E02	L'inégalité stricte implique l'inégalité large, et comme cette dernière est une relation d'ordre (transitive), nous en déduisons que la propriété est vraie
E43	$x < y \Rightarrow x \leq y$ et $y < x \Rightarrow y \leq x$. D'où $x = y$
E50	$x < y \Rightarrow x \leq y$ et $y < x \Rightarrow y \leq x$. Or $(x \leq y$ et $y \leq x) \Rightarrow x = y$
E15	La contraposée est vraie (suivi d'une démonstration) remettre chez les premiers : se ramène au processus standard de preuve
E13	On a $x < y$ et $y < x \Rightarrow x < y < x$. il n'y a aucun réel entre x à gauche et x à droite, donc y est obligatoirement égal à x, donc $x = y$
E38	$x < y \Rightarrow x \subseteq \{y\}$, $y < x \Rightarrow y \subseteq \{x\}$ par conséquent $x = y$
E44	$P \Rightarrow Q$ est vrai dès que P est faux
E45	Car $P \Rightarrow Q$ est vrai si val $P = 0$ (avec $P \equiv (x < y\ et\ y < x)$ et $Q \equiv x = y$)
E62	P et Q étant des propositions, P(fausse)$\Rightarrow$ Q(vraie), alors $P \Rightarrow Q$ vraie
E14	C'est l'antisymétrie

E56	D'après l'antisymétrie à voir la définition pour les 4
E32	Evoque l'antisymétrie
E61	C'est l'antisymétrie de $<$
E11	$\mathbb{R}$ est ordonné argument math faible
E33	$(\mathbb{R}, <)$ est une relation d'ordre total argument math faux

Tableau T7(5) : La catégorie « Faux »

Code étudiants	Justifications
E01	Il faut $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$
E20	Cette proposition est vraie si $x \leq y$ et $y \leq x$
E49	Par contre si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$
E24	L'inégalité doit être au sens large
E06	$x < y$ *et* $y < x$ est impossible, on pourrait avoir $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$
E08, E29, E59	L'inégalité est stricte
E19	$x < y$ *et* $y < x$ implique $x \neq y$
E28	Si $x < y$, alors $x \neq y$
E55	$x < y$ *et* $y < x$ impossible
E25	Il n'existe pas de nombre (x, y) tels que $(x < y \ et \ y < x)$, alors $x = y$
E04	Si $x = 2$ et $y = 3$, on n'a pas $3 < 2$, mais on a $2 < 3$, ce qui contredit la définition. Ainsi on ne peut pas avoir $2 = 3$
E35	Car par exemple $2,\ 3 \in \mathbb{R}, 2 < 3 \ et \ 3 \nless 2$
E40	1 n'est pas strictement inférieur à 1 mais $1 = 1$
E23	Cette propriété traduit l'antisymétrie dans une relation d'ordre partiel, car deux éléments ne sont pas comparables par la relation
E57	$<$ est une relation d'ordre strict
E67	Un tel nombre n'existe pas
E10	$\mathbb{R}$ est séparé

Tableau T7(6) : la catégorie « autres réponses »

Code étudiants	Réponses
E06	$x < y$ *et* $y < x$ est impossible, on pourrait avoir $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$
E20	Cette proposition est vraie si $x \leq y$ et $y \leq x$
E26	C'est l'antisymétrie
E51	Cette propriété marque l'antisymétrie

Exercice 8

<u>Item 8.1</u>: *Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que* $a < b$

Tableau T8(5)

CODE ETUDIANT	$]0,1]$	$[0,1[$	$[-5,+\infty[$	$]-\infty,1000]$
E11, E13, E14, E16, E20, E28, E29, E42, E43, E44, E49, E55, E57, E62, E66, E67 **(16)**		X	X	
E06, E15, E24, E25, E26, E27, E39, E40, E41, E45 **(10)**			X	
E01, E09, E50, E61, E68 **(5)**	X			X
E09	X, pour a fixé il suffit de prendre $b = \frac{1}{2}a$			X, pour a fixé, il suffit de prendre $b = a - 1$
E38	X	X	X	X
E30	Aucun intervalle ne convient : 8.1 signifie que tout élément de I admet un autre plus grand que lui, ie I n'est pas majoré			
E33		X car I n'a pas de plus grand élément		
E56		X		
E19, E65				X
E08			X	X
E59	X			
E02, E03, E04, E05, E07, E10, E12, E17, E18, E21, E22, E23, E31, E32, E34, E35, E36, E37, E46, E47, E48, E51, E52, E53,	Pas de réponse			

E54, E58, E60, E63, E64 **(29)**	

Item 8.2 : *Il existe b dans I tel que, pour tout a dans I, $a < b$*

Tableau T8(6)

CODE ETUDIANT	$]0,1]$	$[0,1[$	$[-5,+\infty[$	$]-\infty,1000]$
E09	Aucun intervalle			
E26	Pas existante car on a $a < b$ et non $a \leq b$			
E29	Aucun intervalle ne répond			
E30	Aucun intervalle ne convient : **8.2** signifie que I est majoré			
E42	La liste est vide			
E45	Je ne vois pas			
E67	$I = \emptyset$			
E11, E13, E14, E20, E27, E43, E49, E55, E62, E66, E68 **R2**	O			O
E25 **R2***	O	O		O
E01 **R3**		O	O	
E39, E44, E59, E65 **R3***			O	
E06, E24, E41, E56				O
E40, E28, E57		O		
E33, E34	O			
E02	O	O		
E08, E19	O	O	O	
E38	O	O	O	O
E03, E04, E05, E07, E10, E12, E15, E16, E17, E18, E21, E22, E23, E31, E32, E35, E36, E37, E46, E47, E48, E50, E51, E52, E53, E54, E58, E60, E61, E63, E64 **(31)**	Pas de réponse			

Tableau T8(7)

Etudiants ayant réussi l'item 8.1	Réponses à 8.2	Réponses à 5.3	Réponses à 5.4
E11	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Pas de commutativité entre ∀ et ∃	Oui
E13	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Non, à chaque x on associe une image bien précise	oui, aucune image de x par f ne dépasse M
E14	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Non, on doit d'abord trouver M	Oui, c'est la définition
E16	Pas de réponse	Non, M n'est pas unique dans $\mathbb{R}$	Oui
E20	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Oui	Non
E28	$[0,1[$	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Oui, c'est la définition
E29	Aucun intervalle ne répond	Non, on peut trouver plusieurs M répondant à la question	oui, M est fixé et majore f
E42	La liste est vide	non, M est variable et est fonction de $f(x)$, x∈ I	Oui, c'est la définition
E43	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Non	Oui
E44	$[-5, +\infty[$	M dépend de x, or il doit être le même pour chaque x	Oui
E49	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	non, M peut être dans I et on pourra trouver a dans I tel que $a > M$	oui, car M est supérieur à tous les éléments de I
E55	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Non	Oui
E57	$[0,1[$	Oui	non, on a permuté les quantificateurs
E62	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Vrai, définition de fonction majorée	non car position des quantificateurs non respectée
E66	$]0,1]$ et $]-\infty, 1000]$	Vrai, d'après la définition du majorant	Vrai, la définition du majorant
E67	$I = \emptyset$	Non, car M n'est pas fonction de x	Oui

<u>Item 6.1</u> : *Pour tout a dans I, il existe b dans I tel que $a < b$*

Tableau T8(8)

CODE ELEVE	$]0,1]$	$[0,1[$	$[-5,+\infty[$	$]-\infty,1000]$
L01, L03, L05, L06, L11, L13, L20, L22, L24, L29, L42, L47, L55, L58, L59, L61 **(16)**		X	X	
L08, L27, L37, L41, L44, L53, L54, L60 **(8)**			X	
L10, L18, L23	X			X
L09, L15, L28, L35, L36, L40, L46 **(7)**		X		
L02, L21, L32				X
L04, L39, L50, L57			X	X
L12, L48, L51	X			
L49	X	X		
L45	X	X	X	X
L07, L14, L16, L17, L19, L25, L26, L30, L31, L33, L34, L38, L43, L52, L56 **(15)**	Pas de réponse			

Tableau T8(9)

CODE ELEVE	$]0,1]$	$[0,1[$	$[-5,+\infty[$	$]-\infty,1000]$
L01, L05, L06, L11, L13, L20, L22, L24, L29, L55, L59, L61 **(12)**	X			X
L02, L03, L21, L41, L49, L53 **(6)**			X	
L10, L18, L23, L42, L58 **(5)**		X	X	
L08, L12, L27, L36, L37,				X

L44, L46, L54, L60 **(9)**				
L09, L32, L35	X			
L04, L39	X	X		
L19, L47, L57			X	X
L28, L40, L48, L51		X		
L45	X	X	X	X
L07, L14, L15, L16, L17, L25, L26, L30, L31, L33, L34, L38, L43, L50, L52, L56 **(16)**	Pas de réponse			

Exercice 10

Tableau exercice 10

Code étudiants	**Réponses**
E02	$(\forall n)\big((n \in \mathbb{N}, n \geq 4) \Rightarrow (\forall (a,b)\ premiers\ n = a + b)\big)$
E04	Soit $n = 2k, n \geq 4 \Rightarrow 2k \geq 4 \Rightarrow k \geq 2 = 1 + 1$
E05	$\forall n \in 2\mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2\ /p + q = n,$ avec p, q premiers
E15	$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 4)\ \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k \Rightarrow \exists p_1, p_2 \in P/n = p_{1+}p_2$
E16	$\forall n \in \mathbb{N}/\ n = 2k, k \in \mathbb{N}\ n \geq 4 \Rightarrow \exists p_1\ et\ p_2 \in \mathbb{N}$ et premiers / $n = p_1 + p_2$ portée du QU ; EO en k
E20	$\forall n \in \mathbb{Z}/\ n = 2k$, (avec $k \in \mathbb{Z}^*$) et $n \geq 4$, $n = p + q/\ p, q$ sont premiers EO en k, p et q
E24, E45	$\forall n, n \geq 4 \Rightarrow n = x + y$ (avec x et y des nombres premiers) EO en x et y
E25	$\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}, \exists (p,q) \in \mathbb{Z}_+^2\ /\ n = p + q$ avec $\cancel{p \wedge q = 1}$
E26	$\forall n \in 2\mathbb{Z}, n \geq 4\ \ n = a + b$ avec a, b des entiers premiers EO ouvert en a et b
E27	$\forall n, n = 2k\ (k \in \mathbb{Z}_+^2)\ n > 4, \exists n_1\ et\ n_2$ premiers tels que $n = n_1 +\ n_2$ EO en k
E28	Posons P ensemble des nombres premiers ; A=$\{n \in \mathbb{N}\ /n \geq 4\ et\ n\ pair\}$ $\forall n \in A, \exists (a,b) \in P^2/\ n = a + b$ effet de la quantification bornée : apparition

	et disparition des quantificateurs ; absorption de la quantification
E29	$(\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in N - \{0,1\}, n = 2p) \Rightarrow (\exists p, q \in \mathbb{N}, p\ et\ q\ premiers\ / \ n = p + q)$ EO en n (conséquent), problème au niveau des parenthèses
E30	$\forall n \in \mathbb{N}, n\ pair, n \geq 4 \Rightarrow \exists p, q \in P, n = p + q$
E31	$\forall n \in 2\mathbb{N}, \exists (p,q) \in P^2$ tels que $n \geq 4 \wedge n = p + q$, avec P ensemble des nombres premiers syntaxe incorrecte et modification de la signification
E32	$\forall n \in \mathbb{N}/n \geq 4, n = 2k\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}\ /a \wedge b = 1$ 1 variable libre et une équivalence
E33	$\forall n \in 2\mathbb{N}, n \geq 4, \exists p_0, p_1$ premiers / $n = p_0 + p_1$
E39	$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k, n \geq 4, n = (2k^{'} + 1) + (2k^{''} + 1)\ k^{'}, k^{''} \in \mathbb{Z}, 1/2k' + 1, 1/2k'' + 1$ 2 variables libres
E40	$\forall n \in \{2k\}, k \in \mathbb{N},\ n \geq 4, n = p_1 + p_2$ avec $p_{1,}\ p_2$ premiers 3 variables libres
E41	$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2,3\}\ /\ n = 2k, n = X_1 + X_2$ où $D_{X_1} = \{-X_1, -1,\ 1, X_1\}$ et $D_{X_2} = \{-X_2, -1,\ 1, X_2\}$ 3 variables libres
E42	$\forall x \in \mathbb{N}^* - \{2\}\ /x = 2n\ \exists p, q \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*\ p \wedge n = 1, q \wedge n = 1$ et $x = p + q$ occurrence de n libre et n lié
E43	$\forall n \in \mathbb{N}, n\ pair\ et\ n \geq 4 \Rightarrow n = p + q$ avec $p \wedge q = 1$ EO en p et q ; confusion entre premier et premier entre eux
E44	$\forall n \in \mathbb{Z}/\ n = 2k; k \in \mathbb{Z},\ n \geq 4 \Rightarrow n = a + b$ avec $pgcd(a, n_1) = 1, n_1 < a$ et $pgcd(b, n_2) = 1, n_2 < b$ 5 variables libres
E50	$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \wedge q = 1, n = p + q$ nombres premiers entre eux
E67	$\forall n = 2p, p \geq 2, p \in \mathbb{N}\ \Rightarrow n = T_1 + T_2$ avec $T_1 et\ T_2 \in \mathbb{N}$ et $D(T_1) = \{1, T_1\}$; $D(T_2) = \{1, T_2\}$ EO en $T_1 et\ T_2$, et explicitation de $T_1 et\ T_2$ premiers
E68	$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, n = 2k, k \in N^*, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1 \wedge n_2 = 1, n = n_1 + n_2$ EO en k ; nombres premiers entre eux

ANNEXE 7 : QUESTIONNAIRE ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES DU SECONDAIRE

(Ceux qui interviennent en TS)

1. Dispensez-vous un cours de logique en début d'année ? Si oui, quel est son contenu (cours, exercices, introduction ou non des symboles logiques) ? Si non pourquoi ?
2. Au cours de l'année scolaire, est ce que vous rencontrez des situations opportunes au cours des leçons pour enseigner les concepts de logique et insister sur leur utilisation ? (Commentaire : *dans le sens que la logique devrait être enseignée au fur et à mesure et en situation*)
3. Quels sont les connecteurs logiques que vous introduisez explicitement en classe ? Est-ce que vous en donnez une définition et précisez-vous leurs règles d'utilisation en mathématiques? Sous quelle forme sont utilisés ces connecteurs (langue naturelle, formelle) ?
4. Lorsque vous faites un cours au tableau, ou lorsque vous rédigez un corrigé pour vos élèves, veillez-vous à utilisez les connecteurs logiques en respectant leurs règles d'usage en mathématiques ? Si oui, pensez-vous que les élèves partagent le sens de ce qui est énoncé et attendez-vous de vos élèves qu'ils respectent ces règles d'usage en mathématiques, ou acceptez-vous un usage plus proche du langage de tous les jours ? (Commentaire : *les connecteurs pourraient être utilisés de façon machinale, par habitude, et les élèves pourraient ne pas comprendre leur utilité*)
5. Introduisez-vous explicitement les deux quantificateurs : universel (Pour tout, quelque soit) et existentiel (Quelque, il existe au moins un) ? Si oui, dans quel cas considérez-vous qu'il est nécessaire de les utiliser ? Utilisez-vous la notation symbolique ou non, et si oui, dans quels cas ? Pouvez-vous donner des exemples ? (commentaire : *lorsqu'on parcourt les manuels au programme, le quantificateur universel est presqu'absent. Les théorèmes et propriétés générales sont donnés avec des éléments génériques)*.
6. En mathématiques, les lettres que nous utilisons peuvent avoir plusieurs statuts logiques : nom d'objet singulier ; nom d'objet générique ; lettre de variable libre ; lettre de variable liée (dans le champ d'un quantificateur) ; est-ce que dans certains cas vous êtes amené à évoquer cette question avec vos élèves. Si oui, pouvez-vous donner un ou deux exemples.

7. La prise en charge des étudiants en logique permet-elle de faire face au formalisme qu'ils rencontreront à l'université (dans l'enseignement supérieur) ? (comme par exemple les définitions de la limite, de la continuité, négation des énoncés complexes)

ANNEXE 8 : Retranscription de l'entretien avec un animateur pédagogique AP1

1 J : on se rend compte en première année d'université que les concepts de logique ne sont pas vraiment présents chez les enfants, et pourtant c'est indispensable pour faire les mathématiques. La première question que je vais te poser et dont j'ai eu la réponse en partie est de savoir si tu dispenses les cours de logique en début d'année.

2 F : oui effectivement, puisque tu sais que dans notre programme camerounais, on a demandé d'enseigner tacitement la logique. Mais, pour ces élèves de terminale, je fais un rappel d'une certaine manière en début d'année, à savoir, commencer par les conjonctions de coordination, le *et*, le *ou*. Ensuite,

3 J : Pardon : est ce que tu utilises les symboles ? pour le

4 F : oui, oui, justement. Puisque en classe de terminale, moi je ne suis pas… je sais que, pour avoir été dans des séminaires, les gens disaient que quand on utilise les symboles, les enfants ne comprennent pas. C'est vrai aussi, mais vraiment, quand on veut faire des mathématiques, on ne peut pas tout écrire. À un moment donné, ce symbolisme… je vais même jusqu'à demander qu'ils traduisent les textes de la langue française dans l'écriture mathématique.

5 J : Ah, d'accord, le symbolisme.

6 F : dans l'écriture mathématique, or ça c'est une initiation. Quand je prends une terminale C, l'accent est mis là-dessus. Vu que dans le contexte des applications et des autres, je mets un accent particulier sur la rédaction logique. Parce que formellement aussi, ils doivent savoir faire des négations.

7 J : ça c'est pendant le cours de début d'année ?

8 F : pendant le Cours de début d'année. Je fais une petite synthèse mais en m'appuyant de temps en temps sur des connaissances antérieures, par exemple comme sur les fonctions : les applications injectives et surjectives. J'introduis les symboles et tacitement je donne la signification de chaque symbole : le *quel que soit*, le *il existe* les implications, mais il ne faut pas se leurrer. Comme beaucoup n'en n'ont pas l'habitude, l'utilisation est pénible. Généralement, c'est vers le mois d'avril que beaucoup de mes élèves essaient de faire une écriture conforme. Parce que vraiment, en début-là, parce qu'ils viennent de rentrer dans ce domaine, beaucoup même, comme ils viennent d'horizons divers, il y en a qui n'en ont jamais entendu parler. Ça m'a poussé donc maintenant comme j'enseigne aussi les classes de seconde C, de commencer à introduire le symbolisme en seconde C. Parce que généralement, en reprenant mes propres élèves en terminale, j'ai eu la chance de constater que ceux que j'ai déjà eu à encadrer, ils n'ont pas de problème. En seconde C, carrément, chaque symbole logique que j'utilise, les enfants doivent me suivre. Et après même le cours, il en a qui hésitent. Là, c'est une préparation. Mais le rendement était bon, c'est-à-dire que, les élèves les plus assidus, à qui j'explique le bien fondé de l'écriture symbolique dans le sens de rendre très courtes les expressions, dans le sens même de faire le condensé de l'interprétation des données. Parce qu'en fait, dans un long discours, quand tu peux abréger en comprenant la signification, tu as la maîtrise aussi. Seulement, je fais un gros travail, la maîtrise de la langue,

cette logique qui en fait est décodée chez nous par la langue, mais j'ai la souffrance parce qu'il faut traduire la langue française en soulignant l'impact du vocabulaire de la langue française du côté logique. Par exemple, quand je dis *ou*, le *ou* logique-là, beaucoup dans leur langage commun parlent de *ou*, ils ne savent pas que logiquement quand tu le mets dans une phrase, tu es entrain d'équilibrer ! Puisque, en fait ça veut dire que si une proposition est vraie, même si l'autre n'est pas vraie, tu es dans le bon contexte. Cette liaison n'est pas facile, parce que beaucoup même parlent couramment, disent des choses couramment, lisent les textes, mais c'est avec le temps qu'ils s'approprient effectivement l'impact de *et*, de *ou*, de « *si … alors …* » dans la communication.

9 J : Et tu fais les tables de vérité ?

10 F : Non, j'essaie d'éviter de le faire en début, j'essaie plutôt d'aller malignement jongler, par exemple pour dire « la conjonction de deux propositions n'est fausse que » En le disant, bon ! Et lorsqu'on arrive aux dénombrements, je reviens un peu là-dessus. À partir de là, ils peuvent à partir d'un arbre savoir quels sont les divers cas. Mais en début, je ne mets pas l'accent sur les divers cas a priori. Je commence par dire « la conjonction, si P et Q, par exemple, j'ai deux propositions, bien sûr, je leur précise ce qu'est une proposition : une phrase à laquelle on peut sans ambiguïté donner une valeur de vérité- alors je passe du temps à bien insister, et après je fais les conjonctions des propositions composées comme ça. Mais chaque fois que je fais la conjonction de deux propositions, je me contente de dire P et Q n'est vraie que si P est varie et Q vraie. Parce que si maintenant je commence à dire, faisons un tableau, j'aurai des problèmes pour expliquer pourquoi les cas doivent apparaitre comme ça. J'attends donc quand on fait les dénombrements, et je dis, par exemple si on a deux propositions, quelles sont les diverses situations ? À l'aide d'un arbre, maintenant, je dis on peut faire une table de vérité parce qu'avec ton arbre tu vois que tu as quatre situations. Bon donc, et puis même pour la disjonction de deux propositions, je me contente de prendre l'élément essentiel, le cas singulier de la table. Ça permet donc, maintenant, après, j'ai la justification pour les autres cas en disant, bon, si P n'est pas vraie et si Q est par exemple fausse, ils déduisent facilement parce qu'ils ne sont plus dans le contexte de *et*. Voilà comment j'essaie de contenir ça. Et puis je mets l'accent sur les démonstrations. C'est même ça l'essentiel pour moi d'insister. Dès le début de l'année, je commence à insister sur les différents types de démonstration par les implications, et là je prends des exemples sur des cas qu'ils ont déjà vu en première ou sur les suites, et j'essaie de dire « quand nous voulons démontrer, c'est comme ça ». Quand je fais même l'arithmétique, je montre comment on fait une démonstration par disjonction de cas. 7 mn 13s.

11 J : est ce qu'il

12 F : mais en revenant sur la logique

13 J : ah oui, c'est ce que j'allais demander. Est-ce qu'ils font le rapport entre la disjonction de cas et la logique ?

14 F : c'est moi qui insiste en disant voilà, quand on dit disjonction de cas, on doit choisir un cas vrai pour l'éliminer rapidement, puisque P ou Q est vrai lorsque P est vraie ou Q est vraie,

si l'une des deux propositions est vraie. La disjonction des cas consiste à dire « si une de ces propositions est déjà vraie, la disjonction est vraie. Alors maintenant, si tu suppose que c'est faux, tu dois pouvoir montrer que l'autre est vraie. Dans ces liens là, je rappelle que ce sont des liens les plus difficiles au début, parce que beaucoup d'enfants ne démontrent pas, ne savent même pas commencer une démonstration parce que devant une proposition à démontrer, ils ne connaissent pas la forme. Et dès le début même, pour mes élèves de terminale, j'insiste chaque fois que je pose une question, de pouvoir me donner quelle forme de démonstration ils ont en face. Si c'est une égalité, les principes. En début d'année, j'insiste. Pour démontrer une égalité qu'est ce qu'on fait ? pour démontrer une disjonction, pour démontrer une conjonction. Donc au fur et à mesure que je rencontre des problèmes pendant les premiers moments de nos rencontres, dès qu'il y a une question, je dis « bon cette question, c'est quelle forme ? est ce qu'il y a quelque chose à calculer ? alors de manière que, à la fin, j'ai des bons ! Comme maintenant j'ai un qui fait un 20/20 carrément. Parce que s'adapter n'est pas facile. Il y a un que j'ai tenu en seconde. En début d'année sa moyenne était 7, mais maintenant quand on lui enlève quelque chose c'est avec beaucoup de peine. Mais il s'est adapté parfaitement, de manière que quand on pose une question, il est capable donc de donner la forme, il est capable d'identifier et on leur enseigne maintenant comment exploiter les hypothèses 9mn 12s et donc dans ces schémas-là, pour les implications par exemple, j'insiste sur les données ; tu ne peux pas bien résoudre un problème si tu n'as pas encore bien maîtrisé ce qu'on en dit hein ? ça fait partie donc des données. Maintenant la forme, si c'est une conclusion à tirer de là, il faut entrainer les gens logiquement à partir des données, avant de chercher les éléments de cours qui peuvent compléter. Ça c'est un exercice pénible pour moi, mais je sais que depuis que nous enseignons on arrive à décrocher quelques-uns, on arrive à décrocher.

15 J : En dehors des démonstrations, est ce que tu as d'autres opportunités dans les cours que tu saisis pour expliciter …

16 F : Oui, en géométrie. en géométrie par exemple, quand on donne une définition, la partie logique n'est pas que formelle ! Il y a aussi le côté logique des choses

17 J : C'est-à-dire ?

18 F : C'est-à-dire que, quand on définit un objet, si on en parle, tu ne peux rien dire si tu ne connais pas la définition. Donc logiquement, je ne peux rien dire si je ne maîtrise pas la définition. C'est pour ça que lorsque j'ai un problème, je dois regarder les éléments essentiels du texte qui me guident vers la solution. Et la plupart du temps pour leurs problèmes, je leur dis, logiquement un élève peut laisser une question, utiliser le résultat pour répondre à l'une sans avoir démontré le premier. Ça ce sont des occasions où j'insiste sur la logique de l'évolution d'un résultat. Donc séquentiellement, quelques questions dans certains problèmes nous amènent à la réponse. Si en chemin tu n'as pas démontré un résultat, ça ne veut pas dire que c'est un mauvais résultat pour la question suivante. Et les formulations même de certaines définitions, je suis obligé de faire appel par exemple aux symboles logiques, et de temps en temps donc, on est obligé de bien insister sur le quel que soit, le il existe dans certaines démonstrations, quand on demande de justifier l'existence, les théorèmes d'existence par

exemple. Vous ne pouvez rien faire sans la logique. Parce que formellement, il faut savoir à un moment donné, que quand c'est un théorème d'existence, tu es obligé de t'appuyer sur un résultat. Or, dans la plupart du temps, s'il faut donner le contraire, et généralement, j'ai constaté aussi que dans beaucoup d'exercices et certains problèmes, si tu ne peux pas faire la négation, si tu ne peux pas maîtriser la négation, tu ne peux rien dire, la négation. Voici des cas où parfois on est obligé … la démonstration par l'absurde dont je parlais tantôt en début d'année. Tout le long de l'année, pour des exercices en arithmétique, il faut qu'on en appelle à ces éléments-là. Même en géométrie.

19 J : et pour les connecteurs –là, est ce que, enfin pour la quantification, parce que je sais que généralement, le A renversé, on utilise beaucoup quel que soit. On utilise beaucoup « pour tout ». Maintenant, est ce que les enfants, tu penses que les enfants pensent au quantificateur universel quand on dit *chaque* ?

20 F : Justement, mon travail a toujours consisté à ce qu'ils soient capables de passer de la langue française à la traduction mathématique

21 J : parce que nous avons eu une interview avec des enfants de terminale, et ils disaient, ils n'ont pas identifié chaque comme quantificateur universel. Pour eux, c'était, bon…

22 F : un mot quelconque

23 J : un mot de la langue française

24 F : et cela un impact dans un problème, si on dit chaque élément a cette propriété alors que tu en as besoin. Donc s'il y a au moins un qui n'en a pas, tu peux au moins dire que c'était le quantificateur universel. Donc de temps en temps, je joue beaucoup sur la langue française ; le quel que soit, le pour tout, le passage d'un discours en langue française à une écriture dans le formalisme mathématique et l'utilisation des connecteurs. Et je vous dirais effectivement que quand vous réussissez à ce que les enfants comprennent bien, ces mots-là, l'évolution vers les solutions c'est un peu diminué, ils ont gagné au moins un quart sur le chemin, et déjà ils savent un peu comment ils vont faire. Ils savent même quel est l'accent qui est sur le problème. Parce que, quand on ne maîtrise rien, parfois tu trouves une copie où quelqu'un regarde, il écrit n'importe quoi qui est insensé, or j'ai la chance que, lorsque je fais ce travail de masse, même quand on ne me donne pas même une moyenne, dans la copie il y a quand même les choses qui sont sensées, de manière que les élèves s'abstiennent d'écrire sans savoir ce qu'ils écrivent. Ça c'est déjà un combat, parce que, quand ils ne maîtrisent rien, il n'a aucune logique de la compréhension du discours, il se met à écrire à tort et à travers. C'est ce que moi je dis, ne le faites pas. Si tu n'as pas compris, n'écris pas au hasard

25 J : n'cris pas, on n'écrit pas ce qu'on ne comprend pas

26 F : et normalement l'utilisation des connecteurs-là …, surtout que la langue aujourd'hui, je me plains au lycée et même en réunion ! Ce qu'on appelle la langue française, beaucoup de nos candidat en sciences aujourd'hui ont des difficultés à cause de la langue

27 J : Enorme

28 F : tu fais un petit… en probabilité alors c'est grave ! Tu fais un petit discours et les gens ne sont pas capables de bien appréhender le fond. C'est ça qui est donc un combat à faire, les amener à maîtriser les termes d'une langue, les diverses façons d'énoncer même et le fond d'un discours. Donc il y en a plein, même quand je leur dis, bon il faut savoir déjà trouver les équivalences. Par exemple les négations-là ! Souvent je leur dis, faisons une négation même sauvage, c'est-à-dire qu'on ajoute le *ne pas*. Maintenant quand on ajoute le *ne pas*, on peut reformuler en langue française, pour que le même discours ait la même finalité, sans que ça puisse se présenter dans la même forme.

29 J : Quand tu dis ajouter le *ne pas*, ça veut dire quoi ?

30 F : C'est-à-dire que, lorsque je veux faire la négation d'une proposition en langue française, si je dis « je sors », la négation c'est « je ne sors pas ». J'ajoute le substantif *ne pas*.

31 J : mais par exemple « tous les enfants sont dehors » ?

32 F : à un moment donné, on doit chercher l'équivalent. Mais « tous les enfants ne sont pas dehors », ça c'est la négation sauvage.

33 J : mais c'est la négation dans la langue française

34 F : Elle est sauvage puisque dans la tournure de la langue française

35 J : je crois qu'il faut dire courante que de dire…

36 F : dans la tournure de la langue française, on ajoute le… Non mais c'est déjà un pas. C'est pourquoi je suis content pour un enfant qui peut déjà introduire le substantif *ne pas* dans son discours pour nier, en le reformulant de manière que ce soit dans la bonne connotation de la langue française. Mais maintenant, l'élève le plus intelligent, on peut dire, ben, est ce que en langue française on ne va pas dire « tous les enfants ne sont pas dehors » ou alors que « tous les enfants sont dehors ». Maintenant les plus intelligents vont dire, si tous le monde n'est pas dehors, c'est que aucun n'est dehors. C'est comme ça qu'on reprend un peu avec les autres mots mais ce n'est pas évident pour tout le monde

37 J : c'est ça, parce que c'est un exercice quand même mental

38 F : quand je parle de la langue, je sais de quoi je parle, parce qu'il y a des tournures de la langue française 16 mn 42 qui simplifient … le *ne pas* n'est plus visible. Mais ça donne une négation où on ne voit plus le *ne pas* foncièrement. Mais ça aussi c'est la maîtrise de la langue, c'est pour ça que je dis toujours à mes collègues de français, parce que eux aussi… tu sais que de moi à toi, les langues sont venues dans le découpage de la langue française récemment. Même beaucoup de profs de français ne maîtrisent pas la langue. Or effectivement le message, quand tu écris, ils ont l'art de pouvoir bien expliquer aux enfants les normes pour un message. Les normes pour décoder un message. Or cet impact est important pour nous en maths, beaucoup quand tu donnes un énoncé d'exercice, ils ne sont pas capables de comprendre, parce que les mots leur échappent. L'ordre de l'organisation du discours leur échappe. Or maintenant quand de proche en proche on essaie d'expliquer aux

uns et aux autres l'impact du discours dans les problèmes qu'on lui pose, s'il peut bien décoder le discours, il s'en sort bon an mal an.

39 J : OK. Si je comprends bien, en début d'année, c'est un peu difficile, les enfants ne partagent pas

40 F : c'est avec le temps, c'est une …

41 J : à quelle période par exemple,

42 F : quand en septembre tu commences à insister sur la logique, justement, la difficulté pour le cas du candidat que je citais-là, c'est que finalement quand tu corriges une copie maintenant, tu ne te contentes pas que les gens écrivent n'importe comment, on leur exige qu'ils fassent une rédaction qui puisse se comprendre. C'est un message qui a des normes !

43 J : est ce que tu tolères des à peu près ?

44 F : oui, oui, en début on tolère, si on veut être trop rigoureux, on va même décourager certains.

45 J : et vers la fin ?

46 F : non, non, vers la fin on n'a plus besoin d'être trop rigoureux

47 J : tu penses que c'est déjà bien installé ?

48 F : la majorité, ceux qui comprennent pourquoi on leur enseignait cela, s'adaptent. ils commettent moins de fautes, de bêtises. bon bien sûr comme dans n'importe quelle classe, il y a toujours un groupe qui ne va pas s'accrocher. Mais je crois que beaucoup, même après le temps qu'on a passé ensemble viennent me dire Monsieur, ça a marché parce qu'on a maintenant bien compris ce qui nous paraissait difficile. Effectivement dans le problème de logique, il y a toujours deux temps : le temps de partager le message, on met à leur disposition le message ; il y a le temps d'assimilation ; il y a le temps d'application, c'est pour ça que notre souci est …, généralement on se plaint dans les classes, mais j'ai mes meilleurs résultats même l'année où j'ai des candidats trop lents, à partir du deuxième trimestre. Parce que ce n'est pas évident que tout de suite, aussitôt dit, que tous comprennent le bien fondé. C'est par rapport aux exercices, c'est par rapport aux activités … et en y revenant constamment, lorsqu'on est en difficulté, on dit, bon décodons la forme de la démonstration, l'exigence de ce qu'on attend. Et quand on a déjà tous ces éléments, beaucoup quand ils prennent leur problème, ils essaient d'organiser dans ce sens. On comprend qu'ils mettent en pratique la logique, qu'ils mettent en pratique la démarche et quand ils calculent aussi, ils organisent déjà leur calcul. Bon l'accent aussi dans tout ce travail en tenant les classes scientifiques c'est d'être capable de les organiser. Beaucoup sont dispersés. Alors la plupart des temps, beaucoup écrivent des choses inutiles. Il faut donc faire un combat pour que, logiquement quand il écrit, il sache déjà son niveau, parce que je dis en terminale, s'ils gèrent $(x+1)^2$, ce n'est plus le moment pour un élève de terminale qu'il sait développer, parce que ça c'est juste

une transition, donc il faut déjà enregistrer tous ces éléments et pouvoir faire un cheminement déjà très succinct, direct, en s'appuyant effectivement sur une logique de l'organisation.

49 J : par rapport aux quantificateurs, lorsque toi tu donnes tes définitions, est ce que tu utilises les quantificateurs, surtout l'universel ? je pose cette question parce que lorsque je parcours un peu le manuel de terminale, le plupart des propositions et des propriétés sont données avec des éléments génériques : soit f une fonction, soit x un élément, soit M un point… Le quantificateur, en fait, on sait bien que c'est l'uni… l'enseignant sait que c'est l'universel, et avec l'habitude l'élève sait que c'est l'universel. Mais il y a des situations qui peuvent être souvent ambigües, où le générique, où le soit-là, je ne dirais pas le soit euh…où on a un énoncé, par exemple une fonction, … j'ai par exemple un cas : un quadrilatère qui a des diagonales perpendiculaires est un losange. Est-ce que la manière de formuler avec les génériques ne peut pas installer l'habitude selon laquelle, dès qu'un enfant un générique **22 mn** il pense carrément à un universel

50 F : justement, beaucoup de nos collègues même n'ont jamais, … ceux qui n'ont pas eu la chance comme nous de faire la logique formelle, plein, ils noient ces élèves. Parce que lui-même quand il formule, par rapport au livre, il n'a jamais le souci du quantificateur

51 J : parce qu'il y a quand même des formulations où le quantificateur joue un rôle très important !

52 F : oui, très important.

53 J : des exercices même où il faut que le quantificateur soit précisé pour que l'exercice puisse être résolu correctement

54 F : parce que, effectivement, comme vous reveniez à ce que vous dites-là, beaucoup de personnes y compris un bon nombre de nos collègues, ils se contentent aussi de formuler bon an, mal an, parfois même c'est par chance que dans le décodage on peut soupçonner le quantificateur, c'est-à-dire que pour lui-même, il n'a pas le souci du quantificateur. C'est comme quand quelqu'un fait une démonstration en disant « soit x », ils ne savent pas qu'ils ont quantifié cela universellement. Parce que, quand il dit *soit x*, ça veut dire que x est quelconque, ça pouvait être n'importe lequel. Bon moi, en début d'année, en terminale, sachant que je maîtrise ce qu'on a fait en première, j'essaie de formuler le quantificateur-là en disant *pour tout*, j'insiste sur la langue française, et au fur et à mesure que le temps passe, je prends ça pour travailler sur les exercices. Je dis le *pour tout* c'est *quel que soit*, surtout qu'on a eu à initier les gens à passer de la langue française à l'écriture symbolique. Donc de temps en temps maintenant, comme j'ai fait quelques exercices en disant traduisons de la langue française en écriture mathématique symbolique, et ça ce n'est pas évident pour beaucoup de mes collègues. Beaucoup n'ont jamais la patience de savoir que dans les textes… mais moi qui sait en avance, que lorsque je donne une définition, si elle doit être universelle, c'est que normalement le quantificateur doit être universel. J'essaie de contourner dans certains cas où c'est possible de mettre *pour tout*. Mais quand le temps passe, puisse qu'il y a au niveau du deuxième trimestre, parfois pour ne pas avoir à trop écrire, moi j'utilise l'écriture symbolique et je dis, celui qui ne comprends pas n'a qu'à écrire en traduction en bas ;

55 J : là tu utilise les quantificateurs, la notation même

56 F : La notation symbolique, mais je dis, celui qui ne comprend pas mon discours-là, jusqu'à ce qu'il puisse bien comprendre il peut mettre entre parenthèses, et je le redis en français ; c'est plus facile de dire que d'écrire. Parce que, au tableau la main est pénible et je dois chercher un raccourci pour ne pas trop écrire. Donc quand j'utilise ça c'est justement pour dire attention. Puis je leur dis aussi l'écriture mathématique est universelle, parce qu'en langue française, en langue anglaise, vous vous faites comprendre. Quand j'utilise l'écriture symbolique, si je suis anglophone je comprends, si je suis un allemand, je comprends. Je veux dire, pour les gens qui font les sciences, à long terme il faut être aussi capable de le faire parce que ça vous aide quand vous avez à communiquer avec quelqu'un d'autre qui ne vous comprend pas en français. Là l'écriture mathématique, ça sera votre jonction. Vous écrivez mathématiquement, il vous comprend à demi-mots. Donc, en début d'année ce n'est pas évident, je joue sur les deux, et à un moment donné comme je dois beaucoup écrire au tableau, j'utilise le quantificateur pour pouvoir faciliter ma rédaction.

57 J : par rapport aux lettres, j'ai eu une question d'une élève quand on faisait les intégrales. Alors, j'ai écrit I égal intégrale de a à b … pour les fonctions positives, f est positive sur un intervalle (a, b), pour tout x appartenant à (a, b), $f(x) \geq 0$. Alors à ce moment j'ai dit dans la classe, à ce moment, $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. L'élève donc lève la main et me dit, c'est pour les x qu'on a $f(x) \geq 0$. Pourquoi maintenant $\int_a^b f(t)dt$ doit être supérieur ou égal à 0, alors ça devrait être $\int_a^b f(x)dx$? je lui dit, au départ j'ai parlé du t comme étant une variable muette, la variable d'intégration, et le x ici représente une variable qui est liée par le quantificateur. En fait, ça peut prendre toutes les valeurs entre a et b. Je pouvais bien mettre *pour tout t appartenant à* $[ab]$, $f(t) \geq 0$. Donc, si la variable t étant une variable muette, on peut la changer par n'importe quelle autre variable, à condition que ça n'intervienne pas dans les bornes d'intégration. C'est pour dire que cet élève apparemment, sur le statut de la lettre, les choses n'étaient pas très claires. Mais est ce que toi, il t'est arrivé de rencontrer ce genre de situation ? est ce que tu en as profité pour préciser les choses ? parce que les variables, la manipulation des variables par les enfants, je trouve que c'est …c'est un véritable …, c'est-à-dire, on a l'impression que pour eux c'est un véritable mystère.

58 F : effectivement, on rencontre de tels problèmes, c'est pour ça qu'il y a des moments où je suis obligé de passer par un support

59 J : le quel ?

60 F : par exemple je dessine l'intervalle et je dis donc, avec le quantificateur universel, quand on dit *quel que soit*, le x désigne tous ceux qui sont là dedans. On pouvait prendre n'importe quel autre nom. Ce problème de lettre se pose réellement. Même quand tu définis une fonction, il y a plein d'enfants, je suis obligé de blaguer parfois en disant, voilà, j'ai déjà dit $f(x)$. C'est certain que si je dis $f(t)$, d'autres vont croire que je n'ai plus parlé de la même fonction. Pour essayer de leur faire quitter ce stade où ils lient le nom de la variable à la fonction, au lieu de regarder plutôt la place de la variable dans la formule. C'est vraiment un

réel problème, et la plupart du temps, j'essaie d'insister et de persister car c'est un problème de les faire comprendre le bien fondé du nom de la lettre. Et même dans certains cas, de ne plus toujours utiliser cette variable de façon très continue, pour essayer de varier pour qu'ils comprennent. Parfois je dis, au lieu d'utiliser la fonction $f(x)$, je fais utiliser la fonction $f(t)$. Quand je fais ça, ça permet à quelques-uns de comprendre que la variable en fait ne joue pas le plus grand rôle en terme de dénomination, mais pour les décoller de là, il n'y a qu'une seule façon de faire, c'est de les utiliser dans beaucoup de contextes et de dire, si je veux, j'étudie ma fonction comme $f(u)$. Et justement en cours d'année, d'être pratique en utilisant ces variables, et dans le cas de l'intégrale, de dire que cette variable d'intégration n'a pas d'impact sur le résultat de l'intégrale. Parce que justement dans le changement de variable, il y a certains enfants qui n'arrivent pas à faire parce qu'ils ne font pas le lien entre quand j'ai posé u et quand je me retrouve maintenant avec du. C'est une intégrale qui ne dépend plus que de la fonction qu'on a et non de la variable. Donc c'est vraiment un réel problème le nom de la variable dans les fonctions, et moi pour résoudre ce problème, j'essaie de varier, j'essaie de changer le nom de la variable dans les diverses fonctions que je manipule. Et quand j'énonce même les résultats sur certaines fonctions, je n'utilise pas le x. j'insiste même chaque fois, plusieurs fois de suite que le x est un choix parce qu'on en a l'habitude, et qu'on doit, quand on est déjà à un certain stade, savoir qu'on peut déjà travailler avec n'importe quelle autre variable.

61 J : mais est ce que tu ne penses pas que cette fixation, c'est dû au fait qu'on manipule constamment x. Dès qu'on a la fonction, tout le monde identifie la fonction à x et à f. C'est ça en réalité.

62 F : moi qui ait parfois supervisé les correction du BAC comme chef de salle, nous avons eu des combats parfois avec des collègues. Parce que pour certains collègues, justement même quand tu changes le nom de la variable, il est perturbé. Ce n'est pas qu'au niveau des élèves parce que trop l'habitude de x de manière même que quand tu viens maintenant

63 J : et même la fonction qu'on appelle toujours f

64 F : le jour où tu mets g

65 J : et même quand c'est u

66 F : même dans les rédactions, donne une fonction u, tu verras que ton enfant te donne df. Il va même parles de la dérivée f'. Tellement on l'a utilisé excessivement que l'enfant ne voit qu'une fonction en f. Tu changes même le nom, il n'arrive pas. Je dis même dans les classes de terminale, tu dis à un étudies-moi la fonction g. Tu vas retrouver dans ses copies le f. Rapidement là il a oublié qu'il travaillait avec g et il rentre vers f qu'il a l'habitude de manipuler comme fonction. Et justement, j'ai dit à certains qu'on a pris f parce que c'est l'initiale de *fonction* ; toutes les fonctions ne commencent pas par f, on peut donner beaucoup de nom. Et justement dans beaucoup de contexte, quand on essayait aussi de changer de nom, de travailler sur une fonction $u(t)$, une fonction $v(t)$, une fonction $h(t)$, bon les enfants comprennent déjà que ce n'est pas la lettre f qui est la fonction.

67 J : et tu penses que la prise en charge que tu fais peut aider les élèves à affronter les premiers jours à l'université ? Parce que, quand on regarde par exemple le décalage qu'il y a entre la définition de la limite en terminale et

68 F : dans le secondaire et dans le supérieur,

69 J : Et dans le supérieur, on se demande comment est ce qu'on fait vraiment la transition.

70 F : justement, j'ai eu la chance. Même si je corrige comme je vous l'ai dit tout à l'heure, le vrai problème c'est, parce que j'ai eu cette opportunité d'enseigner dans le secondaire et dans le supérieur … c'est parce que j'ai eu cette opportunité que j'ai pu repérer en amont les réelles difficultés que je retrouve là bas. C'est pourquoi dans mes cours j'essaie de ménager

71 J : en fait tu es un prof de terminale averti

72 F : je dirais très averti. Si je ne l'étais pas, c'est pourquoi même quand je critique, je dis nos collègues. Même mes stagiaires, quand ils viennent chez moi, beaucoup même deviennent mes élèves, c'est-à-dire que, ils sont à la limite entrain de vouloir que j'aille devant parce que c'est là qu'ils corrigent certaines de leurs tares. Certains n'ont pas hésité à me dire « mais Monsieur, dans la démonstration par disjonction, depuis des année je n'ai jamais compris, c'est là que vous avez expliqué que j'ai compris le bien fondé ». Vous voyez à peu près, il est un futur enseignant pour l'année prochaine. C'est maintenant, pendant qu'il est en stage qu'il comprend le bien fondé. Il y a eu des cas comme ça, nombreux, qui me disent, mais Monsieur, ce n'est que maintenant que moi-même je comprends la notion-là. Parce que quand l'élève me pose une question, j'essaie de faire comme j'ai fait, mais je ne comprends pas moi-même les questions. Or justement avec cet avertissement, ça a permis de dire bon, comme ils vont aller retrouver ça, c'est pourquoi je sais faire la frontière entre le calcul des limites qui leur est exigé et la justification de la limite. Or en fait, pour ne pas être très éloigné, j'insiste sans faire de la topologie, sur des notions d'approche. Je ne parle pas de voisinage verticalement, je dis comment est ce que la notion de limite est un problème d'approche. On peut connaitre à peu près le comportement d'une fonction à côté d'une valeur qui est interdite. La limite, ça veut dire qu'on prend les valeurs qu'on imagine les plus proches possibles. Ça fait une grande souffrance pour bien expliquer comme ça jusqu'à avant de laisser tomber ça maintenant et se livrer aux artifices du calcul. Puisque en fin de compte on les évalue sur les artifices des calculs. À la base, il faut quand même qu'ils soient motivés quand je dis je veux faire la limite c'est que je veux connaitre le comportement de la fonction à côté des valeurs très proches. Conséquence, je peux même si j'avais beaucoup de temps, prendre des valeurs de plus en plus proches et voir comment la fonction se comporte. Mais à un moment donné, on peut déjà déduire au vu des résultats qu'on a en approchant, et puis maintenant on a des résultats qu'on peut contourner et balancer, sinon je dis, j'ai la chance de savoir ce qu'ils font après que j'essaie de rectifier même dès le début d'année comme ça. Parce que notre programme formellement, c'est vraiment instruit qu'on doit faire assimiler la logique progressivement mais malheureusement, parce que

73 J : c'est instruit dans les programmes

74 F : c'est instruit dans les programmes officiels, que normalement on ne doit pas faire un enseignement théorique de la logique, mais qu'on doit pouvoir faire que les enfants s'accommodent de la logique sur des exemples précis. Or tu ne peux pas dire à quelqu'un de danser sans lui donner quelques pas de danse ! s'il ne connait pas les normes, tous les jours tu lui dis *démonstration par disjonction des cas, je suppose qu'un cas est vrai*, après je suppose que ce n'est pas vrai. L'enfant même va croire que c'est un jeu. Mais si au fond il comprend qu'il s'agit d'un problème sur la valeur de vérité d'une proposition, alors à ce moment, lui-même est capable d'aller dans n'importe quel contexte si lui-même peut identifier la forme de sa proposition et s'en sortir. Mais alors quand tu viens …le programme officiel instruit qu'on le fait ainsi, conséquence, beaucoup de collègue ne font pas, ne regardent même pas ça, pourtant c'est important avec l'avenir. Sans la couleur logique, on ne peut pas faire des maths, sans la logique. La logique est la grammaire des mathématiques, puisque tu ne peux pas faire une langue sans sa grammaire. La logique contrôle, quand ce n'est pas bien formulé tu ne peux rien faire

75 J : ça contrôle et ça clarifie même.

76 F : j'avais dit dans mon jeune âge que la logique est la grammaire des mathématiques, parce que si tu ne peux pas maîtriser les normes là dedans, tu ne peux rien dire, tu ne peux rien formuler, tu ne peux rien faire.

77 J : merci beaucoup pour la petite interview, pour la disponibilité

ANNEXE 9 : Retranscription de l'entretien avec un enseignant de mathématiques du secondaire En1

(1)J : Je vous présente le questionnaire auquel j'ai soumis les élèves du lycée. Il y en avait deux, un pour ceux de l'université et un pour ceux du lycée. Ça portait sur les problèmes de logique.

Je travaille sur l'enseignement de la logique en relation avec l'activité mathématique, parce qu'on s'est rendu compte que lorsqu'on donne les cours de logique comme ça, c'est pas vraiment porteur. Après un ou deux mois, je ne sais même pas si on a un mois avant que tout soit oublié.

(2) En1 : Ils manipulent des symboles là

J : on se rend compte aussi que certains symboles, c'est par habitude qu'ils les utilisent, sans en connaitre vraiment la signification. Donc le cours de logique en tant que tel, le pur cours de logique ne sert pas à grand-chose ? Ce sur quoi je voudrais m'attarder, c'est comment faire pour lier ce cours à l'activité mathématique, l'introduire dans l'activité mathématique, faire certaines explicitations de l'utilisation des concepts, et …

(3) En1 : Peut-être aussi dans la rédaction

(4)J : Oui, tout ça, ça rentre dans tout. Quand je dis l'activité mathématique, ça englobe tout. La rédaction, la rédaction, le raisonnement aussi. Je leur ai donné donc ce questionnaire. Il y a la dernière que j'ai enlevée, l'analyse de ça était très, très compliquée. J'ai finalement laissé tomber.

La première question que je vous pose est de savoir si vous faites des cours de logique en début d'année ?

(5) En1 : Euh, je fais des compléments pour le raisonnement et la rédaction.

(6) J : Compléments, c'est-à-dire ?

(7) En1 : Compléments, c'est-à-dire, je propose des techniques de rédaction et j'insiste sur le processus d'une démonstration. Voilà ce que je peux faire. Maintenant, le reste de la logique dans le programme actuel camerounais est fait sous forme de point logique. A un moment donné du cursus de l'élève, on doit s'arrêter et faire un point logique. Donc il n'y a plus de titre, de chapitre « logique »

(8) J : Rappel de logique

(9) En1 : Non, il n'y a plus de manière automatique. Je peux même vous dire une chose, c'est un prof sur dix qui pense en début d'année, à installer la façon de raisonner pour rédiger.

(10) J : Mais vous, vous ne parlez pas par exemple d'implication, négation, rien ?

(11) En1 : Pas automatiquement

(12) J : C'est juste les méthodes de raisonnement

(13) En1 : Les déductions, les raisonnements de euh .., qu'est ce qu'une équivalence, comment démontrer l'équivalence, comment démontrer par l'absurde, comment démontrer par contraposée, on installe le raisonnement par récurrence des nombres entiers. C'est pratiquement ça.

(14) J : Ouai, bon

(15) En1 : C'est vrai quand même, l'année passée j'ai expérimenté dans une terminale C. J'ai enseigné quelques notions comme le « et », « ou », euh, euh, « $P\Rightarrow Q$ », mais j'ai eu beaucoup de mal parce que les élèves étaient un peu perdus. Parce qu'ils n'ont jamais entendu parler.

(16) J : Le « et », le « ou » ?

(17) En1 : Je proposais un cours où je disais « P et Q » veut dire, « P ou Q » signifie. Bon ils en parlent, ils disent « et » et « ou » comme ça, de manière euh

(18) J : Dans le langage courant

(19) En1 : Oui dans le langage courant, même dans le langage maths, mais quand tu di à un élève que « $P\Rightarrow Q$ » est « P ou non Q » ça sonne un peu bizarre, alors qu'en réalité c'est ça. J'ai eu beaucoup de mal, et les élèves, ça perdu beaucoup de temps. J'ai choisi comme stratégie, après ça, c'était pour le niveau terminale C, d'installer la façon de raisonner. Je tente

aussi ça en première C, à d'autres niveaux, c'est là où l'activité sera compliquée et on aura même un problème avec l'inspection générale qui ne, qui n'installe plus ça au programme.

(20) J : Euh, vous avez les terminales C

(21) En1 : Oui

(22) J : les terminales D également

(23) En1 : L'année passée, j'enseignais dans les deux classes

(24) J : et les premières ?

(25) En1 : l'année passée, je n'en avais pas, l'année antérieure j'avais les premières C et D

(26) J : d'accord. Et pendant donc le cours, est ce que vous avez des situations précises où vous avez eu à revenir vraiment sur des points de logique, à bien expliciter les concepts, par exemple la quantification. Parce que, je me rappelle, j'ai fait un test, en terminale C, et on leur avait donné des phrases avec des quantificateurs. Il y en qui ne reconnaissaient que les quantificateurs usuels, *quelque soit*, *pour tout* et *il existe*. Par exemple, certain, ils n'ont pas identifié ça comme un quantificateur. Est-ce qu'il vous arrive donc de rencontrer des situations où vous pouvez en parler ? Où vous pouvez parler de l'implication, de la vérité d'une implication ? D'une équivalence ? 5mn 14s

(27) En1 : Disons que je rencontre plus ce genre de difficultés au moment où il faut utiliser le contre-exemple. Donc, procéder par contre-exemple, et aussi lorsqu'un enfant a tendance à vouloir établir une propriété globale sur un espace complet E, par exemple sur un espace E en allant prendre un exemple. C'est-à-dire un élève à qui on dit d'établir qu'une formule est vraie sur les nombres entiers naturels, il va choisir un élément, ça marche et il dit que c'est bon. Il faut maintenant regarder tout et lui dire qu'on ne peut pas prouver une propriété sur N en prenant un cas, que peut-être on peut utiliser un cas qui montre un contre-exemple. A ce moment-là ça ouvre la porte sur ce commentaire sur les quantificateurs existentiels, les quantificateurs universels, voilà à quel moment j'ai rencontré ça. Et aussi euh, quand il faut installer dans l'esprit d'un élève qu'on n'utilise pas un cas particulier pour établir un cas général.

(28) J : Ouai

(29) En1 : Il faut lui dire qu'on utilise un cas particulier pour détruire, pour dire qu'un cas général n'est pas correct, n'est pas toujours correct. Voilà à quel moment j'ai rencontré ça. Ça se trouve en … comme en géométrie. Bon, maintenant, pour euh, c'est à partir de la seconde qu'on peut se mettre à leur développer ça. Parce qu'avant ils sont plus jeunes, ils jouent surtout sur l'observation et sur la perception.

(30) J : Et par exemple la négation ? Vous avez eu des cas où vous avez eu à traiter la négation ? Parce que là aussi on se rend compte que quand on a des énoncés quantifiés, la négation n'est pas toujours, ... c'est beaucoup plus, comment dire, la négation de la grammaire quoi ?

(31) En1 : Voilà, ils ont tendance à confondre la grammaire et le contraire grammatical, le contraire du vocabulaire. Pour eux, ils ont une fixation sur négation et antonyme.

(32) J : D'accord

(33) En1 : c'est à peu près ça. Et, écrire la négation d'une proposition qui aurait une série dépendante ou indépendante de propositions avec des quantificateurs bien évidemment, je pense qu'actuellement pour ceux qui ont fait, pour ceux qui passent le Bac C, vraiment, il y en très peu qui peuvent vous sortir une bonne négation. N'est pas vous avez fait les tests avec eux ? Vous allez voir.

(34) J : Mais est ce que vous pensez, vous n'avez pas vous, l'occasion d'expliciter ça, de rentrer dans ça ?

(35) En1 : Je crois que le fait que nous même, l'inspection elle-même, c'est elle qui a créé un peu ça. A l'époque c'est vrai que ça existait, mais c'était tellement fort que ça finissait par embrouiller alors tout, ça tout gâté au point où certains se perdaient complètement en enseignant l'élève. Il a fallu trouver le juste milieu. Ils ont choisi la stratégie qui dit, le jour où tu va trouver un raisonnement pour expliquer quelque chose, c'est après avoir pris l'exemple que tu vas leur dire ça vient d'où, tu vas formaliser, que c'est l'implication que tu viens de faire, que ça c'est un quantificateur qu'on a utilisé. Et ils ont réduit dans la rédaction, l'utilisation de ces symboles. Ils privilégient maintenant l'écriture en toutes lettres. C'est vrai que le symbole n'est que la lettre qu'on a traduit, un symbole ! La phrase, mais ça pose un problème au point où euh, moi personnellement, je veux dire, je me situe un peu en défaut par rapport à cette inspection. Comme je dis, je mes responsabilités, cela veut dire, chaque fois que j'arrive sur un endroit où il faut, où j'ai l'impression que les élèves qui sont devant moi n'ont pas les outils de logique du raisonnement qu'il faut, je marque un arrêt, j'ouvre une parenthèse. Et au fil de toutes les parenthèses, je parviens en réalité avec quelques difficultés à couvrir tous les fondamentaux qu'il faut dans la morale logique qu'il faut. Et ça, c'est un peu ça qu'ils encouragent mais ce n'est pas toujours facile à faire pour tous les profs qui ont tendance à suivre un peu les documents

(36) J : Où on n'explicite pas

(37) En1 : Et où, le document qui est à notre programme actuellement perlent, ont des points logiques un peu cachés dans les livres. Il faut d'abord bien fouiller pour trouver les points logiques, et ces points logiques se trouvent un peu en désordre. Donc tu peux avoir un point logique que tu veux utiliser en début d'année et qui se retrouve à la fin du livre. Et comme beaucoup de profs ont tendance à suivre leur livre, ils ne vont pas rencontrer ça.

(38) J : parmi les connecteurs logiques, quels sont ceux que vous avez eu l'occasion d'expliciter ?

(39) En1 : oui ceux que j'ai vraiment pris le temps de travailler, c'est *quel que soit*, c'est-à-dire *pour tout*, l'universel, l'existentiel, bon, *et*, *ou*. Maintenant, j'ai travaillé sur l'implication et l'équivalence, voilà quelques gros problèmes que nous avons aussi. Puisqu'ils ne sont pas très à l'aise dans la façon de raisonner, ils ont tendance à balancer les implications et les

équivalences un peu partout. Et souvent même, quand on leur dit que ça ne va pas, on ne met pas l'équivalence ici, on a même des livres, des livres, ou d'autres collègues qui mettront d'autres symboles. Ils vont aligner seulement des trucs et essayer d'imaginer que c'est équivalent. 10mn 58. Vous écrivez des phrases, vous ne mettez rien, puis vous dites qu'elles sont équivalentes. C'est surtout le gros problème où c'est le mélange de l'implication et de l'équivalence. Autre situation très récurrente, c'est qu'il faut établir qu'une série d'affirmations sont équivalentes. Où on l'habitude d'utiliser la transitivité de l'implication pour essayer de euh..

(40) J : on boucle, on fait

(41) En1 : la boucle. Lorsque tu fais une démonstration par boucle, alors très peu vont te dire que c'est correct, puisqu'ils vont d'abord te dire, non, c'est pas bon ! Qu'il faut encore rentrer. Là tu t'arrêtes et tu prends le temps d'expliquer l'implication. Et si un élève a bien compris l'implication et que tu te mets à travailler sur la contraposée, il a les mêmes problèmes. La contraposée a les mêmes problèmes. Alors il y a un établissement dans la ville, euh ! le Centre Educatif qui a un peu expérimenter d'introduire dans, comme matière la logique

(42) J : Le fondateur est logicien.

(43) En1 : Il a essayé mais il a un mal fou à convaincre les profs de le suivre ; chaque année il a du mal à, ça nécessite un petit travail de plus. Et malheureusement pour nous, c'est qu'on a aussi beaucoup de profs qui, même s'ils sont passés par l'Ecole Normale, n'ont pas souvent été très à l'aise en logique, surtout ceux qui ont le BAC après 2005, après 95 12mn 30. Ils ont un peu de mal à…

(44) J : pourquoi ? On a supprimé

(45) En1 : Ceux qui ont le BAC vers 2000 sont ceux qui ont fait leur cursus dans ce système où la logique n'est pas très automatique. Ce qui fait donc sur le terrain, c'est normal qu'ils soient en facteur à… sauf ceux qui ont eu la chance de faire les cours de logique en fac, et cette formation-là n'est pas donnée, en début… un peu avec l'algèbre 1, il y a un peu de logique mais après ..

Donc je me dis, ce que j'expliquais qu'il y a eu, dans, quel que soit, ça c'a été travaillé déjà, il existe, et, ou. Difficultés sérieuses à bien rédiger et exploiter l'implication, l'équivalence, la contraposée, et les différences équipollences qu'il y a entre une proposition et une autre dans un contexte concret. Or le mieux serait à revenir et commencer très tôt, vers la troisième à les habituer à

(46) J : à les remettre à

(47) En1 : Ceux de la sixième sont très jeunes maintenant, ils sont tellement jeunes qu' on a un vrai mal pour les

(48) J : On a peur que, on a peur de leur donner des choses

(49) En1 : Ils ont huit ans en sixième. Huit ans, neuf ans

(50) J : Je crois qu'il faut vraiment qu'on revoit cette histoire d'âge scolaire-là.

(51) En1 : huit ans c'est compliqué. En troisième, peut-être qu'ils ont déjà douze ans, on peut tenter déjà. Aujourd'hui en terminale, ils ont quatorze, quinze ans. Quelques brillants vont s'en sortir, mais la majorité est en difficulté pour rentrer dans ce jeu. Comme il y a déjà même ce côté de peur des maths, si chaque fois il pense qu'il a trouvé parce qu'il a écrit la réponse, que tu dois lui dire que non, même comme la réponse est juste, ton processus de raisonnement que tu as mis en place, ce que tu as fait n'était pas très logique, il va vous dire, Monsieur, il y a la réponse ! Et si tu lui dis que sur la logique je ne suis pas d'accord, sur un point je te donne demi, il dit voit encore, ce gars vraiment veut nous tuer. Et là, toujours pour contrôler ça, au niveau des examens officiels, comme il faut être souple, on ne sanctionne pas trop, on n'est pas trop regardant sur cet aspect, malheureusement. Et comme on n'est pas trop regardant, les enfants savent qu'on n'est pas assez regardant sur cet aspect lors des corrections des examens officiels, sur cet aspect-là

(52) J : Ils ne se dérangent pas beaucoup.

(53) En1 : Quand tu te bas avec eux pour arranger ça, ils savent que n'importe comment, tu ne vas pas corriger le BAC. Tu n'as qu'à aller ailleurs. Et en salle de correction, si vous êtes dix correcteurs et que huit ne sont pas trop intéressés par ça,

(54) J : Ils l'emportent

(55) En1 : La majorité fait que tu te plies et on évolue 15mn 24.

(56) J : Et par rapport toujours aux connecteurs, vous les utilisez, par exemple le *et*, le *ou*, quand vous les utilisez, vous utilisez les symboles ?

(57) En1 : ouh ! là, pas du tout. Les symboles, le et on écrit *et* e, t

(58) J : Et l'implication ?

(59) En1 : on va mettre *si, ..., alors* ...ou bien *tel entraine*

(60) J : Donc pas la flèche.

(61) En1 : Non, pas

(62) J : Même au cours d'un raisonnement …

(63) En1 : Je tente les flèches dans les classes où ils sont un peu plus bien en maths. Première C, terminale C., terminale D. Première D, là ! Parce que le danger c'est quand tu te mets à les utiliser à un niveau, sans être sûr que c'est mis en place depuis, bon lui il voit comme tu as mis les flèches, et lui balance ça partout. Puisque il sait que quand il y a un trou on met la flèche ! Le jour où il est entrain de faire un raisonnement, il veut écrire une équivalence directement, il met toujours la flèche après il continue. Parfois on est donc obligé d'écrire ceci *entraine que*, *ceci est vrai si et seulement si tel autre est vrai*, ou bien si il y a une congruence, *c'est-à-dire que* au lieu de mettre simplement une parenthèse et équivaut. Mais en PC, TC je suis obligé de forcer un peu. À utiliser au début de l'année.

(64) J : Et eux-mêmes, quand vous les envoyez au tableau et qu'ils doivent euh…

(65) En1 : Ils n'ont pas la maîtrise.

(66) J : Doivent rédiger, est ce que vous en profitez pour faire le point…

(67) En1 : J'en profite justement pour leur dire que quand il écrit une phrase, il écrit l'autre, il n'a rien dit. Je dis, mais qu'est ce qui les lie ? il répond, ça implique non ? Je dis « mais tu n'as pas écrit implique ! ». Donc on les encourage à utiliser. Mais très peu maîtrisent.

(68) J : est ce que vous rencontrez souvent les symboles de quantificateurs dans leurs copies ?

(69) En1 : Très peu

(70) J : Très peu. Donc eux, c'est quel que soit en lettres,

(71) En1 :Pour tout

(72) J : OK. Il y a également le problème des lettres en mathématiques. Est ce que vous pensez que les lettres posent un problème, à vos élèves particulièrement ? Parce qu'on observe ailleurs, c'est que, quand il y a les lettres c'est souvent beaucoup de catastrophes, de difficultés dans des rédactions de démonstrations. Il y a le statut de la lettre qui peut varier ce qui fait que l'enfant… Je prends même le cas des équations par exemple. On passe d'un .. ; J'ai eu à travailler avec des étudiants ici, c'était sur un exercice où on arrivait à.. Une équation du premier degré où on arrivait à 0=0. Alors je leur demandais pourquoi euh, c'est un élève qui traitait cette équation. Il arrive à 0=0 et il n'arrive pas à conclure. Alors je leur demandais d'où vient le problème ? Pourquoi est ce que l'enfant est embarrassé, il n'arrive pas à conclure ? Bon chacun a donné sa réponse, on était passé d'une équation à une égalité numérique. Le x lui il avait disparu, avec ces 0 qui apparaissaient. Je voudrais savoir, est ce que lorsque vous travaillez vous insistez sur le statut de la lettre ? Ça c'est une constante, ça c'est une variable ? Ainsi de suite. Et même dans les intégrales, intégrale de a à $f(x)\,dx$, intégrale de a à b $f(u)\,du$, le x c'est quoi, le u c'est quoi, le a, le b ? est ce que ça vous arrive d'en parler ?

(73) En1 : Oui, ça on en parle même très tôt. Dans le cursus d'un élève au secondaire, euh, on introduit les lettres à partir de la classe de quatrième de manière systématique. L'idée c'est que, l'élève, quand on introduit en quatrième, on s'arrange à ce qu'une lettre qu'on a introduite représente quelque chose de concret. Et un peu plus tard, en troisième, on vous dit que cette lettre, on peut remplacer cette lettre par un nombre. Mais on ne connait pas quel est ce nombre. Ça introduit directement l'idée de variable. Ça fait une variable complètement indépendante de toutes les autres. Mais le mot variable n'est pas encore introduit, le mot variable sera introduit plus tard en seconde. Et là on fait ce qu'on appelle le calcul littéral. 20mn 04. Comme il y a donc plusieurs données, disons plusieurs augmentations, le périmètre qui donne longueur plus largeur, longueur plus largeur fois deux, là il y a trois données ! Le périmètre dépend de la longueur plus largeur. Alors ça veut dire que si on considère que L est constant, si on dit que L est constant, quand la notion de fonction numérique est bien ficelée, on peut commencer à utiliser le mot constant, le mot, tel est variable. Parce que l'on dit déjà

que tel est variable en fonction de…Celui-là qui est dit variable en fonction de x, x est la variable indépendante, y est la variable dépendant de x. Alors les difficultés particulières qu'il y a, que je rencontre au second cycle, c'est surtout au niveau de variables muettes. Parce que si, quand tu écris une équation différentielle $y" + 2y' = 0$, après tu écris $z" + 2z'$, beaucoup d'élèves commencent à se demander si c'est la même équation différentielle. Donc l'idée de, peut-on remplacer une variable par une autre et garder le même problème, en intégration c'est le même problème, changer de variable. Ou bien un problème d'équation ; on dit « résoudre dans R avec z comme inconnue, résoudre dans R avec t comme inconnue ». C'est pourquoi je prends la peine de préciser ce que je dis que c'est l'inconnue, je pose le problème, je dis « avec tel inconnu ». Quand c'est un problème paramétrique, tu peux écrire l'équation avec x et x est l'inconnue, et m paramètre. L'élève croit que c'est m l'inconnue. Il faut donc lui dire que tel c'est l'inconnue et celui-ci c'est le paramètre. Et quand vous dites paramètre, cela veut dire que ça doit être supposé constant, et quand vous dites qu'un truc est supposé être constant, et quand vous dites que « trouvez les valeurs du paramètre telles que », il vous dit « mais Monsieur, vous avez dit que c'était constant ». On dit trouvez ses valeurs, nous avons beaucoup de valeurs et il est constant. Donc, ce que je peux remarquer, c'est même l'un des éléments qui poussent souvent les élèves rapidement à fuir les maths. Parce que les lettres, l'utilisation des lettres, l'enfant est plus à l'aise quand c'est 1, 4, 5 et quand déjà une fois on lui dit qu'il est possible d'écrire la droite avec des d, des pyramides avec les volumes, les r, les s, alors, à un moment donné il cherche le nombre réel, il ne le trouve pas. C'est pour ça que je me dis, on doit faire très attention au moment d'introduire le langage euh, disons le calcul littéral ; sur l'exploitation de variables aux tous petits enfants à partir de la cinquième. C'est souvent là qu'il y en a qui dévient à partir de la quatrième et ils finissent en seconde A, et ils ne s'intéressent plus à ça. Pour la question posée, je répondrais directement en disant que, on essaie d'indiquer chaque fois qui est variable, qui est constante, qui est la variable muette, qu'est ce qui est la variable indépendante, et dans quel espace il varie, quelle est la variable dépendante des autres, quel type de dépendance il y a entre les deux.

(74) J : Quand vous parlez de variable indé…, vous avez dit variable indépendante

(75) En1 : Variable indépendante, oui. Peut-être que je peux dire, j'ai le volume d'un cône, j'ai hauteur, bon je peux dire que hauteur est déjà égale à 10 cm, le rayon je ne connais pas. Mon volume est dépendant du rayon ou le rayon est dépendant du volume. Il faut rapidement que l'élève installe ça dans sa tête, que si je change le rayon, ça va jouer sur le volume. Or je dis cette notion devient plus intéressante quand l'idée de la fonction numérique, l'idée de la fonction de, est mise en place. Parce que l'idée de la fonction en quatrième ou troisième c'est seulement écrire a tel qu'on voit b, c dedans et on dit que a est écrit en fonction de b et de c. Maintenant, a comme réel qui peut évoluer par rapport à b et c qui varient, c'est déjà la fonction ! Et dès la seconde ça prend un sens. Et malheureusement aussi, c'est que beaucoup d'entre nous ne répètent pas, ne reviennent pas, c'est des choses qu'il faut répéter. Ces notions de langage formel, on peut dire, doivent être constamment ressassées chaque année pour bien montrer à l'élève les différentes nuances. Parce que sinon il aura tendance à aller, à retenir les choses par la lettre utilisée, parce que l'élève a une tendance à retenir la formule, c'est aidé par la physique, la chimie, parce que les physiciens et les chimistes ont tendance à tout

bloquer par les lettres. Si tu dis que le poids n'est plus P à un physicien, il te dit non, ce n'est plus ça.

(76) J : C'est la même chose, si vous faites une fonction, vous demandez à un enfant d'étudier

(77) En1 : $f(\alpha)$

(78) J : $f(\alpha)$, ça va être un véritable problème.

(79) En1 : Ils ont déjà des idées arrêtées, et ce n'est pas très facile d'enlever.

(80) J : Non, non

(81) En1 : ça c'est vraiment difficile. Or $f(\alpha)$, α est une variable muette, on peut dire $f(t)$, $f(s)$, $f(x)$. Voilà un peu ce sur lequel je travaille pour essayer d'améliorer l'introduction des lettres dans ma façon d'enseigner les maths, et il faut être un peu patient.

(82) J : Très patient, mais alors très patient. Je pense que c'est un processus tout au long …

(83) En1 : ça prend, pas une année, je ne crois pas.

(84) J : Et vous pensez qu'avec ça, vos enfants sont prêts à aborder la formalisme qu'on retrouve à l'université ?

(85) En1 : Je crois quand même qu'ils sont un peu près. En général quand ils ont bien travaillé sur trois ans, seconde, première terminale

(86) J : Ah, sur trois ans

(87) En1 : Oui, c'est pas en une année. Sur trois ans, si l'élève a été bien entrainé à percevoir ça, à l'université il s'en sort. Le souci qu'il aura bien évidemment une fois de plus et ce que relèvent les profs qui sont à l'université, c'est la rédaction mathématique. Ça c'est le véritable problème, et un des éléments qui les poussent à être mal à l'aise en rédaction mathématique est justement la logique. Comment connecter ce que je dis et autre chose ? Quel lien y a-t-il entre ce que je dis ? Si je ne peux pas mettre un mot, quel symbole je dois mettre ? Là il y a un cafouillage ! Je pense qu'il faut un paquet d'activités dans les classes de troisième, pour réussir à bien installer les nuances qu'il y a entre et et ou. Ils vont comprendre peut-être ça, le ou surtout. et encore ça passe, mais ou pose souvent un problème, la distinction de ou simple, ou logique qui introduit l'hypothèse que les deux peuvent être vrais, le ou exclusif qui euh

(88) J : Généralement c'est le ou exclusif qu'ils utilisent.

(89) En1 : Naturellement c'est ça. Je vais au cinéma ou je vais manger. Et pour lui, c'est ce ou qu'il utilise. Et c'est au fil des différentes activités qu'il faut formaliser, les faire écrire ça comme point logique, où on peut poser ce problème-là. Donc ce que je pourrais suggérer aux gens qui fabriquent des livres, c'est peut être d'installer cette partie-là en tout début d'année sous forme d'un petit jeu de questions, de trucs à compléter, de petites phrases à faire la négation. C'est ce qu'ils appelleraient chapitre 0.

(90) J : Mais ça se faisait avant

(91) En1 : Ça sa faisait avant mais il n'y a plus. Mais il na faut plus faire comme avant, avant ça se faisait mais

(92)J : Ce n'était pas porteur quand même.

(93) En1 : Ce n'était pas porteur, on faisait toute la théorie.

(94) J : Voilà ! et après on oubliait tout.

(95) En1 : Donc faire en sorte que chaque fois, en cours d'année scolaire, on exploite un résultat, qu'on dise « rappelle-toi au début de l'année on a vu que, une implication c'est »

(96) J : Faire des va et vient quoi !

(97) En1 : Oui des va et vient. Installer ça au départ et chaque fois, aller prendre et utiliser. On sait qu'ils vont oublier deux mois après. Aller prendre et utiliser, comme ça sur deux années scolaires ou trois, quand ils passent le bac, ils auront installé ces notions.

(98) J : On va revenir un peu sur la quantification. Il y a …, j'ai regardé un peu dans le livre de terminale S et je voyais des formulations, par exemple si une fonction est…, dans le genre « si une fonction est dérivable, alors elle est continue », ou alors, « si *f* est dérivable, alors *f* est continue ». ce jeu de euh…, parce que, en fait, c'est un énoncé qui est un énoncé universel. Mais est ce que les enfants se prêtent à ce jeu de disparition / apparition de quantificateurs ? (30mn 11s) Si je pose la question, c'est parce que, dès qu'on donne un énoncé sous la forme, sans expliciter le quantificateur, ils prennent de façon automatique comme un énoncé quantifié. Est-ce qu'il vous est arrivé d'attirer l'attention des enfants sur cela ? C'est par exemple le cas de pour tout, toute fonction dérivable est continue.

(99) En1 : J'avoue que vraiment, je n'ai pas attiré l'attention dessus. Je suis tombé dans le piège de la routine. Les autres, quand on dit, soit une fonction. L'idée de l'article indéfini *une*, me permet peut être de croire que c'est *pour tout* et au moment où je vais aller à l'existentiel, j'utiliserai l'article défini, *le*, *la*. Quand je vais prendre *une*, comme c'est indéfini, on pense que ça peut couvrir tout. Mais je crois qu'attirer l'attention un détail est très important, ce serait plus intéressant de dire, *pour toute fonction f, si f est dérivable en* x_0*, alors f est continue en* x_0. Je me dis que si tu commence à écrire *quelque soit f appartenant à l'ensemble F des fonctions, si f dérivable implique …,* cet énoncé aura du mal à passer. Et quelques-uns qui vont comprendre, vont commencer à utiliser et à un moment donné vont faire l'amalgame. Et c'est cet amalgame que les enfants ont tendance à faire sur les symboles de connecteurs logiques, sur les différentes propositions qui a poussé souvent l'inspection à mettre ça de côté et à revenir au formalisme français. Parce que nous avons tendance à copier un peu le système français qui a fait disparaitre les quantificateurs il y a année et nous sommes revenus à un langage plus courant.

(100) J : Aujourd'hui, ils sont entrain d'introduire dès la seconde, ils introduisent !

(101) En1 : Justement ils sont entrain d'y revenir. C'est pourquoi je dis, nous avons constaté ce problème et lors de, d'une réunion avec les inspecteurs, moi je disais qu'il faut qu'on revienne à ça. J'ose espérer que bientôt on va arriver à ça. Mais formuler, des fois on a un peu tendance à oublier que euh, on a tendance à insister sur l'aspect quantificateur qui ne s'écrit pas mais qui peut quand même se faire ressentir par un mot ou une phrase. Et aussi les élèves ne prennent donc pas la peine de s'initier.

(102) J : En fait c'est parce qu'on n'attire pas leur attention. La routine fait que

(103) En1 : On est passé comme ça, personne n'a rien dit

(104)J : Chacun sait que, quand on dit *une fonction*, de façon implicite, ils savent que c'est un universel. Or le jour où vous donnez un truc comme ça et que l'interprétation qu'ils donnent …, ils peuvent donner l'interprétation, on se rend compte qu'ils donnent à une, l'interprétation de l'universel, mais ça peut ne pas être l'universel. Je pense que c'est un truc sur lequel ils doivent avoir leur attention attirée. Je pense qu'il faudrait préciser parce que, c'est pas toujours le *un* universel qu'on a.

(105) En1 : Il faut le dire, c'est ce que l'enseignant pense, mais il ne l'a pas vraiment dit. Et je dis honnêtement, je ne prends pas la peine d'insister. Ça peut arriver un peu au hasard vraiment ou si des élèves, quelques élèves devant moi qui ont l'esprit bien éveillé, parce que c'est la chance d'en avoir un qui est très éveillé, qui est suffisamment lecteur, et qui peut vous pousser à…, enfin je n'insiste pas trop sur ça quand même.

(106) J : D'accord. (lui tendant l'épreuve donnée aux élèves de Tle S) J'aurai souhaité que vous jetiez un coup d'œil et que vous me disiez si vos élèves pouvaient traiter cette épreuve, me dire quel type de difficultés ils pouvaient rencontrer dans ce questionnaire

(107) En1 : Déterminer l'ensemble des nombres entiers…vous voulez que je fasse comment ? Je coche un peu ce qui

(108) J : Non, qu'on en parle.

(109) En1 : Je lis d'abord tout haut ou on va au fur et à mesure ?

(110) J : On peut aller au fur et à mesure.

(111) En1 : Ok, c'est bien. Déterminer l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 20 … Ce que je dirais déjà ici, c'est que la plupart des élèves, quelques uns qui ne sont pas assez futés vont chercher à retrouver, à rechercher une condition particulière sur x. Mais beaucoup vont lister les entiers inférieurs à …, inférieurs ou égaux à 20 et tester. Ça c'est entier naturel ou il y a

(112) J : C'est entier naturel, C'est les entiers naturels. J'ai précisé. En fait je l'ai précisé au cours de la passation du test mais il faut que je le précise encore sur le questionnaire. On peut continuer.

(113) En1 : et là, celui qui va essayer de faire, se dire bon, x et on va dire qu'il y a beaucoup qui vont raisonner en disant *supposons x est pair,* il dit x est égal à $2k$. Alors, $x+1$ est premier, $x+1=2k+1$. Là il se met à rechercher qu'est ce qu'un nombre premier en voyant voir comment il peut, s'il peut prouver ça.

(114) J : En fait il va chercher une caractérisation d'un nombre premier pour voir si…

(115) En1 : S'il peut trouver une condition. Alors, certains vont commencer à, vont oublier qu'on leur demande de trouver les entiers x. Ils vont croire qu'on leur demande de démontrer que si x est pair, alors $x+1$ est un nombre premier. Et des erreurs pour ceux qui n'ont pas compris qu'il s'agit d'établir qu'une proposition entraine une autre et doit commencer à écrire que, commencer par la fin ! Ils ont un nombre premier et il cherche à raisonner que x est pair. Il y a beaucoup de fautes de raisonnement que les enfants vont avoir là-bas, plusieurs de première et terminale. Parmi les phrases suivantes, indiquez celles qui …(il s'agit de l'exercice 2) Bon, dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires. Je crois que là ils n'auront pas de difficultés s'ils ont la définition du losange. Un quadrilatère convexe dont les diagonales est un losange … Alors, il faudrait que l'élève réussisse à comprendre que le phrase peut signifier encore *si un quadrilatère convexe a des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.* Il faut que l'état d'esprit de la personne puisse concevoir ça comme ça.

(116) J : il faut qu'il puisse arriver à transformer en un conditionnel.

(117) En1 : Sinon, s'il n'a pas pu installer ça dans son esprit, il va, il risque dire *oui*, parce qu'il sait que dans losange, les diagonales sont perpendiculaires, et oublier que ce n'est pas encore un parallélogramme. La question soulève l'idée, comment est ce qu'un problème posé peut être perçu dans l'esprit de l'élève. Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors … Donc là il y a d'abord la notion de rectangle. Si l'élève maitrise les définitions des différentes notions, c'est-à-dire diagonale, perpendiculaire, rectangle, tout ça associé. Est-ce qu'un ensemble de propriétés P1, P2, P3 en même temps réalisées, parce qu'il faut qu'il sache d'abord qu'on a envie de faire la conjonction de trois proposition qui doit entrainer une proposition autre qui est alors être le carré.

(118) J : Par rapport à ces trois, le premier étant bien un conditionnel, vous pensez qu'ils … Je prends par exemple pour vous qui n'avez pas fait le euh, les tables de vérité, les trucs comme ça là, vous pensez qu'ils peuvent traiter ça aisément ? Parce que la vérité d'une implication, quand vous avez une proposition, on a besoin de euh…

(119) En1 : Oui est ce qu'ils peuvent jouer avec les tables de vérité ? Je ne suis pas trop certain. Parce que l'année dernière, dans un collège, pas au lycée, j'ai fait l'expérience d'un cours de logique au début où j'ai même fait les tables de vérité un peu, ils copiaient seulement, parce que

(120) J : Et vous ne donniez pas d'exemples ?

(121) En1 : On prend des exemples, si P vari, Q vrai, P vrai et Q faux, ça entraine que P⇒Q est faux. Il apprend, il retient ça bien, mais après, il a l'impression qu'il ne, quand tu prends des exemples pour le leur montrer, il y a en un qui dit toujours *Monsieur on ne peut pas faire*

ça plus simplement ? On ne peut pas aire ça plus simplement ? Quand vous faites des choses, il y a trop de cas et ça vous embrouille… Donc les trois là, où il y a une implication, présenter ça aux élèves en utilisant les valeurs de vérité, sur le plan pratique, ça peut passer dans un environnement scolaire de peu d'élèves suffisamment intéressés. Environnement déjà à 60 élèves, 50 élèves pas tous très passionnés, ça sera un peu difficile. Et malheureusement, on enseigne généralement avec des objectifs à atteindre et quand une chose qui est une méthode ou une pratique ne facilite pas directement l'objectif qu'on va atteindre, on a une tendance naturelle d'enseignant de vouloir mettre ça

(122) J : De côté

(123) En1 : de côté ou de suspendre ça lorsqu'ils ne comprennent rien. C'est un réflexe de bon enseignant, bien sûr. Donner la négation de chacune des phrases suivantes : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges. Ils vont tous dire *ne sont pas rouges*, *Toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges*, voilà ce qu'ils vont dire. Parce qu'ils vont tous raisonner avec cette idée de la négation grammaticale. Certains nombres entiers sont impairs.

(124) J : Sont pairs

(125) En1 : sont pairs. Alors, une fois de plus, très peu, je crois qu'il n'y en aura pratiquement pas. Sur 10, je parie qu'on aura au maximum 2 qui peuvent voir certains là comme une sorte de *il existe des nombres entiers qui sont pairs*, et raisonner maintenant sur le fait que, comme il a dit *il existe* et faire la négation de *il existe* pour dire *quel que soit*. Or, comme ils n'ont pas une bonne maîtrise de ce problème d'inversion des quantificateurs ou même des phrases logiques, je peux dire, des phrases mathématiques, ils vont venir s'embrouiller. Déjà quand on dit négation de $x \geq 1$, tout le monde dit $x > 1$. Si vous essayez dans une classe de troisième ou, tout le monde va te dire que c'est inférieur à 1. La négation c'est $x < 1$, c'est clair. … On était à « certains nombres entiers sont impairs ». Donc le problème c'est de percevoir que certains là correspond à l'existence. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4. Ils vont se rendre compte qu'il y a un peu un souci, qu'ils arrivent à trouver un cas qui ne marche pas. Ou alors s'il fait terminale C, il se battra avec des méthodes de terminale C. mais pour celui qui est en classe un peu petite, il aura un mal à trouver des nombres divisibles par 4.

(126) J : Non, là c'est la négation.

(127) En1 : Ah ! C'est la négation, oui, oui.

(128) J : C'est la négation.

(129) En1 : Si c'est la négation, *un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4*. Je crois qu'ils auront un peu de mal. Ils risquent de faire la négation des deux dans l'ordre indiqué

(130) J : Et ils font une implication ?

(131) En1 : Oui

(132) J : D'accord. C'est ce que l'on retrouve souvent.

(133) En1 : Si non P, alors non Q. alors qu'on leur a dit de faire la négation de Si P, alors Q, qu'on va souvent retrouver. La limite d'une fonction est toujours finie. Une fois de plus, je suis entrain de m'apercevoir qu'on est entrain de dire que quel que soit une fonction f, sa limite n'importe où est toujours finie. Et là il va encore buter une fois de plus sur le problème de la négation du quantificateur quel que soit. La difficulté principale qu'il y a c'est justement leur capacité à la maîtrise des outils logiques élémentaires qui va bloquer ceux qui ne vont pas s'en sortir dans les quatre questions-là. Et je trouve ça comme des questions intéressantes pour celui qui voudrait en début d'année scolaire mettre en place le raisonnement, la façon de rédiger ou de penser. Donner la négation de f est croissante, puis écrire cet énoncé en langage formel.

(134) J : Bon, là c'est, je crois que j'avais enlevé cette petite partie-là. Parce que c'était pas évident pour eux.

(135) En1 : pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle peut être utilisée ou non. Vous complèterez la phrase qui suit afin d'avoir une définition mathématique correcte. Vous justifierez soigneusement vos réponses. Une fonction f de la variable réelle x est majorée …

Pour tout x élément de I, $f(x) < M$. Si x est un élément de I, alors $f(x)$ est inférieur à M. Pour tout x élément de I, il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$. Ils vont d'abord vous dire oui là parce qu'ils vont confondre tout ça. Et maintenant, quand ils vont arriver ici (c'est-à-dire au 3) il va un peu réfléchir en disant pourquoi il y a *il existe M* ? Parce que c'est ça qui manque dans les deux parties là. Il existe un réel *M* tel que pour tout *x*. Même là, ils risquent croire que ceci (la 3) c'est encore ça (la 4). Parce qu'il est très compliqué pour ces élèves du lycée, de croire que, de savoir que lorsqu'on écrit comme ça, c'est que ce M-ci est lié à x. Ça c'est difficile déjà qu'ils perçoivent ça comme ça. Le souci c'est justement l'occasion de remarquer que nous pouvons croire que M (dans la 3) ci est encore une constante. Il existe M élément de I tel que $f(x) \leq M$, or c'est ça qui est justement la bonne réponse. Si x est un élément de I, alors, il existe un réel M tel que $f(x) < M$. Ils auront beaucoup de mal à savoir qui est le mauvais.

(136) J : Est-ce que …, ouai.

(137) En1 : Ils vont vous dire, Mme, vous avez écrit la même chose.

(138) J : Ah, c'est ce que j'allais demander. Si pour eux il y a une différence

(139) En1 : Non, non, ils vont vous dire que c'est la même chose. Ils vont vous dire que vous écrivez la même chose, parce que, vue la façon dont ils sont formés maintenant, pour eux, le mot-clé, le texte-clé, c'est ça qu'ils cherchent.

(140) J : D'accord.

(141) En1 : Donc ceux qui vont voir ça vont dire c'est bon, c'est majoré.

(142) J : Il faut majorer le $f(x)$

(143) En1 : oui, c'est tout, le $f(x)$ est, tout ce qu'on bavarde à côté-là, ça c'est pas fondamental. J'essaie de me mettre à leur …, de voir comment ils réfléchissent souvent. 5, dans ce qui suit, on a bouclé là ?

(144) J : Oui. Le 6 c'est pratiquement la même chose, donc on peut laisser le 6.

(145) En1 : Dans le 5, dans ce qui suit, u_n est une suite numérique, suite définie par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur R. on a alors le résultat suivant : si la suite u_n est convergent, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. Que pouvons-nous dire au sujet de la convergence de la suite u_n si : l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution ; Je crois que là ils vont quand même dire que ce n'est pas convergent. L'équation $f(x) = x$ a au moins une solution ; là, ils vont dire aussi la même chose. Ils vont dire que c'est convergent. Ils ne vont pas percevoir que c'est une implication. Ils vont tout de suite comprendre ça comme une équivalence. Beaucoup vont dire que s'il y a une solution, c'est que c'est convergent.

(146) J : Mais est ce que ce ne sont pas les habitudes scolaires ? le fait qu'il y ait toujours une, quand on, il montrent euh, le fait que généralement ils commencent à regarder si l'équation $f(x) = x$ a une solution, et après ils montrent la convergence, ils vérifient la convergence. Je me demande bien

(147) En1 : Ce n'est pas toujours ça, car une fois de plus, les élèves n'ont pas cette rigueur. Puisqu'on a écrit une phrase. Ils la lisent et ne l'interprètent pas de manière très très logique. Avec la rigueur qu'il faut. Parce que la phrase dit bien, si u_n est une suite convergente, alors, sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$. Alors, ceux qui ne vont pas comprendre qu'il y a un préalable de convergence avant d'arriver à, convergence, que le limite existe, que ce qui vient après n'est qu'un moyen de retrouver cette limite à partir du calcul de $f(x) = x$. Ils vont lire, $f(x) = x$ a au moins une solution, ceci dit, la suite sera convergente. Une bonne partie va penser comme ça. Par contre, les élèves qui ont réussi à installer dans leur esprit en parlant de suite ou de limite d'une suite, il y a d'abord le préalable de la convergence avant de passer à la limite. Mais beaucoup ne vont pas trouver, surtout dans les classes comme série D, ils n'arrivent pas à faire toutes ces distinctions-là. Ceux qui sont inscrits en série C, peut-être s'ils ont bien suivi, et qu'on prenne la peine d'insister sur le fait que. C'est pourquoi on prend la peine même d'écrire quelque part dans une phrase l'implication ou la réciproque est fausse et partir sur un petit exemple pour prouver que cette affirmation a une réciproque qui n'est pas vraie en prenant des contre exemple, des contre exemples qui détruit le sens contraire. Mais il faut chaque fois écrire *la réciproque est fausse*, et là commenter ça, soit en commentaire oral, soit par un cas pratique. Le cas pratique est même souvent plus intéressant que le commentaire. Donc ici, si l'élève qui est interrogé n'a pas, quand on dit ça à l'élève, si on n'a pas trouvé un cas avec $f(x) = x$ a une solution et que la suite n'était pas convergente, il aurait un peu du mal à accepter.

(148) J : Mais le problème souvent des cas pratiques, c'est qu'il n'y en a pas beaucoup. Quand il y a juste un cas pratique

(149) En1 : Il y a des moments où, en prenant un cas pratique pour établir que la réciproque n'est pas vraie, soit la cas pratique est tellement compliqué,. On peut toujours trouver un moyen de faire une perception dans la pensée ou graphique du fait que c'est pas vrai. Alors ce que je voulais ajouter, on était où là ? Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$ si u_n est convergente, si u_n est convergente. Si u_n n'est pas convergente. Pour si elle est convergent, ils vont dire que l'équation-là a une solution. Si u_n n'est pas convergente, ils vont toujours dire que l'équation n'a pas de solution.

(150) J : Donc pour eux, c'est vraiment l'équivalence ;

(151) En1 : la perception de l'équivalence signifie double implication. Les élèves, avant qu'ils n'arrivent en terminale, ce n'est pas très net. Je le dis une fois de plus, ce n'est pas absolument leur faute. C'est parce que la logique n'ayant pas été enlevée du programme a été réinstallée sous forme de point logique, sous forme de paragraphe que chaque enseignant devait installer. On a malheureusement beaucoup d'enseignants qui ne sont même pas au courant que chaque année il doit s'arrêter sur des points logiques. Et voilà comment beaucoup d'élèves tournent, ils roulent, ils roulent. Peut être si en terminale D ou C ils tombent sur quelqu'un qui est assez, qui est au courant, qui est

(152) J : Qui est assez averti, quelqu'un de bien averti

(153) En1 : alors que quand tu commences à rentrer là dedans, ils disent que, mais, Monsieur, vous êtes sûr que vous êtes encore en terminale ? Ce n'est pas très évident, on est obligé de forcer. Le 6 n'était pas très différent du 5

(154) J : Le 6, non, c'est les quantificateurs. Le 7, on peux laisser ça, parce que j'avais aussi enlevé du questionnaire. C'est celle-là, la 8, la dernière.

(155) En1 : Que pensez-vous de la propriété suivante, pour tout nombre réel x, pour tout nombre réel y, si $x < y$ et $y < x$, alors $x = y$. Hum, ils vont dire faux tout de suite.

(156) J : Et pourquoi vous le pensez ?

(157) En1 : Lorsqu'ils vont voir strictement inférieur ici, ils vont dire que ça ne peut pas être égal. Bon, maintenant s'ils entrent avec rigueur dans la …, S'ils avaient la capacité à savoir que P⇒Q peut encore signifier *non P ou Q*, en prenant les valeurs de vérité, ils pourraient dire.

(158) J : Merci beaucoup, je pense que votre contribution va m'aider.

ANNEXE 10 : Retranscription de l'entretien avec un enseignant de mathématique du secondaire En2

(1) J : Là c'est un questionnaire que j'ai proposé aux élèves de TC. On pourra le regarder après. La première question que je voulais vous poser, c'est de savoir si vous faites des cours de logique en début d'année et…

(2) En2 : Bon, avant, on le faisait, mais depuis un certain temps…

(3) J : Pardon, je veux d'abord… Vous avez quels niveaux ?

(4) En2 : J'ai une classe de premier cycle et le reste au second cycle. La classe de premier cycle c'est la sixième et le reste c'est première, terminale

(5) J : Première, terminale ?

(6) En2 : J'ai terminale C, terminale D, première littéraire

(7) J : D'accord. Les terminales C et D vont beaucoup plus m'intéresser. Donc dans ces classes, est ce que vous faites des cours de logique en début d'année ?

(8) En2 : Ces derniers temps, non. J'avais essayé une fois, et j'avais informé Monsieur Fotsing (l'animateur pédagogique du lycée), et il y a un inspecteur qui m'a repris là-dessus parce que, en principe, en début de rentrée scolaire il n'y a pas beaucoup de monde. Il n'y a pas beaucoup de gens en classe, il y a trente, vingt-cinq élèves qui arrivent, tu te dis, je ne vais pas commencer directement avec les chapitres, je vais en profiter puisque ce n'est pas au programme, je vais en profiter pour leur parler un peu de logique. Mais après il y a les inspecteurs qui arrivent et qui disent oh, non. Ils ne savent pas dans quel contexte tu leur as fait ce cours, ils disent non, ce n'est pas au programme. Je leur dis, non ce n'est pas au programme, mais vu que j'avais le temps de le faire, voilà, j'en ai profité pour parler un peu de logique vu que c'est utile.

(9) J : Et quel était le contenu quand vous faisiez le cours ?

(10) En2 : Le contenu … Ce qui m'avait motivé c'est quoi ? C'est que les enfants aujourd'hui quand on pose un problème en classe, ils ne savant pas vraiment ce qu'on leur demande de faire. Vous leur demandez de montrer que, par exemple que *si f est une fonction continue, alors g sera strictement croissante*. Alors, lis ne comprennent pas si… Parfois les enfants se disent *il faut montrer que f est continue,* ou bien *il faut montrer que g est croissante.* Ce n'est pas du tout le cas. Alors c'est démontrer que *g* est dans la condition où *f* est continue. Il yt a parfois, les élèves ne savant pas répondre aux questions parce qu'ils n'ont pas compris en fait ce qu'on leur demande de faire. Alors, si on leur demande … Au début donc, qu'est ce que je faisais, je disais donc OK, comment montrer que *Si P, alors Q* ? Quelles sont les différentes méthodes quand on me demande de prouver *Si P, alors Q* ? Comment est ce que je vais me comporter ? Est-ce qu'il s'agit de montrer que *P* est vrai ? Est-ce qu'il s'agit de montrer que *Q* est vrai ? Voilà ! On prend un cas simple. Alors très souvent l'exemple que je prends dans

ces conditions, je dis, *Si je laisse tomber la barre de craie, elle va se casser*. Voici une affirmation, est ce qu'elle est vraie ? Comment prouver que si je laisse tomber la barre de craie elle va se casser ? Ils me répondent, oh monsieur, la barre de craie est fragile. C'est fragile et puis quoi ? Est ce que tu es sûr que si je la laisse tomber, si le sol était une éponge, tu es sûr que si je la laisse tomber elle va se casser ? On explore toutes les façons, comment convaincre. Parce que démontrer c'est convaincre quelqu'un. Alors, c'est là finalement que, et on a aussi, et … Finalement j'ai constaté que la solution ce sont les élèves. Parce que je me rappelle une fois, un élève était venu prendre la barre de craie, il l'a laissé tomber, elle s'est cassée. Elle a dit, *Monsieur voilà la craie, est ce que tout le monde est d'accord ?* Alors je dis que c'est nécessaire, ces cours de logique qu'on a supprimé au programme, c'est pas bon. Ça empêche les élèves de comprendre et de progresser, ça empêche aussi l'enseignant de progresser dans son cours. Voilà, donc pour revenir à ta question, à votre question,

(11) J : On peut se tutoyer, moi ça ne me dérange pas.

(12) En2 : Donc pour revenir à ta question, ce qui m'a motivé, ce qui m'a motivé, c'était le problème de compréhension des élèves, amener les élèves à comprendre les questions qu'on leur pose. C'est ça qui m'a motivé. Le contenu, généralement, c'est comment démontrer une implication, comment démontrer une double implication, comment raisonner par récurrence, comment raisonner par contraposée, ainsi de suite.
(13) J : Donc vous mettiez beaucoup plus l' accent sur la démonstration

(14) En2 : Sur le raisonnement mathématique. Démonstration et raisonnement mathématique

(15) J : Euh, vous ne parliez pas par exemple aux règles de vérité d'une implication, de *et* et *ou,* des choses comme ça ?

(16) En2 : Euh, pour parler de ça, je ne pense pas qu'il faille prendre les choses au milieu de nos enfants. S'il faut qu'on parle de vérité, il faut commencer tôt à la base. Il faut commencer tôt à la base.

(17) J : Et pour vous, la base c'est quoi ?

(18) En2 : La base, ça veut dire que, il faut faire les tableaux, tous les cas possibles. Traiter tous les cas possibles. Or, très souvent ce que je prends, je choisis les cas qui m'intéressent dans la classe. Par exemple si je suis dans le cadre de Terminale C, terminale D, le cas le plus intéressant c'est P flèche Q ($P \Rightarrow Q$), c'est P et Q, c'est P ou Q. et même pas tous les cas possibles du tableau. Quand est ce que P ou Q est vrai ? Voilà, est ce qu'il faut absolument que P et Q soient vrais en même temps ? Non, il faut seulement que l'un des deux soit vrai. Quand est ce que P et Q ? Quel est la… et puis, parfois aussi c'est, pourquoi, parce que, vous savez, ce vraiment qu'on appelle en mathématiques le raisonnement par contraposé, très souvent les élèves ne comprennent pas. Lorsque vous dites contraposé, très souvent ils ne comprennent pas que vous devez supposer que c'est vrai et que le résultat est faux en même temps. Que quelque chose est vrai et ce que vous trouvez est faux. Ils ne comprennent pas que vous le posiez. Vous comprenez non ?

(19) J : Absurde

(20) En2 : Raisonnement par l'absurde, je veux dire. Voilà, ils ne comprennent pas. Donc, moi je dis, ce que je prends dans les tableaux de vérité, ce sont les cas qui m'intéressent. Des situations qu'on va rencontrer dans des différents chapitres, les types de raisonnement dont j'aurai besoin au courant de l'année, c'est ça qui m'intéresse, c'est ce que je prends.

(21) J : Pendant, au cours de l'année, pendant vos cours, est ce que vous profitez de certaines situations pour pouvoir expliciter certains concepts de logique ?

(22) En2 : Je reviens toujours. Toujours, c'est ce que je fais au début du chapitre.

(23) J : Vous avez… En début de chapitre ?

(24) En2 : Oui. Et quand je veux utiliser, j'amène les élèves à se souvenir de ce qu'on a fait. Pour montrer que c'est quelque chose, pour mettre l'accent, pour montrer que c'est quelque chose d'important, et que ce n'est pas un raisonnement qui est seulement lié au chapitre. Que c'est quelque chose qu'on va, c'est un raisonnement en tout cas. Ce n'est pas quelque chose qui ne concerne rien que les fonctions ou bien, rien que les suites, que les nombres complexes, non. C'est un raisonnement, c'est une manière de raisonner.

(25) J : Est-ce que vous avez, est ce que tu as, comme on a dit qu'on part sur le tutoiement, est ce que tu as un exemple pare exemple où tu as eu à clarifier certains problèmes. Parce que je sais surtout qu'au niveau de l'implication, ils mélangent souvent tout, avec implication, équivalence…

(26) En2 : Je prends le cas du premier chapitre, le raisonnement par récurrence. Dans la plupart des livres de mathématiques, il est suggéré que, après avoir vérifié la proposition de premier rang, on démontre le résultat. Et dans la plupart du temps, les rédacteurs des livres disent que, vous supposez que P_n est vrai, et vous montrez que P_{n+1} est vrai. Or c'est un cas parmi tant d'autres. Quand on raisonne, quand on dit cela à un enfant, surtout l'enfant de terminale C, rencontre un problème où cela devient très difficile de supposer que P_n est vrai et de montrer que P_{n+1} est vrai. Ou dans ce cas où il faut montrer que non P implique non Q. ça devient très difficile. Or si on l'avait présenté au début comme un raisonnement parmi tant d'autres, Pour eux à leur niveau, généralement je leur propose deux solutions ou peut-être trois, parce que je dis, pour montrer qu'une proposition est vraie, il suffit de montrer que son contraire est faux. Il doit déjà apprendre comment trouver le contraire d'une implication, comment trouver le contraire d'une double implication, comment trouver le contraire d'une conjonction. Ça, si l'élève peut le faire, c'est une très bonne chose. Là il sait que si je veux montrer que P_n implique P_{n+1} est vrai, je peux supposer que P_n est vrai et montrer que P_{n+1} est vrai. Ça c'est un raisonnement. C'est comme je peux, pour montrer $P \Rightarrow Q$, je peux supposer que , je peux montrer plutôt que $non\ Q \Rightarrow non\ P$. Et là je suppose que non Q est vrai et là je montre que non P est vrai. Ou bien je peux prendre la négation, montrer plutôt que la négation est vraie. Vous voyez, ce sont des cas un peu rares, mais ça peut arriver.

(27) J : La négation est fausse !

(28) En2 :La négation est fausse ! Voilà. Et là, la négation me donnera une autre implication et je choisirai mon type de raisonnement que je veux. Voilà, voilà par exemple un cas. Et les

implications se retrouvent dans tous les chapitres. Dans les questions on dit, *on suppose que … montrer alors que.* Ça c'est une implication ! On suppose que, montrons que… et même s'il est vrai que dans la plupart des cas les élèves ont toujours choisi la première option, c'est-à-dire, celle de supposer que la première proposition est vraie, et que la deuxième est vraie, il est important de mettre un peu plus d'importance sur la qualité du raisonnement. C'est ça en fait qui fait le raisonnement. C'est-à-dire, l'élève doit être capable de dire au début *admettons que et montrons que*. C'est ça qui fait le raisonnement. S'il ne peut pas admettre, si l'élève ne peut pas dire *j'admets que, j'admets que n est comme ceci et je vais essayer de prouver que le reste-là est vrai.* C'est un peu ça. On doit voir, je dois voir cette séquence-là quand j'enseigne aux élèves. Ils faut que les élèves me restituent cette séquence-là de raisonnement

(29) J : Est-ce que vous ne pensez pas, par rapport justement à l'implication, quand on dit de montrer que, par exemple, *pour tout x P(x)⇒Q(x) est vrai.* Euh, généralement on suppose que le *P(x)* est vrai et on montre la vérité de *Q(x)*. est ce que vous avez pensé à un cas par exemple où le *P(x)* est faux, *P(a)*, pour un *a* de l'univers dans lequel vous travaillez, *P(a)* est faux. Il peut y avoir un cas où P(a) est faux. À ce moment l'implication $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est vraie. Est-ce que vous avez déjà eu à rencontrer ce type de euh, euh, cette situation en cours, ou vous avez eu à préciser aux enfants que, ou alors c'est généralement on suppose que *P(x)* est vrai et on montre que *Q(x)* est vrai. Parce que je sais, les théorèmes généralement c'est sous la forme $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ et pour les montrer on suppose que *P(x)* est vrai et on montre que *Q(x)* est vrai.

(30)En2 : Bien, nous rencontrons ce genre de raisonnement au tant dans les classes de terminale C que dans les classes de terminale D. en terminale C c'est un peu plus en arithmétique quand on veut raisonner. Parfois, lorsqu'on conçoit un exercice, et qu'on veut peut être aboutir à montrer qu'une certaine catégorie de nombres sont des nombres premiers, ou bien sont des nombres parfaits. Parfois on prend des nombres qui ne respectent pas le schéma de construction de ces nombres-là et on essaie de démontrer que, on peut poser la question *montre que si ce nombre s'écrit comme ceci, alors il est forcément multiple de 7. Montrer que s'il est comme ceci, il est forcément multiple de 7*. Et dans la suite, le raisonnement va consister à l'enfant, à utiliser plutôt justement ce que vous venez de dire. De dire, *cette situation ne peut pas être* parce que si cette situation était vraie, alors j'aurai eu ceci. Comme je n'ai pas ceci et comme la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors forcément P est fausse. Je ne sais pas si je me suis fait comprendre. L'enfant veut admettre que $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors son raisonnement va consister à prouver que en fait P est faux pour admettre $P \Rightarrow Q$. Par exemple, si P avait été vrai, à la question précédente, P', P⇒P' aurait été vrai parce que P est vrai. Alors comme je suis sûr que P' n'est pas vrai, alors forcément, c'est dans ce genre de contexte que nous rencontrons, qu'on rencontre parfois ce que vous venez de dire-là.

(31) J : Et en dehors de l'implication, parce que je vois que vous traitez beaucoup d'implication, puisqu'il y a les inférences, en dehors de l'implication est ce que vous avez d'autres connecteurs logiques que vous explicitez ? Le *et,* le *ou*, la négation. Est-ce que vous avez déjà eu à expliciter d'autres, autre que l'implication, l'équivalence qui sont, c'est vrai très fréquentes pratiquement dans tous les chapitres ?

(32) En2 : ce qui est fréquent chez nous, c'est l'implication et la double implication qu'on retrouve dans la plupart des chapitres. Bien euh, la conjonction, en terminale D, on ne retrouve pas trop ça. En terminale C si. 13mn 41 s

(33) J : Et vous avez l'occasion d'expliciter

(34) En2 : Oui. D'expliciter, oui, d'expliciter.

(35) J : Et la négation ?

(36) En2 : C'est justement dans ce cas qu'on utilise la négation. C'est-à-dire, par exemple une situation où on demande de montrer que n est premier, n est comme ceci-là, ou n est ceci. Montrer que si n est comme ceci, n est multiple de 5, ou n est multiple de 3. L'enfant peut dire *comment prouver que P ou Q est vrai ?* Soit je montre que… Parce que très souvent le raisonnement que je fais en Terminale C, c'est de supposer que le premier cas est faux, c'est-à-dire, quand je veux montrer que $P\ ou\ Q$ est vrai. Je suppose que, si P est vrai, $P\ ou\ Q$ sera vrai. C'est de supposer que P est faux et de démontrer nécessairement que Q est faux. Et là il faut choisir la bonne, il faut choisir la bonne proposition. Est-ce qu'il faut supposer que P est vraie ou supposer que Q est vrai et montrer que le reste est faux ? C'est généralement dans ce genre de situations que nous utilisons les connecteurs P ou Q. les connecteurs P et Q, pour que ce soit vrai, il faut que les deux soient vrais en même temps. Donc, quand il y a une situation comme ça qui se présente, l'enfant sait que, après avoir montré que P est vrai, je dois montrer que Q est vrai.

(37) J : Est-ce que tu pense que c'est partagé, que ce que tu fais est partagé par les élèves ? Ils comprennent facilement, enfin, les explications sont… Ils peuvent reproduire les types de raisonnements facilement ? Ou alors, ils trainent un peu le pas ?

(38) En2 : Je dis, quand on le fait avec répétition, je pense qu'il restitue fidèlement le type, l'ossature du raisonnement, quand on le fait avec répétition. Quand on insiste sur la qualité du raisonnement, ils le font. Mais si on n'insiste pas, si on commence au début à tolérer certaines petites erreurs, certaines erreurs de raisonnement, de rédaction, ils vont tomber dans la médiocrité.

(39) J : Et quand ils vont au tableau, comment ça se passe ?

(40) En2 : Bon, moi particulièrement, pour raisonner, quand ils vont au tableau, je demande toujours, il y a des formules, oui, *admettons*, *supposons*, que je veux voir dans ce genre de raisonnement-là, que je veux voir écrit correctement. Donc, on insiste

(41) J : Et la forme des connecteurs, c'est en langage courant ? C'est des symboles ? Comment c'est utilisé ?

(42) En2 : Bien, dans les petites classes, dans les petites classes, je préfère la littérature. C'est-à-dire, parce que j'ai constaté avec les élèves que, ils utilisent très très mal les connecteurs logiques, les implications. J'avais demandé à un élève de résoudre l'équation $f(x) = 0$, ils vont mettre $f(x) = 0$ *équivaut à*, en troisième ils vont mettre $f(x) = 0$ *implique* sans savoir

pourquoi. Ils mettent $f(x) = 0$ *équivaut à*, après ils mettent *implique*, *implique*, *implique*. Et finalement ils aboutissent à une solution, ils encadrent. Bon généralement, j'enlève $0{,}25$, je n'enlève pas tous les points. Mais quand je veux éduquer quoi ! Quand je veux éduquer. Parce que… Et là je leur fais comprendre que c'est la première équation qui implique la seconde et rien ne prouve que la seconde implique la première. Je suis d'accord avec toi que $f(x)$ implique ça, mais prouve moi aussi que ça implique ça. Donc c'est… Généralement je dis, je préfère que vous écriviez que … Sans connecteur. $f(x) = 0$, jusqu'à $x - 3 = 0$, des équations les unes à la suite des autres. Et si vous voulez mettre des équivalences, rassurez-vous que la première implique la seconde et que la seconde implique la première. Parce que, lorsque la première n'implique que la seconde, les résultats de la seconde ne donne que l'ensemble dans lequel vont se trouver les éventuel résultats de la première équation. C'est là qu'il faut aller chercher.

(43) J : Dans ce cas, même l'implication, vous demandez qu'ils enlèvent ?

(44) En2 : Non !

(45) J : Juste les

(46) En2 : Non, je ne demande pas, je propose. Ce cas je rencontre en première C, plus qu'en première littéraire, lorsqu'il faut résoudre les équations. Je dis en première A, en première littéraire par exemple, vous choisissez. Soit vous m'alignez les équations équivalentes sans connecteur logique, mais si vous voulez mettre les connecteurs logiques, vous mettez les doubles, vous vous rassurez que les équations sont équivalentes et vous alignez les connecteurs, vous alignez les connecteurs. Donc je leur propose les deux. Les cas de mauvaise rédaction se rencontrent plus en première littéraire.

(47) J : Et les quantificateurs ?

(48) En2 : Bon, les quantificateurs, on utilise.

(49) J : Avec les symboles ? Avec le langage courant ?

(50) En2 : Les deux. Et c'est sûr que, la première fois que vous mettez un V barré, ça surprend toujours. On dit *Monsieur, ça c'est quoi ?* Mais après 30 mn c'est passé, que ce soit le quantificateur universel ou existentiel.

(51) J : Est-ce que pour les quantificateurs, en dehors de *il existe au moins un*, *il existe un unique*, *quel que soit*, *pour tout*, est ce que tu utilise d'autres quantificateurs, par exemple *certains*, *quelques* ?

(52) En2 : Non, non. Il y a les trois-là : *quel que soit*, *il existe*, *il existe un unique*. Ce sont les cas les plus courants.

(53) J : Parce que, si je pose la question, c'est parce que nous avons eu un test et les enfants ont eu du mal à identifier *certains* comme un quantificateur existentiel. C'était donc pour ça. Et en dehors des trois

(54) En2 : Et je …, très souvent quand on les utilise, on ne leur dit pas que c'est un quantificateur

(55) J : Quoi ça ? Certains ?

(56) En2 : Oui. Quand on les introduit, on se contente de dire que c'est une façon de noter *quel que soit*. C'est une façon d'abréger *quel que soit*, l'expression *quel que soit*.

(57) J : Quoi ça ? Le symbole ?

(58) En2 : Oui, le symbole. On dit que c'est une façon d'abréger *quel que soit*.

(59) J : OK, d'accord.

(60) En2 : Parce que, l'expérience a montré que lorsque vous utilisez les gros mots, *quantificateur universel*, *quantificateur existentiel*, ils prennent ça tout comme une théorie. Ça devient un blocage pour la compréhension, mais quand vous dites que c'est une manière de simplifier, au lieu de dire *quel que soit* en toutes lettres, on peut seulement écrire comme ceci, ça va.

(61) J : Bon, maintenant, quand il y a double quantification, des quantificateurs euh…

(62) En2 : Quel que soit x, il existe y

(63) J : Différents. Quel que soit x, il existe y. Il existe x, tel que quel que soit y. Est-ce qu'il vous est arrivé d'en discuter avec les élèves ? Par exemple le cas d'un majorant, parce que c'est là aussi une bonne occasion de discuter sur les quantificateurs, la position des quantificateurs. La plupart du temps, ils sont indifférents à …, aux positions des deux quantificateurs différents.

(64) En2 : Il existe x tel que quel que soit y, et quel que soit y, il existe un x.

(65) J : Oui. Est-ce que tu as déjà eu à attirer leur attention sur ça ?

(66) En2 : Euh …

(67) J : Quelles ont été les réactions ?

(68) En2 : Non, je n'ai jamais rencontré de problème de ce genre, sauf dans une classe de seconde C. c'est là où on parle souvent de majorant, de minorant, de borne supérieure, ainsi de suite. Mais là c'est… Dire que rencontrer des … Il y a des confusions, non, non vraiment. Parce que la notion de suite nous a beaucoup aidés avec les indices. C'est-à-dire que, quel que soit n, il existe un x_n, on comprend que le x est lié à n. donc que, avec 2 j'aurai x_2, avec 3, j'aurai x_3, que le x_3 n'est pas forcément lié à 2, ainsi de suite. Donc quand on a des situations pareilles, on utilise la notation indiciaire. Au lieu de dire, quel que soit x, il existe un y, on dira plutôt quel que soit x, il existe un p_x

(69) J : Oui, p est indicé en x, pour dire…

(70) En2 : on comprend la corrélation qu'il y a entre p et x.

(71) J : OK, OK.

(72) En2 : Parce que quand on dit quel que soit x, il existe un y, l'enfant ne comprend pas que

(73) J : Qu'il ya un lien

(74) En2 : y est lié à x.

(75) J : Donc, en fait, c'est toi-même, c'est une façon de préciser la différence quand même.

(76) En2 : De préciser la différence. Parce que en fait c'est d'amener l'élève à comprendre que quoi, que le y est lié à x. donc très souvent, soit on utilise la notation indiciaire, soit on utilise les suites ; la notation indiciaire pour montrer que ce qui existe là est lié à ce qu'on a pris au départ.

(77) J : Maintenant concernant les lettres, parce qu'on se rend compte que les lettres aussi posent énormément de problèmes. Les lettres de constantes…

(78) En2 : Bon, avant que vous ne passiez à cette question

(79) J : Oui ?

(80) En2 : Le retour là, il existe y tel que quel que soit x, c'est une notation qu'on utilise dans le chapitre des équations différentielles en terminale D et en terminale C. par exemple quand vous avez une équation différentielle $y'' + 2y - 3 = 0$, il faut comprendre, on amène l'enfant au départ dans l'introduction à comprendre que, la solution y est telle que, quel que soit x appartenant à l'intervalle I, on a ceci. Maintenant, il existe la solution y, y étant donné, maintenant c'est quel que soit x appartenant à I, l'équation est vérifiée. C'est dans ces cas que nous suivons les… qu'on insiste sur le fait que, la différence qu'il y a entre la solution, l'existence de la solution de l'équation différentielle et la condition qu'elle doit vérifier maintenant, quel que soit x appartenant à cet intervalle.

(81) J : Je ne comprends pas bien

(82) En2 : C'est-à-dire, la solution de l'équation différentielle est une fonction. Et si elle est solution de l'équation différentielle, alors quel que soit x

(83) J : Dans l'intervalle I

(84) En2 : On aura $y''(x) + 2y - 3 - 0$.

(85) J : OK, donc en fait c'est le $y(x)$.

(86) En2 : C'es le $y(x)$.

(87) J : $y\ est$ un peu comme une lettre, mais en même temps une fonction. D'accord, et justement pour en venir au problème de lettres, parce que, quand on écrit l'équation différentielle avec des y, on se dit, le y c'est une variable qu'on peut sous entendre comme une fonction, puisqu'àprès quand on donne des solutions, c'est sous la forme $y(x)$ et l'enfant,

lui intériorise le $y(x)$, le $f(x)$, et pour lui ça représente des fonctions. Est-ce que tu as eu à faire des précisions sur les lettres, parce que, les lettres on a des constantes, des variables muettes, des variables, on des éléments génériques et tout ça. Est-ce qu'ils s'en sortent dans la manipulation de tout ça ? Parce que, surtout au niveau des équations différentielles-là, quand on résout l'équation en y et on introduit le $y(x)$, ça devient un véritable casse-tête.

(88) En2 : Oui, c'est un problème qu'on rencontre, c'est un problème qu'on rencontre, et même parmi les collègues. Quand vous voyez ce les collègues écrivent, c'est-à-dire, comment noter la solution d'une équation différentielle. Ce qui est, tu donnes une équation différentielle à un enfant, $z'' + 3z + 1 = 0$. L'enfant va écrire la solution comment ? Lorsqu'il va vouloir déterminer la solution qui vérifie l'équation $y''(2) = 0$, y… Donc c'est un problème. Alors qu'est ce que moi je fais ? Il faut présenter la chose à l'enfant comme étant une simple notation. Moi, ce qui je dis, c'est que depuis la classe de troisième vous avez commencé à étudier les fonctions, en seconde… La fonction était en général notée f, la variable notée x et l'mage de x, on note généralement y. Donc, aujourd'hui, tout ce qu'on va faire, c'est que y va jouer le rôle de f, 26 mn 10 s parce qu'on a toujours écrit $y = f(x)$. y c'est $f(x)$. Mais pour l'instant, pour qu'il n'y ait pas de confusion entre x qui est la variable, qui elle doit être prise dans un intervalle et f qui est une fonction qui appartient à l'ensemble des fonctions, voilà, tout simplement on va supprimer le x et prendre $y = f$. C'est comme ça qu'on s'en sort un peu. Mais sinon il serait mieux de continuer dans ce chapitre-là, de noter les inconnues à l'aide des fonctions, des lettres comme f, h, l, m, ignorer un peu y, parce que dans les classes antérieures, c'était les images de x par f. C'était des images. Ça crée vraiment des problèmes. Parfois les enfants, même quand on insiste, ne savent pas écrire la solution d'une équation différentielle.

(89) J : Quand l'enfant, disons, quand on arrive en fin d'année, est ce que vous pensez que l'enfant est prêt pour entrer à l'université, parce que l'université c'est vraiment le formalisme mathématique. Est-ce que tu pense qu'ils peuvent aborder le formalisme mathématique sans des notions complémentaires ?

(90) En2 : Avec beaucoup de difficultés. Vous savez, aujourd'hui l'enseignement des mathématiques dans le secondaire est tellement, il y a peu de théorie. Il y a peu de théorie et le programme est d'abord réduit et très très pratique. C'est-à-dire que, c'est plus le savoir-faire qu'on enseigne aux élèves, alors que dans les années antérieures, dans les années 80, par exemple moi, quand j'étais au lycée, les espaces vectoriels c'était sur 4, 5 semaines. Alors qu'aujourd'hui c'est deux heures, c'est quatre heures…

(91) J : Et ça permettait aussi de travailler les variables

(92) En2 : Les variables ! On travaillait énormément les variables, énormément les variables.

(93) J : Les opérations en général

(94) En2 : Aujourd'hui vous travaillez dans un espace vectoriel de dimension 2, maximum 3. Alors qu'à l'époque c'était dans un espace vectoriel de dimension n. C'est dans la dernière question de l'exercice qu'on retrouvait les espaces de dimension 2, de dimension 3.

Aujourd'hui c'est le contraire. Cela permettait à l'époque de travailler beaucoup les variables au lycée. Aujourd'hui je dirais, pour répondre à la question que, l'enfant à l'université va aborder ces notions, mais certes avec beaucoup, beaucoup de difficultés. Avec beaucoup de difficultés ; l'enfant aura du mal à raisonner. En algèbre, en topologie, ils auront du mal. J'en rencontre qui viennent me voir ! Ils ont vraiment du mal à raisonner, à comprendre. Parce que la notion de quantificateur, la notion de notation de variable, ils ne comprennent pas.

(95) J : Et dans ce cas, quelles propositions tu pense que…

(96) En2 : Je dis, il faut revenir, je pense qu'il faut revenir sur l'enseignement de la logique, ça permet de comprendre. Faisons comme les … faisons comme à Fustel (Collège français à Yaoundé). Ils sont revenus, avec, je prends le simple cas des limites. Limite de $f(x) = l$, alors quel que soit epsilon, il existe un r tel que valeur absolue de x moins x_0 plus petit que r

(97) J : La définition véritable de la limite

(98) En2 : La définition véritable ! Mais aujourd'hui, dites ça dans une classe, vous perdez tout le monde. Vous perdez tout le monde, parce qu'ils ne comprennent pas. On leur a dit que pour donner la limite, si c'est un polynôme, on prend le monôme de plus haut degré, si c'est une fonction rationnelle, on prend le rapport… la notion même de limite, ils ne la comprennent pas. Et c'est pour ça que quand ils arrivent en première année, en topologie, quand on parle de boule, quand parle des ouverts, des fermés, ils sont un peu perdus. Parce que là, on ne va pas prendre l'intervalle $]-2,2[$. On dit quel que soit, on prend un ouvert centré en x_0, il doit comprendre que, il faut trouver un epsilon tel que, quel que soit x, l'intervalle $x - x_\varepsilon$ 30mn 10… soit contenu dans la boule en question. C'est pour ça qu'on appelle un ouvert. Cette notation devient très très difficile pour eux. Je pense qu'il faudrait, comme à l'école Fustel, revenir à cette écrire

(99) J : Ecriture formelle, définition formelle.

(100) En2 : Je pense qu'il faudrait revenir à ça.

(101) J : On va regarder le questionnaire. C'est un questionnaire auquel j'ai soumis les élèves de terminale C. Et j'aimerais savoir, de toutes ces questions, comment est ce que tu penses que tes élèves peuvent réagir. Est-ce qu'ils peuvent avoir des difficultés ? Si on peut aller question après question ça serait bien. Exercice par exercice. On laissera tomber le dernier-là, le 6 et le 9.

(102) En2 : Bien, déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 …. Je pense que, par rapport à moi, sur dix élèves que j'ai encadrés, la moitié peut répondre, la moitié pas. Pas parce que les autres, les autres, ils n'auront pas… Les autres je précise vous donnerons la solution uniquement dans l'ensemble des nombres pairs inférieurs à vingt, c'est-à-dire, ils iront chercher les solutions dans les nombres pairs. Ici par exemple dans cet exercice, tous les nombres impairs sont solution, mais ils iront chercher seulement les solutions dans les nombres pairs.

(103) J : Pardon, pour ceux qui vont chercher dans les nombres pairs, est ce que ce n'est pas une habitude scolaire, une conséquence des habitudes scolaires puisque généralement quand on leur demande de démontrer $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vrai et on montre la vérité de Q.

(104) En2 : Justement c'est une habitude scolaire. Parce que ils vont vouloir supposer que, supposons que x est pair. C'est ce qu'ils vont admettre. Donc, je dis, voilà pourquoi ils vont aller chercher les solutions dans les nombres pairs, je dis la moitié. Mais, celui qui va prendre les choses à l'envers, c'est-à-dire, celui qui va chercher à montrer que $non\, Q \Rightarrow non\, P$ trouvera tout l'ensemble des solutions. Ceux qui auront cherché les solutions dans l'ensemble des nombres pairs, ça sera une des conséquences de cette mauvaise habitude scolaire. On a appris à dire supposons que P est vrai et montrons que Q est vérifié, et montrons que Q est vrai aussi. (Enoncé de l'exercice 2). Première phrase … vous me demandez d'indiquer si mes élèves vont s'en sortir. Je pense que même l'enfant de … vous avez donné aux enfants de quelle classe, terminale ?

(105) J : Oui, c'est aux enfants de terminale que j'ai remis ça.

(106) En2 : Bon, terminale, je dirais euh…, ce sont des outils dont on se sert en terminale mais qu'on enseigne en quatrième et en troisième. Donc l'enfant qui ne s'en sort pas, c'est l'enfant qui oublie un peu vite, à mon avis. Ce n'est pas un enfant qui aura fait une mauvaise terminale, c'est une enfant qui oublie. Ce sont des notions qu'on enseigne en quatrième. Deuxième question : un quadrilatère convexe… Terminale, ils auront du mal. Par contre un enfant de seconde C s'en sort parce que les quadrilatères convexes, on les enseigne en seconde C. La mémoire est un peu plus fraîche. C'est un peu comme, je dirais, la notion, la recherche des lieux géométriques. Les arcs capables, comme solution de l'ensemble des points M tels que mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\alpha$ modulo (2π), qu'on rencontre en terminale. Ce sont des problèmes qu'on résout en terminale C, qui dans certains cas, la solution est l'un des arcs capables d'extrémités A et B, d'angle α. Les arcs capables, on enseigne en second C, en première C on n'enseigne plus. Quand ces notions reviennent en seconde C, en terminale C, l'enfant qui est oublieux

(107) J : qui est oublieux ne peut pas s'en sortir.

(108) En2 : Mais celui qui a une bonne mémoire, qui a bien fait ces choses en seconde C, s'en sort forcément.

(109) J : D'accord.

(110) En2 : Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires …. En terminale D, je dirais difficilement, en terminale C, oui. Ils vont s'en sortir, mais à cause des problèmes que nous résolvons très régulièrement parce qu'on insiste sur l'utilisation des propriétés des isométries et des similitudes, on rencontre régulièrement ce genre de problèmes. Prouver que c'est un carré, il suffit de prouver que c'est un losange et un rectangle. Mais c'était à cause de ça. Ils vont vite s'en sortir parce que ce sont des choses qu'on utilise régulièrement. Et en terminale D où l'enfant a vu les isométries en première D de manière un peu rare, ça sera difficile pour eux.

(111) J : par rapport à cet exercice là, je voudrais insister un peu sur le *un,* la signification du *un*. Ce qu'on voit généralement, les théorèmes qui sont dans le cours, la plupart est énoncée, est du type, *si f est dérivable, alors f est continue*, sachant que c'est un théorème universel, c'est un énoncé universellement quantifié. Tu penses qu'ils n'auraient pas de problème pour le *un* ? Quelle interprétation ils donneraient du *un* ? Ils prennent ça comme un énoncé universellement quantifié ? Ils prennent ça comment ?

(112) En2 : Je crois. La valeur de vérité qu'ils vont donner de manière très évidente, c'est vrai. Sans aucun doute. Euh trois : donner la négation … toutes les boules contenues dans … là, beaucoup vont se tromper. Beaucoup vont se planter parce qu'ils vont dire *toutes les boules*, parce qu'ils vont donner en fait la négation de la phrase.

(113) J : Grammaticale

(114) En2 : La négation grammaticale de la phrase. Ils vont dire *toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges*. Très souvent c'est ce qu'ils disent. Parce que là il faut dire qu'il existe au moins une boule contenue dans l'urne … beaucoup vont se planter. Euh certains nombres entiers … oui, ils vont répondre évidemment ici. Bon, euh… ils vont répondre tout simplement parce que dans leur esprit, ils voient quelques nombres premiers, quelques nombres entiers qui sont pairs. Mais pas parce que ils auraient utilisé les quantificateurs ici, parce que quand vous dites *certains*, non, c'est un quantificateur existentiel là. Mais ils vont, parce qu'ils vont penser à quoi, ils vont penser à deux, ils vont penser à quatre et se dire mais c'est pair, ces nombres sont pairs. C'est comme ça qu'ils vont réfléchir en fait, moi je pense, les enfants de terminale. Et, bon, ce n'est pas une mauvaise façon de réfléchir, en fait.

(115) J : Et quelle négation ils proposeraient ?

(116) En2 : Ah, c'est la négation qu'on demande. Certains nombres entiers sont pairs. Qu'est ce qu'ils vont pouvoir donner ? la négation… Certains sont pairs, est ce qu'ils vont donner ? Parce que là il faut dire tous, il faut vraiment dire *tous les nombres entiers*. Voilà ! Je ne pense pas qu'ils puissent, je ne pense pas. Une fois encore ici, ils risquent dire, c'est-à-dire ils vont donner une négation grammaticale en disant *il existe des nombres entiers qui ne sont pas pairs*. Ils vont donner et la négation de *certains* et la négation de *ne sont pas*. Voilà, beaucoup vont dire comme ça. Il y a beaucoup de quantificateurs dans cet exercice ! Bien si un nombre entier est divisible par 4 … Là c'est beaucoup plus pour les terminales C. Donnez la négation. En terminale C, je pense que mes élèves vont donner. Parce que je leur ai appris à donner la négation de $P \Rightarrow Q$. Ils vont s'en servir. Si P, alors Q. La limite d'une fonction est toujours finie. Par contre pour ce cas simple, euh… ce cas simple, je suis un peu confus. Je ne s ais pas s'ils peuvent ? Moi je pense que beaucoup vont dire, *la limite d'une fonction n'est pas toujours finie*. Parce qu'ils rencontrent les fonctions où la limite est plus l'infini, où la limite est moins l'infini, et pourtant ce n'est pas la négation. Je pense, beaucoup vont se planter ici-là. Parce que je crois qu'à mon avis, il faut dire, il existe des fonctions dont la limite n'est pas finie. Je crois que beaucoup vont se planter. 4) Donner la négation de f est croissante.

(117) J : On écrit f n'est pas croissante en langage formel.

(118) En2 : Ils vont donner. Ecrire cet énoncé, vous parlez de quel énoncé ? f est croissante ?

(119 J : f est croissante.

(120) En2 : je pense que ceux qui ont la mémoire vont écrire. Mais je dis, l'énoncé en langage formel va être le plus donné par les élèves de seconde C. parce que c'est là qu'on utilise le langage formel pour démontrer soit qu'une fonction est croissante, soit qu'elle est décroissante.

(121) J : Pas en terminale ?

(122) En2 : Dans les terminales, on les utilise dans les cas rares de démonstration. Très souvent, ce sont les dérivées qu'on utilise. À partir de la première, terminale là, ce sont les dérivées. Dès que f' est positive, on sait que f est croissante, mais en seconde, c'est le langage formel qu'on utilise pour prouver qu'une fonction est croissante ou décroissante. Donc je disais que si c'était pour utiliser le fait que f est croissante pour comparer, par exemple pour les suites, pour montrer que, en utilisant le fait que f est croissante, la terminale C, c'est-à-dire, à partir du fait que f est croissante, on utilise la définition formelle pour prouver que une suite est soit croissante, soit décroissante. Parce que à partir du fait qu'on dit u_n est plus petit que v_n, comme f est croissante, alors $f(u_n)$ sera plus petit que $f(v_n)$. Non mais si c'est pour prouver que la fonction est croissante, c'est la dérivée. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle peut être utilisée ou non pour compléter la phrase qui suit… 4.1 : Ils vont pouvoir répondre à ça. *Si et seulement si*, il y a un problème ici là. Ils vont vouloir compléter en disant *si et seulement si x est un élément de I, alors f(x) est plus petit que M* . il faut mettre ça entre parenthèses. Je crois qu'ils vont aussi pouvoir répondre à cette question. Mais un peu de difficulté. À la première, je dirais 100% vont répondre, et pour quantifier un peu cela quoi ! Et à la deuxième je dirais dans les 40, 50% vont vous dire si on peut compléter avec cette phrase, ou si on ne peut pas compléter. Tout ça, tout simplement par habitude, parce que nous leur avons toujours dit que M est un majorant, ça veut dire que quel que soit x appartenant à l'ensemble

(123) J : D'accord, OK, je vois, je vois. La manière dont on définit, en fait. Donc on définit beaucoup plus M est un majorant, que la fonction f est majorée.

(124) En2 : Oui, si vous voyez, la plupart des livres c'est comme ça. Quel que soit x appartenant, $f(x)$ est plus petit. La deuxième est plutôt conçue comme une conséquence. C'est-à-dire que, on sait que c'est un majorant, et on utilise ça comme conséquence. Comme x est dans I, alors,.. Est-ce qu'on peut compléter avec pour tout x élément de I (4.3), ils vont pouvoir répondre. Je crois que là c'est faux, ils vont pouvoir répondre. 4, il existe un nombre réel … pour obtenir une définition mathématique correcte. Si c'est pour obtenir une définition mathématique correcte, je crois que le problème qui va se poser, c'est l'introduction de M. l'introduction de M. Alors là, est ce que les élèves. Parce que moi, enseignant, de manière logique, le premier n'est pas correcte, le second n'est pas correct, pour tout x, le troisième n'est pas correct, le quatrième n'est pas correct, le cinquième est correct. Il n'y a que le quatrième. C'est ce que les élèves … Bon au niveau des élèves, ils vont trouver le numéro 4, mais beaucoup aussi choisiront le numéro 1 sans se rendre compte que rien n'a été dit au sujet

de M. bon cinquième question, dans ce qui suit, u_n désigne une suite définie par récurrence. Comment l'élève va répondre à ça ? l'équation f(x)=x n'a pas de solution. Que peut-on dire au niveau de la convergence de la suite u_n ? Bon, je crois que tous vont répondre que la suite u_n n'a pas de solution.

(125) J : N'est pas convergente

(126) En2 : Euh, n'est pas convergente. Oui, tous vont répondre comme ça. À la deux, l'équation *f(x)=x* a au moins une solution. Qu'est ce qu'ils vont dire, parce que l'équation a au moins une solution. Bon, je crois que beaucoup vont se tromper, mais par habitude. Beaucoup risqueront de dire que la suite u_n converge. Parce qu'on a eu la maladresse toujours de leur donner des cas où, lorsque l'équation $f(x) = x$ avait des solutions, la suite était convergente, et l'une des solutions était… Or ils ne comprennent pas je vais dans ce cas là, je n'explore ce cas que si je sais que la suite u_n est convergente. Donc beaucoup vont se dire que comme l'équation $f(x) = x$ a des solutions, la suite est convergente. Ils ne comprendront pas que dans la plupart des cas, les trois premières questions ont toujours consisté à prouver que la suite u_n converge, soit en montrant qu'elle est croissante et majorée, soit qu'elle est décroissante et minorée avant d'aboutir à ça. Donc beaucoup risquent de se tromper et de dire qu'elle est convergente. Ça met vraiment l'accent sur le fait qu'il faut insister sur le quantificateur. Ah, je comprends maintenant vos questions, parce que ça montre qu'il faut insister quand on enseigne ça, de dire ce n'est qu'au cas où la suite est convergente que sa limite. On n'utilise pas ça comme on utilise souvent pour prouver que la suite converge, mais pour déterminer la limite de la suite lorsqu'on sait déjà qu'elle est convergente. Donc on ne saurait se prononcer en principe sur la convergence de la suite avec la solution. *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation si la suite est convergente ?* Moi je suis un peu, pour cette question, moi je ne la comprends pas. Qu'est ce que vous attendez quand vous dites que, *Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation si la suite est convergente ?*

(127) J : Est-ce qu'elles existent ou pas, les solutions de l'équation $f(x) = x$? Sachant que la limite est convergente, sachant que la limite n'est pas convergente.

(128) En2 : C'est l'existence ? Parce que quelqu'un peut comprendre et dire, moi par exemple j'ai compris en disant que, quelqu'un peut dire que l'une de ces solutions peut être la limite de la suite u_n. Mais ici vous voulez plutôt savoir si les solutions existent. Mais que peut-on dire au sujet de l'existence des solutions, c'est ce que vous voulez poser ou pas ?

(129) J : De l'existence éventuelle.

(130) En2 : Que peut-on dire au sujet de l'existence des solutions, l'existence éventuelle des solutions. Que peut-on dire si la suite u_n converge ? Est-ce qu'on va dire que ces solutions-là ? Bon je crois que concernant l'existence, les élèves vont répondre. En partant de la première, si P est vraie, alors Q est vraie. Donc si la suite u_n converge, si elle converge, alors sa limite existe. Donc sa limite déjà est une des solutions. Que peut-on dire si la suite u_n n'est pas convergente ? Beaucoup vont se tromper et dire que cette équation n'a pas de solution

(131) J : On continue avec le 7 et le 8

(132) En2 : On considère la famille de fonctions …. C'est une question que nous posons très souvent dans les exercices de terminale C, et très rarement en terminale D. et c'est une question qui crée très souvent problème.

(133) J : Pourquoi ?

(134) En2 : ça crée problème vue la manière, justement parce qu'il y a cette notion de quantificateur. De compréhension même du problème. Et euh, très souvent aussi parce qu'il y a l'exercice type que très souvent les gens prennent et qui faussent un peu la compréhension de ce genre d'exercices. Parce que en principe, dans ce genre d'exercices, il faut trouver un x_0 et un y_0 tels que quel que soit a, $f_a(x_0)=y_0$. Voilà en fait le problème ici. Donc c'est une équation à trois inconnues, à une inconnue avec deux paramètres. Donc, voilà, en fait c'est ça le problème qu'il faut poser. Or très souvent on a eu à poser ce problème à la sortie de première C, lorsqu'on avait les équations paramétriques du second degré. Et parfois les problèmes que les collègues posent, c'es toujours de se ramener, c'est-à-dire se ramener à retrouver une situation de première C où il faut écrire que tel coefficient égal 0, tel coefficient égal 0. Très souvent les collègues ne partent pas du fait que, il s'agit de trouver, même en faisant tout simplement une simple figure que les courbes, s'il s'agit des paraboles, ces paraboles sont comme ça selon les valeurs de a. parfois qu'est ce qu'on fait, on demande de tracer C_1 et C_2. L'enfant peut s'en sortir lorsqu'il constate que C_1 et C_2 passent par un même point et prend donc ce point, quel que soit a, si c'est un point de coordonnées (1, 0). Donc l'enfant prouve donc que quel que soit a, $f_a(1)=0$. Mais trouver lui-même la valeur 1, la valeur 0 c'est impossible car là il faut écrire nécessairement que, quel que soit a, je dois avoir $f_a(x_0)=y_0$ et que x_0 et y_0 sont des paramètres que je ne connais pas encore et qui sont fixes. Donc c'est ça que je recherche et c'est une équation qui doit être vraie quel que soit a. par rapport à mes élèves, particulièrement pour ce genre de fonctions, 30%. Parfois ce que je dis à mes lèves, quand ils ne comprennent pas avec les quantificateurs, je leur dis que c'est toutes les courbes qui doivent passer. Donc vous pouvez donner des valeurs particulières à a, et dire, comme vous avez deux inconnues, l'abscisse et l'ordonnée, toutes les courbes doivent passer par là, donc vous cherchez les points communs entre C1, C2, C3. Et une fois que vous l'avez trouvé, vous vérifiez maintenant que ce point appartient à tous les Ca. Première étape c'est de trouver le point commun de deux courbes. Avec un peu de chance, vous trouvez un point unique et ce point unique-là, on peut encore prouver que toutes les courbes passent par ce point. Il faut maintenant vérifier que quel que soit a, les courbes passent par ce point. Mais si c'était les fonctions homographiques, si c'était les fonctions polynômes, tout serait trouvé parce qu'ils vont se ramener à cette situation, ils vont écrire ax_0+bx sur cx zéro égal à d, ils vont faire … Mais dans ce cas, mais ça sera un peu machinal parce que l'enseignant aura dit vous écrivez comme ça là et comme c'est vrai quel que soit x, pour que ax+b égal 0 soit vrai quel que soit x, il faut que a soit égal à zéro et que b aussi soit égal à zéro. Mais déjà avec les fonctions exponentielles et log et tout et tout, ils ne peuvent pas revenir à ces cas là. Que pensez-vous de la propriété suivante : pour tout nombre réel … moi je dirais, 20% vont trouver. Parce que en principe c'est vrai. 80% vont remarquer que la première proposition qui est une conjonction de deux propositions, qu'elle est fausse. Qu'on ne peut pas avoir à la fois

x<y et y<x. ils vont conclure que c’est faux alors qu’il s’agit d’une implication où la première proposition es fausse et la seconde est vraie, et l’implication est vraie. Rien que 20% pourront trouver ça. On a posé la question suivante à une élève : la proposition (P) suivante est-elle vraie ?

(135) J : C’est la neuvième ?

(136) En2 : oui

(137) J : On la laisse, je l’ai annulée.

(138) En2 : je pense que nous sommes parvenus au terme des questions j’espère que j’ai essayé de donner

(139) J : ça va m’aider.

(140) En2 : fidèlement le comportement que peut avoir un élève de terminale C, un élève de terminale D face à ce sujet. Mais ça m’interpelle aussi. Parce que, quand on voit ça, on constate que parfois on enseigne mal.

(141) J : C’est pas enseigner mal, on oublie. On oublie certaine petites choses qui

(142) En2 : qui peuvent causer beaucoup de tord à l’élève un peu plus tard quand il va lire les livres de première année, de deuxième année, de troisième année. Il risque se perdre, surtout par rapport à la quatrième question là, où parfois au niveau du majorant, on dit des choses aux élèves sans préciser. Je crois qu’il faut toujours préciser même si l’élève ne comprend pas beaucoup, il faut toujours préciser.

ANNEXE 11 : Retranscription de l'entretien avec un enseignant de l'ENSY

1 J : tu fais les cours d'analyse

2 Es : je fais analyse en info, si tu veux

3 J : Ce que je voulais savoir, tu sais que je travaille sur la logique, les concepts de logique, la prise en charge et tout, en classe, pendant le cours de mathématiques. En début d'année est ce que tu fais des rappels de logique en analyse?

4 Es : au premier semestre, en analyse il y'a un chapitre, mais c'est beaucoup plus en algèbre qu'ils font la logique ; mais les méthodes de démonstrations directes, contraposées se font en analyse.

5 J : les connecteurs même tu ne les enseigne pas

6 Es : les connecteurs se font en algèbre, mais en analyse on reprend tout ça dans les exercices

7 J : mais ils ne sont pas explicités en écrit

8 Es : non, pas dans ce cours, peut être dans le cours d'algèbre

9 J : dans les TD, est ce qu'il t'arrive de revenir sur ces notions de connecteurs, par exemple, les contraposées, les démonstrations par contraposition

10 Es : oui. Premier chapitre d'analyse premier semestre, il y'a des exercices là-dessus. Sur les trois méthodes de démonstrations : méthodes directe, contraposée, par l'absurde.

11 J : et les quantificateurs, est ce que tu en parles

12 Es : évidemment, ces exercices font intervenir les quantificateurs

13 J : dans le cours de logique en lui-même, comment est ce que tu introduits toutes ces notions là

14 Es : ça c'est le cours d'algèbre, la logique on le fait dans le cours d'algèbre

15 J : donc, il y'a un cours spécifique logique dans le cours d'algèbre

16 Es : oui, au premier semestre

17 J : dans les devoirs que les enfants ont eu, est ce que il t'ai arrivé de repérer des difficultés dues aux insuffisances

18 Es : oui, si tu lui demande de démontrer par l'absurde, il faudra que la personne sache la négation, ainsi de suite, les propositions.

19 J : et les contre exemples

20 Es : même en terme de contre exemple, il y'en a qui ne savent pas ce que l'on entend par contre exemple

21 J : est ce que tu es attentif à ça pendant que les enfants sont au tableau par exemple

22 Es : oui, puisque ça fait partir de la formation, parce que eux, en tant que enseignants demain, il y'a des choses qu'ils doivent pouvoir déceler au tableau

23 J : est ce qu'ils expriment des besoins

24 Es : pour ceux qui comprennent. Il y'en a qui ne comprennent pas, ils font justes parce qu'on a demandé de faire l'exercice

25 J : ou alors qu'on a dit

26 Es : oui, on a dit de faire comme ça, on fait comme ça, le professeur a demandé de faire par l'absurde, on fait par l'absurde. Est-ce que c'est l'absurde, est ce que ce n'est pas l'absurde, ah on a dit de faire par l'absurde point.

27 J : bon, les lettres maintenant. Parce que il y'a un grand problème. Ces lettres de variables. Est-ce que s'est explicitées C'est-à-dire, quand on dit par exemple : variables libres, variables liées sous le quantificateur, ce genre de chose.

28 Es : oui, dans les trucs du premier semestre, exercice comme celui-ci

29 J : ok. Et pour ce qui concerne le formalisme, est ce qu'ils s'expriment bien dans le formalisme

30 Es : ils essaient d'écrire avec leur formalisme, ils essaient

31 J : par exemple, quand il faut changer le langage, trouver le symbole à la place… c'est-à-dire, ils ont un énoncé avec les mots de la langue, est ce que pour eux c'est aisé

32 Es : il y en a qui n'arrivent pas souvent à pouvoir faire la différence. Pour certain, le « il existe » c'est « quel que soit » ; il y en a qui ne comprennent pas souvent

33 J : quel que soit, il existe, il existe quel que soit

34 Es : oui. Transformer souvent pour certain ce n'est pas évident. C'est beaucoup plus en algèbre que ça ressort plus, c'est là qu'on fait ce cours et nous, on utilise seulement les outils

35 J : mais, est ce que étant donné qu'ils utilisent ça en algèbre, ça n'a pas un impact

36 Es : ça à un impact. Puisque Quand on donne un énoncé, on n'est pas obligé d'écrire « pour tout epsilon », on écrit « quel que soit epsilon ». Maintenant, on demande à la personne de travailler avec « quel que soit epsilon ». Il peut donc écrire « pour tout », surtout au niveau de la démonstration par la récurrence. Il y a ce problème qui revient là-bas, au niveau de l'hérédité. D'autres écrivent : « quel que soit *n*, supposons… », Alors que c'est : « soit *n*, supposons ». Beaucoup écrivent : « quel que soit »

37 J : est ce qu'ils voient vraiment la différence entre ces notions

38 Es : justement, il ne voit pas la différence quand il écrit « quel que soit », c'est peut être après explication qu'il comprend qu'on se fixe à un rang avant de ; maintenant quand il dit « quel que soit », tu n'as plus rien à démontrer, puisque tu as dit quel que soit

39 J : quand on dit : une fonction dérivable est continue, comment interprètes tu le 1, quand je dis une fonction dérivable est continue ? Parce que, j'ai fait un test, où j'ai demandé aux enfants de donner la négation, je donne l'énoncé qui étais avec le 1 ; quand tu donnes la négation, c'est toujours avec le 1, alors quand on leur demande d'interpréter avec le 1, le 1 c'est quoi ? Il y en a qui ont dit que si un nombre est divisible par 4, il se termine par 4. Alors, ils me disent que la négation c'est un nombre est divisible par 4, et il ne se termine pas par 4. Un coup pour le premier énoncé, le 1 c'est un quantificateur universel, ils disent en fait que le 1 est universel. Et maintenant quand ils donnent la

négation, toujours avec le 1, le 1 devient existentiel. La question que je pose donc: le 1 quand tu l'utilise, généralement tu l'utilises comme un universel ?

40 Es : non, c'est un problème d'existence. Si il existe une fonction dérivable, elle est continue.il faut déjà que la fonction existe. Si elle n'existe pas, on ne va pas parler de fonction dérivable.

41 J : non mais c'est le théorème qui dit que si une fonction est dérivable, elle est continue.

42 Es : oui, c'est si tu as une fonction, il faut déjà l'avoir, c'est un problème d'existence. Si on a une fonction dérivable, alors elle est continue.

43 J : donc là c'est un existentiel pour toi, le 1

44 Es : oui. Si elle existe. S'il existe une fonction dérivable, alors elle est continue. S'il n'existe pas de fonction dérivable, bon…

45 J : ok. Parce que beaucoup… j'ai discuté avec Es1[5] la dernière fois. Il était catégorique, d'après lui le 1 c'est un universel, donc ça signifie qu'en fait ce 1 là est problématique, tant qu'il n'est pas explicité.

46 ES : oui, si il existe une fonction dérivable, alors, elle est continue.il faut déjà prouver qu'il n'existe pas de fonction dérivable, ou alors qu'il existe une fonction dérivable. Si il existe une fonction dérivable, alors elle est continue, et dans la preuve même, on dit : soit, ça veut dire qu'on suppose déjà qu'il y a une qui est dérivable.

47 J : mais quand on dit : « soit », généralement ça envoie au général

48 Es : oui. Justement, justement. La question c'est : est ce qu'il existe des fonctions dérivables, ça veut dire qu'on suppose qu'il existe une dérivable, et on montre qu'elle est continue. C'est l'existentiel là-bas

49 J : ok. Merci.

50 ES : et ça c'était pour quoi ?

51 J : j'ai donné ça aux enfants de première année, la question que je te pose c'est que toi est ce que tu penses que tes étudiants pourraient résoudre ces problèmes sans, comment est ce que tu penses qu'ils pourraient résoudre ça, exercice par exercice. Tu penses qu'ils peuvent résoudre ça comment, est ce que pour toi c'est un exercice aisé ?

52 Es : je prends la deuxième question, c'est celui qui ne s'y connait pas trop en géométrie qui aura quelques difficultés à faire ça, c'est le souvenir, parce qu'il parle des losanges dans les classes de 4ème. Donner la négation, cette troisième question ils peuvent le faire, certains peuvent bien le faire ; ils peuvent le faire d'une façon générale, ils peuvent. C'est vrai que c'est à la fin peut être de la première année qu'ils peuvent avoir à faire toutes les questions, parce qu'ils auraient fait un cours de géométrie, un cours d'analyse, où on parle de suite, convergence de suite par rapport aux fonctions continues.

53 J : bon, là j'ai un petit souci, la 2ème l'équation $f(x) = x$ a solution, on demande donc de dire si la suite converge dans le cas où $f(x) = x$ a au moins une solution. Moi j'ai fait un test, et ils m'ont

[5] Il s'agit d'un autre enseignant de mathématiques de l'Ecole.

répondu que si ça à au moins une solution, alors, la suite converge. Or, normalement, on ne peut rien dire.

54 Es : là l'hypothèse c'est quoi, la suite est convergente, en assimilant que peut on dire au sujet de la convergence, évidemment, c'est un problème d'intervalle, les termes de la suite peuvent être dans cet intervalle comme ça ne peut pas l'être. Donc si ce n'est pas dans cet intervalle là, la suite ne va pas converger. Les termes de la suite sont définis dans un intervalle

55 J : ils ont appelés ça le support de la suite

56 Es : oui, c'est ça, le support de la suite, c'est cet intervalle. Si dans cet intervalle là, il n'y a pas de solution, il n'y a pas de points fixes, la suite ne converge pas. Parce que si elle converge, nécessairement la limite est solution de cette équation. Or, l'image de cet intervalle est contenue dans le même intervalle, ce qui veut donc dire que si tous les termes de la suite y sont, si le premier terme y est, le second y sera, tous les termes y seront. Et donc si le point fixe n'est pas dans cet intervalle, clairement la suite ne va pas converger.

57 J : et le premier ?

58 Es : le problème c'est de pouvoir écrire, d'aucun vont le faire manuellement, premier nombre pair c'est 2, son successeur c'est 3, il est premier. Après c'est 4, son successeur c'est 5, il est premier, après c'est 8, le successeur c'est 9, il n'est pas premier. Ensuite c'est 10, le successeur est premier. Donc d'aucun vont le faire manuellement, est ce qu'ils vont arriver à trouver tous les nombres ? Aussi qu'à partir d'un certain rang on se rend compte que bon…

58 J : de 0-20, c'est juste de 0-20

59 Es : ok, de 0-20, manuellement, on va le faire, puisque ce n'est pas compliqué, on écrit tous les nombres pairs, on ajoute +1. Comme on avait 10, on additionne à 11, après on passe à 14, on a 15 qui n'est pas, ainsi de suite. Bon si ce n'est que ça, vraiment, 20, on le fait manuellement, sans avoir à poser une quelconque équation.

60 J : et il y'a cet exercice : écrire en langage formel cet énoncé. Tu penses qu'ils réussiraient ça ?

61 Es : tout entier pair… bon, s'il écrit chaque chose au fur et à mesure qu'il avance, il va arriver.

62 J : de manière linéaire ?

63 Es : oui. C'est-à-dire n est pair, $n=2k$, ≤4, 2k≤4, il existe est la somme, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres premiers. Il existe p et q tels que n=p+q. avec p et q premiers.

64 J : là c'est un énoncé conditionnel

65 Es : oui, tout entier pair ≤4. Oui. Est la somme de deux entiers

66 J : on demande de reformuler dans le langage mathématique.

67 Es : oui, quelque soit n entier dans N, tel que n=2k, n>4, alors il existe p et q premiers

68 J : mon problème c'est justement l'identification de … tu penses qu'ils vont identifier l'implication

69 Es : mais ça ne sera pas évident qu'on l'écrive ça exactement comme je suis en train de le dire. Ils vont écrire autre chose, ça c'est sûr. Ou c'est 4 qui est la somme, ou je ne sais pas, il ya d'abord le

supérieur ou égal là déjà qui risque ne pas certainement apparaître, ou comment écrire que c'est la somme de deux nombres premiers. Cela risque d'être un problème d'écrire ça. Dire que p c'est somme p+q, avec p et q premiers, peut être ils vont écrire p+q, sans p et q premiers. C'est possible

70 J : comme ils peuvent aussi prendre l'ensemble des nombres premiers qu'ils définissent.

71 Es : on n'a déjà dit que n est pair, comment écrire que c'est pair. Ce n'est pas assez évident quand même.

72 J : et le 8

73 Es : a d'abord c'est quoi ? Un nombre quelconque

74 J :oui, c'est un réel, b également. Maintenant on prend les intervalles I. il faut …chaque fois les signes qui satisfont la propriété

75 Es : la première question n'a pas de problème donc. Ah oui ! Le problème ce sera le premier intervalle ? Si a c'est 1par exemple, évidemment, on prend un nombre plus grand, il n'existe pas. Cet intervalle ne va pas vérifier ça, puisque on a dit que c'est pour tout a. même chose aussi pour celui-ci pour que l'intervalle soit fermé à droite. Oui, je crois que c'est simple.

76 J : et cet ensemble là, particulièrement, tu crois qu'ils vont le faire sans problème

77 Es : cet ensemble là… évidement le cas limite serait prendre 1, mais le 1 n'est pas dans I, et donc forcément, si tu prends une valeur plus petite que 1, elle sera plus petite que 1, et peut être la densité de q dans R va faire en sorte que entre ce nombre que tu a pris qui est plus petit que 1, que tu puisses trouver un nombre entre ce nombre et 1, donc que ce nombre forcément dans I. la densité de q. en première année ils le font bien. ça n'a rien de montrer de trouver les points d'accumulation, les choses de ce genre là

78 J : et la deuxième question

79 Es : pour tout a il existe b, évidement b est fixé, et donc b est un majorant de l'ensemble, et même b c'est la borne supérieure si on dit ça simplement, il existe b tel que quelque soit a dans I a ≤ b c'est-à-dire que b est le plus grand élément

80 J : c'est strictement inférieur,

81 Es : oui, oui, oui. Pour tout, mais là il y'aura un problème donc, justement si c'est vrai pour tout a, en particulier pour a=b, il y'aura un problème là. Il y'a déjà un problème dans l'existence de ce b là.

82 J : parce que plein ont justement identifiés ça comme la définition de la borne supérieure

83 Es : oui, mais le problème de fait qu'il existe b, pour tout a, et…. Ça fait en sorte b là n'existe même pas. Car s'il existait, on aurait b<b donc par conséquent, … ces ensembles parce que b n'existe pas.

84 J : d'accord merci

Juste pour information, les correspondances des étudiants. $E2 \Rightarrow E14$; $E3 \Rightarrow E19$; $E4 \Rightarrow E02$; $E6 \Rightarrow E13$; $E7 \Rightarrow E12$; $E8 \Rightarrow E07$

ANNEXE 12 : Quelques propositions d'énoncés à travailler

Quelques propositions d'énoncés à travailler par les élèves
Sur l'interprétation de *un*, le statut des variables, les énoncés ouverts, les énoncés clos

Enoncé 1 : *Si f est une fonction continue sur un intervalle K, alors $f(K)$ est un intervalle.* (a)

C'est la propriété 1, page 205 du manuel.

La construction de la négation de cette phrase pourrait faire émerger les débats sur la signification de *un*, si les élèves répondent en utilisant seulement les règles syntaxiques de construction de la négation, comme nous l'avons observé dans l'item 2.3 de l'exercice 2. Cela met en exergue l'ambiguïté générée par l'utilisation de *un*.

Une reformulation de l'énoncé (a) avec les quantificateurs permet de préciser le statut des lettres qui apparaissent respectivement dans les deux formulations, et le domaine des objets :

« $\forall f \in \mathcal{F}, \forall K \in \mathcal{I}$, si f est continue sur K, alors $f(K)$ est un intervalle » (b)

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{I}$ est l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

On peut aussi formuler (b) dans la langue naturelle :

« Pour toute fonction numérique f, pour tout intervalle K de $\mathbb{R}$, si f est continue sur K, alors $f(K)$ est un intervalle » (b')

Dans la formulation (a), les statuts respectifs de f et de K vont dépendre de l'interprétation qui sera faite de *un.* A priori, ils ont dans (a) le statut d'élément générique, ou ils sont universellement quantifiés implicitement.

Sur le statut des variables et la portée des quantificateurs

Enoncé 2 : *Soit f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle* $]A, +\infty[$.
Si $lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $lim_{x\to+\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$
Cet énoncé est la propriété 3, à la page 196 du manuel.
On peut en considérer deux formulations correctes :

(1) f et g restent des éléments génériques :

« *Soit A un nombre réel, f et g deux fonctions.*

Pour tout nombre réel l, pour tout nombre réel l', si $lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $lim_{x\to+\infty} g(x) = l'$, et $f \leq g$ sur l'intervalle $]A, +\infty[$, alors $l \leq l'$ »

L'objet limite est introduit pas le quantificateur universel dont la portée recouvre l'antécédent et le conséquent. En effet, s'il était introduit par le quantificateur existentiel portant seulement sur l'antécédent, la construction de la contraposée serait problématique : dans l'antécédent, les lettres l et l' seraient des variables libres.

(2) f, g et A sont des variables liées :

« *Pour tout nombre réel A, pour tout nombre réel l, pour tout nombre réel l', pour toute fonction f, pour toute fonction g,*

si $lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $lim_{x\to+\infty} g(x) = l'$, et $f \leq g$ sur l'intervalle $]A, +\infty[$, alors $l \leq l'$ »

La recherche de la structure de cet énoncé permet de discuter sur le statut des lettres l et l'

Dans cet énoncé, ces deux variables sont des variables liées, et si les limites sont infinies, la comparaison $l \leq l'$ n'est plus possible. On doit imposer à l et l' d'être des réels. Leur introduction dans l'énoncé pourra être source de débat : quel quantificateur utiliser ? Quelle est la portée du quantificateur qui introduit ces lettres ?

<u>Sur la quantification multiple mobilisant les deux quantificateurs, le langage</u>

Enoncé 3 : *Soit b un entier naturel supérieur ou égal à* 2.

Tout entier naturel x non nul peut s'écrire de façon unique $\sum_{k=0}^{p} a_k b^k$, où les a_k sont des entiers naturels tels que : $0 \leq a_k \leq b$ *et* $a_p \neq 0$.

Cet énoncé se trouve à la page 10 du manuel, dans le cours d'arithmétique.

Tel qu'il est donné, la quantification existentielle est cachée.

Un exercice peut consister à le reformuler en langage mathématique et de ce fait, expliciter le quantificateur existentiel. On a ainsi un énoncé de la forme « pour tout x, il existe y… ». On peut alors proposer aux élèves d'inverser la position des quantificateurs et pour chaque formulation, donner la signification.

En complément à cet exercice on peut demander aux élèves de produire la définition de « M est un majorant de f sur un intervalle I » et de « f est majorée sur I ». Cela permet de faire la distinction entre les deux objets définis. Concernant la deuxième définition, en jouant sur l'ordre d'apparition des quantificateurs, on peut, tout comme dans l'énoncé 3, attirer l'attention des apprenants sur le changement de signification de l'énoncé et de ce fait mettre en évidence la nécessité de la prise en compte de l'articulation syntaxe sémantique dans la manipulation de la quantification multiple.

<u>Sur la négation des énoncés quantifiés, avec un quantificateur « interne », la négation des énoncés conditionnels</u>

Enoncé 4 : Nous proposons deux énoncés tels que la structure du premier permet de respecter la règle-en-acte qui dit que lorsqu'on construit la négation d'un énoncé, les quantificateurs changent, et la structure du second met ce théorème-en-acte en défaut.

(1) *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle* K.

S'il existe un nombre réel M *tel que pour tout* x *élément de* K, $|f(x)| \leq M$, *alors pour tous a et b éléments de* K, *on a :* $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Cet énoncé est la propriété 2 à la page 218. C'est une autre formulation de l'inégalité des accroissements finis.

On le formalise ainsi :

« $\exists M \in \mathbb{R}, \left[\left(\forall x \in K, (|f(x)| \leq M)\right) \Rightarrow \left(\forall a \in K, \forall b \in K, (|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|)\right)\right]$

Les élèves peuvent construire la négation et la contraposée de (1).

(2)*Soit* f *une fonction croissante sur un intervalle ouvert* $]a, b[$ $(a < b)$.

Si f *est majorée sur* $]a, b[$, *alors* f *admet une limite finie à gauche en* b.(p.196)

Lorsqu'on formalise « *Si* f *est majorée sur* $]a, b[$, *alors* f *admet une limite finie à gauche en* b », on obtient :

$$(\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \leq M) \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = l)$$

C'est un énoncé ouvert en $]a, b[$. Pour la construction de la négation de cet énoncé, les quantificateurs de l'antécédent ne changent pas.

Sur l'implication et les inférences

L'implication peut être travaillée avec des items semblables à l'exercice 1, où on demande de déterminer des ensembles définis à l'aide de leur propriété caractéristique.

Par exemple : « déterminer l'ensemble des entiers naturels compris entre 2 et 20 vérifiant : *Si* n *est un nombre composé, alors il est un multiple de 3* ».

L'exercice 6 peut être proposé aux élèves. Dans les cas où les règles d'inférence ne permettent pas de conclure, il y a des items disponibles dans le manuel qui permettent de justifier la réponse « on ne peut pas se prononcer ».

Quelques propositions d'énoncés à travailler par les étudiants

Outre les exercices qui figurent dans la série d'exercices du cours sur le corps des nombres réels, qui donnent des opportunités pour expliciter les concepts que nous avons étudiés, nous avons identifié dans le chapitre qui porte sur les fonctions, quelques items.

Sur les phénomènes d'apparition et de disparition des quantificateurs :

Énoncé 1 :

Les limites et la continuité : les différentes formulations de la définition d'une limite et d'une fonction continue en un point peuvent être proposées, avec explicitation de ce phénomène. Ces définitions exprimées en énoncés de la forme (ε, η) vont permettre d'aborder la quantification multiple des énoncés.

Sur les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs : la démonstration des énoncés ci-dessous permet de travailler les règles d'instanciation présentées dans Durand-Guerrier & Arsac (2003).

Énoncé 2 : le théorème qui permet de déterminer la limite de la somme de deux fonctions en un point a, lorsque ces deux fonctions admettent une limite finie au point a.

Ce théorème permet d'aborder la notion de condition nécessaire et condition suffisante.

Énoncé 3 :

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, X_0, L_1, L_2 des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $lim_{x \to X_0} f(x) = L_1$ et si $\exists A \in V(X_0), \forall x \in A, x \neq X_0 \Rightarrow f(x) \neq L_1, alors\ lim_{x \to X_0}(g \circ$ fx=L2

Énoncé 4 :

Soient f une fonction numérique d'une variable réelle, (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$ et α, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $lim_{n \to +\infty} x_n = L$ et $lim_{x \to L} f(x) = \alpha$, alors $lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$.

L'énoncé 2 se trouve à la page 6 du polycopié, et l'énoncé 3, à la page 7.

L'énoncé 3 peut être utilisé pour un apprentissage de la détermination de la structure logique des énoncés, la construction de la preuve ou d'un cadre de preuve.

Sur la négation des énoncés quantifiés

Énoncé 5 :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et λ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Le quantificateur existentiel figure dans le conséquent. La construction de la négation conforte le théorème-en-acte qui consiste à changer les quantificateurs, et la construction de la contraposée le met en défaut.

Énoncé 6 :

Montrer que la limite de $\sin x$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'existe pas.

Cette démonstration amène à écrire la négation de « la fonction sin admet une limite en $+\infty$ ».

ANNEXE 13 : Texte étude ICMI 21

NEGATION OF MATHEMATICAL STATEMENTS IN FRENCH IN MULTILINGUAL CONTEXTS – AN EXAMPLE IN CAMEROON

Judith NJOMGANG NGANSOP, Classes Scientifiques spéciales, Ecole Normale Supérieur de Yaoundé (Cameroun), EMR SH2S, université Lyon 1, France
Viviane DURAND-GUERRIER, Université Montpellier 2, I3M UMR CNRS 5149

Abstract
Our communication addresses the issue "Teaching mathematics in diverse language contexts". In a ongoing research, we investigate the effect of learning mathematics in French as a second language on the apprenticeship of logical concepts at the transition between secondary and tertiary level focusing here on negation that Ben Kilani (2005) attested to be problematic in the bilingual Tunisian context. The present study concerns Cameroon, and among the great amount of languages, the Ewondo. We first present the context in Cameroon; then we give some results of an inquiry in France showing strong difficulties with negation at the secondary-tertiary transition, and we present an example of the logical complexity that could occur in the case of proof by contraposition. Finally, we present the methodology of a study in progress, whose results will be available for the conference.

Introduction

Opposite with a rather common idea, it is not the case that in mathematics, linguistic issues are not so important, even when learning mathematics in ones first language. Indeed, as the mathematical discourse in classroom is conveyed mainly in ordinary language, it inherits of those ambiguities that are the richness of everyday discourse, but could disturb mathematical apprenticeship (Noyau et Veillard, 2004). Moreover, deep misunderstanding between teachers and students may occur due to insufficient knowledge of technical words but also in some cases to ambiguities in the mathematical discourse itself. Some difficulties concern the vocabulary: for example, in French, the term « côté » (sides) refers to a segment in plane geometry, but to a face in solid geometry. However, many difficulties concern the logical aspect (the grammar) of language. A well-known difficulty is related with the meaning of the article "a" that can either refer to an individual, a generic element, or an implicit universal quantifier. A most often undetected difficulty concerns binary relations, in universal statement: for example, in French, the statement « les faces du solide sont congrues deux à deux » (the faces of a given solid are pairwise congruent) means either « each time you take

two faces, they are congruent », or "each time you take a face, there is another face which is congruent ». It is also well known that in mathematics, recognizing the logical structure of complex statements is a clue for providing a relevant interpretation. Selden and Selden (1995) showed that this is difficult, even for tertiary students. It is also well known in linguistics that the logical structure of language may differ deeply from one language to another, with consequences in the interpretation when moving from a language to another. For example, in French, the logical structure of statements is often partly hidden in natural language, in particular many quantifiers are omitted, or quantifiers are explicit but the scopes of these quantifiers are not well determine, this leading to indetermination in the meaning of the sentence (i.e. Fuchs, 1996). This in particular the case of statement in form "Tous ne pas", for which the normative interpretation ("at least one .. not") is not congruent with the logical structure, while in everyday use, such statements are ambiguous (either the scope of the negation is on the all sentence, or only on the predicate). Durand-Guerrier & Ben Kilani (2004) showed that, in this respect, French and written Arabic have non-congruent logical structures: indeed, Arabic written language is congruent with the logical structure. In his PhD Thesis, Ben Kilani (2005) provided evidence that, in the Tunisian context, this has educational consequences that are largely underestimated by teachers and not taken in account in the curriculum, while students learn mathematics in Arabic language all along the "école de base" (from grade 1 to 9), and then in French from grade 10.
These results are for us a motivation to address such an issue in the Cameroonian context that we present below.

The context of our study in Cameroon

Our present study takes place in Cameroon, a country of Central Africa comprising numerous ethnic groups, each with his own language. These languages are used in the family circle, and rub off on the two official languages, French and English, as shown by Tsoungui (1980) for the Ewondo and the French. Tsoungui showed, in particular, that there are differences concerning the singular and plural, definite and indefinite, that could interfere with quantification practice in mathematical discourse in French as pointed in the introduction. In Cameroon, French and English are the exclusive languages for teaching, in two separate educational systems: a Francophone one and an Anglophone one, that are so different that it is difficult for a student to move from a system to the other, before the end of secondary school. It is only at the university that the teaching is given both in French and in English. The population of our study concerns exclusively students at the secondary-tertiary transition, who studied mathematics in French from primary school.

In line with Ben Kilani (2005), and taking into account the linguistic phenomenon we have evocated in the Introduction, we support the thesis that the questions of logic and language are particularly sensitive in multilingual contexts. On another hand, it is well documented in the literature in mathematics education that, even in monolingual context, students face strong difficulties with logical matters at the transition between secondary and tertiary level (e.g. Selden & Selden, 1995). Taking in account these two aspects, we try to identify specific difficulties to mastering logical concepts for students arriving at university in a context in which the mathematics are taught continuously form the primary school to the university in a non mother tongue – in our study the French. In a first stage, we have chosen to work with only one Cameroonian mother tongue, the Ewondo, which is of a rather large extend in everyday life, in particular in area of Yaoundé, and for which we can rely on Tsoungui (1980). We focus on difficulties related with negation of quantified statement, which in French is problematic even for natives, as shown by the results of an inquiry from the CI2U that took place in France in October 2006; these results are presented in the next section and completed by preliminary results in Cameroon. We will then provide an example showing the high level of logical complexity of some statements involved in first year university, requiring logical and linguistic competencies that ought to be developed, but are not at all taken into account in secondary school neither in France, nor in Cameroon. In the last section, we will present the methodology of our ongoing exploratory study of the interferences between Ewondo and French in the learning of logical concepts at the transition between secondary and tertiary level in Yaoundé (Cameroon).

Difficulties with the negation of quantified statement

We provide in this section some results of an inquiry made in France in 2006 by the CI2U. The CI2U is a national commission in France in which tertiary and secondary teachers from various IREM in France interested in “teaching and learning mathematics” at the beginning of University, taking in account questions related with transition, work together. In October 2006, a questionnaire was proposed to students at the very beginning of their first university year. We present and analyze the three items devoted to negation.

Give the mathematical negation of the following sentences:

1 - *All the balls in the urn are red*[6]

2 - *Some integers are ever*[7]

3 - *If an integer is divisible by 4, then the last digit is 4*[8]

Before giving our results, we give a short comment about the choices for these three items. The three sentences had been experienced as difficult for students, and as providing a great variety of linguistic forms, especially for sentences 1 and 3.

Moreover, as the sentences were written in natural language, we decided to precise that we expected a mathematical negation, in order to indicate that the semantic aspects had to be considered.

Negation of sentence 1*: *All the balls in the urn are red

For this sentence, it is not possible to know if it is true or false, because of a lack of information. The necessity of expressing negation of such a sentence might appear in Statistics, and even if it is an isolated sentence, it is *a priori* possible for students to evocate a situation in which it could make sense. We supposed that we would find a diversity of answers that could be collapsed in four main categories: C0: An sentence synonym of the affirmative answer - C1: A sentence synonym of "there exits at least a ball in the urn that is not red" - C2: The ambiguous sentence: "All the ball are not red" - C3: A sentence synonym of "No ball is red"

As we expected, a great variety of formulation were provided, that we summarize through the four previous categories. Among 340 answers from our population, 36 answers (11%) are in category C0; 128 answers (38%) are in the category C1, which correspond to correct answers; 20 answers (6%) in category C2 corresponding to ambiguous sentence, and 72 answers (21%) are in category C3, which corresponds to a contrary; 42 students (12%) gave another answer and 42 (12%) did not answer.

So less than four students among ten gave a clearly correct answer, while nearly one third gave a wrong answer consisting in giving a sentence expressing a contrariety, and far from what we imagine, only 6% use the ambiguous sentence.

Negation of sentence 2: *Some integers are even*

It is a very simple sentence, with a mathematical content normally mastered by the population of the test. The sentence is true, so its negation has to be a false sentence.

[6] In french : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges

[7] In french : Certains nombres entiers sont pairs

[8] In french : Si un nombre entier est divisible par 4, alors, il se termine par 4

We can think that the control of the answer by its meaning could allow students to reject the wrong answer "*some integers are not even*" (or synonymous answers).
However, due to previous results, it is likely that some students will give this wrong answer. We consider here five main categories of answers: C0: an affirmative sentence - C2: The ambiguous sentence "All integers are not even" - C4: The sentence "All integers are odd", which is a right answer - C5: The sentence "No integer is even", which is also a right answer - C6: The sentence "some integers are not even (are odd)" which is wrong.
Among the same population of 340 students, 19 answers (5,5%) are in category C0; 19 answers (5,5%) in the category C2; 53 answers (15,5%) in category C4; 45 answers (13%) in category C5; 115 answers (34%) were in category C6; 39 students (11,5%) gave another answer, and 50 students (15%) did not give an answer. So, less than one third of the students gave a correct answer, and one third of students gave the negative answer, which is not the negation of the given sentence.
Negation of sentence 3: *If an integer is divisible by 4, then the last digit is 4.*
According with an ordinary practice in mathematics, we had let implicit the universal quantifier, and we expected that the statement was considered as a general one.
Hence, an adequate negation must express the existence of a counterexample. The mathematical domain is well known from students; the sentence is false, and normally counterexamples are easily available. However, due to previous research, we suspected that we would find a large variety of answers, with a majority of implications containing one or two negations, on antecedent and/or consequent.
For this Item, 98 students (29%) did not gave an answer, and we found 155 answer with an implication with various position for the negation, for example "If *p*, then not *q*", or "If not *p,* then not *q*".
Finally, only 34 students (10%) gave a correct answer, synonym of "There exists an integer divisible by 4 for which the last digit is not 4". This is conform to the naturalist observations of the second author for more that fifteen years in teacher training and in advanced students mathematical course: it is the case that often the relation between the logical negation of an implication and the assertion that there exists a counterexample does not appear spontaneously.
The results of this questionnaire show clearly that, in our population, a large number of students faces difficulties to provide negation of quantified sentences, especially in the case of the sentence involving an implication. As the population comes from various universities, we can suspect that many fresh students in France face these difficulties. Moreover, these

difficulties are still present when working with graduates students in mathematics, primary or secondary prospective teachers and even in-service teachers in mathematics. This could be surprising, but the general feeling of teachers, collected in informal exchanges in training session, is that the concept of negation is learnt from the very young age, and is developed through use all along the mathematical curriculum. Of course, these results show that it not the case. In a preliminary stage of our research in Yaoundé, these three items have also been proposed by the first author to fifty scientific students in grade 12 in Cameroon.

It is noticeable that nobody gave the correct answer for the second statement; all the students gave the negative form (C6); during the interviews that followed the test, the students said that they did not identify “certains” (“some”) as a quantifier.

Concerning the negation of the conditional statement, half of them answered with a conditional.

Due to the importance of negation and of its relation with implication and quantification in the process of conceptualization in mathematics, our results indicate that it is necessary to take in account these logical questions in the teaching of mathematics, with a keen attention in multilingual contexts. It is quite clear that as even in a monolingual context, the primary and secondary mathematical education is not sufficient to provide the required competencies concerning the uses of negation, this issue need to be seriously addressed in multilingual contexts involving French.

Moreover, it is likely that other languages are concerned with difficulties in the use of negation as attested by the importance of works on negation in linguistics.

An international perspective would be to explore theses questions in various languages, at different level of the curriculum, and particularly in context where students learn mathematics in a foreign language, either in their own countries, as it is the case in Cameroon, or in a country where they are studying.

In our study, we have chosen to focus on the transition between secondary and tertiary students, due to the fact that arriving at the university, student will face the necessity of explicitly negate statements involving implication and quantification, that was not necessary the case in the previous year. An example is given in the next section.

A complex statement in Calculus involving negation[9]

[9] This is developed in French in Durand-Guerrier & Njomgang Ngansop to appear in EMF 2009 electronic proceedings.

At university, it is rather common to prove a conditional statement by providing a proof of the contrapositive (proof by contraposition). The example that we present below concerns the proof of a classical result in Calculus.

The statement to proof is the following:

> Given a function *f* from a subset A of $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ and a an element of A.
>
> If, (for all sequences $(u_n)_n$ from $\mathbb{N}$ to A such that "$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$", we have "$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$"), then *f* is continuous at a.

The teacher generally announced a proof by contraposition, and begins the proof by supposing that "*f* is a numerical function that is not continuous at *a*", and indicating the search for a sequence u_n converging to *a*, and such that $f(u_n)$ does not converge to $f(a)$.

We may wonder which relation students could do, in such a case, between the
contrapositive of the given statement and the proof done by the teacher. A logical analyze enlightens this relation.

A first difficulty for students is to « unpack the logic » (Selden & Selden, 1995).

There are three variables, the sequences *u*, the numerical function *f* and the real number *a.* Two of them, *f* and *a*, are considered as generic element, so that the two universal quantifiers that are normally ahead this statement are eliminated (in sense of the elimination rule for quantified statement in natural deduction systems). There are two implications, one external, which is explicit, and one internal, which remains implicit, using a process consisting in choosing to quantify only on the elements that satisfy the antecedent of the implication: here "sequences "$(u_n)_n$ from $\mathbb{N}$ to A such that $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ ", "$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$". This common practice, seldom made explicit in mathematical classroom, entails phenomena of appearing/disappearing of the implication that may remain mysterious for students. Finally, once the logic unpacked, it is possible to formalize the statement, showing so the complexity of its logical structure.

$$\forall f\ \forall a\ \Big[\Big(\forall u\ \big(F(u,a) \Rightarrow G(f,u,a)\big)\Big) \Rightarrow H(f,a)\Big]$$

F(*u*, *a*) formalizes the relation "*u* converges to *a*", *G*(*f, u, a*) formalizes "the composition of *f* with *u* converges to *f*(*a*), and *H* formalizes "*f* is continuous in *a*".

As a consequence, the logical structure of the contrapositive is

$$\forall f\ \forall a\ \big[\big(\neg H(f,a)\big) \Rightarrow\ \big(\exists u(F(u,a) \wedge \neg G(f,u,a)\big)\big]$$

This indicates what should be the structure of the proof of the statement. If tertiary students are expected to be able elaborating by themselves proofs by contraposition, it is necessary that they could provide effective contraposition of the statement to prove, this in order to know how to engage in the proof. In our example, it is necessary to: 1/Recognize the implicit quantification in the statement; 2/ Identify the scope of the various quantifiers; 3/ Identify that there are two implications, and which is the hierarchy between both implications; 4/ Build the contrapositive of an implication, in particular it is necessary to know that the contrapositive of a universal conditional statement is a universal conditional statement, that derived from the given statement by interchanging antecedent and consequent, and altering each from positive to negative or vice-versa; 5/ Build the negation of a universal conditional statement, expressing that exits at least a counter-example, i.e. an element that satisfies the antecedent and that not satisfies the consequent. As we have seen in the previous section, this is not mastered, at that level, for many students.

In October 2010, the second author asked twenty graduate students following a teacher training program to give the contrapositive of this statement, after having given the negation of the three statements of the CI2U's enquiry (see above, page 3).

None of them gave the correct answer for statement 3, while most of them gave a
(quite) correct answer for the contrapositive. In an informal exchange, they said that they knew how to prove the statement by contraposition and rely on this knowing to provide the contrapositive. This could be put in perspective with the fact that for undergraduate students, it is not an exception that it takes a long time to be able to rely on the rule of counter-example for a universal conditional statement, that is well mastered in general from secondary school, in order to provide the negation of such a statement. These two examples show that the familiarity of context is not only linked to the familiarity of the mathematical objects, but also of the current mathematical practices with these objects.

Conclusion and insight on our ongoing experiments

We hope that we have provided in this proposition relevant examples and arguments to support our claim that it is necessary to deal explicitly with these logical questions with undergraduates whatever the linguistic context, and that due to the fact that they are closely related with the uses of language, as well oral language in lecture or tutorial, than written language in textbooks or assessments, it is obviously particularly important to address such issue in multilingual context. In our ongoing study, we have chosen to experiment with students following a teacher training program in mathematics at the "Ecole Normale de Yaoundé", taking into account that the *r*ole of teacher is prominent in such issues. We have planed two modalities: the first ones consist in interviews with three students of first year whose mother tongue is the Ewondo; these students were among the fifty students who pass the test on the negation in February 2009; the second one consists in a test immediately followed by interviews with a new population (first year and or thirst year students at the Ecole Normale de Yaoundé). These experiments will be conducted by the first author, who is teaching mathematics at the Ecole Normale de Yaoundé, in collaboration with a colleague teaching French and mastering Ewondo. We aim to study the possible interference between Ewondo and French in the specific case of logical concepts, the negation at a first stage, for which we have solid findings as described above. These experiments will take place in November-December 2010; the analysis will be done in January-February 2011 in order to integrate the results in the finale version if our proposition is accepted.

References

Ben Kilani, I. (2005) *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*,
Thèse en co-tutelle de l'université de Tunis et de l'université Lyon 1

Durand-Guerrier, V., Ben Kilani, I. (2004) Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien, *Cahiers du Français Contemporain*, 9, 29-55.

Durand-Guerrier, V., Njomgang Ngansop, J. Questions de logique et de langage à la transition secondaire – supérieur : L'exemple de la négation, to appear in *actes électroniques du colloque EMF 2009- GT7*, Dakar (Sénégal), Avril 2009.

Fuchs, C. (1996), Les *ambiguïtés du français*, Paris : Orphrys

Noyau C. & D. Vellard (2004) : " Construction de connaissances mathématiques dans la scolarisation en français langue seconde ", *Cahiers du Français Contemporain 9,* 57-76.

Selden, A. & Selden, J. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements, *Educational Studies in Mathematics, 29/2*, 123-151.

Tsoungui, F. (1980) *Le français écrit en classe de 6ème à Yaoundé. Recherches des interférences de l'Ewondo dans le français et proposition pédagogiques*. Thèse de 3ème cycle, Université de la Sorbonne Nouvelle , mars 1980. Directeur Maurice Houis.

Tableau T5(11) : Croisement des toutes les réponses