AUTOUR DU CONCEPT DE FRACTION À l'ECOLE PRIMAIRE EN FRANCE

Abdul Aziz Alahmadati

Université de Lyon

UNIVERSITE LUMIERE LYON 2

Ecole Doctorale EPIC

ED 485 – Education- Psychologie- Information et communication

Unité Mixte de Recherche – UMR 5191 ICAR

Année 2016

AUTOUR DU CONCEPT DE FRACTION À l'ECOLE PRIMAIRE EN FRANCE

Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III.

Thèse de Doctorat en Sciences de l'Éducation

dirigée par le Professeur Jean-Claude REGNIER

présentée et soutenue publiquement le 29 janvier 2016

par Abdul Aziz ALAHMADATI

TOME 1

Devant le jury composé de :

François Pluvinage, professeur des universités, CINVESTAV-IPN Mexico, Mexique.

Henri Peyronie, professeur émérite, Université de Caen, France.

Jean-Claude Régnier, professeur des Universités, Université Lyon 2, France.

Jorge Tarcisio Da Rocha Falcão, professeur d'Université, Université Fédérale de Rio Grande do Norte, Brésil.

TABLE DES MATIERES

Résumé

La présente étude s'intéresse particulièrement au concept mathématique de fraction et à son enseignement-apprentissage au cycle 3 de l'école primaire en France. Ce concept étant souvent difficile à comprendre par les élèves, il est introduit formellement dès la classe de CM1 du cycle 3 de l'école primaire.

L'objectif de cette recherche a été, dans un premier temps, l'étude de l'enseignement des fractions. Pour ce faire, sont analysées les situations d'apprentissage qui proposent des activités portant sur les fractions dans cinq manuels scolaires de mathématiques de CM1 et cinq manuels de CM2, de même collection ; le but est de connaître les différentes significations de la fraction présentes dans ces manuels.

Dans un deuxième temps, *l'objectif* de cette recherche fut de savoir ce qu'il reste chez les élèves après qu'ils ont étudié les fractions. Pour cela, un échantillon de 275 sujets, 160 de CM1 et 115 de CM2 de l'école primaire, ont répondu à un questionnaire écrit portant sur les fractions. Le but est d'étudier les conceptions et les représentations chez ces élèves à l'égard de la notion de fraction, en particulier à l'égard des différentes significations de la fraction données par ces élèves.

Dans un troisième temps, nous voulions connaître les conceptions de quelques enseignants sur la manière avec laquelle ils abordent les fractions avec leurs élèves. Pour ce faire, 8 enseignants parmi les 12 enseignants des classes concernées ont participé à l'étude.

L'analyse effectuée sur les manuels scolaires a été faite à l'aide d'une grille d'analyse, les résultats de cette analyse relèvent que les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires choisis ne sont pas réparties à égalité entre les diverses significations de la fraction. De plus, les significations de la fraction les plus présentes dans les manuels scolaires de CM1 à travers les activités analysées sont respectivement les suivantes : *Partie-tout (quantité continue), Mesure, Nombre ;* dans les manuels scolaires de CM2, les significations les plus présentes sont respectivement les suivantes : *Nombre, Partie-tout (quantité continue)* et *Mesure*. En revanche, les activités relatives aux autres significations sont généralement présentes, mais avec des fréquences réduites.

Pour traiter de l'apprentissage des fractions chez les élèves, l'analyse s'est effectuée autour des connaissances et des représentations des élèves de CM1 et de CM2 par rapport aux différentes significations de la fraction. Cette analyse, effectuée sur les réponses des élèves sur le questionnaire, montre que la signification de la fraction la plus utilisée, par les élèves de CM1 et de CM2, est celle de *Partie d'un tout (quantité continue)*. Les significations *Nombre*,

Mesure, Partie d'un tout (quantité discrète) et Nombre sur une droite graduée sont présentes dans les réponses des élèves. En revanche, les autres significations sont celles qui sont les moins utilisées par les élèves. De plus, en ce qui concerne les significations manifestées de la fraction, les élèves de ces deux niveaux scolaires ne diffèrent pas beaucoup. Enfin, notre étude permet de constater que les élèves utilisent les significations de la fraction les plus fréquemment présentes dans les manuels scolaires, cela nous donne un éclairage sur l'objet de l'influence de l'enseignement des fractions sur l'apprentissage des élèves.

Afin de connaître les conceptions pédagogiques et épistémologiques des enseignants sur leur manière d'aborder l'enseignement de la fraction, nous avons construit les données au moyen d'une enquête par questionnaire auprès de 8 enseignants. Les réponses à ce questionnaire ont été analysées suivant deux perspectives, pédagogique et mathématique. Pour l'analyse à caractère pédagogique, une grille a été construite autour des modes de représentation privilégiés par les maîtres et autour des rôles respectivement réservés au maître et à l'élève. En parallèle, nous avons vérifié la valeur mathématique des réponses fournies par les enseignants. Pour introduire le concept de la fraction, les enseignants affirment qu'ils laissent une large place à l'utilisation du matériel ou de représentations graphiques. Les enseignants se réservent par ailleurs un rôle important tout au long des démarches d'enseignement et d'apprentissage.

Mots-clés : Concept de fraction, significations de la fraction, enseignement-apprentissage des fractions, le manuel scolaire de mathématiques.

Abstract

This study concerns the fraction mathematical concept, mainly in its teaching-learning in the cycle 3 of French primary school. This concept is often difficult to be understood by pupils; it is formally introduced in the CM1 class of the cycle 3 in primary school.

The object of this research was, firstly, the study of fractions' teaching. To do that, we analyzed learning situations that offer activities bearing on fractions in five math textbooks of CM1 and five math textbooks of CM2, all from the same collection ; the goal is to know the different meanings of the fraction present in these books.

In a second time, the object of this research was to find out what pupils remain after they studied fractions. For that, a sample of 275 subjects, 160 from CM1 and 115 from CM2, answered to a written questionnaire bearing on fractions. The goal is to study conceptions and representations that pupils have in respect of the concept of fraction, particularly in respect of different meanings of fraction given by these pupils.

In a third time, we wanted to know the opinions of a few teachers about the way in which they approach fractions at school. To do that, 8 teachers among the 12 teachers of the classes concerned participated in the study.

The analysis conducted on the books was made with the help of an analysis grid; the results of this analysis point out that the activities or learning situations offered in selected books are not equally distributed between the various meanings of fraction.

Moreover, the most present meanings of fraction in CM1 books through the activities analyzed are respectively the following: Part of a whole, Measurement and Number; in CM2 books, the most present meanings are respectively the following: Number, Part of a whole and Measurement. However, the activities related to the other meanings are generally present, but with a reduced frequency.

To treat fractions' learning by pupils, the analysis was made around of the knowledge and the representations of the pupils of CM1 and CM2 relative to different meanings of fraction. This analysis, performed on the pupils' answers on the questionnaire, shows that the meaning of fraction the most used by the students of CM1 and CM2, is that of Part of a whole (continuous quantity). The meanings Number, Measure, Part of a whole (discrete quantity) and Number on a number line are present in pupils' answers. However, the other meanings are those who are the less used by the pupils. Moreover, in regards to the manifested meanings of fraction, pupils of both school levels do not differ much. Finally, our study shows that pupils

use the most fraction's meanings found in books. It gives us a light on the subject of the influence of fractions' teaching in pupils' training.

To know the epistemological and pedagogical conceptions of teachers in their approach to fraction's teaching, we built the data by a sample survey with 8 teachers. The answers were analyzed using two perspectives, pedagogic and mathematic. For the pedagogical character analysis, a grid was built around the privileged modes of representation by the teachers and around the respective roles reserved to teacher and pupils. In parallel, we verified the mathematical value of the answers provided by the teachers. To introduce the concept of fraction, the teachers say that they give a large place to concrete or graphical representations. Also, the teachers have an important role throughout teaching and learning approaches.

Keywords: The concept of fraction, meanings of the fraction, teaching and learning of fractions, the textbook of mathematics.

Remerciements

Les résultats de cette recherche n'auraient pu voir le jour sans l'appui de nombreuses personnes. Je remercie chaleureusement et tout d'abord Jean-Claude REGNIER, Professeur des Universités à l'Institut des Sciences et Pratiques d'Education et de Formation à l'Université Lumière Lyon2, pour les efforts qu'il a sans cesse fournis pour me donner généreusement conseils et encouragements tout au long de ces années d'études qui m'ont guidé dans les différentes étapes de ma réflexion et aussi pour son savoir et sa rigueur scientifique et intellectuelle qui m'ont marqué à jamais. J'ai toujours trouvé auprès de lui, dans ma recherche, la plus bienveillante compréhension et les plus utiles conseils. Je le remercie infiniment.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à François PLUVINAGE, Professeur des Universités à CINVESTAV-IPN Mexico, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être rapporteur et membre du jury de cette thèse et d'avoir consacré du temps à la lecture et à l'appréciation de mon travail.

Mes remerciements vont également à Henri PEYRONIE, Professeur émérite à l'Université de Caen, qui a eu la gentillesse d'accepter d'être rapporteur et membre du jury de cette thèse et d'avoir consacré du temps à la lecture et à l'appréciation de mon travail.

Je tiens également à remercier Jorge Tarcisio DA ROCHA FALCÃO, professeur d'Université, Université Fédérale de Rio Grande do Norte au Brésil, qui a eu la gentillesse d'accepter d'être membre du jury de ma thèse et d'avoir consacré du temps à la lecture de mon travail.

J'exprime ma reconnaissance à Bernard COUTANSON, pour son aide et la pertinence de ses remarques et ses suggestions tout au long de mon travail qui m'ont été très précieuses. Pour toute sa patience et sa gentillesse, je remercie chaleureusement Jean-Louis MARMAND, président du centre CPU (Coup de Pouce Université) à Lyon qui a accepté la tâche redoutable de chercher à travers ces pages les coquilles orthographiques ou grammaticales et avoir consacré beaucoup de temps à la lecture attentive et à la correction de cette thèse. Mes remerciements chaleureux vont également à Nathalie MONGILLOUN pour avoir consacré beaucoup de temps à la lecture et à la correction de cette thèse. Je me dois aussi remercier la Ministère de l'Enseignement Supérieur et l'institution universitaire dans laquelle je travaille en Syrie, l'Université d'Alep, pour m'avoir procuré cette occasion de suivre mes études à l'Université de Lyon en France. J'adresse mes remerciements au CNOUS et au CROUS en France, qui m'aident à m'organiser pour la vie quotidienne et universitaire.

J'adresse mes sincères remerciements à Lise THIBON, secrétariat chargé du doctorat à l'ISPEF, à André ROBERT, Professeur des universités et Directeur de l'Ecole Doctorale ED 485 EPIC ainsi que Brigitte DUBOIS, responsable administrative. Je remercie aussi à toute l'équipe de doctorants du groupe ADATIC ainsi que Nadja Maria ACIOLY-REGNIER et Christian BUTY et toute l'équipe administrative et pédagogique du laboratoire ICAR J'adresse mes sincères remerciements aux enseignants qui ont ouvert leurs classes afin que je puisse réaliser cette recherche, et aux élèves et toutes les écoles en France qui m'ont accueillie.

Mes pensées vont également à ma famille : Khaled, Hazim, Hisham, Wissal, Manal, Souad, Hind, Nour, Ali, Abdul Kaliq et Wassim. Une pensée toute particulière à mon grand-père Abdul Aziz et ma grand-mère Halimah qui m'ont toujours encouragé dans la poursuite de mes études. Remerciements chaleureux et toute mon amitié à Abdul Razak Alsalha, Haritha Alahmadati, Hisam Aljouma et Ahmad Aljouma qui m'ont aidé à réaliser mes affaires à l'Université d'Alep en Syrie pendant cinq années, malgré la situation difficile et les difficultés du trajet d'un endroit à un autre et entre les villes. Amitiés sincères à tous mes oncles et toutes mes tantes qui m'ont soutenu et encouragé dans la réalisation de ma thèse.

Remerciements chaleureux à tous mes ami(e)s qui m'ont soutenu au cours de ces années : Mohamad Shokeran, Diane Diaz, Zoualfakar Jammoul, Hassan Alchegrie, Mériem Belhaddioui.

Un immense merci à ma chère épouse Houda qui a toujours été à côté de moi et qui m'a toujours encouragé et soutenu pendant toutes ces années. Je la remercie infiniment.

Je dédie ce travail à mes chers parents, Mohammad Shamseddin Alahmadati et Jamila Abou Ali, qui m'ont toujours encouragé dans la poursuite de mes études et qui m'ont soutenu moralement.

Enfin, je remercie tous(tes) ceux et celles qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Introduction : de l’origine de notre recherche

De tout temps, pour résoudre certains problèmes de la vie courante (partage de terre, d’objets, de volume, découpage du temps, etc.), l’homme est souvent obligé de procéder à la division d’un nombre par un autre non nul, ce qui fait appel à la notion de fraction. Ainsi, pour réaliser cette action, il doit faire preuve d’une bonne maîtrise des différentes techniques opératoires sur les fractions. De plus, depuis longtemps et encore à l’heure actuelle, les fractions posent de nombreuses difficultés aux élèves du cycle 3 et ces difficultés vont rarement en se réduisant dans les années suivantes. C’est pourquoi il est primordial que les élèves sortent de l’école primaire avec une idée précise et claire sur ce que sont ces nouveaux nombres. Les sources d’erreurs sont souvent dues à l’assimilation par les élèves des nombres décimaux comme deux nombres entiers mis bout à bout, ce qui fait qu’ils pensent que les fractions se rapprochent des nombres entiers. De ce fait, la nature même de ces nombres est mal comprise, ce qui entraine de nombreuses difficultés de manipulation par la suite.

Les fractions se retrouvent dans diverses activités de la vie de tous les jours. Nous les utilisons dans nos activités courantes comme le partage (d’aliments par exemple), les distances, la comparaison d’objets, l’heure, les unités de mesure, etc... Certains professionnels en ont besoin dans leur métier, comme cuisinier, menuisier, maçon, et autres. De plus, plusieurs matières scolaires demandent l’utilisation de fractions comme les mathématiques, la géographie, les sciences. L’apprentissage de *la notion de fraction* est à l’étude en primaire, surtout au troisième cycle, en général au CM1 et CM2, avec l’exploration des certaines opérations arithmétiques sur les fractions, exploration qui s’approfondit dans les stades avancés de la scolarité. L’apprentissage des fractions à l’école primaire, en France, a été l’objet de recherches didactiques pensées, notamment de Guy Brousseau.

Attitude des élèves lors de leur confrontation avec les fractions

Actuellement, plusieurs difficultés en mathématiques, observées chez les jeunes élèves du primaire, deviennent visibles pour les intervenants lorsque la notion de fraction devient l’enjeu de l’enseignement. D’autre part, chez plusieurs enseignants de mathématiques, au primaire, l’enseignement des fractions et des nombres rationnels en général, constitue un enjeu professionnel de taille, et ce malgré le nombre d’outils mis à leur disposition.

L’expérience montre que les élèves ont des impressions plutôt négatives en ce qui concerne l’apprentissage des fractions ; les fractions sont un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques (Rouche, 1998). Nous pouvons constater que la plupart des élèves semblent vivre un état de panique à la seule vue des fractions (Hembree, 1990). Ils manifestent verbalement leur frustration et leur incapacité à les manipuler, y compris dans les opérations arithmétiques les plus simples comme l'addition et la soustraction. Ils éprouvent un état d'insécurité réel lors des évaluations parce que potentiellement, ils peuvent avoir à manipuler des fractions et ils perçoivent qu'ils partent défavorisés et inévitablement leurs performances en souffrent (Hembree, 1990).

De plus, certains élèves plus âgés, ceci est visible notamment dans la formation des adultes, disent clairement qu'ils ont renoncé à comprendre les opérations sur les fractions et déclarent que leur but principal est de mettre un terme à une situation dans laquelle ils se sentent mal à l'aise et sur laquelle ils semblent n'avoir aucun contrôle : « D'abord que je passe mon examen! », déclarent-ils avec dépit (Bond, 1998).

Ainsi, l'attitude même des élèves face à la fraction devient problématique. Dans une recherche de Kerslake (1986), des enfants interrogés quant à leurs stratégies d'apprentissage déclarent qu'ils détestent les fractions et affirment utiliser une variété de tactiques dans le but d'éviter l'utilisation des fractions, et ceci, même dans les cas les plus simples. Ils déclarent convertir la fraction en un nombre décimal, ce qui la transforme en un concept plus facilement manœuvrable à l'aide de la calculatrice (Kerslake, 1986).

Nous notons encore que les problèmes reliés à l'apprentissage et à l'utilisation de la fraction semblent suffisamment importants chez les élèves pour que certains chercheurs (Behr, Lesh, Post et Silver, 1983) décident d'y consacrer un projet d'envergure, il s'agit du *Rational Number Project* où plusieurs équipes étudient les différents aspects reliés à la fraction, notamment ceux de l'ordre et de l'équivalence.

Origine du centre d'intérêt

Venons-en à la genèse de l'idée de cette recherche. J'ai été enseignant de mathématiques à l'école primaire, au collège et au lycée en Syrie de 2004 jusqu'à 2007, ensuite j'ai été choisi pour travailler comme un assistant-professeur dans le département de l'éducation des enfants (spécialité : didactique des mathématiques-cycle primaire) à la faculté de pédagogie à l'université d'Alep en Syrie de 2007 à 2009. J'ai enseigné les mathématiques aux étudiants qui vont, par la suite, travailler dans le domaine de l'enseignement, surtout à l'école primaire. Puis, grâce au programme d'échange entre la France et la Syrie, j'ai eu l'occasion d'être choisi parmi ceux qui suivront leurs études en France pour l'obtention du doctorat. A cette fin, j'ai suivi une formation pendant neuf mois dans l'institut des langues à l'université d'Alep pour apprendre la langue française. De plus, ma fonction en tant que assistant-professeur à la faculté de pédagogie me pousse à approfondir ma spécialité en didactique des mathématiques, ce qui m'a conduit à l'Université Lumière Lyon 2 en 2009-2010 où j'ai travaillé en « master 2 recherche » sur le développement de compétences en mathématiques et travail personnel des élèves en dehors de la classe. Etude de cas d'élèves de classe CM2 de l'école primaire confrontés à la notion de fraction. L'expérience de cette première recherche m'a mis en contact avec plusieurs œuvres en didactique des mathématiques que je poursuis en doctorat. A l'issue de ma recherche en Master 2, j'ai acquis une nouvelle façon d'appréhender les erreurs, les difficultés des apprenants dans l'apprentissage des fractions. Dans ce travail de doctorat, je m'intéresse à l'étude des différentes significations de la fraction à travers de l'analyse des contenus des manuels scolaires, des connaissances et des représentations des élèves de cycle 3 de l'école primaire.

Pour notre recherche, nous avons choisi le champ conceptuel de la fraction. En vérifiant le programme de l'enseignement français, la notion de fraction est initiée en classe de CM1, nous avons étendu notre étude dans les deux classes CM1 et CM2 de l'école primaire. Cette notion de fraction est utile dans plusieurs matières scolaires comme les mathématiques, la géographie, les sciences. Les contenus relatifs aux fractions sont exprimés sous différentes représentations.

D'où vient mon intérêt pour le choix de ce concept ? Nous présentons dans cette section les raisons principales qui sont derrière notre choix.

Premièrement, mon expérience personnelle m'a guidé dans ma réflexion de départ pour le choix de cet objet d'étude. En effet, mes expériences comme enseignant en mathématiques dans mon pays, la Syrie, m'ont permis sommairement d'observer que les élèves de l'école primaire éprouvent des difficultés à l'égard des fractions. De même, en France, certains enseignants et enseignantes du primaire, du collège, du lycée ainsi que d'université m'ont dit que les fractions sont souvent difficiles pour les élèves. De plus, nous avons remarqué que les élèves semblent avoir une attitude négative par rapport à ce type de nombre.

Deuxièmement, mon intérêt pour la question de l'apprentissage des fractions provient également de mes souvenirs d'élève. En effet, je me souviens bien que lorsque j'étais en primaire et secondaire, j'avais des difficultés à comprendre les factions et je n'aimais également pas calculer avec les fractions.

Troisièmement, une partie importante de mon mémoire de master 2 Recherche à l'Université Lumière Lyon2 a été consacrée à l'étude du concept de fraction et les compétences mathématiques acquises par les élèves de CM2 à l'égard des fractions. Je voulais profiter de cette expérience pour réaliser un travail de recherche en doctorat sur le même sujet (les fractions) en tentant d'apporter de nouvelles expériences sur ce sujet.

Ainsi, ce choix du concept de fractions pour notre recherche découle naturellement de notre intérêt personnel sur le sujet et, également, de notre volonté de le partager avec des élèves au travers d'une future pratique enseignante. Nous nous étions interrogé au départ sur les réelles difficultés que nous avons eues à comprendre certains concepts au sujet des mathématiques dans notre enfance.

Au début de ce travail, nous nous sommes en particulier posé les questions suivantes :

- Comment le concept de la fraction se développe-t-il à travers l'histoire? Quelles difficultés les élèves rencontrent-ils lors de l'apprentissage des fractions? Quelles sont les diverses significations possibles de la fraction? Voilà quelques questions auxquelles nous allons tenter de répondre dans notre *partie théorique.*
- Quelles significations sont exploitées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 de l'école primaire en France lors des activités portant sur les fractions ? Quelles significations les élèves de CM1 et de CM2 du primaire donnent-ils à la fraction ? Ces questions feront l'objet de notre *partie empirique*.

Pour cela, *deux objectifs spécifiques et un objectif secondaire* ont été définis :

- Le premier objectif spécifique était de reconnaître et exploiter les différentes significations de la fraction présentes dans les situations d'apprentissage qui proposent des activités portant sur les fractions dans cinq manuels scolaires de mathématiques de CM1 et dans cinq manuels de CM2 de mêmes collections. Nous étudions l'importance et la place accordée à chaque signification dans ces manuels choisis.
- Le second objectif spécifique était d'identifier les conceptions et représentations chez des élèves de CM1 et de CM2 à l'égard de la notion de fraction, en particulier explorer et exploiter les différentes significations de la fraction données par ces élèves.

Nous faisons un lien entre les significations de la fraction présentes dans les manuels scolaires et les significations manifestées et données par les élèves.

- L'objectif secondaire de notre recherche était d'identifier quelles conceptions des concepts mathématiques et de leur apprentissage sont véhiculées par les enseignants, en particulier connaître celles de certains enseignants sur la manière avec laquelle ils abordent les fractions avec leurs élèves. Pour ce faire, 8 enseignants parmi les 12 enseignants des classes concernées ont participé à l'étude.

Pour cette recherche, nous nous intéresserons principalement à la diversité des significations possibles de la fraction exploitées dans les manuels scolaires choisis de CM1 et de CM2 et celles données par les élèves de CM1 et de CM2 de l'école primaire en France.

Afin de parvenir à nos objectifs de recherche, les deux questions suivantes sont formulées :

- Quelles significations de la fraction sont en jeu dans les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 ? Quels liens et distinctions entre ces deux niveaux scolaires CM1 et CM2 pouvons-nous identifier ?
- De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ?

Trois hypothèses sont ainsi formulées :

1. La signification de la fraction la plus présente est, dans les manuels de CM1, celle de *Partie d'un tout*, et dans les manuels de CM2 celle de *Nombre*.

2. La signification de la fraction la plus présente, chez les élèves de CM1 et de CM2, est celle de *Partie d'un tout*.

3. Les significations de la fraction les plus présentes dans les manuels scolaires choisis, sont celles que les élèves ont le plus de facilité à illustrer correctement, tandis que celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer.

La fraction en tant que concept nous amène à l'analyser sur la base des champs conceptuels de Gérard Vergnaud (1991). Nous nous référons aux propos de Gérard Vergnaud : « C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant » (Vergnaud, 1996, p. 198).

Nous avons axé notre analyse, d'une part sur les situations d'apprentissage proposées dans les contenus de certains manuels scolaires de mathématiques en CM1 et en CM2 portant sur les fractions et, d'autre part sur les apprentissages de la fraction chez les élèves ; nous avons étudié, comment l'élève construit un sens à ce concept. Pour étudier les apprentissages des élèves, nous avons dû faire des enquêtes auprès des élèves, nous n'avons pas pu faire des observations directes dans les classes et nous nous sommes limité à demander aux élèves de répondre à un questionnaire écrit portant sur les fractions. Enfin, nous voulions voir la façon dont les enseignants abordent les fractions avec leurs élèves, cela à partir de leur discours.

Un des problèmes que nous avons rencontré dans notre recherche, était d'avoir la possibilité d'observer certaines classes pendant le moment où l'enseignant transmettait la notion de fraction pour y adapter les questions et les exercices du questionnaire. Il nous a fallu attendre que partout dans les écoles, ils aient fini le programme sur la fraction pour passer le questionnaire aux élèves.

Après l'exploitation théorique, nous mettons en évidence trois axes principaux qui retiennent notre attention et guident notre recherche :

En premier axe, nous avons centré notre étude sur les activités proposées dans les manuels scolaires sur les fractions. Qu'est-ce que proposent les manuels scolaires de mathématiques en CM1 et CM2 sur les différentes significations de la fraction ? Est-ce que les significations présentes dans les manuels sont réparties également ? Quelle importance a chaque signification dans chaque manuel choisi ?

En deuxième axe, nous avons focalisé notre étude sur les apprentissages par les élèves des différentes significations de la fraction. Quelles significations donnent les élèves à la fraction ? Comment les élèves de CM1 et CM2 illustrent-ils les fractions ? Quelles significations sont les plus utilisées par les élèves lors des résolutions de situations de fraction ?

En troisième axe, c'est la construction du sens autour du concept de la fraction. Comment les enseignants abordent-ils ce concept avec leurs élèves ? Quelle programmation de savoir et de savoir-faire font les enseignants pour l'apprentissage des fractions à leurs élèves ?

Toutes nos questions tournent autour de : Quelles significations de la fraction sont présentes dans les différentes situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 de l'école primaire ? Comment les élèves de CM1 et de CM2 illustrent-ils les fractions ? Quelles sont leurs connaissances acquises concernant les différentes significations de la fraction ?

Nous parlons de la relation des élèves au savoir mathématique, ainsi que des contenus de l'enseignement concernant ce savoir. Nous nous intéressons aux contenus du savoir, dans le cas de la fraction. C'est le cadre de la didactique qui nous pousse à porter un intérêt sur le contenu de l'enseignement et sur les apprentissages chez les élèves. C'est pourquoi nous avons choisi l'approche didactique dans notre analyse, ce qui sera surtout notre guide dans nos perspectives.

La présentation de cette recherche se déroulera en trois grandes parties.

En première partie, puisque nous parlons du concept de fraction, il s'avère nécessaire d'aborder les différents aspects concernant ce concept, c'est-à-dire l'aspect historique, l'aspect mathématique, l'aspect didactique et l'aspect cognitif de ce concept. En ce qui concerne l'aspect historique, nous voulons savoir comment le concept de fraction a été représenté chez des anciens des cultures diverses et comment la forme actuelle de l'écriture de fraction est arrivée jusqu'à nous. L'aspect mathématique cherche à aborder les différentes caractéristiques mathématiques concernant les fractions. Dans l'aspect cognitif/psychologique concernant les fractions, nous tentons de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves et les démarches qu'ils utilisent pour représenter des fractions. L'aspect didactique est consacré à présenter certains concepts du champ de la didactique des mathématiques qui peuvent contribuer à comprendre le processus de l'enseignement comme la Transposition Didactique développé par Chevallard et le Champ conceptuel développé par Vergnaud.

En deuxième partie, c'est le résultat d'une partie exploratoire de notre travail, la lecture. Ce sont les différentes références conceptuelles sur lesquelles nous nous appuyons pour notre travail de thèse, qui nous permettront et nous aideront à réaliser cette recherche et à mettre nos résultats dans un cadre pertinent. Les définitions et les explications données par plusieurs chercheurs autour des différentes significations de la fraction sont des appuis pour nous. L'objet de notre étude tourne autour du concept de la fraction. Le concept de fraction met en œuvre les différents registres sémiotiques (Duval, 1993). La théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) nous permet de situer la notion de fraction dans un réseau, un champ de concepts. Notre étude est centrée sur le savoir à enseigner présent dans le manuel scolaire et sur les connaissances acquises par l'apprenant qui est le principal acteur de l'appropriation du savoir.

En troisième partie, nous visons à décrire nos méthodes et techniques d'investigation pour la construction des données, leurs traitements et leurs analyses. Ces données sont quantitatives et qualitatives. Nous avons choisi les outils grille d'analyse et questionnaire pour collecter ces données. Le traitement des données nécessite la maîtrise d'outils statistiques, La description de nos données est traitée par EXCEL, SPAD et C.H.I.C. Cette partie relate les dire des enseignants, des élèves et le contenu des manuels scolaires concernant le concept de la fraction.

PARTIE I : Le concept de fraction, différents aspects concernés

Dans cette première partie, il sera question pour nous, d'aborder les différents points de vue concernant l'objet de notre recherche portant sur le concept de fraction.

Cette première partie est divisée en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons un simple aperçu du concept de fraction chez des anciens des cultures diverses pour savoir comment la fraction a été représentée. Et ainsi, comment la forme actuelle de l'écriture de fraction est arrivée jusqu'à nous ?

Le deuxième chapitre abordera des fondements et des éléments mathématiques importants pour les fractions. Il présente les caractéristiques mathématiques des fractions.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'aspect cognitif de la fraction. En effet, pour mieux comprendre les différentes difficultés rencontrées par les élèves de CM1 et de CM2 et les démarches qu'ils utilisent pour représenter des fractions, les réponses aux questions suivantes vont nous aider à développer cette compréhension : comment se développe cette notion chez les enfants du primaire, sur quelles connaissances prend appui une première formalisation de la fraction ?

Le quatrième chapitre sera consacré à aborder l'aspect didactique des fractions. En effet, nous mettrons en évidence la contribution du champ théorique de la didactique des mathématiques à la compréhension du processus de l'enseignement ; nous nous intéresserons particulièrement au concept du triangle didactique, au concept de la Transposition Didactique développé par Yves Chevallard et à celui du Champ conceptuel développé par Gérard Vergnaud avec leurs applications sur le concept de fraction.

1. Fraction : points de vue étymologique et historique

Ce chapitre aborde l'aspect historique du concept de fraction. L'objectif de celui-ci est, d'une part, d'offrir un simple aperçu du concept de fractions chez des anciens de cultures diverses, afin de savoir comment la fraction a été représentée ? Et ainsi, comment la forme actuelle de l'écriture de fraction est arrivée jusqu'à nous ? D'autre part, d'effectuer d'une analyse épistémologique de nature historique, afin de récupérer et extraire tous les types de la fraction qui avaient été utilisés chez les peuples anciens.

En premier lieu, nous abordons le concept de fractions en Mésopotamie, en Egypte, en Inde, en Grèce, au Moyen-Orient et, enfin, en Occident. En deuxième lieu, nous présentons une analyse de nature historique en mettant en évidence sur les différents types de la fraction utilisés chez les peuples anciens.

1.1. Apparition et développement historique du concept de fraction

L'histoire des fractions débute avec les civilisations babyloniennes et égyptiennes (Hocquenghem ; Missenard ; Missenard ; Monnet ; Serfati et Tartary, 1980). L'idée de fraction est apparue très tôt, non pas sous sa forme actuelle, mais le problème du partage et du fractionnement d'un ensemble d'objets s'est très vite posé dans la vie pratique : prélèvement d'impôts, échanges, héritages… Dès l'antiquité des fractions sont apparues. Pour comprendre au mieux la conceptualisation historique des fractions, procédons à un rappel sur le rôle qu'ont eu les fractions dans l'histoire des mathématiques.

D'un point de vue historique, l'utilisation des fractions est liée à des tâches de mensuration, comparaison et distribution. Chez les peuples de l'antiquité, nous constatons le besoin d'exprimer des rapports non entiers, souvent pour résoudre des problèmes de la vie courante. Selon Wacheux (2012), très tôt, les hommes ont été confrontés au problème du partage : comment palier à l'insuffisance des nombres entiers ? Les premières civilisations anciennes, qui nous ont laissé des sources permettant d'analyser assez justement leurs connaissances mathématiques, sont les civilisations babyloniennes et égyptiennes. Il faut noter que les fractions babyloniennes et égyptiennes sont nées des besoins économiques et commerciaux comme les taxes, les intérêts, les échanges monétaires, etc. Nous voyons, parmi les égyptiens, les babyloniens ou les indiens, le besoin de calculer et de représenter le résultat du partage dans le cas de collection d'objets, et du rapport, dans le cas de problèmes de mensuration et de calculs géométriques.

Nous allons maintenant aborder le concept de fractions en Mésopotamie, en Egypte, en Inde, en Grèce, au Moyen- Orient et, enfin, en Occident.

1.1.1. Les fractions en Mésopotamie

La Mésopotamie est la région du Moyen-Orient formée par la plaine du Tigre et de l'Euphrate. Plusieurs peuples ont vécu là entre le VI^{e} et le 1er millénaire avant J.-C. Les Sumériens ou les Babylioniens s'y établissent au IV^{e} millénaire ; ils y fondent de puissantes cités-états, inventent la vie urbaine et l'écriture (Irma de Strasbourg, 2004-2005). La ville de Babylone a été créée en – 2350. On pense que c'est dans cette région du monde que l'écriture est apparue pour la première fois, en particulier pour celles des nombres, pour des besoins des échanges et de la science.(Galion, 1998).

Les Mésopotamiens avaient deux systèmes de numération. Le premier, utilisé dans la vie quotidienne, consistait à grouper les unités par paquets de 10, 60, 100, 600, 1000 et 3600. Le second système, appelé « système sexagésimal », était utilisé dans les textes mathématiques et reposait sur l'utilisation de la base soixante (Irma de Strasbourg, 2004-2005). Pour écrire le nombre 13 509 en base soixante par exemple, on effectue successivement deux divisions euclidiennes pour écrire

$13\,509 = 225 \times 60 + 9$ puis $225 = 3 \times 60 + 45$,

de sorte d'arriver à l'écriture $13\,509 = 3 \times 60^2 + 45 \times 60 + 9$. (Une manière d'interpréter ce résultat est de dire que 13 509 secondes font 3 heures, 45 minutes et 9 secondes.).

Au début du II^{ème} millénaire avant J.C., les babyloniens ont utilisé une *écriture*, dite ***cunéiforme***, qui permet de représenter des grands nombres mais également des cas particuliers de fractions. Selon Galion (1998), Dans l'écriture babylonienne, il n'existe que deux symboles : le « clou vertical » qui vaut un et le « chevron » qui vaut dix. Les neuf premiers chiffres se représentent par répétition de clous verticaux. 10 est représenté par le chevron. Pour écrire les nombres de 11 à 59, on répète les symboles autant de fois que nécessaire. Le nombre 60 se représente à nouveau par le clou. Visualisons maintenant les deux signes qui représentent les deux nombres un et dix, selon (Hocquenghem, et al. 1980) :

 = 1  = 10

Pour plusieurs unités ou plusieurs dizaines, ces signes étaient placés côté à côté.

Ainsi 25 s'écrivait  et 32 se notait  .

Vers 3000 avant J-C., dans la région de Sumer sont apparues les premières représentations de fractions pour des cas particuliers : 1/120 ; 1/60 ; 1/30 ; 1/10 ; 1/5

TABLEAU 1 – LES PREMIERES REPRESENTATIONS DE FRACTIONS APPARUES EN SUMER. (HTTP://WWW.MATHS-ET-TIQUES.FR/INDEX.PHP/HISTOIRE-DES-MATHS/NOMBRES/LES-FRACTIONS)

CHIFFRES	VALEURS
	$\frac{1}{120}$
	$\frac{1}{60}$
	$\frac{1}{30}$
	$\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{5}$

Le système de numération est *sexagésimal (base 60)* et repose sur deux principes :

> « - Un système additif pour les chiffres avec l’utilisation de deux symboles, le clou qui vaut un et le chevron qui vaut dix. Le chiffre 45 est ainsi écrit s’écrivait
>
> 
>
> - Un principe positionnel permettant l’assemblage de ces « chiffres en base soixante », et qui dit qu’on doit juxtaposer les chiffres de droite à gauche dans l’ordre croissant de leur importance, en commençant par le chiffre des unités, puis celui des soixantaines, etc. ». (Irma de Strasbourg, 2004-2005, P.15).

Dans cette écriture, les fractions se représentent avec des dénominateurs de 60 ou des puissances de 60. Ces fractions sexagésimales dans un système à base 60 sont peut-être en partie à l’origine de la manière de désigner les fractions décimales dans notre système de numération décimale. Les nombreux diviseurs de 60 permettent de représenter facilement les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{30}$.

Le système d’écriture des Mésopotamiens possède une autre caractéristique étonnante. Il sert en effet à noter non seulement les nombres entiers, mais aussi les nombres fractionnaires, comme ces exemples :

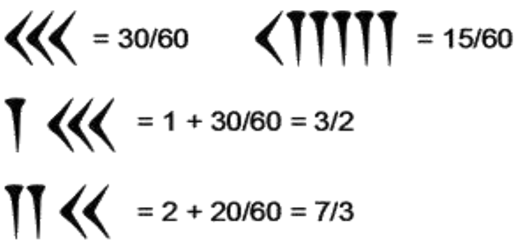


FIGURE 1 – REPRESENTATION DES ENTIERS ET DES NUMERATEURS DES FRACTIONS SELON L’ECRITURE BABYLONIENNE (HTTP://WWW.MATHS-ET-TIQUES.FR/INDEX.PHP/HISTOIRE-DES-MATHS/NOMBRES/LES-FRACTIONS).

En Mésopotamie, où s’est répandue l’utilisation de fractions sexagésimales, on trouve également des problèmes arithmétiques de mesures fractionnaires, et des problèmes assez abstraits, de nature algébrique. Du point de vue numérique, les babyloniens utilisaient souvent les fractions pour approximer des mesures, comme c’est le cas pour le calcul du nombre π.

1.1.2. Les fractions en Egypte

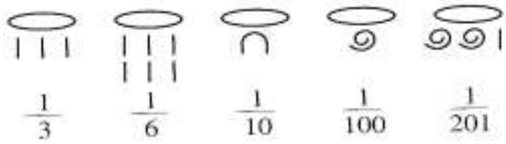
Au III^{ème} millénaire avant J.C., les Egyptiens ont utilisé deux systèmes d’écritures : (http://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/notions-et-theoremes/les-developpements/409-les-fractions-egyptiennes)

1. L’un, hiéroglyphique, utilisé sur les monuments et les pierres tombales, est pictural, chaque symbole représente un objet.
2. L’autre, hiératique, emploie des symboles qui n’étaient à l’origine que des simplifications et des styles des hiéroglyphes.

En Egypte, on écrivait les nombres sur des papyrus sous forme de hiéroglyphes (Les égyptiens ont utilisé un système de numération (reposant sur le principe additif). D’une façon générale, les seules fractions que les Egyptiens utilisaient à cette époque, étaient les fractions dont le numérateur valait exclusivement un (un demi, un tiers, un quart …), c’est pour cela qu’on les appelle « unitaires », 1/2, 1/3, 1/4, 1/5… sans toutefois leur donner le statut de nombre ; les fractions étaient considérées comme des opérateurs sur des nombres. Au niveau de l’écriture, il est vraisemblable que le codage des fractions ne fut pas immédiat (comme cela a également été le cas pour l’écriture des entiers).

Selon Galion (1998), dans la civilisation égyptienne, l’écriture d’une fraction se faisait à l’aide d’un hiéroglyphe particulier « la bouche » qui signifiait alors « partie » et qu’on plaçait sur le nombre de parts de l’unité. Voici les symboles du système hiéroglyphique utilisés pour les nombre 1, 10 et 100 :

Par exemple :



Seules certaines fractions disposent de symboles spécifiques. Il s’agit de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$:

FIGURE 2 – DES SYMBOLES SPECIFIQUES DES FRACTIONS EN EGYPTE. (IFRAH, 1981, P. 225)

Il est toujours indiqué que les égyptiens n'avaient que des fractions unitaires (qui, de fait, sont souvent appelées « fractions égyptiennes »). Ce n'est pas tout à fait vrai. Ils avaient aussi deux autres fractions, 2/3 et 3/4, auxquelles étaient réservés des symboles spéciaux :

FIGURE 3 – SYMBOLES SPECIAUX EGYPTIENS. . (IFRAH, 1981, P. 225)

Il est vrai, cependant, que les égyptiens n'ont jamais regardé les fractions 2/3 et 3/4 comme des fractions réelles, mais comme des symboles divins. En effet, seules les fractions avec le numérateur 1 sont considérées comme des fractions chez les Egyptiens. C'est vrai dans tous les cas.

Toutes les fractions sont ainsi exprimées comme somme de fractions unitaires. Par ailleurs, un des problèmes, qui est le plus débattu avec les fractions, est la question de réduction des fractions complexes en fractions unitaires. Les papyrus révèlent que les égyptiens étaient de véritables maîtres en la matière. Selon Ifrah (1981), pour exprimer, par exemple, l'équivalence de la fraction 3/5, les égyptiens ne mettaient pas celle-ci sous la forme 1/5 + 1/5 + 1/5 ; ils la décomposaient plutôt en une somme de fractions ayant l'unité pour numérateur :

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\ \text{devant}\ \frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5},\ \frac{47}{60}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ .$$

Dans leur système d'écriture, la duplication (multiplication par 2) joue alors un rôle essentiel. De plus, les égyptiens disposaient de tables de décomposition du double d'une fraction donnée.

Une des célèbres sources de renseignements est le papyrus de Rhind écrit par le scribe Ahmès vers 1650 ans avant J-C. Il contient une table qui donne une décomposition possible du double d'une fraction en la somme de deux fractions unitaires (Wacheux, 2012). Ce tableau donnait les doubles des fractions de dénominateurs impairs jusqu'au dénominateur 101. Ainsi, toutes les fractions sont exprimées sous la forme de somme de fractions unitaires.

A propos des fractions égyptiennes, il existe un épisode sanglant dans la mythologie : Seth, le dieu de la violence et incarnation du mal, arrache l'œil de Horus, dieu à tête de faucon et à corps d'homme. Cet œil qui est appelé Oudjat.

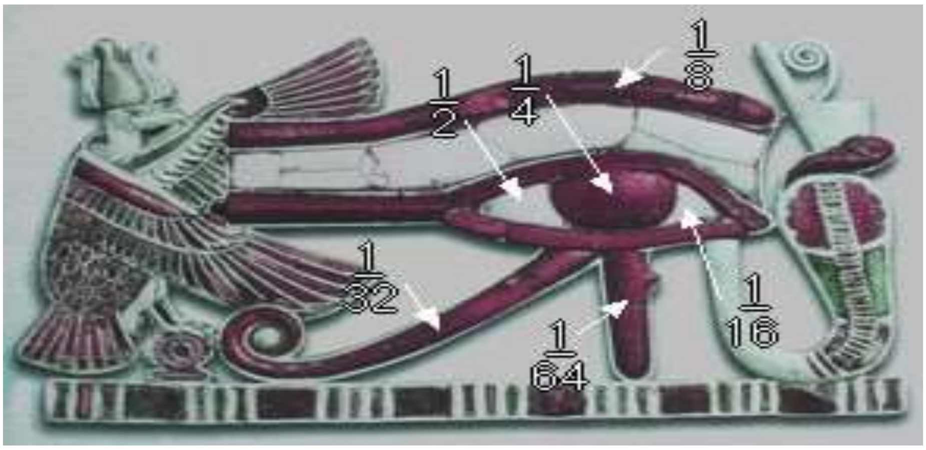


FIGURE 4 – L'ŒIL D'HORUS (ŒIL D'OUDJAT) (HTTP://WWW.MATHS-ET-TIQUES.FR/INDEX.PHP/HISTOIRE-DES-MATHS/NOMBRES/LES-FRACTIONS).

Seth partage cet œil en six morceaux. Thot, le dieu magicien à tête d'ibis reconstitue l'œil, symbole du bien contre le mal. Chacune de ses parties symbolise une fraction de numérateur 1 et de dénominateurs 2, 4, 8, 16, 32 et 64 (voir représentation sur l'image au-dessus). Mais la somme de ces parts n'est pas égale à 1 (l'œil entier).

Selon Galion (1998), ces fractions unitaires , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ **avaient un rôle** spécial dans la vie quotidienne égyptienne. Ces tables étaient utilisées pour une diversité de tâches, comme: diviser de façon proportionnelle une certaine quantité, exprimer le rapport entre mesures pour calculer l'aire de figures, et même pour découvrir une quantité fractionnaire inconnue.

1.1.3. Les fractions en Grèce

Au V^{ème} siècle avant J.C., les grecs possédaient un système de numération alphabétique et ont apporté des progrès non négligeables à l'écriture fractionnaire des nombres. Pour eux, un nombre est nécessairement associé à une grandeur géométrique : leur conception du nombre rationnel s'accorde ainsi à un rapport de longueurs. Bien que leurs notations aient été un peu lourdes, les grecs ont effectué des calculs fractionnaires complexes. (http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/les-fractions).

Les Grecs ont longtemps conçu les fractions non comme des nombres mais comme des opérateurs sur les nombres. Les Grecs donneront les méthodes de calcul pour ajouter, soustraire, multiplier et diviser des fractions. En effet, les grecs, qui ont été très tôt mis en face de l'irrationalité utilisaient les fractions unitaires et ont persisté jusqu'au Moyen Âge. Même dans l'œuvre Liber Abaci, de Fibonacci, datée de 1202, le système décimal, qui est recommandé à ce moment, n'est pas appliqué aux fractions.

Chez les Grecs, les fractions n'existent que comme rapports de deux nombres entiers, les mathématiciens grecs disposaient du savoir des égyptiens et des babyloniens, plusieurs parmi eux sont allés s'instruire en Egypte et en Mésopotamie. Chez Diophante apparaît une notation des fractions sous la forme : dénominateur sur numérateur mais les deux nombres ne possèdent pas de trait comme dans notre notation actuelle (Angeli, 2002).

1.1.4. Les fractions en Inde

Vers la fin de l'antiquité, une notation analogue à la nôtre a été née en Inde. Les mathématiciens de l'Inde notaient les fractions sous la forme : numérateur sur dénominateur, sans la barre de fraction qui fut introduite plus tard par les mathématiciens Arabes (Al Hâssan, 1150). Les calculs à cette époque étaient analogues aux nôtres (Angeli, 2002). Au XII^{ème} siècle, le mathématicien indien Bhaskara écrit les fractions avec une notation proche de celle que nous utilisons actuellement : le numérateur est écrit au-dessus du dénominateur, mais il n'y a pas de barre de fraction.

Selon Benoit ; Chemla et Ritter (1992), en sanskrit, les fractions sont désignées le plus souvent sous le nom de bhinna [de BHID, fendre, rompre, diviser…]. Dès les Śulvasūtra, on rencontre aussi les termes bhāga [de BHAJ, diviser, partager…] et amśa [partie, portion]. Le mot amśa a été surtout utilisé pour désigner le numérateur. Quant au dénominateur, il est appelé cheda [diviseur].

On trouve aussi chez les mathématiciens indiens une conception unitaire des nombres entiers et fractionnaires, les nombres entiers étant considérés comme des fractions ayant l'unité pour dénominateur.

Ainsi, on trouve, à l'époque médiévale, le terme rūpa-bhāga parmi les noms de fraction. Or rūpa représente l'unité en mathématiques. Le terme rūpa-bhāga désigne donc le « unième », la fraction.

La notation des fractions qui nous est familière, mais sans la barre de fraction, a pu apparaître en Inde en même temps que la notation numérique. La numération écrite y est attestée à partir des inscriptions d'Aśoka, au milieu du III^{ème} siècle avant J.C., mais sans le zéro. Dans le manuscrit de Bakhsālī, les fractions sont déjà notées par des configurations de nombres sur deux ou trois lignes, comme dans les manuscrits plus récents. C'est aux indiens que nous devons la notation des fractions : ils écrivaient le numérateur au-dessus du dénominateur mais sans le trait de fraction.

L'apparition de la numération décimale en Inde, au V^{ème} siècle, a permis une utilisation plus large et variée des fractions et d'en désigner les usages.

Bien que l'usage de barres séparant les nombres soit attesté dans certains manuscrits, la règle générale est de disposer le numérateur et le dénominateur sur deux lignes, sans trait séparateur, comme l'on posait la division.

A partir du V[ème]-VI[ème] siècles, les mathématiques indiennes nous sont mieux connues grâce aux œuvres d'astronomes et de mathématiciens parvenues jusqu'à nous. Il s'agit principalement des écrits d'Āryabhata, Bhāskara, Brahmagupta et Mahāvīra.

Les indiens employaient des fractions dans une grande diversité de tâches, de façon assez proche des égyptiens, le plus souvent pour le partage, les calculs géométriques et des rapports de proportionnalité.

Selon Saidan (1997), le concept de fraction a/b est un concept indien. Mais en Inde, on écrivait :

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

De même que a $\frac{b}{c}$ s'écrivait $\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$

Par exemple, 19 ÷ 4 donnent comme résultat final $\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$

Les arabes ont appris cette écriture, mais ils ont gardé leur propre technique de remplacement des fractions par des groupes de fractions ayant 1 au numérateur. Ainsi, ils comprenaient le sens de la fraction $\frac{3}{4}$, mais ils préféraient la remplacer par $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Et celle-ci s'écrivait sous la forme :

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$$

Cependant, cette dernière forme pouvait prêter à confusion et se lire $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ si bien qu'un tel danger a pu accélérer la tendance à employer la forme plus générale a/b. La première étape repérable de ce changement consiste à écrire, par exemple, $4\frac{3}{4}$ comme

$$\begin{array}{c} 4 \\ \hline 3 \\ 4 \end{array}$$

avec un trait pour séparer le nombre entier de la fraction, mais il fallait encore remplacer $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$. Même tout seul devait être écrit

$$\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$$

Ce furent Ibn al-Banna, ou ses prédécesseurs à l'ouest, qui adoptèrent définitivement l'idée de la forme générale de la fraction ordinaire a/b et qui l'écrivaient $\frac{a}{b}$, avec un trait pour séparer le numérateur du dénominateur mais ils écrivaient $\frac{3}{4}$ 4 pour 4 $\frac{3}{4}$ sans tenir compte de la valeur attachée à chaque rang (Saidan, 1997).

1.1.5. Les fractions au Moyen-Orient dans les mathématiques arabes

Si les fractions sont couramment utilisées depuis plusieurs millénaires, il faudra attendre le IX$^{\text{ème}}$ siècle pour voir des mathématiciens arabes utilisent de manière explicite les fractions et les décimaux et généralisent progressivement le concept de nombre aux rationnels et aux irrationnels positifs. De plus, Les mathématiciens arabes ont joué un rôle fondamental dans le développement conceptuel des nombres décimaux. En effet, la notation fractionnaire avec la barre est un héritage des arabes. Le perse Abu'l-Wafa (940 -998) est l'un des premiers à avoir accordé le statut de nombre à tout rapport de grandeurs.

Au 11$^{\text{ème}}$ siècle chez les arabes, les fractions deviennent le rapport de deux longueurs et prennent le statut de nombre. Ainsi 2/3 est perçu comme le nombre qui multiplie par 3 donne 2. Il faut noter que la notation fractionnaire avec la barre est un héritage des peuples arabes. Les arabes ont alors joué un rôle important dans la diffusion des connaissances mathématiques qu'ils découvraient en édifiant leur empire. Ils utilisaient les apports des astronomes indiens, la numération décimale de position et leurs techniques opératoires, pour étendre les connaissances des nombres.

Selon Dubois, Fénichel et Pauvert (1993), « le peuple arabe a ainsi joué dans l'histoire de la science un rôle de tout premier plan : en conservant les trésors des sciences grecque et indienne et en leur donnant une nouvelle vie, un caractère original, il a permis le renouveau scientifique du Moyen-âge et le splendide épanouissement ultérieur ». Ils reprendront à la civilisation indienne le principe de numération de position (notre numération actuelle) et les principales techniques opératoires qui les conduiront aux nombres décimaux.

Une excellente connaissance de l’arithmétique indienne et un élargissement du concept de nombre à tous les rationnels vont permettre aux Arabes d’inventer les décimaux dont le codage décimal des parties de l’unité ne sera vulgarisé que beaucoup plus tard, vers le XV^{ème} siècle (travaux d’Al-Kashi, mort en 1429).

En 1427, Jemshid al Kashi (1380 - 1429), astronome et savant de Samarkand, donne une définition des fractions décimales, expose leur théorie et montre comment décomposer toute fraction en somme de fractions décimales. Il détaille les techniques opératoires en expliquant qu’en utilisant les fractions décimales, les opérations sur les fractions se ramènent à des opérations sur les entiers. Il conçoit également des tableaux de conversion de fractions décimales en fractions sexagésimales antérieurement utilisées par les babyloniens (Wacheux, 2012).

Dans son ouvrage « La clé de l’arithmétique », AL-Kashi (1427) expose la manière d'opérer dans le système sexagésimale de position qu'utilisaient les astronomes. Cet ouvrage comporte plusieurs parties dont une sur « l’arithmétique des nombres entiers » et une sur « l'arithmétique des fractions ». Dans un système sexagésimal de position, un nombre a la forme générale suivante :

$$A.n\times 60^{n}+an-1\times 60^{n-1}+\ldots+a2\times 60^{2}+a1\times 60^{1}+a0+a-1\times 60^{-1}+a-2\times 60^{-2}+\ldots+a-m\times 60^{-m}$$

Les fractions de l’unité s’appelaient minutes, deuxièmes, tierces... pour écrire un nombre, on inscrivait à la suite tous les « chiffres » qui le composaient et on indiquait à la fin l'ordre du dernier chiffre. Ainsi, l’expression « 2 43 1 8 57 deuxièmes » correspondaient au nombre :

$$2\times60^{2} + 43\times60 + 1+8\times60^{-1} +57\times60^{-2}$$

Dans la partie, de son livre, consacrée aux fractions, Al-Kashi introduit, à partir des fractions sexagésimales, des fractions décimales pour que l’on puisse opérer sur les fractions comme on le fait sur les nombres entiers qui, eux, s’expriment couramment en base dix. Pour écrire ces fractions décimales, AL-Kashi place un trait après la partie entière ou écrit la partie fractionnaire d'une autre couleur ou indique pour chaque chiffre la position qu’il occupe ou encore donne seulement l’ordre du dernier chiffre.

Pour exprimer les fractions, les Arabes préfèrent utiliser les quantièmes, c’est-à-dire les fractions dont le numérateur est égal à 1. C’est une vieille habitude datant des Pharaons égyptiens que scribes et marchands savaient utiliser avec beaucoup d’habileté.

Un demi (نصف) – Un tiers (ثلث) – … – Un dixième (عشر) …Une partie de onze (جزء من أحد عشر),…

Les dix premières s'expriment en un seul mot, alors que les autres s'expriment en plusieurs mots. On préfère ramener toutes les fractions à des quantièmes. On ne dira pas cinq sixièmes, mais un tiers plus un demi; on ne dira pas un vingtième, mais un demi de un dixième ; on ne dira pas un centième, mais un dixième de un dixième … Cela complique les calculs, mais cela est une aide à raisonner lorsque l'on ne connaît pas les dix chiffres arabo-indiens.

Dans son traité d'arithmétique, Al-Khwarizmi (780-850) explique le système décimal de numération de position utilisant les chiffres indiens, dix signes dont le zéro (petit cercle).

Al-Khwarizmi expose les calculs sur les fractions, (mot qui vient de « briser » et qui donnera nombre « rompu » en Europe), dans son livre d'arithmétique. « Il existe en arabe, neuf uniques termes pour désigner neuf fractions distinctes dont le numérateur est l'unité ; à savoir 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10 »

Ce sont les seuls kusūr (fractions) de ce système ; chacune est un kasr (c'est-à-dire une fraction). Même 2/3, 3/4, … sont des kusūr, pluriel de kasr. Les autres fractions de ce type, sont appelées une partie de n : par exemple 1/15, est désignée comme étant une partie de 15 parties, et, dans les calculs, on la remplacera par 1/3 × 1/5, et les fractions du type m/n, sont dites m parties de n : par exemple, 3 /17, 3 parties de 17.

Al-Khwarizmi exposait d'abord la théorie des fractions sexagésimales qu'il appelle les fractions indiennes. Il décrivait les opérations sur ces fractions. Il développait ensuite le calcul avec les fractions ordinaires. Les mathématiciens arabes ont conservé l'antique tradition égyptienne d'écriture des fractions comme somme de fractions de numérateur 1.

Un autre auteur du IX^{ème} siècle, Abūl-Wafa traite également des fractions dans son « livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands ». Il les définit comme le rapport d'un nombre à un autre nombre plus grand. Il distingue trois sortes de fractions, qu'il appelait fractions fondamentales :

- les fractions dites principales de numérateur 1 : 1/2 ; 1/3 ; 1/10 ;
- les fractions composées de type m/n avec $m < n \leq 10$, parmi lesquelles la fraction 3/2 joue un rôle particulier ;
- et les fractions dites unifiées: fractions obtenues par le produit de fractions principales.

Pour les fractions composées, il donne des « équivalences » sous forme de sommes et de produits de fractions :

$2/5= 1/3 + 2/3 \times 1/10$

$9/10 = 1/2 + 1/3 + 2/3 \times 1/10$

Il donne aussi des décompositions en soixantièmes des fractions principales:

1/2 = 30/60 ; 1/3 = 20/60 ; 1/4 = 15/60 ; 1/5 = 12/60 ;

Il établit également les résultats correspondant à l'addition et à la multiplication des fractions principales prises 2 à 2. Ces résultats, consignés dans des tables, servent à établir des règles pour réduire les fractions et notamment les fractions sexagésimales qui sont d'un usage courant dans le domaine des sciences.

Abūl-Wafa développait ainsi toute une « théorie » (en fait un très grand nombre de règles de calcul) sur la réduction des fractions sexagésimales, lesquelles interviennent souvent dans les calculs sur les fractions ordinaires. En effet, une partie de l'ouvrage d'Abūl-Wafa est consacrée à des conversions de fractions d'une forme dans une autre. Un certain nombre de conversions nécessaires était aussi lié à des systèmes d'unités de monnaie et faisait intervenir des dénominateurs 6, 24 et 96.

1.1.6. Les fractions en Occident

Sous l'influence des savants arabes, le système décimal s'est entendu dans le monde scientifique. Il a été introduit en Europe occidentale vers le X$^{\text{ème}}$ siècle. Jusqu'au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le codage décimal d'un nombre (rationnel) s'est effectué en juxtaposant la partie entière codée dans le système décimal à sa partie inférieure à l'unité appelée « rompu », codée par une fraction.

Au Moyen Age et jusqu'à la Renaissance, plusieurs tentatives de notation des fractions se sont succédées en vain, jusqu'à l'arrivée en Occident de la notation Indo-Arabe, qui s'est rapidement imposée. Les fractions ont ainsi acquis leur forme actuelle à la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Comme on peut prolonger l'addition aux fractions, celles-ci ont été considérées comme des nombres, on les appelait nombres rompus (Angeli, 2002).

Selon Stegen ; Géron et Daro (2007), en Europe, l'utilisation des décimaux est plus tardive. Ce n'est qu'au XVI$^{\text{ème}}$ siècle que paraît le premier ouvrage concernant le concept de nombre décimal ; il s'agit de l'ouvrage de Simon Stevin (1548 -1620), La Disme (1585). Dans ce dernier, il préconise de coder les décimaux comme suit : le nombre 8,934 sera écrit 8^0 9^1 3^2 4^3. Il remplace les procédures de calcul sur les fractions par des opérations sur les décimaux ; l'utilisateur des décimaux n'aura plus qu'à appliquer les procédures déjà valables pour les entiers. Il recommande également de développer un système de mesures cohérent avec ce système décimal (qui deviendra par la suite notre système métrique).

Dès le XII^{ème} siècle, le traducteur anglais Adelard de Bath (1075 - 1160) a utilisé dans sa traduction du perse Mohammed Al-Khwarizmi (780 - 850) le mot fraction « kasr » en arabe pour signifier rompu ou fracturé.

Au XIV^{ème} siècle, le mathématicien français Nicole Oresme (1325 -1382) emprunte la notation des fractions avec barre due aux arabes dans son ouvrage sur les calculs et les exposants fractionnaires « Algorismus proportionum ». C'est dans ce même ouvrage, que sont définis pour la première fois les termes « numérateur » et « dénominateur ».

En 1579, un autre français, François Viète (1540 -1603), préconise l'usage des fractions décimales devant les fractions sexagésimales : « en mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les millièmes et les mille, les centièmes et les centaines, les dixièmes et les dizaines doivent être d'un usage fréquent ou constant ». Pourtant l'usage des fractions sexagésimales sera maintenu en astronomie durant le XVI^{ème} siècle.

1.2. Analyse épistémologico-historique du concept de fraction : mise en évidence des significations utilisées

Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, Chevallard (1999, 2002) a suggéré l'ensemble tâche / technique / technologie / théorie où l'activité mathématique est considérée comme une des activités humaines et sociales. En effet, nous prenons en compte cet ensemble des éléments pour mener et développer notre analyse historique du concept de fraction. *Tâche* est composée des actions qui supposent un objet précis prenant leurs sens dans des institutions : ce sont donc des construits institutionnels (1999, p.224). *Technique* concerne les manières d'accomplir une tâche et *technologie* est constituée des discours sur la technique ayant pour but de justifier rationnellement celle-ci. *Théorie* est un niveau supérieur de justification-explication-production par rapport à la technologie.

Cette approche nous intéresse, en effet, elle considère un concept comme un processus qui dépend d'un contexte social et d'un champ institutionnel de significations ; nous identifions des tâches et des techniques dans des situations sociales où naissent la notion et l'utilisation des fractions.

Du point de vue historique, l'utilisation des fractions est liée à des *tâches* de *mensuration, comparaison et distribution*. Chez les peuples de l'antiquité, nous constatons déjà le besoin d'exprimer des rapports non entiers, et cela souvent pour résoudre des problèmes de la vie courante. Nous voyons, parmi les égyptiens, les babyloniens ou les indiens, le besoin de calculer et de représenter le résultat du partage dans le cas de collection d'objets et du rapport dans le cas de problèmes de mensuration et de calculs géométriques.

En Egypte, par exemple, dans les temps anciens, les Egyptiens n'utilisaient que les fractions unitaires (de numérateur 1) représentées par une ellipse au-dessus du dénominateur. Les fractions non unitaires, à l'exception de 1/2, 1/3, 1/4 et de la fraction 2/3, étaient composées par des calculs partiels à l'aide de fractions unitaires. Ils opéraient toujours par des calculs successifs et ils se servaient de tables de calculs qui fournissaient plusieurs résultats. Ces tables étaient utilisées pour une diversité de tâches comme : diviser de façon proportionnelle une certaine quantité ou exprimer le rapport entre mesures pour calculer l'aire de figures. En Mésopotamie, où s'est répandue l'utilisation de fractions sexagésimales, nous trouvons également des problèmes arithmétiques de mesures fractionnaires et des problèmes assez abstraits, de nature algébrique. Du point de vue numérique, les babyloniens utilisaient souvent les fractions pour approximer des mesures, comme c'est le cas pour le calcul du nombre π. En Inde, nous constatons que les indiens employaient de même des fractions dans une grande diversité de tâches, de façon assez proche des égyptiens, le plus souvent pour le partage, les calculs géométriques et les rapports de proportionnalité.

Il est intéressant de souligner que les fractions unitaires étaient préférées par des peuples de l'antiquité. Sierpinska (1988) considère que, dans le contexte du débat autour du concept d'obstacle épistémologique, il y a souvent une culture mathématique qui imprime une façon de penser et qui sert comme obstacle, comme c'est dans le cas des fractions unitaires.

De plus, même les grecs utilisaient les fractions unitaires. Dans l'œuvre Liber Abaci de Fibonacci (1202), le système décimal n'est pas appliqué aux fractions. Selon l'analyse de Boyer (1974) à ce propos, Fibonacci semble effectivement toujours préférer les fractions unitaires, ayant même élaboré des tables de conversion de fractions ordinaires en fractions unitaires. Dans son œuvre, les nombreux problèmes de calculs, sur des transactions monétaires, sont traités par composition d'additions partielles de fractions unitaires, ce qui rend ces calculs assez compliqués.

C'est dans son ouvrage le Liber Abaci (Livre du calcul) que nous trouvons la représentation fractionnaire avec la barre et les désignations de numérateur et dénominateur comme nous l'utilisons de nos jours. En effet, les peuples de l'antiquité ont employé plusieurs représentations pour les fractions, souvent avec des symboles, comme c'est le cas de l'ovale des égyptiens. La barre de séparation était utilisée par *les arabes*, et a été adoptée par Fibonacci, mais son usage a été vraiment reconnu seulement au XVI$^{\text{ème}}$ siècle avec De Morgan.

Boyer (1974, cité par Bittencourt, 2008, P.70) a souligné que

> « un des avantages, les plus importants, du système numérique décimal, c'est -à- dire, son applicabilité aux fractions, a échappé complètement aux européens jusqu'à la Renaissance. Les techniques de calculs de fractions continuaient à être assez compliquées jusqu'à l'utilisation des nombres décimaux mise en place lors de l'adoption du système métrique au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle avec la réforme des systèmes de mesure. Cela a eu comme conséquence, effectivement, l'allègement des techniques et la progressive organisation des rapports entre les fractions et les décimaux. Cette approche va permettre de faire correspondre chaque fraction à un point sur la droite numérique, ce qui aboutit au traitement numérique des rapports. Plus tard, l'affrontement des aspects topologiques concernant la droite va contribuer à l'organisation d'une technologie sur les nombres rationnels et irrationnels, et finalement, à la définition de l'ensemble des nombres réels à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle avec Dedekind (1831-1916) ».

C'est ainsi qu'à partir du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle nous trouvons un nouveau traitement donné aux fractions, poussé par le besoin de transmettre les connaissances mathématiques dans l'enseignement. En France, ce sont dans les œuvres destinées à l'enseignement au sein des Écoles Militaires et Polytechniques, comme les œuvres de Laplace et Lagrange, que l'on identifie une technologie au sujet des fractions. Dans l'œuvre de Laplace (1749-1827), la fraction a/b, par exemple, est définie comme la division de ' a ' pour ' b ', ce qui est au cœur de la définition des nombres rationnels enseignée postérieurement. Laplace explore aussi les rapports entre les nombres naturels et les décimaux et souligne que, si a / b désigne le quotient entre deux nombres, cela peut donner comme résultat un nombre naturel, un rationnel ou un irrationnel.

> « Vizcarra et Sallan (2005), dans leur étude des obstacles didactiques autour de l'aspect 'rapport' sur les figures dans l'enseignement espagnol, considèrent que comme la genèse historique des fractions est liée à des tâches de mensuration ou de partage, il s'agit sûrement d'un outil didactique. Effectivement, l'approche des fractions par le rapport, à l'aide de dessins de figures géométriques, est devenue la façon classique de présenter les fractions. Même si on n'arrive pas à récupérer toutes les traces de cette approche, il est certain, d'après une analyse historique, que c'est le résultat d'une création didactique » (Bittencourt, 2008, P.72).

Cet aperçu historique nous permet d'accompagner l'évolution de l'ensemble tâches / techniques concernant les fractions, autour de tâches multiples et assez semblables, les fractions étant répandues dans plusieurs cultures depuis l'Antiquité. Le noyau du concept de ce que nous appellerons plus tard les nombres rationnels, représentés par des fractions, a toujours été la mensuration directe d'une grandeur continue, ou de sa division ou partage.

En analysant la progression historique des fractions, plusieurs chercheurs et auteurs ont pu mettre en avant divers types de fractions utilisées. C'est le cas de Nicolas Rouche (1998), il présente quatre types de fractions différentes dans un ouvrage intitulé « Pourquoi ont-ils inventé les fractions ». Selon lui, les fractions sont à distinguer selon le sens et la fonction qu'elles prennent et des valeurs qu'elles manipulent. Dans ce sens, R. Brissiaud (1998) le rejoint en distinguant également quatre types de fractions différentes. En premier lieu, une fraction peut opérer sur deux valeurs différentes et elle permet de représenter un partage (on parle de partage équitable). Nous retrouvons d'ailleurs les fractions unitaires vues précédemment. Par exemple 1/3 consiste à partager en 3 parts égales et d'en saisir une. Parmi ce type de fraction, nous pouvons distinguer deux façons possibles de partager une grandeur (lorsqu'il ne s'agit pas de fraction unitaire) ; pour la fraction 3/5, on peut, soit partager en 5 parts égales l'unité donnée et en prendre 3 parts, soit multiplier par 3 l'unité donnée, soit partager l'ensemble en 5 parts égales et en prendre une. Le premier partage proposé correspond à une partition de l'unité suivie d'une multiplication. Dans ce cas on appelle ce type de fraction « un fractionnement de l'unité » et la fraction 3/5 est lue « trois cinquièmes ». Pour le second partage possible, il correspond au partage de la totalité des 3 unités en 5 parts égales. On appelle ce type de fraction « une division-partition de la pluralité » et la fraction 3/5 est lue « 3 divisé par 5 ». Il faut noter que ces deux types de partage se valent, ce qui n'est pas évident pour les élèves.

En ce qui concerne les deux autres types de fractions, nous pouvons distinguer les fractions qui correspondent à un rapport entre deux valeurs de même nature. On parle alors de fraction-rapport. Bien entendu, pour que ce rapport ait du sens, il faut que l'unité donnée soit commune aux deux valeurs du rapport.

Enfin, la dernière fraction possible est celle qui exprime une notion de proportion entre deux valeurs de natures différentes. La fraction 3/5 se lit alors 3 pour 5. On l'utilise, par exemple, pour un rendement ou encore, pour désigner une proportion de personnes malades pour une certaine population.

Ces *quatre* significations principales - *rapport, opérateur, proportion et division* - peuvent être identifiées déjà pendant l'Antiquité, à travers plusieurs tâches, de nature arithmétique, géométrique, et aussi, souvent, de nature algébrique. De plus, les techniques restaient lourdes en raison de la persistance de l'usage des fractions unitaires. En effet, l'usage unique des fractions unitaires a constitué un obstacle historique à la définition des fractions comme un nombre ou un ensemble de classes d'équivalences. La représentation des fractions avec la barre qui sépare deux nombres naturels est assez tardive. L'usage du modèle parties/entier est lié à un besoin didactique très éloigné des problèmes réels dont les multiples aspects associés à la notion de fraction sont toujours porteurs.

Du point de vue de cette analyse historique, il est également important de signaler que, même si les fractions ont été utilisées depuis l'Antiquité souvent dans la résolution de problèmes assez élaborés, l'intégration de ce qu'on appelle à posteriori le concept de fraction, a pris beaucoup de temps. A cause de cette situation, nous constatons une rupture qui aboutit à l'adoption du système métrique décimal. Cette nouvelle approche s'est répandue à travers les textes didactiques et a abouti à la praxéologie actuelle autour des nombres rationnels.

Cet aperçu nous permet de comprendre le processus de construction historique du concept de fraction. Toutefois, la présentation des fractions à l'école ne suit pas leur développement historique, bien au contraire. La manière classique d'enseigner les fractions se fait souvent à partir de la définition d'une fraction comme un rapport entre les parts prises et l'entier, et ce, souvent à l'aide de figures. Une présentation devenue assez classique aussi a été celle de la définition d'une fraction a/b comme la division de 'a' pour 'b'. Cette approche, issue des phénomènes de transposition, est une construction conceptuelle assez complexe et tardive du point de vue de son développement historique et peut devenir un obstacle didactique important qui empêche les élèves de s'approcher de la signification réelle des fractions. L'étude des difficultés conceptuelles et des différentes représentations, données de la fraction par des élèves lors de l'apprentissage au primaire, peut nous aider à comprendre, d'un point de vue cognitif, ce qui se cache derrière ce genre de présentation à posteriori des nombres rationnels.

Aussi, connaissant la construction historique des différentes fractions possibles, nous avons pu analyser et comprendre au mieux nos différentes lectures concernant l'enseignement des fractions au CM1 et CM2. Il faudrait noter à ce sujet que seuls les deux premiers types de fractions exposés plus haut sont utilisés au cycle3, les deux suivants se rapprochant davantage de la proportionnalité.

1.3. Conclusion du chapitre 1

Du point de vue historique, l'utilisation des fractions est liée à des tâches de mensuration, comparaison et distribution. Chez les peuples de l'antiquité, nous constatons déjà le besoin d'exprimer des rapports non entiers, et cela souvent pour résoudre des problèmes de la vie courante. Nous voyons, parmi les égyptiens, les babyloniens, les indiens ou les chinois, le besoin de calculer et de représenter le résultat du partage dans le cas de collection d'objets et du rapport dans le cas de problèmes de mensuration et de calculs géométriques.

En effet, l'analyse épistémologique de nature historique, que nous avons déjà effectuée, a mis en évidence quatre significations différentes de la fraction. Ces quatre significations principales - rapport, opérateur, proportion et division - peuvent être identifiées déjà pendant l’Antiquité, à travers plusieurs tâches, de nature arithmétique, géométrique, et aussi, souvent, de nature algébrique.

2. Fraction : point de vue mathématique

Ce chapitre traite le concept de fraction du point de vue mathématique. Il aborde les caractéristiques mathématiques des fractions en présentant tout d’abord un rappel succinct de la théorie mathématique des fractions, puis les éléments fondamentaux qui aident les élèves à développer une compréhension des significations de la fraction, la définition mathématique de la fraction et enfin le développement du concept de fraction du point de vue mathématique.

2.1. Caractéristiques mathématiques des fractions

Nous allons présenter, dans la section qui vient, un rappel succinct de la théorie mathématique des fractions.

2.1.1. Rappel succinct mathématique des fractions

Nous allons ici dégager les propriétés mathématiques des fractions et en exposer les différents points de vue. Cette partie s'inspire largement de la thèse de Salim (1978).

Les fractions représentent une réalité mathématique que l’histoire a mis du temps à reconnaître et c’est seulement avec Weierstrass au XIX^{ème} siècle que la théorie complète sur le terrain formel des nombres « rationnels » et des nombres entiers a été mise en évidence, par l’élaboration de la théorie des couples.

Par ailleurs, si les fractions ont été inventées afin de résoudre des problèmes de mesure, il n’est pas du tout certain qu’elles correspondent à cette seule intuition. C’est pourtant de cette propriété que nous nous servons traditionnellement dans les premières situations utilisées pour enseigner les fractions.

Les ensemblistes construisent les couples de nombres entiers (N^2) à l’aide des procédés de dénombrement les plus primitifs. Ils procèdent ensuite à deux extensions de ce premier ensemble, l’une conduisant aux nombres entiers relatifs (Z) et l’autre aux nombres rationnels positifs, celles-ci sont suivies d’une autre extension qui conduit vers les nombres rationnels (Q).

Pour chaque opération l’addition et la multiplication, les éléments de l’ensemble N n’admettent pas d’élément symétrique: On rappelle ce qu’est un élément symétrique pour une loi de composition interne * : pour tout m ϵ N, si e est l’élément neutre de la loi *, m`est symétrique de m si m * m` = e. Il faut préciser le statut particulier de 0 qui est élément neutre pour l'addition et élément absorbant pour la multiplication.

C'est ainsi que, pour la multiplication, nous sommes conduits à nous occuper du problème qui nous concerne c'est-à-dire de l'extension de N vers Q^+.

Pour cette opération, une première extension de l'ensemble N consiste à symétriser chacun de ses éléments non nuls et à construire un nouvel ensemble dans lequel tout élément non nul a un symétrique pour la multiplication.

Les couples

Pratiquement, cela revient à définir des couples (m , n) tels que m ϵ N et n ϵ N* et à définir dans l'ensemble N×N* une relation d'équivalence, notée ~. Cette relation d'équivalence est par définition, réflexive, symétrique et transitive. L'ensemble des classes d'équivalence obtenu est appelé ensemble quotient de N par cette relation ~.

L'ensemble quotient de N par cette relation d'équivalence ~, est alors muni d'une première loi de composition interne, l'addition, et d'une seconde loi de composition interne, la multiplication, et appelé ensemble des rationnels positifs noté Q^+.

Une fraction est alors un couple de nombres (m, n) dont le second est non nul et ce couple définit un rationnel qu'on note m/n.

On passe alors aux fractions équivalentes, en posant que « m/n = m`/n` » signifie que le rationnel ainsi défini est le même pour les couples (m, n) et (m`, n`). Ces deux couples sont alors considérés comme deux représentants de la même classe d'équivalence et doivent vérifier par conséquent m × n` = m` × n. Parmi ces représentants d'une même classe de couples, il y a un couple particulier, m/n, où m et n sont des nombres premiers entre eux ; c'est cette fraction irréductible que nous prenons en général comme représentant de la classe d'équivalence. Par exemple, les couples (4, 10), (14, 35), (2, 5), … sont éléments d'une même classe d'équivalence, celle qui sera désignée par 2/5 puisque 2 et 5 sont premiers entre eux. Nous pouvons construire de nombreuses autres classes d'équivalence. Nous constatons que toute classe contient un seul couple (a, b) où a et b sont premiers entre eux.

Dans l'extension de N à Q^+, la loi de composition interne multiplication est associative, commutative, elle admet un élément neutre qui est 1 et chacun de ses éléments (sauf 0) admet un symétrique. On dit que Q^+ est un groupe commutatif pour la multiplication. C'est également un demi-groupe commutatif pour l'addition.

Nous arrivons à un nouveau type de nombres, constitué de couples sur lesquels les opérations d'addition, de multiplication et de division sont possibles, mais pour lesquels la soustraction n'est pas toujours définie.

On établit alors un isomorphisme entre l'ensemble N et la partie Q^+ définie par les éléments de la forme m/n lorsque n = 1. N apparaît alors comme un sous-ensemble de Q^+ dans lequel l'addition et la multiplication dans N coïncident avec l'addition et la multiplication dans Q^+.

Si nous écartons l'élément 0, il faut écrire que N* est un sous-ensemble de Q^{*+}

$N^* \subset Q^{*+}$

Les éléments de Q^{*+} s'appellent *les rationnels strictement positifs.*

Les nombres rationnels présentent un caractère de densité tel que, entre deux nombres rationnels, nous pouvons toujours placer une infinité de nouveaux nombres rationnels. L'exploitation de cette propriété permet de créer des situations mathématiques intéressantes pour l'enseignement des rationnels, mais cet aspect est rarement utilisé dans l'enseignement élémentaire.

Remarque : nous pouvons passer ensuite à Q en symétrisant Q+ relativement à l'addition.

Du point de vue de l'équation

En considérant la multiplication notée ×, nous pouvons résumer les choses de la façon suivante :

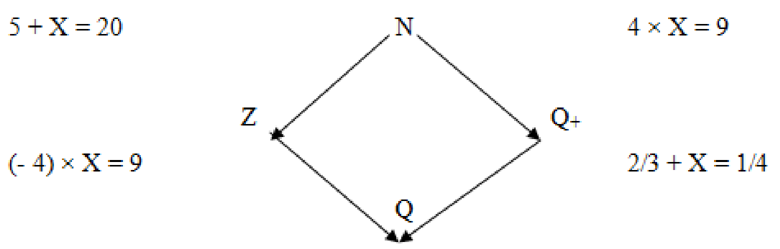


FIGURE 5 – PRESENTATION DES PROPRIETES MATHEMATIQUES DES FRACTIONS DU POINT DE VUE DE L'EQUATION.

Ainsi l'équation $5.x = 20$ a une solution dans N qui est 4. Par contre l'équation $4x = 9$ n'a pas de solution dans N. Elle en a une dans Q^+, c'est $x = 9/4$.

Nous définissons alors une extension de N en introduisant de nouveaux nombres qui sont les solutions des équations de la forme $a . x = b$ même si b n'est pas un multiple de a. Dans ce nouvel ensemble, nous énonçons qu'une addition et une multiplication ont respectivement les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans N (associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, existence d'un symétrique, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

Ce bref rappel réalisé, il est nécessaire de remarquer que nous n'employons guère la théorie mathématique des nombres rationnels pour enseigner les fractions à l'école primaire. Ce que nous utilisons le plus fréquemment c'est *la notion d'opérateur* et *la notion de quantité fractionnaire.*

L'opérateur fractionnaire le plus simple est introduit comme équivalent à une opération de division inverse de la multiplication :

(×1/n) équivalent à (: n) et inverse de (× n).

Un opérateur fractionnaire plus complexe peut être introduit comme équivalent à la composition de deux opérations successives de division et de multiplication. Enfin, la quantité fractionnaire est le résultat de l'application à l'unité de l'opérateur fractionnaire (3/4 de gâteau). Ainsi le tableau suivant représente la relation d'inversion entre l'opérateur (× n) et l'opérateur (: n).

TABLEAU 2 – LA RELATION D'INVERSION ENTRE L'OPERATEUR (×N) ET L'OPERATEUR (: N).

× n	1	2	3	a	: n
	3	6	9	b	

b = n× a et a = b ÷ n avec n ϵ N

Cette façon de présenter les choses autoriserait à faire le lien entre la théorie mathématique des couples mais elle n'est pas exploitée habituellement dans ce sens à l'école élémentaire.

Le seul aspect qui soit exploité, c'est le caractère inverse de deux opérateurs, en effet, soit A et B les ensembles de départ et d'arrivée, alors, l'opérateur de gauche à droite $\xrightarrow{\times 3}$ et l'opérateur de droite à gauche qui est fractionnaire $\xleftarrow{\times \frac{1}{3}}$ sont inverses l'un de l'autre.

TABLEAU 3– LE CARACTERE INVERSE DE L'OPERATEUR $\xrightarrow{\times 3}$ ET L'OPERATEUR $\xleftarrow{\times \frac{1}{3}}$ (SALIM, 1978, P.24-25).

A	$\xleftarrow{\times \frac{1}{3}}$	B
1 2 3 4 . .		3 6 9 12 . .

Bien entendu, la composition de ces deux bijections donne l'application identique :

$A \xrightarrow{f} B \qquad B \xrightarrow{f^{-1}} A$

$f \times f^{-1} = 1$

Ou encore, multiplier par n puis diviser par n revient à multiplier par 1 (coefficient identique).

2.1.2. Eléments fondamentaux liés aux fractions, notions qui aident les élèves à développer une compréhension de leurs significations

Dans les nombres rationnels, il existe plusieurs concepts qui aident les élèves à développer une compréhension des significations de ces nombres (Lamon, 1996; Pothier et Sawada, 1983). Il s'agit notamment de Partitionnement, Unitarisme ou concept d'Unité, notion de Quantité, notion d'Equivalence, Comparaison et Ordre des fractions, Densité et Taille des fractions et Mesures communes pour ajouter ou soustraire des fractions (Mack, 1995).

En commençant par la notion du Partitionnement, les autres concepts liés aux nombres rationnels -fractions- seront discutés, l'un après l'autre, dans les sections suivantes.

2.1.2.1. Notion de Partitionnement

Le Partitionnement implique l'acte physique de prendre une quantité déterminée et de la diviser également en un certain nombre de pièces, comme le partage de deux pizzas entre quatre personnes. Des éducateurs en mathématiques et chercheurs s'entendent pour dire le lien naturel existant entre l'introduction des nombres entiers et des fractions par les activités du partage équitable et du partitionnement (Lamon, 1993 ; Streefland, 1993). De plus, Lamon (1999) souligne que les fractions sont formées par partitionnement ; elle le considère comme un élément important pour l'aide à la compréhension de nombre rationnel. Ainsi, le processus est fondamental à la construction des concepts et des opérations sur les nombres rationnels. Par exemple, à la suite des activités du partitionnement, les enfants se rendent compte qu'il existe une relation entre le nombre de partitions faites et la taille des parties. De même, Kieren

(1980) a émis cette hypothèse, et d'autres chercheurs sont d’accord avec lui : le partitionnement joue un rôle similaire dans le développement de nombre rationnel que le comptage en joue pour les concepts et les opérations sur les nombres entiers (Carpenter, Fennema et Romberg, 1993). Les stratégies de partitionnement se développent simultanément avec la compréhension de la Partie-tout des nombres rationnels. En même temps, celles-ci sont à la base de l'apprentissage des autres significations des nombres rationnels comme Behr et al. (1983) l’indiquent « they are basic to learning other sub-constructs of rational numbers » (p.100).

Selon Pothier et Sawada (1983), la possibilité de partitionner ou de diviser un objet ou un ensemble en parties égales, se développe progressivement. Ils ont proposé une théorie en cinq niveaux pour le développement, chez les enfants, des stratégies de partitionnement. Cette théorie a été développée par une série d'interactions cliniques avec 43 enfants, ceux-ci ont accompli des tâches qui ont été conçues pour révéler leurs capacités de partitionnement. Pour ce faire, la théorie a mis à disposition l’utilisation de trois constructions mathématiques pour aider les chercheurs à analyser les comportements de partitionnement :

(a) pair / impair, (b) premier / composite et (c) facteur / multiple.

De là, cinq niveaux de partitionnement ont été trouvés, ils étaient les suivants :

(a) Partage, (b) Réduire de moitié algorithmique, (c) Régularité, (d) Bizarrerie, (e) la composition.

Au niveau de partage, les enfants peuvent généralement partitionner régions rectangulaires et circulaires pour montrer les moitiés et quarts. Toutefois, ils peuvent faire des erreurs telles que la fabrication de pièces inégales, faisant un nombre incorrect d’actions ou de ne pas utiliser la région entière. Ces enfants construisent des pièces sans tenir compte de la taille et quelle devrait être la part équitable. Au deuxième niveau, appelé réduction de moitié algorithmique, les enfants sont en mesure de partitionner des régions rectangulaires et circulaires en nombre de pièces de la puissance de 2. Cela est accompli en réduisant de moitié les pièces dans des partitions successives. Comme pour le niveau de partage, cette procédure n'aboutit pas toujours en pièces de tailles égales. Les enfants, qui tiennent compte de la taille des pièces en évaluant les tailles par rapport à leur égalité, peuvent être opérant au troisième niveau appelé régularité. A ce niveau, les enfants comprennent et sont conscients de la création des sections équivalentes, ils peuvent partitionner les régions en nombres pairs et celles qui ne sont pas des puissances de 2. Le quatrième niveau, nommé bizarrerie, est constitué par les enfants qui reconnaissent le processus de réduction de moitié comme non efficace pour les fractions avec des dénominateurs impairs. En effet, cela impliquerait le besoin de couper quelque chose en neuf parties égales. C'est ainsi que ceux-ci évitent de commencer par les moitiés lorsque la quantité ne peut pas facilement être atteinte en partant d'une moitié. Pour le dernier niveau impliqué dans l'étude, les chercheurs n'ont pas pu faire d'observation de l'élève car il n'y a eu aucun fonctionnement. Ils ont déduit, que dans ce cinquième niveau, la composition serait à réaliser par des enfants plus âgés. Les enfants qui ont atteint le cinquième niveau sont capables d'utiliser leurs stratégies de partitionnement pour trouver les raccourcis pour couper avec succès des modèles de région en un nombre impair composite. Pour partitionner une région en neuf parties, ils peuvent d'abord faire des tiers, ils sauraient alors diviser davantage les tiers en tiers en résultant à neuf parts égales. Les enfants qui utilisent cet algorithme multiplicatif sont capables de construire une fraction de l'unité.

Pothier et Sawada (1990) pensent que l'utilisation de modèles pré-partitionnés ne facilite pas la représentation chez les élèves des fractions non symboliques. Ceci posé, il est important que les élèves fassent eux-mêmes la répartition, parce que la répartition joue un rôle essentiel dans la compréhension des fractions. Lorsque ceux-ci travaillent avec des formes pré-partitionnées, ils ne se concentrent pas sur les propriétés géométriques de l'unité ou des parties. Par conséquent, les élèves doivent s'engager dans les tâches dans lesquelles ils réaliseront effectivement des partitions. Les tâches appropriées varieront en fonction de l'unité comme étant partitionnée. Pothier et Sawada identifient cinq types distincts d'unités qui sont :

(a) des objets discrets, par exemple, les 2/3 des 12 capsules de bouteilles

(b) des ensembles discrets d'objets avec des éléments divisibles, par exemple, 3 personnes partageant 6 biscuits

(c) des ensembles discrets avec des sous-ensembles séparables, par exemple, 5 personnes partageant 8 paquets de gomme

(d) de la quantité continue de sous-ensembles séparables, par exemple, 4 personnes dans une barre de chocolat pré-divisée

(e) la quantité continue, par exemple, les huit personnes partageant une pizza.

Enfin, Pothier et Sawada (1990) suggèrent que les expériences avec le partitionnement aident les élèves à construire la signification par rapport aux concepts de fraction. Ils suggèrent également que cela facilite la résolution des problèmes de la fraction et aide les enfants à vérifier les calculs symboliques avec des fractions. De plus, un développement plus efficace des stratégies de partitionnement est nécessaire pour conceptualiser d'autres notions, comme le concept d'Unité ou d'Unitarisme. Dans la section suivante, nous allons aborder le concept d'Unité ou Unitarisme.

2.1.2.2. Notion d'Unité ou Unitarisme

Comme pour le cas des nombres entiers, l'unitarisme joue également un rôle essentiel dans la compréhension des nombres rationnels. L'Unitarisme est le processus de regroupement de la même quantité entière de différentes façons (Lamon, 2005). En exemple, un groupe de 3/4 peut être regroupé comme un seul groupe de 3/4 ou trois groupes de 1/4. L'Unitarisme implique un processus en trois étapes :

La première étape est de trouver une fraction unitaire ou une fraction de numérateur 1. Si nous présentons la fraction 5/6, celle-ci peut être divisée en cinq groupes de 1/6, donc, le résultat représenté par la fraction 1/6 est une fraction unitaire.

La deuxième étape consiste à itérer continuellement la fraction unitaire, par l'utilisation de la fraction 1/6 qui peut être réitérée pour générer 2/6, 3/6, 4/6, etc.

La dernière étape est l'élaboration d'une unité composite de 1. Lorsque 1/6 est itéré jusqu'à 6/6, l'unité entière est composée et peut être alors considérée comme étant un groupe de 6/6 ou six groupes de 1/6 (Lamon, 1996).

Lamon discute des nouveaux types d'unités rencontrées par les enfants lorsqu'ils commencent à étudier des fractions, une unité peut être un objet unique, un groupe de plusieurs objets ou une partie d'un objet. Ces nouveaux types d'unités peuvent être la source de malentendus courants pour les enfants, aussi, lorsque nous travaillons avec eux les fractions, le développement d'une compréhension approfondie du tout ou d'une unité est critique.

En effet, cette compréhension inclut le fait que l'unité peut être constituée de plus d'un objet ou de plusieurs objets emballés comme un seul objet. C'est complexe car lorsqu'une telle unité est partitionnée, un nouveau type de nombre fait référence à la partie fractionnaire. Prenons un exemple, lorsqu'un paquet de trois biscuits est divisé en trois parties égales, le résultat est un biscuit dans chaque partie ; donc un biscuit représente 1/3 de l'unité d'origine. Cependant, les enfants peuvent voir ce biscuit comme le tout. S'il y avait deux biscuits dans l'unité, 1/3 représentera encore une autre quantité, de plus, un biscuit peut représenter 1/2 d'un paquet de deux biscuits, ou un quart d'un paquet de quatre biscuits. Ainsi, chaque fraction peut être représentée par des fractions équivalentes, ce qui signifie qu'il existe d'autres noms à donner pour la même quantité.

Une application importante de la compréhension du concept de l'unité se produit dans l'interprétation du reste dans un problème de division en quotités. Lamon donne un exemple d'un magasin de tartes ; dans cette boutique de tartes, une tranche de tarte est 1/3 d'une tarte. S'il y a 4 demi-tartes, combien de tranches de la tarte sont là ? Dans cette situation - et d'autres situations de division en quotités - le reste est comparé au diviseur (opérateur). Ainsi, le diviseur (l'opérateur ou la fraction) 1/3 devient l'unité. Par conséquent, la réponse de 12 1/2signifie qu'il y a 12 1/2 des tranches de la tarte. La demi-tranche est, en effet, un sixième de toute une tarte. Lamon souligne l'importance pour les enfants d'apprendre que, pour chaque problème, l'unité peut être différente. Ainsi ils doivent toujours identifier l'unité avant de résoudre le problème.

Lamon (2002) se réfère au terme unifier comme un « processus de construction mentale de morceaux de tailles différentes aux termes de laquelle à penser sur un produit donné » (p. 80). Ainsi, nous pouvons dire qu'il existe plusieurs façons d'unifier 24 canettes de soda, elles pourraient être « fragmentées » comme 24 canettes individuelles, 1 caisse de 24 canettes, 2 packs de 12 canettes ou 4 packs de 6 canettes. Cette capacité, à ré-conceptualiser des quantités de différentes façons, ajoute de la souplesse et de l'utilité à la connaissance chez l'élève. Lorsque les élèves sont en mesure d'unifier, ils n'ont plus besoin de mémoriser les règles pour trouver des fractions équivalentes. L'Unitarisme souligne également qu'une fraction est un nombre, il désigne une quantité relative à la même quantité indépendamment de la taille des morceaux.

De plus, le contexte d'un problème donnerait une aide aux élèves pour déterminer l'unité (Lamon, 1999). Prenons un exemple impliquant une situation de deux pizzas, chacune coupée en tranches ; si nous posons la question de savoir de quelle unité on parle, est-ce que ce sera la pizza en entier l'unité sera 1 pizza, ou les morceaux découpés, l'unité sera 2 pizzas ? Les unités ne sont pas toujours définies de façon explicite, cependant, les élèves peuvent être parfois invités à déterminer l'unité donnée comme une partie du tout : pour donner trois triangles qui représentent 3/4, les élèves auraient besoin de déterminer que 4 triangles représentent la totalité ou l'unité.

Lamon (2002) rapporte que les élèves de quatrième année du primaire, qui ont appris à unifier avec des fractions du type partie-tout, ont été en mesure d'effectuer des opérations avec des fractions sans avoir reçu préalablement les règles de fonctionnement. Il affirme que « les élèves qui développent des processus de raisonnement forts basés sur unitarisme dépassent ceux qui ont eu plusieurs années de régime à base de l'instruction, à la fois dans leur connaissance conceptuelle et dans leur aptitude à effectuer du calcul avec des fractions » (p.85).

En effet, les élèves qui peuvent unifier facilement, sont en mesure « d'appliquer des compositions, décompositions et les principes de conversion sur les quantités » (Post et al., 1993, p. 331). Présentons maintenant la situation suivante :

Si neuf bouteilles de lait représentent les 3/4 d’un paquet du lait et s’il était demandé de déterminer le nombre de bouteilles de lait qui sont dans 1 5/6 des paquets, les élèves doivent, d’abord, comprendre que les neuf tranches composent une unité de 3/4 d'un paquet du lait.

Afin de résoudre le problème, les 3/4 doivent être ensuite décomposés en trois groupes de 1/4, donc neuf doit aussi être décomposé en trois groupes.

Le résultat de trois groupes de trois, ou trois bouteilles du lait dans chaque 1/4, est alors itéré jusqu'à obtenir un paquet entier.

Cette unité entière ensuite doit être convertie à partir d'une unité composite de 1/4 à une unité composite de 1/6 afin de déterminer combien de bouteilles du lait sont dans 1 5/6 des paquets.

Ainsi, les élèves doivent développer des stratégies d’unitarisme tôt dans leur cursus pour les aider à développer d'autres concepts des nombres rationnels, comme la notion de Quantité discuté plus bas. Il est temps pour nous de vous la présenter.

2.1.2.3. Notion de Quantité

Après avoir compris que les fractions sont des nombres, qu’elles expriment une relation, et que les idées et les procédures de nombres entiers peuvent ne pas être valables avec les fractions, nous pouvons affirmer que les fractions en tant que nombres sont au cœur d'une compréhension quantitative du nombre rationnel et aussi au cœur de l’idée que les fractions désignent une quantité et peuvent être comparées et classées. Le concept de l'unité, déjà discuté, est un élément essentiel de cette quantité, « L’unité est le contexte qui donne un sens à la quantité représentée » (Hiebert et Behr, 1988, p. 3)

Behr et Post (1992) réalisent une discussion sur le problème suivant, posé aux élèves, à savoir 12/13 + 7/8. Ils ont conjecturé sur ce que les élèves ne comprennent pas et apparemment, les élèves ne se rendent pas compte que si les deux nombres rationnels ajoutés sont proches de 1, de sorte que la somme sera proche de 2, ils ne peuvent pas se rendre compte que les fractions ont une taille. S'ils ne prennent pas en compte que les fractions ont une taille, ils ne peuvent pas être en mesure de déterminer cette taille. Il semble que les élèves appliquent simplement des procédures par cœur pour l'addition (incorrectement). Ils ne semblent pas avoir un bon sens de ce qui serait une réponse raisonnable à ce problème. L'analyse des réponses des élèves suggère que ceux-ci ne font pas de distinction entre les opérations sur les nombres entiers et celles sur les fractions.

Les problèmes mentionnés dans le paragraphe précédent sont liés à une compréhension quantitative des nombres rationnels. Cela implique de prendre en compte que ces derniers sont des nombres et qu'ils peuvent être exprimés de plusieurs façons. Un autre aspect de cette compréhension quantitative serait de rendre compte que les rationnels peuvent être ordonnés, mais les procédures pour le faire sont différentes et plus complexes que pour ordonner des entiers. Le traitement, avec ces aspects des nombres rationnels, nécessite de réaliser que le rapport entre le numérateur et le dénominateur - et non pas leurs grandeurs absolues indépendamment - définit la signification d'une fraction. Afin de comparer 1/3 et 5/8, chaque fraction doit être considérée comme une seule quantité et non comme deux nombres distincts. Les idées des nombres entiers interférant souvent avec cela, un élève peut indiquer que 5/8 est supérieure à 1/3, car 5 et 8 sont supérieures à 1 et 3.

Ainsi, la comparaison des fractions peut construire une compréhension quantitative des fractions. Un élève qui comprend les propriétés de l'égalité et de la transitivité peut les appliquer à la comparaison des fractions. Post et al. (1986) expliquent que lorsque nous comparons 3/4 et 7/8, un élève qui sait que 3/4 est équivalente à 6/8 serait en mesure de conclure que 3/4 est inférieure à 7/8 puisque 6/8 est moins de 7/8 et 3/4 est une fraction équivalente à 6/8.

En effet, une compréhension bien construite du concept de l'Unité et de celui de la Quantité peut aider les élèves à développer d'autres concepts des nombres rationnels, comme la notion d'Equivalence. Dans la section suivante, nous allons aborder la notion d'Equivalence.

2.1.2.4. Notion d'Equivalence

La notion d'Équivalence est liée à la notion de Quantité, les Idées d'équivalence sont « l'une des idées mathématiques les plus importantes et abstraites que les enfants de l'école élémentaire ne rencontrent jamais » (Ni, 2001, p. 400). Kamii et Clark (1995) notent « les chercheurs ont généralement considéré la connaissance de fractions équivalentes comme la capacité d'appeler le même nombre par des noms différents, la capacité d'ignorer ou d'imaginer les lignes de séparation, et / ou une manifestation de la pensée souple » (P. 368-369). En effet, l'équivalence doit être enseignée à travers une unité de nombre rationnel au lieu d'être traitée comme un sujet isolé. Cependant, il est encore difficile de savoir quand l'équivalence doit être enseignée et comment (Kamii et Clark, 1995).

La présentation de l'équivalence, dans le cadre des rapports, souligne non seulement le caractère multiplicatif et additif des fractions équivalentes, mais aussi, elle fournit aux élèves une base pour développer des rapports plus complexes comme celle de la pensée proportionnelle (Post et al., 1985).

Kieren (1992) identifie l'équivalence comme un concept important car il constitue la base pour les opérations, en particulier, pour l'addition et la soustraction des nombres rationnels.

Lorsqu'une zone - ou une longueur - est divisée en pièces de tailles égales et si chaque nouvelle pièce est encore divisée en petites pièces de tailles égales, des fractions équivalentes peuvent être nommées. Considérons une tarte coupée en 4 pièces, une tranche serait un quart de la tarte. Maintenant, pensons à la même tarte coupée en 8 morceaux, comme si chacune des 4 pièces a été coupée en deux ; une pièce serait alors un huitième de la tarte. Deux pièces de 1/8 serait de la même taille qu'une pièce de la ¼ ; ceci illustre le fait que 1/4 et 2/8 sont équivalentes. Les expériences de partitionnements tels que celles-ci aident les enfants à développer des idées d'équivalence d'une manière significative pour eux.

Enfin, la capacité de penser de manière flexible à des situations d'équivalence est nécessaire pour non seulement avoir du succès avec l'équivalence mais aussi avec la comparaison et l'ordre des fractions (Post et al., 1985). Dans la section suivante, nous allons aborder les notions de Comparaison et Ordre des fractions.

2.1.2.5. Notions de Comparaison et d'Ordre des fractions

L'Ordre des fractions est important pour comprendre les fractions comme des quantités (Post et al., 1993). Ainsi l'ordre exige une coordination de la taille relative et / ou absolue, de deux fractions ou plus, afin de déterminer leur ordre. Lors des exercices pour comparer et ordonner un ensemble de fractions, les élèves ont entre les mains la méthode du dénominateur commun qui leur a déjà, généralement, été présentée. Lorsque les fractions ont des dénominateurs communs, dans ce cas la fraction qui a le numérateur le plus grand sera la fraction la plus grande ; par contre, lorsque les numérateurs sont les mêmes, la fraction ayant le plus grand dénominateur est inférieure à l'autre. Behr, Wachsmuth, Post et Lesh (1984) suggèrent trois stratégies différentes pour comparer des fractions, à savoir l'application de rapports, le point de référence et les stratégies manipulatrices.

L'application de la stratégie des rapports implique de comprendre la taille relative de chaque fraction. Par exemple, lorsque nous comparons 5/6 et 2/3, « les enfants devraient éventuellement devenir capables de porter un jugement basé sur la relation entre 5 et 6 et entre 2 et 3. Ce jugement exige qu'ils observent que 5/6 est relativement plus grande que 2/3 indépendamment de l'unité commune choisie. » (Post et al., 1985, p. 21). Ceci peut être observé en remarquant que dans chaque fraction, une seule pièce est absente. En 5/6, une pièce de taille un sixième est manquante afin d'avoir une unité, où en 2/3 une pièce de la taille un tiers est manquante. Puisqu'un sixième est inférieur à un tiers, alors 5/6 est plus grande. En ce sens, l'application de la stratégie des rapports intègre la définition de partie-tout de fractions.

Dans la stratégie du point de référence, les élèves doivent se référer à une fraction de référence pour comparer deux ou plusieurs fractions. Cette stratégie est utile lorsque ni le numérateur, ni le dénominateur ne sont les mêmes dans chaque fraction. Dans cette stratégie, les fractions sont comparées à un troisième point de référence telle que moitié ou 1. Par exemple, 1/3 est inférieure à 3/5 parce que 1/3 est inférieur à 1/2, tandis que 3/5 est supérieurs à 1/2. Dans cette stratégie, la taille exacte de chaque fraction n'est pas nécessaire, mais, nous avons besoin de savoir seulement si la fraction est supérieure ou inférieure à la moitié.

La stratégie manipulatrice est semblable pour trouver un dénominateur commun ; elle est faite uniquement à l'aide d'un manipulateur. Post, Wachsmuth, Lesh et Behr (1985) illustrent la manière dont les élèves peuvent utiliser cette stratégie avec deux compteurs de couleur. Si les élèves sont invités à comparer les 5/6 et 2/3, ils peuvent faire un groupe de 5/6 en disposant six compteurs où cinq sont rouge et le sixième est jaune. Ensuite, un deuxième ensemble peut être constitué de deux compteurs rouges et un jaune pour 2/3. Alors, la stratégie manipulatrice exigerait que chaque groupe se compose du même nombre de compteurs. Dans ce cas, un autre groupe de 2/3 devrait être ajouté au deuxième groupe de sorte que chaque groupe en ait maintenant six. Cela montre que le dénominateur commun est de six. Le premier groupe aurait encore cinq compteurs rouges par rapport aux quatre compteurs rouges dans le deuxième groupe et avec deux groupes représentant les fractions d'origine, cela nous montrerait que 5/6 est plus grande que 2/3. Post et al. (1985) soulignent que les élèves qui utilisent du matériel de manipulation devraient éventuellement élaborer des stratégies afin que celui-ci ne soit plus nécessaire.

Chez les élèves qui ne comprennent pas la nature conceptuellement multiplicative des fractions, nous constatons qu'ils vont souvent trop généraliser leurs connaissances des nombres entiers pour comparer des fractions. Ainsi, Behr, Wachsmuth, Postes et Lesh (1984) ont découvert deux stratégies incorrectes utilisées par les enfants :

- La première est la stratégie additive, elle consiste à comparer des fractions par addition des numérateurs entre eux et des dénominateurs entre eux pour créer une nouvelle fraction. Dans leur étude, un élève a déclaré que « trois quarts égalent sept huitièmes parce que trois plus quatre égalent sept et quatre plus quatre égalent huit » (p. 331).

- La deuxième stratégie est celle que Behr et al. (1984) définissent comme une stratégie de domination du nombre entier, celle-ci consiste à comparer deux fractions en comparant les numérateurs et les dénominateurs séparément. Un élève, qui utilise cette stratégie pour comparer trois quarts et cinq huitièmes, dira que trois quarts est plus petit parce que trois est inférieur à cinq et quatre est inférieur à huit.

Lorsque nous comparons et ordonnons des fractions, les caractéristiques liées à la densité et à la taille des fractions sont importantes à considérer. Nous allons, au-dessous, aborder les notions de la densité et de la taille des fractions.

2.1.2.6. La densité et la taille des fractions

La propriété de densité dit tout simplement qu'il existe un nombre infini de fractions entre deux fractions et contrairement aux nombres entiers, il n'y a pas de nombre suivant, cette propriété de densité peut être une source de confusion pour certains élèves. Un exemple : les élèves peuvent penser qu'il n'existe pas de fraction entre 1/3 et 1/4 parce que les dénominateurs sont des nombres consécutifs. Une stratégie pour trouver des valeurs entre deux fractions est de partitionner l'intervalle, donc il y a un dénominateur commun pour les fractions données. Aussi, pour 1/3 et 1/4, l'intervalle peut être divisé en 12 ou 24 parties égales, il en résulte des fractions qui sont équidistants dans l'intervalle.

La comparaison et l'ordre des fractions deviennent difficiles, parce que les fractions ne peuvent être trouvées en utilisant les procédures de comptage, comme avec les nombres entiers. Selon Post et al. (1985), « The density of the rational numbers implies the counterintuitive notion that there is no 'next' fraction » (p. 33). Cela nous dit en effet que la densité des nombres rationnels implique la notion paradoxale et qu'il n'existe pas de fraction suivante ou consécutive. Les élèves qui comprennent l'idée de la densité des fractions sont capables de développer des compétences d'estimation ou d'approximation, qui « sont importantes dans l'évaluation du caractère raisonnable des résultats de calcul impliquant des fractions » (Sowder, Bezuk, et Sowder, 1993, cité par Tobias, 2009, p. 29).

De plus, les nombres rationnels ont une caractéristique différente des nombres entiers : les nombres rationnels ont des tailles relatives et absolues. Autrement dit, ceux-ci peuvent être comparés par rapport à leur relation à l'unité ou à l'ensemble qui les définit ; cette importance relative dépend de la taille de l'ensemble ou du tout. Cela nous témoigne également de l'importance de l'unité dont il était question dans la section précédente. Lorsque nous comparons des grandeurs relatives, il peut être constaté que la moitié d'une petite tarte est, en effet, moins d'un tiers d'un plus gros gâteau. Bien que les comparaisons des grandeurs relatives puissent être faites avec des parties d'ensemble de taille différente, il est impératif que les comparaisons de grandeur absolue soient faites par rapport à une quantité ou une unité commune. Autrement dit, les quantités étant comparées, elles doivent être fondées sur un tout de la même taille. Dans la section qui vient, nous abordons la définition de la fraction.

2.1.3. Définitions mathématiques de la fraction

2.1.3.1. Deux termes : nombre rationnel et fraction

Dans la littérature, les termes fraction et nombre rationnel sont souvent utilisés indifféremment pour désigner une entité mathématique constituée d'un numérateur et d'un dénominateur. Afin de clarifier un peu plus ces termes, nous empruntons à Stella Baruk (1992) les définitions qu'elle en donne dans son Dictionnaire de mathématiques élémentaires :

> « Avant 1980, le mot fraction faisait référence à un nombre qui a été «rompu» en parts égales, par exemple 3/4. Le terme amène également la notion d'opérateur parce qu'il permet de désigner une partie d'une quantité. Après cette date, les programmes scolaires français, entre autres, ont limité le terme fraction à une simple question scripturaire, retirant ainsi la notion numérique rattachée à la fraction. Ainsi, la fraction n'est qu'une manière d'écrire la relation existant entre un numérateur et un dénominateur. Cette forme d'écriture laisse plus de latitude pour faire émerger le concept de nombre rationnel. La règle d'écriture la plus souvent adoptée est a/b. Si a et b désignent deux entiers, et que b soit non-nul, le nombre obtenu à partir du quotient de a et de b s'appelle un nombre rationnel ou fraction ».

De plus, soit a un entier quelconque et b un entier non nul : le couple (a ; b), écrit sous la forme a/b, s'appelle la fraction de numérateur a et de numérateur b.

Cette fraction représente le quotient exact de a par b, que l'on note aussi a/b, on a donc, par définition : $b \times a/b = a/b \times b = a$

On appelle nombre rationnel tout nombre que nous pouvons obtenir comme quotient exact d'un entier relatif par un entier relatif non nul.

Il faut bien noter que la même notation a/b est utilisée pour désigner deux choses différentes :

Le couple (a ; b).

Le Quotient exact de a par b, dont a et b entiers relatifs et $b \neq 0$).

Par exemple, lorsque nous écrivons 10/4, il faut préciser qu'il s'agit de la fraction 10/4 (le couple (10 ; 4)) ou du rationnel 10/4 (qui est égal à 2,5). Le rationnel 10/4 est égal au rationnel 5/2 ; la fraction 10/4 n'est pas égale à la fraction 5/2 (puisque les couples (10 ; 4) et (5; 2) sont distincts.

Pour éviter cet inconvénient, nous conviendrons toujours que, dans les calculs, a/b désigne le nombre rationnel a/b (quotient exacte de a par b). Ainsi, nous pourrons écrire :
10/4 = 5/2 = 2,5

Remarque : il faut toujours distinguer entre les deux cas suivants :

- Les deux nombres a et b sont des entiers naturels, avec b non nul. Ici, l'écriture a/b est appelée une fraction, dont a est le numérateur et b le dénominateur.
- Les deux nombres a et b sont des entiers relatifs, avec b non nul. Dans ce cas précis les nombres représentés par ces fractions de la forme a/b sont appelés nombres rationnels.

Aussi, il est important de retenir la distinction entre fraction a/b et nombre rationnel. Comme nous l'avons déjà présenté, la fraction a/b est une écriture du quotient de la division de a sur b, où a est le numérateur de la fraction et b le dénominateur, alors que le rationnel a/b est un nombre et il n'a ni numérateur ni dénominateur. Ainsi, la fraction est une notation pour représenter un nombre rationnel. Une fraction se compose donc de deux nombres entiers naturels, a et b, séparés par une barre horizontale, alors a/b. Le chiffre du haut (a) s'appelle numérateur et le chiffre du bas (b) s'appelle dénominateur. Le dénominateur (b) est toujours différent du zéro (Corrieu, 1999).

Un nombre rationnel peut s'exprimer à l'aide de plusieurs écritures :

- des écritures fractionnaires diverses, 3/2 ou 6/4 avec un numérateur et un dénominateur
- éventuellement une écriture à virgule (1,5)
- des décompositions comme 1 + 5/10 etc…

Cependant, de manière abusive, nous identifions fraction et nombre rationnel.

Prenons cet exemple: soit l'ensemble des nombres rationnels représenté par la lettre Q nous avons :

5 appartient à Q car 5= 5/1 1,5 appartient à Q car 1,5= 3/2

2,25 appartient à Q car 2,25= 225/100

- 5 /7 appartient à Q car il est le quotient de deux entiers (-5 et 7)

2,1/5 appartient à Q car 2,1/5 = 21/50, ici l'écriture 2,1/5 n'est pas une fraction car 2,1 n'est pas un entier. Cependant, dans ce cas, nous parlons d'écriture fractionnaire.

Tous les nombres relatifs Z peuvent s'exprimer sous la forme d'une fraction 1/Z : tous les nombres relatifs sont donc des nombres rationnels. On écrit: $N \subset Z \subset Q$, ce qui se lit N est inclus dans Z qui est inclus dans Q.

De plus, il est nécessaire de situer la fraction par rapport aux nombres rationnels puisque le sujet de cette thèse n'est pas les fractions elles-mêmes en tant que notation, mais les nombres rationnels exprimés sous la forme de fractions. Un même nombre rationnel peut s'exprimer sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage. Par exemple, les expressions 1/2, 0,5, 4/8, 0,50 et 5/10 représentent toutes le même nombre rationnel et chacune peut être utilisée pour le désigner. Un nombre rationnel est donc une classe de fractions équivalentes.

Pour cette recherche, nous ne nous intéresserons qu'au nombre rationnel exprimé sous la forme d'une fraction.

A l'école élémentaire, nous parlons non pas de nombres rationnels mais des fractions et seulement en se limitant bien souvent uniquement au sens du fractionnement de l'unité. « Au cycle 3, une toute première approche des fractions est entreprise, dans le but d'aider à la compréhension des nombres décimaux » (p.12). (Documents d'application). La connaissance des fractions, en particulier celles des fractions décimales, s'avère donc indispensable pour donner du sens à la comparaison des nombres décimaux. Sans cette connaissance, la comparaison ne peut reposer que sur des règles apprises sans signification et donc celles-ci sont rarement efficaces.

De plus, les documents d'application indiquent :

« Le travail sur les fractions est essentiellement destiné à donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ou sommes de fractions décimales » (p.21). Ces fractions décimales sont introduites à partir des fractions usuelles, telles que le demi et le quart, utilisées dans la vie courante des élèves ; ces dernières pourront leur servir d'appui pour découvrir les nouveaux nombres désignés par les fractions. »

2.1.3.2. Définition du nombre rationnel

Le nombre rationnel est un nombre obtenu à partir du quotient de a et b où a et b sont des entiers et b est différent de 0 (de Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier, 1996). Un nombre rationnel peut être défini comme « un nombre réel qui peut être mis sous la forme d'une fraction commune a / b où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0 » (Baroody et Coslick, 1998). Ainsi, nous rencontrons parfois des nombres que l'on peut obtenir comme quotient exact d'un entier relatif a par un entier relatif non nul b. Ces nombres s'appellent « nombres rationnels » (ou plus simplement: les rationnels). Ils sont représentés par des fractions :

TABLEAU 4– LE NOMBRE RATIONNEL.

Nombre rationnel	Exemples des fractions représentant
L'entier relatif -5	$\frac{-5}{1}$; $\frac{-10}{2}$; $\frac{-30}{6}$; $\frac{5}{-1}$;
Le décimal relatif 2,5	$\frac{5}{2}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{25}{10}$; $\frac{-5}{-2}$;
Le rationnel $\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$; $\frac{14}{10}$; $\frac{70}{50}$; $\frac{-7}{-5}$;

Le concept de nombre rationnel est l'un des concepts les plus importants que les enfants ont besoin d'apprendre au cours des années scolaires du primaire (Behr et Post, 1992). Une bonne compréhension des nombres rationnels fournit une base pertinente pour les opérations algébriques dans les cours dans les années qui suivent (Post, Behr, et Lesh, 1982). Toutefois, dans le même temps, la recherche a largement démontré aussi des difficultés d'apprentissage chez les enfants de la notion de nombre rationnel (Cramer, Behr, Post, et Lesh, 1997 ; Lamon, 2007 ; Smith, 2002).

Les nombres rationnels sont une branche de l'arbre de la hiérarchie du nombre réel où, les nombres réels sont tous les nombres présents sur une droite numérique composée de nombres rationnels et irrationnels. De plus, dans le cadre de l'ensemble des nombres rationnels, les nombres entiers sont des entiers négatifs et des entiers positifs, où les nombres entiers positifs sont constitués de nombres naturels et du zéro. Les ensembles de nombres sont liés par une relation d'inclusion hiérarchique au départ de l'ensemble des naturels qu'il considère comme la véritable fondation sur laquelle repose tout l'édifice numérique (Habran, 1988, cité par Stegen ; Géron et Daro, 2007). Cette inclusion hiérarchique peut être représentée par la figure suivante :

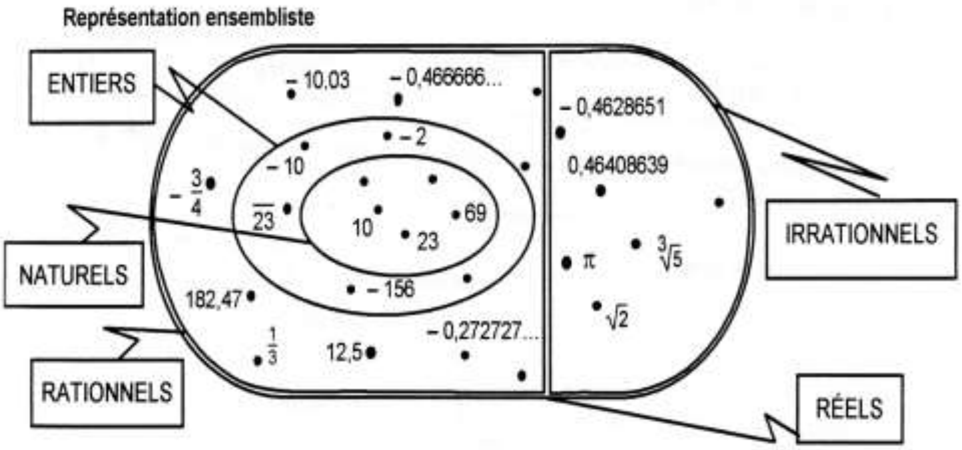


FIGURE 6 – L'INCLUSION DES ENSEMBLES DE NOMBRES (HABRAN, 1988, CITE PAR STEGEN ; GERON ET DARO, 2007, P.15)

D'après cette hiérarchie, les nombres rationnels comprennent les fractions (3/4, 15/7…), les nombres fractionnaires (2 1/3, 3 2/5…) et les nombres décimaux finis ou périodiques (0,25 ; 0,333…).

Le nombre rationnel peut s'exprimer à l'aide de plusieurs écritures :

- Diverses écritures fractionnaires (3/2 ou 6/4) avec un numérateur et un dénominateur
- Une écriture à virgule : 2,3
- Des compositions comme 1+ 3/2, etc.

Une des caractéristiques principales du nombre rationnel est la possibilité de l'écrire au départ par une infinité de fractions d'entiers ; ainsi, l'équation « 4.x = 2 » a pour solution le rationnel 2/4. Si nous multiplions (ou divisons) chaque terme de cette équation par un même nombre, nous obtenons des équations équivalentes dont les solutions sont des fractions équivalentes :

- 2 × x = 1 a pour solution le rationnel 1/2
- 8 × x= 4 a pour solution le rationnel 4/8
- 36 × x = 18 a pour solution le rationnel 18/36

Nous pouvons donc écrire les égalités suivantes entre ces fractions : 2/4=1/2=4/8=18/36=…
Cette propriété des nombres rationnels se traduit par le symbole « = ». Sur un plan théorique, il convient de parler de fractions équivalentes et non égales. En effet, chacune de ces fractions est le reflet d'un partage et, dans l'exemple ci-dessus, les partages correspondant à 2/4 ou 1/2 ne sont pas les mêmes. Les découpages de l'unité n'ont pas été effectués en un même nombre de parts et le nombre de parts distribuées n'est de ce fait pas le même. Seules les quantités

résultant du partage final sont identiques, c'est pourquoi nous parlerons de fractions équivalentes et non égales.

2.1.3.3. Définitions de la fraction

Dans son livre intitulé « de l'infini mathématique », le philosophe Louis Couturat (1868-1914) a abordé la fraction selon la définition suivante :

> « On appelle nombre fractionnaire ou fraction : l'ensemble de deux nombres entiers rangés dans un ordre déterminé, et dont le deuxième n'est pas nul (c'est-à-dire zéro). Soient a, b ces deux nombres, qu'on nomme termes de la fraction : on appelle le premier numérateur, le deuxième dénominateur, et l'on écrira provisoirement la fraction sous la forme (a, b) afin d'exclure le signe de la division, qui n'a plus de sens dès que a n'est pas divisible par b » (Couturat, 1973, p.5).

Une fraction est alors un couple de nombres (a ; b) dont le second est non nul et ce couple définit un rationnel qu'on note a/b.

Il appelle couple : l'ensemble de deux nombres arithmétiques rangés dans un ordre déterminé. Soient a et b ces deux nombres ; nous écrirons provisoirement le couple comme suit : (a, b).

Il présente aussi une définition de *l'égalité des deux fractions*:

Deux fractions (a, b), (à, b`) sont dites égales, et l'on écrit (a, b) = (à, b`) quand leurs termes vérifient la relation suivante : a . b` = b . à.

De plus, selon Fandiño Pinilla (2007) :

> « The word "fraction" comes from the Late Latin "fractio", "part obtained by breaking", and thus from the verb "frangere", "to break". Thus we should avoid imagining that the original etymological meaning of the term fractions presupposes that the parts obtained by breaking are "equal". The symbol m/n is of uncertain origin, but was certainly used by Leonardo Fibonacci Pisano in his Liber Abaci, published in 1202. Numbers which are fractions are called "rupti" or "fracti" and the horizontal line traced between numerator and denominator is called "virgula", i.e. "little stick" (from "virga", "stick"). The words "numerator" and "denominator" are also of uncertain origin, but we know that their use became established in Europe during the fifteenth century". (p. 2)

En revenant au texte précédent de Fandiño Pinilla, fraction vient du mot fractionnement - part obtenue par le fractionnement- et donc du verbe fractionner. Le symbole m / n est d'origine incertaine, il se compose du numérateur m et du dénominateur n qui sont appelés les termes de la fraction et une ligne horizontale sépare entre eux. Les mots numérateur et dénominateur sont également d'origine incertaine, mais nous savons que leur usage s'est établi en Europe au cours du XV^{ème} siècle. La représentation des nombres décimaux provient de l'œuvre de Simone de Bruges, connu comme Stevin, (1548-1620).

De plus, nous allons présenter deux définitions de la fraction données par deux dictionnaires qui permettront de mesurer les ambiguïtés et les glissements de sens d'une notion *a priori* bien banale.

> « Fraction (…).action de briser: la fraction du pain. ‖partie : une fraction de l'assemblée vota pour lui. ‖math. Opérateur formé deux nombres entiers : a (numérateur) et b (dénominateur), qui se note ($\frac{a}{b}$) et qui définit le résultat obtenu en partant d'une grandeur, en la divisant par b et en la multipliant par a, les deux opérations pouvant être interverties » (Petit Larousse illustré, édition 1974, p.446, cité par Benoit, Chemla et Ritter, 1992, p.375).
>
> « Fraction (…) : **I.** ◊ 1° liturg. La fraction du pain. (…) 2° (v.1400).vx. action de briser, rupture. **II.** ◊ 1°(1538): symbole formé d'un dénominateur et d'un numérateur étant (sic) des nombres entiers, représentant un nombre rationnel. Dans la fraction $\frac{6}{10}$ (six dixième), le numérateur 6 et le dénominateur 10 sont séparés par la barre de fraction. (…) 2°(1826) partie d'une totalité(…) » (Petit Robert, 1983, p.820, cité par Benoit, Chemla et Ritter, 1992, p.375).

Fractionner, c'est partager en parties égales, c'est diviser un tout, un ensemble. Rouche (1998) définit la fraction « Une fraction est une bien petite chose : une barre horizontale, un nombre au-dessus et un nombre au-dessous. Mais que représente cette chose ? Un morceau de tarte ? Un rapport ? Une nouvelle espèce de nombre ? La réponse est loin d'être claire pour tout le monde ». Le dénominateur indique en combien de parts égales on a divisé, fractionné une unité ou un ensemble. Le numérateur indique combien de parts on prend. Par exemple, Si on mange les 3/7 d'une tarte, le numérateur 3 indique le nombre de parts que l'on mange alors que 7 indique le nombre total de parts, donc l'unité considérée.

Selon Aberkane (2007) :

> « Signification d'une fraction : l'écriture fractionnaire peut avoir deux significations différentes, par exemple : la fraction $\frac{2}{3}$ veut dire qu'on a partagé l'unité en 3 parties égales et qu'on a pris 2 de ces partie : $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ mais cela veut également dire qu'on a partagé 2 en 3 parties égales. Pour les élèves, ce n'est pas tout à fait la même chose. Les situations pédagogiques proposées doivent permettre de faire comprendre les deux sens de la fraction » (p.72).

La fraction est une notation pour représenter un nombre rationnel. « Une fraction se compose donc de deux nombres entiers naturels, a et b, séparés par une barre horizontale, alors $\frac{a}{b}$. Le chiffre du haut (a) s'appelle numérateur et le chiffre du bas (b) s'appelle dénominateur. Le dénominateur (b) est toujours différent du zéro » (Corrieu, 1999).

En d'autres termes, a et b étant deux nombres entiers naturels, avec b non nul, l'écriture a/b du quotient de a par b est appelée fraction, de numérateur a et de dénominateur b.

- a et b sont les deux termes de la fraction.
- la barre de fraction signifie que l'on divise le numérateur par le dénominateur.
- la fraction 1/2 indique que l'on divise l'entier 1 par 2 (le numérateur 1 est divisé par le dénominateur 2), dans ce cas particulier, cette fraction s'appelle : un demi, la moitié.
- pour énoncer une fraction, on lit d'abord le numérateur, ensuite le dénominateur auquel on ajoute la terminaison – ième.

Prenons un exemple, la fraction $\frac{3}{7}$:

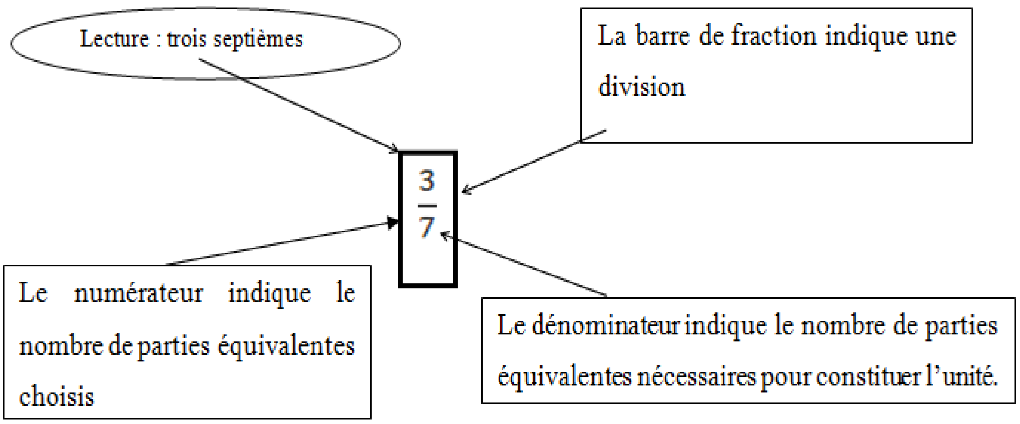


FIGURE 7 – LES COMPOSANTES DE LA FRACTIONS 3/7.

$\frac{3}{7}$ signifie qu'on divise 3 par 7, on prononce cette fraction *trois septièmes* et c'est pour cela que 3 est le numérateur parce qu'il indique un *nombre* de trois unités ($\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ les septièmes) alors que 7 est le dénominateur parce qu'il *dénomme* l'unité (le septième) avec laquelle on travaille.

Pourtant, il existe des exceptions : les dénominateurs 2, 3, 4 se nomment : demi, tiers et quart avec un numérateur qui est toujours 1.

1/2 = 1 demi 1/3= 1 tiers. 1/4= 1 quart 4/4=4× 1/4 = 4quarts.

Le mot fraction a tendance à désigner une partie de l'unité donc à être conçu comme désignant un nombre inférieur à 1.

En mathématiques, ce mot - la fraction - est de manière naïve un certain nombre de parts considérées après la division d'un nombre entier en parts égales. Par exemple, la fraction $\frac{56}{8}$ désigne le quotient de 56 par 8. Elle est égale à 7 car 7×8 = 56. Dans cette fraction, 56 est appelé le *numérateur* et 8 le *dénominateur*.

Dans le présent travail, l'utilisation du terme *fraction* sera privilégiée, bien que l'expression *nombre rationnel* soit utilisée afin de permettre l'accès à une ouverture plus grande sur les concepts qui régissent l'objet de l'apprentissage et l'enseignement de la notion de fraction.

2.2. Fraction : développement du concept du point de vue mathématique

Du point de vue purement mathématique, la construction de la notion de fraction s'explique à partir de la théorie des ensembles. Dans les ensembles des nombres entiers naturels (N) et des nombres entiers relatifs (Z), l'addition précède la multiplication, puisqu'il est toujours possible de réduire une multiplication à une addition répétée, et surtout parce que la multiplication présuppose toujours l'addition.

L'ensemble des nombres rationnels (Q) quant à lui, est étroitement lié aux opérations multiplicatives. Le mathématicien l'obtient par extension, à l'aide d'une opération multiplicative. Il généralise ainsi la multiplication, précédemment définie dans l'ensemble N, pour ensuite montrer comment on peut aussi additionner les éléments du nouvel ensemble. Étant donné ces transformations, l'ordre des éléments de l'ensemble Q est différent de celui défini dans les ensembles N et Z, car dans l'ensemble Q, l'ordre possède en plus un caractère de densité qui rend toujours possible l'insertion d'un nouveau nombre entre deux nombres quelconques.

Nous avons retenu dans le point de vue mathématique certains éléments importants comme les notions qui aident les élèves à développer une compréhension des significations de la fraction (notion de partitionnement, notion d'équivalence, notion de quantité, etc…) et la définition de la fraction. Mais, il existe d'autres points de vue qui concernent les fractions, à savoir le point de vue cognitif/psychologique des fractions.

3. Fraction : points de vue cognitif et psychologique

Comment se développe cette notion chez les enfants du primaire ? Sur quelles connaissances prend appui une première formalisation de la fraction? Pour mieux comprendre les différentes difficultés rencontrées par les élèves de CM1 et de CM2 et les démarches qu'ils utilisent lors de représenter des fractions, les réponses actuelles à ces questions nous aident à développer cette compréhension.

3.1. Développement d'une première formalisation et acquisition de la notion de fraction

L'acquisition du concept de fraction n'est pas simple en soi. Celle-ci requiert plusieurs années d'apprentissage et d'enseignement et c'est seulement à l'âge adulte qu'une bonne conception de ce concept peut être observée (Blouin, 2002). L'apprentissage des nombres rationnels est celui de nouveaux nombres qui fait place à des nouvelles propriétés des nombres et amène de nouveaux obstacles. Selon Brousseau (1981), le passage des nombres entiers aux nombres rationnels est complexe et la série d'obstacles vécue par les enfants est le résultat d'une résistance au changement d'emploi des nombres ; nous voyons par exemple que la multiplication d'un nombre entier par un nombre entier *grossit* ce nombre, mais la multiplication d'un nombre entier par un nombre rationnel peut *diminue* ce nombre.

Exemple : $6 \times 4 = 24$; on passe de 6 à 24

$6 \times 0{,}5 = 3$; on passe de 6 à 3

Dans le texte présenté ici, nous retenons l'expression *fraction* en tant qu'écriture possible d'un nombre rationnel : les études portant sur l'apprentissage des nombres rationnels montrent que ces nombres s'échelonnent sur plusieurs années (entre l'âge de 8 ans et de 14 ans environ) et cette période est accompagnée d'erreurs et de difficultés pour tous les apprenants, ce qui témoigne de la complexité du processus (Desjardins et Hétu, 1974). Ainsi, cette lente acquisition s'explique, comme le mentionnent notamment Vergnaud (1994) et Kieren (1993), par des niveaux de formalisation du concept qui s'avèrent nécessaires de développer pour avoir une compréhension formelle des nombres rationnels. Les études montrent que les élèves semblent spontanément s'appuyer sur les connaissances qu'ils ont développées à partir de leurs expériences sur les nombres entiers dans leur acquisition des nombres rationnels, même si ces connaissances ne sont pas toujours utiles ou que certaines peuvent révéler parfois une forte nuisibilité à une compréhension opératoire de la fraction (Kieren, 1988 ; Blouin, 2002).

De plus, considérant que notre étude s'intéresse aux enfants du primaire, seules les études portant sur le développement d'une première formalisation de la notion de fraction seront examinées.

Les études sur la construction du concept de fraction (Piaget, Inhelder et Szeminska, 1948 ; Pothier et Sawada, 1983 ; Blouin, 1999) montrent que le développement d'une première formalisation de la fraction passe par le développement des opérations de partage et de réunion et par le développement des opérations multiplicatives. Dans le premier cas, par exemple, les études de Piaget et al. (1948) toujours d'actualité, montrent qu'une coordination des opérations de partage et de réunion passe par deux étapes essentielles, celle du développement de la notion de partie en tant que partie d'un tout à la fois décomposable et recomposable et celle de l'égalisation des parties.

Nous pouvons dire qu'une fois ces étapes franchies, le processus cognitif de transformation des parties en fractions d'un tout est rendue possible. Cette transformation toutefois, ne peut être réalisée sans le développement des opérations multiplicatives comme le montre l'exemple suivant : la notion de fraction peut intervenir dans de nombreuses situations de comparaison de collections ou de nombres ; ainsi, pour pouvoir comparer des collections de 4 et de 12 éléments entre elles (respectivement les collections A et B), nous pouvons effectuer cette comparaison à l'aide des relations additives entières, des relations multiplicatives entières ou encore des relations fractionnaires. Dans le premier cas, la collection A est 8 de moins que la collection B et la collection B est 8 de plus que la collection A. Dans le deuxième cas, la collection A est 3 fois moins que la collection B et la collection B est 3 fois plus que la collection A. Enfin, dans le dernier cas, la collection A constitue un tiers (1/3) de la collection B et la collection B constitue trois unièmes de la collection A. Cet exemple constitue en fait une première formalisation du concept de fraction.

En effet, pour pouvoir déterminer la fraction qui représente une collection par rapport à une autre, il est nécessaire dans un premier temps de pouvoir identifier une des collections comme étant une partie de l'autre et d'associer un opérateur multiplicatif à cette partie , un opérateur de type « x fois plus ou fois moins que », puis de pouvoir associer à cet opérateur une fraction unitaire de type (l/n).

Ces études spécifient enfin, comment l'acquisition des opérations de partage et de réunion peut varier principalement en fonction des caractéristiques suivantes : le contexte, la forme et la valeur numérique du partage. Dans le premier cas, selon qu'il s'agit du partage d'un tout discret ou d'un tout continu en x parties égales, comme par exemple de partager une collection de 12 objets (tout discret) ou un objet (tout continu) en x parties égales, cela ne mobilisera pas les mêmes habiletés chez les enfants. Si dans le cas d'un tout discret, les connaissances des enfants sur les nombres entiers sont importantes, dans le cas d'un tout continu, la quantification d'une des parties de l'objet est impossible sans avoir recours à la notion de fraction. Dans le deuxième cas également, partager un objet rond s'avère une opération plus difficile à maîtriser que celle de partager un objet rectangulaire. Enfin, dans le dernier cas, il est vrai que les enfants maîtrisent plus rapidement les partages en un nombre pair de parties qu'en un nombre impair : certaines opérations de partage en un nombre pair des parties sont plus rapidement maîtrisées que d'autres comme nous le rappelle cet exemple : ÷2, ÷4, ÷8, ÷16 plus facile que ÷ 6, ÷12.

Dans les trois sections suivantes, nous présentons le processus de construction du concept de fraction à l'aide, d'une part, des études sur les opérations de partage et de réunion et, d'autre part, celles sur le développement des opérations multiplicatives et enfin, avec celles directement reliées à la notion de fraction elle-même.

3.1.1. Quelques études portant sur le développement des opérations de partage et de réunion

Les études de Piaget, Inhelder et Szeminska (1948) et Pothier et Sawada (1983) sont à notre connaissance, les principales études significatives sur le développement des opérations de partage et de réunion. Ces études montrent comment l'action de partager en parties égales constitue souvent, pour les jeunes enfants, la première expérience implicite de la notion de fraction. Ce travail spécifie enfin comment l'acquisition des opérations de partage et de réunion peut varier en fonction principalement du contexte (tout continu ou tout discret) et de la valeur numérique du partage. Dans le texte qui suit, nous rendons compte brièvement de cela.

Ayant réalisé une étude auprès d'enfants âgés de 3-8 ans, les résultats obtenus par Piaget et al. (1948) permettent de comprendre l'évolution de la façon de partager des touts continus en un certain nombre de parties égales. Ainsi, les enfants utilisent d'abord le morcellement comme stratégie pour partager un tout continu en plusieurs parties. Ensuite, les tentatives de partition des surfaces observées par les auteurs sont principalement des actions de découpage par dichotomie simple ou double et enfin, les dernières stratégies privilégient des actions de sectionnement. Ainsi, les résultats obtenus à l'issue de cette recherche permettent d'établir un modèle de l'évolution du schème de partage. Ce modèle comporte sept étapes. Maintenant, nous allons décrire sommairement ces étapes en illustrant les stratégies utilisées par les enfants pour partager un tout continu (galette ou gâteau) en deux, trois ou quatre parties égales.

Lors des deux premières étapes, les enfants effectuent un partage sans prise de conscience du tout et du nombre de parties à obtenir, cela même s'ils réussissent à épuiser le tout dans les activités demandées. C'est lors de la deuxième étape que ceux-ci prennent véritablement conscience du nombre de parties à obtenir. Ainsi, à cette étape, l'enfant associe le partage en deux parties de deux façons, soit avec la nécessité de couper en deux, soit avec la nécessité d'obtenir deux morceaux. Les morceaux ou parties ainsi obtenus ne sont pas nécessairement égaux. La troisième étape se caractérise par la nécessité chez les enfants d'épuiser le tout malgré l'utilisation de stratégies non pertinentes. Aussi, des difficultés continuent sur l'égalité des parties et sur le nombre de coupures à effectuer pour obtenir le nombre de parties recherché. Pour obtenir deux parties par exemple, un enfant fait deux coupures et obtient trois parties ; avec la partie supplémentaire, l'enfant poursuit alors son partage en effectuant à nouveau deux coupures. Ainsi, le tout est épuisé mais le nombre de parties est trop élevé et les parties ne sont pas nécessairement égales. Ce n'est que lors de la quatrième étape que les enfants trouvent le nombre des coupures à effectuer sur la surface pour obtenir le nombre de parties voulu ; les parties sont par contre inégales mais le tout est épuisé. L'égalité des parties n'apparaît dans les conduites des enfants que lors de la cinquième étape. Lors de la sixième étape, l'enfant prend désormais conscience que la partie est incluse dans le tout, ce qui le conduit au début de la notion de fraction. À cette étape, les enfants savent que la partie est reliée au tout, que le tout est composé de parties égales et enfin que la partie n'est pas le tout. La conservation du tout ne voit son apparition que lors de la septième étape. Selon l'étude de Piaget, ce n'est qu'aux deux dernières étapes qu'un véritable partage en parties égales avec conservation du tout est effectué. Cette dernière acquisition n'est possible, de façon formelle, qu'au stade opératoire, c'est-à-dire vers l'âge de 7- 9 ans.

Passons sur une nouvelle étude, celle effectuée par Pothier et Sawada (1983) qui se situe dans le prolongement de celle de Piaget. Dans celle-ci, ils ont cherché à vérifier si les diverses stratégies fréquemment observées chez les enfants devant effectuer un partage égal, pouvaient varier selon la valeur numérique des partages à réaliser. Cette démonstration met en évidence que les stratégies utilisées par les enfants semblent similaires à celles observées par Piaget : les enfants privilégient la stratégie par dichotomie simple ou double. Il semble, par contre, que les partages selon un nombre impair de parties soient plus difficiles à réaliser que ceux impliquant un nombre pair de parties. Ces auteurs proposent ainsi un nouveau modèle sur le développement des habiletés de partage, celui-ci comporte 5 niveaux que nous présentons maintenant.

Ils ont questionné 43 enfants inscrits de la maternelle à la troisième année du primaire: 8 enfants à la maternelle, 8 enfants en première année, 12 enfants en deuxième année et 15 enfants en troisième année. Ceux-ci avaient entre 4 ans et 1l mois et 9 ans et 8 mois. Lors de cette étude, plusieurs épreuves de partition leur ont été soumises, ces enfants étaient invités à partager un gâteau entre deux, quatre, trois et cinq personnes de manière à ce que chacune des personnes en possède une part.

Lors d'un premier niveau de compréhension, appelé niveau intuitif par les auteurs, les enfants interprètent le partage comme une coupure. Le partage en parties égales est très complexe pour les enfants à ce niveau-là : lorsqu'ils sont invités à partager en deux un biscuit, ceux-ci vont le briser en deux en donnant un morceau à chacun, sans se soucier de la grosseur de celui-ci ou de son égalité avec l'autre.

Le deuxième niveau fait référence au développement de stratégies de partage de type « couper à deux reprises » ou « faire deux sections » indépendamment du nombre de parties à obtenir. Les stratégies développées permettent à l'enfant de réussir quelques fois à illustrer des partages en deux ou en quatre parties. Par contre, ces stratégies ne permettent pas de réussir des partages en trois et en six parties. A ce niveau, la principale préoccupation des enfants est d'obtenir le nombre de parties demandé. Ainsi, quelques fois, ces parties sont égales mais, à plusieurs reprises, elles ne le sont pas. L'enfant utilise la même stratégie pour résoudre des problèmes où d'autres partages sont demandés, mais sans succès.

Au troisième niveau, l'enfant cherche à obtenir l'égalité des parties mais ne réussit pas toujours à cause de la prégnance des stratégies limitées du niveau deux et de la valeur numérique du partage. En effet, à ce niveau l'enfant parvient à obtenir l'égalité de parties seulement si le partage à effectuer est de valeur numérique, selon une puissance de 2 (2, 4, 8 ou 16). Pour les autres partages, l'enfant utilise les stratégies de niveau 2 tout en les compensant. Ainsi, pour ces partages, l'enfant parvient à obtenir le nombre de parties demandé mais les parties ne sont pas égales. Par exemple, il parvient à obtenir trois parties par un découpage en deux en effectuant une première coupure de la figure en deux parties égales et en coupant une des deux parties en deux parties égales.

Lors du quatrième niveau, l'enfant prend conscience de l'inadéquation de sa stratégie de couper deux fois ou en deux pour obtenir des parties égales et il développe une nouvelle stratégie : le comptage de parties. Il fait une partie à la fois et lorsque le nombre de parties est obtenu, il égalise les parties, cette stratégie le conduit à la réussite. Par contre, si cette stratégie du « un/un » se révèle être efficace pour les petits nombres, elle s'avère trop longue pour les nombres plus élevés.

Le cinquième niveau fait référence à la composition : lorsqu'il doit partager en un plus grand nombre de parties (comme 9 ou 15), l'enfant développe, alors, une stratégie de composition de partages. Ainsi, pour réaliser 9 parties, il va effectuer dans un premier temps un partage par 3, puis il égalise les parties obtenues, un second temps lui est nécessaire pour

découper à nouveau chacune de celles-ci par 3 pour les égaliser à nouveau. Ainsi, les 9 parties sont obtenues par la composition de deux partages en 3 successifs. Ici, les élèves prennent conscience que la stratégie du « un/un » n'est pas efficace avec les nombres impairs élevés.
De plus, l'élève qui atteint ce niveau en viendra à utiliser un algorithme de multiplication : partager en 9 parties = partager 3 fois en 3 parties égales. À ce stade, les élèves peuvent composer n'importe quel partage et lui attribuer du sens.

Enfin, une dernière étude importante sur le développement des habiletés de partition, qu'il convient de mentionner ici, est celle de Hiebert et Tonnessen (1978). Afin de voir si une généralisation des résultats obtenus par Piaget et al (1948) était possible, ces auteurs ont centré leur étude sur les habiletés de partage sur des touts discrets dans un contexte différent de celui utilisé par Piaget et al. (1948), c'est-à-dire, des touts continus. De cette manière, ils ont pu démontrer que le développement des conduites de partage, de « touts » discrets et de « touts » continus, n'est pas similaire. En somme, le partage des quantités discrètes (une collection de x objets) est plus facile pour la majorité des enfants que le partage de quantités continues (un objet). Selon ces auteurs, les partages de quantités discrètes et de quantités continues ne mobiliseront pas nécessairement les mêmes habiletés. De ce fait, lors d'une résolution de problèmes contenant des quantités discrètes, l'enfant n'est pas nécessairement obligé de voir cela comme un tout, puisque le partage peut s'effectuer à l'aide d'une simple distribution d'un élément à la fois. Si dans le cas d'un tout discret, les connaissances des élèves sur les nombres entiers s'avèrent un atout, dans le cas d'un tout continu, la quantification d'une des parties de l'objet est impossible sans avoir recours à la notion de fraction (Vergnaud, 1983).

Après s'être arrêté sur ces différentes études concernant sur le développement des opérations de partage et de réunion, nous passons au domaine du développement des opérations multiplicatives.

3.1.2. Quelques études portant sur le développement des opérations multiplicatives

Nous commençons par Ricco (1982), elle a effectué une étude sur la résolution de problèmes impliquant le maniement de la notion de fonction linéaire. Cette recherche porte uniquement sur la classe de problèmes faisant intervenir l'isomorphisme de mesures, c'est-à-dire une proportion entre deux espaces de mesure telle que la définit Vergnaud (1983 et 1994).

Celle-ci fut réalisée auprès de 80 enfants de 7 à 1l ans répartis dans 4 classes différentes de deux écoles et comprenait deux épreuves, chacune a été proposée à 40 enfants. Pour les deux épreuves proposées aux enfants, la même question fut posée au groupe des 40 :

« Plusieurs enfants et instituteurs d'une école vont dans une papeterie pour acheter des stylos (ou des cahiers) comme celui-ci (on lui montre un stylo ou un cahier), tout le monde doit acheter la même marque de stylo (ou de cahier). » Un tableau fut remis aux enfants. Dans ce premier tableau (voir l'exemple ci-dessous), les enfants doivent trouver le prix payé pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15. 16, 18, 71, 72 et 75 stylos, sachant que les prix payés pour 3 et 4 stylos sont respectivement de 12F et de 16F.

TABLEAU 5– EPREUVE PROPOSEE AUX ENFANT SUR LE DEVELOPPEMENT DES OPERATIONS MULTIPLICATIVES. (RICCO, 1982, CITE PAR DESHAIES, 2006, P.37)

Epreuve no. 1		
	Nombre de stylos achetés	Prix payé
Pascale	1	
Didier	2	
Agnès	3	12F.
Anne	4	16F.
Marcel	5	
Sophie	6	
Louis	8	
Catherine	10	
M. Dostal	15	
Mme. Dupont	16	
M. Daudin	18	
Mme. Lemaine	71	
M. Ducros	72	
M. Simon	75	

La deuxième épreuve, un second tableau fut donné aux 40 autres enfants. Dans ce deuxième tableau, les enfants doivent trouver le prix à payer pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15. 16, 18, 71, 72 et 75 cahiers, sachant que le prix payé pour 3 et 5 cahiers est respectivement de 12F et de 20F.

Les résultats obtenus dans cette étude nous éclairent sur le développement des rapports multiplicatifs entiers chez les enfants. Nous pouvons constater, suite à notre analyse des résultats obtenus par Ricco, que certaines stratégies employées par les enfants lors de ces résolutions de problèmes mènent à un succès, tandis que d'autres, aboutissent à un échec. Cette recherche permet ainsi de dégager 4 niveaux de compréhension d’un rapport multiplicatif entier, niveaux répartis de 0 à 3 et libellés par l’auteur de la manière suivante :

- Niveau 0 : Règles de correspondance arbitraire respectant seulement l'ordre strictement croissant;

- Niveau 1 : Suite numérique + 1 ;
- Niveau 2 : Règles composites de caractère additif ou multiplicatif ;
- Niveau 3 : Notion de constante.

Il nous semble utile de présenter brièvement ces niveaux.

Les conduites de niveau 0 sont des conduites qui consistent à établir arbitrairement les valeurs de l'ensemble d'arrivée tout en respectant les relations d'augmentation ou de diminution sans toutefois qu'une opération stable ne permette de quantifier ces relations de différence entre l'espace de départ et l'espace d'arrivée : « cet objet coûte moins cher, donc, je paie un peu moins. » Cette stratégie n'est pas vraiment précise, aucun opérateur numérique ne s'y trouve impliqué.

Au niveau 1, les enfants découvrent l'opérateur additif +1 qui engendre la suite numérique de l'ensemble de départ et ils l'appliquent aux images de l'ensemble d'arrivée. Ici, l'enfant ne se soucie pas de l'écart entre les deux ensembles de données (départ et arrivée). Il voit que le schéma semble être croissant, donc il ajoute un à chacune des données, sans se soucier de savoir si c'est la bonne valeur à ajouter : selon le tableau présenté à l'épreuve numéro 1, pour déterminer le prix de 5 stylos, l'enfant ajoute 1F aux 16 F de 4 stylos car 5 stylos sont un stylo de plus que 4 stylos.

Au niveau 2, un enfant est en mesure de trouver des images manquantes de l'ensemble d'arrivée à partir des données disponibles en effectuant des compositions additives ou multiplicatives. Les compositions additives ou multiplicatives effectuées traduisent toutefois une confusion sur les rôles des valeurs numériques. Par exemple, dans la deuxième épreuve (voir la description ci-haut) l'enfant ajoute 6 au prix de 5 cahiers (20F) pour déterminer le prix de 6 cahiers car 6 cahiers sont un cahier de plus que 5 cahiers (6 cahiers vont alors coûter 26F (20F + 6 ; les 6 cahiers sont devenus 6F. Pour déterminer le prix de deux cahiers, l'enfant enlève 2 (pour 2 cahiers) au prix de 3 cahiers (12F) et obtient ainsi 10F; ici encore, le cahier de moins (3 cahiers moins 2 cahiers) est devenu une fois de moins 2F (le 2 de 2 cahiers). Ainsi, comme le mentionne Ricco, les compositions additives ou multiplicatives effectuées par l'enfant à ce niveau-là ne permettent pas de faire apparaître de valeur constante, autrement dit de croissance linéaire.

Le niveau 3 marque l'apparition de la notion de constante dans les stratégies utilisées par l'enfant. Il convient toutefois de souligner que cette notion n'y est pas totalement maîtrisée. Ainsi, certaines stratégies utilisées par l'enfant lui permettent soit de réussir ou d'échouer à trouver des valeurs de l'ensemble d'arrivée. L'auteur regroupe 5 stratégies dans le niveau 3 : 3 d'entre-elles permettent de résoudre les problèmes demandés tandis que les 2 dernières n'assurent pas la réussite ; les procédures menant à une réussite seront d'abord décrites, puis celles menant à un échec dans le texte suivant.

3.1.2.1. Procédure des écarts constants

Avec cette procédure, les enfants dégagent le principe additif +1 pour l'ensemble de départ (opérateur qui permet de passer d'un élément à l'autre de l'ensemble de départ) et déterminent également l'opérateur additif +4 de l'ensemble d'arrivée (l'opérateur qui permet de passer d'un élément à l'autre de l'ensemble d'arrivée) en trouvant la différence entre deux valeurs concomitantes de l'ensemble d'arrivée. Par exemple, pour déterminer le prix de 5 stylos, l'enfant ajoute 4F aux 16F de 4 stylos, parce qu'il y a une différence d'un stylo. Il fera donc + 4F pour trouver le prix des autres nombres de stylos. Par contre, pour trouver le prix d'un stylo, il utilise la stratégie du tâtonnement qui se traduit par l'essai systématique de plusieurs opérateurs additifs choisis au hasard pour établir l'écart constant dans l'ensemble d'arrivée selon les données dont il dispose.

3.1.2.2. Procédure dite « hypothétique»

La procédure dite « hypothétique » est une procédure similaire à celle décrite au paragraphe précédent lorsque l'enfant tente de trouver le prix d'un stylo ; elle en diffère toutefois puisque l'enfant l'utilise pour dégager non seulement la valeur unitaire mais également pour la totalité des valeurs de l'ensemble d'arrivée.

3.1.2.3. Procédure utilisant l'opérateur fonction

Cette procédure efficace est de nature multiplicative en ce sens qu'un opérateur multiplicatif est dégagé entre les ensembles de départ et d'arrivée. Par exemple, pour trouver le coût de 6 stylos, l'enfant divise par 3 le coût de 3 stylos (l2F ÷3) ; ce nombre (4F/l stylo, le coût d'un stylo) devient l'opérateur fonction (*4) qui sera appliqué au nombre 6. Ce regroupement est divisé en 2 sections : opérateur fonction avec ou sans reconnaissance de la valeur unitaire.

3.1.2.4. Procédure utilisant l'opérateur scalaire

Cette dernière procédure efficace est également de nature multiplicative. L'opérateur multiplicatif est dégagé entre les éléments d'un même ensemble de mesure et il est ensuite appliqué à l'ensemble de départ. Par exemple, pour trouver le prix de 6 stylos, l'enfant divise les 3 stylos en trois pour obtenir un stylo et multiplie ce dernier par 6 pour obtenir 6 stylos. Pour l'ensemble d'arrivée, l'enfant exécutera les mêmes opérations, soit diviser par 3 le prix de 3 stylos pour ainsi obtenir le prix d'un stylo et ensuite, multiplier ce prix par 6 pour obtenir le prix de 6 stylos (12F (prix de 3 stylos) ÷ 3 = 4 F (le prix d'un stylo) ; 4 F * 6 = 24 F (le prix de 6 stylos)).

3.1.2.5. Procédure qui consiste à fixer la valeur unitaire au hasard

Cette procédure mène à un échec. Les enfants utilisant cette procédure, fixent de façon arbitraire des valeurs aux images parce qu'ils ne sont pas capables d'établir les relations numériques qui interviennent dans la détermination de la constante assurant la croissance linéaire de l'ensemble d'arrivée. De façon tout à fait aléatoire, par exemple, un enfant peut répondre spontanément qu'un cahier coûte 2F et maintenir sa réponse sans pouvoir fournir d'argument la justifiant.

3.1.2.6. Procédure qui consiste à prendre comme valeur unitaire l'élément « n » du couple

Cette dernière procédure mène aussi à un échec. Prenons l'épreuve numéro deux en exemple. Un enfant pourrait dégager que le prix d'un cahier est de 3F puisque 3 cahiers coûtent 12F. Ainsi, l'enfant détermine la valeur unitaire en confondant les termes connus d'un couple et en n'appliquant aucun opérateur aux éléments d'un couple.

En conclusion, les conduites mathématiques observées par Ricco que nous venons de décrire, montrent que très peu d'enfants emploient l'opérateur fonction pour déterminer une constante et reviennent à la procédure de proche en proche (opérateur scalaire) pour déterminer des images. Egalement, les enfants utilisent davantage une stratégie additive que multiplicative lors de ce type de problèmes, c'est-à-dire des problèmes d'isomorphisme de mesures. Ces quelques résultats sont intéressants pour la recherche que nous envisageons. En effet, cette étude montre que, même dans un contexte de fonction, les enfants développent d'abord la multiplication au niveau des opérateurs scalaires (opérateurs qui permettent de passer d'un élément à l'autre d'un même ensemble). Aussi, le développement du sens de cet opérateur semble passer par l'exploration des stratégies additives avec un certain nombre d'erreurs.

La deuxième étude que nous décrivons, l'étude de Vincent (1992) a porté sur le développement de l'opérateur scalaire exclusivement. Dans cette étude, les enfants sont invités à représenter des collections d'éléments selon un opérateur multiplicatif entier (x fois plus et x fois moins) et une collection de départ comme le montre l'exemple suivant : représenter 3 fois plus à partir d'une collection de 5 billes.

Les résultats obtenus par Vincent, permettent de modéliser le développement des représentations des relations multiplicatives selon 3 niveaux. Le premier niveau se caractérise par la prégnance des modèles additifs d'interprétation de ces relations. Donc, pour représenter la relation « n fois moins », les enfants feront deux collections comportant le même nombre d'éléments et enlèveront ensuite à l'une des collections un nombre d'éléments correspondant à la valeur de la relation. Par exemple, pour illustrer la relation « 2 fois moins » à l'aide de deux collections, l'enfant fera 2 collections de x unités et enlèvera 2 unités (de la relation « n fois moins ») à l'une de ces collections.

Le deuxième niveau de représentation se caractérise par une première différenciation des relations additives et multiplicatives. Ce deuxième niveau amène l'enfant à interpréter la relation « n fois plus » comme étant le résultat d'une juxtaposition des relations « autant » et « fois plus » (Vincent, 1992). Par exemple, pour la relation « 3 fois plus », l'enfant placera x éléments dans chacune des deux collections et ajoutera 3 fois x éléments à une des collections. À ce niveau, la relation « n fois plus » signifie souvent « n fois de plus ».

Enfin, le troisième niveau de représentation se caractérise par la compréhension de l'enfant des relations multiplicatives. Ainsi, l'enfant comprend que « n fois plus » fait référence à la multiplication et non à l'addition.

3.1.3. Quelques études portant sur un premier développement de la notion de fraction

Afin de mieux comprendre le cheminement des enfants dans l'acquisition de la notion de fraction, nous avons retracé leur vécu avec les ambiguïtés qu'ils rencontraient. Nous citons pour cela les recherches de Parrat-Dayan et Vonèche (1991) qui nous éclairent sur les principales conduites des enfants face à la notion de fraction, les recherches de Parrat-Dayan et Vonèche (1991) et celle de Piaget et al., (1948) sur la notion de moitié, ainsi que les études de Piaget (1948), Pothier et Sawada (1983) et Parrat-Dayan et Vonèche (1991) sur la distinction entre les schèmes logiques et infra-logiques.

Selon les recherches de Parrat-Dayan et Vonèche (1991), dès l'âge de 6 ans, les enfants sont en mesure d'admettre l'égalité comme celle de deux rectangles de départ, soit par superposition, soit à la simple vue. A l'inverse, ils refusent, jusqu'à l'âge de dix ans de reconnaître l'équivalence des moitiés entre elles. Cependant, ils sont en mesure de démontrer que les deux moitiés identiques permettent de reconstituer le tout. Par conséquent, ils ne conservent pas le rapport de partie à tout lorsque les totalités de départ sont équivalentes mais ils produisent des moitiés de formes différentes. Ainsi, plus les moitiés produites sont disparates, plus la conservation leur est difficile.

Toujours selon les mêmes auteurs, c'est entre 6 et 8 ans qu'apparaissent des séries de conduites qui se caractérisent par le partage d'un ensemble. Celles-ci peuvent se présenter sur le partage effectué avec un tout discret ; il s'agissait d'un ensemble de 5 pommes : partager par itération symétrique des éléments et élimination du reste. En exemple, dans cet ensemble de 5 pommes, élimination de la cinquième pomme, afin que le partage un à un puisse être efficace ou encore, partage par séparation aboutissant à deux sous-ensembles inégaux, 5 pommes avec 3 pommes d'un côté et deux de l'autre. Enfin, rétablissement de l'égalité par addition ou élimination d'un élément ; partage par itération, puis addition ou élimination d'un élément; élimination ou addition d'un élément, puis partage par itération ou séparation ; partage par itération ou séparation aboutissant à deux sous-ensembles inégaux. Ces procédures employées par les enfants de cette tranche d'âge évitent la demi-unité. Pour ceux-ci, la moitié consiste à partager le tout en deux parties égales, il s'agit de la moitié parce que les parties sont égales parce que nous utilisons un nombre pair pour un partage en deux. De même, lorsque les enfants aboutissent à deux parties inégales, pour eux, il s'agit de la moitié d'un tout car ils peuvent reconstituer le tout, 3 et 2 forment le 5 du départ alors même qu'ils se trouvaient devant deux parties inégales : 3 pommes d'un côté et 2 de l'autre. Ces enfants sont donc sensibles à deux types d'ambiguïté, à la référence au tout, comme les enfants plus jeunes, et à la difficulté à partager des éléments de classe différente.

Vers l'âge de 9 ans, l'enfant se trouve face à une nouvelle ambiguïté, celle, par exemple, d'essayer d'attribuer une valeur à la demi unité. Ne différenciant pas encore le nombre et l'objet, cette ambiguïté est celle de savoir ou de découvrir ce qu'est le véritable sens de la demi unité : un demi ou un et demi (1/2 ou 1 1/2). La confusion entre le nombre et l'objet donne lieu à une autre difficulté chez ceux-ci, comme celle de couper un panier de 5 pommes en essayant de considérer le tout. Ainsi, l'enfant se voit devoir effectuer une opération inverse, c'est-à-dire celle de multiplier chaque élément par la division. Cela devient pour lui la moitié « en ajoutant », par rapport à « la moitié en enlevant », toujours selon la même étude. Cette étape sera franchie lorsque l'enfant aura compris que la moitié de cinq pommes est deux et demi parce que cinq divisé par 2 est égal à deux et demi ou parce que deux et demi plus deux et demi est égalent cinq.

Ces mêmes études (Parrat-Dayan, 1991), sur le développement de la notion de moitié ont également permis de démontrer que les enfants âgés de 9-11 ans comprennent la référence à l'unité de départ mais se perdent dans la question des parties de parties et des parties, celles des formes différentes et celles des formes identiques. Ainsi, nous sommes face au constat que la conservation proprement dite du tout et de la partie n'est possible au stade formel que vers 11-12 ans (Piaget et al., 1948). Pour appuyer ce constat, revenons aux difficultés de la conservation du tout. En effet, l'enfant ne sait pas quel est le référentiel à considérer : l'unité (dans notre exemple : une pomme) ou le tout (l'ensemble des pommes). De plus, les recherches ont démontré que de nombreuses difficultés concernant l'acquisition de la notion de moitié résident dans les consignes données aux élèves et du matériel employé : le demi d'une feuille, l'élève peut la plier mais si le demi est une planche de bois, il ne peut pas la plier, il ne peut pas se faire de représentation.

Trois problèmes majeurs surgissent pour la plupart des enfants, bien notifiés par ces chercheurs, dans l'acquisition de la notion de moitié, nous allons les prendre les uns après les autres.

3.1.3.1. Le partage et le fractionnement

Si le partage consiste à diviser un tout en 2 ou plusieurs parts pour une distribution, la distribution n'implique pas le partage en tant qu'opération. En effet, un enfant de cinq ou six ans, peut distribuer un nombre d'éléments entre deux ou plusieurs personnes. Il en sera capable si le nombre est pair, à partager le tout en moitiés. Par contre, le même enfant ne saura pas que les objets qu'il a distribués à chacun sont en fait la moitié du tout. L'enfant peut ainsi distribuer sans toutefois partager : il n'est pas conscient de l'acte de partager. Si l'enfant aboutit à la division du tout en deux, c'est parce qu'il dispose des schèmes lui permettant d'y arriver. Ainsi, en activant le schème de mise en correspondance terme à terme, l'enfant pourra distribuer correctement le tout en moitiés. Or, la correspondance terme à terme n'implique pas la conservation du tout ni même de l'égalité des quantités partagées, et lorsqu'il n'y a pas de conservation du tout, il est impossible de parler d'opération de partage. De même, tant que le partage et le fractionnement ne deviennent pas opératoires, nous ne pouvons pas parler de fraction. La partition d'une totalité – partage - et la réunion des parties en totalités hiérarchiques ne seront possibles que s'il y a conservation du tout.

3.1.3.2. La conservation et la fraction sur l'objet

Plusieurs chercheurs, notamment Piaget et al. (1948), ont démontré que la notion de moitié est directement liée à la notion de conservation. En effet, si les opérations de partition, impliquées dans les fractions, sont susceptibles d'être inversées en opérations correspondantes mais de sens contraire, la conservation du tout pourrait assurer la notion de moitié en tant que fraction. Par contre, plus tardivement, dans leurs recherches, Parrat-Dayan et Vonèche (1991) ont pu mettre en évidence que la conservation du tout n'était pas nécessairement liée à la conservation de la « partie », de la moitié. Cette notion de totalité, pour eux, doit s'élargir à la conservation de la relation entre la partie et le tout, indépendamment de chaque totalité, notre point suivant.

3.1.3.3. La construction de l'unité et la fraction relationnelle

La fraction relationnelle suppose la coordination généralisée des opérations de partage et de réunion. Prenons comme exemple la moitié d'un gâteau, elle est non seulement égale à l'autre moitié, mais aussi en tant que moitié indépendante du gâteau selon la même étude de Parrat-Dayan et Vonèche (1991). Les notions de conservation, limitées à la conservation d'un objet ou totalité, bien qu'importantes, ne peuvent pas, à elles seules, assurer la compréhension des rapports Partie-Tout. En plus de la conservation du tout il sera alors nécessaire de conserver une unité de référence abstraite qui rende possible la comparaison entre deux rapports donnés en référence à des totalités différentes. L'enfant ne devra pas seulement faire une distinction entre deux classes d'équivalence auxquelles il peut arriver à la suite d'une opération de correspondance biunivoque, de congruence, de comparaison, etc., opérations suscitées lors de la consigne proposée par Piaget et al. (1948), mais établir une relation où ce qui se conserve est le rapport que la partie entretient avec le tout.

Nous arrivons maintenant à l'étude des schèmes logiques et infra-logiques Selon Parrat-Dayan et Vonèche, les schèmes logiques et infra-logiques sont toujours constitutifs de la notion de moitié. Il n'y a pas de décalage entre le discret (logique) et le continu (infra-logique) dans la genèse de la moitié. Ces deux types de schèmes peuvent interagir de manière dialectique dès le départ, en ce sens qu'ils peuvent d'abord se combiner, se confondre pour se différencier par la suite. Selon plusieurs études, notamment, celles de Piaget, Inhelder et Szeminska (1948), Pothier, Sawada (1983) et Parrat-Dayan et Vonèche (1991), l'interaction des schèmes logiques et infra-logiques peut faire obstacle à la constitution de la notion de moitié en tant que fraction numérique.

En se référant à l'analyse de réactions des enfants sur les termes collectifs, Piaget écrit :

> « Il y aurait donc confusion entre deux schémas, chez nous nettement distincts, celui d'une collection homogène, comme un troupeau, etc., et en général, tout terme collectif, et celui d'un objet individuel, qui se débite non en individus mais en morceaux, comme un caillou, ou une table. Or, tout jugement de collection est acquis à l'esprit. Il faut autrement dit, que ces individus soient pensés comme des unités discrètes. Or, un schéma comme celui des termes collectifs chez l'enfant semble au contraire comporter, pour faire obstacle à la fusion mentale des individus, non le nombre, mais l'espace occupé par la collection. Rien de plus naturel, dès lors, qu'un esprit enfantin, lorsqu'il n'est pas astreint à un calcul précis, schématise les termes collectifs non sur le type d'un ensemble dénombrable mais sur celui d'un objet qui se découpe en morceaux. Il n'en faut pas plus pour qu'il y ait confusion ou plutôt indistinction entre les deux schèmes dont nous venons de parler. » (p.468-469). (Piaget, 1948, p.468-469).

De plus, en prenant en considération l’évolution des conduites des enfants, Parrat-Dayan et Vonèche ont pu observer que lorsqu'ils demandent aux enfants de donner la moitié de quelque chose, ceux-ci peuvent activer des schèmes logiques ou/et infra logiques, indépendamment du matériel, constitué que ce soit d’éléments discrets ou d'éléments continus. Selon eux, au départ et au cours de toute la période préopératoire, il y a une indifférenciation relative entre les deux systèmes de schèmes soit parce que l’un des deux s’appuie sur l'autre soit parce qu'ils se déforment mutuellement jusqu’à ce que leur différenciation progresse et permette des interactions plus fécondes. De cette façon, ces auteurs arrivent à la conclusion que le développement de la notion de moitié se caractérise par le passage progressif d'une indifférenciation à une différenciation progressive des différents schèmes (logiques et infra-logiques).

3.1.4. Difficultés reliées à la notion de fraction

Il semble que les enfants maîtrisent en règle générale plus rapidement les partages en un nombre pair de parties qu'en un nombre impair. Lorsqu'un nombre entier pair est impliqué, l’enfant peut bien souvent partager à répétition en deux parties égales tandis que dans le cas d'un nombre impair, la répétition du partage en deux parties égales parait être infructueuse. Ainsi, certaines opérations de partage en un nombre pair de parties sont plus rapidement maîtrisées que d'autres, ainsi, ÷2, ÷4, ÷8, ÷16 sont plus faciles que ÷ 6, ÷12 pour la raison que ces derniers impliquent un facteur impair.

L’étude de Pothier et Sawada (1983), nous éclaire quant aux difficultés rencontrées par les enfants lors de partage impliquant un nombre pair ou impair de parties et de l’impact du choix des formes géométriques proposées à l’élève lors de l’apprentissage du partage. Celle-ci montre que les enfants maîtrisent en premier le partage en deux en coupant la forme en deux parties égales. Suite à l'acquisition de cette procédure, l'enfant peut effectuer un partage où le nombre de parties demandées est une puissance de deux (2,4, 8, 16, etc.), puisque comme mentionné ci-dessus, l’enfant utilise à répétition le partage en deux pour atteindre le nombre de parties demandées.

De même, la maîtrise des notions géométriques peut rendre le partage en nombre pair possible pour l’enfant mais en gardant en mémoire la régularité de la forme, du nombre de côtés, du nombre de sommets, du centre de la forme … De cette manière, l’enfant peut facilement effectuer un partage en un nombre pair de parties demandées (Pothier et Sawada, 1983). Par la suite, le partage en un nombre impair complète l’apprentissage d'un premier mouvement autre que la coupure médiane. Avec cette nouvelle acquisition, l'enfant est capable de couper en 3 et en 5 parties égales. Il ne fait plus référence à la stratégie de couper dans un premier temps la forme en deux. Alors, suite à cette compréhension, le partage, en nombre impair de parties par l'utilisation de l'algorithme de comptage et d'égalité des parties, lui est devenu possible. Ainsi, pour une forme circulaire, l'enfant est capable de trouver le nombre de parties demandées par rotation et pour une forme rectangulaire, par translation.

Enfin, il est à noter que l'enfant, capable de partager en 3 ou 5 parties, n'a pas nécessairement les qualités requises pour effectuer, de façon efficace, le partage en un nombre impair de parties. Selon les mêmes auteurs, ce premier mouvement de partage en un nombre impair de parties, semble être survenu de façon accidentelle puisque c'est à la suite de plusieurs tentatives infructueuses que les enfants en sont venus à être capables de partager en 3 ou en 5 parties une forme. Cette maîtrise du partage en un nombre impair de parties est décrite comme très difficile. En effet, les enfants se réfèrent constamment à l'algorithme, c'est-à-dire, de partager en deux initialement la forme qu'ils tentent par la suite de compenser par translation ou rotation pour arriver à un nombre impair de parties égales.

Pour donner une forme de l'ensemble de ce que nous avons présenté dans cette section, nous pouvons dire : le partage en un nombre pair de parties est plus facile que celui en un nombre impair de parties, comme le mentionnent Pothier et Sawada (1983), l'enfant fait toujours référence à ses expériences passées pour résoudre un problème. D'ailleurs, le partage en un nombre pair de parties est plus souvent demandé aux enfants, ce qui en facilite probablement l'acquisition.

3.2. Fraction : point de vue de la cognition et de la psychologie

Dans leur étude, Hétu et Desjardins (1974) tentent d'expliquer le développement psychologique de la fraction. Ils observent trois stades de développement de la fraction chez 1'enfant fréquentant une classe primaire. Tout d'abord, la stratégie traditionnelle d'enseignement induit le développement d'une pseudo-fraction sur laquelle on impose un symbolisme qui n'a rien à voir avec la réalité mathématique. Bien que nous retrouvions deux types de pré-fractions issues des opérations de partage et de réunion, celles-ci sont incomplètes puisqu'elles ne supportent pas la coordination de ces deux opérations. Lorsque les opérations de partage et de réunion peuvent être articulées, elles apparaissent en tant que fractions-quantités, correctement structurées d'un point de vue symbolique et logico-mathématique, mais elles sont applicables seulement à des objets concrets. Viennent ensuite les fractions-relations où l'individu érige un système mathématique, celui-ci étant constitué de relations d'équivalence réversibles, ceci en l'absence de support concret.

Dans l'enseignement traditionnel, les auteurs nous précisent que le système des fractions subit une double réduction. Dans celui-ci, d'une part, la fraction est représentée par un objet réel sur lequel on pratique divers fractionnements et, d'autre part, l'équivalence des fractions est représentée par la comparaison de quantités d'objets, ce qui oblige l'enseignant à une pédagogie particulière, celle de recourir d'emblée à des objets ou des collections d'objets d'égale grandeur. Or, si la première réduction est conforme à l'un des aspects de la fraction mathématique - puisque le fractionnement suppose la coordination des opérations de partage et de réunion - la deuxième ne donne aucune prise à la comparaison qu'elle est supposée représenter, puisque l'enfant peut se contenter de comparer les quantités en présence.

Pour sa part, Kieren (1976) affirme que nous ne connaissons pas actuellement de séquence de développement naturel de la fraction. Ainsi, confrontés aux nombres rationnels, les enfants travaillent avec des structures mathématiques qui n'ont rien de commun avec leur propre expérience. Nous constatons, grâce aux études réalisées, que l'enseignement formel fait peu pour enrichir l'expérience de l'enfant, puisque celui-ci est centré sur les opérations sur la fraction et le système décimal, en ignorant le reste. En effet, selon Kieren, chacune des interprétations du nombre rationnel est reliée à des structures cognitives ; soit elles ignorent l'image d'ensemble, soit elles échouent à identifier certaines structures particulières nécessaires dans le développement de l'enseignement ; cela peut conduire à un manque de compréhension chez l'enfant. De même, comme le faisaient remarquer Hétu et Desjardins (1974), la science mathématique, telle que l'a construite la pensée adulte, n'est que de peu d'utilité pour comprendre la mathématique chez 1'enfant.

Les études de Piaget et al. (1948) rassemblent les difficultés conceptuelles liées au développement cognitif de l'enfant, celles que nous pouvons considérer comme des obstacles ontogénétiques. Les auteurs de l'étude annoncent six conditions nécessaires à la compréhension de la notion de fraction, toutes liées à la notion de conservation de quantités :

1. accepter l'existence d'une totalité divisible : pour les enfants de moins de 6 ans, la division d'un entier en parts signifie qu'il cesse d'exister en tant qu'un entier.
2. accepter le rapport entre les parties et un entier : il est nécessaire, dans le cas de fractions, que la totalité des parties soit distribuée ou prise. Les enfants plus petits ont une tendance à distribuer les parts, sans prendre en compte la totalité. Dans les cas de quantités discrètes, il faut que le nombre d'éléments de la collection soit divisible de façon à constituer des sous-collections.

3. comprendre le rapport entre le nombre de parts et les divisions : si la consigne est de diviser une figure, les enfants confondent le nombre de traits nécessaires pour faire la division et le nombre des parties obtenues.
4. accepter la division égale des parts : il faut établir à la fois des rapports entre les parts et l'entier ainsi qu'entre les parts entre elles.
5. accepter l'idée qu'une fraction peut être divisée à nouveau pour constituer une nouvelle fraction.
6. accepter le principe d'invariance : la totalité des fractions d'un entier, quand elle est réunie, doit reconstituer l'entier. Les plus jeunes des enfants ont du mal à comprendre que ce qui a été divisé peut redevenir pareil à la grandeur existante avant la partition.

Du point de vue de la psychologie, la construction de la fraction passe par de nombreuses étapes. Le développement des schèmes additifs et multiplicatifs se constituent à peu près synchroniquement vers l'âge de sept ans. C'est vers cet âge, lors des premières années scolaires, que nous pouvons espérer, chez ces élèves, l'acquis du concept de rapport, même s'il n'est pas rare de rencontrer plus tard des difficultés conceptuelles de ce genre, surtout lorsqu'il s'agit d'un changement de cadre, c'est-à-dire, le passage du modèle des figures au modèle de la collection d'objets.

Ces données théoriques, appliquées à la psychologie et aux mathématiques, nous assurent de la spécificité des nombres rationnels (ensemble Q) par rapport aux nombres naturels (ensemble N) et aux nombres entiers relatifs (ensemble Z), mais ne nous indiquent pas clairement le statut psychologique des opérations qui leur correspondent.

4. Fraction : point de vue didactique

Ce chapitre est consacré à aborder l'aspect didactique des fractions. Nous allons commencer par présenter les trois pôles fondamentaux composant le triangle didactique ; nous mettrons en évidence la contribution du champ théorique de la didactique des mathématiques à la compréhension du processus de l'enseignement ; nous nous intéresserons particulièrement au concept de la Transposition Didactique développé par Chevallard et à celui du Champ conceptuel développé par Vergnaud avec leurs applications sur le concept de fraction.

Nous abordons dans le paragraphe suivant le triangle didactique qui permet de caractériser les situations d'enseignement-apprentissage. Ce triangle permet également d'analyser les relations liant le savoir, l'enseignant et l'apprenant.

4.1. Triangle didactique et pôles fondamentaux de la relation didactique

La didactique étudie les processus d'élaboration d'un savoir à connaître, sa transmission par le maître et son aquisition par l'élève pour une discipline donnée. Elle étudie les interactions entre les trois pôles de la situation d'enseignement-apprentissage, à savoir : le maître avec son idéologie privée, le savoir soumis à la transposition didactique et l'élève avec une structure cognitive particulière : ce triptique s'appelle « Le triangle didactique ». Celui-ci est une représentation schématisée du système didactique ; il se définit comme étant un système qui relie ces trois pôles ; il n'est pas un concept mais un dessin symolique. Il précise les termes en relation dans une situation d'apprentissage et définit implicitement les tâches de chaque pôle. La dynamique de toute action éducative est basée sur l'interaction entre ces trois pôles qui représentent la didactique proprement dite.

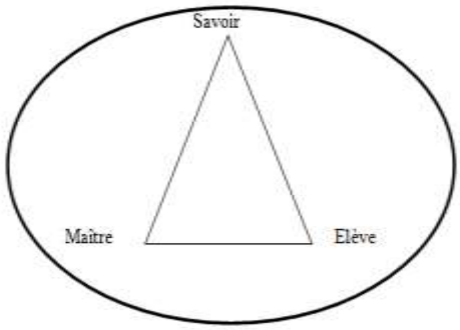


FIGURE 8 – LES POLES FONDAMENTAUX DE LA RELATION DIDACTIQUE.

Reprenant les travaux que Jean Houssaye présentait dans sa thèse en 1982, Jean-Louis Martinand (1987), chercheur en Sciences de l'Education, propose une définition du triangle didactique, dans laquelle nous pouvons distinguer trois secteurs :

- Le secteur de l'élaboration des contenus, dans lequel se situent le registre épistémologique et la structure conceptuel, le triangle didactique du domaine. Ce sont les savoirs à partir desquels vont découler la prise en compte du niveau de fonctionnement de la pensée de l'élève et les différents types de situations didactiques.
- Le secteur des stratégies d'appropriation de l'élève qui sont celles basées sur les psychologies de l'apprentissage. Dans ce secteur, il est question de savoir dans quelles mesures les élèves sont capables de s'approprier les contenus qui leurs sont dévolus.
- Le secteur des interactions didactiques correspond au registre pédagogique ; il comprend toutes les 'coutumes' didactiques, les aides didactiques ainsi que toutes les démarches possibles pour amener le savoir à enseigner.

Tous les pôles convergent vers un point central, spécifique à la construction des situations didactiques.

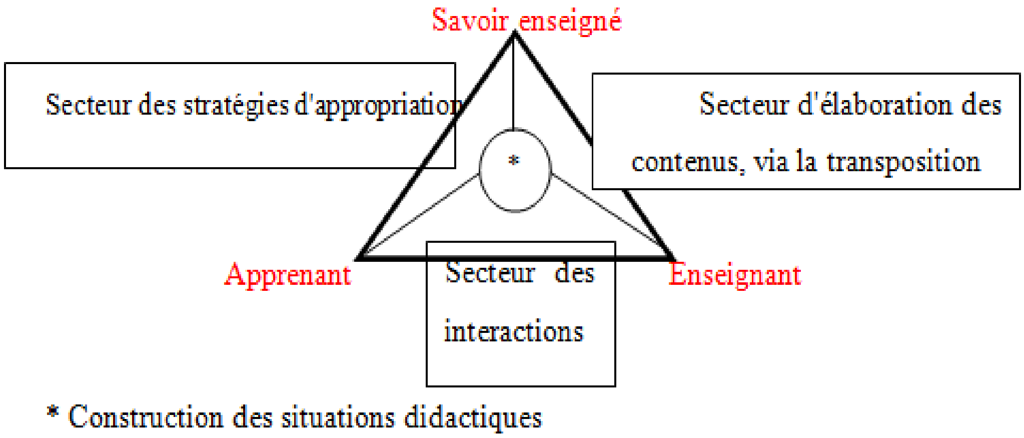


FIGURE 9 – LE TRIANGLE DIDACTIQUE DE JEAN-LOUIS MARTINAND (1987).

Nous souhaitons développer ici les pôles prenant en compte :

- d'une part, la dimension des savoirs à véhiculer, le savoir à enseigner (décrit dans les manuels scolaires). Il est essentiel d'étudier cette première entrée, c'est-à-dire de faire le point sur le statut des fractions avant toute réflexion sur les interactions qu'elles peuvent avoir avec les élèves (représentations, obstacles…),
- d'autre part, la dimension des appropriations et des apprentissages par les élèves des savoirs transmis, les fractions, en particulier, à partir d'un questionnaire écrit afin de se saisir de la compréhension manifestée par les élèves de CM1 et de CM2 de leurs différentes significations des fractions.

Il nous est maintenant utile d'exposer le concept de la Transposition Didactique développé par Chevallard (1985) dans le domaine de la didactique des mathématiques.

4.2. Contribution du champ théorique de la didactique des mathématiques à la compréhension du processus d'enseignement

Le champ théorique de la didactique des mathématiques est l'un des champs qui s'occupent de l'étude de certains phénomènes de l'école et plus précisément ceux qui concernent l'étude de l'apprentissage des notions mathématiques. Le système utilisé en didactique, pour modéliser les phénomènes étudiés, se constitue d'une triade, c'est à dire, l'élève, l'enseignant et le savoir enseigné. Le point de vue didactique engage les rapports enseignant-élèves, mais aussi les rapports que chacun de ces deux éléments entretient avec le savoir enseigné. D'ailleurs, pour étudier les rapports entre les trois éléments du système didactique, les chercheurs en didactique des mathématiques ont développé des concepts, ceux du champ conceptuel, de la situation didactique, du contrat didactique et de la transposition didactique… Parmi ceux-ci, nous nous intéresserons dans les sections suivantes au concept de la Transposition Didactique développé par Chevallard et celui du Champ conceptuel développé par Vergnaud avec leurs applications sur le concept de fraction.

4.2.1. Retour sur le concept de la Transposition Didactique

Le savant scientifique donne le savoir savant qui ne peut pas être enseigné aux élèves tel quel, il doit subir une reconstruction spécifique pour l'école, il doit être adapté à l'école. En effet, la transposition didactique pose la question du savoir, ce concept a été créé par le sociologue Michel Verret (1975), il fut le premier à utiliser ce concept dans le champ de la sociologie de l'éducation. Il postule, dans sa thèse, que toute pratique d'enseignement d'un objet présuppose en effet la transformation préalable de cet objet en objet d'enseignement. C'est aujourd'hui un concept central de la didactique à partir du travail en mathématiques produit par Yves Chevallard (1985).

Avec celle-ci, Chevallard s'est proposé de montrer que le savoir à enseigner ne peut pas se laisser décrire comme une réduction d'autres savoirs plus complexes, issus d'une communauté savante. Un mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés, il les décontextualise et les dépersonnalise afin de leur donner une forme aussi générale que possible pour les rendre communicables. En revanche, l'enseignant fait le travail inverse : il fait une ré-contextualisation en cherchant des situations qui vont donner du sens aux savoirs à enseigner (Briand et Chevalier, 1995).

Comme Chevallard (1991) le décrit :

> « Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner. […] Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail » qui est d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique » (p. 39).

En effet, la transposition du savoir est la succession des transformations, celle qui fait passer de la culture en vigueur dans une société (savoir savant, pratiques sociales, valeurs, etc…) à ce que l'on en retient dans les objectifs et les programmes de l'école, puis à ce qu'il en reste dans les contenus effectifs de l'enseignement et du travail scolaire, et enfin - dans le meilleur des cas - à ce qui se construit dans la tête d'une partie des élèves.

De plus, cinq conditions sont nécessaires pour élaborer le savoir scolarisable :

- la désyncrétisation du savoir, Chevallard désigne ainsi le découpage d'un savoir complexe en champs spécialisés.
- la dépersonnalisation du savoir ; dans ce processus, c'est la personnalité du chercheur qui est mise de côté, sa subjectivité, ses indécisions. Verret décrit la dépersonnalisation du savoir comme la séparation du savoir de la personne. La transposition didactique produit, en effet, un savoir anonyme et coupé de ses origines et aussi de sa production historique dans la sphère du savoir savant.
- la programmabilité du savoir ; c'est organiser le savoir de manière linéaire et selon un ordre logique dans un temps accordé par les instructions officielles définies dans les programmes scolaires pour aborder une notion. Cela conduit à un découpage du savoir à enseigner en savoirs partiels. Cela sera donc la noosphère qui sera responsable de la programmabilité du savoir.
- la publicité du savoir, il faut voir là la nécessité de définir explicitement le savoir à enseigner et ceci, notamment, au travers de la publication des programmes. La publication du savoir repose essentiellement sur la dépersonnalisation du savoir qui permet son appropriation en tant que production sociale.
- le contrôle social des apprentissages, l'éducation formelle - développée dans le cadre institutionnel - est marquée par l'exigence de développer un contrôle social des apprentissages. Le savoir à transmettre étant ici explicitement défini, il devient savoir à enseigner.

De même, ce concept de la transposition didactique correspond selon Develay à un travail de réorganisation de présentation, de genèse de connaissances pré- existantes en vue de leur enseignement. Il apparaît alors comme une forme d'intégration d'un concept au texte du savoir scolaire. Ce concept permet de comprendre la distance qui sépare le savoir élaboré au niveau des chercheurs de celui qui est destiné à être enseigné, ou celui qui est enseigné. Les glissements entre savoirs de référence, programmes, manuels, et pratiques des enseignants forment la trace empirique de la transposition didactique de la notion.

À l'école, ces transformations commencent avec la transposition externe et se poursuivent par la mise en pratique des programmes. Ainsi, les programmes, établis par la noosphère (qui regroupe les pédagogues, didacticiens et professionnels de l'Education Nationale), ouvrent la porte de la transposition didactique. Les manuels scolaires sont élaborés en fonction de ces programmes, prenant en compte la démarche d'investigation. Ce savoir qui est enseigné devient alors le savoir acquis par l'élève, si l'on considère que l'élève est acteur de ses apprentissages.

Ainsi, différents types de savoirs peuvent être distingués : le savoir savant qui est produit par les scientifiques, le savoir à enseigner qui est désigné par les instructions officielles issues des décisions prises par la noosphère et qui existe dans les programmes officielles et dans les manuels scolaires, le savoir enseigné, tel qu'il est enseigné par les professeurs dans les classes et le savoir appris, tel qu'il est appris par les élèves.

L'acheminement du savoir est clairement traduit par le schéma suivant :

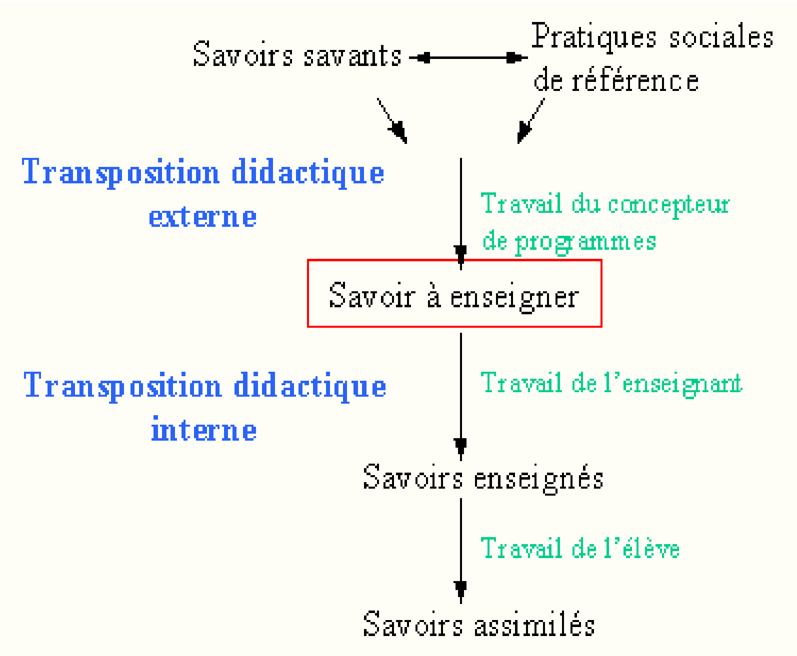


FIGURE 10 – LES DIFFERENTES ETAPES DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE. (DEVELAY, 1992)

Le cadre conceptuel de la transposition devient didactique quand il s'applique à une discipline d'enseignement. L'objet du savoir se définit dans le domaine du savoir savant mais il n'est pas enseignable sous cette forme. Il doit subir des transformations pour passer du savoir savant au savoir enseigné en s'insérant dans un discours didactique. Une fois cette transformation terminée, le savoir savant et le savoir didactique (enseigné) sont différents, ils changent de nature. Ce changement concerne en particulier leur environnement épistémologique et la signification des concepts qui les structurent. Dans la transposition didactique, nous distinguons deux phases où de nombreux acteurs sont impliqués. La première phase est la transposition didactique externe qui représente le passage du savoir savant au savoir à enseigner et la seconde est la transposition didactique interne qui concerne le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Nous allons, ci-dessous, prendre séparément chacune de ces deux phases pour les détailler.

4.2.1.1. La transposition didactique externe

Cette étape est prise en charge par la noosphère qui assure le passage du savoir savant au savoir à enseigner, ce dernier est représenté par les programmes ou les manuels scolaires. Il s'agit, pour Chevallard, de la sphère où nous pensons le fonctionnement didactique. En effet, la noosphère désigne l'organe politique dont elle est composée, qui rédige les programmes officiels des enseignants, des universitaires, des auteurs de manuels, des inspecteurs, des didacticiens, des parents d'élèves... Celle-ci cherche à rétablir l'équilibre, la compatibilité entre l'école et la société en tenant compte d'une double contrainte : le savoir enseigné doit être suffisamment proche du savoir savant et suffisamment éloigné du savoir des parents. La noosphère procède à la sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme savoir à enseigner, seront alors soumis au travail de transposition ; c'est elle, encore, qui va assumer la partie visible de ce travail, ce qu'on peut appeler le travail externe de la transposition didactique, par opposition au travail interne, qui se poursuit, à l'intérieur même du système d'enseignement, bien après l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné.

De plus, Yves Chevallard et Marie-Alberte Joshua (1982) énoncent cinq règles de la transposition didactique externe :

- la modernisation du savoir scolaire, c'est à dire mettre « à jour » les contenus d'enseignement pour les rapprocher de l'état des connaissances universitaires.
- la lutte contre l'obsolescence didactique. En lien avec la règle précédente, le savoir enseigné doit rester légitime et donc conserver une avance sur le savoir commun, c'est-à-dire que les parents doivent en savoir toujours moins que leurs enfants en termes scolaires sinon cela provoquerait une perte de la légitimité de l'enseignement si tout le monde peut enseigner des connaissances communes.
- l'articulation du nouveau et de l'ancien, c'est-à-dire, certains savoirs jouent le rôle d'une articulation entre savoir nouveau et savoir ancien, ce qui permet ainsi de conserver des savoirs anciens en permettant de comprendre leur renouvellement et leur emboîtement aux savoirs nouveaux.
- l'aptitude à se traduire en exercices et en leçons ; en effet, la notion sélectionnée doit constituer un morceau de choix intéressant en termes d'apprentissages potentiels pour les élèves.

- un outil contre l'échec de l'enseignement d'une notion ; concrètement, la notion est vue comme susceptible de faire disparaître les difficultés bien identifiées rencontrées par les élèves.

A la transposition didactique externe, s'ajoute la transposition didactique interne.

4.2.1.2. La transposition didactique interne

Ce sont les enseignants qui prennent en charge cette étape du passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. L'objet à enseigner (programmes, manuels) est transformé ou interprété en objet d'enseignement. L'enseignant va plutôt ré-personnaliser et re-contextualiser le savoir dans le cadre de sa séance. Ainsi, nous avons :

- une nouvelle programmation (organisation des séquences d'enseignement),
- un nouveau découpage du savoir (chapitre, thème, objectif de séance), l'aspect public du savoir est revu grâce à sa mise en texte ainsi que par ses modes d'évaluation,
- l'existence de contraintes propres à l'institution (établissements scolaires), comme les contraintes horaires, matérielles, où celle du choix du manuel, celui-ci pouvant être imposé par un chef d'établissement à ses enseignants,
- une variabilité intrinsèque aux connaissances et conceptions de l'enseignant.

Il est bien sûr nécessaire de procéder par ces deux étapes pour l'enseignement des fractions.

4.2.1.3. Fraction : Transposition didactique du savoir en jeu

Nous présentons maintenant l'étude de la transposition didactique du savoir, ici en jeu, les fractions dans le contexte français. Sans suivre l'ordre traditionnel des types de savoirs considérés dans le processus de transposition, nous partons de l'analyse du savoir à enseigner à partir des consignes - activités portant sur les fractions - proposée à l'intérieurs de dix manuels scolaires, cinq en CM1 et cinq en CM2.

La notion de transposition didactique s'applique aux transformations que les savoirs désignés, à enseigner, doivent subir, dès leur origine, afin devenir aptes à prendre place parmi les objets d'enseignement.

Posons-nous la question de la place des fractions dans la transposition didactique :

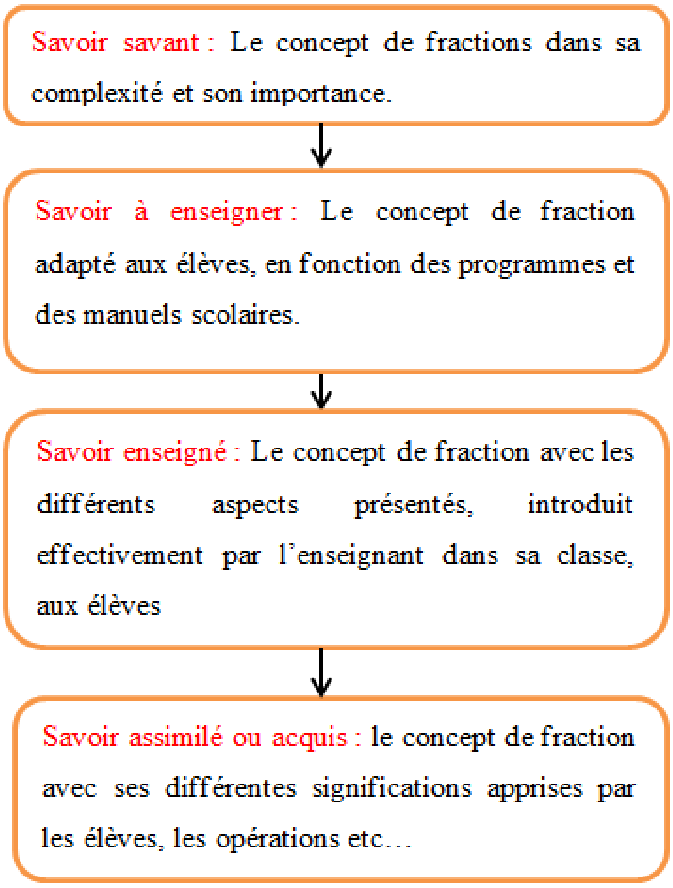


FIGURE 11 – LA PLACE DES FRACTIONS DANS LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE.

De la notion de la transposition didactique développée par Chevallard où nous avons pu nous attarder sur les chemins nécessaires à la transformation d'un savoir savant à un savoir enseigné, abordons maintenant certaines approches didactiques concernant les fractions et plus particulièrement celle de Gérard Vergnaud.

4.2.2. Apport de la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud

Le psychologue et didacticien Gérard Vergnaud développe la théorie des champs conceptuels dans laquelle il défend la thèse que les schèmes sont au centre du développement cognitif. Selon lui, cette théorie est une « théorie cognitive qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques » (Vergnaud, 1996, p. 197).

Vergnaud a défini le *développement cognitif* comme un développement d'un grand répertoire de schèmes, en y affectant différents aspects de l'activité humaine, cela en raison des expériences. En effet, c'est à travers l'expérience que l'individu s'adapte à des situations ; son organisation, lors d'une activité, évolue grâce à son adaptation. L'expérience implique un écart entre les activités, une aide d'autrui et une analyse des différentes étapes de l'activité. Ainsi, c'est à travers du développement des formes d'organisation d'une activité (gestes, compétences, interactions, activités langagières, affectivité) que les schèmes sont construits et modifiés ; c'est cela qui est appelé développement cognitif.

Un *schème,* selon cet auteur, est une « organisation invariante de l'activité pour une classe de situations données ». Un schème est universel et peut donner naissance à différentes séquences d'action, de recueil d'informations et de contrôle, selon les caractéristiques de chaque situation.

Un schème est formé de quatre composantes :

1. But, sous-but et anticipations ;
2. Règles de l'action, prise d'information et contrôle (règle de type 'si… alors…) ;
3. Invariants opératoires : concepts en acte et théorème en acte ;
4. Possibilités d'inférence en action (raisonnements pour 'calculer' les règles et anticipations).

Les invariants opératoires d'un schème sont les éléments responsables pour la reconnaissance des éléments pertinents de la situation :

a) Propositions, susceptibles d'être vraies ou fausses (théorèmes-en-acte) ;

b) Fonction propositionnelle, briques indispensables à la construction des propositions, sont des propriétés et des relations (concepts-en-actes, pas nécessairement conscients).

c) Arguments, les objets. En mathématiques, par exemple, les nombres, les propositions, les relations, etc…

D'après les classes de situations, les schèmes sont utilisés :

1. Dans une situation où le sujet a un répertoire pour se comporter ; c'est quand il utilise un schème unique pour une même classe de situation ;
2. Dans une situation où le sujet n'a pas de répertoire pour se comporter (c'est le cas quand il agit par reflexe, exploite, essaye), quand il utilise plusieurs schèmes qui seront accommodés, décombinés et recombinés.

Par rapport au développement conceptuel, nous partons du présupposé qu'un *concept* est appris par les individus quand ils dominent trois ensembles de facteurs en relation avec ces concepts, à savoir :

> « a) l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence),
> b) l'ensemble des invariants opérationnels sur lesquels repose de propriétés du concept (le signifié),
> c) l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les procédures de traitement (le signifiant). » (Vergnaud, 1996, p. 212).

Quand les individus commencent à dominer ces dimensions d'un concept, celui-ci commence à faire *sens* pour lui. Ainsi, un concept est progressivement appris quand les individus amplifient les formes possibles de représentation avec celles des relations de situations diverses. Les concepts ne font pas sens lorsqu'ils sont isolés, mais ils coexistent dans un réseau de concepts auquel Vergnaud donne le nom de champ conceptuel.

Vergnaud (1983) a utilisé le terme de champ conceptuel pour décrire « un ensemble de problèmes et de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts, des procédures et des représentations de plusieurs types en étroite connexion » (p. 127). Selon (Vergnaud, 2007), un champ conceptuel « est à la fois un ensemble de situations et un ensemble de concepts ; ensemble de situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de concepts, de schèmes et de représentations symboliques en étroite connexion ; ensemble de concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations » (p. 9).

Nous pouvons dire alors qu'un concept se développe à partir de plusieurs situations et une situation peut être analysée à partir de plusieurs concepts.

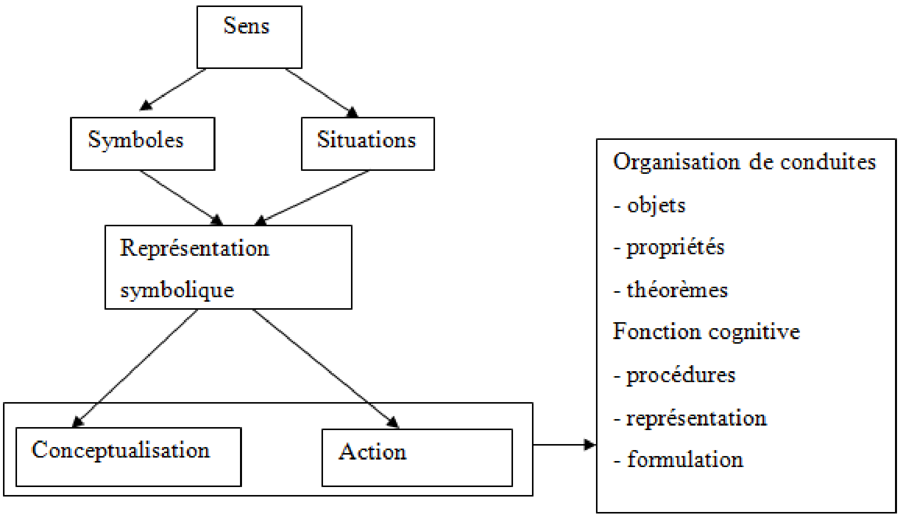


FIGURE 12 – PROCESSUS DE CONCEPTUALISATION SELON LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS DE VERGNAUD. (DE MOURA BRAGA, 2009, P.23)

Un concept prend du sens pour le sujet à travers les situations et les problèmes (théoriques ou pratiques) à résoudre qu'il a rencontrés : processus d'élaboration pragmatique. Ainsi, le langage et le symbolisme ont un rôle très important à jouer dans :

a) l'identification des invariants ;

b) l'aide aux raisonnements et à l'inférence ;

c) l'aide à l'anticipation des effets des buts, à la planification et au contrôle de l'action.

De plus, Vergnaud a défini un champ conceptuel des structures multiplicatives comme des « problèmes de proportion simple et multiple, qui incluent des fonctions linéaires et n-linéaires, espaces vectoriels, analyse dimensionnelle, fraction, rapport, taux, nombre rationnel, et de multiplication et de division » (Vergnaud, 1983, p. 141). Il est important de noter que les nombres rationnels et les fractions entrent dans cette catégorie et englobent une variété de sujets. Nous allons au-dessous donner plus d'éclairage du champ conceptuel des structures multiplicatives de Vergnaud.

4.2.2.1. Le champ conceptuel des structures multiplicatives

Kathleen Hart (1981) relève une difficulté pour certains élèves à dépasser une stratégie additive. L'auteur insiste également sur les conceptions implicites qui découlent de généralisations tirées du domaine des entiers positifs et qui constitue de véritables obstacles lorsque nous étendons les opérations aux fractions plus petites que un. L'exemple le plus connu, d'une telle conception fausse, est celui de la multiplication qui rend plus grand alors que la division rend plus petit ; la division implique normalement que c'est le plus grand nombre qui doit être divisé par le plus petit, jamais l'inverse. Hart indique la difficulté à passer des rapports simples (de type 1/2 ou 1/4) aux rapports plus complexes (de type 3/2).

Ce passage, au cours de l'apprentissage, des situations de problèmes additifs aux situations de problèmes multiplicatifs est relativement difficile ; l'enfant doit faire face, tout à la fois, à une augmentation importante du nombre de catégories de problèmes et à une complexité plus grande des procédures et des concepts qui permettent de les résoudre.

En effet, plusieurs idées contribuent à la compréhension de la pensée multiplicative. Lamon (1999) décrit la pensée multiplicative par une discussion absolue contre la pensée relative ; il discute des fractions comme des nombres relationnels, notant qu'ils représentent des relations entre deux quantités discrètes ou continues. Selon lui, comparer une quantité avec une autre quantité nécessite une réflexion multiplicative. Lamon explique que cette forme de pensée est fondamentale pour la compréhension de plusieurs idées importantes liées aux fractions, à savoir :

- la relation entre la taille de pièces et le nombre de pièces,
- la nécessité de comparer des fractions par rapport à la même unité,
- la signification d'un nombre fractionnaire,
- le rapport des fractions équivalentes,
- la relation entre les représentations des fractions équivalentes.

De plus, Behr et Post (1992) mettent en évidence l'importance de la pensée multiplicative lorsqu'ils soulignent que l'ensemble des nombres rationnels est le premier ensemble de nombres, non basé sur un algorithme de comptage d'un certain type, que les étudiants rencontrent dans leur étude des mathématiques.

Lamon porte son attention sur les différences entre la pensée multiplicative et la pensée additive, il différencie quantité absolue et quantité relative. Une quantité absolue est indépendante et non liée à une autre quantité. Sa notion de quantité absolue emploie la pensée additive avec laquelle les enfants sont familiers avant d'être introduits aux fractions. Lorsque les enfants sont invités à comprendre les changements par rapport à une autre chose, ils doivent s'engager dans une pensée relative et s'accorder avec les quantités relatives. Ainsi, la pensée relative implique de comparer une quantité à une autre chose. Ceci est également connu dans la pensée ou le raisonnement multiplicatif.

Afin d'illustrer la différence qui existe entre la pensée additive et la pensée multiplicative, Lamon (1999) décrit un scénario similaire à celui-ci que nous présentons ici.

Il y a deux boîtes de bonbons, la première boîte contient 4 pièces de bonbons, et la deuxième contient 10 pièces. Les enfants vont utiliser la pensée additive pour répondre à certaines questions comme :

- « Combien de pièces de bonbons sont dans la première boîte ? »
- « Combien de pièces de plus de bonbons trouve-t-on dans la deuxième boîte que dans la première ? »

En revanche, la pensée multiplicative serait nécessaire pour répondre à ces questions : « Quelle partie d'une douzaine représentent les pièces dans chacune des deux boîtes? » et « Le nombre de pièces dans la deuxième boîte est de combien de fois plus grand que le nombre de la première boîte? » Notons que les réponses aux questions multiplicatives décrivent combien de quelque chose par rapport à combien de fois. La quantité multiplicative décrite est relative à quelque chose plutôt que d'être une quantité dénombrable.

Une autre façon de réfléchir à la différence entre la pensée multiplicative et la pensée additive est exprimée par Behr et Post (1992) qui affirment que les nombres rationnels ne sont pas basés sur des algorithmes de comptage. Cela signifie qu'une certaine forme de comptage simple ne va pas résoudre tous les problèmes. Jusqu'à l'introduction des nombres rationnels, le comptage pourrait être utilisé pour résoudre des problèmes. Le comptage ne fonctionne pas chez les nombres rationnels parce que cet ensemble est « dense », ce qui veut dire que nous pouvons toujours trouver un nombre rationnel entre deux nombres rationnels donnés. Smith (2002) note que même si les fractions sont la première série de nombres, qui expriment des relations, rencontrée par les élèves, ceux-ci ont des expériences de la pensée multiplicative.

Par exemple, ils partagent des choses avec les autres, ces expériences devraient aider les élèves à la transition de la pensée additive à la pensée multiplicative.

La pensée multiplicative est l'un des aspects de l'idée plus large du champ des structures multiplicatives à qui appartiennent les fractions. Lamon (1993) décrit la complexité de ces structures comme une coordination conceptuelle nécessaire de multiples compositions. Cela signifie que nous avons à composer des unités ; par exemple, trouver 3/4 des 16 choses implique de commencer par les 16 choses comme 16 unités. Puis, faire des unités d'unités, donc, il y a 4 quatre-unités. Enfin, faire 1 trois-unités de 3 des 4-unités. Ce processus, illustré par la Figure 13, représente une composition à trois niveaux d'unités.

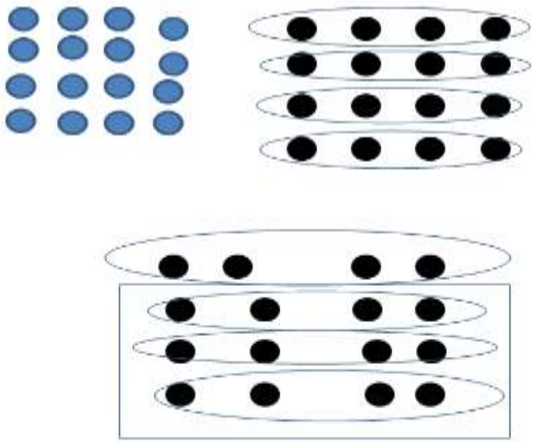


FIGURE 13 – MULTIPLES COMPOSITIONS D'UNITES.

Selon Lamon (1993), les structures multiplicatives sont cognitivement complexes. Cette discussion permet de souligner que la pensée multiplicative est basée sur les relations entre les quantités plutôt que sur le comptage. Il peut s'agir de la composition et de la décomposition des unités ainsi que du partitionnement. Pour ces raisons, les étudiants qui sont habitués au raisonnement additif peuvent avoir du mal à passer au raisonnement multiplicatif (Behr et Post, 1992 ; Lamon, 1999). Il semble donc important d'être conscient de cette nécessité de passer de la pensée additive à la pensée multiplicative.

En effet, le raisonnement proportionnel est généralement décrit comme une compétence locale qui, progressivement, doit être étendue à une classe de plus en plus large de problèmes. Cette conception s'appuie sur le fait que les savoirs et savoir-faire des élèves se développent sur une longue période de temps et se construisent à partir d'un grand nombre de situations qui, module après module, donnent du sens aux concepts et aux procédures utilisées.

De plus, la maîtrise des situations de problèmes de fractions nécessite l'utilisation de nombreux concepts de natures différentes. En effet, un concept opère dans des situations diverses et plusieurs concepts agissent simultanément à l'intérieur d'une même situation. Le champ conceptuel des structures multiplicatives se dit de « l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire, quotient et produit de dimensions, fraction, rapport, nombre rationnel, multiple et diviseur, etc. » (Vergnaud, 1991).

D'un point de vue didactique, les nombres rationnels constituent une solution à une vaste variété de problèmes et les situations qui donnent un sens à ces nombres sont diversifiées et nombreuses. Celles-ci définissent, en quelque sorte, le champ conceptuel des fractions, c'est-à-dire les espaces de problèmes que ces nombres ont permis de résoudre ou dont ils étaient la solution. Ainsi, les définitions choisies, pour les enseigner, peuvent être nombreuses et les occasions de construction de ces nombres sont variées. L'examen effectué notamment par Kieren (1993, 1988) et Behr et al (1983) (voir Blouin, 2002) de l'ensemble de ces situations, permet de dégager les différentes significations suivantes de la fraction: partie-tout, rapport, opérateur, quotient et mesure. Cet examen approfondi des différents rôles tenus par une notion mathématique s'avère nécessaire comme le préconise la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990).

Gérard Vergnaud (1983) a développé une analyse systématique des problèmes multiplicatifs. Cette classification s'appuie sur l'analyse de la structure mathématique du problème, c'est-à-dire des relations qu'entretiennent les questions et les différentes données de l'énoncé.

Dans le cadre de la structure de proportion simple, nous considérons les deux problèmes suivants posés par Levain (1992) : « 1. Paul achète 7 petits pains pour 28 F. combien coûte un petit pain ? » et 2. Nicolas achète des tubes de colle pour 28 F ; chaque tube coûte 7 F. combien de tubes va-t-il acheter ? » (p. 139).

La solution pour les deux problèmes est : « 28 : 7 = 4 ». Le « :7 » du premier problème (fig.1) représente l'application d'un opérateur entre deux grandeurs de même nature. C'est un rapport ou un opérateur « scalaire » : « sept fois moins » et son inverse « sept fois plus » qui s'appliquent aussi bien aux francs qu'aux petits pains mais ne sont ni des petits pains ni des francs.

Par contre, le « : 7 » du deuxième problème (Fig.2) est un opérateur qui fait passer d'une catégorie de mesure à une autre. Ce passage s'analyse en termes de fonctions, il implique la notion de quotient de dimensions (francs pour tube de colle) et de fonction réciproque dont la maîtrise est délicate.

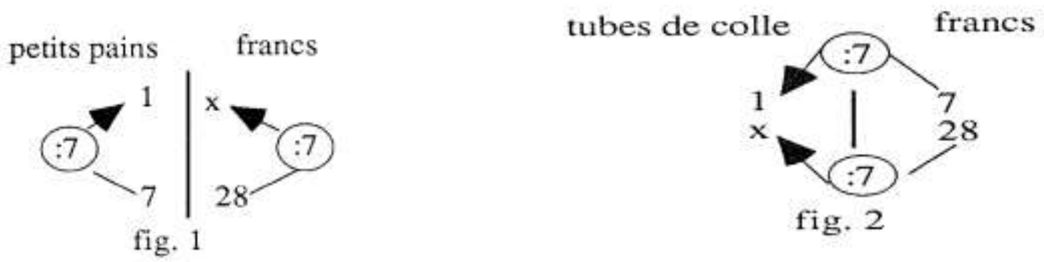


FIGURE 14 – DESCRIPTION DES SCHEMAS DE LA RESOLUTION DES DEUX PROBLEMES POSEES PAR LEVAIN (1992, P.141)

La théorie des champs conceptuels fournit un cadre pour comprendre le développement progressif des savoirs et savoir-faire à l'intérieur d'un vaste ensemble de situations de différents niveaux de complexité. Elle intéresse à la fois le psychologue et le didacticien puisqu'elle permet de catégoriser ces différentes situations, d'analyser les procédures utilisées par les élèves, y compris les erreurs et d'étudier les principales représentations symboliques utilisées par les élèves. Elle intéresse aussi l'enseignant en l'aidant à proposer aux élèves un ensemble organisé de problèmes. L'enjeu principal, ici, est d'aider l'élève à développer un répertoire de significations d'une richesse et d'une plasticité plus grandes que celles habituellement enseignées comme la réduction et la limitation de l'enseignement du concept de la fraction à une ou deux significations, à savoir la signification partie-tout, mesure.

Après avoir mis en évidence les différents aspects concernant le concept de fraction, nous allons, dans la partie suivante, nous concentrer plus sur l'état de notre question de recherche, à savoir le champ conceptuel de fraction.

PARTIE II : Cadre théorique et problématisation du concept de fraction en tant qu'objet d'enseignement et d'apprentissage

Cette partie vise à aborder les éléments théoriques sur lesquels nous nous appuyons pour notre travail de thèse, qui nous permettront et nous aideront à réaliser cette étude et à mettre nos résultats dans un cadre pertinent. Cette recherche s'intéresse à ce que les manuels scolaires exploitent, les connaissances et les représentations des élèves du cycle 3 de l'école primaire concernant les différentes significations possibles de la fraction. Notre travail sera centré sur un concept particulier, celui de fraction, et sur des élèves de niveaux scolaires bien déterminés, élèves de CM1 et de CM2 du primaire. Nous rappelons également le caractère exploratoire de notre étude, au sens où les investigations doivent conduire à des questions plus affinées sur l'apprentissage et l'enseignement de ce concept et à une première élaboration d'outils qui permettront de trouver des éléments de réponses à ces questions.

Cette partie comprend six chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous justifierons notre choix du concept de fraction comme notion autour de laquelle sera organisé notre travail.
- Au deuxième chapitre, nous présenterons un tour d'horizon des multiples recherches sur cette notion et nous nous intéresserons particulièrement aux différentes significations attribuées à la fraction. Nous nous arrêterons à l'enseignement/apprentissage de la fraction en France.

- Dans le quatrième chapitre, puisque nous souhaitons regarder la présentation que les manuels scolaires des mathématiques en CM1 et en CM2 donnent des significations de la fraction, il nous faut mettre en évidence la place et le rôle du manuel scolaire de mathématique dans l'enseignement-apprentissage en France et les fonctions du manuel scolaire pour l'élève et pour l'enseignant.
- Fort de ces éléments, le cinquième chapitre présentera le cadre théorique retenu pour notre travail.
- Le dernier chapitre, le sixième, abordera la problématique, l'objectif, les questions et les hypothèses de cette recherche.

1. Du choix du concept de fraction

Ce chapitre vise à justifier notre choix du concept de fraction comme notion autour de laquelle sera organisé notre travail. Nous allons présenter la place et l'importance des fractions en didactique et pédagogie des mathématiques, les diverses difficultés conceptuelles répertoriées dans l'apprentissage des fractions et les explications données pour comprendre l'origine de ces difficultés rencontrées par les élèves.

1.1. Place et importance du concept de fraction en didactique et pédagogie des mathématiques

Parmi les concepts mathématiques abordés chez des jeunes enfants, ceux reliés aux nombres rationnels sont des plus difficiles, surtout celui de fraction. Les fractions sont, parmi les concepts mathématiques, les plus complexes que les enfants rencontrent dans leurs années d'enseignement en primaire (Charalambos et Pitta-Pantazi, 2005). En effet, les nombres rationnels se rangent parmi les concepts les plus importants, en raison notamment, de l'usage qui en est fait dans une multitude de domaines, par exemple, en sciences pures et appliquées, en sciences humaines. Par ailleurs, l'importance de ces nombres rationnels est rappelée par Behr, Lesh, Post et Silver (1983), il est important, disent-ils, d'abord au point de vue pratique ; l'habileté à bien les appliquer améliore largement la compréhension et permet d'affronter des situations et des problèmes dans la vie réelle. Ils jouent ensuite un rôle plus qu'utile, au point de vue psychologique, en fournissant un excellent domaine dans lequel les jeunes peuvent développer leurs structures mentales. Enfin, concluent-ils, au point de vue mathématique, la compréhension des nombres rationnels fournit une des fondations sur lesquelles reposent les opérations algébriques élémentaires. Ils sont aussi reliés à des notions comme celles de mesure ou de partition pour les quantités, en particulier les quantités continues (Ohlsson, 1988).

De plus, l'importance mathématique des nombres rationnels est unanimement reconnue pour l'enseignement, notamment à la fin de l'école élémentaire et au début du collège. Il suffit de constater le foisonnement de la littérature didactique consacrée à ce sujet pour s'en convaincre. Certains privilégient dans cet apprentissage une construction formée de sous-constructions interdépendantes (Kieren, 1976, 1980, 1988, 1992 ; Behr, Lesh, Post et silver, 1983). D'autres, comme Mack (1990) ou Streefland (1991), insistent sur le rôle des « mécanismes intuitifs ». Les connaissances sur les nombres entiers, selon Streefland, inhibent la connaissance des fractions en favorisant un double comptage absolu - c'est-à-dire nombre de subdivisions de la partie ou nombre de subdivisions du tout - plutôt qu'une mise en relation d'une partie et d'un tout. Mais les enfants utilisent leurs connaissances des entiers pour développer la compréhension des nombres fractionnaires. Partitions et partages en parties égales occupent une place importante parmi les compétences de base requises (Vergnaud, 1983 ; Mack, 1990). La plupart des auteurs, avec Kieren (1980), attribuent à la relation partie/tout un rôle significatif dans les apprentissages premiers du concept de fraction. En France, Brousseau (1981, 1986-b) insiste sur la distinction entre fraction / mesure et fraction / opérateur linéaire dans la construction, par les élèves qu'il observe, de modèles mathématiques destinés à gérer les situations-problèmes physiques qu'il leur soumet et à prédire certains résultats. Douady et Perrin-Glorian (1986) privilégient les interactions entre cadres mathématiques et / ou physiques, pour faire émerger des problèmes, des solutions, des invariants nécessaires à la conceptualisation d'un nombre rationnel.

Les études de ce concept montrent, du point vue mathématique, combien il est ardu et combien il constitue une partie très riche des mathématiques (Behr et al., 1983 ; Kieren, 1988, 1995 ; Rouche, 1998). Ce concept s'inscrit en effet, dans le champ des nombres rationnels et ainsi il est caractérisé par les propriétés particulières de ces derniers (Vergnaud, 1983, 1990), notamment pour les notions d'équivalence et de densité et pour leur nature essentiellement multiplicative. Dans les études que nous avons consultées, les nombres rationnels sont principalement définis comme le résultat de la division de deux nombres entiers ($b = x\ a$; $x = a \div b$, où b est différent de 0) ou comme une classe d'équivalence de couple d'entiers naturels. Ainsi, par exemple, la fraction 2/3 est le représentant possible de l'ensemble des divisions de deux nombres entiers qui donnent le nombre rationnel 2/3 ; cette notion d'équivalence découle de cette propriété des nombres rationnels où chaque élément - fraction, nombre décimal ou pourcentage d'une classe d'équivalence- peut désigner la classe. Cette puissante caractéristique des nombres rationnels n'apparaît pas aisément à l'élève du primaire, habitué qu'il est, à désigner par un seul code digital un nombre entier. Aussi, par cette définition, nous comprenons que le nombre rationnel est à la fois un quotient et un rapport et qu'il est essentiellement de nature multiplicative. Le nombre 2/3 par exemple, est issu de l'une ou l'autre des suites d'opérations suivantes : $1 \times 2 \div 3$ ou $1 \div 3 \times 2$. Enfin, l'ensemble des nombres rationnels est dense car entre deux nombres rationnels quelconques, il existe une infinité de nombres rationnels. Cette dernière caractéristique constitue un enjeu important pour des élèves du primaire dans leur démarche de différenciation des nombres rationnels et des nombres entiers (Brousseau, 1981 ; Kieren, 1988, 1993 ; Desjardins et Hétu, 1974).

De plus, ces études montrent que les nombres rationnels sont, par rapport aux nombres entiers, de nouveaux nombres. Ils permettent ainsi de conserver certaines propriétés des nombres entiers mais également, ils nécessitent d'en abandonner d'autres. Par ailleurs, des nouvelles propriétés, en rupture totale avec celles des nombres entiers, émergent, notamment, les notions de densité et d'opérations multiplicatives. Avec l'ensemble des nombres rationnels, par exemple, la multiplication de deux nombres ne peut plus désormais se concevoir comme une addition répétée ou encore comme une opération qui « grossit » les nombres (Kieren, 1988). L'interprétation de l'opération de multiplication dans les nombres rationnels se distingue ainsi de celle réalisée dans les nombres entiers.

Saxe, Gearhart, et Nasir (2001) soulignent que le domaine des fractions est une partie importante du programme de mathématiques pour les classes primaires supérieures. Bien qu'elles soient importantes, il faut reconnaître que les fractions sont cognitivement complexes et difficiles à enseigner (Smith, 2002). De plus, Post (1989) se réfère à la nature omniprésente des nombres rationnels en mathématiques, il affirme que celle-ci place les rationnels dans l'un des domaines conceptuels les plus importants à étudier. Behr et Post (1992) notent que les élèves peuvent avoir des difficultés en algèbre parce qu'ils n'ont pas une compréhension complète, préalable des fractions.

Enfin, comme le montrent notamment les analyses conceptuelles de Kieren (1993, 1988) et de Rouche (1998), connaître les nombres rationnels modifie en profondeur notre conception du nombre et s'avère essentiel pour envisager l'ensemble des nombres réels. Leur utilisation permet aussi de mettre en relation le concept de nombre avec plusieurs concepts mathématiques. Enfin, l'acquisition du concept de nombre rationnel est nécessaire pour l'interprétation juste d'un nombre appréciable de situations, impliquant une quantification des relations entre parties et tout ou des comparaisons de rapports.

Toutes ces recherches, études et travaux ont permis des avancées importantes dans l'enseignement de ces nombres.

1.2. Difficultés conceptuelles dans l'apprentissage des fractions à l'école primaire

Les difficultés que comporte l'enseignement des fractions en primaire et les nombreux échecs constatés dans l'enseignement secondaire ne datent pas d'hier. Bien que la notion de fraction en mathématique soit l'une de celles qui devraient être maîtrisées depuis quelques années par les élèves du secondaire, la pratique professionnelle, tant au secondaire qu'à la formation des adultes, permet de constater que ce n'est pas le cas (Kieren et Southwell, 1979 ; Vergnaud, 1983).

Des travaux, en didactique des mathématiques et en enseignement-apprentissage des mathématiques, pointent les difficultés éprouvées par les élèves, liées à l'apprentissage de plusieurs notions. Ceux-ci révèlent que certaines notions demeurent difficiles, autant pour les élèves que pour les enseignants, dont les fractions (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001).

Les fractions sont parmi les concepts mathématiques les plus complexes rencontrés par les enfants dans les années du primaire (Charalambos et Pitta-Pantazi, 2005). De plus, dans l'introduction de son livre « Pourquoi ont-ils inventé les fractions », Nicolas Rouche (1998) dit : « Les fractions sont un des premiers et des principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques […] », de même, « L'enseignement et l'apprentissage des fractions ne sont pas seulement très difficiles, ils sont, dans le cadre plus large des choses, un échec lamentable » (Davis, Hunting et Pearn, 1993, P. 63).

Lamon (1999) dit :

> « L'on rencontre des fractions, les mathématiques prennent un saut qualitatif de sophistication. Soudain, les significations, les modèles, et les symboles qui ont travaillé lors de l'addition, soustraction, multiplication et division des nombres entiers ne sont pas aussi utiles » (p. 22).

Ce saut qualitatif de sophistication semble provoquer un tel niveau de confusion non seulement chez les élèves de l'école primaire mais aussi chez les adultes. En effet, Riddle et Rodzwill's (2000) ont stimulé une curiosité mathématique pour interroger : « Pourquoi est-ce que beaucoup d'adultes, même après des années de scolarisation, encore ne comprennent pas certains sujets de mathématiques, tels que des fractions » (p. 202) ?

Diverses difficultés se sont formées dans l'apprentissage des fractions : le symbole de la fraction, les opérations sur les fractions, la prise de conscience des différences entre les nombres naturels et les fractions et la prise de conscience qu'il existe une grande diversité de représentations graphiques et concrètes des fractions etc.

Nous allons présenter ci-après des difficultés déjà identifiées chez les élèves lors de l'apprentissage des fractions, en essayant également d'en donner les raisons.

1.2.1. Diverses difficultés conceptuelles répertoriées

Une des principales difficultés des élèves est le symbole de la fraction (Watanabe, 2002 ; Sinicrope et Mick, 1992 ; Picard, 1992 ; Mack, 1990 ; Hasemann, 1981). Ainsi, Ohlsson (1988) signale qu'une des difficultés, associée à cette notion, peut être interprétée comme une conséquence de sa nature composée ; qu'est-ce que cela signifie, pour un enfant, quand on combine les nombres « a » et « b » pour construire le nombre « a / b » ? Quel sens peut-il donner à la relation qui existe entre ces deux nombres a et b ?

Ohlsson (1988) observe :

> « The difficulty of the topic is…semantic in nature: How should fractions be understood? The complicated semantics of fractions is, in part, a consequence of the composite nature of fractions. How is the meaning of 2 combined with the meaning of 3 to generate a meaning for 2/3? The difficulty of fractions is also in part, a consequence of the bewildering array of many related but only partially overlapping ideas that surround fractions. » (p. 53).

Selon Picard (1992), la raison qui explique cette difficulté est le fait, pour les jeunes enfants, de devoir tenir compte de deux éléments à la fois, le numérateur et le dénominateur. Ils doivent aussi comprendre la relation entre le numérateur et le dénominateur. De même, les conceptions implicites des élèves, qui découlent des généralisations tirées du domaine des entiers positifs, les poussent à croire que, par exemple, la multiplication rend « plus grand » et la division « plus petit ». Hart, 1989 ; Streefland, 1991 ; Gray, 1993, ces auteurs expliquent en substance que le recours simultané à deux nombres entiers - numérateur et dénominateur - est un obstacle avéré à l'acceptation d'une fraction comme signifiant un seul nombre.

De plus, certains auteurs en sont venus à éviter les écritures fractionnaires lors de leur introduction aux rationnels. L'un d'entre eux, Saenz-Ludlow écrit : « The premature introduction of conventional notations may represent an obstacle to children's learning of mathematics ». (1995, p.101). Elle donne alors l'illustration d'une séquence d'apprentissage ne recourant pas aux notations fractionnaires numériques usuelles mais à leurs expressions verbales - du type « trois cinquièmes » au lieu de 3/5 - éventuellement illustrée par des représentations géométriques. Elle conclut en expliquant : Ann [l'élève observée] was able to generate her fraction conceptualizations in the absence of numerical notation and in the midst of using natural language and fraction number-words.»

Une deuxième difficulté se situe sur le fait même d'effectuer des opérations sur des fractions. Picard (1992), Mack (1990), Carpenter, Coburn, Reys et Wilson (1976) découvrent que les élèves du primaire trouvent les opérations sur les fractions très difficiles à apprendre et que plusieurs élèves des écoles secondaires ont peu d'habileté à calculer les fractions. Quelques raisons peuvent expliquer cette difficulté de l'apprentissage des opérations sur les fractions :

- En premier, les opérations sur les fractions comportent beaucoup de règles, selon Rouche (1998), Picard (1992), Hasemann (1981) et Carpenter, Coburn, Reys et Wilson (1976).

- Ensuite, les règles sont quelquefois introduites trop tôt dans l'enseignement et si celles-ci sont introduites trop tôt chez les élèves, elles ont plus de possibilités d'être utilisées mécaniquement, l'enseignement des fractions deviendra plus procédural (Hansemann, 1981).
- Puis, le manque de compréhension conceptuelle des élèves. Rouche (1998), Wearne-Hiebert et Hiebert (1983) et Jencks, Peck et Chatterley (1980) indiquent que les élèves possèdent peu de référents sur les symboles et règles qu'ils utilisent.

Cette dernière raison est reliée aux deux précédentes. A partir de ce manque de compréhension conceptuelle, le but des élèves devant un problème à résoudre devient celui de manipuler les nombres donnés pour générer une réponse sans nécessairement porter attention à la signification du problème (Wearne-Hiebert et Hiebert, 1983). Pour répondre à ce manque, il devient important de consacrer plus de temps au sens des opérations sur les fractions.

Sur un résultat de test standardisé, sur la question 1/5 + 3/4 = ?, seulement 42% des élèves de sixième année ont choisi 4/9, la bonne réponse (Marshall, 1993). Ce pourcentage nous donne un exemple de la confusion courante d'addition, soustraction, multiplication et division des nombres rationnels.

Une autre difficulté, liée à la conception précédente de règles relatives aux nombres entiers, est basée sur le comptage. Behr et Post (1992) expliquent:

> « Rational numbers are the first set of numbers children experience that is not based on a counting algorithm of some type. To this point, counting in one form or another (forward, backward, skip, combination) could be used to solve all of the problems encountered. Now with the introduction of rational numbers the counting algorithm falters (that is, there is no next rational number, fractions are added differently, and so forth). This shift in thinking causes difficulty for many students » (P. 201).

À partir de cette explication, Behr et Post (1992) mentionnent que les nombres rationnels sont la première série de nombres dont l'expérience des enfants n'est pas basée sur un algorithme de comptage d'un certain type. Pour ce point, le comptage dans une forme ou une autre pourrait être utilisé pour résoudre tous les problèmes rencontrés. Maintenant, avec l'introduction des nombres rationnels, l'algorithme de comptage décroche, c'est-à-dire, il n'y a pas de nombre rationnel suivant, les fractions sont ajoutées différemment et ainsi de suite. Ce changement dans la pensée entraîne des difficultés pour de nombreux élèves.

Une autre source de difficultés des élèves est celle de prendre conscience des différences entre les nombres naturels et les fractions. Les élèves doivent prendre conscience des connaissances antérieures qui interviennent dans l'apprentissage des fractions, comme par exemple, le plus petit commun multiple, celui-ci est en effet nécessaire pour chercher le dénominateur commun pour procéder à l'addition ou à la soustraction des fractions avec des dénominateurs différentes. Selon Mack (1993), l'activation des connaissances préalables chez les élèves est importante parce que ceux-ci sont déjà capables de résoudre quelques problèmes réels autour des fractions. Cependant, des connaissances antérieures sur les nombres naturels interfèrent aussi avec l'apprentissage des fractions (Tirosh, 2000 ; Mack, 1995 ; Picard, 1992 ; Behr, Wachsmuth, Post et Lesh, 1984). De plus, Hart (1981) souligne les difficultés que certains élèves ont à dépasser une stratégie additive primitive qui les pousse notamment à additionner ensemble les numérateurs puis les dénominateurs lors de l'addition de fractions.

En effet, du fait que les nombres naturels ont une signification toujours unique, la notion de fraction contient cette ambiguïté et justifie l'affirmation selon laquelle les nombres naturels peuvent faire obstacle à la compréhension des nombres rationnels. À ce propos, Brissaud (1998) fait une observation sur les fractions unitaires :

> « C'est seulement dans le cas des fractions unitaires, que les deux sens coïncident de manière évidente: 1 divisé par 2, c'est, par définition, 1 demi; de même, 1 divisé par 3, c'est, par définition, un tiers, etc. Dès qu'on n'est plus dans le cas des fractions unitaires, l'équivalence entre la partition de la pluralité et le geste mental consistant en un fractionnement de l'unité, ne va plus de soi. Or cette équivalence est celle qui fonde le concept de fraction : elle justifie le fait que les deux gestes mentaux précédents soient désignés de la même façon, par la barre de fraction, et qu'on puisse lire indifféremment 13/4 comme *13 divisé par 4* ou comme *13 quarts*, c'est-à-dire, substituer un geste à l'autre. ». (p.9)

Pour donner un exemple, les élèves peuvent dire que 1/9 est plus petit que 1/100 étant donné que 9 est plus petit que 100, ce qui est faux. En effet, cette source de difficultés des élèves avec les fractions se pose également lorsque les enfants commencent l'apprentissage des fractions et nombres rationnels et qu'ils ont déjà une connaissance préalable des règles qui se rapportent aux nombres entiers. L'enfant lie ces deux types de nombres entre eux et essaie d'appliquer des règles qui fonctionnent seulement avec des nombres entiers sur des nombres rationnels (Behr, Wachsmuth, Post et Lesh, 1984 ; Mack, 1995). Il se rajoute, de ce qui précède, la difficulté du manque de pratique des enfants qui apprennent à travailler avec des nombres entiers en dehors de la salle de classe. La construction du concept de nombre rationnel profite davantage à partir d'un enseignement plus formel. En effet, une des raisons qui peut expliquer les liens inadéquats que font des élèves entre les fractions et les nombres naturels, est que les fractions sont utilisées moins souvent dans la vie quotidienne que les nombres naturels. D'où la nécessité d'une instruction formelle qui devrait fournir des expériences de division des éléments, tels des modèles concrets et des images, en parties égales dans des contextes significatifs (National Research Council, 2001, cité par Trespalacios, 2008). A propos de cette situation, Clements et Del Campo (1990, p.181, cité par Trespalacios, 2008) déclarent: « Although more parents in Western cultures typically encourage their children to count (one, two, three,…), very few of them encourage their children to find 'one-half', 'one-quarter', or 'one-third' of a whole unit » (p. 7).

Une quatrième difficulté est celle de réaliser qu'il existe une grande diversité de représentations graphiques et concrètes des fractions. La raison principale de cette difficulté réside dans le fait que le sens des activités qui portent sur les fractions se limite souvent au sens de *Partie d'un tout* (Blouin, 2002 ; Adjiage et Pluvinage, 2000 ; Niemi, 1996 ; Withherspoon, 1993 ; Sinicrope et Mick, 1992 ; Mack, 1990 ; Kieren, 1980). Ceci entraîne comme conséquence un répertoire limité de procédures chez les élèves au moment de résoudre un problème. En effet, bien que la signification partie-tout comporte des avantages, elle comporte aussi certains inconvénients. Par exemple, selon Adjiage et Pluvinage (2000), la signification partie d'un tout, comme les parts de tartes, semble facile à comprendre au départ mais elle renvoie à un univers fermé sur l'unité. D'un autre côté, Witherspoon (1993) indique qu'il faut connaître la géométrie du modèle, par exemple celle du cercle, pour pouvoir le diviser en parts égales. Sinicrope et Mack (1992) indiquent que lorsque les fractions sont comprises strictement comme une relation entre une partie et un tout, la multiplication des fractions est difficile à comprendre. Une autre explication nous vient de la recherche de Vézina (1994) sur le fractionnement en nombres pairs et impairs : pour les jeunes, le fractionnement en nombres impairs, nous dit-il, semble plus difficile à appliquer que celui en nombres pairs. Par exemple, le partage du cercle en trois nécessitant l'emploi du rayon est un procédé qui semble plus difficile pour les jeunes.

Une cinquième difficulté se présente, les fractions supérieures à l'unité posent de grosses difficultés aux élèves. Les problèmes principaux sont observés lorsqu'ils doivent construire une représentation d'une fraction impropre et lorsqu'il s'agit d'ordonner les fractions. Pour l'ordonnancement des fractions, de nombreux élèves placent 1 à la fin de la séquence des nombres et cela jusqu'à leur 6ème année. Ceci pourrait vouloir dire qu'ils ne conçoivent pas les fractions comme pouvant être supérieures à l'unité.

Une sixième difficulté, la question de la familiarité par les élèves de quelques fractions. La performance des élèves diminue lorsqu'ils doivent traiter des fractions moins familières. Cet attachement fort à quelques fractions très familières (demis, quarts, tiers) constitue peut-être un obstacle pour faire évoluer les conceptions élémentaires des élèves à propos de ce qu'est une fraction.

Les programmes d'enseignement insistent fortement sur les quantités divisibles par deux (1/2 puis 1/4,…). Cette vision limitée des fractions semble poser des problèmes de généralisation. Nous constatons que, pour un bon nombre, les élèves qui doivent manipuler des tiers ou des cinquièmes se réfèrent encore au partage par deux qui est inadéquat. Cela suggère qu'il serait peut-être bénéfique de diversifier les fractions auxquelles les jeunes sont confrontés plus tôt dans leur cursus scolaire.

La septième difficulté pose la question de l'égalité des parties découpées. Les enseignants n'insistent pas suffisamment sur l'égalité des parties découpées, comme le préconisent les programmes et certains manuels. L'égalité des parties d'un tout n'est pas toujours considérée comme une condition nécessaire par les élèves et il ne s'agit pas non plus d'un apprentissage nécessaire pour accéder aux étapes suivantes dans l'utilisation des fractions.

La huitième difficulté concerne la question du lien entre les fractions et l'unité. Une fraction, c'est une partie, un morceau, le résultat d'un partage ; le résultat est donc toujours plus petit que 1. Pour la question qui consiste à ordonner des nombres, celle-ci témoigne des conceptions limitées des relations entre les fractions et l'unité. Dans un cas, si 1 est considéré comme le début de tout comptage, lorsque on compte, on commence par 1, tout autre nombre, même s'il est une fraction, ne peut venir qu'après. Sinon, dans l'autre cas, la fraction est considérée comme étant toujours plus petite que 1.

Une neuvième difficulté est celle que de nombreuses significations sont attribuables aux fractions. Selon de nombreux auteurs, le caractère plurivoque des fractions constitue une difficulté importante de leur apprentissage (Kieren, 1993 ; Brousseau, 2004 ; Grégoire et Meert, 2005). Contrairement à la situation des nombres entiers, selon Ohlsson (1988), une source majeure des difficultés chez les élèves dans l'apprentissage des fractions découle du fait qu'une fraction peut avoir de multiples significations, une partie d'un tout, des décimales, des rapports, des quotients, des mesures etc. En effet, plusieurs recherches, liées au *Rational Number Project*, se sont intéressées à identifier le fonctionnement du concept de nombre rationnel. Behr et al. (1983) identifient, d'un point de vue de l'analyse cognitive, cinq significations différentes pour le concept: rapport, quotient, proportion, opérateur et mesure. D'autres chercheurs y ajoutent d'autres aspects comme la mesure fractionnaire, le rapport entre deux variables différentes, les décimaux et les coordonnées linéaires.

Une dixième difficulté vient du fait que les élèves peuvent avoir des difficultés avec des fractions en raison d'une compréhension insuffisante de celles-ci chez leurs enseignants (Lester, 1984; Saxe et al., 2001.). Les enseignants, qui ne comprennent pas pleinement les fractions, ne peuvent pas transmettre à leurs élèves une compréhension profonde des fractions (Ball, 1990a ; Tirosh, 2000).

La onzième difficulté est l'ambiguïté conceptuelle des fractions, les aspects 'rapport' et 'quotient'. L'aspect 'quotient' de la notion de fraction se présente lorsque la fraction a/b est définie comme la division a ÷ b. En effet, considérer la fraction comme une division permet d'évaluer sa valeur numérique et décimale, ce qui, historiquement, a facilité énormément les calculs.

La définition d'une fraction comme étant une division, lors de l'apprentissage du concept de fraction, met en évidence une des plus grandes difficultés conceptuelles. En effet, Brissiaud (1998) éclaircit cette difficulté par le fait que *3 divisé par 4* soit égal à *trois quarts* ne va pas de soi, et constitue un obstacle fondamental dans l'apprentissage des fractions et des rationnels. La difficulté, dans ce cas, se trouve autour de ce qu'on considère comme l'unité: dans le premier cas, s'il s'agit de partager 3 objets pour 4 personnes, on peut prendre la moitié de la moitié de chaque objet, ce qui correspond, d'un point de vue opératoire, à diviser chaque entier par 4 et à prendre un morceau (1/4) de chaque objet, dans un total de 3 morceaux. Dans ce cas, il s'agit de la partition de la pluralité. Dans le second cas, 3/4 désigne le partage d'une quantité discrète ou continue en 4 parties, dont on prend 3 morceaux, il s'agit donc du partage de l'unité.

Dans ces deux cas, la difficulté concerne l'idée même d'unité, car, dans le premier cas, il y a 3 unités à partager, tandis que dans le second, lorsqu'on divise 3 par 4, le résultat est une grandeur entre 0 et 1. Cette double signification constitue ce que l'auteur nomme une ambiguïté conceptuelle importante, surtout si la notion de la partition a été exprimée seulement à l'aide de figures géométriques, sans aucun sens numérique. Passer, par exemple, de la division concrète d'une figure pour représenter les 2/3 peut paraître effectivement assez différent de la division du nombre 2 par 3, qui arrive ainsi à une quantité non naturelle, plus petite que 1. De plus, si nos revenons au modèle de la figure, cette quantité trouvée de 0,666..., doit correspondre à une certaine partie d'une figure et l'élève peut, avec beaucoup de pertinence, se demander laquelle.

La dernière difficulté répertoriée concerne l'ambiguïté conceptuelle des fractions par rapport aux aspects, 'proportion' et 'opérateur'.

L'aspect 'proportion' de la notion de fraction se présente quand il y a un rapport entre deux quantités ou entre deux variables de natures différentes. La manipulation de cet aspect rend possible la résolution de problèmes très intéressants de la vie courante rencontrés dans plusieurs problèmes de distribution d'objets pendant l'antiquité. Comme montrent les recherches de Behr et al (1983), cet aspect est important, c'est une des notions centrales dans l'enseignement du pourcentage. Les auteurs montrent que, dans ce cas aussi, on peut traiter de situations continues ou discrètes avec différents degrés de difficulté.

L'aspect 'opérateur' désigne des situations où la fraction opère sur une quantité ou sur une mesure. Dans ce cas, la fraction a/b transforme des figures géométriques en figures a/b plus grandes, ou bien, elle transforme un ensemble d'objets dans un autre ensemble, ayant a/b fois d'éléments. Dans les deux cas, il s'agit d'opérer de façon multiplicative sur la grandeur considérée. Des recherches menées sur cet aspect montrent que les mécanismes inhérents à l'accomplissement de ces tâches sont l'équivalence et la partition, comme par exemple pour établir le rapport entre 2 et 6 qui peut s'effectuer par l'opérateur 1/3. Les fractions non unitaires sont plus compliquées, comme dans l'exemple 2/3 qui transforme 90 en 60. Sous l'angle de l'apprentissage, la notion de fraction comme opérateur peut se heurter à la difficulté de coordonner la partition et l'équivalence, ou bien, de développer une pensée multiplicative, certainement plus élaborée que le raisonnement additif.

Enfin, le réseau Rational Number Project étudie depuis plus de trente ans les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des rationnels. Plusieurs recherches menées par les membres du Projet montrent que seulement un tiers des enfants âgés de 13 ans arrivent à résoudre correctement l'opération 1/2 + 1/3, tandis que deux tiers des enfants âgés de 16 ans réussissent cette tâche. Behr et al. (1983) considèrent que ces résultats sont indicatifs de la richesse du concept en question, ce qui constitue l'un des arguments pour justifier son enseignement. Selon ces auteurs, malgré ces différentes difficultés, dont l'origine est souvent difficile à cerner, l'enseignement des fractions est important ; en effet, d'un point de vue cognitif, la complexité de la notion exige le développement de plusieurs structures de pensée chez les élèves. De plus, d'un point de vue mathématique, la notion de nombre rationnel assure une base pour les nombreuses opérations algébriques enseignées postérieurement.

Les difficultés des fractions pourraient être atténuées en présentant aux élèves des sens plus variés dans les problèmes (Watanabe, 2002 ; Adjiage et Pluvinage, 2000 ; Charles et Nason, 2000 ; Witherspoon, 1993 ; Wearne-Hiebert et Hiebert, 1983). Comme l'entendent, Wearne-Hiebert et Hiebert (1983), il faut prendre le temps de développer des concepts fondamentaux sur les fractions dès le début de l'enseignement en insistant sur la signification de la fraction.

Nous avons présenté une série de difficultés afin de mettre en lumière que cet apprentissage demeure une épreuve dont certains élèves n'en sortent pas totalement indemnes.

1.2.2. Explicitations de diverses difficultés rencontrées par les élèves

Un des domaines en mathématiques qui a été, en général, une pierre d'achoppement pour la compétence mathématique, est le champ des nombres rationnels. De nombreux chercheurs, notamment Behr, Harel, Post et Lesh, (1992), Kieren (1988), Ohlsson (1988), ont montré, comme nous l'avons déjà vu précédemment, que ces difficultés, engendrées par cette absence d'habilité dans la manipulation des fractions chez les élèves, sont liées à leur non-compréhension de cette notion ou d'une compréhension fragmentée. Cette fragmentation entraine, chez ceux-ci, souvent cette confusion lors de l'approche de nouvelles notions de mathématiques.

De plus, certains chercheurs, comme Carpenter, Coburn, Reys et Wilson, en 1976 puis Smyth, en 1983, et Behr, Wachsmuth, Post et Lesh, en 1984, ont relevé que l'apprentissage des fractions est un véritable problème.

Mais, comment expliquer les nombreuses difficultés rencontrées par les enfants par rapport aux fractions ?

Selon Picard (1992, p. 29-31), qui tend à répondre à cette question, il semble que quatre facteurs, parmi d'autres, peuvent justifier celles-ci :

1) Le concept de fraction est un concept difficile en soi.

2) L'enseignement ne respecte pas toujours les étapes du processus d'apprentissage.

3) Le matériel utilisé n'est pas évalué.

4) D'autres explications sont concernées par les difficultés éprouvées par les élèves à l'apprentissage des fractions.

Nous allons prendre chaque facteur l'un après l'autre :

1.2.2.1. Le concept de fraction, un concept difficile en soi

Voici les principales raisons qui rendent la notion de fraction difficile à saisir pour les enfants :

- L'enfant doit tenir compte de deux éléments à la fois, le numérateur et le dénominateur et en saisir leur relation.
- La représentation des fractions peut porter à confusion. En effet, dans certains cas la représentation de 1/2 est plus petite que celle de 1/100. Alors que, mathématiquement, 1/2 est plus grand que le 1/100. L'entier de référence est donc très important.
- La densité de la droite numérique ajoute aux difficultés concernant l'ordre des fractions. Quel nombre vient après 6,2 ? Est-ce 6,3 ou 6,20001 ? Le degré de précision doit être établi.

- Les opérations sur les fractions font appel à des procédures différentes. Par exemple, on n'additionne pas de la même manière deux fractions qui ont un même dénominateur, deux fractions dont l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre ou deux fractions dont les dénominateurs ne sont pas multiples.
- Certaines connaissances antérieures, concernant le nombre naturel, font obstacle à la compréhension des fractions ; pour certains enfants 1/8 est plus petit que 1/1000, car 8 est plus petit que 1000.
- Une fraction de deux entiers a/b avec b non nul est une écriture d'un nombre rationnel, alors que dans l'enseignement, la notion de fraction précède celle de nombre rationnel.

1.2.2.2. Des étapes du processus d'apprentissage pas toujours respecté dans l'enseignement des fractions

Plusieurs études nous permettent de dire que le respect des étapes du processus d'apprentissage de l'enfant, lors de l'enseignement des notions mathématiques, en facilite la compréhension comme celles de Dienes (1966), Mialaret (1967), Bemelmans (1977) et Palacio-Quintin (1987). Bien que ces auteurs ne s'entendent pas pour déterminer quelles sont les étapes du processus d'apprentissage, nous constatons que tous sont d'accord pour reconnaître une étape exploratoire où l'enfant manipule des représentations concrètes de la notion à l'étude, une étape semi-concrète où l'enfant peut modifier une représentation graphique de la notion pour obtenir la solution à un problème, et, finalement, une *étape abstraite* où il arrive à résoudre des problèmes en dehors de tout soutien visuel.

1.2.2.3. Un matériel utilisé non évalué

Komoski, en 1974, s'est penché sur l'élaboration et l'évaluation des documents destinés à l'enseignement. Ses travaux suggèrent que les experts ne sont pas toujours en mesure d'évaluer la performance des documents, ainsi celle qui est attendue est presque inversement proportionnelle à la réalité (Picard, 1992).

L'évaluation des documents n'est pas une problématique récente, plusieurs modèles ont été élaborés pour guider les concepteurs dans l'élaboration et l'évaluation de ceux-ci comme Stolovitch et Larocque (1983). L'un d'entre eux a fait l'objet de plusieurs études, il s'agit du Learner Verification and Revision (L.V.R.). Dans ce type d'évaluation, le document est d'abord vérifié et ensuite révisé, c'est un processus qui fait appel autant aux experts qu'aux apprenants. L'évaluateur met à l'essai le document à évaluer, auprès d'un ou plusieurs apprenants, il prend des informations sur les difficultés rencontrées par ces derniers dans l'atteinte des objectifs. À la suite de la collecte de ces informations, celui-ci décide si le matériel est satisfaisant ou non. En fonction des résultats, le matériel sera révisé ou soumis à une évaluation sommative.

Les recherches ayant démontré que le matériel destiné à l'enseignement n'est pas toujours efficace, elles vont donc proposer des modèles pour améliorer leur efficacité. De plus, la revue des écrits porte à croire qu'un document qui présenterait la notion de fraction en respectant les étapes du processus d'apprentissage, qui serait révisé dans le cadre d'une mise à l'essai auprès des apprenants, permettrait aux enfants de mieux appréhender cette notion.

1.2.2.4. D'autres explications concernant les difficultés des élèves dans l'apprentissage des fractions

Des études démontrent que plusieurs enfants n'utilisent pas leur pensée formelle pour les mathématiques mais se servent plutôt de leurs propres méthodes informelles. Nous pouvons citer, Herman (1983), Lamon (1993), Lawton (1993) et Mack (1990), cité par Bond (1998). Dans le cas des fractions, les enfants semblent relier ces dernières à des méthodes de par cœur provenant d'apprentissages antérieurs. Les enseignants le constatent lorsqu'ils sont confrontés à ces problèmes, des élèves appliquent, de façon inadéquate, des règles à demi-mémorisées (Kerslake, 1986). Ces informations pourraient expliquer sommairement pourquoi de nombreuses difficultés, liées aux apprentissages mathématiques à l'école primaire, se rapportent aux nombres rationnels (Roseman, 1985).

Behr, Lesh, Post et Silver (1983) émettent plusieurs hypothèses relatives à ce phénomène :

- D'une part, la plus grande partie du développement apparaît lors d'une période significative de réorganisation cognitive qui marque une transition entre le stade opératoire concret et le stade opératoire formel.
- D'autre part, le concept de nombre rationnel implique un riche ensemble de sous-constructions et processus reliés à un large éventail de concepts élémentaires (mesure, probabilité, systèmes de coordination, etc.).

De plus, Hétu et Desjardins (1974) constatent que, lors d'une volonté d'un apprentissage précoce de la fraction, il faut faire l'économie de l'un des aspects essentiels de celle-ci, à savoir la relation d'équivalence. La pédagogie, introduite tôt dans le programme, permet d'aborder le symbolisme propre à traiter les égalités de fractions et développer ainsi le système total des techniques de calcul qui en découle.

En raison de la complexité des différentes significations - partie-tout, mesure, opérateur, quotient, rapport... etc. - qui peuvent être attribués à une fraction, plus nous avons besoin d'une recherche approfondie et continue à réaliser dans la quête pour l'amélioration de la compréhension conceptuelle et fonctionnelle de ce sujet. Boulet (1998) a explicité l'importance de la compréhension des concepts mathématiques et ce qui résulterait de l'absence de celle-ci par les élèves. Elle a notamment écrit:

> « Understanding is certainly the goal of learning, and teachers generally believe that their pupils understand their lessons. Without understanding, the learning of mathematics is reduced to the memorization of formulae and the rules governing them. Mathematics thus learned cannot be meaningful, much less useful » (p. 19).

Selon son propos, la compréhension est certainement le but de l'apprentissage, et les enseignants estiment généralement que leurs élèves ont compris leurs leçons. Sans compréhension, l'apprentissage des mathématiques est réduit à la mémorisation des formules et des règles qui les régissent. Ainsi, les mathématiques apprises ne peuvent pas être significatives, elles sont beaucoup moins utiles.

2. Questions autour de l'enseignement de la notion de fraction

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord aborder un rappel historique de l'enseignement des fractions à l'école élémentaire en France de 1882 jusqu'à nos jours. Ensuite, nous allons présenter les compétences mathématiques nécessaires aux fractions. Puis, nous allons mettre en évidence les divers travaux théoriques concernant les significations attribuées aux termes « nombre rationnel », « fraction ». Enfin, Nous allons expliquer en quoi consiste chacune de ces significations.

2.1. Rappel succinct de l'enseignement des fractions à l'école élémentaire en France, d'hier à aujourd'hui

Nous avons, en premier lieu, décidé de nous consacrer aux programmes et à leurs évolutions. En effet, il nous est paru primordial de comprendre comment ont été enseignées les fractions au fil des années afin de voir quels étaient les enjeux de ces enseignements et ainsi les mettre en lien avec les objectifs des manuels. Pour cela, nous avons lu et analysé les programmes de 1882 à nos jours, en ne prenant en compte que les mathématiques au cycle 3 et plus précisément les parties portant sur les fractions dispensées en CM1 et CM2.

2.1.1. Les programmes de 1882 jusqu'à 1945

En ce qui concerne les programmes de 1882, nous trouvons les notions de fractions simples, fractions décimales mais il n'est pas précisé que les fractions doivent être vues en lien avec le système métrique.

Les arrêtés des 18 janvier 1887, 8 août 1890, 4 janvier 1894, 17 et 20 septembre 1898 et 7 juillet 1909, stipulaient *une étude des dix premiers nombres et des expressions demi, moitié, tiers, quart en section enfantine* et consacraient deux chapitre à l'apprentissage des fractions en cours moyen, l'un, sur « l'idée général des fractions », le deuxième sur les « fractions décimales ». L'approche de la notion de fraction s'appuie essentiellement sur la conception véhiculée par le langage courant. La définition de la fraction repose sur le concept de quantité fractionnaire. Ce ne sont pas seulement des nombres ou des opérations sur les nombres dont il s'agit, mais avant tout, des partages de grandeurs correspondant à l'usage courant. Ainsi l'utilisation des nombres fractionnaires est une particularité de l'enseignement des fractions du début du 20ème siècle et celui-ci correspond à l'usage des fractions dans la vie courante. (Christiaens, 1995).

Les instructions du 20 juin 1923 soulignaient qu'il est plus aisé d'effectuer des opérations avec des nombres décimaux qu'avec des nombres fractionnaires. La base 10 étant prioritaire dans l'apprentissage de la numération, la fraction, comme nombre exprimant la mesure d'une quantité, est *déclassée* au profit des nombres décimaux. L'étude des fractions dites ordinaires est cependant maintenue, ainsi que les exercices de réduction au même dénominateur, d'addition et de soustraction.

2.1.2. Les programmes et instructions de 1945

Les fractions sont introduites séparément faisant suite à l'étude des nombres décimaux. Au programme du CM, il y a peu de calculs sur les fractions, mais simplement sur le produit d'une fraction par un entier, la somme de deux fractions *simples*, la comparaison de deux fractions *simples*.

Au 17 octobre 1945, un arrêté ministériel indique l'importance des nombres décimaux au détriment des fractions. Les instructions relatives au cours moyen débutent par l'étude des nombres décimaux, en liaison avec les unités théoriques et pratiques de monnaies, de longueur, de distance, de poids et de capacité, étude renforcée par l'usage et la pratique des quatre opérateurs sur les décimaux. La règle de trois et les pourcentages sont envisagés avant la fraction dont l'apprentissage se résume à une approche très limitée : fractions très simples de grandeur demi (1/2), tiers (1/3), quart (1/4), cinquième (1/5), dixième (1/10), soixantième (1/60). Calcul d'une fraction d'une grandeur et problème inverse. Additionner, soustraire des fractions dans des problèmes très simples. L'étude des fractions est reportée car elles sont considérées comme des opérateurs abstraits : prendre les quatre-cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties. Les instructions du 7 décembre 1945 stipulaient que l'addition et la soustraction des fractions doivent être étudiées dans des cas numériques très simples et sur des problèmes pratiques. Les maîtres se rendront vite compte qu'avec nos habitudes actuelles, ces problèmes pratiques sont de plus en plus rares.

2.1.3. Les programmes et instructions de 1970

A partir de 1970, les mathématiques modernes apparaissent : la compréhension des notions mathématiques prévale sur la technique et l'utilisation de ces notions. En effet, en ce qui concerne les fractions, les enfants doivent comprendre ce que représentent les fractions et non simplement savoir s'en servir. Ainsi on voit apparaître, dans les programmes, les fractions opérateurs. Nous pouvons remarquer notamment que le produit de deux fractions doit être vu au cycle 3 en 1970 alors qu'actuellement seule l'addition et la soustraction y sont travaillées. D'autre part, il nous faut souligner que les nombres décimaux sont amenés par un changement d'unité et non en lien avec les fractions décimales.

Sous la rubrique *nombres et opérations* nous étudions d'abord les fractions comme opérateurs avant d'aborder les décimaux.

Pour arriver jusqu'à l'écriture fractionnaire, un long temps d'étude est proposé sur les opérateurs - additionner a, soustraire b, multiplier par c, diviser par d - qui associent les nombres d'une liste à ceux d'une autre dans une relation numérique donnée. Dans ces programmes, il n'y a plus aucune relation entre fractions et décimaux.

2.1.4. Les programmes et instructions de 1980

Après le travail sur les nombres naturels initié au CP, développés au CE et repris au CM, il s'agit d'aborder les décimaux et les fractions en faisant *prendre conscience que lors de situations appropriées* les naturels sont insuffisants et ainsi, de nouveaux nombres sont nécessaires pour étendre le domaine du calcul.

La partie *instructions pédagogiques* précise les situations dans lesquelles les naturels sont insuffisants :

- dans N, les fonctions *retrancher* et *diviser* ne sont pas partout définies, l'extension de leur domaine de validité nécessite l'introduction des entiers négatifs et des nombres rationnels
- si nous voulons exprimer la longueur d'un objet donné à l'aide d'une unité choisie arbitrairement, les nombres naturels s'avèrent insuffisants dans la plupart des cas

- si nous représentons les nombres naturels sur une droite graduée, il existe des points non repérés entre deux graduations correspondantes à deux entiers successifs. Se pose alors le problème du repérage de ces points *intermédiaires*.
- dans certaines situations de partage, nous sommes également rapidement confrontés à l'insuffisance des nombres naturels. Par exemple, comment exprimer la longueur obtenue en partageant exactement en 3 une bande de longueur 2 ?

De là, il ressort que de nouveaux nombres, de nouvelles notations sont nécessaires, fractions et décimaux doivent être introduits pour répondre aux questions soulevées par cet ensemble de situations.

Le travail du CM concerne principalement les nombres décimaux mais les élèves doivent aussi connaître un certain nombre de fractions simples, en saisir leur signification et savoir les situer par rapport aux nombres décimaux.

C'est à partir des programmes de 1980 que nous voyons les décimaux abordés comme de nouveaux nombres, en lien avec les fractions. Cependant, il n'est pas réellement précisé dans quel ordre aborder ces deux notions *fractions* et *décimaux*. Il est simplement noté qu'il faudrait lier ces deux notions en passant d'une écriture à l'autre.

2.1.5. La circulaire de 1991 sur les cycles et les programmes de 1995

Le texte de 1991 limite l'approche des fractions dites simples *demi, tiers, quart* et des fractions décimales. Fractions et décimaux servent à exprimer le résultat d'une mesure, d'un partage. Ils permettent de repérer les points d'une droite.

Le programme de 1995 ne modifie en rien le texte de 1991.

Ces deux programmes se rejoignent fortement dans la manière de présenter les fractions simples et décimales afin d'introduire les nombres décimaux par des étapes clés.

2.1.6. Les programmes et instructions de 2002 et de 2007

Les fractions sont introduites à partir de leur sens usuel, c'est-à-dire par le partage d'une unité.

Les programmes de l'école primaire publiés en 2002, puis en 2007, donnaient des indications précises concernant l'organisation de l'étude des fractions, à savoir :

> « Au cycle 3, les élèves mettent en place une première maîtrise des fractions et des nombres décimaux : […] leur étude sera poursuivre au collège. Les fractions et les nombres décimaux doivent d'abord apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante : problèmes de partage, de mesure de longueur ou d'aire, de repérage d'un point sur une droite graduée. Les fractions sont

> essentiellement introduites, au cycle 3, pour donner du sens aux nombres décimales » (Programme de l'école primaire, cycle des approfondissements, BO n° 5 du 12 avril 2007, p.137).

L'apprentissage des fractions doit avoir lieu avant celui des nombres décimaux. « En dehors de la connaissance des fractions d'usage courant, le travail sur les fractions est essentiellement destiné à donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ou sommes de fractions décimales (fractions de dénominateurs 10, 100, 1000 …) » (BO n° 1 du 14 février 2002).

2.1.7. Les programmes et instructions de 2008

Dans les nouveaux programmes de 2008, la partie qui s'intéresse aux fractions et qui s'intitule *Mathématiques,* précise les indications suivantes :

> « Fractions simples et décimales : écriture, encadrement entre deux nombres entiers consécutifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions de même dénominateur » (Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire, BO hors-série n° 3 du 19 juin 2008).

Dans le texte des programmes de l'école primaire publiés en 2008, les contenus à enseigner sur les fractions sont cités avant ceux concernant les décimaux ; néanmoins, aucune précision n'est donnée tant en ce qui concerne l'articulation de l'étude de ces deux termes que leur motivation.

Dans ce document, il n'est fait référence qu'à *des fractions simples : demi, tiers, quart,* et les contenus qui doivent être étudiés à leur sujet ne différent pas de ceux attendus jusqu'à lors.

En effet, au niveau des Instructions Officielles de cette année-là, les fractions sont amenées, à juste titre, au CM1 et sont approfondies au CM2. Il s'agit surtout de savoir associer une fraction à une représentation d'un partage, d'encadrer une fraction entre deux nombres entiers, de décomposer une fraction en une somme d'entier et de fraction inférieure à 1 ainsi que d'ajouter deux fractions de même dénominateur. En somme, les fractions au cycle 3 ne sont pas amenées simplement pour donner du sens aux nombres décimaux mais elles sont travaillées et approfondies comme de nouveaux nombres.

Pour terminer sur cet aspect, il nous a paru judicieux, en travaillant sur l'évolution des programmes, d'analyser également les programmes actuels du collège *classe de 6ème* afin d'évaluer la continuité de ces apprentissages. Les instructions officielles de 6ème concernant les fractions sont en continuité avec celles du cycle 3, notamment en ce qui concerne l'équivalence entre les fractions représentant une partition de la pluralité et celles représentant un fractionnement de l'unité. Par ailleurs, il est clairement indiqué, à propos du programme de cycle 3, qu'il ne sera pas repris à zéro mais au contraire considéré comme acquis.

2.2. Enseignement des fractions à l'école élémentaire en France

Dans le système scolaire français, l'apprentissage et l'enseignement des fractions s'échelonnent sur plusieurs années scolaires. Même si les fractions sont déjà présentes, chez les plus jeunes, dans le sens le plus immédiat de la *moitié* d'une pomme ou du *tiers* d'une barre de chocolat, elles commencent à être enseignées pleinement au cycle III de l'école primaire, surtout en CM1 et CM2. Il semble intéressant de nous interroger sur l'intérêt que présente l'enseignement des fractions à l'école primaire, en effet, le but d'enseigner cette notion à ce stade scolaire est *d'amener les élèves à résoudre des problèmes variés portant sur les fractions*. Selon Dienes (1971), l'enfant rencontre l'idée de demi, de quart, de tiers ou de trois quarts, mais ne rencontre pas d'autres fractions avec la même fréquence. De plus, les tâches et les exercices mathématiques susceptibles de les familiariser avec les propriétés des fractions ne se trouvent pas dans son environnement immédiat. Par conséquent, c'est à l'école qu'il appartient de les lui fournir. L'enseignement systématique des opérations arithmétiques liées à la fraction est complété au cours de la première année du secondaire.

L'enseignement des fractions est fréquemment introduit à l'école primaire comme une idée de partie-tout. Le partage équitable d'une quantité, les présentations des idées de parties et de tout ainsi que l'application du vocabulaire pour les fractions propres (a/b, $a < b$) et leur écriture, sont les premières notions abordées avec les élèves de ce niveau. L'enseignant leur demande, par exemple, de trouver la fraction représentée par une partie donnée et d'ordonner des fractions d'un même tout. Cette stratégie pédagogique, *idée de partie-tout*, induit certains obstacles car les situations ne font toujours pas sens pour les élèves. Il s'agit, dans la plupart des cas, des situations présentées par des figures représentant un tout qui doit être divisé en parties *équitables*. Dans ce contexte, nous demandons souvent de colorier certaines de ces parties qui vont représenter le numérateur, en représentant le dénominateur par le nombre de parties dans lequel le tout a été divisé. À l'école primaire, l'écriture classique des fractions est entendue comme deux nombres qui se superposent et qui sont divisés par un segment de droite. Cette représentation d'un nombre déstabilise les schèmes habituels des élèves, mais aussi ceux des certains enseignant(e)s. Face à cette déstabilisation, l'enseignant(e) peut proposer des situations nouvelles d'essayage et de défis ou rester dans la stabilité d'un niveau de conceptualisation moins élevé (Medeiros de Araujo Frutuoso, 2009).

Nous pourrions aller jusqu'à dire que la première approche universelle de l'enseignement des fractions, est celle de prendre *un objet concret de référence* considéré comme l'unité qui devrait avoir les exigences suivantes :

- être perçu comme agréable et donc comme un plaisir,
- clairement unitaire,
- déjà familier, ce qui ne nécessite pas d'apprentissage supplémentaires (Fandiño Pinilla, 2007).

Habituellement, un gâteau rond ou une pizza sont choisis dans presque tous les pays du monde, ces deux objets ont les exigences ci-dessus.

Dans ces situations imaginées d'enseignement, cette unité, donnée par *un gâteau, une pizza ou des objets similaires,* doit être partagée entre un nombre d'élèves ou des gens en général. De cette façon, les élèves arrivent à l'idée d'un demi *en divisant par 2,* un tiers *en divisant par 3* etc. Les fractions unitaires sont les premiers exemples des fractions auxquelles sont confrontés les élèves ; en effet, pour chacune de ces fractions spécifiques, des formes écrites sont établies. Pour les cas ci-dessus, ce sont 1/2 et 1/3, et la lecture de ces formes comme *un demi* et *un tiers* pose quelques problèmes. De plus, nous pouvons généraliser cette forme en écrivant le symbole 1/n qui signifie qu'un objet initial unitaire est divisé en n parties égales. Avec les jeunes élèves, divers exemples sont considérés, en attribuant des valeurs différentes appropriées à n (Fandiño Pinilla, 2007).

De plus, dans le texte des programmes de 2008 il n'est fait référence qu'à des fractions simples : *demi, tiers, quart*. Nous allons présenter ici les différentes connaissances concernant les fractions dans les trois cycles composées de l'école primaire en France :

Au premier cycle de l'école primaire, aucune connaissance sur les fractions n'est exigée, mais nous trouvons des connaissances sur les grandeurs et les mesures. En manipulant des objets variés, les élèves repèrent d'abord des propriétés simples *petit ou grand, lourd ou léger*. Progressivement, ils parviennent à distinguer plusieurs critères, à comparer, à classer et à ranger des objets selon leur forme, leur taille, leur masse ou leur contenance.

Au cycle deux, aucune connaissance sur les fractions n'est demandée, mais nous trouvons des indications sur les grandeurs et les mesures, « les élèves apprennent et comparent les unités usuelles de longueur (m et cm ; km et m), de masse (kg et g), de contenance (litre), de temps (heure, demi-heure) ainsi que la monnaie (euro, centime d'euro). Ils commencent à résoudre des problèmes portant sur des longueurs, des masses, des durées ou des prix. » (Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire, BO hors-série n° 3 du 19 juin 2008).

Au cycle trois, l'exploration des opérations sur les fractions, à l'aide d'un matériel concret, est à l'étude. Les élèves commencent à additionner et à soustraire des fractions dont le dénominateur d'une fraction est un multiple du dénominateur de l'autre fraction, et à multiplier des fractions par des nombres naturels. Ils doivent savoir ordonner les fractions et savoir, aussi, comment les simplifier.

Pour l'enseignement des fractions, il est recommandé de s'appuyer sur des situations et des objets concrets pour plus d'efficacité. Selon Burns (2000) :

> « Quand on enseigne les fractions aux élèves, l'enseignant doit s'appuyer sur des expériences antérieures de l'élève en fournissant de nombreuses opportunités pour les élèves à utiliser la terminologie fractionnaire, apprendre à représenter des fractions et donner des différents sens de la fraction tout au long de l'année scolaire. Les élèves devraient travailler avec des fractions en utilisant des objets concrets tels que des matériels de manipulation et dans un contexte de la vie courante avant de travailler avec des représentations symboliques telles que les images » (p. 223).

De plus, il est important pour les élèves, à l'intérieur d'un même groupe classe, d'avoir accès à une variété de façons d'appréhender les fractions de sorte que tous les styles d'apprentissage soient considérés. L'enseignant doit pouvoir fournir l'occasion d'un apprentissage des fractions à l'aide de matériel concret, d'une perspective géométrique, avec une concentration numérique et de rendre les questions applicables à des situations réelles afin d'améliorer leur compréhension des concepts.

Compétences mathématiques nécessaires liées au concept de fraction

En France, le concept de fraction commence à être enseigné formellement au cycle III de l'école primaire, surtout en CM1 et CM2, même s'il est déjà présent, dans un sens plus immédiat comme la moitié d'une pomme ou le tiers d'une barre de chocolat, à un âge plus précoce.

Voici les compétences mathématiques demandées à l'élève à la fin du CM1 et du CM2, à travers l'apprentissage de fractions, selon les programmes « Horaires et Programmes d'Enseignements de l'Ecole Primaire », du BO hors - série n° 3 du 19 juin 2008 (p.27) :
En fin de CM1 :

- Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.

- Utiliser des fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.

En fin de CM2 :

- Encadrer une fraction simple par deux nombres entiers consécutifs.
- Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et une fraction inférieure à 1.
- Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.

2.3. Approches didactiques du concept de fraction. Apports des travaux de Guy Brousseau : « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. »

La complexité du concept mathématique de la fraction et son enseignement ont donné lieu à de très nombreuses recherches, françaises comme celles de G. Brousseau et R. Douady, ou étrangères, comme celles de Kieren, Behr, Lesh, Post…Elles sont très différentes les unes des autres ; chacune d'elles présente la notion de fraction en utilisant un moyen différent. Brousseau (1987) aborde la fraction par la commensuration c'est-à-dire la proportion de deux grandeurs de nature différente, à savoir l'épaisseur d'un nombre variable de feuilles, celle-ci est mesurée en millimètres, mm. R. Douady (1984) présente les fractions principalement comme des mesures de longueurs.

En 1980, Noelting propose une approche qui repose sur un test où les élèves doivent comparer des mélanges d'orangeade, connaissant les proportions en eau et en jus d'orange de chacun. L'exemple suivant est donné : « *Une orangeade A est composée de 3 verres de jus d'orange et 2 verres d'eau, Une orangeade B est composée de 4 verres de jus d'orange et 2 verres d'eau : quelle orangeade est la plus fruitée ?* ». Les travaux de Noelting permettent d'apporter des informations précieuses quant à la capacité des enfants à comparer deux rapports, équivalents ou non.

Nous allons maintenant présenter une recherche didactique menée par Guy Brousseau concernant l'enseignement de la fraction. Nous faisons référence au document « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire » I.R.E.M. de Bordeaux, 1987.

Brousseau a conçu une ingénierie didactique qui concerne l'enseignement des nombres rationnels et des décimaux ; elle a pour but de « favoriser une réflexion fondée sur l'observation en vue de la formation des maîtres ». Néanmoins, la finalité de ses observations est

> « bien entendu, de permettre une organisation et un contrôle de ces situations à des fins d'enseignement, ce qui nous conduit à essayer de repérer le champ des choix possibles plutôt qu'à nous borner à l'observation et à la

comparaison des pratiques actuelles de l'enseignement des rationnels et des décimaux. ». (Brousseau, 1987, cité par Christiaens, 1995, p. 20)

Nous ne ferons pas référence à la totalité de cette ingénierie didactique. En effet, celle-ci comporte 65 leçons dont certaines sont consacrées à l'étude des nombres décimaux. Nous avons décidé de sélectionner les principales séances qui impliquent le traitement des nombres rationnels, en particuliers les trois premiers modules.

Nous allons exposer ci-dessous une partie de l'ingénierie didactique conçue par Brousseau.

Module 1 : les nombres rationnels : construction

Brousseau introduit les fractions à partir d'une situation problème dont l'enjeu semble très simple : des tas de feuilles de papier de différentes épaisseurs sont présentés aux élèves, il leur demande de trouver un code qui permettrait de désigner chaque type de papier en fonction de son épaisseur, l'objectif final étant de comparer les épaisseurs entre elles. L'épaisseur d'une feuille de papier étant trop mince pour être mesurée avec une règle graduée, les enfants décident de mesurer l'épaisseur de plusieurs feuilles de papier et aboutissent à des correspondances :

5 feuilles de type A = 2 mm

10 feuilles de type A = 4 mm

8 feuilles de type B = 3 mm

Afin de vérifier la cohérence de leurs résultats, ils sont amenés à construire des classes d'équivalence : si l'épaisseur de 5 feuilles est égale à 2mm, alors l'épaisseur de 10 feuilles de même type doit être égale à 4mm. Ils établissent des tableaux où figurent plusieurs écritures différentes pour un même type de papier A, B, C, D ou E.

TABLEAU 6– DIFFERENTES ECRITURES POUR UNE MEME QUANTITE (BROUSSEAU, 1987, CITE PAR CHRISTIAENS, 1995, P. 22).

A	B	C	D	E
(48 f ; 9 mm)	(10 f ; 2 mm) (5 f ; 1 mm) (20f ; 4 mm)	(100f; 8mm)	(100 f ; 11 mm)	(10 f ; 4 mm)

Le passage de l'écriture d'un couple (nombre de feuilles ; nombre de mm) à l'écriture fractionnaire résulte d'un « apport d'information » :

« Si l'on veut désigner l'épaisseur d'une feuille elle-même et non plus un tas de feuilles de telle épaisseur, si l'on veut désigner toute la classe des couples et non

> plus un couple particulier, il faut inventer un nom et une écriture particulière. Cette écriture existe, on l'appelle fraction. Par exemple, on dit que le papier de type C a une épaisseur de 4 mm pour cinquante feuilles, ou encore "4 pour cinquante millimètres", et le plus souvent de "4 cinquantième mm" et on écrit ceci à l'aide de la fraction 4/5 ou 4/50. (50; 4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm 4/5 désigne l'épaisseur d'une feuille de papier telle qu'il en faut 50 pour obtenir une épaisseur de 4 mm ». (Brousseau, 1987, cité par Christiaens, 1995, p. 22)

Module 2 : les nombres rationnels : opérations

- *addition.*

Problème : « *Quelle est l'épaisseur de la somme de deux feuilles de type différent ? Soient par exemple des types 10/50 et 40/100.* »

La mise en situation révèle le caractère erroné de la réponse spontané « 10+40 / 50+150 ». Que l'on décide de diminuer de moitié le tas de 100 ou de doubler le tas de 50 on obtiendra deux résultats, justes, appartenant à la même classe d'équivalence :

40/100 = 20/50   10/50 + 20/50 = 30/50

10/50 = 20/100   20/100 + 40/100 = 60/100

Brousseau insiste sur la nécessité didactique de débuter par l'addition de deux fractions dont les dénominateurs diffèrent. En effet, il faut que la recherche d'un dénominateur commun apparaisse nécessaire et primordiale. L'addition de deux fractions ayant les mêmes dénominateurs occulte cette nécessité et conduit les enfants à sous-estimer les précautions que réclame l'addition de deux fractions.

- *Soustraction.*

Après avoir rappelé les significations des fractions 8/50 l'épaisseur d'une feuille telle qu'il en faut 50 pour obtenir une épaisseur de 8 mm et 6/100 l'épaisseur d'une feuille telle qu'il en faut 100 pour obtenir une épaisseur de 6 mm, l'enseignant écrit la soustraction 8/50 - 6/100. A partir d'une dévolution aussi peu explicite, les enfants émettent différentes conjectures et parviennent à donner un sens à cette écriture et ainsi, une feuille dont l'épaisseur est 8/50 est composée de deux feuilles, l'une de 6/100 d'épaisseur et l'autre que l'on recherche.

6/100 + ... = 8/50.

La nécessité de travailler sur des fractions de même dénominateur ayant déjà été établie au cours de l'étape précédente, les élèves aboutissent, après recherches, aux deux résultats suivants:

8/50 = 16/100   6/100+ 10/100 = 16/100

6/100 = 3/50   3/50 + 5/50 = 8/50

- *Multiplication d'un nombre rationnel par un entier*.

Une situation-problème : « quelle est l'épaisseur de trois cartons de même type? »
Il y a conflit entre les défenseurs de la réponse erronée 3 × 3/19 = 9/57 et les défenseurs de la réponse juste 3 × 3/19 = 9/19. Le rejet de la réponse erronée repose sur deux arguments:

- L'épaisseur du carton est contrôlée par l'addition 3/19 + 3/19 + 3/19.
- les fractions 3/19 et 9/57 sont équivalentes

- *Division d'un rationnel par un entier.*
- La division tombe juste

« J'ai collé 9 feuilles de même épaisseur. J'ai obtenu un carton qui a une épaisseur de 18/7 mm. Quelle est l'épaisseur des feuilles collées? »
Le résultat est immédiatement trouvé par les élèves et contrôlé grâce à la multiplication:
9 × 2/7 = 18/7.

- La division ne tombe pas juste

L'épaisseur de 9 feuilles est égale à 12/7.
Solution 1) 12/7 = 108/63 108/63 ÷ 9 = 12/63 donc 9 × 12/63 = 12/7
Solution 2) 12/7 = 36/21 36/21 ÷ 9 = 4/21 donc 9 × 4/21 = 12/7.
Contrôle : 12/63 = 4/21

Module 3: Mesures de poids, de capacités et de longueurs. Découverte de la méthode de fractionnement de l'unité, comparée à la méthode dite de commensuration

- Les élèves sont invités à utiliser les rationnels, découverts lors de la désignation des épaisseurs de feuilles, pour mesurer de nouvelles grandeurs :
  - le poids de différents clous, au moyen d'une unité poids,
  - la capacité de différents verres, au moyen d'un verre unité,
  - les longueurs de différentes baguettes, au moyen d'une unité de longueur.

  Les enfants procèdent par commensuration : par exemple, il faut 4 bandes pour faire la même longueur que 5 bandes unités.
- Le fractionnement de l'unité. Identifier les longueurs de 6 baguettes différentes dont les longueurs sont égales à 1/4, 2/4, 3/4, 7/4, 6/4 et 9/4 de l'unité de longueur convenue. Soit les enfants procèdent par commensuration, soit ils constatent que la baguette 1/4 est un sous-multiple des autres baguettes et ils l'utilisent comme unité de mesure.

- Comparaison de stratégie. Pour fabriquer une bande dont la longueur est égale aux 4/5 de l'unité, les enfants mettent en œuvre deux stratégies différentes: le fractionnement de l'unité ou la commensuration. Quelle que soit la stratégie employée, le résultat sera le même.
- Une quantité initiale (tissu, sac de billes) fait l'objet de deux réductions successives (vente, perte); à quelle fraction correspond la totalité des réductions ? Quelle fraction de la quantité initiale reste-t-il ? La mesure de la quantité initiale est indiquée en unités discrètes, on peut donc mesurer en unités discrètes la fraction de la quantité restante.

Le module 4 poursuit le travail sur les fractions puisqu'il propose des jeux où il faut comparer des fractions, les additionner et deviner parmi les trois réponses possibles, celle qui est la plus proche du résultat. Le traitement des nombres fractionnaires dans de tels exercices est coûteux en temps et en efforts, pour la recherche d'un dénominateur commun. L'introduction des nombres décimaux se trouve alors justifiée car, sous bien des aspects, ils sont plus maniables que les nombres fractionnaires. (Christiaens, 1995)

2.4. Quelques autres travaux théoriques concernant les significations des notions de nombre rationnel et de fraction

Plusieurs travaux et recherches ont été conduits sur le concept de fractions et, plus globalement sur celui de nombre rationnel. Certains chercheurs établissent le cadre conceptuel des nombres rationnels, approchent le thème selon différentes perspectives qui ont été classifiées par Behr et al. (1992) : « linguistique (Nesher), sciences informatiques (Ohlsson), sciences cognitives (Greeno), sciences (Karplus, Schwartz), développement psychologique (Vergnaud), développement de curriculums en éducation mathématique (Hart) » (p.299).
Cette classification des recherches est intéressante en ce qu'elle illustre bien la diversité des points de vue que nous pouvons emprunter pour étudier ce concept.

Les fractions sont parmi les concepts mathématiques les plus complexes que les enfants rencontrent dans leurs années dans l'enseignement primaire. Celles-ci comprennent une notion multiforme englobant plusieurs significations interdépendantes, c'est l'un des principaux facteurs de leur complexité (Charalambos et Pitta-Pantazi, 2005). Leur caractère plurivoque constitue une difficulté importante de leur apprentissage (Kieren, 1993 ; Brousseau, 2004 ; Grégoire et Meert, 2005). De nombreux auteurs ont déjà insisté sur ce point, et ont recensé les différentes « interprétations » (Kieren, 1976 ; Vergnaud, 1983), « subconstructs » (Behr et al. 1983), « meanings » (Ohlsson, 1988) possibles attribuées à la fraction.

Pour clarifier l'ambiguïté liée à l'utilisation de diverses terminologies pour le concept de fractions et de nombres rationnels, les chercheurs ont essayé, dans de nombreux travaux sur ce sujet, d'identifier des significations différentes accordées aux fractions. Parmi eux, l'apport de Kieren (1976, 1980, 1988) a été certainement l'un des plus importants parce qu'il a synthétisé un certain nombre de travaux antérieurs et que plusieurs recherches qui ont suivi sont parties de ses conclusions. Dans ce qui suit, nous allons exposer d'abord les principales réflexions de Kieren et nous poursuivrons ensuite avec les travaux d'autres chercheurs comme Behr et al. (1983). De plus, nous allons regarder les apports de Vergnaud (1983) qui a adopté un point de vue qu'il situe dans une théorie, celle des champs conceptuels.

2.4.1. Les travaux de Kieren

Kieren (1976) fut le premier à lancer l'idée que les nombres rationnels peuvent prendre diverses significations (interprétations). Son travail est considéré comme une base fondamentale, un pas important dans la clarification des idées autour du concept de nombre rationnel. Lançant l'idée que les nombres rationnels peuvent prendre diverses significations, il proclame que la maîtrise de ces nombres suppose une compréhension claire de chacune de celles-ci. Il en identifie sept :

1. les nombres rationnels sont des fractions qui peuvent être comparées, additionnées et soustraites, etc… ;
2. les nombres rationnels sont des fractions décimales qui forment une extension naturelle des nombres entiers ;
3. les nombres rationnels sont des classes d'équivalence de fractions. ; donc {1/2, 2/4, ...} et {2/3, 4/6,…} sont des nombres rationnels ;
4. les nombres rationnels sont des nombres de la forme p/q, tel que p et q sont entiers et $q \neq 0$; dans ce cas, les nombres rationnels expriment des rapports ;
5. les nombres rationnels sont des opérateurs multiplicatifs (« dilateurs », « contracteurs », etc.) ;
6. les nombres rationnels sont des éléments du domaine infini des quotients ordonnés ; ils sont des nombres de la forme $x = p/q$ tel que x satisfait en équation : $q \times x= p$;
7. les nombres rationnels sont des mesures ou des points sur la droite numérique.

Il nous semble important de revenir sur certaines de ces interprétations de l'idée du nombre rationnel. Par exemple, nous sommes d'avis que, pour considérer les nombres rationnels comme des classes d'équivalence de fractions, quelqu'un doit supposer que la fraction peut être définie indépendamment des nombres rationnels, ce qui contredit l'idée que les fractions sont des nombres rationnels. De même, dans la dernière interprétation de cette liste, Kieren paraît assimiler le concept de mesure au concept de point sur la droite numérique, ce qui donne une vue très restrictive de l'idée de mesure en la limitant au contexte particulier de la droite numérique. C'est pourquoi, dans un article ultérieur, Kieren (1980) modifie ses interprétations et dit considérer la liste donnée ci-dessus comme un réservoir des interprétations possibles, duquel cinq significations émergent comme étant les bases essentielles pour la construction des nombres rationnels: la fraction est une part (la partie d'un tout), une mesure, un rapport, un quotient ou un opérateur.

De ces cinq significations, une seule n'était pas présente dans la liste antérieure de 1976, celle de partie d'un tout que nous pouvons interpréter comme partage d'un tout en un certain nombre de parties égales (équipartition) puis choix d'un certain nombre des parties obtenues. Selon Kieren (1976), la signification partie d'un tout de la fraction est impliquée dans les quatre premières citées, raison pour laquelle il évite de la définir comme une cinquième.

Revisitant les quatre significations retenues de sa liste de 1976, Kieren modifie parfois ses perspectives. Ainsi, de la mesure liée aux «points sur la droite numérique», il passe à une vision plus générale de la mesure où nous dénombrons les unités utilisées pour « couvrir » une région où nous subdivisons ces unités pour mieux évaluer la grandeur considérée. Bien que cette interprétation soit étroitement liée à celle de partie/tout, Kieren signale que l'accent est surtout mis sur le caractère arbitraire de l'unité et de ses subdivisions, l'idée de partie/tout demeurant plus implicite. Celle-ci est aussi implicite lorsque nous traitons de l'idée de rapport, mais ces deux interprétations se différencient par les relations entre le numérateur et le dénominateur. Avec l'interprétation partie/tout, la relation existe entre une partie et l'ensemble (le tout) tandis qu'avec l'interprétation rapport, c'est la relation entre deux parties qui est considérée. De plus, cette différence affecte l'opération d'addition (par exemple si 3/5, 5/5 exprime les rapports entre le nombre des filles et le nombre des garçons dans deux groupes différents, on ne peut additionner 3/5 et 5/5 selon le sens partie-tout, car le rapport obtenu 8/5, n'aurait alors pas de sens).

Le caractère souvent implicite de la relation partie/tout est sans doute ce qui amène Kieren finalement, en 1988, à l'écarter de sa liste de significations fondamentales qui n'en compte alors plus que quatre : mesure, quotient, rapport, et opérateur multiplicatif.

2.4.2. Les travaux de Behr, Lesh, Post et Silver

En 1983, Behr, Lesh, Post et Silver reconstruisent les catégories des interprétations données par Kieren (1976) avec des interprétations un peu différentes qu'ils appellent des « sous-constructions » du concept de nombre rationnel et ils en ont répertorié sept :

1. la mesure fractionnelle qui répond à la question : combien existe-t-il de quantités relatives à une unité spécifiée de cette quantité ? Behr et al. (1983) proposent cette sous-construction comme une reformulation de l'interprétation de partie/tout ;
2. le « ratio » exprime le rapport entre deux quantités, par exemple le rapport entre le nombre de filles et le nombre de garçons dans une salle ;
3. le « rate » définit une nouvelle quantité comme un rapport entre deux autres quantités de natures différentes (la vitesse, indique un rapport distance/temps) :
4. le quotient qui interprète les nombres rationnels comme le résultat de l'opération de division: p/q signifie p divisé par q ;
5. la coordonnée linéaire qui interprète les nombres rationnels comme des points sur la droite numérique. Cette sous-construction souligne le fait que les nombres rationnels sont un sous-ensemble des nombres réels et elle souligne aussi les propriétés associées à la topologie métrique des nombres rationnels qui constituent notamment un ensemble dense, complet, etc... ;
6. le nombre décimal qui s'appuie sur les propriétés associées à la numération positionnelle ; les décimaux forment un sous-ensemble des rationnels ;
7. l'opérateur appelé « transformateur » qui interprète les nombres rationnels comme une transformation. Les auteurs font allusion à la fonction « stretcher-schrinker » (agrandisseur-réducteur) décrite par Dienes (1966).

Dix ans après avoir proposé leurs sous-constructions, Behr et al. (1993) reviennent vers ce que Kieren (1980) a présenté comme interprétations des nombres rationnels: ils concluent que les sous-constructions partie-tout, quotient, rapport, opérateur et mesure sont encore suffisantes pour clarifier le concept de nombre rationnel.

Behr, Lesh, Post et Silver proposent une analyse très proche de celle de Kieren et tiennent compte du rapport scalaire partie-partie repéré et étudié par Vergnaud (1983). En accord avec Kieren (1980) et Ellerbruch et Payne (1978), les auteurs considèrent le rapport partie-tout comme étant une construction fondamentale pour le développement du concept de nombre rationnel et un point de départ pour les autres constructions. Aussi ils proposent un schéma où ce rapport est à l'origine des différentes opérations de pensée relatives à la fraction.

En effet, ce schéma relie les différentes significations (interprétation, sous-constructions) de la fraction. Leur modèle permet de relier également ces différentes significations de la fraction aux opérations de base, à l'équivalence des fractions et à la résolution des problèmes.

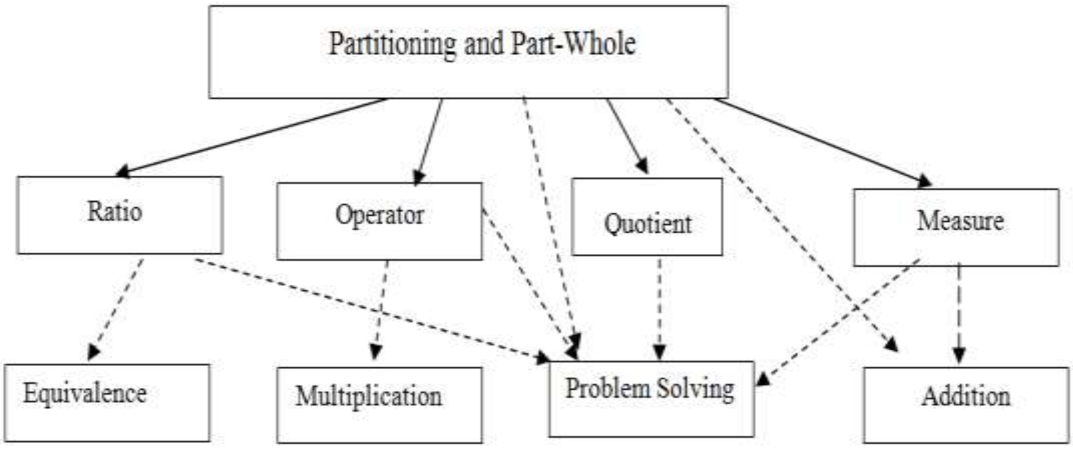


FIGURE 15 – SUB-CONSTRUCTS RELATIONSHIPS FOR FRACTIONS (BEHR, LESH, POST AND SILVER, 1983).

L'intérêt de ce schéma est de lier une opération de pensée à un « subconstruct » de la fraction. Par exemple, la fraction opérateur donne plus de sens à la multiplication des fractions, et la fraction mesure donne un plus à l'addition de deux fractions.

Les interprétations jugées essentielles par Behr, Lesh, Post et Silver sont les mêmes que celles retenues par Kieren : la fraction est une partie d'un tout, un rapport, un quotient, un opérateur et une mesure.

C'est en effet à la même synthèse que Gérard Vergnaud (1983) arrive : « le mot fraction est parfois utilisé pour la partie fractionnaire d'un tout, la mesure fractionnaire, parfois pour une grandeur fractionnaire - non exprimable - (le nombre rationnel), parfois pour une paire ordonnée de symboles (ex : 5 filles, 2 garçons) et parfois comme une relation liant deux grandeurs de même nature ».

2.4.3. Les travaus Ohlsson : une proposition nouvelle

Ohlsson (1988) constate qu'il existe des interprétations possibles de l'idée de fraction qui peuvent s'ajouter à celles déjà données autant par Kieren (1976, 1988) que par Behr et al. (1983). Nous pouvons, par exemple, faire une distinction entre deux interprétations différentes du quotient : le quotient partitif dans lequel le dividende est partitionné en un nombre correspondant au diviseur et le quotient quotitif dans lequel le diviseur mesure une quantité qui est extraite du dividende. De même, nous pouvons distinguer entre le rapport interne qui est un rapport entre quantités de même grandeur comme lorsque nous comparons deux distances et le rapport externe qui est un rapport entre quantités de grandeur de nature différente comme la vitesse qui est un rapport faisant intervenir la distance et le temps.

Dans son approche, Ohlsson remarque tout d’abord que l’expression « x/y » correspond à la paire ordinaire <x, y> et qu’il faut situer celle-ci dans une structure mathématique pour qu’elle trouve son sens. Quatre significations peuvent ainsi apparaître. La paire <x, y> peut être vue comme fonction de quotient, comme nombre rationnel, comme vecteur binaire ou encore comme une sorte de fonction composée, chacune de ces constructions se voyant associée à une structure mathématique particulière. Chacune des quatre significations/structures conduit à des applications diverses auxquelles les termes fraction, proportion, rapport et autres feront référence, prenant alors des significations particulières qui dépendront du construit théorique sous-jacent. Donner un sens au terme fraction revient alors, explique-t-il, à, premièrement, identifier la structure mathématique et la théorie particulière dans lesquelles il est intégré et, deuxièmement, spécifier comment et à quelle classe de situations le terme s’applique.

Si nous retenons la fonction quotient, première structure, l’expression (x/y) correspondra à (x÷ y), c’est-à-dire à une fonction binaire dont le numérateur x et le dénominateur y seront les arguments. Cela conduit aux quatre premiers types d'applications suivantes :

1. partition ou division de partage où le premier argument x correspond à une quantité partagée en un nombre y de parts identiques ;
2. extraction ou division de contenance qui correspond à la soustraction répétée dans laquelle on veut savoir combien de fois une quantité y peut être prélevée d'une quantité x ;
3. contraction où une quantité donnée x décroît par un facteur y, la valeur associée à (x/y) correspond alors à la quantité résultant de la contraction ;
4. dégagement où le x correspond à une quantité bidimensionnelle (par exemple, l'aire d'un rectangle) et y à une des dimensions (comme la longueur du rectangle). La valeur associée à (x/y) correspond donc à l'autre dimension de x (le largueur du rectangle).

À la structure de nombre rationnel, nous pouvons associer deux nouvelles applications à l'expression (x/y) :

5. celle de fraction qui correspond à la notion usuelle de partie/tout ;
6. celle de mesure, également liée à l'idée partie/tout, mais contrainte par l'usage d'unités fixées.

La différence entre ces deux applications liées à la structure de nombre rationnel est que, dans le premier cas, le paramètre de fractionnement et donc la taille des parts obtenues est arbitraire, alors que, dans le cas de la mesure, il est déterminé une fois pour toutes. Ainsi, dans le système métrique, ce paramètre est dix et fixe les sous-unités décimètre, centimètre, millimètre, etc…

Lorsque nous retenons la structure de vecteur binaire, la barre de fraction dans l'expression (x/y) est très explicitement ramenée à un rôle de délimiteur comme la virgule lorsque nous utilisons l'écriture usuelle <x, y>. Les applications rattachées à cette construction vectorielle sont au nombre de quatre :

1. le rapport qui exprime numériquement la comparaison des quantités x et y ;
2. la « quantité en soi » (intensive quantity). Certains rapports ne peuvent s'exprimer que comme rapport. Il en va ainsi du rapport entre les nombres de garçons et de filles dans un groupe. Dans l'autre cas, le rapport devient une nouvelle quantité, ce que nous appelons quantité en soi. Ainsi, le rapport entre masse et volume en physique définit une nouvelle quantité, celle de la masse volumique. Ces quantités, contrairement au premier cas, peuvent être additionnées ou soustraites.
3. la proportion, qui exprime la relation entre la taille d'une part et celle du tout. Ainsi nous disons que la proportion des filles dans un groupe d'élèves est de 17/30 lorsqu'il y a 17 filles parmi les 30 élèves composant le groupe. La différence identifiée par l'auteur entre la fraction (l'application 5 ci-dessus) et la proportion réside dans la référence du dénominateur: dans la fraction, le dénominateur réfère au paramètre de partition tandis que dans la proportion, le dénominateur réfère au nombre total de parties. D'ailleurs, dans la manipulation arithmétique, si nous additionnons les proportions comme les fractions, le résultat sera incorrect.
4. le taux qui exprime un rapport entre une quantité et une période de temps.

La structure de fonction composée peut se ramener, en termes d'application, à l'idée d'opérateur scalaire. Nous parlons de fonction composée ou d'opérateur scalaire puisque la fraction (a/b), appliquée à une quantité, correspond à une multiplication par le numérateur suivie d'une division par le dénominateur.

Les analyses détaillées d'Ohlsson paraissent assez remarquables et méritent d'être signalées pour qui veut donner toutes les interprétations possibles de la fraction à l'aide d'une approche mathématique. Par contre, elles conviennent moins à notre étude puisque nous nous arrêtons aux visions plus primitives ou « primaires » du concept pour lesquelles les interprétations plus simples et mieux connues de Kieren suffisent à nos besoins, sachant toutefois que ces interprétations peuvent être approfondies et raffinées.

2.4.4. Retour sur les apports de la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud

En 1979, Vergnaud relève dans les usages habituels de la notion de fraction, quatre aspects essentiels :

- Opérateur fractionnaire/ quantité fractionnaire.
- Grandeur discrète/ grandeur continue.
- Grandeur non mesurée/ grandeur mesurée par un nombre.
- Rapport partie à toute/ rapport entre parties différentes.

L'analyse de Vergnaud enrichit celle de Kieren sans rien lui enlever : Kieren affirme « rationnel numbers are ratio numbers », et Vergnaud précise qu'il existe deux types différents de rapport scalaire: le rapport partie-tout et le rapport partie-partie. Il vérifie l'intérêt d'une telle différenciation par une expérimentation didactique qu'il a conduite auprès d'enfants de CM2 et de 6ème et constate que la recherche des rapports partie-partie est nettement plus difficile que la recherche des rapports partie-tout. Vergnaud insiste également sur la distinction entre quantités continues et quantités discrètes.

La différenciation entre rapport partie-tout et rapport partie-partie amène Vergnaud à définir deux sortes de fractions: les fractions inclusives et les fractions exclusives (1983). Les fractions inclusives sont inférieures ou égales à 1 et sont définies par un rapport partie-tout ; elles n'ont pas d'inverse, au contraire des fractions exclusives qui sont définies par un rapport partie-partie. Par exemple la fraction 2/5 dans la proposition « Pierre a mangé les deux cinquièmes des bonbons » est une fraction inclusive, et les fractions 3/4 et 4/3 dans les propositions « La collection de Pierre est égale aux trois quarts de celle de John et la collection de John est égale aux quatre tiers de celle de Pierre » sont deux fractions exclusives.

Vergnaud affirme également qu'il est généralement plus facile d'aborder la multiplication et la division de fractions si nous les appréhendons comme des opérateurs, tandis que l'addition et la soustraction de fractions prennent plus facilement du sens lorsque les fractions expriment des mesures. Il est en effet assez simple d'imaginer le fractionnement en deux puis en quatre d'un pain, ce qui produit un huitième, et beaucoup plus difficile de concevoir la multiplication d'un demi-pain par un quart de pain. Inversement, il est facile d'additionner un demi -pain et un quart de pain, tandis que l'addition d'un fractionnement en deux et d'un fractionnement en quatre n'a aucun sens.

Puisqu'un concept ne réfère jamais à une seule situation et qu'une situation ne peut être analysée à l'aide d'un seul concept, Vergnaud (1983) propose une perspective, par laquelle nous considérons les nombres rationnels et particulièrement les fractions comme un élément du champ conceptuel multiplicatif. Ce champ conceptuel des structures multiplicatives renvoie à l'ensemble des situations qui peuvent être analysées dans le cadre d'une proportion simple ou multiple et dont la résolution nécessite l'emploi d'une ou de plusieurs multiplications ou divisions (Vergnaud, 1988).

Cet auteur considère les concepts de fraction et de rapport dans le cadre de trois types de problèmes: isomorphisme des mesures, produit des mesures et proportions multiples. Entendu que les structures des deux derniers types consistent en un produit rationnel de deux mesures d'espaces Ml et M2 dans la troisième mesure d'espace M3, celles-ci mettent en jeu trois variables. Par exemple, nous allons décrire les problèmes concernant l'aire et le volume, où :

M1 = [largeurs], M2 = [longueurs], M3 = [aires] tel que : MI x M2 =M3

ou bien : MI = [aires], M2 = [hauteurs], M3 = [volumes] tel que : MI x M2 =M3

L'isomorphisme des mesures est une structure incluant une proportion simple et directe entre deux mesures d'espaces M1 et M2. De là, Vergnaud (1983) identifie quatre - schémas de problèmes :

Schéma1		Schéma 2		Schéma 3		Schéma 4	
1	a	1	x=f (l)	1	a=f (1)	a	b
B	x	a	b= f (a)	x	b=f (x)	c	x

Le premier schéma est dit multiplicatif et le problème est de trouver x avec a et b donnés. Les deuxième et troisième schémas sont dits respectivement, schéma de division partitive (recherche de la valeur unitaire d'un objet) et schéma de division en quotité (recherche de la quantité d'unités), et les problèmes sont de trouver f(l) et x, respectivement, avec a et b donnés. Le quatrième schéma peut être considéré comme la règle pour les trois autres schémas où x peut apparaître dans chacune des quatre positions. Dans cette formulation, les problèmes de division et de multiplication apparaissent comme des cas spéciaux de la proportion directe.

2.4.5. Apports des approches fondées sur les usages des fractions

Freudenthal (1983) présente la fraction comme source phénoménologique des nombres rationnels et identifie trois de ses aspects qui correspondent aux rôles qu'il nomme respectivement « fractureur », « comparateur » et « opérateur ».

Le premier aspect est de regarder la fraction comme un « fractureur » pour faire d'abord référence aux actions concrètes et primitives de partage. L'égalité des parties est d'abord jugée à l'œil ou par tâtonnement; d'autres méthodes plus développées sont aussi utilisées comme le pliage, ou la pesée à la main ou avec une balance. Aux yeux de Freudenthal, l'approche la plus concrète pour aborder la fraction démarre avec un tout qui se voit séparé en parties égales par découpage, coloriage.

De là, il arrive à un autre aspect qui est, en effet, l'extension de concept de partie-tout et dans lequel il considère la fraction comme un « comparateur » de grandeurs, comme dans l'exemple : « la hauteur de la chaise est une demie de la hauteur de la table ». Nous pouvons toutefois remarquer que dans cette définition, l'idée de rapport de Kieren (1980) peut intervenir.

Le troisième aspect de la fraction présenté par Freudenthal est de la regarder comme un opérateur, encore ici au sens de Kieren (1980). Cette idée d'opérateur est aussi présente dans les deux autres aspects.

Un peu, dans le même contexte, d'autres chercheurs comme Mack (1990, 1995), Streefland (1991, 1993) et Lamon (1993, 1996, 1999) s'intéressent aux connaissances informelles des nombres rationnels que Kieren (1988) appelle les connaissances intuitives. Ces connaissances ne dépendent pas d'un enseignement formel, mais sont construites par l'enfant lors d'expériences quotidiennes de la vie réelle afin de répondre aux problèmes posés dans le contexte d'une situation familière pour lui.

Resnick (1986) présente une analyse des connaissances intuitives et de leurs caractéristiques. Dans son travail, elle explique que plusieurs concepts fondamentaux comme celui de nombre rationnel, ne peuvent être acquis que si les notations formelles sont établies et intégrées au système intuitif des mathématiques de l'apprenant. Elle met donc l'accent sur les situations d'enseignement qui peuvent soutenir le développement des connaissances intuitives des mathématiques. Les résultats des travaux de Lamon (1996), où celle-ci aborde notamment les différentes procédures d'équipartition utilisées par les élèves, montrent l'influence de ces sources de connaissances pour résoudre des problèmes de nature réaliste. Plusieurs chercheurs (Hart, 1989 ; Lesh, Post et Behr, 1988) ont émis des remarques concernant les difficultés que posent les connaissances informelles des élèves dans leur compréhension des nombres rationnels: nous avons déjà évoqué ces exemples où des élèves traitent les rapports et proportions par l'addition plutôt que la multiplication ou d'autres qui généralisent abusivement leurs connaissances des nombres naturels aux fractions. Par contre, d'autres chercheurs (Mack, 1995 ; Streefland, 1993) soutiennent que ces connaissances peuvent servir de base aux enfants pour construire des sens aux symboles et aux procédures formelles afin de développer une compréhension de ces nombres. Ainsi, dans son travail, Streefland (1991, 1993) fournit plusieurs exemples d'enseignement où les connaissances intuitives sont mises à contribution, par exemple le partage des pizzas entre les membres d'une famille comme porte d'entrée à des activités d'équipartition.

2.4.6. Autres approches proposées pour décrire la multiplicité des significations de la notion de fraction

Des auteurs ont proposé des modèles pour tenter de décrire la multiplicité de significations accordées à la fraction. Ces modèles se recouvrent partiellement mais ne sont pas équivalents, tant dans la définition des différentes significations des fractions qu'à propos des relations qui les relient.

Rémi Brissiaud (1998) propose une approche de l’enseignement des fractions. Il distingue notamment partition de la pluralité et fractionnement de l'unité :

- Partition de la pluralité : le numérateur renvoie à une grandeur, par exemple trois tartelettes partagées entre quatre personnes. Cette notion est liée à l’idée de division.
- Fractionnement de l’unité : le numérateur est sans dimension, il opère sur la fraction de l'unité, par exemple, je prends 3 fois 1/4 de tartelette. Dans cette conception, le monde des fractions reste séparé du monde de la division.

Pour Brissiaud, il est essentiel de ne pas limiter les situations de partage à la conception du fractionnement de l’unité. Trois quarts doivent aussi renvoyer à la division de trois par quatre. Une caractéristique des fractions est que celles-ci permettent d'écrire une division exacte entre deux entiers sans avoir à se préoccuper si le dividende est divisible par le diviseur. Ainsi le résultat de la division de 7 par 5 peut s’écrire 7/5. Selon Brissiaud, l'équivalence entre partition de la pluralité et fractionnement de l'unité fonde le concept de fraction. Cette distinction sur laquelle insiste Brissiaud met en évidence un autre aspect des fractions qui est le caractère continu ou discret des quantités fractionnées. Les grandeurs continues sont des quantités mesurables, tandis que les quantités discrètes sont des collections que l'on peut dénombrer. Des recherches ont montré que le contexte physique (grandeurs continues ou discrètes), dans lequel les fractions sont présentées, influence les stratégies des élèves (mesurer ou compter) et leur manière de se représenter les fractions. Notamment, les quantités continues inciteraient davantage les élèves à se représenter les fractions comme une partie d'un tout dont le tout est un objet entier.

Nicolas Rouche (1998) indique qu'une fraction peut représenter :

- Un opérateur : la fraction-opérateur concerne le fractionnement des grandeurs. Elle consiste d'une opération de partage d'un ou plusieurs objets entre une ou plusieurs personnes. L'exemple prototypique de cette catégorie est le partage d'une tarte en plusieurs morceaux égaux.
- Un rapport : différentes sous-catégories sont présentes dans le sens de la fraction en tant que rapport :
    - rapport partie-tout
    - rapport entre deux grandeurs
    - pourcentages
    - échelles
    - probabilité
- Une mesure : dans ce cas, la barre de la fraction est identifiée à la division et le dénominateur sera le diviseur.

Puis, Lamon (2001) présente cinq significations possibles de la fraction : la partie-tout, le rapport et les taux, l'opérateur, la mesure et le quotient.

TABLEAU 7 – DIFFERENT FRACTION INTERPRETATIONS FOR THE FRACTION, 3/4 (LAMON, 2001).

Interpretation	Example
Part/ whole	3 out of 4 equal parts of a whole or set of objects
Measure	3/4 means a distance of 3 (1/4 units) from 0 on the number line
Operator	3/4 of something, stretching or shrinking
Quotient	3 divided by 4, 3/4 is the amount each person receives
Ratio	3 parts cement to 4 parts sand

Plus récemment, Grégoire (2008) propose un autre modèle à l'enseignement de la notion de fractions dans la classe qui consiste à mettre les différentes significations de la fraction en trois catégories qui correspondent à trois stades d'acquisition qui vont du plus concret au plus abstrait. Le premier stade est celui de la fraction-opérateur. Il se réfère aux situations de partage. Ensuite on trouve le stade de la fraction-rapport, qui nécessite un plus grand degré d'abstraction car il faut accéder à la compréhension que des fractions différentes peuvent représenter le même rapport. Enfin, nous trouvons le stade de la fraction en tant que nombre : les fractions sont perçues comme une nouvelle catégorie de nombres, avec des propriétés spécifiques et différentes de celles des naturels.

2.5. Significations de la notion de fraction retenues dans notre recherche

La diversité des approches didactiques possibles, des travaux et recherches théoriques concernant la fraction renvoie aux nombreuses significations de la fraction. En répertoriant et en insistant sur les différentes interprétations liées au concept de fraction, Kieren, Vergnaud et Behr s’accordent pour opposer la possibilité d’enseigner un de ces aspects sans envisager, à court ou long terme, l’étude des autres aspects. A travers sa théorie des champs conceptuels, Gérard Vergnaud (1983) a relié le champ conceptuel des nombres rationnels au champ conceptuel de la multiplication et de la division.

Les différentes significations repérées par les auteurs ne se situent pas toujours au même niveau et sont de ce fait difficilement utilisables en tant que telles. Nous allons tenter de cerner plus précisément le concept de fraction en nous limitant au champ conceptuel qu’il est possible d’approcher avec de jeunes élèves (10-11 ans).

Il nous reste à déterminer quelles significations des fractions nous allons garder pour la suite de notre travail, les recherches antérieures vont nous éclairer sur notre choix. Les lectures faites sur les travaux de Hétu et Desjardins (1974), Kieren (1980), Post (1989), Behr et al. (1983), Prevost (1983), Payne (1984), Lester (1984), Mick et Sinicrope (1989), Terrien, Dionne et Mura (1994), Niemi (1996), Rouche (1998), Adjiage et Pluvinage (2000), Watanabe (2002) et Blouin (2002) nous ont permis de répertorier neuf significations accordées aux fractions. Il faut noter que ces auteurs ne mentionnent pas chacune de ces significations. Ces significations possibles sont : relation entre une partie et un tout (quantité continue ou un seul objet), relation entre une partie et un tout (quantité discrète ou un ensemble d’objets), opérateur, rapport, quotient, mesure, probabilité, nombre sur une droite numérique et nombre. Dans notre étude, nous avons décidé de les conserver toutes pour cette recherche. Dans les sections suivantes, nous décrivons ces significations à partir de la recension des études précitées. Nous allons expliquer ci-dessous en quoi consiste chacune de ces significations.

2.5.1. Explicitation des différentes significations de la notion de fraction

Avant d'aborder les significations accordées aux fractions, il convient de définir le terme signification. Le dictionnaire *Le Petit Robert* (2014) définit le terme signification comme « ce que signifie une chose, un fait. Sens d'un signe, d'un ensemble de signes, et spéciale d'un mot ». Selon le dictionnaire Larousse, le mot signification est défini comme « ce que signifie, représente un signe, un geste, un fait. Sens et valeur d'un mot ». Dans cette section, nous présentons et expliquons chacune des significations de la fraction.

2.5.1.1. La fraction en tant que Partie d'un tout (le tout est une quantité continue ou un seul objet)

La signification partie d'un tout de la fraction est définie comme une situation dans laquelle une quantité continue ou un ensemble d'objets discrets sont partitionnés en parties de taille égale (Lamon, 1999). Selon Marschall (1993), il s'agit de l'une des premières situations rencontrées par les enfants lorsque, par exemple, ils partagent leur collation de manière équitable avec leurs camarades. De plus, cette signification apparaît parmi les premières significations enseignées lorsque les fractions sont abordées à l'école primaire, notamment en utilisant l'exemple typique de la tarte divisée en plusieurs morceaux égaux. Selon Kieren (1980), Nunes et Bryant (1996), Blouin (2002) et Watanabe (2002) la signification la plus commune est celle partie d'un tout. Le modèle partie d'un tout est considérée par Kieren (1980) comme la base des connaissances sur les fractions. Cette signification repose sur le principe de la division d'une quantité discrète ou continue, en parties égales. Pour Kieren (1980), l'interprétation de ce modèle est directement liée à la capacité de répartir une quantité continue, ou un ensemble d'objets discrets, en un tout également divisé en sous-ensembles égaux. Ce serait la première signification que les enfants auraient des fractions. Selon Kieren (1980), ainsi que Ellerbruch et Payne (1978), le modèle partie d'un tout s'avère le plus naturel. Behr et al. (1983) suggèrent que le partitionnement et la subconstruct (signification) partie/tout sont essentiels à l'apprentissage d'autres subconstructs (significations) du nombre rationnel. Cela peut expliquer pourquoi la signification partie/tout de fractions a traditionnellement servi à initier les étudiants à l'instruction sur les fractions. En outre, Lamon (1999) note l'importance de cette signification en affirmant qu'il fournit en général le langage et le symbolisme pour les nombres rationnels. De plus, Mack (1993) reconnaît que les élèves acquièrent les connaissances informelles sur des fractions avant qu'ils ne viennent à l'école. Elle relève également, dans les études, que les stratégies informelles des élèves à résoudre des problèmes de nombres rationnels sont généralement fondées dans l'interprétation de la partie-ensemble de fractions. Cette signification est généralement introduite très tôt dans le cursus scolaire. Les élèves, dans la première et la deuxième année scolaire, ont une compréhension primitive de la signification de 1/2 et la base du processus de partitionnement (Kieren, 1976). Cependant, ce n'est qu'à la quatrième année scolaire que le concept de fractions est traité d'une façon substantielle et systématique. De plus, Ellerbruch et Payne (1978) suggèrent l'introduction des concepts de la fraction en utilisant un seul modèle, c'est le modèle partie d'un tout. Ils y voient le modèle le plus utile pour l'addition des fractions.

Mettons en évidence les deux notions « quantité continue et quantité discrète » :

- La notion de quantité continue se réfère généralement à une longueur, une surface ou un volume. Dans ce cas, le tout dont une fraction est une partie, est composé d'un seul objet comme une feuille de papier, une pomme, une tarte ou un rectangle.
- Alors que, lorsque le tout se compose de plus d'un objet, une douzaine d'œufs, 8 biscuits, 15 jetons de comptage, le tout est désigné comme étant discret, il est composé de plusieurs objets discrets (séparés).

Afin de développer la signification de partie d'un tout, les élèves doivent, d'un côté, comprendre que les parties composées du tout doivent être de taille égale, ils devraient également être capables de partitionner une quantité continue ou un ensemble discret en parties égales et discerner si le tout a été divisé en parties égales ; d'un autre côté, ils doivent saisir que différents modèles, telles que les formes géométriques, y compris la longueur, la surface, le volume et d'autres modèles, sont utilisés pour introduire la partition (Behr et Post, 1992).

De plus, ceux-ci doivent développer l'idée d'inclusion (à savoir, les parts du numérateur sont des composantes du dénominateur) et comprendre que tant que le nombre de parts dans lequel le tout est divisé augmente, leur taille diminue (Boulet, 1999). Il s'agit de prendre une grandeur continue (comme par exemple une pizza) et de la diviser en parties égales afin de choisir certaines parties sur le tout. Ces parties obtenues sont considérées comme des unités nouvelles dont le nom est fourni par le quantième de l'unité – qui s'appelle alors dénominateur. Un nombre de ces parties est déterminé par le numérateur qui ne peut être qu'un nombre entier naturel. Par exemple, la fraction 5/18 peut représenter 5 parties égales d'une quantité continue (forme géométrique, pizza, etc.) sur le total de 18.

En effet, parmi les éléments qui semblent jouer un rôle important dans la l'apprentissage de la signification partie d'un tout des fractions, nous trouvons une série de connaissances intuitives qui précèdent tout apprentissage formel. Nous retrouvons plus particulièrement trois schèmes de partage. Ils ont été identifiés :

1. la réduction de moitié. Cette action peut être répétée de façon itérative, tant avec des quantités discrètes que continues.
2. la distribution. Il s'agit d'une forme primitive de partage qui consiste à répartir les parts de manière égale : l'enfant donne une part (ou un objet) à chacun, puis recommence un tour, et continue ainsi jusqu'à ce que toutes les parts (ou les objets) soient distribués.
3. le pliage. Le pliage est une façon de partager une grandeur continue, comme par exemple une bande de papier, en parts égales. Le nombre de parts augmente et la taille des parts diminue avec le nombre de pliages, nous pouvons plier en deux puis encore en deux, etc...

Coxford et Ellerbruch (1975), tout comme Kerslake (1986) ont noté que le modèle initial de la fraction rencontrée par les élèves à l'école est celui d'une partie d'un tout. La signification de la fraction comme partie d'un tout semble avoir une place prépondérante pour les enfants, tant dans leurs connaissances intuitives que dans leurs premiers apprentissages. Des auteurs soulignent que la prépondérance de la représentation « partie d'un tout » des fractions inhibe la possibilité des enfants à développer d'autres significations des fractions » (Kerslake, 1986). Selon Coquin et Camos (2006), celle-ci empêche également les élèves de se représenter les fractions comme des nombres et elle se révèle particulièrement inadéquate dans toute une série de situations. Par exemple, pour effectuer certaines opérations sur les fractions comme $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$, nous ne pouvons pas multiplier une partie par une partie. En effet, lorsque nous prenons $\frac{2}{3}$ de l'unité et que nous voulons prendre $\frac{1}{4}$ de la même unité, cela ne va pas pouvoir être réalisé parce qu'il va rester $\frac{1}{3}$ de l'unité divisée et elle est plus petite que la fraction $\frac{1}{4}$.

Le concept de partage en parties égales semble être critiqué. En effet, Post et Cramer (1987) ont indiqué que les élèves ont tendance à penser la fraction $\frac{1}{3}$ plus grande que $\frac{1}{2}$, parce que la même quantité a été divisée en un plus grande nombre de morceaux dans la fraction $\frac{1}{3}$ que dans celle de $\frac{1}{2}$. De plus, l'incompréhension de cette relation, entre partie-tout et l'unité, entraînera plus tard des problèmes dans le développement conceptuel, telles la compréhension d'addition des fractions (le résultat d'additionner deux fractions peut être supérieur à l'unité), l'ordre des fractions et le fait de trouver des fractions équivalentes. Donnons un exemple :

$\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{4}$ parce que dans $\frac{1}{2}$ l'unité est divisée en 2 parties égales mais dans le deuxième cas, l'unité est divisée en 4 parties égales, et ceci peut être difficile à comprendre (Behr et Post, 1992; Post, Behr et Lesh, 1982). De plus, les élèves ne sont peut-être pas capables de réaliser que le tout devrait être également partagé, ce qui peut provoquer ensuite une erreur représentée par l'addition du numérateur et du dénominateur ensemble. Nous pouvons ainsi affirmer la raison pour laquelle les élèves effectuent l'addition de deux fractions comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ de façon $\frac{1}{2}$ +$\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{5}$ vient du fait de l'incapacité à reconnaître la relation partie-tout.

En effet, les élèves possèdent généralement une vision réductrice, stéréotypée des fractions, pour ceux-ci, une fraction est toujours une partie plus petite que l'unité, il faut diviser puis multiplier etc...

Afin de permettre à ces élèves d'acquérir une meilleure compréhension des fractions, il semble important de développer une conception flexible de l'unité comme :

- l'unité peut être un objet entier ou une collection
- l'unité peut être une partie d'objet qui est à son tour partagée (partages successifs)
- l'unité peut être reconstruite à partir des différentes parties.

Bonotto (citée par Pitkethly et Hunting, 1996) suggère, pour élargir les significations des fractions des élèves, de construire le sens des fractions à partir de situations diversifiées, issues de la vie quotidienne, simultanément avec des quantités discrètes et continues puis, d'utiliser le langage et les symboles pour décrire les fractions. Elle souligne que les représentations concrètes (objets) et visuelles (figures) ne doivent pas être les seuls points de référence pour les sens. Cette proposition rejoint celle de Rouche (1998) qui propose une progression en quatre étapes et dont le principe est de faire découvrir les fractions dans des situations les plus diversifiées possibles, en partant du concret vers l'abstrait :

1. partager en parts égales des objets quelconques, (un fil, une barre de chocolat, le contenu d'une bouteille, le contenu d'une boite de biscuits etc…) ; nous considérons les objets du point de vue de leur longueur, de leur poids, de leur volume, de leur nombre, ..., nous varions les quantités discrètes (partition de la pluralité) et continues (fractionnement de l'unité).
2. partager en parts égales des objets standards (par exemple des boules de plasticienne pour les objets pesants, des bâtonnets pour les longueurs, des jetons pour les collections) ; les objets sont encore concrets mais sont prototypiques.

3. partager en parts égales des représentations dessinées (des segments pour les longueurs ou les durées, des figures géométriques pour les aires, des ensembles d'objets pour les collections).
4. partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres ; nous ne fractionnons plus des objets ou leur représentation mais leur mesure qui s'exprime à l'aide de nombres.

Aujourd'hui, il y a une tendance générale dans les écoles à utiliser la signification partie-tout pour présenter aux élèves le concept des nombres rationnels. Dans ce premier contact, aux enfants est donnée la possibilité d'apprendre à diviser une quantité continue ou un ensemble d'objets discrets en parts égales ou en sous-ensembles avec un nombre égal d'éléments respectivement (Behr, Lesh, Post et Silver, 1983). Bien que la signification partie-tout soit la plus facile pour les enfants à comprendre, Lamon (1999) déclare que ce premier contact avec le nombre rationnel n'est pas facile pour les élèves :

> « Although fractions build on a child's preschool experiences with fair sharing, the more formal ideas connected with visual representations, fraction language, and symbolism, are so intellectually demanding that it takes a long time after their first formal introduction to part-whole comparisons before they can coordinate all of the essential details » (p.66)

Traduisons la citation précédente de Lamon :

> Bien que les fractions s'appuient sur des expériences préscolaires d'un enfant avec le partage équitable, les idées les plus formelles liées à des représentations visuelles, le langage fractionnaire et le symbolisme, sont si intellectuellement exigeants qu'elles prennent beaucoup de temps après leur première introduction formelle des comparaisons partie-tout avant de pouvoir coordonner tous les détails essentiels. (Traduction par Alahmadati, 2014).

Bien que la signification Partie d'un tout des fractions puisse être considérée comme un fondement essentiel pour le concept de fraction, il ne devrait pas être la seule situation qui associe les écoliers avec des fractions. Kerslake (1986) nous met en garde contre l'apprentissage du seul modèle de partie-tout qui peut entraîner de sérieuses limitations sur la compréhension des fractions des enfants. Sowder (1988) note également que les manuels scolaires élémentaires comptent beaucoup sur la signification partie-tout de fractions. Dans cette enquête, la décision est prise pour y inclure explicitement plusieurs interprétations des fractions, en plus de la signification partie-tout, ceci est pris en charge dans les résultats.

La prochaine signification, que nous allons présenter, est la signification partie-tout, le tout est une quantité discrète ou un ensemble d'objets.

2.5.1.2. La fraction en tant que Partie d'un tout (le tout est une quantité discrète ou un ensemble d'objets)

Cette signification s'apparente beaucoup à la signification de partie d'un tout, le tout étant une quantité continue ou un seul objet. Plutôt qu'une grandeur continue soit divisée (un objet ou une région), une grandeur discrète, telle un ensemble, est divisée en parties égales et une part est choisie. La fraction 5/18 peut représenter ici cinq objets de même nature sur un total de dix-huit. Cette signification s'apparente aussi à celui du rapport. En effet, la fraction exprime ici une relation entre une partie et un tout discret. Ainsi, par exemple, si trois tartelettes doivent être réparties entre 5 invités, nous les partagerons chacune en cinq parts égales, de manière à obtenir pour chacune, des cinquièmes. Dans un second temps, ces cinquièmes sont réparties entre les 5 invités; chacun en reçoit 3, soit trois cinquièmes. Cet exemple illustre une approche non traditionnelle de la fraction « trois cinquièmes ».

Contrairement à ce qui est souvent observé dans les classes, la notion de fraction ne doit pas se construire uniquement sur des fractionnements d'unité mais bien également sur des collections d'objets prises comme unité. Brissiaud parle dans ce cas de «partition d'une pluralité»; démarche plus complexe que le fractionnement d'une unité mais fondamentale dans la construction de la notion de fraction.

2.5.1.3. La fraction en tant qu'Opérateur

La signification à considérer ici est celle de l'opérateur. Selon Blouin (2002), Rouche (1998) et Kieren (1980), la fraction peut être représentée comme un opérateur. Les études de Kieren et Nelson (1978) puis Kieren et Southwell (1979) ont exploré cette signification de la fraction. Le cas « opérateur » désigne des situations où la fraction opère sur une quantité ou une mesure. Lamon (1999) affirme brièvement que « la notion d'opérateur des nombres rationnels est sur le rétrécissement et l'élargissement, la compression et l'expansion, l'agrandissement et la réduction ou la multiplication et la division » (p. 94). Dans la signification opérateur, la fraction peut être considérée comme une fonction algébrique qui transforme des figures géométriques ou des ensembles d'objets (Behr et al, 1983 ; Post et al, 1985). Autrement dit, lorsqu'une fraction opère sur un objet continu, elle étend ou rétracte l'objet. Par exemple, si une longueur de 1 est opérationnel par p/q, la longueur étirée est de p fois sa longueur, et rétrécie par un facteur q. Ainsi, pour une longueur de 6 et un opérateur de 2/3, le résultat serait $2 \times 6 \div 3$, ou 4. De même, quand une fraction opère sur un ensemble discret, il s'agit d'un multiplicateur ou d'un diviseur. Par exemple, un ensemble contenant n éléments opéré par p/q aura ses résultats en $p \times n \div q$. Ainsi, si un ensemble contenant 12 objets a été opéré par 2/3, le résultat serait $24 \div 3$, ou 8.

C’est exactement ce qu’indique Bond (1998) :

> « La sous-construction d'opérateur de la fraction impose une interprétation algébrique de la forme p/q. L'opérateur p/q peut être pensé comme une fonction transformant des figures géométriques en figures géométriques similaires p/q fois plus grandes ou plus petites. De la même façon, p/q peut également être conçu par rapport à une droite L qui est étirée de p fois sa longueur puis réduite de q fois. Une interprétation «multiplication suivie d'une division» est donnée à p/q lorsqu'elle opère sur un ensemble discret. La fraction p/q transforme un ensemble de n éléments en un ensemble de n p/q éléments » (p. 46)

L’interprétation «opérateur» de la fraction permet de considérer la fraction comme une fonction ou comme une suite d'opérateurs multiplicatifs. Il est ainsi possible:

a) de construire des images d'une figure géométrique par des homothéties, modifiant alors uniquement les mesures de ces figures. C’est-à-dire : agrandissement en appliquant l'opérateur p/q à chacune des mesures, p étant plus grand que q; réduction en appliquant encore l'opérateur p/q à chacune des mesures, p étant cette fois-ci plus petit que q.
b) de construire des collections diverses en transformant une collection originale: accroissement ou réduction de la taille d'une collection par des applications équivalentes à celles décrites précédemment pour les figures géométriques.

Cette signification est une partie importante de l'expérience avec les fractions. Le sens du nombre en est d'abord affecté, le nombre ne représente plus une quantité mais une transformation. Ainsi, la fraction 3/4 n'est pas interprétée comme étant 3 parties sur 4 parties en tout mais bien comme étant une suite d'opérateurs multiplicatifs (x 3 et ÷ 4) qui sont appliqués sur une quantité. De là, en découle une mise en place naturelle de la notion d'inverse multiplicatif, propriété essentielle des nombres rationnels.

Observons le problème suivant afin de mieux comprendre cette signification puissante de la notion de fraction :

Ahmad possède 15 billes. Amir en possède 12. Quels sont les rapports entre les collections d’Ahmad et d’Amir ?

Dans cette situation, le nombre de billes d’Amir peut être perçu comme le résultat de l’application d’une transformation multiplicative au nombre de billes de la collection d’Ahmad. Cette transformation est alors « * 4/5 » ou « 4/5 de ». Inversement, nous pouvons trouver la transformation qui, partant du nombre de billes d’Amir (12), permet de trouver le nombre de billes d’Ahmad (15), soit « * 5/4» ou « 5/4 de».

Behr, Lesh, Post et Silver (1983) ont analysé le concept de fraction en tant qu’opérateur selon deux interprétations différentes possibles, d’une part, comme un

« agrandisseur / diminueur », et d'autre part comme un « duplicateur / réducteur », nous les rapportons ici :

- L'opérateur « agrandisseur / diminueur » considère la quantité comme un tout : pour calculer 2/3 de 9 par exemple, nous considérons 9 comme une entité que nous divisons en 3 parts égales. Chaque part comporte 3 unités discrètes puis, nous multiplions ensuite 3 par 2.
- L'opérateur « duplicateur / réducteur », s'applique aux unités discrètes de la quantité considérée, ici, l'ordre des opérations n'a pas d'importance. Pour calculer 2/3 de 9, il suffit de multiplier 9 par 2 puis de diviser le résultat par 3 ou bien de diviser 9 par 3 puis de multiplier le résultat par 2.

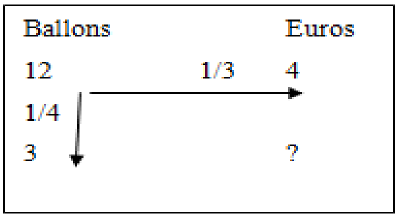
Selon cette analyse, la quantité sur laquelle agit un opérateur est transformée en une nouvelle quantité, de manière à ce que la proportion de la quantité d'entrée et de sortie soit égale à la proportion entre le numérateur et le dénominateur de l'opération. La distinction entre les deux est la suivante : la fraction opérateur est considérée comme « agrandisseur / diminueur » lorsqu'elle opère sur une quantité continue alors que ; lorsqu'elle agit sur une quantité discrète, elle est vue comme « duplicateur / réducteur ». C'est-à-dire, p /q est pensée comme une fonction qui transforme des figures géométriques en des figures géométriques similaires avec p/q fois plus grosses, ou comme une fonction qui transforme un ensemble en un autre ensemble avec p/q fois autant d'éléments.

En effet, l'idée d'opérateur intervient lorsqu'il faut transformer une quantité. Par exemple, si nous voulons savoir combien de sucettes nous avons si nous en prenons les 2/3 de 30, la première opération est de diviser 30 en 3 parts égales et ensuite de multiplier par 2 ou encore l'inverse. Cela revient à calculer $2/3 \times 30$. Deux opérations sont en jeu, une multiplication et une division. La transformation est donc composée de deux opérations inverses, c'est-à-dire la division par le dénominateur et la multiplication par le numérateur. Maurin et Joshua (1993) indiquent que la notion de fraction opérateur apparaît comme la succession de deux opérations, l'une étant une multiplication, l'autre, une division. Du fait de la commutativité de la multiplication, l'ordre dans lequel s'effectuent ces deux opérations n'ayant pas une incidence sur le résultat final, l'opérateur fractionnaire est un résumé de l'enchaînement de ces deux opérations.

Pour maîtriser cette signification, les élèves devraient être capables d'identifier une seule fraction pour décrire une opération multiplicative composite, à savoir une multiplication et une division, et de rapporter les quantités entrées et les quantités sorties, un opérateur 3 / 4 résulte de la transformation d’une grandeur d'entrée de 4 à 3 (Behr et al., 1993). Du point de vue de l’apprentissage, la notion de fraction, comme opérateur, peut se confronter à la difficulté de coordonner la partition et l’équivalence ou bien de développer une pensée multiplicative, certainement plus élaborée que le raisonnement additif.

L’opérateur est défini par un rapport de proportionnalité entre deux quantités distinctes : la quantité fractionnaire et la quantité de référence. Selon Vergnaud (1983), si les quantités sont de même nature, on parle de rapport « scalaire », qu’il soit partie-tout : « Amir avait 12 ballons, il lui en reste 4 ». La fraction 1/3 indique un rapport partie-tout entre ce qu’il possède à la fin et ce qu’il avait initialement, ou qu’il soit partie-partie : « Amir a 12 ballons et Jean en a 8 ». Les fractions 2/3 et 3/2 expriment le rapport entre les deux collections, selon l’unité de référence choisie. Si les quantités sont de natures différentes, on parle de rapport « fonction » ainsi, « 12 ballons valent 4 euros », la fraction 1/3 exprime le rapport « fonction » entre le nombre de ballons et le nombre d’euros équivalents.

C’est-à-dire, « 12 ballons coûtent 4 euros, quel est le prix de 3 ballons ? ».



Il y a deux façons possibles pour résoudre ce problème :

1. en utilisant le rapport « scalaire » : l’opérateur 1/4 (3/12) indique le rapport entre deux quantités de même nature (ballons) ;
2. en prenant le rapport « fonction » : l’opérateur fonction exprime le rapport entre deux quantités de natures différentes, ballons et euros. Si 12 ballons coûtent 4 euros, le rapport ballon/euro est de 3 ballons pour 1 euro.

Vergnaud (1983) constate que les enfants préfèrent généralement la procédure scalaire à la procédure fonction car il semble plus naturel d’établir le rapport entre deux quantités de même nature qu’entre deux quantités de natures différentes.

L’étude des fractions, notamment celle de la signification de la fraction en tant qu’opérateur, présente un intérêt pour la compréhension de la multiplication et de la division. Dans cette même ligne de pensée, il est important d’amener l’enfant à décomposer systématiquement une fraction en deux opérations. Cette décomposition simplifie grandement le problème posé par la compréhension du concept de fraction, elle permet de mieux saisir le sens du numérateur et celui du dénominateur par analogie avec la multiplication et la division.

2.5.1.4. La fraction en tant que Rapport

Les fractions sont des nombres de la forme p/q, où p et q représentent des entiers qui sont sous la forme d'un rapport de nombres. Le rapport est une relation qui exprime la notion de quantité relative. Donc, il est plus correct de le considérer comme un indice comparatif plus tôt que comme un nombre.

En effet, la fraction est, avant tout, un rapport entre deux quantités. Par exemple, nous préférons souvent dire « un quart de la population » plutôt que « 29 500 habitants » ici, la fraction indique la taille de la quantité considérée par rapport à la totalité de la population. Plusieurs auteurs comme Kieren (1980), Blouin (2002), Watanabe (2002) et Rouche (1998) évoquaient cette signification de la fraction. En outre, La fraction rapport permet d'écrire à l'aide d'une fraction le rapport entre deux nombres, originalement noté à l'aide du symbole « : » ; le rapport « 3: 5 » peut aussi s'écrire 3/5. Cette interprétation est très utile pour aborder les fractions plus grandes que 1. Afin de comprendre davantage la fraction en tant que rapport, nous examinons plus attentivement l'énoncé suivant :

Il y a 15 filles et 18 garçons dans la classe A, alors que nous comptons 14 filles et 21 garçons dans la classe B.

Dans le premier cas, la classe A, le nombre de filles représente le 5 sixièmes du nombre de garçons. Le nombre de garçons est le 6 cinquième du nombre de filles. Dans le second cas, la classe B, le nombre de filles est le 2 tiers du nombre de garçons. Le nombre de garçons représente le 3 demis du nombre de filles.

Cette signification est aussi appelée le modèle exclusif à cause de l'indépendance des deux quantités mises en relation. La notion de proportion découle de cette signification.

La signification rapport considère la fraction comme une comparaison entre deux quantités. Selon Rouche (1998), un rapport est une comparaison et il exprime une relation entre deux grandeurs ou entre deux ensembles finis d'objets. En d'autres mots, c'est une relation de type multiplicatif entre des grandeurs discrètes ou continues. Celui-ci consiste à comparer deux grandeurs, comme 4/5 ou 50/100. Il s'agit de relations entre couples de nombres. La proportion par contre est issue du constat que plusieurs couples de nombres (au moins deux) possèdent le même rapport, par exemple 1/3 et 3/9. La proportion implique donc de considérer simultanément quatre données numériques et d'envisager la relation entre elles. En effet, les élèves raisonnent sur « des couples d'entiers » et non sur le fractionnement ou la partition d'entiers. Un rapport de deux grandeurs peut être considéré sous différents aspects : entre deux objets distincts, entre deux éléments d'un même objet, entre un tout et une partie de ce tout et entre deux parties d'un tout.

La relation entre un tout et une partie de ce tout et la relation entre un ensemble et une partie de cet ensemble feront l'objet de deux catégories distinctes des significations possibles de la fraction.

Pour saisir la notion de la fraction comme rapport, les élèves ont besoin de construire l'idée de quantité relative (Lamon, 1999). Ils devraient aussi comprendre la propriété covariance-invariance selon laquelle les deux quantités, dans cette relation, change en même temps, de sorte que la relation entre eux reste invariante. La « tâche de jus d'orange » (Noelting, 1980), dans laquelle les enfants sont invités à préciser lequel des deux mélanges, de jus d'orange et de l'eau, aurait le goût le plus « orangé », ou encore dire si les deux groupes donneront une boisson au goût identique, a été largement employée pour examiner si les élèves ont développé ces idées. L'utilisation des verres, d'eau et de jus d'orange, suggère un modèle discret (Behr, Lesh, Post et Silver, 1983).

Les nombres rationnels ne peuvent être conçus comme nombres que grâce à l'idée du rapport qu'ils expriment, ce qui explique que l'ensemble des deux nombres (entiers) rangés dans un certain ordre puisse être considéré comme un seul nombre. Ainsi, si deux grandeurs commensurables A et B sont multiples d'une même grandeur M, nous avons :

$A = a\,M,\qquad B = b\,M.$

Nous écrivons alors : $A = a/b\ B$?

et nous disons que a/b est le nombre qui mesure A quand B est prise comme unité. Mais, a/b n'est pas un nombre : c'est l'ensemble des deux coefficients qui servent à mesurer A et B qui sont considérées comme multiples de la grandeur M. Afin de pouvoir dire que a/b est un nombre, il faut faire appel à l'idée de rapport et concevoir que le rapport des grandeurs A et B soit le même que celui des nombres entiers a et b, dont chacun désigne le nombre de fois que la grandeur correspondante contient la grandeur M. C'est ainsi que nous pouvons représenter le rapport des deux grandeurs par le rapport de deux nombres entiers et définir la mesure de A par rapport à B en donnant les deux nombres entiers a et b.

Plusieurs exemples de fractions rapports sont présents dans notre vie quotidienne comme les échelles de cartes géographiques, les plans des maisons, les agrandissements d'images, etc…

Selon Blouin (2002), les significations « partie-tout » et « rapport » sont intimement liées par la relation d'équivalence. Elles se différencient par les relations entre le numérateur et le dénominateur et cette différence affecte l'opération d'addition. Lorsque nous interprétons la fraction 3/8, selon son sens « partie-tout », nous considérons 3 parties sur 8 parties égales au total ou 3 objets bleus sur 8 objets au total, les 3 objets appartiennent à la collection totale. En revanche, lorsque la fraction 3/8 indique un rapport, le 3 peut signifier 3 objets bleus pour 8 objets rouges, donc 11 objets au total. Avec la signification « partie-tout », nous effectuons une relation avec l'ensemble - le tout - tandis qu'avec la signification « rapport », la relation est effectuée avec une deuxième quantité, une relation partie à partie. Ainsi, pour additionner deux rapports, on procède à l'addition des numérateurs et à l'addition des dénominateurs, par exemple, les rapports filles/garçons dans les classes A et B sont respectivement de 14 : 15 et 18 : 12 et le rapport filles/garçons dans les deux classes est de 14 + 18 : 15 + 12, 32 : 27.

La signification « rapport » est plus puissante que celle de « partie-tout ». De fait, un rapport exprime une relation entre deux quantités, il peut exprimer une relation entre une partie et un tout, dans ce cas spécifique, la partie est une quantité en relation avec une autre quantité « référence », le tout. C'est pourquoi tout rapport peut être écrit à l'aide de la notation fractionnaire. Le rapport filles/garçons 3 : 4 peut s'écrire 3/4 car les filles représentent 3/4 des garçons. Ainsi, 3 pour 4, 6 pour 8, 12 pour 16 sont des rapports équivalents, même si la quantité n'est pas la même, car le premier nombre est toujours 3/4 du second.

2.5.1.5. La fraction en tant que Quotient

Cette signification est rattachée à la définition du nombre rationnel. Il s'agit de savoir que la barre d'une fraction est un symbole de division où le quotient (la fraction) est le résultat de la division dans laquelle le numérateur définit la quantité à être partagée et le dénominateur définit les partitions de la quantité. Ainsi, 1/3 est le résultat lorsque le numérateur 1 est divisé par le dénominateur 3, cet exemple fait référence à un contexte numérique.

L'aspect « quotient » de la fraction se présente donc lorsque la fraction a/b est définie comme la division a ÷ b. Cette présentation est une construction assez tardive dérivée de l'adoption du système décimal. Considérer la fraction comme une division permet d'évaluer sa valeur numérique et décimale, ce qui, historiquement, a facilité énormément les calculs. Selon l'analyse de Brousseau (1981), le développement historique du concept du nombre rationnel montre que la structure conceptuelle qui soutient sa cohérence ne s'est organisée qu'au XVI^{ème} siècle. La signification de quotient trouve surtout son utilité en algèbre pour représenter les expressions algébriques avec un dénominateur qui ne peut être réduit.

La signification de la fraction en tant que résultat d'une division est forte utile. Grâce à cette interprétation, nous pouvons dire que 8/4 est équivalent à 2, tout comme 3/4 équivalent à 0.75. Dans ce contexte, la notation fractionnaire a/b est utilisée pour représenter le résultat de a (numérateur) divisé par b (dénominateur), c'est-à-dire, le résultat d'équations linéaires du type $b \times x = a$. Afin de comprendre davantage ce type de signification, nous examinons plus attentivement le problème suivant :

Il y a 3 biscuits pour 6 amis. Combien de biscuits aura chaque ami ? Pour résoudre ce problème, nous divisons 3 par 6 ce qui nous donne trois sixièmes de biscuit par enfant. Cette signification de la fraction fait réellement référence à la division. La fraction est ici le résultat de la division de 2 nombres entiers. Ainsi, un tout a été multiplié par a et ensuite divisé en b parties égales.

Dans la signification partie d'un tout des fractions, le symbole a/b se réfère généralement à une partie d'une seule quantité. Dans la signification rapport, le symbole a/b se réfère à une relation entre deux quantités. Le symbole a/b peut également être utilisé pour se référer à l'opération de division, a/b est parfois utilisé comme un moyen d'écriture de $a \div b$. En effet, la composante majeure, de la compréhension impliquée dans la signification quotient, est celle du partitionnement. Le nombre obtenu, lorsque nous divisons le nombre entier a par le nombre entier non nul b, s'appelle le quotient de a par b, il est noté sous la forme a/b. Les élèves ne reconnaissent souvent pas que la forme a/b indique la division (Behr et Post, 1992). Les élèves considèrent généralement le numérateur comme un nombre et le dénominateur comme un autre nombre (Cramer, Behr, Post et Lesh, 1997). Cela peut conduire à des idées fausses, par exemple, « multiplication rend toujours plus grand », et « division rend toujours plus petit ».

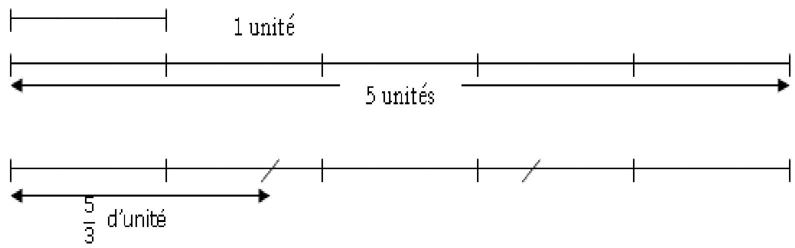
Pour développer une compréhension de cette signification, les élèves doivent être capables de relier les fractions à la division et de comprendre le rôle du diviseur et du dividende dans cette opération. En effet, le quotient de deux nombres entiers quelconques est la fraction qui a pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur, et réciproquement, toute fraction est égale au quotient de son numérateur par son dénominateur. Une fraction, dont le numérateur est divisible par le dénominateur, est égale au quotient de ces deux nombres.

De plus, la signification de quotient peut s'exploiter dans des situations physiques concrètes qui se modélisent par une division. Voici un exemple donné par Blouin (2002) : « Il y a quatre biscuits et trois enfants. Si les biscuits sont partagés également entre les trois enfants, combien de biscuits chaque enfant aurait-il ? Pour résoudre ce problème, nous divisons 4 par 3 ; la solution trouvée est alors que chaque enfant obtiendra 4/3 d'un biscuit. » (p.14). Le quotient exprime dans ce cas le rapport entre deux grandeurs discrètes, l'ensemble des biscuits et l'ensemble des enfants.

Nous prenons l'exemple suivant de la fraction 5/3, qui met davantage de lumière sur le rapport entre les significations de l'écriture fractionnaire, à savoir la fraction-partage et la fraction-quotient :

- 5/3 est introduite comme solution de l'équation 3 x = 5, c'est-à-dire comme quotient de 5 par 3, 5 partagé en 3. Il s'agit de réaliser que :

  5/3+5/3+5/3 = 3 x5/3= 5.
- dans le contexte des longueurs, cela correspond au partage d'un segment de longueur 5 unités en 3 parts égales, cela peut être schématisé comme suit:



- dans le contexte des aires, par exemple 5/3 de pizza c'est ce que chacun a lorsque l'on est 3 à se partager 5 pizzas.

La difficulté pour les élèves réside dans le fait qu'ils doivent concilier ces deux significations de la fraction et comprendre que « 1 partagé en 3 pris 5 fois « est égal à » 5 partagé en 3 « ou encore que » 5 fois le tiers de 1 « est égal au » tiers de 5 ». C'est à partir de là que la fraction prend le statut de nombre rationnel qui sera enrichi par le calcul sur les fractions. Dans les programmes 2002, nous précisions que seule la fraction partage était vue à l'école primaire. La fraction quotient devait être abordée au collège. Dans les programmes 2008, on ne précise rien quant à l'apprentissage de ces deux significations de l'écriture fractionnaire. Roland Charnay pense que la fraction-partage doit être la seule signification donnée à l'écriture fractionnaire à l'école primaire. En revanche, pour Rémy Brissiaud (1998), il est important de voir dès l'école primaire les deux significations.

2.5.1.6. La fraction en tant que Mesure

« Un quart d'heure », « une demi-heure », « trois quarts de la population française », « cinq dixièmes de seconde », sont des expressions de notre vie courante dont les fractions expriment des mesures. Concevoir la fraction comme une mesure suppose l'existence d'une unité de mesure. L'unité de mesure peut être, entre autres, une mesure de longueur, d'aire, de volume, de temps ou d'argent. Ainsi, la fraction 3/4 serait le résultat de l'itération de la fraction unité 1/4, 3/4 serait donc 1/4 + 1/4 + 1/4.

La mesure des grandeurs, après le dénombrement, est un objet important du travail chez les premiers mathématiciens de l'Antiquité. Mesurer des grandeurs (aires, volumes, masses, …) passe, à ce moment de l'histoire, par des démarches de comparaison faisant intervenir des nombres entiers. Comme le soulignent Fénichel et Pauvert (1997), mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur de même type prise comme unité ; autrement dit, c'est compter combien de fois cette grandeur contient l'unité.

Selon Rouche (1998), les mesures expriment des grandeurs, la fraction - mesure est un rapport entre une grandeur mesurée et une autre grandeur de même espèce choisie comme unité de mesure. Louis Couturat (1868, 1914), a défini la mesure d'une grandeur comme suit : « on appelle mesure d'une grandeur le coefficient numérique par lequel il faut multiplier une autre grandeur de même espèce, dite unité de mesure, pour former la grandeur considérée » (1973, p. 413). Et il a également indiqué que l'unité de mesure est une grandeur quelconque de l'espèce considérée, choisie arbitrairement et une fois pour toutes.

Posons ainsi une grandeur A et une autre grandeur B de même espèce, prise pour unité ; deux cas peuvent se présenter, et ce ne sont pas tous les cas possibles :

- La grandeur A est multiple de la grandeur B : A= m B.

  Dans ce cas, le nombre entier m est la mesure de A par rapport à l'unité B. c'est le nombre de fois que la grandeur A contient la grandeur B.

- Les grandeurs A et B sont multiples d'une même grandeur M (de même espèce) :

$$A = a\,M, \qquad B = b\,M;$$

D'où:

$$M = B/b, \qquad A = a\,B/b = a/b\,B$$

  Dans ce cas la mesure de A, par rapport à l'unité B, est la fraction a/b formée par les deux coefficients entiers a et b qui définissent les grandeurs A et B comme multiples d'une même grandeur M. Autrement dit, chacun des nombres entiers a et b indique le nombre de fois que la grandeur correspondante contient la grandeur M.

Nous allons présenter maintenant la définition des grandeurs commensurables donnée par Louis Couturat (1973) :

> « On appelle grandeurs commensurables (entre elles) deux grandeurs qui sont multiples d'une même grandeur (ou, en particulier, l'une de l'autre). De ce qui précède, il résulte que toute grandeur commensurable avec la grandeur-unité a pour mesure un nombre entier ou une fraction. Réciproquement, toute grandeur mesurable au moyen d'un nombre entier ou d'une fraction est commensurable avec la grandeur adoptée pour unité » (p. 414).

M. Stolz (cité par Couturat, 1973, p. 414) a défini également les grandeurs commensurables : « si une grandeur A est multiple d'une grandeur M, celle-ci est dite mesure de A. Si deux grandeurs (A et B) de même espèce ont une commune mesure (M), elles sont dites commensurables ». Pour mesurer une grandeur, on confère d'abord l'unité à une grandeur de même espèce puis, on partage la grandeur donnée en parties identiques à cette unité, le nombre de ces unités est la mesure de la grandeur donnée (Couturat, 1973).

Behr et al. (1983) notent que la signification-mesure est une reconceptualisation de la signification partie-tout. Comme la signification de la partie-tout, la signification-mesure considère combien il y a d'une quantité par rapport à une unité particulière de la quantité. Ohlsson (1988) discute également la signification mesure en ce qui concerne une quantité fixe de référence et un paramètre de partitionnement fixe qui résulte en une partie fixe. Par exemple, une unité donnée tel qu'un pied est divisé en petites unités de pouces par partitionnement. Ainsi, pour la mesure, la quantité de référence (le pied) et le paramètre de partitionnement (12 pouces) sont fixes. Ohlsson fait le point des fractions comme mesures qui s'appuient sur l'application du partitionnement présente dans la signification partie-tout. Kieren (1980) a reconnu aussi la similitude de la construction de mesure à la construction de partie-tout. Cependant, il a de même noté une différence en affirmant que l'accent est mis, non pas sur les relations de partie à tout, mais sur la place de l'unité arbitraire. Il affirme également que dans la signification mesure, un numéro est attribué à une région pour dire combien il est. Kieren (1995) a considéré les nombres rationnels comme des mesures ou des points sur une droite numérique. De plus, Sowder et Philippe (1999) décrivent la signification mesure comme « le numéro attribué à une certaine quantité mesurable » (p. 9). C'est quelque chose qui se produit quand une unité de mesure choisie ne correspond pas à quelque chose de mesurable, à un nombre entier de fois. Ainsi, le tout doit être partitionné en plusieurs parties et une fraction est utilisée pour exprimer la quantité de quelque chose qui existe, la signification-mesure indique le combien.

Comme le souligne Kieren (1988), cette signification de la fraction se différencie de l'interprétation « partie-tout » par une référence explicite et un traitement dynamique de l'unité. Ainsi, 3/4 n'est plus considéré comme étant 3 parties prises sur 4 parties égales d'un tout mais exprime une relation multiplicative entre deux mesures quelconques ou entre deux mesures de même nature. Selon cette relation, la fraction unité se note 1/4 car elle est contenue 4 fois dans un entier, elle représente le quart de un.

Unité, référent et tout, sont des notions qui acquièrent une signification élargie dans le développement de la fraction-mesure. Vergnaud (1983) examine ces notions dans le contexte des problèmes multiplicatifs. Le raisonnement qu'il fait est le suivant :

Nous supposons l'isomorphisme entre le nombre de parties, l'unité et la valeur.10 parties constituent l et ce 1 vaut 10/10 ; 5 parties sont la moitié ou 5/10 ; 3 parties sont 1 divisé en 10 parties et la réunion de 3 de ces parties, donc 3/10 ; 15 parties sont 1½ ou 15/10. Dans ce cas, le dixième est l'unité de mesure et il permet de reconstituer l'entier selon le rapport 10 dixièmes pour 1.

En effet, il est nécessaire et important d'insister sur l'avantage que présente la fraction en tant qu'outil de mesure, afin que les enfants soient convaincus de l'intérêt qu'ils ont à manipuler ce type d'écriture numérique. Nous recourons parfois aux fractions pour indiquer une mesure. L'utilisation des fractions donne deux avantages. D'un côté, les fractions permettent d'augmenter la précision d'une mesure : par exemple, le dixième et le centième de deuxième permettent une mesure plus précise du temps. Le deuxième avantage des fractions est d'indiquer un rapport proportionnel entre deux grandeurs. La fraction est donc un outil de mesure efficace ». (Christiaens, 1995)

Christiaens (1995) définit brièvement les termes suivants : « mesure », « nombre », « chiffre », « quantité », « grandeur » et « unité » :

> « Le nombre écrit est composé de chiffres, la valeur d'un chiffre dépend de l'unité de mesure qui lui est associée, par exemple, le chiffre 5 diffère sa valeur si l'unité de mesure est « centaine » à cela de « dizaine ». Quand nous associons une unité de mesure à un nombre, nous annonçons une mesure : « dix carnets de timbres » ou « 100 timbres », etc. Le nombre 100 se réfère à l'unité de mesure « timbre », et le nombre 10 se réfère à l'unité de mesure « carnet de timbre ». On constate que plusieurs mesures différentes peuvent définir une même quantité : 100 timbres et 10 carnets de 10 timbres donnent la même quantité de timbres. Une quantité peut être discrète : 30 ballons, 15 tables, ou continue : une longueur, un volume, une surface, etc… ». (p.47)

L'utilisation des fractions suppose l'identification et la manipulation de différentes unités de mesure, l'unité de référence, l'unité de partage, l'unité discrète. Pour interpréter correctement une fraction, il est important de savoir à quelle unité de mesure se réfèrent le numérateur et le dénominateur et, à quelle unité de référence renvoie le nombre fractionnaire.

Ci-après, nous présentons chacune de ces trois unités : *l'unité de référence, l'unité de partage et l'unité discrète.* (Christiaens, 1995)

- L'unité de référence

  Toute mesure fractionnaire associe une fraction à une unité de mesure. Nous appelons cette unité de mesure l'*unité de référence*.

  Par exemple :

  « 3/4 d'heure » : la fraction $\frac{3}{4}$ associe à l'unité de référence « heure ».
  « 7/10 de seconde » : la fraction 7/10 associe à l'unité de référence « seconde ».

  Une modification de l'unité de référence entraine automatiquement une modification de la fraction : « 7/10 de seconde » devient « 7/600 de minute ».

  Nous exprimons le lien entre la fraction et l'unité de référence par le schéma ci-dessous : 3/4 d'heure

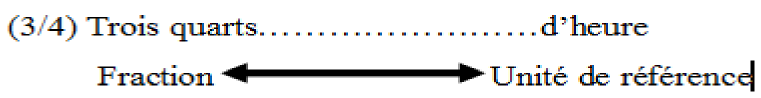


FIGURE 16 – SCHEMA DU LIEN ENTRE LA FRACTION ET L'UNITE DE REFERENCE (CHRISTIAENS, 1995, P.50)

- L'unité de partage

  Reprenons l'exemple vu pour l'unité de référence, l'expression « 3/4 d'heures». Nous pouvons écrire cette expression en même temps sous la forme 3/4 d'heure = 3 × 1/4 d'heure. Le nombre 3 se réfère à une nouvelle unité de mesure, soit le quart d'heure. Nous allons appeler cette unité de mesure 'unité de partage'.

  Nous allons obtenir le schéma suivant :

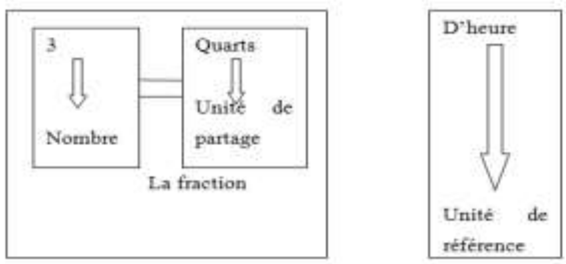


FIGURE 17 – SCHEMA PRESENTE L'UNITE DE PARTAGE (CHRISTIAENS, 1995, P.51)

L’unité de partage est définie par le dénominateur fractionnaire : « trois quarts d’heure », « cinq dixièmes de deuxième ».

L’apprentissage doit insister sur la relation entre la quantité fractionnaire et l’unité de référence. Lorsque l’opérateur est constant, la taille de la quantité fractionnaire est proportionnelle à celle de l’unité de référence. Plus l’unité de référence est grande, plus la quantité fractionnaire est aussi grande : 3/4 de 100 > 3/4 de 20 car 100 > 20, et inversement. La création de l’unité de partage est une première étape de la construction de la quantité fractionnaire.

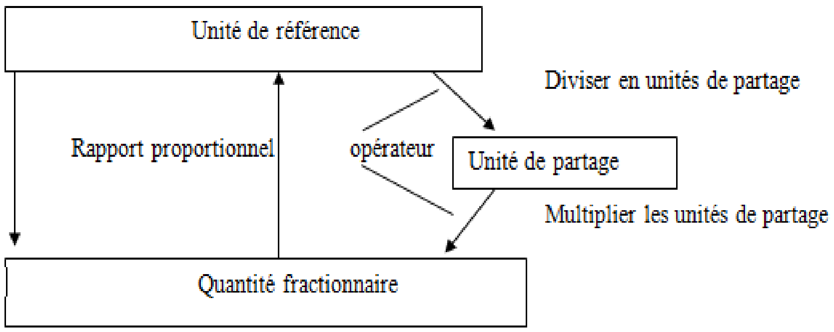


FIGURE 18 – SCHEMA PRESENTE LA CREATION DE L’UNITE DE PARTAGE (CHRISTIAENS, 1995, P.53)

Dans le cas des quantités continues, deux unités de mesure suffisent, l’unité de référence et l’unité de partage. Ainsi, l’expression « trois quarts de litre », l’unité de référence est le litre et l’unité de partage est le quart de litre.

Pour obtenir la quantité fractionnaire « trois quarts de litre », nous divisons l’unité de référence par 4, ensuite on multiple le résultat par 3. La multiplication succède à la division.

- L’unité discrète

Nous avons vu qu’en cas des quantités continues, on rencontre deux unités de mesure, l’unité de référence et l’unité de partage. Tandis que nous allons voir, dans le cas des quantités discrètes, que nous rencontrons trois unités de mesures différentes : l’unité de référence, l’unité de partage et l’unité discrète. Exemple : « les trois quarts d’un paquet de 20 bonbons » ;

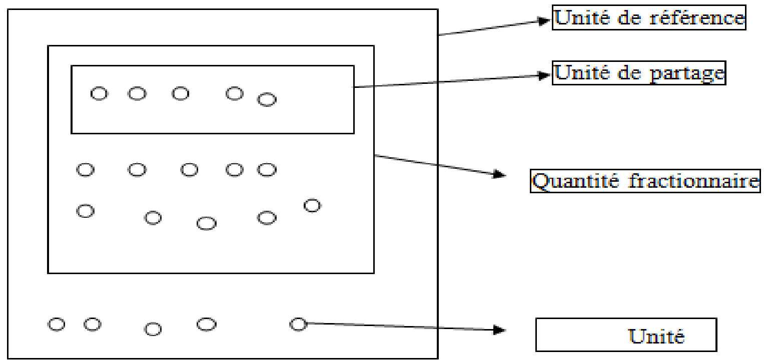


FIGURE 19 – SCHEMA PRESENTE L'UNITE DISCRETE (CHRISTIAENS, 1995, P.54)

L'unité de référence est le paquet de bonbons, l'unité de partage est le quart du paquet et l'unité discrète est le bonbon. Là aussi, l'unité de référence est égale à 20 bonbons, l'unité de partage est égale à 5 bonbons (20 bonbons ÷ 4) et la quantité fractionnaire est égale à 15 bonbons (3× 5 bonbons).

L'expression de la mesure d'une grandeur avec une unité de mesure donnée nécessite l'usage des fractions lorsque la mesure n'est pas un nombre entier. Si, pour mesurer la grandeur, il est seulement nécessaire de partager l'unité en deux ou quatre, les élèves peuvent y recourir sans trop de difficultés et exprimer la mesure de la grandeur en utilisant les expressions « demi » ou « quart », ces termes étant souvent connus par les élèves. Ainsi, le fractionnement de l'unité en demi ou quart permet d'introduire des nombres qui ne sont pas des entiers ainsi que leur écriture fractionnaire (Fénichel et Pfaff, 2005). La découverte des fractions demi ou quart peut être étendue à d'autres fractions dont le sens apparaît comme étant un fractionnement de l'unité en parts égales.

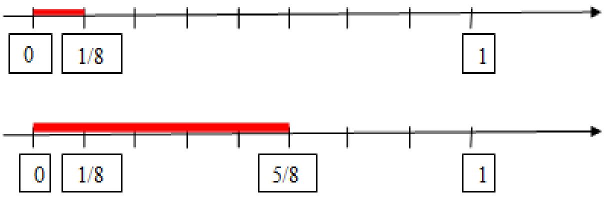
Un point final à propos de la signification mesure, le partitionnement joue un rôle dans l'interprétation des fractions comme une mesure (Lamon, 1999). Il n'est pas nécessaire de mesurer par comparaison à un nombre fixe de parties égales. Au lieu de cela, le nombre de parties égales dans une unité peut varier et le nom donné à la quantité fractionnaire dépend du nombre de partitionnement faits. L'exécution des tâches de partitionnement successives est difficile pour les jeunes enfants. Pour cette raison, Lamon suggère d'introduire cette interprétation en cinquième et sixième année après avoir eu l'expérience avec d'autres interprétations. Mentionnons enfin que la construction de la fraction-mesure constitue un outil important et naturel pour se représenter l'addition de fractions. L'addition de 4/8 à 3/8 est alors envisagée par l'ajout de la fraction unité 1/8: 3/8 + 4/8 --> 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8.

2.5.1.7. La fraction en tant que Nombre sur une droite graduée

La fraction exprime un nombre rationnel, aussi, elle a effectivement droit à une place sur la droite graduée. Cette signification est liée à celle de mesure puisqu'elle fait appel à la signification des fractions comme mesure des longueurs. Cependant, il semble pertinent d'en faire une catégorie différente en effet, pour situer une fraction sur une droite graduée, il faut savoir entre quels nombres entiers et entre quelles fractions elle se situe.

L'extension de la désignation d'une position par un nombre entier, à celle d'une position par un nombre écrit sous forme de fraction, appelle la connaissance de cette signification de la fraction. Le dénominateur indique le fractionnement de l'unité (Fénichel et Pfaff, 2005). En effet, Il est nécessaire que les élèves aient déjà travaillé sur la droite numérique et le repérage des points par des nombres entiers pour qu'ils puissent étendre ces connaissances à des fractions et à des nombres décimaux.

Lorsque nous pensons à mesurer, la notion d'une unité de mesure et de sous-unités de cette unité de mesure nous vient à l'esprit. Sur la droite numérique, l'unité de mesure est la distance sur la droite de zéro à un (Behr et Post, 1992). Évidemment, dans certains cas, la distance est un centimètre, dans d'autres un pouce et d'autres encore un kilomètre. Les multiples de cette unité de distance sont générées sur la droite par répétition de la distance de zéro à un, au long de la droite numérique. Novillis (1976), ayant travaillé sur les droites numériques et la capacité de l'élève à identifier l'unité, il constate que les enfants, jusqu'à l'âge de 12-13 ans, ont de la difficulté à dissocier la notion d'unité de toute autre chose. Par exemple, si nous leur présentons une image de quatre gâteaux et que nous leur demandons de couper la moitié de l'ensemble, beaucoup d'entre eux couperont la moitié d'un gâteau, au lieu de séparer l'ensemble en deux gâteaux. Le même phénomène est observé avec la droite linéaire contenant plus d'une unité. Kieren (1976) parvient à une conclusion semblable, à savoir que le modèle de la droite numérique ajoute un attribut qui n'est pas présent dans le modèle des ensembles ou celui des surfaces, particulièrement lorsque la droite numérique est supérieure à une unité. Arrêtons-nous sur le sens d'une fraction telle que 5/8 sur la droite numérique : pour afficher 5/8, nous établissons la sous-unité de 1/8, et maintenant 5/8 est simplement la distance égale, sur la droite numérique, à cinq répétitions de 1/8. Le point 5/8 sur la droite numérique est généralement sous-entendu pour signifier un point dont la distance de zéro, sur la droite, est cinq 1/8-unités.



Fréquemment, les enseignants suggèrent aux élèves que chaque fraction représente un point sur la droite numérique. Plus précisément, elle représente une distance sur la droite numérique. Nous pouvons penser à 5/8 comme étant associée à un point sur la droite numérique, à condition que nous prenions la distance à partir de zéro et répétions cinq sous-unités de 1/8 dans la direction de un.

La droite numérique peut être utilisée pour modéliser des fractions supérieures à un, à condition que la compréhension de certaines notions basiques à propos des fractions soit acquise par l'enfant avant de commencer à travailler avec la droite numérique. Ces notions incluent le concept d'une unité fractionnaire et l'idée que toutes les autres fractions sont simplement des répétitions de l'unité fractionnaire appropriée. De plus, la ligne numérique est utile pour la comparaison des fractions, celle-ci, à partir des points, s'effectue en considérant le point le plus à droite comme représentant la fraction la plus grande. Cette connaissance provient de l'extension de la comparaison des nombres entiers, à l'aide d'une droite numérique à la comparaison des fractions. Le concept de la droite numérique peut renforcer la compréhension des enfants sur les concepts de l'ordre et sur l'équivalence des fractions.

La droite numérique semble être un modèle utile pour aider les enfants à acquérir le concept de fraction. Il n'est pas recommandé que celui-ci soit le premier à être présenté aux élèves. Aucun modèle ne peut faire toutes choses (Behr et Post, 1992) : la droite numérique est utile dans les concepts d'ordre et d'équivalence et, dans certaine mesure, pour l'addition et la soustraction des fractions, mais elle a peu d'applications pour les concepts de multiplication ou de division des fractions.

2.5.1.8. La fraction en tant que Nombre

La signification de la fraction en tant que nombre est une signification générale et abstraite ; toutes les autres significations accordées aux fractions en découlent. Concevoir une fraction comme un nombre nécessite d'avoir des représentations variées des fractions (figures variées). Cela nécessite aussi d'avoir une conception souple du rapport entre les fractions et l'unité afin de pouvoir appréhender les relations entre les fractions et les nombres naturels.

De plus, les opérations arithmétiques, la comparaison de fractions et la notion de fractions équivalentes, semblent être des étapes importantes dans cette compréhension de la fraction comme nombre. La signification de la fraction comme nombre désigne les fractions qui servent à effectuer des calculs où aucun autre contexte n'intervient.

L'introduction des nombres exprimés sous forme de fractions peut se faire à partir des situations de partage, de mesure ou de repérage. Ces différentes situations permettent de donner une signification aux fractions qui les désignent en tant que nombres (Fénichel et Pfaff, 2005).

2.5.1.9. La fraction en tant que Probabilité ou fréquence

La théorie des probabilités est un contexte dans lequel nous utilisons les fractions. Il s'agit de saisir, d'évaluer ou de communiquer, des données relatives aux chances pour qu'un événement survienne. Cette catégorie est liée à celle de la partie d'un ensemble. En effet, si nous voulons trouver quelle est la probabilité de tirer une boule jaune dans une urne qui contient 10 boules jaunes et 13 boules vertes, nous construisons un rapport entre le nombre des boules jaunes et l'ensemble des boules (10/23). Cependant, comme la probabilité et la fréquence ne s'expriment qu'à l'aide d'une quantité se situant entre 0 et 1, nous la considérons comme une signification possible de la fraction, les fractions sont indispensables dans l'expression des probabilités et des fréquences. Enfin, il faut constater que Rouche (1998) mentionne que l'écriture fractionnaire est intéressante comme expression des probabilités et que les lois fondamentales des probabilités amènent à calculer avec des fractions.

2.5.2. Exploration des liens entre les diverses significations de la fraction

Notre analyse du champ conceptuel de la notion de fraction suggère que les fractions peuvent être la solution à une grande variété de problèmes mathématiques et comporter plusieurs significations. Celles-ci ne sont toutefois pas indépendantes les unes des autres comme le mentionne Kieren (1980, 1993), les problèmes mathématiques qui donnent sens aux fractions se réfèrent rarement à une unique et à une seule de ces significations. Ainsi, une réelle compréhension de la notion de fraction suppose non seulement de visiter les cinq significations, citées par Kieren, mais également, implique une coordination entre elles comme nous allons le montrer.

Dans l'expression « 2/3 de gâteau », une coordination de plusieurs significations de la fraction est nécessaire, nous énonçons ces significations dans un ordre quelconque :

- la signification « partie-tout » nous permet de concevoir qu'un gâteau constitue le tout (3/3), qu'il est composé de 3 parties égales et que chacune des parties constitue 1/3 du tout.
- la signification « mesure » permet de se représenter la fraction 1/3 du gâteau comme étant une unité de mesure trois fois plus petite que le tout, que la fraction 2/3 représente le résultat de l'itération de cette fraction unité, processus qui permet de mesurer la quantité de gâteau (soit moins d'un gâteau).
- la signification « quotient » de la fraction peut également être utile dans ce contexte. La signification de l'expression « 2/3 de gâteau » peut être envisagée comme étant la part que chacune des 3 personnes obtient lorsque deux gâteaux sont partagés entre elles.
- enfin, la signification « opérateur » de la fraction permettrait de concevoir la quantité fractionnaire 2/3 de gâteau comme le résultat de l'application de la fraction opérateur 2/3 sur la quantité 1 (ex : prendre 2/3 de fois un gâteau).

Cette brève analyse du champ conceptuel de la notion de fraction fait ressortir la richesse mais aussi la complexité de cette notion.
Kieren (1976) soutient l'idée qu'une compréhension complète des nombres rationnels requière non seulement une compréhension de chacune de ces significations séparément mais aussi de la façon dont elles interagissent. De plus, l'utilisation de ces significations de la fraction dans l'enseignement des fractions peut faciliter la compréhension chez les élèves.

3. Exploration d'un outil pédagogique : le manuel scolaire à l'école primaire

Puisque nous souhaitons regarder la présentation que les manuels scolaires des mathématiques en CM1 et en CM2 donnent des significations de la fraction, il nous semble nécessaire de consacrer un chapitre pour parler de cet objet pédagogique et didactique qui a diverses fonctions pour les enseignants et pour les élèves. Dans les sections qui suivent, nous allons présenter des différentes définitions données au « manuel scolaire », mettre en évidence la place et le rôle du manuel scolaire dans l'enseignement - apprentissage en France et présenter les diverses fonctions du manuel scolaire pour l'élève et pour l'enseignant. De plus, nous allons présenter d'une part l'idée de la transposition didactique et d'autre part comment le savoir est présenté dans le manuel scolaire. A la fin de ce chapitre, nous allons mettre en évidence la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud comme une structure qui aide à l'analyse de la construction de la connaissance de la part de l'utilisateur du manuel scolaire.

3.1. Qu'est-ce qu'un manuel scolaire ?

Le manuel scolaire est une œuvre dirigée vers deux acteurs sociaux, l'élève et l'enseignant, ils possèdent la même fiabilité sur cet objet pédagogique et didactique, le manuel scolaire (Choppin, 1999 ; Métoudi et Duchauffour, 2001). L'enseignant est quelqu'un qui transmet et fait des médiations des contenus du manuel et l'élève est le récepteur de tels contenus. Selon Métoudi et Duchauffour (2001), l'enseignant, non spécialiste dans la discipline et qui doit l'enseigner en classe, est orienté par le fait que le manuel devient pour lui une ressource quotidienne lui offrant aide théorique ; ce manuel constitue pour l'enseignant une mine didactique. En effet, on appelle ici « mine didactique » le lieu et la source de contenus et d'informations pédagogiques liées à l'activité de l'enseignant dans l'enseignement - apprentissage des mathématiques. Selon ces auteurs, le manuel scolaire de l'élève conduit les apprenants à centrer leurs interprétations et réflexions de manière plus pertinente, mais tout doit être organisé pour une vraie intégration. Cependant, ces ouvrages possèdent des contextes qui peuvent causer des difficultés dans le processus d'interaction pour la transmission du savoir.

En France, le manuel scolaire fait partie du cadre des matériels didactiques, il possède une importance tant dans le quantitatif que dans le qualitatif (Da Silva Junior, 2005, cité par Da Silva Junior, 2010). Selon Cavalcanti (1996), cité par Da Silva Junior (2010, p. 15), peut être considéré comme matériel didactique tout ce qui concerne le travail scolaire, ce qui sert à soutenir la relation des élèves avec les contenus d'apprentissage, à soutenir la construction de l'autonomie de l'élève pour la construction de connaissances, à contribuer au développement des relations d'enseignement-apprentissage entre des enseignants et des élèves, à aider l'organisation de situations d'enseignement-apprentissage, à contribuer à la diversification de l'univers des sources d'information, à mettre en contexte sociale le contexte scolaire et à donner du sens au contenu d'apprentissage. En effet, dans les trois dernières décennies, le « Manuel Scolaire » est inclus dans cet ensemble de matériels didactiques comme l'un des outils les plus utilisés. Son importance s'exprime à la fois quantitativement et qualitativement.

L'importance quantitative est donnée par le fait que les systèmes scolaires ont adopté l'emploi de millions de manuels scolaires. En France selon Choppin (2005, p. 50, Cité par Da Silva Junior, 2010) l'édition scolaire est un des principaux secteurs de l'édition française, ils représentent depuis les années 1960 autour de 15% à 20% des affaires de l'édition française et entre cinquante et soixante millions d'exemplaires aujourd'hui sont produits chaque année.

L'importance qualitative du manuel scolaire est attribuée par le rôle qu'il joue dans le processus de la transposition didactique du savoir savant vers le savoir à enseigner puis vers le savoir enseignée.

Dans le contexte scolaire, il est commun d'utiliser les termes « livre didactique » et « manuel scolaire » pour faire référence à cet objet didactique. Dans notre travail, nous optons pour l'appellation « manuel scolaire ».

En France, il existe une définition légale pour le manuel scolaire fixé par le Décret-loi n º 85-862 du 8 août 1985 et révisé dans le décret n º 2004-922 du 31 août 2004. Ce décret énonce qu'est considéré comme manuel scolaire : « le livre scolaire lui-même et leurs manières d'utilisation, ainsi que les cahiers d'exercices et de travaux pratiques qui les complètent et des ensembles de fiches qui le remplacent, régulièrement utilisés dans l'enseignement primaire, secondaire et préparatoire qui suit un programme prédéfini et ajouté par la ministère de l'éducation nationale ». Par définition, le manuel scolaire met en fonctionnement un programme d'enseignement pour un certain niveau.

Par ailleurs, Bruillard (2005, p. 23) décrit le manuel scolaire comme un matériel scolaire qui, pour sa composition, est soumis à l'action directe des programmes prescrits, du savoir scientifique, des pratiques de référence et qu'après sa composition, il est destiné à l'utilisation des enseignants, des élèves et des parents. Il rajoute aussi que les manuels scolaires sont des pièces d'un système complexe et que les contenus des manuels sont déterminés par les programmes.
Il insiste sur le fait que le manuel scolaire est propre à influencer les pratiques des enseignants et conditionne les apprentissages des élèves (2005, P. 25). Ainsi, le manuel scolaire est perçu comme un objet fabriqué dont le contenu est le fruit de transpositions didactiques qui agit comme intermédiaire entre les programmes prescrits et l'action d'enseignement - apprentissage en salle de classe.

Selon Gérard et Roegiers (2003), le manuel scolaire est un instrument structuré et cela pour s'inscrire dans un processus d'apprentissage. Donc, pour favoriser l'apprentissage, l'usage du manuel scolaire requiert l'activation du processus de la transposition didactique de la part de l'enseignant.

C'est après avoir vu ce contexte, que nous pouvons nous arrêter sur les différentes fonctions du Manuel Scolaire.

Commençons par Choppin (2005), celui-ci considère que le manuel scolaire peut exercer quatre fonctions essentielles :

- Une fonction référentielle du curriculum disciplinaire ou programmatique, qui se constitue en un support privilégié des contenus éducatifs ainsi le manuel scolaire est dépositaire de la connaissance, des techniques et de savoir-faire qu'un certain groupe social estime nécessaire de transmettre aux nouvelles générations.
- Une fonction structurelle qui expose des méthodes d'apprentissage et propose des exercices ou des activités qui visent aider à la mémorisation de la connaissance, pour favoriser l'acquisition de compétences disciplinaires ou transversales, dans l'appropriation du savoir-faire.
- Une fonction idéologique et culturelle qui affirme le manuel scolaire comme un des vecteurs essentiels de la langue, de la culture et des valeurs des classes. Il est un instrument privilégié de la construction d'une identité commune dans une société donnée.
- Une fonction documentaire qui caractérise le manuel scolaire comme un lieu de stockage de documents littéraux ou iconiques (représentation visuelle, signe, symbole).

Regardons maintenant Gérard et Roegiers (2003) qui présentent le manuel scolaire comme possédant deux ensembles de fonctions : une concerne l'élève et l'autre concerne l'enseignant. L'ensemble des fonctions relatives aux élèves, spécifiquement, qui sont guidés autour de l'apprentissage scolaire ; cet ensemble permet d'établir une ligne entre l'apprentissage scolaire et la vie quotidienne ou également la future vie professionnelle.
Ce chemin passe par la subdivision en deux sous-groupes :

- Les fonctions relatives à l'apprentissage ; celles-ci impliquent les transmissions de connaissances, le développement de capacités et compétences ainsi que la consolidation des acquisitions et la fonction d'évaluation des acquisitions.
- Les fonctions dans le secteur de la vie quotidienne et professionnelle ; cet ensemble de fonctions vise à aider les intégrations d'acquisitions, à être une référence ainsi qu'à être une éducation sociale et culturelle.

Concernant les fonctions relatives à l'enseignant, le manuel scolaire offre un outil essentiel pour ce dernier, pour lui permettre de mieux exercer sa pratique professionnelle. En résumé, nous pouvons dire que le manuel scolaire contribue au développement pédagogique. En effet,

« Loin nécessairement de fermer les enseignantes - et les élèves - en une abordage linéaire des apprentissages, le manuel scolaire peut si les auteurs se donnent l'autorisation, apporter une multitude de nouvelles voies, de nouveau instrument, de nouvelles pratiques qui donnent compte de l'évolution des connaissances pédagogiques, de la sensibilité de chaque enseignement et de la spécificité du contexte. » (Gerard et Roegiers, 2003, p.100)

De plus, Gérard et Roegiers (2003) présentent quatre fonctions complémentaires qui peuvent être mises en évidence à travers le triangle didactique, l'enseignant, l'élève et le savoir.

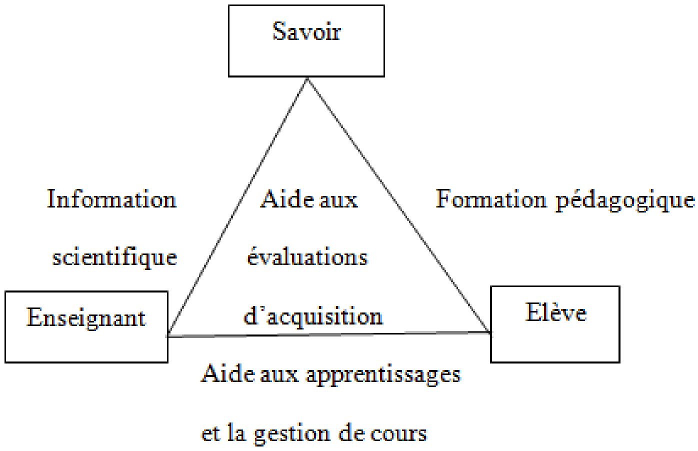


FIGURE 20 – FONCTIONS DU MANUEL SCOLAIRE CONCERNANT LE TRIANGLE DIDACTIQUE (GERARD ET ROEGIERS, 2003, CITE PAR DA SILVA JUNIOR, 2010, P. 25).).

La fonction d'informations scientifiques et générales doit permettre à l'enseignant d'avoir une meilleure matrice du savoir, ainsi l'enseignant ne possède pas toute la connaissance et peut produire ou évaluer une recherche d'informations.

Tant que la *fonction de formation pédagogique* est vue dans le sens d'un manuel scolaire qui ouvre une série de pistes de travail pertinent à l'enseignant, l'aide à s'améliorer ou même à reformer sa pratique pédagogique, cela nécessite que les voies proposées prennent en compte la caractéristique permanente de la didactique de la discipline.

En ce qui concerne la troisième fonction qui est l'aide aux apprentissages et la gestion de cours, là, le manuel scolaire peut fournir de nombreux outils qui permettent d'améliorer l'apprentissage dans le quotidien.

La quatrième fonction du manuel scolaire abordé par Gérard et Roegiers dans le triangle didactique est l'aide à l'évaluation des acquisitions dont il peut évaluer les erreurs et proposer de voies pour remédier en fonction de celles-ci.

De même, Séguin (1989) aborde le rôle du manuel scolaire en soulignant son rôle au niveau de son action pédagogique, il en cite trois:

- Rôle *formatif* par la présentation séquentielle et progressive de connaissances qui ont été déjà des objets du filtrage.

- Rôle de *structuration* et d'organisation des apprentissages qui suggère une progression de l'enseignement et de l'apprentissage en ajustant l'organisation en «unités d'apprentissage » et en « séquences d'apprentissage ».
- Rôle de *guide d'apprentissage* en guidant l'élève dans le processus de compréhension et de perception du monde.

Ces fonctions et rôles du Manuel Scolaire, énoncés par Choppin (2005), Gérard et Roegiers (2003) et par Séguin (1989), insèrent cet outil didactique directement dans le processus enseignement/apprentissage. Par conséquence, pour mieux comprendre cet outil il faut observer l'accès à cet outil, « le manuel scolaire », dans son contexte d'utilisation.

3.2. Le manuel scolaire de mathématiques : sa place et son rôle

Le rôle du manuel scolaire dans l'enseignement-apprentissage en France a été mis en évidence par plusieurs auteurs qui s'appuyant sur différents paramètres. Citons, par exemple, Mogilnik (1996, cité par Da Silva Junior, 2010, p.23) pour qui, la forme avec laquelle le manuel scolaire est structuré, - en blocs avec des objectifs, de la programmation temporelle, des stratégies et des instruments d'évaluation -, facilite son usage davantage qu'une simple ressource didactique or les manuels scolaires assument aussi les caractéristiques d'un curriculum scolaire appelé à être suivi par l'enseignant. Néanmoins, Lajolo (1996, cité par Da Silva Junior, 2010, p.23) indique même que n'étant pas l'unique matériel utilisé par l'enseignant et les élèves dans le processus d'enseignement et d'apprentissage, celui-ci peut être décisif dans la qualité de l'apprentissage résultant des activités scolaires. Il établit le parcours et le programme de travail pour leur année, y dose les activités de l'enseignant pour son quotidien en salle de classe et fournit aux élèves la base des activités qu'ils doivent réaliser à la maison.

Actuellement, nous faisons le constat que le manuel scolaire n'est pas l'unique ressource utilisée dans l'enseignement - apprentissage mais continue à être, pour la grande majorité des enseignants, son principal outil de travail. Généralement il est encore utilisé comme manuel complet, c'est-à-dire, comme source de textes, illustrations et activités développées presque complètement en sa séquence originale.

Chez un grand nombre d'enseignants, en France, le manuel scolaire possède, note Vargas (2006), une valeur supérieure. Selon Choppin (1999), le manuel scolaire est généralisé depuis 1830 dans l'école primaire pour la formation d'enseignants du primaire et de même pour les élèves. Pour l'enseignant du primaire, le manuel scolaire constitue une source presque unique de savoir.

Pour Choppin, le manuel scolaire est destiné à l’élève pour acquérir le savoir, mais il fonctionne aussi pour l'enseignant en tant qu’auxiliaire. Il est la source manifestée du savoir pour l'enseignant qui possède peu de formation ou débute dans la profession.

Ainsi, selon Métoudi et Duchauffour (2001), le manuel scolaire assure un certain confort à l'enseignant, il le tranquillise sur le programme, l’aide à préparer ses leçons, il diminue les chargements de matériel et facilite la tâche de l'enseignant en mettant en action une pédagogie individualisée ou parfois différenciée. Dans ce processus, plus les exercices ou les situations d'apprentissage sont présents, davantage nous constatons une vraie augmentation des connaissances théoriques chez l'enseignant qui puise dans le manuel scolaire.

Par ailleurs, Lafortune et Masse (2006) vont souligner: les élèves structurent non seulement leurs connaissances en interactions avec leurs pairs et leur enseignant, mais aussi reçoivent des influences de leurs propres expériences. Ainsi, le manuel scolaire contribue à la construction du développement social des élèves.

En effet, dans de nombreux travaux en didactique des mathématiques, le manuel scolaire est un chemin pour analyser le curriculum et les processus de transposition didactique. De plus, la composition du manuel scolaire et son utilisation permettent de montrer les différences culturelles et traditionnelles des mathématiques vues comme fruit d'une histoire sociale, culturelle, politique et aussi épistémologique.

Bucheton (1999) a cherché à travers une enquête à répondre à deux hypothèses relatives au manuel scolaire :

- L’enseignant considère le manuel scolaire, surtout comme un outil d'enseignement en servant de médiateur entre lui et ses élèves ;
- ou bien, surtout comme un outil d'apprentissage, en servant de médiateur entre le savoir et les élèves.

Il aborde le manuel scolaire comme un parmi d’autres matériels didactiques. Pour lui, ceux-ci supposent une fonction médiatrice entre les élèves et les objets du savoir auxquels ils sont confrontés.

De plus, Bucheton (1999) et Vargas (2006) relèvent que l'accès direct par les élèves au savoir pur est jugé par l'enseignant difficile ou même impossible. Les élèves sont invités à utiliser le manuel scolaire essentiellement comme une aide aux activités collectives fortement accompagnées et soutenues par l'enseignant. Ainsi, le manuel scolaire fournit les exercices et les textes qui viendront compléter le cours.

Le manuel scolaire n'est pas un acteur quelconque à l'intérieur de la situation éducative. Par son utilisation, son discours et aussi son contenu il apparaît au contraire, comme un acteur clé, il se justifie dans un pouvoir important à travers l'exposition de ses contenus appropriés dans la salle de classe.

3.2.1. Utilisation du manuel scolaire de mathématiques en France

La discussion de l’utilisation du manuel scolaire des mathématiques prend fondement, pour nous, auprès de Métoudi et Duchauffour (2001) qui avancent que dans 71,5% des cas, l'enseignant fait utilisation du manuel scolaire du maître parallèlement au manuel scolaire de l'élève (en France). Le manuel scolaire du maître apparaît comme une bibliothèque de référence ordinaire, pour l’enseignant, qui correspond au programme mis en usage.

L’utilisation du manuel scolaire du maître par l'enseignant de mathématiques peut, selon Métoudi et Duchauffour (2001), prendre le sens d’une aide pour comprendre l'activité proposée, une sorte de réconfort ou un complément de formation initiale avec l'apprentissage de la méthodologie qu’il aborde, notamment pour les nouveaux enseignants dans la profession avec l’utilisation de toute sa structure, un vrai instrument de formation.

Bruillard (2005) présuppose que les enseignants sont experts du domaine lorsqu’ils ont une formation universitaire élevée et longue dans leur domaine, ils sont alors jugés peu dépendants du manuel scolaire et aptes à exercer une pédagogie efficace. En effet, lorsqu’ils possèdent une formation non complète dans leur domaine, l'impact du manuel scolaire est certainement plus important. C’est d’autant plus le cas des enseignants nommés à l'enseignement élémentaire. De plus, Araujo Lima, Lisée, Lenoir et Lemire (2006) nous confirment l’importance du manuel scolaire chez l’enseignant que ce dernier utilise abondamment. Ils mettent en évidence une forte soumission de l'enseignant au manuel scolaire, le manuel scolaire étant le principal dispositif auquel les enseignants font appel dans leurs pratiques pour moderniser leur curriculum scolaire.

En France, selon Métoudi et Duchauffour (2001, p.76), les enseignants du primaire possèdent un service de 26 heures par semaine, ils ne possèdent pas toujours le temps pour préparer leurs fiches à partir de leurs savoirs théoriques, didactiques et pédagogiques. Ceux-ci reconnaissent que le manuel scolaire est un gain de temps dans la préparation de leurs cours. En effet, ils confirment leur enseignement à partir du manuel scolaire. Dans ce contexte, nous observons une utilisation du manuel scolaire constante par l'enseignant des mathématiques et que celle-ci intervient directement et essentiellement dans sa pratique pédagogique. Selon Assude et Margolinas (2005), les enseignants, utilisant le manuel scolaire, possèdent un triple apprentissage, ils n'apprennent donc pas seulement les éléments des mathématiques à enseigner, mais aussi les éléments logiques sous-jacents les activités mathématiques ainsi que la manière de conduire l'apprentissage des élèves.

En effet, le savoir à enseigner se constitue à travers la transposition didactique, Vargas (2006) caractérise cette opération comme complexe et met le manuel scolaire comme un des acteurs dans cette opération de transposition didactique.

En résumé, le manuel scolaire paraît être un instrument d'autorité qui exerce une grande influence dans la salle de classe.

3.2.2. Du choix du manuel scolaire de mathématiques

Les manuels scolaires, comme nous l'avons déjà mentionné, sont des publications pour l'élève et pour l'enseignant. Ils possèdent la fonction d'organiser les contenus et d'indiquer les façons dont l'enseignant peut prévoir les leçons et voir les contenus avec les élèves. Nous pouvons dire que le manuel scolaire des mathématiques, pour l'enseignant, est un objet d'aide didactique. Les enseignants l'utilisent pour structurer et donner leurs leçons en étant soutenus grâce aux considérations faites par toute la structure du texte, du savoir et aux exemples, avec des analogies et des exercices plus variés. Tout ce qui précède confirme la nécessité de toute la réflexion autour du manuel scolaire en fonction de sa qualité et de son utilisation, de même pour son choix.

3.2.3. La transposition didactique et le texte du savoir dans les manuels scolaires

Les contenus mathématiques se transforment en objets d'enseignement et l'étude de leur processus évolutif est l'une des questions centrales de l'éducation mathématique. Selon Pais (1999), dans l'analyse de cette évolution, il est possible d'identifier diverses sources d'influences qui déterminent les transformations du savoir à enseigner dans l'école.

Aussi, nous pouvons observer cette transformation sur deux niveaux : le premier se situe dans le contexte général de l'évolution du savoir lorsqu'il est arrivé dans le contexte socio-culturel et le second dans le plan de l'élaboration personnelle et subjective qui nous conduit à la connaissance. Dans notre contexte d'étude, le manuel scolaire fonctionne comme un pont entre ces deux niveaux.

En reprenant le travail de Pais (1999), nous constatons que dans la langue utilisée sur l'environnement scientifique, le savoir est presque toujours caractérisé sans son contexte d’origine ; il se trouve dépersonnalisé mais il est davantage inscrit dans son domaine scientifique, historique et culturel. A l’opposé, la connaissance est respectueuse du contexte individuel, subjectif, nous révélant ainsi quelques aspects avec lesquels le sujet a une expérience directe et personnelle. Cet état de fait, est cité par Da Silva Junior (2010, P. 33).

De même, avec Pais (1999, p.17) « l’étude de la trajectoire que le savoir scolaire a à parcourir, permet de se représenter les diverses influences reçues tant du savoir scientifique que d'autres sources. Ce sont des influences qui réunissent non seulement l’aspect conceptuel, mais aussi le méthodologique ». Quant à Chevallard (1991, p.45) « l'étude des influences, que ce processus sélectif souffre dans les divers segments du système scolaire, est faite avec la notion de transposition didactique ».

Ce sont tous ces processus d'influences qui agissent sur la sélection des contenus, ils devront composer les programmes scolaires, ils sont parvenus dans un ensemble nommé ‘noosphère’ ; celle-ci se compose de scientifiques, d’enseignants, de spécialistes, d’hommes politiques, d'auteurs de manuels et de représentants scolaires des sphères variées.

La production scientifique mathématique jusqu'à son enseignement est un parcours où nous observons trois types de savoirs : le savoir scientifique, le savoir à enseigner et le savoir enseigné.

Selon Pais (1999, p.21, cité par Da Silva Junior, 2010) :

> « L’objet du savoir scientifique est plus associé à la vie académique bien que toute production académique puisse ne pas représenter un savoir scientifique. Il s’agit d'un savoir qui est normalement développé dans les universités ou les institutions de recherche, mais qui n'est pas directement attaché à l'enseignement primaire et secondaire (...) Pour que l'élève ait accès à la connaissance, il est nécessaire de prendre en compte le placement didactique du problème de la langue engagée dans le savoir scientifique. ». (p.34)

En ce qui concerne le savoir à enseigner, il s’agit d'un savoir attaché à une forme didactique qui sert pour présenter le savoir à l'élève. Dans le passage du savoir scientifique au savoir à être enseigné, il se produit la création d'un vrai modèle théorique qui dépasse les limites elles-mêmes du savoir mathématique. Le savoir scientifique est présenté à la communauté scientifique à travers des articles, thèses, livres spécialisés et rapports alors que le savoir à enseigner se limite presque toujours au manuel scolaire, aux programmes et quelques autres matériels d’aide.

Deux types de transposition didactique sont définis : le passage du savoir scientifique au savoir à être enseigné (transposition didactique externe) et celui du savoir à être enseigné au savoir effectivement enseigné (transposition didactique interne). Dans notre cas d'étude, nous rappelons que la préparation des textes à être enseignés - ces textes sont représentés par les manuels scolaires de mathématiques - est une procédure qui fait partie du premier type de transposition, la transposition didactique externe. Tandis que, pour l'évaluation des apprentissages ou des connaissances acquises par les élèves, cette procédure fait partie du deuxième type de transposition, la transposition didactique interne.

Chevallard (1991) nous rappelle le processus de préparation didactique mis dans le texte du savoir et cite comme des conditions pour autoriser cette transposition didactique : la « désynchrétisation » du savoir, la « dépersonnalisation » du savoir, la « programmation » de l'acquisition du savoir, la « publicité » du savoir, et le « contrôle social » des apprentissages. Arrêtons-nous un moment sur ces deux termes :

- désynchrétisation du savoir : les différentes étapes, qui mettent le savoir en texte consistent, en premier lieu, à la délimitation de savoirs partiels, ceux-ci se présentant comme des discours indépendants ; il s'agit d'un processus de désynchrétisation du savoir.
- programmation de l'acquisition du savoir : le texte du savoir à être enseigné doit avoir une norme progressive de la connaissance en possédant un début et une fin provisoire et être développé par un enchaînement de raisons. Sous cette forme, il a besoin d'une programmation de l'acquisition du savoir en concevant un apprentissage équivalent à la même structure progressive manifestée par le texte.

De plus, selon Assude et Margolinas (2005), le manuel scolaire est un instrument qui peut montrer les informations entre les prescriptions officielles et les pratiques professionnelles des enseignants. Ainsi, dans de nombreux travaux en didactique des mathématiques, le manuel scolaire est pris comme un chemin pour analyser le curriculum scolaire et les processus de transposition didactique. De même, la composition du manuel scolaire et son utilisation permettent de montrer les différences culturelles et institutionnelles des mathématiques vues comme fruit d'une histoire sociale, culturelle, politique et aussi épistémologique.

Par ailleurs, nous pouvons dire que l'enseignant possède un triple apprentissage de l'utilisation du manuel scolaire de mathématiques : les éléments des mathématiques à enseigner, les éléments sous-jacents des activités mathématiques et la manière dans laquelle doit se conduire l'apprentissage des élèves. Ainsi, selon Assude et Margolinas, le développement de l'activité professionnelle de l'enseignant dépend du type de documentation qu'il possède afin de structurer ses cours qui accompagnent les programmes officiels ; les enseignants affirment que la planification du cours est donnée par le manuel du maître. Le manuel scolaire est, nous semble-t-il ici, au moins un fil conducteur pour l'action de l'enseignant.

Le savoir scolaire n'est pas le même que le savoir universitaire, le savoir à enseigner se constitue à travers la transposition didactique. Vargas (2006) caractérise cette opération et met le manuel scolaire comme un des acteurs dans cette opération de transposition didactique.

3.2.4. Synthèse des fonctions du manuel scolaire pour l'enseignant et l'élève

Nous avons abordé, lors de ce chapitre, le manuel scolaire de mathématiques dans ses fonctions et son utilisation. Pour nous, le manuel scolaire est un outil qui cherche à mettre de nouveaux savoirs dans le contexte scolaire. Il est un matériel didactique qui, dans son utilisation pour le travail scolaire, cherche à soutenir les élèves et l'enseignant dans leur relation avec les contenus d'enseignement et d'apprentissage et la construction de la connaissance. De plus, il possède pour caractéristique principale de faire la transposition didactique du savoir scientifique en savoir enseignable et à enseigner, il est dirigé vers deux acteurs sociaux : l'enseignant et l'élève.

3.2.4.1. Les fonctions du Manuel Scolaire pour l'enseignant

Concernant les fonctions relatives à l'enseignant, nous avons repéré trois fonctions générales qui sont exposées dans le tableau suivant :

TABLEAU 8– LES FONCTIONS DU MANUEL SCOLAIRE POUR L'ENSEIGNANT (DA SILVA JUNIOR, 2010, P. 37).

Fonction générale	**Fonction spécifique**
Outil d'utilisation didactique et professionnel	Aide dans l'évaluation d'acquisitions
	Emettre des propositions relatives à la conduction d'apprentissage
	Aide dans les apprentissages et dans la gestion des leçons
	Ressource didactique et soutien théorique
	Préparation des leçons
	Dose les activités de l'enseignant
	Curriculum pratiqué par les enseignants
Formation complémentaire	Œuvre de références et de réflexions pédagogiques
	Transmission de la connaissance et développement de capacités et de compétences
	Informations scientifiques générales
	Matériel d'étude
	Mettre en action une pédagogie spécifique de la discipline
	Instrument d'autoformation
	Curriculum scolaire suivi par l'enseignant
Formation professionnelle	Complément de formation scientifique et pédagogique
	Instrument de formation des maîtres et fréquemment unique
	Formation scientifique liée à la discipline
	Instrument dans le processus de formation des enseignants
	Outil sur lequel l'enseignant peut compter pour traiter avec les conséquences d'une formation initiale déficiente

3.2.4.2. Les fonctions du Manuel Scolaire pour l'élève

La catégorisation des fonctions relatives aux élèves a été aussi structurée avec des fonctions générales. L'une d'elles est liée directement à l'utilisation didactique, le manuel scolaire est présenté comme un outil qui possède la fonction d'occuper l'élève ainsi que deux autres fonctions liées à la formation de l'élève en deux paramètres. Initialement, la première fonction est liée à la formation scolaire dans l'acquisition de l'apprentissage et la seconde fonction est liée à la formation sociale et au développement des compétences pour la vie professionnelle et quotidienne. Ces fonctions se trouvent dans le tableau suivant :

TABLEAU 9– LES FONCTIONS DU MANUEL SCOLAIRE POUR L'ELEVE (DA SILVA JUNIOR, 2010, P. 38).

Fonction générale	Fonction spécifique
Formation scolaire	Consolidation, intégration et évaluation d'acquisitions d'apprentissage
	Faire croitre l'autonomie pédagogique de l'élève en le stimulant à apprendre à apprendre tout au long de la vie
	Médiatrice entre les élèves et les objets du savoir
	Proposer des exercices ou des activités lesquelles visent à faciliter la mémorisation de la connaissance
	Apprentissage scolaire
	Structure, guide et organise l'apprentissage
Formation complémentaire	Transmission de la connaissance et développement de capacités et compétences
	Éducation sociale et culturelle
	Préparation pour la vie quotidienne et professionnelle
Outil d'usage didactique et professionnel	Occuper les élèves par beaucoup de temps semblables dans l'école et à la maison

3.3. Le manuel scolaire à la lumière de la théorie des champs conceptuels

L'enseignant est le responsable du processus d'enseignement, il joue un rôle de médiateur entre la connaissance mathématique et l'élève, il doit être attentif au contenu que lui-même enseignera avec ces questions : « à qui, comment, quand et pour quoi ».

Les compétences et les conceptions seront développées par les apprentis tout au long du temps et à travers des expériences vécues dans un grand nombre de situations. En général, à la confrontation d'une nouvelle situation, ceux-ci utilisent la connaissance développée à travers l'expérience dans des situations précédentes et essaient de s'adapter à cette nouvelle situation. Ainsi, l'acquisition de la connaissance se développe en général dans des situations et problèmes dont l'apprenti a quelque familiarité, cela veut dire que l'origine de la connaissance a des caractéristiques locales.

L'enseignant utilise plusieurs objets ou matériaux pour réaliser ses activités professionnelles et communiquer des connaissances aux élèves, parmi ceux-ci le Manuel Scolaire. Le manuel soutient l'enseignant par les contenus, les symboles, les représentations et didactiques apportées directement pour aider ce dernier.

La construction de la connaissance par l'apprenti, selon Moreira (2002, cité par Da Silva Junior, 2010, P. 55), n'est pas un processus linéaire facilement identifiable. Au contraire, il est complexe, retardé, avec des avancées et des rétrocessions, des continuités et des ruptures. Les continuités et les ruptures ne s'excluent pas, les deux pouvant être présentes en même temps dans le processus d'apprentissage.

Dans l'enseignement, il faut, en effet, que l'enseignant identifie sur quelles connaissances de l'expérience l'apprenti peut se soutenir pour apprendre, et quelles sont les ruptures nécessaires, pour cela ; il faut que l'enseignant propose des situations dans lesquelles l'apprenti est déstabilisé cognitivement et où il lui soit nécessaire de chercher quelque chose de plus que sa simple expérience.

S'impose, encore une fois, le Manuel Scolaire pour apporter les contenus qui devront être analysés, confrontés et développés par l'enseignant individuellement et avec les élèves.

Cet outil est propice aux situations d'apprentissage qui peuvent être utilisées par l'élève et par l'enseignant, sur la base de textes, d'exercices et d'exemples nombreux. Ainsi, au risque de nous répéter, le Manuel apporte à l'enseignant des suggestions didactiques, pédagogiques et méthodologiques pour travailler les contenus à être enseignés.

De plus, celui-ci représente un apport pour les enseignants apport de mots, de symboles, de figures, de représentations et de jugements, pour expliquer, pour formuler des questions, pour sélectionner des informations, pour proposer des objectifs, les attentes, les règles et les plans. Néanmoins, son action médiatrice la plus importante est celle de proposer des situations (d'apprentissage) pour les apprentis. Ces situations sont choisies, commentées, diversifiées, présentées, analysées et utilisées pour les enseignants dans leur réalité professionnelle.

Ce sont les situations qui donnent aux concepts d'être « raisonnables » ; elles sont responsables du sens attribué au concept et un concept se rend significatif à travers une variété de situations (Vergnaud, 1994), mais le sens n'est pas dans les situations en elles-mêmes, ni dans les mots ni dans les symboles (Vergnaud, 1990). Ici nous rappelons que les situations déjà mentionnées, selon Vergnaud, ne sont pas des situations didactiques proprement dites mais des tâches, des problèmes.

Le rôle du Manuel Scolaire, en étant un médiateur, un fournisseur de situations problématiques, un stimulateur de l'interaction enseignant-situation, permet l'élargissement et la diversification des schèmes d'action des apprenants, c'est-à-dire qu'il participe au développement cognitif de ceux-ci.

3.3.1. La théorie des champs conceptuels pour analyser la construction des connaissances

En ce qui concerne le contexte de l'apprentissage et de l'analyse du processus de conceptualisation dans la formation de la connaissance auprès d'un apprenti, la théorie qui peut nous aider à saisir la construction de l'apprentissage est la théorie des champs conceptuels du psychologue et didacticien Gérard Vergnaud. C'est une théorie contemporaine ; cette théorie, selon Moreira (2002, cité par Da Silva Junior, 2010, P. 42) cherche à élargir et à redimensionner la théorie piagétienne des opérations logiques des structures générales de la pensée sur l'étude du fonctionnement cognitif du sujet dans l'action.

Pour aborder la question de l'aide de la théorie des champs conceptuels à notre étude, nous reprenons l'idée du Manuel Scolaire comme un objet fabriqué pour s'inscrire dans le processus d'enseignement et d'apprentissage d'une discipline. A cette fin, il possède dans sa structure des connaissances issues de quatre domaines différents : de la discipline, de la didactique, de la pédagogique et de la méthodologique.

Ces branches de la connaissance agissent soit isolément, soit, elles se regroupent pour assister le processus de construction de la connaissance de la part de l'utilisateur de ce Manuel Scolaire. Cette assistance se produit à travers les situations proposées par le Manuel Scolaire et par des situations autres qui appellent l'action de l'utilisateur. Ces situations nous renvoient à la théorie des Champs Conceptuels de Gérard Vergnaud.

Vergnaud aborde l'apprentissage comme un processus attaché à l'action du sujet dans une situation donnée. En effet, avec l'utilisation du Manuel Scolaire, l'élève se trouve dans des situations plus variées qui exigent son action pour faire des exercices, résoudre des problèmes et recevoir des leçons ; par conséquence celles-ci sont des situations qui favorisent les conceptualisations.

Vergnaud indique que Piaget dans ses travaux a apporté de grandes contributions pour l'Education et reconnaît l'importance de la théorie de Piaget en détachant les idées d'adaptation, de déséquilibre et de rééquilibre comme des pierres fondamentales à la recherche en didactique des sciences et des mathématiques. En effet, parmi ces pierres fondamentales indiquées par Piaget, l'une est le concept de schème. Selon Vergnaud (1994), avec les concepts de schème et des invariants opératoires, Piaget apporte une grande contribution pour comprendre comment une conduite est produite dans une situation, et il fournit un élément pour la théorie de la conceptualisation. De plus, Plaisance et Vergnaud (2005) mettent l'accent sur Piaget qui a probablement, dans l'action, sous-estimé son importance et celui des rôles de la perception, de la langue et de l'aide d'autrui dans son concept. Vergnaud (1994) a également présenté la théorie de la fonction symbolique de Piaget comme l'intériorisation de l'action et la place de l'objet soit par la langue intérieure, soit par le résultat d'internalisation progressive des activités linguistiques avec autrui. Selon Plaisance et Vergnaud (2005), les signifiants de la langue et d'une manière générale les formes symboliques utilisées dans l'enseignement (des graphiques, des diagrammes, des schèmes, des tableaux, etc...) modifient le statut de la connaissance formée de l'action dans la situation.

La reconnaissance de Vergnaud (1994) se porte non seulement sur la contribution des travaux de Piaget mais aussi sur ceux de Vygotski. Pour lui les deux auteurs ont apporté des contributions essentielles pour la compréhension des phénomènes et de l'acculturation.

Cela est perceptif, par exemple, dans l'importance attribuée à l'interaction sociale, à la langue et à la symbolisation dans le processus de l'apprentissage d'un champ conceptuel par les apprentis.

C'est dans ce contexte d'interaction, de médiation, de langage et de formes symboliques que nous reprenons notre objet d'étude (le Manuel Scolaire). Nous pouvons dire qu'il est structuré, organisé et produit pour faire de la médiation entre la connaissance et l'apprenant. Néanmoins nous observons que cette médiation n'est seulement possible qu'à travers l'interaction du sujet avec l'objet et à travers l'action du sujet lui-même. Ainsi, cette interaction dépend du langage et des formes symboliques des contenus, de la didactique et de la méthodologie qu'il apporte. Enfin, le Manuel Scolaire apparaît comme un objet structuré pour agir sur le développement des connaissances des contenus, tant méthodologiques que didactiques dans le processus de conceptualisation des élèves, c'est-à-dire, dans la construction de concepts.

Le Manuel Scolaire se révèle important dans notre étude puisqu'il apporte des situations d'action et de confrontation (du contenu, de la didactique, de la pédagogie et de la méthodologie) chez l'élève en produisant de nouvelles connaissances et en donnant de la continuité à une formation.

La théorie des champs conceptuels de Vergnaud cherche à mieux comprendre en quoi consistent les compétences acquises dans le travail et l'éducation. Quand un apprenti entre en situation d'apprentissage, il ne se défait pas de tout son répertoire mais il entre seulement avec ce qui concerne cette situation spécifique. Ainsi, dans chaque situation, il convoque ses compétences langagières, sociales et affectives.

Les recherches en didactique des mathématiques se focalisent sur l'enseignement et l'apprentissage de contenus spécifiques à cette discipline. Les notions de transposition didactique et de champ conceptuel peuvent répondre à certaines questions et par ailleurs expliquent les difficultés de compréhension des élèves dans d'autres cas. Nous ne nous interrogeons pas seulement sur les contenus à enseigner et les méthodes. L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques soulèvent des problèmes liés aux processus cognitifs. La construction d'un concept nous conduit à trois étapes comme l'explique Vergnaud (1991) dans la théorie des champs conceptuels : les situations, les invariants et les symboles. Les symboles nous appellent aux différentes représentations, plus exactement les représentations sémiotiques développées par Duval (1995). C'est l'objet de la suite de notre présentation.

4. Apports de la notion de registres sémiotiques en mathématiques selon Raymond Duval

D'un point de vue épistémologique, il existe une différence fondamentale entre les mathématiques et d'autres domaines de la connaissance scientifique puisque la seule façon d'accéder à des objets mathématiques est d'utiliser des représentations sémiotiques (Duval, 2006) et l'acquisition conceptuelle d'un objet passe nécessairement par l'acquisition d'une ou plusieurs de ces représentations. Pour cet auteur, la compréhension en mathématiques repose sur la distinction entre l'objet et sa représentation sémiotique et toute confusion entre ses deux derniers entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension.

Le concept de registres sémiotiques est introduit par Duval (1993) en mathématiques. Pour lui, un registre de représentation sémiotique désigne tout système qui permet les trois activités suivantes :

- La communication : idée qui consiste à former une représentation identifiable, à constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé.

- Le traitement : traiter cette représentation par les seules règles propres au système.
- La conversion : possibilité de traduire les données exposées dans un autre registre et de les convertir de la même manière dans un autre registre de telle façon que ces représentations permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté.

Pour Duval (1993), « les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles à la perception, il faut donc en donner des représentations ». Duval (1993) explique qu'« une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents » (p.39). Ces représentations sémiotiques jouent un rôle primordial, ils permettent des activités cognitives. Nous allons utiliser cette définition dans le cadre de notre étude.

Dans la section qui vient, nous présentons la définition donnée aux termes *représentation*, représentations internes et représentations externes. Puis, nous expliquons la relation entre les représentations internes et externes et, enfin nous détaillons sur les trois registres de représentation possibles pour les fractions.

4.1. Retour sur les notions de représentation, représentation interne et représentation externe

La représentation est un concept forgé par les sociologues pour désigner les façons de penser la réalité sociale. Il a été introduit en psychologie génétique par J. Piaget quand il a étudié la représentation du monde chez l'enfant. Tout récemment les didacticiens l'ont adopté pour mieux comprendre et appréhender l'activité intellectuelle de l'apprenant et sa manière de construire le réel.

Selon Brousseau (2004) :

> « Le terme *représentation* désigne *l'action de rendre présent à nouveau* et *son résultat.* Il est aujourd'hui un concept important de la psychologie cognitive et de la psychologie sociale, d'où il diffuse vers tous les secteurs de l'analyse des connaissances, notamment vers le secteur de l'éducation, donc vers celui de l'éducation mathématique » (p.242).

Le concept de représentation ouvre la voie à une *nouvelle approche de l'apprentissage* susceptible d'expliquer la manière dont nous construisons le réel. C'est la psychologie génétique qui affirme que l'enfant tente d'expliquer le monde qui l'entoure selon ses schèmes mentaux. Pour cela il s'appuie sur les modèles explicatifs dont il dispose. Cependant, ces modèles sont très souvent inadaptés et induisent l'enfant en erreur. Un exemple lié au fait que certains enfants, considérant qu'un nombre décimal est constitué de deux parties, une entière et l'autre décimale, fait dire que 3,1547 est supérieur à 3,16. C'est parce que l'élève construit son savoir à partir des connaissances préalables, apprises à l'école ou en dehors de l'école, qui sont parfois erronées et viennent interférer avec le savoir scolaire. L'enseignant est très souvent confronté à ce savoir particulier des élèves et il n'est pas en droit de l'ignorer.

Les représentations constituent un modèle individuel selon lequel la pensée s'organise, une modalité particulière de connaissance. C'est la raison pour laquelle nous ne devons ni les ignorer, ni les assimiler à des fautes. Le rôle du didacticien est d'amener l'enfant à changer de système de représentation car toute représentation fausse n'est que la manifestation d'un obstacle face à l'apparition du savoir et à la compréhension de la situation. De là, nous dirons que l'essentiel de l'apprentissage se centre sur le franchissement de ces obstacles en vue d'aboutir à une réorganisation du système de représentation chez l'élève. C'est dans la mesure où ce dernier en prend conscience et l'affronte qu'il arrivera à modifier et réorganiser son modèle explicatif pour pouvoir progresser.

Ce terme de la *représentation* est utilisé dans l'enseignement des mathématiques, il est classé en deux types : représentations internes et représentations externes (Zhang, 1997). À cet égard, Fandino Pinilla (2007) introduit également deux termes « noétique » et « sémiotique ». Le terme *noétique* se réfère à l'acquisition conceptuelle et donc dans le milieu scolaire à l'apprentissage conceptuel. En revanche, le terme *sémiotique* se réfère à la représentation des concepts à travers des systèmes de signes. Ces deux termes sont d'une importance extraordinaire en mathématiques.

Zhang (1997) a défini les deux termes de *représentations internes* et *représentations externes* :

> « *external representations* are the knowledge and structure in the environment, as physical symbols, objects, or dimensions (e.g. written symbols, beans of abacuses, dimensions of a graph, etc.), and as external rules, constraints, or relations embedded in physical configurations (e.g. spatial relations of written digits, visual and spatial layouts of diagrams, physical constraints in abacuses, etc.). *Internal representations* are the knowledge and structure in memory, as propositions, productions, schemas, neural networks, or other forms. » (p. 180).

C'est-à-dire, les *représentations externes* peuvent être des symboles physiques, des objets ou des relations embarquées dans des configurations physiques comme des relations spatiales des chiffres écrits, visuels et les dispositions spatiales des diagrammes, etc.). *Les représentations internes* peuvent être des propositions, des productions, des schémas, etc.).

Les deux représentations internes et externes jouent un rôle important dans la facilitation de l'apprentissage des mathématiques. Les représentations internes et les représentations externes peuvent être transformées les unes en les autres.

4.1.1. La relation entre les représentations internes et les représentations externes

Zhang (1997) indique qu'il y a chez les individus trois situations différentes mettant en jeu les représentations internes et externes :

- celles où les représentations externes sont dominantes ;
- celles où les représentations internes sont dominantes ;
- celles où elles sont interdépendantes.

Le premier cas considère les représentations externes comme les plus importantes, car si aucun des processus mentaux n'est nécessaire pour une perception et une action, alors il n'y a pas de représentation interne concernée.

Dans *le deuxième cas*, les représentations internes sont plus importantes que les représentations externes, parce que l'information doit être traduite en un modèle interne pour être comprise.

Dans l*e troisième cas*, les représentations externes et les représentations internes sont des aspects nécessaires lors de la résolution des tâches cognitives. Le stockage des informations comme des représentations internes et représentations externes pourrait stimuler les représentations internes si des repères sont fournis.

La communauté de l'enseignement des mathématiques est plutôt d'accord avec le troisième point de vue pour lequel les deux représentations internes et externes sont dépendantes les unes des autres et ces deux représentations contribuent à la compréhension conceptuelle des connaissances mathématiques acquises (Hiebert et Carpenter, 1992).

La capacité du développement significatif des représentations internes d'un certain concept est une mesure de la compréhension conceptuelle. Il est difficile de mesurer les représentations internes des élèves (Goldin et Steingold, 2001). Par conséquent, les représentations externes servent généralement comme indicateur des représentations internes des élèves. Il est important de rappeler que les notions mathématiques n'existent pas dans la réalité concrète : le point P, le numéro 3, l'addition, le parallélisme entre les lignes droites ne sont pas des objets concrets qui existent dans la réalité empirique ; ils sont des concepts purs et abstraits ; ils ne peuvent pas être empiriquement affichés comme dans d'autres sciences. En mathématiques, les concepts ne peuvent être représentés que par un registre sémiotique choisi. Nous ne travaillons pas directement avec les objets (c'est à dire avec les concepts), mais avec leurs représentations sémiotiques. Donc, la sémiotique, à la fois en mathématiques et en didactique des mathématiques, est fondamentale (Fandino Pinilla, 2007). Il est impossible d'étudier l'apprentissage en mathématiques sans faire référence à des systèmes de représentations sémiotiques.

Il nous semble intéressant d'indiquer l'importance de l'apprentissage conceptuel des concepts mathématiques. L'enseignant, qui connaît le concept, propose certaines de ses représentations sémiotiques à l'élève, qui ne connaît pas encore le concept, dans l'espoir que, par les représentations sémiotiques, l'élève sera en mesure de construire l'apprentissage conceptuel souhaité (noétique) du concept. L'élève ne possède que des représentations sémiotiques, des objets (mots, formules, dessins, schémas, etc.) mais pas vraiment le concept lui-même. Si l'élève savait déjà le concept, il pouvait le reconnaître dans ses représentations sémiotiques, mais comme il ne le connaît pas, il ne voit que des représentations sémiotiques, c'est à dire des objets concrets, des marques d'encre sur des feuilles de papier, des marques à la craie sur un tableau noir, etc.

L'enseignant qui n'est pas conscient du problème de la noétique et de la sémiotique, peut nourrir l'illusion que si l'élève manipule les représentations, qu'il manipule les concepts et donc, la construction cognitive a eu lieu. En réalité, l'élève a seulement appris à manipuler les représentations sémiotiques, mais il n'a pas du tout construit le concept et l'enseignant souffre d'une illusion. L'enseignant qui est conscient de ce problème ne peut pas éviter de se concentrer sur l'apprentissage de ses élèves, de vérifier s'ils ont vraiment appartenu à la sphère de la noétique et non pas seulement à la manipulation sémiotique (Fandino Pinilla, 2007).

Puisque la fraction est un concept, son apprentissage est au sein de la sphère de la noétique, alors il ne peut pas être concrètement affiché. Nous pouvons fonctionner avec un seul ensemble, un objet, un gâteau en le divisant et en obtenant une partie. Mais le résultat n'est pas la *fraction mathématique*, seule *la fraction de cet objet*. En travaillant avec le registre des opérations concrètes, nous montrons une représentation sémiotique et non pas le concept. Nous pouvons utiliser des mots pour décrire ce que nous avons fait pour le gâteau, ce qui change un registre sémiotique, soit le registre de *la langue naturelle*, et montre une autre représentation sémiotique, mais pas le concept. Nous pouvons passer à d'autres exemples en faisant *abstraction de l'objet concret*, le gâteau, par le choix d'un autre objet, par exemple un rectangle, mais encore cette fois nous avons changé le registre sémiotique en offrant une autre représentation sémiotique, soit *le registre figuratif*, et non pas le concept lui-même. À ce point, normalement, nous allons au-delà de l'objet (gâteau, rectangle, etc.) à son abstraction et la fraction a été construite à partir du modèle de départ concret considéré comme l'unité ou le tout. Jusqu'à ce point, les unités sont des *objets continus*, soit un gâteau ou la surface d'un rectangle. Passant à des *unités discrètes*, par exemple 12 balles, qui doivent être considérées comme une unité entière, le registre a été complètement changé. En effet, à ce moment ou peut-être même avant, la forme écrite de fractions avec les termes « numérateur » et « dénominateur », une nouvelle représentation sémiotique dans un registre différent, est fournie et donc, un nouveau type de conversion. Tout cela, et plus encore, se déroule normalement au sein d'une leçon de 30, 40 ou 50 minutes.

Si l'élève est capable de reconnaître les caractéristiques des différents objets comme l'acte de division, le gâteau (quantité continue), la surface d'un rectangle (quantité continue), l'ensemble de boules (quantité discrète), la forme écrite avec ses termes (numérateur et dénominateur) et s'il est également capable d'effectuer continuellement le traitement de transformations et la conversion de transformations, nous pouvons dire que l'enseignement a été réalisé, l'apprentissage a été atteint et le concept a été construit. Par ailleurs, si nous reconnaissons que la sémiotique et la noétique ne sont pas la même chose et que l'apprentissage de manipuler les représentations sémiotiques n'est pas noétique, nous pouvons comprendre comment, généralement après un succès initial apparent, dans quelques leçons ou dans les semaines ou mois suivants, certains élèves peuvent être en situation de difficulté : ils ont appris à manipuler des registres, mais ils n'ont pas du tout construit le concept que nous voulions à leur construire.

Enfin, nous pouvons dire que pour comprendre les objets mathématiques eux-mêmes et pas seulement leurs représentations, les élèves doivent maîtriser un même objet mathématique dans plusieurs registres de représentation sémiotique et ceux-ci doivent se coordonner. Comprendre un objet mathématique, c'est la capacité de le reconnaître dans des registres différents. La conversion d'une représentation sémiotique à une autre peut ainsi être l'occasion d'apprentissages.

4.2. De l'intérêt de la notion de registres sémiotiques dans notre recherche

Selon Duval (1993), « une écriture, une notation, un symbole, représentent un objet mathématique ; un nombre, une fonction, un vecteur…de même, les tracés et les figures représentent des objets mathématiques ; un segment, un point, un cercle…cela veut dire que les objets mathématiques ne doivent pas être confondus avec la représentation qui en est faite » (p.39). La notion de représentation sémiotique définie par Raymond Duval est intéressante pour comprendre comment les élèves manipulent les objets mathématiques. Ces objets tels que droites, cercles, nombres, etc. ne sont pas des objets réels ou physiques. Pour les manipuler, les élèves doivent passer par leurs représentations, mentales et sémiotiques. Les fractions sont enseignées en classes de CM1 et de CM2 de l'école primaire. Les activités, portant sur les fractions, présentes dans certains manuels scolaires impliquent une ou plusieurs représentations sémiotiques concernant les fractions. Ces activités visent à mettre en œuvre des apprentissages relatifs aux figures, au langage naturel et aux nombres, ce qui fait notre choix des registres sémiotiques. Dans notre étude, il est question de voir les différentes représentations des fractions faites par les élèves du cycle 3. Nous posons les questions suivantes. Comment les élèves de CM1 et de CM2 mobilisent-il les connaissances acquises sur les fractions pour résoudre de divers problèmes portant sur les fractions ? Quelles sens donnent-ils les élèves de CM1 et de CM2 aux différentes représentations sémiotiques des fractions ? La réponse à ces questions nous conduit à nous référer au travail de Duval (1995), qui analyse le rôle des différents registres dans l'apprentissage.

4.3. Les trois registres de représentations sémiotiques possibles pour les fractions

La fraction a la particularité de combiner une représentation particulière, *la représentation fractionnaire*, ce qui nous suggère la pertinence de l'étude des rapports entre les objets mathématiques et leurs représentations.

Dans une approche, qui est centrée sur les concepts, les hypothèses de Duval (1993) considèrent que les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique tout comme dans l'apprentissage des concepts. L'auteur affirme que dans le cas des mathématiques, l'acquisition du concept ne se fait que par ses représentations**.** Il est important de considérer la nature de chaque représentation sémiotique, car les représentations sémiotiques contiennent des contraintes de signifiance et de fonctionnement. La possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend alors directement du système de représentation sémiotique utilisé. Dans l'enseignement, il est important de prendre en compte, soit les systèmes de registres, soit les problèmes de conversion entre les différents registres.

Dans le cas de l'enseignement des rationnels, Duval (1995) met en évidence l'importance de trois registres de représentation pour les nombres rationnels : les registres numériques qui peuvent être fractionnaire ou décimal, le registre figural et la langue naturelle. Il montre que plusieurs difficultés associées à l'apprentissage des rationnels sont dues aux difficultés de conversion entre ces trois registres.

Le registre figuratif, selon l'approche de Duval (1993), ne peut représenter que des états ou des configurations, les figures ne sont pas capables d'exprimer les actions ou les transformations. Le rapport entre les parties et l'entier, qui est l'opération mentale à la base de la notion de fraction, n'est pas évidente sur cette représentation. Une autre caractéristique de cette représentation est le fait que, pour désigner la fraction, la figure doit être divisée également, ce qui va exiger des connaissances sur l'aire des figures. De plus, le dessin d'une figure fait au tableau qui ne prend pas en compte les mesures, peut induire à des doutes sur la fraction représentée. Ce fait s'aggrave quand il s'agit de la comparaison entre deux fractions représentées par deux figures, ou bien quand la même figure doit être sous-divisée pour représenter une autre fraction équivalente. Le registre figuratif a donc l'avantage de permettre la visualisation, mais a des inconvénients du point de vue de ce que Duval (1993) appelle le traitement.

En ce qui la concerne, la représentation fractionnaire (le registre numérique) est assez intéressante du point de vue du traitement parce qu'elle permet d'effectuer les opérations de façon assez pratique, à l'aide de la notion d'équivalence. Toutefois, si la fraction représentée par deux nombres naturels a des avantages du point de vue du traitement, elle a l'inconvénient d'être un registre conventionnel, dont la signification n'est pas évidente. De plus, la représentation fractionnaire a la particularité d'utiliser un nombre naturel avec une signification relative, c'est-à-dire, par exemple, que le nombre 2 sur la fraction 2/5 ne représente pas la même quantité que le même nombre dans le cas de la fraction 2/7. Cette particularité introduit des contradictions parce que d'habitude le nombre naturel a toujours une valeur absolue. Dans le cas particulier des fractions impropres, Celles-ci permettent une autre présentation de la représentation fractionnaire en présentant des difficultés lorsque nous utilisons les figures comme représentation. Pour représenter, par exemple, 3/2, il faut accepter de prendre plus d'une figure qui doivent aussi être divisées en deux parties équivalentes.

Le recours à la langue naturelle est également fondamental dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Dans le cas des fractions, les énoncés permettent de décrire des procédures mentales qui doivent être effectuées pour établir le rapport entre les parties et l'entier. Par exemple, le discours va permettre d'établir un codage pour passer de la figure à son registre fractionnaire: « j'ai l'entier, je le divise en trois parts égales, c'est le dénominateur et j'en prends deux, le numérateur ». Si nous voulons partir de la figure, ce sens du codage est assez simple, mais le sens inverse n'est pas évident parce que pour passer de la fraction 2/3 à son registre figuratif, nous devons d'abord nous demander quelle est la figure et nous pourrons effectivement avoir plusieurs figures pour représenter une même fraction donnée. Dans ce cas, la règle de codage n'est pas suffisante pour assurer le changement de registre, il s'agit donc d'une conversion et non pas d'un codage. Nous pouvons dire que la langue naturelle sert comme le registre qui va permettre la coordination entre les deux autres registres figuratif et numérique.

La nécessité d'utiliser une variété de représentations ou de modèles dans le soutien et l'évaluation des constructions de fractions des élèves est souligné par un certain nombre d'études (Lamon, 2001). Les formes géométriques utilisées pour introduire le modèle continu de fractions sont distinguées en deux types : le modèle circulaire qui repose sur l'utilisation de milieux et le modèle linéaire qui est basé sur un rectangle divisé en un certain nombre de parties égales (Boulet, 1998).

5. Le cadre théorique retenu pour notre recherche

Après avoir reconnu et mis en évidence les différents aspects concernant le concept de fraction (du point de vue étymologique, du point de vue mathématique, du point de vue cognitif/psychologique et du point de vue didactique), il est nécessaire d'expliciter les cadres conceptuels qui nous ont permis de conduire ces premières analyses et qui, plus après, structureront les recherches exposées dans la troisième partie de notre thèse. Nous reviendrons tout d'abord, sur l'insertion de cette recherche au sein de la didactique des mathématiques en présentant le cadre conceptuel imposé par le rattachement à la didactique des mathématiques, ensuite, sur le cadre conceptuel proposé par Guy Brousseau pour aborder les situations d'enseignement, et enfin, sur le cadre conceptuel introduit par Gérard Vergnaud pour approcher les apprentissages de l'élève. Nous allons maintenant prendre chacun de ces cadres.

5.1. Le cadre conceptuel lié à la didactique des mathématiques et à l'approche par compétence

Cette étude s'accorde sur la position de Jean Brun (Brun, 1981) qui avance « Le renouveau du terme didactique contient une volonté de redonner de l'importance à l'analyse des contenus d'enseignement. » (p.15). La didactique sert, dans un premier temps, à théoriser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage mais, dans un second temps, elle ne peut pas faire l'impasse d'y adjoindre une ingénierie didactique pour agir sur ce système d'enseignement. Si nous nous référons à Jean Portugais (Portugais, 1995, p. 43), « L'ingénierie se définit comme un processus de recherche s'intéressant à la préparation, à la réalisation et à l'analyse de situations didactiques ». Si dans la deuxième partie de cette recherche, pour des raisons de faisabilité, nous limitons le champ d'observation des situations didactiques à l'analyse des contenus de manuels, alors la définition précédente précisera les tâches incontournables qui devront donner une suite à cette étude. Pour rester dans la logique de la didactique des mathématiques et en faisant référence aux propos de Gérard Vergnaud : « C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant » (Vergnaud, 1996, p. 198). Nous sommes soumis à trois hypothèses, à savoir :

- l'hypothèse *constructiviste* qui sous-entend que les élèves construisent par eux-mêmes leurs connaissances et le sens qu'ils accordent à leurs apprentissages.
- l'hypothèse *épistémologique* qui met en avant le rôle prépondérant de la confrontation à des problèmes et à des situations, comme éléments majeurs de l'entrée des élèves dans leurs apprentissages.

- la troisième hypothèse est celle de la nécessité d'un *recours à une perspective interactionniste* dans la formation des connaissances.

La réforme des programmes modifie certains aspects de l'enseignement. En effet, les programmes par objectifs sont remplacés par des programmes qui sont établis sur une approche par compétences. Selon Lasnier (2000), les objectifs amènent l'enseignant à se centrer sur un résultat immédiat (comportement) et ne peuvent pas couvrir tout l'ensemble du processus d'apprentissage.

L'approche par compétences est appliquée dans les manuels, les programmes, la formation des enseignants et les systèmes d'évaluation. Pour De Ketele (2000), l'approche par compétences est « la possibilité par les apprenants de mobiliser un ensemble intégré de ressources pour résoudre une situation-problème appartenant à une famille de situations. ». (p.188). Ces ressources peuvent être internes à l'individu (acquis scolaires, habilités expériences, domaines d'intérêts) ou encore externes (pairs, enseignants, documents). Cette approche met donc en situation les apprentissages et elle permet aux apprenants de partager, d'échanger et de coopérer entre eux lors des différents apprentissages.

Selon Erickson (2001), une approche constructiviste permet de s'intéresser à la façon dont la connaissance est construite et représentée par l'apprenant dans un domaine conceptuel donné. En effet, l'apprenant construit lui-même ses connaissances en s'appuyant sur ses connaissances préalables et son interaction avec son environnement physique et social. Selon Legendre (1993), les connaissances préalables sont « l'ensemble des informations, idées, perceptions, concepts et images, ainsi que l'impact d'expériences émotionnelles contenus dans la mémoire à long terme de tout usager de la langue ». De plus, selon Raynal et Rieunier (1997), les connaissances préalables sont nécessaires à la compréhension d'un phénomène quelconque et un apprenant doit posséder ces connaissances pour aborder avec de bonnes chances de succès un apprentissage nouveau. Avec la construction des connaissances, l'élève développe son autonomie. Dans cette approche, l'enfant est le principal acteur et l'accent est mis sur la participation active de l'élève qui doit participer à la construction de ses connaissances. C'est par des essais et des erreurs que l'élève sera en mesure de comparer ce qu'il possède déjà avec ses nouvelles expériences. L'erreur commise par l'élève est considérée comme un renseignement qui aide à comprendre les processus de pensée du sujet. Ainsi, l'enseignant devient un accompagnateur, un facilitateur, un motivateur et un guide attentif au travail de l'enfant qui oriente cet élève et le pousse à utiliser son esprit critique, à résoudre des problèmes. L'enseignant devrait proposer des activités pédagogiques variées, stimulantes, liées aux expériences et au vécu de l'enfant ainsi qu'au quotidien. L'approche par compétence est définitivement ancrée dans des situations. Ces dernières deviennent alors le point de départ des activités d'apprentissage.

Dans cette approche par compétence, l'étude du développement des connaissances prend une place importante. Maurice Naville et Montagero (1994) indiquent que Piaget étudie le développement de la connaissance comme résultat de l'interaction du sujet avec les objets de connaissance, grâce à l'intervention de deux mécanismes : l'assimilation, qui représente l'intégration des connaissances à des structures mentales préalables, et l'accommodation, qui permet au sujet de s'adapter aux exigences du milieu.

Le programme de formation de l'école primaire organise les savoirs sous forme de compétences (Ministère de l'Education Nationale, 2008). Le programme des mathématiques de l'école primaire est structuré autour de trois grandes compétences : résoudre des situations-problèmes, raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques et communiquer à l'aide du langage mathématique. Cependant, ces compétences se développent en relation avec l'acquisition de savoirs relatifs à l'arithmétique, la géométrie, la mesure, la probabilité et la statistique. Par ailleurs, l'enseignement primaire comporte trois cycles qui permettent le développement des compétences, lesquelles s'étalent souvent sur plus d'une année. Le travail est donc organisé en fonction d'un ensemble de compétences à atteindre en fin de cycle, afin de pouvoir passer au cycle suivant (Tardif, 1999). Perrenoud indique que l'approche par compétences permet la continuité. L'étude des fractions contribue au développement des trois compétences mathématiques énoncées ci-dessus.

Enfin, l'approche par compétences poursuit, selon Roegiers (2000), trois objectifs principaux :

1. « Mettre l'accent sur ce que l'élève doit maîtriser à la fin de chaque année scolaire […], plutôt que sur ce que l'enseignant doit enseigner. Le rôle de celui-ci est d'organiser les apprentissages de la meilleure manière pour amener ses élèves au niveau attendu ». Nous retrouvons là une référence directe à la centration sur l'apprenant, et une quasi-reformulation de la définition d'un objectif.
2. « Donner du sens aux apprentissages, montrer à l'élève à quoi sert tout ce qu'il apprend à l'école, […] à situer les apprentissages par rapport à des situations qui ont du sens pour lui, et à utiliser ses acquis dans ces situations. ».
3. « Certifier les acquis de l'élève en termes de résolution de situations concrètes, et non plus en termes d'une somme de savoirs et de savoir-faire que l'élève s'empresse

d'oublier, et dont il ne sait pas comment les utiliser dans la vie active ». En d'autres termes, il s'agit ici de l'évaluation en termes de savoir-agir dans la réalité et non plus de restitution de savoirs déconnectés du réel.

5.2. Le cadre conceptuel proposé par Guy Brousseau pour aborder les situations d'enseignement

Dès à présent, il nous semble important de préciser la référence retenue derrière les termes situation, situation-problème, etc… Guy Brousseau explique le travail de l'élève en ces termes (Brousseau, 1986) :

> « Savoir des mathématiques, ce n'est pas simplement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer ; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. […] Une bonne production par l'élève exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il trouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc. Pour rendre possible une telle activité, le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés. » (p. 48 – 49).

Selon Portugais (1995) Les « problèmes ne sont donc que des éléments d'une organisation didactique plus large - la situation - qui comprend, entre autre : des questions, des méthodes, des heuristiques, des informations. » (p. 35).

Les situations didactiques sont des situations qui servent à enseigner. Une situation est didactique lorsqu'un individu a l'intention d'enseigner à un autre individu un savoir donné. Une situation non didactique est une situation sans finalité didactique pour laquelle le rapport au savoir s'élabore comme un moyen économique d'action comme le cas d'apprendre à faire du vélo. Une situation a-didactique est la partie de la situation didactique dans laquelle l'intention d'enseigner n'est pas explicite au regard de l'élève. Le sujet (l'élève) réagit comme si la situation était non didactique. Donc, il prend la décision pour l'apprentissage, engage des stratégies, évalue l'efficacité de ces stratégies.

Pour faire référence au concept de situation didactique, dans un premier temps, nous faisons un retour sur l'analyse réalisée par Jean Brun sur l'œuvre de Guy Brousseau (Brun, 1996, p. 11-12). La guidance par le professeur, garantit la désignation des objets étudiés et l'ordonnancement de l'apprentissage des savoirs, mais cette genèse fictive oublie, du même temps, l'histoire des savoirs et le tâtonnement qui a accompagné sa constitution. Celle-ci traduit aussi la différence entre ce qui serait à attendre d'un enseignement du concept de fraction (le savoir savant) et ce qu'il en résulte en acte dans la classe (le savoir scolaire). Cette transposition didactique, au sens de Yves Chevallard (1985), traduit la somme des transformations imposées par les programmes scolaires et interprétées ensuite par l'action du maître.

L'analyse des manuels scolaires, réalisée dans le cadre de notre étude, s'appuie sur la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud.

Dans une réflexion globale issue de l'analyse des manuels scolaires et des apprentissages des élèves, nous émettons deux remarques à l'égard de ces deux auteurs : que veut dire donner sens à une situation proposée aux élèves et quelle peut être l'intention pédagogique attendue en retour ? En effet, comme le rappelle Gérard Vergnaud (Vergnaud, 1996) :

> « Ce sont les situations qui donnent du sens aux concepts mathématiques, mais le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes. Il n'est pas non plus dans les mots et les symboles mathématiques. Pourtant on dit qu'une représentation symbolique, qu'un mot ou qu'un énoncé mathématique, ont du sens ou plusieurs sens, ou pas de sens pour tels ou tels individus ; on dit aussi qu'une situation a du sens ou n'en a pas. Alors qu'est-ce que le sens ? Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. » (p. 287).

5.3. Le cadre conceptuel introduit par Gérard Vergnaud pour approcher les apprentissages de l'élève

Notre analyse se fonde sur la suite donnée aux travaux de Piaget et de Vygotski portant sur l'assimilation / accommodation comme mode d'adaptation, s'insérant de la sorte dans un perspectif constructiviste des apprentissages de l'élève. Pour la conceptualisation des savoirs par ce dernier, nous nous appuierons sur les travaux de Gérard Vergnaud et en particulier sur la théorie des champs conceptuels. Il l'expose ainsi (Vergnaud, 1994) :

> « L'étalement sur une longue période de temps des processus de conceptualisation dans un domaine donné a conduit les chercheurs à se donner des objets d'étude d'une taille suffisante pour qu'il soit possible d'analyser les filiations et les ruptures entre les compétences progressivement développées par les élèves, ainsi qu'entre les conceptions associées à ces compétences, que ces conceptions soient explicites ou seulement implicites. Il faut ainsi étudier un ensemble diversifié de situations, de schèmes et de représentations symboliques langagières et non langagières pour saisir les méandres des processus de conceptualisation. […] On appelle champ conceptuel un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter. » (p.71).

Cette théorie se fonde sur le postulat que c'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Son apprentissage prend appui sur cette dernière notion qui, selon Gérard Vergnaud, est le résultat d'un triplet d'éléments (Vergnaud, 1996) :

> « a) l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence),
> b) l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié),
> c) l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les procédures de traitement (le signifiant). » (p.212).

Nous retiendrons également la restriction, ici, de l'espace large et complet accordé au terme situation par Brousseau, selon les deux points relevés par Gérard Vergnaud (1996) :

> « Les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés. […] nous en retiendrons deux idées principales :
> 1) celle de variété : il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles,
> 2) celle d'histoire : les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et procédures que l'on veut leur enseigner. » (p.218).

Le point n°1 constitue la base de l'analyse des manuels scolaires ; le point n°2, donne tout son intérêt à évaluer, dès l'école élémentaire, où en sont les élèves dans l'appréhension du concept de fraction. La théorie des champs conceptuels prend également appui sur le concept de schème défini ainsi par l'auteur (Vergnaud, 1994) :

> « C'est une totalité dynamique fonctionnelle, c'est-à-dire quelque chose qui fonctionne comme une unité ; en second lieu […] c'est une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données (l'algorithme est un cas particulier du schème) ; et en troisième lieu […], un schème est composé de quatre catégories d'éléments : des buts et intentions et anticipations, des règles d'action, des invariants opératoires et des possibilités d'inférences en situation. » (p.180).

Étudier le champ conceptuel, qui englobe l'apprentissage de la fraction, revient en partie à approcher de manière pragmatique toutes les situations qui s'y réfèrent (en l'occurrence pour nous celles rassemblées à l'intérieur des manuels scolaires) et de réfléchir à l'ensemble des objets présents : domaines de référence étudiés, tâches réclamées aux élèves, formes symboliques utilisées, variables en jeu… pour en dégager des invariants d'analyse et d'actions indiquées aux élèves sur ces problèmes qui leur sont présentés. Quel sens est envoyé à l'élève ? En un mot, quels repères, supports pour expliciter les étapes, actions, enchaînements d'actions, buts, inférences, etc. lui sont proposés comme histoire personnelle d'appropriation de cet apprentissage ?

6. Problématique, objectif, questions et hypothèses de notre recherche

Dans cette section, nous allons présenter à nouveau la problématique de notre recherche, telle qu'elle peut apparaître après l'exploration des divers travaux abordés dans les chapitres précédents, l'objectif de cette recherche, les questions spécifiques posées et, enfin, nous reformulons les hypothèses de la recherche que nous mettons à l'épreuve des faits.

6.1. Problématique de la recherche

Les fractions sont à l'étude dès le primaire. Au départ, les élèves les apprivoisent en abordant des activités quotidiennes. Les fractions interviennent dans quelques activités courantes telles que la cuisine, le partage, l'heure... La forme d'écriture du nombre rationnel peut également être utile pour certains professionnels. L'apprentissage des fractions devient plus important au troisième cycle du primaire avec une exploration des calculs avec les fractions, exploration qui est approfondie en stade scolaire plus avancé.

Les fractions sont parmi les concepts mathématiques les plus complexes rencontrés par les enfants dans les années du primaire (Charalambos et Pitta-Pantazi, 2005). Dans l'introduction de son livre « Pourquoi ont-ils inventé les fractions », Nicolas Rouche (1998) dit : « Les fractions sont un des premiers et des principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques […] ». Certains élèves ont donc des difficultés avec les fractions, d'autant plus que les fractions seraient l'une des notions mathématiques les plus complexes pour les élèves selon Hasemann (1981), Behr, Wachsmuth, Post et Lesh (1984), Lester (1984) et Charles et Nason (2000). Nous avons déjà présenté dans la section 1.2.1 les diverses difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des fractions.

Diverses raisons peuvent expliquer ces difficultés : l'utilisation d'un symbole comportant deux nombres *numérateur* et *dénominateur*, le manque de diversité des représentations possibles des fractions, les connaissances antérieurs sur les nombres entiers qui interfèrent parfois avec l'apprentissage des fractions et les opérations sur les fractions qui impliquent beaucoup de règles que les élèves tendent à utiliser mécaniquement. Par exemple, les activités qui portent sur les fractions se limitent souvent à la signification Partie d'un tout (Blouin, 2002 ; Adjiage et Pluvinage, 2000 ; Kieren, 1980). Ceci entraîne comme conséquence un répertoire limité de procédures chez les élèves au moment de résoudre un problème. Toutefois, plusieurs significations, attribuées à la fraction, sont possibles: Partie d'un tout, Partie d'un ensemble, Opérateur, Rapport, Quotient, Mesure, Nombre sur une ligne numérique, Nombre et Probabilité (Hétu et Desjardins, 1974 ; Kieren, 1980 ; Behr et al., 1983 ; Terrien, Dionne et Mura,1994 ; Rouche,1998 ; Adjiage et Pluvinage, 2000 ; Watanabe, 2002 ; Blouin, 2002) et l'utilisation de ces significations dans l'apprentissage des fractions peut faciliter la compréhension chez les élèves. Dans notre étude, nous avons décidé de les conserver toutes.

6.2. Objectif de la recherche

L'objectif général de cette recherche est de réaliser une étude exploratoire des différentes significations possibles de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III, surtout chez des élèves de CM1 et de CM2. Plus précisément, *deux objectifs spécifiques et un objectif secondaire* focaliseront à :

- Reconnaître et exploiter les différentes significations de la fraction présentes dans les situations d'apprentissage qui proposent des activités portant sur les fractions dans cinq manuels scolaires de mathématiques de CM1 et dans cinq manuels de CM2 de mêmes collections. Nous étudions l'importance et la place accordée à chaque signification dans ces manuels choisis. Cela représente *le premier objectif spécifique* de la recherche.
- Identifier les conceptions et représentations chez des élèves de CM1 et de CM2 à l'égard de la notion de fraction, en particulier explorer et exploiter les différentes significations de la fraction données par ces élèves. Cela représente *le second objectif spécifique*.

  Nous faisons un lien entre les significations de la fraction présentes dans les manuels scolaires et les significations manifestées et données par les élèves.
- Identifier quelles conceptions des concepts mathématiques et de leur apprentissage sont véhiculées par les enseignants, en particulier connaître celles de certains enseignants sur la manière avec laquelle ils abordent les fractions avec leurs élèves. Cela représente *l'objectif secondaire de notre recherche*.

6.3. Questions de la recherche

Notre réflexion nous a amené à nous intéresser à ce que les manuels scolaires présentent et aux représentations données par les élèves du cycle 3 de l'école primaire concernant les différentes significations possibles de la fraction.

Les fractions comprennent une notion multiforme englobant plusieurs significations, interdépendantes, c'est l'un des principaux facteurs de leur complexité (Charalambos et Pitta-

Pantazi, 2005). Le caractère plurivoque des fractions constitue une difficulté importante de leur apprentissage (Kieren, 1993; Brousseau, 2004; Grégoire et Meert, 2005). De nombreux auteurs ont déjà insisté sur ce point et ont recensé les différentes « interprétations » (Kieren, 1976 ; Vergnaud, 1983), « subconstructs » (Behr et al. 1983), « meanings » (Ohlsson, 1988) possibles attribuées à la fraction.

La littérature est abondante : que ce soit les travaux de Hétu et Desjardins (1974), Kieren (1980), Post (1989), Behr et al. (1983), Prevost (1983), Payne (1984), Lester (1984), Mick et Sinicrope (1989), Terrien, Dionne et Mura (1994), Niemi (1996), Rouche (1998), Adjiage et Pluvinage (2000), Watanabe (2002) et Blouin (2002). Tout cela nous a guidé et nous a permis de répertorier neuf significations accordées aux fractions. Cependant, il faut noter que chaque auteur ne mentionne pas chacune de ces significations. Les significations possibles sont : Partie d'un tout (quantité continue ou un seul objet), Partie d'un tout (quantité discrète ou un ensemble d'objets), Opérateur, Rapport, Quotient, Mesure, Probabilité, Nombre sur une droite numérique et Nombre. Nous avons décidé de conserver toutes ces significations pour notre recherche.

L'ensemble des éléments qui composent notre approche théorique nous amène à poser les questions spécifiques de notre recherche ; ce sont les suivantes :

- Quelles significations de la fraction sont en jeu dans les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 ? Quels liens et distinctions entre ces deux niveaux scolaires CM1 et CM2 pouvons-nous identifier ?
- De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ?

6.4. Hypothèses de la recherche

Pour répondre aux questions spécifiques de recherche, les trois hypothèses suivantes sont formulées :

1. La signification de la fraction la plus présente est, dans les manuels de CM1, celle de *Partie d'un tout*, et dans les manuels de CM2 celle de *Nombre*.

2. La signification de la fraction la plus présente, chez les élèves de CM1 et de CM2, est celle de *Partie d'un tout*.

3. Les significations de la fraction les plus présentes dans les manuels scolaires choisis, sont celles que les élèves ont le plus de facilité à illustrer correctement, tandis que celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer.

Après ces premières précisions apportées à propos du cadre théorique sur lequel sont construites les bases de cette recherche et à propos du cadre problématique de la recherche, nous revisitons maintenant la méthodologie suivie pour construire, traiter et analyser les données utiles à cette recherche.

PARTIE III : Méthodes de construction des données, traitements, analyses, interprétations des résultats et discussion

Cette troisième partie représente la partie empirique de notre recherche, celle-ci concerne la procédure de la recherche. Elle aborde cet aspect depuis les méthodes utilisées pour la construction de nos données jusqu'à l'interprétation des résultats obtenus à travers ces données collectées. Pour suivre ce parcours, cette partie possède trois chapitres.

Le premier chapitre vise, d'abord, à présenter le cadre général de la mise en œuvre de la méthodologie sur la construction des données, il détaille les méthodes et les techniques retenues pour la construction des données et puis il précise les caractéristiques des manuels scolaires choisis, de la population-cible des élèves et de la population-cible des enseignants.

En ce qui concerne *le deuxième chapitre*, celui-ci vise, en premier lieu, à présenter le plan général suivi pour analyser les données collectées par les trois méthodes appliquées dans notre recherche, à savoir la grille d'analyse appliquée sur les manuels scolaires et les deux questionnaires destinés aux élèves de CM1 et de CM2 et à leurs enseignants, en second lieu, à présenter les résultats de cette analyse effectuée sur les manuels scolaires choisis, sur les réponses des élèves interrogés sur le questionnaire passé auprès d'eux et sur les réponses fournies par les enseignantes des élèves interrogés.

Le troisième chapitre concerne l'interprétation des résultats obtenus de la recherche ; celui-ci permet d'apporter une réponse aux objectifs de la recherche en faisant un retour sur les questions spécifiques de la recherche et sur les hypothèses formulées dans cette recherche.

1. Méthodes de construction des données

Ce chapitre vise à présenter d'abord le cadre général de la mise en œuvre de la méthodologie sur la construction des données de la recherche, il détaille les méthodes et les techniques retenues pour la construction des données et puis il précise les caractéristiques des manuels scolaires choisis, de la population-cible des élèves et de la population-cible des enseignants.

1.1. Point de vue sur des questions méthodologiques de la recherche

En ce qui concerne les questions méthodologiques, nous adoptons le point de vue de Jean-Claude Régnier (Régnier, 2013) exposé lors d'un séminaire du réseau RESEIDA : « Au sein de diverses communautés scientifiques, il est volontiers admis que, si les recherches s'inscrivent toujours dans des perspectives épistémologiques que les chercheurs s'efforcent d'expliciter au mieux, il convient aussi de reconnaître la nécessité de considérer avec précaution les dimensions méthodologiques. Parmi les méthodes, entendues dans un sens inspiré par l'étymologie de chemin pour parvenir à un but, celles qui touchent à la construction de données valides, fiables et pertinentes requises par la résolution de la problématique, elle-même construite dans un cadre théorique choisi, nous apparaît un point clé de la conduite d'une recherche de nature scientifique. Un usage fait que ces méthodes sont souvent qualifiées, ainsi peut-on lire : méthodes qualitatives, méthodes quantitatives. Les données sont elles aussi qualifiées de quantitatives et de qualitatives. Pour notre part, si nous parvenons à peu près à identifier les critères qui caractérisent les données quantitatives et les données qualitatives, il nous semble beaucoup plus confus en ce qui concerne la qualification des méthodes. En prenant comme exemple les cours universitaires de méthodologie, il ressort grossièrement que les méthodes quantitatives sont associées aux enquêtes par questionnaire et les méthodes qualitatives, aux enquêtes par entretien. À cette dichotomie est associée une forte opposition entre le qualitatif et le quantitatif qui pousse les chercheurs à déclarer le champ dans lequel ils doivent se situer. Pour situer notre propos, nous considérons que ce débat qui oppose les tenants du quantitatif aux tenants du qualitatif, fondé sur des confusions avec la nature des données en jeu mais aussi sur les rapports établis avec les mathématiques qui sont un domaine au sein duquel il faut puiser des ressources, nous paraît complètement stérile et propice à une grande perte de temps. Dit autrement, le qualitatif et le quantitatif sont toujours présents dans les travaux de recherche et il convient d'exploiter au mieux leurs complémentarités. Nous pensons que les travaux portant sur des problématiques centrées sur les inégalités et les processus différenciateurs à l'école et sur les contextes d'apprentissage n'échappent nullement à ces questions méthodologiques. À côté des méthodes de construction, viennent les méthodes de traitement et d'analyse des données construites. Celles-ci bénéficient d'un cadre théorique d'appui d'une grande richesse qu'est la statistique et les outils informatiques qui facilitent les traitements et les analyses, même les plus sophistiquées. Toutefois, il ne faut pas oublier qu'après la réalisation de ces traitements et analyses, il revient au chercheur de produire in fine les interprétations dans le contexte du cadre théorique au sein duquel il a posé la problématique qu'il tente de résoudre. Nous n'ignorons pas toutefois combien nombre d'usagers, à l'image de ce que constate le rapport de l'Académie de Sciences en 2000, sont confrontés à divers types de problèmes soulevés par la formation en statistique requise pour un usage éclairé »

1.2. Réflexion méthodologique sur la construction des données

Dans le cadre de cette recherche, il nous a fallu construire des données qui permettent d'étayer les réponses hypothétiques formulées à l'égard des questions que nous nous sommes posées. Pour la mise à l'épreuve des hypothèses, nous avons eu recours, en premier lieu, à l'application d'une grille d'analyse sur des manuels scolaires de mathématiques de CM1 et de CM2 et, en second lieu, deux enquêtes par questionnaire, un destiné aux élèves de ces niveaux et l'autre aux enseignants des classes concernées.

Nous allons commencer cette réflexion sur la méthodologie de la construction des données en présentant le cadre général de la mise en œuvre de cette méthodologie. Puis, nous allons préciser les caractéristiques des manuels scolaires choisis, de la population-cible des élèves et de la population-cible des enseignants.

1.3. Le cadre général de la mise en œuvre de la construction des données

Premièrement, une grille d'analyse a été appliquée sur un échantillon de 10 manuels scolaires des mathématiques : 5 de CM1 et 5 de CM2 issus de 3 collections différentes. Deuxièmement, un questionnaire à passer auprès d'un échantillon composé de 275 élèves : 160 de CM1 et 115 de CM2 issus de 12 classes situées dans 9 écoles primaires localisées sur Lyon et ses environs et, troisièmement, un questionnaire destiné à notre échantillon constitué des enseignants des classes concernées participant à l'étude qui ont bien voulu répondre, soit huit enseignants. Les deux échantillons élèves et enseignants sont dépendants dans la mesure où il s'agit des élèves de CM1 et CM2 et de leurs enseignants.

Cette méthodologie de construction des données se déroule en trois temps principaux :

- Dans un premier temps, de janvier à mai de la même année 2013, il s'agit d'effectuer une analyse en utilisant une grille déjà établie sur toutes les activités mathématiques : exemples, exercices et problèmes à résoudre portant sur les fractions dans des manuels scolaires des mathématiques de CM1 et de CM2 du primaire afin de déterminer et exploiter les différentes significations de la fraction présentes à l'intérieur de ces manuels.
- Dans un deuxième temps, en juin de la même année, il s'agit de passer un questionnaire écrit auprès des élèves de CM1 et de CM2. Le but de celui-ci est d'étudier les apprentissages réalisés par ces élèves, à la fin de l'année scolaire, concernant le concept de fraction (en particulier, quelle compréhension manifestent ces élèves des différentes significations de la fraction ?) et de recenser les traces écrites intermédiaires produites lors de la réponse aux questions, établies sur les différentes significations possibles attribuées à la fraction, posées dans le questionnaire.
- Pour tenter de mieux comprendre le sens des réponses issues des questionnaires passés aux élèves, dans un troisième temps, en juin 2013, un questionnaire écrit destiné aux enseignants des classes concernées pour caractériser les pratiques mises en œuvre par ces derniers lors de la préparation et la programmation des cours sur l'enseignement des fractions à leurs élèves dans les classes.

1.4. Les instruments de la construction des données

Dans cette section, nous allons décrire les outils utilisés pour notre recherche. Nous allons d'abord justifier le choix de ses outils afin d'aider à mieux comprendre pourquoi ils ont été élaborés de cette manière. Nous en ferons ensuite une description détaillée.

1.4.1. Construction des données par une grille d'analyse des manuels scolaires

Nous allons, tout d'abord, justifier notre décision concernant l'analyse des manuels scolaires de CM1 et de CM2. Ensuite, nous allons présenter les manuels scolaires de mathématiques choisis pour les analyser et enfin, nous allons décrire l'outil utilisée pour la construction de nos données concernant les manuels choisis dont la grille d'analyse.

1.4.1.1. Vers l'analyse de manuels scolaires

Le temps d'expérimentation et l'importance des multiples difficultés rencontrées ne l'ayant pas permis jusqu'ici, nous projetons de nous en saisir ultérieurement pour valider, invalider, modérer et compléter les résultats obtenus à l'issue de cette étude. Nous avons constaté qu'il était bien difficile de savoir ce qui se passait réellement dans une classe et que les propos de chaque maître pouvaient tout aussi bien amplifier ou minimiser la réalité. La recherche portait sur l'étude des manuels scolaires de CM1, qui correspond au deuxième niveau de cycle III, et de CM2, qui termine ce cycle et le cursus en école primaire.

Une autre raison qui a motivé notre décision pour le choix de ces méthodes de construction de nos données, par exemple, mais sans s'y limiter, est le refus des enseignants de nous recevoir dans leurs classes pour effectuer des observations. Nous avons envoyé des courriers à 23 écoles. Aucun enseignant n'a accepté ; des enseignants donnaient une raison selon laquelle ils passent beaucoup de temps à la préparation des cours, certains d'entre eux ont dit qu'ils n'auraient pas de temps pour répondre au questionnaire. Trois enseignants ont exprimé explicitement leur manque d'intérêt pour l'objet de notre recherche et les résultats attendus, en disant que ce type de recherches demeure une recherche théorique, et que peu *d'enseignants* s'y intéresseront. Les enseignants disent appliquer leurs propres méthodes ou prendre peu en considération les conseils ou les suggestions qui découlent des recherches ; chaque enseignant possède sa propre manière d'enseigner, soulignant que l'application ou le travail sur le terrain diffère de ce que les études théoriques font.

Du fait des diverses difficultés rencontrées pour questionner les représentations et les pratiques des enseignants du cycle 3 dans leur rapport à l'enseignement des fractions, particulièrement ce qui concerne la présentation effective des différentes significations de la fraction dans la classe, nous avons été conduit à revenir à une analyse des manuels scolaires pour traiter des contenus d'enseignement effectivement transmis aux élèves. En effet, le document intitulé « Études exploratoires des pratiques d'enseignement en classe de CE2 » (Dossier DEP, n°44, septembre 94) portant sur les pratiques d'enseignement en classe de CE2 menée par la Direction de l'Évaluation et de la Prospective (94/95), montrait à l'époque que le manuel restait le seul outil utilisé par la très grande majorité des enseignants pour préparer leurs séquences de mathématiques.

1.4.1.2. Choix des manuels scolaires

Comme précision, pour mener à bien cette recherche, nous voulons, tout d'abord, noter que les manuels retenus furent entièrement étudiés, pour relever toutes les sollicitations de l'élève traitant de l'analyse de situations concernant les apprentissages des fractions. Chaque question repérée, était considérée comme une nouvelle sollicitation.

Quelle fut alors la méthode de recherche déployée ? La pertinence de cette recherche aurait dû englober tous les manuels utilisés par les élèves et ceci durant les deux années de scolarisation (CM1 et CM2) constituant les deux derniers niveaux de cycle III de l'école primaire. Devant l'ampleur nécessitée par ce travail pour mettre en place une telle observation, nous avons décidé de la réduire à un échantillon de 10 manuels de mathématiques ; 5 de CM1 et 5 de CM2. En effet, le CM2 est le niveau de classe qui est certainement le plus représentatif de la phase des acquisitions de ce cycle concernant les différentes significations possibles de la fraction. Le CM2 permet d'aborder et de récapituler les apprentissages des notions présentes chez les élèves du cycle III car, comme nous le savons, ce niveau représente le dernier stade de ce cycle de l'école primaire et la liaison avec le collège, alors que la classe de CE2, en début du cycle 3, assure le rôle de passage inter cycle et celle de CM1 permet d'aborder des nouveaux apprentissages sur les fractions. Le champ d'observation a porté sur une partie de l'ensemble des manuels en dépôt à l'IUFM de Lyon au moment de cette étude. Nous nous fixions comme objectif d'observer les situations problèmes qui impliquent des exercices, des exemples et des problèmes à résoudre de la part des élèves à propos des fractions. Les 10 manuels concernés (5 manuels de CM1 et 5 de CM2) correspondaient à ceux qui étaient les plus empruntés. L'analyse de cinq manuels scolaires par niveau est convenable, nous semble-t-il, puisqu'elle pourra donner une bonne vision des significations offertes à propos des fractions. Voici la liste des manuels étudiées en CM1 et en CM2, rangés selon le nombre d'emprunts de ces manuels (rappelons aussi que ce sont les ouvrages étudiés) :

TABLEAU 10– LISTE DES MANUELS DE CM1 ETUDIES.

Titre des ouvrages de CM1	**éditeur**	**Année de parution**
Outils pour les maths	Magnard	2011
Euro Maths	Hatier	2009
Cap maths	Hatier	2010
J'apprends les maths	Retz	2010
La tribu des maths	Magnard	2009

TABLEAU 11– LISTE DES MANUELS DE CM2 ETUDIES.

Titre des ouvrages de CM2	éditeur	Année de parution
Outils pour les maths	Magnard	2011
Euro Maths	Hatier	2009
Cap maths	Hatier	2010
J'apprends les maths	Retz	2010
La tribu des maths	Magnard	2010

L'analyse ayant eu lieu durant l'année scolaire 2013/2014, ces manuels reposaient sur le programme de 2008.

1.4.1.3. Construction de la grille d'analyse

Afin d'évaluer l'importance prise par chaque signification de la fraction dans cinq manuels de CM1 et dans cinq manuels de CM2, une grille d'analyse a été utilisée pour réaliser cet objectif. Pour ce faire, les problèmes ou les activités, portant sur les fractions, proposés dans ces manuels ont été catégorisés par les significations des fractions selon les définitions retenues de ces significations.

Nous avons déjà vu que nous pouvons donner plusieurs significations à une écriture fractionnaire : Partie d'un tout (quantité continue), Partie d'un tout (quantité discrète), Opérateur, Mesure, Quotient, Rapport, Nombre, Nombre sur une droite graduée et Probabilité. Une grille d'analyse a été utilisée afin de voir l'importance que chaque signification de la fraction prend dans les manuels scolaires choisis de quatrième année et de cinquième année de primaire.

Notre première question de recherche vise à vérifier quelles significations de la fraction sont présentes dans les diverses situations d'apprentissage (exemples, exercices et problèmes) proposées dans les manuels scolaires de CM1 et CM2.

En fonction de l'un des objectifs de ce travail, c'est-à-dire d'utiliser une grille d'analyses pour déterminer les significations de la fraction offertes dans les manuels scolaires, notre travail consiste essentiellement à mieux comprendre comment l'enseignement des fractions est pris en charge par des manuels scolaires disponibles sur le marché de l'édition scolaire en France.

Pour effectuer cette analyse des manuels scolaires des mathématiques de CM1 et de CM2, nous utilisons une grille d'analyse où toutes les significations sont mentionnées. Les significations de la fraction retenues sont celles que nous avons déjà définies et expliquées dans la partie théorique. Nous exposons, au-dessous, cette grille d'analyse :

TABLEAU 12– GRILLE D'ANALYSE DES MANUELS SCOLAIRES.

	Titre du manuel scolaire :								
	Significations de la fraction								
	Partie d'un tout	Partie d'un ensemble	Opérateur	Rapport	Quotient	Mesure	Nombre sur droite numérique	Nombre	Probabilité
Nb de caractéristiques des exercices									
Nb de caractéristiques des exemples									
Nb de caractéristiques des problèmes à résoudre									
Nb total des activités relatif à chaque signification									
Pourcentage du nombre total des activités relatif à chaque signification au nombre total des activités portant sur les fractions dans le manuel									
Place accordée à chaque signification (Rang)									
Nombre total des activités analysées portant sur les fractions dans le manuel :									

Cette grille nous a aidé à faciliter la compilation et l'analyse des données. Grâce à celle-ci, nous pouvons également comparer les manuels selon les significations présentes à l'intérieur de ces derniers. Nous expliquerons plus loin davantage la méthode employée pour analyser ces manuels choisis.

Une analyse des manuels scolaires nous permet à la fois de déterminer les significations présentes dans ces manuels et de nous aide à nous familiariser avec ces significations. Cela va nous faciliter ensuite la tâche pour élaborer les questions pour le questionnaire écrit destiné aux élèves. Cette analyse sert de support à l'analyse des questionnaires pour catégoriser les réponses obtenues aux questions et pour mieux comprendre les difficultés des élèves.

1.4.2. Construction de données par une enquête par questionnaire

Nous allons, tout d'abord, justifier le choix du questionnaire comme outil pour la collecte de données auprès de notre échantillon d'élèves de CM1 et de CM2. Ensuite, nous allons présenter et expliquer les questions constituant ce questionnaire. Puis, nous allons décrire l'échantillon des élèves répondant au questionnaire et enfin,

1.4.2.1. Choix du questionnaire écrit comme outil de collecte des données auprès des élèves

Le questionnaire est un moyen rapide de collecte de données, il se remplit en un temps assez court puisqu'il ne comporte généralement qu'une dizaine de questions. Nous avons donc choisi le questionnaire, qui sera présenté plus loin, qui se distingue de ce qui est habituellement utilisé dans ce genre d'étude, celui de questionnaire écrit. Souhaitant travailler avec le plus grand nombre possible de participants en peu de temps, nous avons construit un questionnaire sous forme écrite. Un questionnaire écrit portant sur les différentes significations de la fraction adressé aux élèves de CM1 et de CM2 du primaire servira, en effet, à répondre à la deuxième question de notre recherche, soit « De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ? ».

Nantais (1983) précise que les tests écrits sont la méthode classique la plus répandue en didactique des mathématiques. Selon Nantais, ils permettent souvent de déduire la pensée de l'enfant. En outre, le questionnaire permet d'obtenir des informations précises et simples qui sont comparables étant donné que les questions sont les mêmes pour tous.

Cette technique pour construire les données nous a semblé tout à fait adaptée. Régnier (2004) parle de l'importance de cet outil en mettant en avant quelques aspects que nous devons prendre en considération avec rigueur tels que l'élaboration de son contenu et de sa forme, l'anticipation de son application et de son traitement. Nous avons choisi des questions fermées et des questions ouvertes. Dans ce processus d'élaboration de cet instrument, nous avons pris soin de respecter quelques recommandations de Régnier (2004), en particulier les trois étapes importantes :

a) Forme : sa structure, comment le questionnaire doit être représenté ; la formulation, le nombre, l'ordre et le format des questions ; son adaptation à des traitements assistés par ordinateur.

b) Contenu : pertinence de l'objet des questions

c) Passation : mode, échantillonnage des sujets.

De plus, le questionnaire reste l'un des moyens les plus utilisés mais qui exige des efforts et des compétences fondamentales de la part du chercheur comme le rappellent divers auteurs (Mucchielli, 1990, p. 9-10 ; Albarello et Charlier, 2010, p. 22 ; Ganassali et Moscarola, 2007). Nous nous sommes efforcé d'utiliser le questionnaire pour la construction des données, de suivre un ensemble d'étapes considérées comme nécessaires. La prise de conscience de telles contraintes est un point fort pour limiter les difficultés qui surgissent lors du traitement et de l'analyse des données qui peuvent être, de ce fait, anticipées.

TABLEAU 13– QUELQUES PRECAUTIONS A PRENDRE POUR L'ELABORATION D'UNE ENQUETE PAR QUESTIONNAIRE.

Définition de l'objet et étude des moyens matériels (contraintes de budget et de temps) ;
Préparation générale de l'enquête, appelée la pré-enquête ;
Détermination des objectifs et hypothèses de l'enquête ;
Détermination de la population d'enquête ;
Détermination de l'échantillon, et échantillonnage proprement dit ;
Choix des techniques à utiliser et rédaction du projet de questionnaire ;
Pré-test ou mise à l'épreuve du projet de questionnaire ;
Rédaction définitive du questionnaire ;
Choix du mode d'administration ;
Passation du questionnaire auprès de l'échantillon selon le protocole défini ;
Anticipation du dépouillement et des codages des réponses.

Se posent alors plusieurs questions :

- Comment ce questionnaire avait-été-t-il construit ?
- Quelles sont les questions qui composent le questionnaire ?
- A qui était-il adressé ?
- Et comment l'avons-nous géré auprès des élèves ?

Dans la section suivante, nous présentons la construction et l'explication du questionnaire destiné à notre échantillon d'élèves.

1.4.2.2. Construction et explication du questionnaire destiné aux élèves

En premier lieu, le questionnaire créé **(Annexe 6)** est inspiré de plusieurs sources : Blouin (2002) ; Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert (2001) ; Manuels scolaires ; des activités proposées par Guy Brousseau ; des exercices diffusés sur des sites Internet. En ce qui concerne la construction du questionnaire, nous tentons de nous assurer de l'adéquation du niveau du vocabulaire ; nous procéderons également à divers ajustements pour que les questions puissent être convenablement interprétées par les participants et pour que leurs réponses fournissent la matière attendue qui permettra de répondre aux questions de recherche. Le but de ce questionnaire est de déterminer les différentes significations de la fraction utilisées par les élèves de CM1 et CM2 du primaire, de connaître comment ces élèves illustrent les fractions et de mettre en évidence leur compréhension.

Nous avons deux groupes d'élèves différents (CM1 et CM2). Afin d'éviter de soumettre nos participants à un questionnaire trop long, nous avons choisi les critères les plus importants et les mieux adaptés à leur âge et à leur niveau scolaire. Nous avons pensé adapter ce même questionnaire pour les deux niveaux en gardant toujours les mêmes questions.

L'analyse des contenus des manuels scolaires a mis en évidence différentes significations de la fraction dans des situations concrètes d'apprentissage. Fort de cela, nous avons élaboré notre questionnaire.

Différentes questions mettant en œuvre les fractions ont été créées. Certaines d'entre elles ont été d'abord proposées afin de reconnaître quelles significations les élèves choisissent pour définir une fraction, pour donner un exemple où nous pouvons utiliser les fractions dans la vie courante et pour illustrer une fraction donnée. Ensuite, les questions restantes spécifiques portent sur les différentes significations de la fraction.

Les thèmes des questions proposées dans le questionnaire sont les suivants :

1. définir la fraction (savoir quel sens l'élève utilise pour définir la fraction) ;
2. donner un exemple où on utilise les fractions dans la vie courante ;
3. représenter une fraction donnée ;
4. en comptant sur le sens de la fraction en tant qu'une partie d'un tout,
5. en comptant sur le sens de la fraction en tant qu'une partie d'un ensemble ;
6 en comptant sur le sens de la fraction en tant qu'un nombre sur une droite numérique ;
7. en comptant sur le sens de la fraction en tant qu'une mesure ;
8. en comptant sur le sens de la fraction en tant qu'un quotient ;
9. en comptant sur le sens de la fraction en tant qu'un opérateur ;
10. en comptant sur le sens de la fraction en tant qu'un rapport.

En ce qui concerne l'explication du questionnaire établi, nous allons maintenant aborder chacune des questions qui le composent. Pour chacune, nous indiquons la source de la question, ou encore la source de notre inspiration, ainsi que le but de la question. De plus, nous expliquons le choix des fractions composant le questionnaire ainsi que le choix de la forme. Enfin, nous posons des hypothèses à propos des réponses que les élèves peuvent donner et des procédures que les élèves peuvent utiliser. Le temps total pour répondre au questionnaire était d'environ entre trente et quarante minutes. L'élève inscrit simplement sa réponse sur le questionnaire et laisse, s'il le désire, des traces de sa démarche de calculs.

Abordons la raison pour laquelle nous n'avons pas posé de question à propos de la signification *probabilité.* Dans un premier test, nous avions soumis le même questionnaire, incluant une question sur la signification « probabilité », à 10 élèves, 6 de CM2 et 4 de CM1, mais aucun d'entre eux n'a répondu à cette question. C'est pourquoi nous avons décidé de ne pas poser une question sur cette signification dans la version définitive de notre questionnaire. Si nous voulions justifier notre choix, nous pourrions dire que cette signification est très difficile pour les élèves et que nous pourrions l'enseigner en stade avancé de la scolarité, par exemple en 6ème ou même après. Les élèves de CM1 et de CM2 ne sont pas encore confrontés aux notions de probabilité.

1.4.2.3. Choix des élèves soumis à l'enquête par questionnaire (échantillon-élèves)

L'enseignement formel des fractions débute véritablement en troisième cycle de l'école primaire en France, soit en 4ème année (CM1). Le passage de CE2 à CM1 est marqué pour ces élèves par l'introduction de la notion de fraction. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises dans la partie théorique, certains élèves vivent mal ce passage et éprouvent des difficultés importantes dans le développement des connaissances qui se rapportent au champ conceptuel des structures multiplicatives et, en particulier, celles qui se rapportent à la notion de fraction.

En ce qui concerne le mode de la constitution de l'échantillon des élèves participant à la recherche, dans la pratique, il est souvent difficile de disposer d'une liste exhaustive et juste de la population. Dans ce cas, nous procéderons à des échantillonnages qualifiés d'empiriques ou de pragmatiques qui ne se réfèrent pas à des principes et calculs de probabilité. En conséquence, il est alors plus risqué de généraliser à la population de référence les résultats obtenus au niveau de l'échantillon. Le plus couramment, nous effectuons un *échantillonnage par convenance*. Nous rechercherons des « unités » présentant les critères importants pour l'étude réalisée avec le but de rendre homogènes les participants. Le choix des participants, pour qu'ils fassent partie de l'échantillon, est fonction de leur pertinence par rapport aux objectifs de l'enquête plutôt que par souci de représentation statistique, les répondants de l'enquête sont alors sélectionnés par contact ou lorsque l'occasion se présente. Il n'existe pas une opportunité réelle dont un élément particulier de la population peut être choisi. Par conséquent, nous ne pouvons pas calculer l'erreur d'échantillonnage qui peut arriver.

Dans cette recherche, nous avons choisi l'échantillonnage de convenance, comme son nom l'indique, les échantillons sont choisis par la convenance du chercheur. Dans celle-ci nous ne spécifions pas clairement la population dont nous avons pris l'échantillon réel.

L'enquêteur peut affirmer que son échantillon représente la communauté, mais nous voyons clairement qu'il est dans une erreur. La majorité des membres de la communauté n'ont pas l'opportunité d'être choisis. Seulement, ceux qui se trouvent à la portée de l'enquêteur ou dans l'emplacement, où nous réalisons l'enquête, ont l'occasion d'être choisis. De plus, nous ne connaissons pas la probabilité précise de ces personnes pour pouvoir être choisies. Dans un tel cas, nous ne connaissons pas la différence entre la valeur d'intérêt de la population et la valeur de l'échantillon, en termes de taille et de direction. La taille d'un échantillon de convenance dépend de critères reposant sur des impératifs liés à la population ciblée, au contexte dans lequel on recueille les données, au temps disponible pour l'enquête. Nous ne pouvons pas mesurer l'erreur d'échantillonnage, ni faire des affirmations définitives ou concluantes sur les résultats dérivés de l'échantillon. L'échantillonnage par convenance, même s'il est très courant, fait courir le risque d'obtenir des résultats contingents, c'est-à-dire, liés à l'échantillon et donc non généralisables.

Quant à la population étudiée, pour garder la plus grande pertinence, validité et fiabilité possible, le choix s'est porté sur des écoles primaires situées dans la ville de Lyon et ses environs. Des difficultés massives, parfois incontournables, furent au rendez-vous. Malgré toutes les précautions prises, des vingt-cinq écoles contactées au hasard, bien peu de réponses arrivèrent en retour ! Après multiplication des contacts directs ou téléphoniques et une relance par courrier à notre initiative, très peu de situations se sont débloquées. Il fut donc décidé de bâtir le travail de recherche sur les seules réponses reçues (9 écoles primaires ; 275 élèves ; 160 de CM1 et 115 de CM2) ; les très fortes difficultés rencontrées pour recueillir des réponses des élèves prouvaient d'une certaine manière déjà comment enseignants et élèves ont des difficultés dans l'apprentissage de cette notion mathématiques, les fractions.

Les participants à notre étude sont des élèves et leurs enseignants. Ci-après, nous allons décrire en détail les caractéristiques de notre échantillon d'élèves qui appartiennent à douze classes issues de neuf écoles françaises, sept classes de CM1 et cinq de CM2. Pour notre recherche, nous travaillerons avec des élèves de niveaux CM1 et CM2 qui représentent les deux derniers niveaux du primaire en France.

Le tableau suivant présente la répartition des élèves de CM1 et CM2 par *école* et *classe*.

TABLEAU 14– EFFECTIFS DE NOTRE ECHANTILLON : REPARTITION PAR ECOLE ET CLASSE.

Niveau d'enseignement	Ecole	Nombre des classes dans chaque école	Nombre des élèves retenus	Nombre des élèves en chaque niveau d'enseignement
CM1	B	1	27	160
	C	1	18	
	D	1	32	
	E	2	48	
	F	1	14	
	H	1	21	
CM2	A	1	28	115
	C	1	19	
	D	1	28	
	G	1	20	
	I	1	20	
Total	9 écoles	12 classes 7 CM1 et 5 CM2	275	275

Au total, 275 élèves du cycle 3 ont été interrogés : 160 de CM1 et 115 de CM2. Ils sont répartis dans 12 classes (7 classes CM1 et 5 de CM2). Les données quantitatives recueillies concernent les 275 élèves. Cet échantillon est un échantillon probabiliste, nous ne choisissons pas les écoles nous-mêmes où nous faisons remplir les questionnaires. En effet, étant donné que le nombre d'élèves n'est pas le même pour les deux niveaux scolaires, le pourcentage est choisi pour comparer les résultats obtenus. Comme il y a une différence visible entre le nombre d'élèves de CM1 et de CM2, la comparaison effectuée avec les pourcentages demeure fiable.

1.4.2.4. Description de l'échantillon-élèves

Le tableau 15 présente les variables retenues pour caractériser notre échantillon d'élèves.

TABLEAU 15– CODAGE DES CARACTERISTIQUES DES ELEVES

Colonne	Libellé	Observations
1	Individus	Les 275 individus sont identifiés par les codes suivants : Ind 001, Ind 002, ..., Ind 275
2	Ecole	L'école d'appartenance de chaque individu est codée de A à I (9 écoles).
3	Niveau d'enseignement ou classe d'appartenance	La classe d'appartenance de chaque individu du niveau CM1 est codée par CM1. La classe d'appartenance de chaque individu du niveau CM2 est codée par CM2.
4	Sexe	Le sexe masculin est codé par 1. Le sexe féminin est codé par 0.
5	Date de naissance	La date de naissance est codée par le triple 00/00/00 correspondant à jour/mois/année de naissance

1.4.2.5. Passation du questionnaire auprès des élèves

L'outil élaboré est établi sous la forme d'un questionnaire écrit. Cette méthode présente l'intérêt de pouvoir concerner et traiter un grand nombre de réponses. L'un des avantages de l'utilisation d'un questionnaire écrit est de permettre au participant, si la question posée à lui n'est pas claire, de demander des éclaircissements à la personne qui l'interroge. Pour ne pas perdre de tels avantages en passant au questionnaire écrit, nous avons pris la peine de superviser nous-mêmes la passation des questionnaires et de regarder rapidement les réponses fournies. De même, les élèves interrogés avaient toujours la possibilité de lever la main et de faire préciser le sens des questions qui n'étaient pas claires à leurs yeux. Pour éviter que les élèves soient trop déstabilisés par rapport aux questions du questionnaire, avant de commencer la passation, nous avons expliqué la nature du questionnaire et pendant l'examen, nous avons clarifié ou expliqué, à la demande des élèves, les points ambigus.

En dernier ressort, que ce soit dans les procédures de recueil des données ou dans l'explication de questions (termes utilisés, présentation, items choisis, etc.), il a fallu expérimenter plusieurs versions successives du questionnaire. 4 élèves de CM1 et 6 de CM2 ont été sollicités pour répondre à une première version du questionnaire afin de ne pas conserver des problèmes durant l'application dans la classe comme par exemple (des mots incompréhensibles ou difficiles, des notions qui n'ont pas encore présentées aux élèves pendant les cours, etc...). Deux enseignants, un de CM1 et l'autre de CM2 qui ont été informés du contenu du questionnaire ont fait des remarques et propositions que nous avons bien prises en considération pour développer la version finale du questionnaire.

Le questionnaire a été présenté aux sept classes de CM1 et aux cinq classes de CM2 issues de neuf écoles différentes, ce qui fait un total de 275 élèves. Les données quantitatives et qualitatives recueillies concernent les 275 élèves. Le choix des classes de CM1 et de CM2 a été fait sur base des programmes et des coutumes scolaires qui se concrétisent par une intensification de l'apprentissage des fractions à partir du CM1. Il ne faut cependant pas sous-estimer les apprentissages réalisés durant les années précédentes : même s'ils sont moins systématiques, l'impact de ceux-ci en termes de construction des premières représentations des fractions pourrait bien avoir une influence importante durant la suite du cursus.

Le questionnaire a été passé en fin d'année scolaire, au mois de juin, afin de pouvoir mesurer où en sont les élèves à la fin du primaire à l'égard de l'apprentissage des fractions ; il a été soumis aux élèves en un temps de 40 minutes, lors de la même journée durant le mois de juin.

1.4.3. Enquête par questionnaire écrit auprès des enseignants

Nous avons choisi de focaliser notre étude sur le concept de fraction, il nous est apparu, en effet, plus raisonnable et utile de considérer la vision qu'ont les maîtres sur l'enseignement/apprentissage de la fraction. Nous présentons, ci-après, l'outil d'investigation *un questionnaire,* que nous avons utilisé pour obtenir des éléments sur cet aspect. Nous justifions notre choix, mettons en évidence la construction et l'explication de ce questionnaire et le choix des enseignants à interroger.

1.4.3.1. Choix de l'enquête par questionnaire auprès des enseignants

Une première approche, que nous avons pensée à utiliser pour recueillir des données, est de procéder à des entretiens auprès d'enseignants, mais, nous avons été bloqués par le refus absolu de la part des enseignants qui donnaient des prétextes comme le peu de disponibilité ; seulement un enseignant de CM2 a accepté, or il nous fallait disposer d'un nombre suffisant de participants et les interroger dans les meilleures conditions possibles. Il a alors été décidé de reprendre, pour cette partie de l'enquête, le type de démarche utilisée auprès des élèves et de recourir à un questionnaire écrit portant sur leurs façons d'aborder la fraction et sur certaines de leurs actions. Le questionnaire a été préparé à partir des questions qui ont été formulées pour obtenir les informations nécessaires de manière à ce que les enseignants ne se sentent pas évalués. Pour ne pas décourager nos participants, nous avons choisi de les interroger de la manière la plus simple possible sur leur pratique, sur leurs façons de faire, sans doute les meilleurs révélateurs de leur manière de concevoir l'enseignement de la fraction. De plus, ce questionnaire était destiné à nous aider à répondre à la question posée à propos de l'enseignement du concept de fractions au cycle III du primaire.

1.4.3.2. Construction et explication du questionnaire

Ce questionnaire, donné en **(Annexe 7)** comprend deux parties. Dans la première, nous avons demandé aux enseignants des renseignements généraux concernant leur sexe, leur âge, leur ancienneté dans l'enseignement ainsi que le niveau scolaire dans lequel ils enseignent, etc. La deuxième partie porte sur l'enseignement de la fraction : comment l'abordent-ils ? Comment évaluent-ils les connaissances qu'ont les élèves des fractions ? Quels modes de représentation privilégient-ils ? Leurs réponses à ces questions doivent fournir un bon aperçu de leur manière de travailler en classe et nous permettre de caractériser leurs façons de faire avec les élèves : leur approche est-elle magistrale ou laisse-t-elle de la place à l'élève ?

1.4.3.3. Choix des enseignants soumis à l'enquête par questionnaire (échantillon-enseignants)

Notre étude vise aussi à explorer brièvement les façons de faire des enseignants dans l'enseignement de la fraction, ce, en lien avec notre préoccupation concernant la l'apprentissage de ce concept chez les élèves. L'échantillon des participants à cette partie de notre étude est formé d'enseignants ; il se compose de 8 personnes au total, soit quatre femmes et quatre hommes ; quatre en CM1, trois en CM2 et une enseignante en CM1CM2. Il nous faut noter que 12 classes, 7 de CM1 et 5 CM2, ont répondu à notre questionnaire ; malheureusement, seulement 8 enseignants des classes concernées ont participé et répondu au questionnaire destiné aux enseignants. Précisons tout de suite que les enseignants interrogés sont nécessairement ceux qui enseignaient aux élèves de notre échantillon précédent puisque cette partie de la cueillette des données a été réalisée au même moment que celle menée auprès des élèves.

Nous avons demandé directement et indirectement aux enseignants des classes concernées de participer à notre étude en répondant à un questionnaire écrit, seulement 8 d'entre eux ont accepté. D'une part, ils ont dit qu'ils ne sont pas beaucoup intéressés aux résultats des recherches qui restent des recherches théoriques car la pratique est différente de la théorie. D'autre part, ils ont rajouté qu'ils n'ont pas beaucoup de temps libre à consacrer pour répondre au questionnaire. Trois d'entre eux ont pris les questionnaires mais m'ont pas rendu les réponses. Au final, il n'est resté que 8 questionnaires que nous avons pu récupérer.

Les tableaux suivants présentent les variables retenues pour caractériser notre échantillon :

TABLEAU 16– CARACTERISTIQUES DE L'ECHANTILLON-ENSEIGNANTS (CLASSE CM1).

	Enseignants dans les classes CM1			
Caractéristiques (Variables retenues)	1	2	3	4
Sexe	H	H	H	F
Année de naissance	10/12/1983	11/04/1981	08/12/1979	13/02/1985
Diplôme obtenu	Licence STAPS/ CRPE (IUFM)	Licence STAPS/ CRPE (IUFM)	Maîtrise de Droit privé (Université Strasbourg III)	BAC + 3
Formation spécifique sur les fractions	Non	Non	Non	Non
Ancienneté d'enseignement en CM1	5	3	10	4

TABLEAU 17– CARACTERISTIQUES DE L'ECHANTILLON-ENSEIGNANTS (CLASSE CM2).

	Enseignants dans les classes CM2		
Caractéristiques (Variables retenues)	1	2	3
Sexe	H	F	F
Année de naissance	04/10/1978	25/01/1990	19/08/1985
Diplôme obtenu	Formation professionnelle: Brevet d'éducateur sportif-CRPE-CAFIPEMF	Licence Histoire-Master MESVC à l'IUFM de Lyon(2013)	Licence d'allemand + espagnol (IUFM)
Formation spécifique sur les fractions	Oui-IUFM	Cours de mathématiques à l'IUFM: 2h sur les fractions pour l'aspect mathématique + 2h pour l'aspect didactique	Non
Ancienneté d'enseignement en CM2	7	2	6

TABLEAU 18– CARACTERISTIQUES DE L'ECHANTILLON-ENSEIGNANTS (CLASSE CM1CM2).

	Enseignants dans les CM1 & CM2
Caractéristiques (Variables retenues)	1 enseignant
Sexe	F
Année de naissance	28/08/1982
Diplôme obtenu	Master 2 Sciences de l'Education
Formation spécifique sur les fractions	Non formation
Ancienneté d'enseignement	5

1.5. Quelques difficultés majeures rencontrées sur le terrain dans la construction des données

La construction des données requiert des conditions que les terrains explorés n'offrent pas systématiquement. Le chercheur est alors amené à déployer son ingéniosité pour parvenir à construire les données pertinentes, valides et fiables dont il a besoin. Pour notre part, nous avons dû nous confronter à la difficulté d'obtenir l'acceptation d'accès à des classes de CM1 et CM2 afin de réaliser une observation directe : parmi ceux qui travaillent dans les 25 écoles contactées par nous-mêmes (par mail, passer directement à l'école, par téléphone), aucun enseignant ni aucune enseignante n'a accepté notre intervention dans sa classe afin de réaliser une observation pendant la période où il enseigne le concept de fraction à ses élèves.

En ce qui concerne la construction des données auprès des enseignants, nous avons demandé aux enseignants des classes participantes de répondre à un questionnaire écrit : huit enseignants, parmi les douze enseignants des classes concernées, ont accepté de répondre.

Pour ce qui est de la distribution des questionnaires auprès des élèves, la modalité de passation en *face à face* a posé le problème des rendez-vous avec les enseignants ainsi que les problèmes de déplacement pour accéder aux lieux. Notre expérience ici vécue nous confirme dans cette opinion : sans parler des questions éthiques que soulèvent toujours une enquête auprès d'êtres humains, la construction des données pour des recherches dans le domaine des sciences humaines et sociales requiert de l'inventivité pour se confronter aux multiples difficultés dont le dépassement doit se faire au prix d'un minimum de contournement dans les données recueillies.

2. Traitements et analyses des données

Ce chapitre vise, en premier lieu, à présenter le plan général suivi pour analyser les données collectées par les trois méthodes appliquées dans notre recherche, à savoir la grille d'analyses appliquée sur les manuels scolaires et les deux questionnaires destinés aux élèves de CM1 et CM2 et à leurs enseignants et en second lieu, à présenter les résultats de cette analyse effectuée sur les manuels scolaires choisis, sur les réponses des élèves interrogés sur le questionnaire et sur les réponses des enseignants des classes concernées.

2.1. Plan général des traitements et analyses des données

Dans les sections suivantes, nous allons présenter le plan général suivi pour analyser les données collectées par les trois méthodes appliquées dans notre recherche, à savoir la grille d'analyse appliquée sur les manuels scolaires et les deux questionnaires destinés aux élèves de CM1 et de CM2 et à leurs enseignants.

2.1.1. Pourquoi analyser les manuels scolaires ?

Pour avancer dans nos recherches concernant l'enseignement/l'apprentissage des fractions, il serait intéressant de faire l'état de ce qu'apportent les manuels scolaires sur le sujet.

En s'intéressant à cet objet qui est le manuel scolaire, nous nous rendons compte qu'il s'agit d'un élément incontournable de l'environnement du professeur et de l'élève, et ce depuis les décrets de 1990, qui a imposé aux enseignants d'utiliser un manuel de mathématiques dans leur enseignement. Ainsi de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques, mais aussi en sciences de l'éducation, ont fait état de la forte présence des manuels à l'école primaire. D'autres recherches montrent que les manuels scolaires contiennent les savoirs mathématiques que le maître va enseigner, et ils sont vecteurs de transmission aux professeurs des écoles des résultats des recherches en didactique. Par conséquent, les manuels ont une place non négligeable dans la transposition des savoirs mathématiques.

Nous poursuivons un objectif double : comprendre l'origine des différentes difficultés rencontrées par les élèves concernant les fractions, reconnaître les acteurs qui ont un rôle dans la compréhension des élèves de certaines significations de la fraction plus que d'autres au moment d'illustrer des fractions. Nous avons décidé de mener une analyse sur différents manuels de mathématiques en CM1 et en CM2 à l'aide de la grille d'analyses déjà présentée dans le chapitre précédent. De plus, nous avons ouvert notre éventail de recherche en comparant plusieurs manuels basés sur les mêmes programmes par rapport aux significations de la fraction. Nous avons donc analysé 10 manuels (5 manuels de CM1 et 5 de CM2) relatifs au programme de 2008 et qui sont parus entre 2008 et 2013.

L'apport du cadre théorique nous a aidé dans l'étude des manuels scolaires pour constituer les données indispensables à l'analyse de notre objet de recherche portant sur l'enseignement/l'apprentissage des fractions. Nous sommes néanmoins conscients que les situations explorées, au sens de Brousseau (Brousseau, 1986), exigeraient d'être observées aussi en tenant compte des stratégies de traitement engagées par les élèves face à elles, ainsi que les intentions et remédiations apportées en parallèle par le maître.

2.1.2. Le plan général suivi pour l'analyse des manuels scolaires

Nous allons présenter le plan suivi pour analyser les manuels scolaires choisis de CM1 et de CM2. Nous commençons par la présentation de la catégorisation des réponses issues des manuels scolaires.

2.1.2.1. Catégorisation des réponses extraites des manuels

Nous avons donné à chaque manuel du niveau CM1 un nom en utilisant les lettres O1, E1, C1, J1 et T1, et pour ceux de CM2 les noms O2, E2, C2, J2 et T2 respectivement, à savoir, concernant les manuels de CM1, nous avons remplacé le manuel *Outils pour les maths* par la lettre O1, *Euro Maths* par E1, *Cap maths* par C1, *J'apprends les maths* par J1 et *La tribu des maths* par la lettre T1. Ainsi que pour les manuels de CM2 nous avons remplacé *Outils pour les maths* par la lettre O2, *Euro Maths* par E2, *Cap maths* par C2, *J'apprends les maths* par J2 et *La tribu des maths* par la lettre T2. Le tableau suivant expliquera mieux cette désignation:

TABLEAU 19– LISTE ET CODAGE DES MANUELS DE CM1ET DE CM2 ETUDIES.

Titre du manuel	**Lettres utilisées en CM1**	**Lettres utilisées en CM2**
Outils pour les maths	O1	O2
Euro Maths	E1	E2
Cap maths	C1	C2
J'apprends les maths	J1	J2
La tribu des maths	T1	T2

Le but de cette désignation est de distinguer entre ces manuels analysés ; pour éviter d'écrire chaque fois le titre du manuel, il suffit de citer et écrire l'abréviation qui le remplace.

Nous avons affecté le chiffre 1 au cours CM1, le chiffre 2 au CM2. Par exemple, la notation O1 signifie le manuel « Outils pour les maths » pour le niveau CM1, celle de O2 renvoie au manuel « Outils pour les maths » pour le niveau CM2, etc.

Une analyse menée sur les manuels scolaires est importante pour nous fournir deux types de renseignements :

- donner une bonne vision du degré d'importance accordé à chaque signification de la fraction,
- faire une comparaison entre les manuels par rapport aux significations de la fraction présentes à l'intérieur de chaque manuel étudié.

Pour mener cette analyse des manuels scolaires choisis pour notre étude, *une grille d'analyse a été construite*. Les données recueillies sont inscrites dans cette grille de manière à reconnaître l'importance de chaque signification des fractions et à comparer les manuels scolaires étudiés entre eux. Il est important de mentionner que le nombre d'activités analysées pour chaque manuel n'est pas le même ; pour chaque manuel, les activités analysées sont inscrites dans un tableau figurant en **(Annexe 3).**

TABLEAU 20– NOMBRE TOTAL DES ACTIVITES ANALYSEES DANS LES MANUELS SCOLAIRES CHOISIS.

Code et titre du Manuel	**Nb total d'activités portant sur les fractions dans les manuels de CM1**	**Nb total d'activités portant sur les fractions dans les manuels de CM2**
O_ Outils pour les maths	98	87
E_ Euro Maths	122	63
C_ Cap maths	78	60
J_ J'apprends les maths	69	66
T_ La tribu des maths	74	75

Dans chacun des manuels scolaires choisis, nous analysons toutes les activités (situations d'apprentissage proposées) qui abordent les fractions afin de répondre à notre première question de recherche « Quelles significations de la fraction sont en jeu dans les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 ? Quels liens et distinctions entre ces deux niveaux scolaires CM1 et CM2 pouvons-nous identifier ? ». L'analyse menée sur ces manuels (présentés dans le tableau 20 ci-dessus) est fondée d'une part sur la lecture de l'ensemble des situations problèmes, des exemples, des exercices et des problèmes à résoudre proposées aux élèves et d'autre part sur l'idée des différentes significations possibles accordées à la fraction qui ont été déjà présentées dans la partie théorique de notre présent travail. Elle est fondée également sur la conservation de toutes les situations qui se réfèrent à l'apprentissage des fractions. Ensuite, nous catégorisons chaque activité selon la signification appropriée parmi les huit significations que nous avons déjà définies et expliquées : Partie d'un tout (quantité continue), Partie d'un tout (quantité discrète), Opérateur, Mesure, Quotient, Rapport, Nombre, Nombre sur une droite graduée. Pour faire cette catégorisation des activités abordées dans les manuels scolaires choisis, nous nous appuyons sur les définitions et les explications données précédemment concernant les significations de la fraction, sur le contexte du problème et sur ce que les élèves ont à faire. Un exemple d'analyse d'activité pour chacun des degrés scolaires sera présenté dans le chapitre 3. Lorsque le problème comporte des sous-questions, chaque sous-question est analysée. Cependant, lorsque nous nous rendons compte que c'est toujours la même signification de la fraction qui intervient dans chaque sous-question, l'ensemble des sous-questions est considéré comme une seule activité. Dans notre analyse et nos tableaux, nous utilisons le terme activité pour identifier toutes les activités analysées (exemples, exercices, problèmes). Puisque nous nous intéressons au nombre d'activités reliées à chaque signification de la fraction, nous n'avons pas cru nécessaire de distinguer le type d'activité.

Pour chacun des manuels, la fréquence absolue d'activités sur chacune des significations de la fraction est inscrite dans le tableau. Nous calculons également la fréquence relative et nous inscrivons le rang, la place accordée, attribué à chaque signification de la fraction pour un niveau scolaire donné. Ces valeurs nous aident à établir des comparaisons entre les manuels scolaires afin de déterminer quelles significations sont les plus présentes dans chacun des niveaux scolaires. Le but de l'idée de comparer plusieurs manuels scolaires concernant les différentes significations de la fraction est d'avoir la possibilité de mieux comprendre la diversité de ce qui est proposé autant aux enseignants qu'aux élèves. Le rang nous aide d'abord à établir quelles significations sont les plus présentes dans les manuels scolaires choisis. Enfin, un test statistique, le Khi-deux, est effectué afin de valider si les différences que nous observons sont statistiquement significatives et si les résultats sont généralisables à un plus grand nombre de manuels scolaires.

2.1.3. Plan général d'analyse des réponses données par les élèves au questionnaire

Cette partie vise à présenter le plan à suivre pour analyser les réponses des élèves sur le questionnaire qui leur a été soumis **(Annexe 8)**. Dans cette analyse, nous allons déterminer les différentes significations de la fraction qui sont utilisées par les élèves de CM1 et de CM2 pour répondre au questionnaire. 160 élèves de CM1 et 115 de CM2 répondent à un questionnaire écrit. Bien que le nombre d'élèves ne soit pas le même pour les deux niveaux scolaires, le pourcentage est choisi pour comparer les résultats obtenus.

Pour effectuer cette analyse des réponses fournies par les élèves interrogés, nous avons regardé chacune des questions pour mettre en lumière les exigences et prévoir les conduites de résolution que pourront adopter les élèves, les réponses qu'ils pourront fournir. Plus explicitement, pour chacune des questions, nous avons d'abord rappelé la question posée. Ensuite, nous avons clarifié quel était notre but principal au moment où nous avons choisi de poser la question, puis nous avons expliqué le choix des fractions composant le questionnaire ainsi que le choix de la forme. Enfin, nous avons posé des hypothèses à propos des réponses que les élèves peuvent donner et des procédures que les élèves peuvent utiliser. De plus, nous avons étudié les réponses et les procédures correctes et incorrectes qui étaient utilisées par les élèves pour répondre aux questions. Les questionnaires sont interprétés selon une approche d'analyse de production d'erreurs ; selon Nantais (1983), une analyse des mauvaises réponses peut effectivement nous renseigner parfois sur la pensée de l'enfant.

Dans un premier temps, nous catégorisons les réponses fournies par les élèves par rapport aux significations de la fraction, nous les classons selon les définitions établies dans la partie théorique de notre travail. Dans un deuxième temps, les réponses données sont regroupées en tableaux par signification de la fraction. Des sous-catégories ont été introduites afin de faciliter le classement des réponses et de préciser l'analyse. Dans un troisième temps, nous établissons les fréquences des réponses afin de reconnaître l'importance de chaque signification utilisée par les élèves. Ainsi, pour chaque question, il est mentionné le nombre de réponses données par les élèves qui se sont référés à chacune des significations de la fraction ; nous transformons également ce nombre en pourcentage afin de faciliter la comparaison des données.

Pour chaque question, il y a deux tableaux, un pour le niveau CM1 et l'autre pour celui de CM2. Dans ces tableaux, pour faciliter l'analyse et assurer la confidentialité, un numéro est donné à chacun des élèves et le même numéro est inscrit aussi sur son exemplaire du questionnaire ; nous utilisons ce numéro afin de reporter des écrits des élèves dans nos tableaux qui indiquent les réponses des élèves classées selon les significations de la fraction qui sont utilisées **(voir les tableaux abordés à l'annexe 8)**. Les élèves de CM1 sont numérotés de 1 à 160 et ceux de CM2 sont numérotés de 1 à 115. Nous avons également construit d'autres tableaux **(Annexe 9)** pour comparer les élèves entre eux. En effet, pour chacun des élèves, nous inscrivons la signification utilisée pour répondre à chacune des questions posée dans le questionnaire et nous donnons une note sur 10. Il faut préciser que ces notes concernent le nombre des significations données correctement par chaque élève ; en revanche, en ce qui concerne les non réponses et les réponses incorrectes, nous inscrivons « 0 ». Ces tableaux nous permettent de mieux analyser les questionnaires par rapport aux significations de la fraction manifestées.

2.1.4. Plan général d'analyse des réponses données par les enseignants au questionnaire

Nous pouvons diviser le questionnaire destiné aux enseignants en deux parties. La première comporte des renseignements généraux concernant les enseignants comme leur sexe, leur âge, leur formation, le niveau dans lequel il enseigne, etc... La deuxième partie porte sur l'enseignement de la fraction : comment l'abordent-ils ? Quelle programmation de savoir et de savoir-faire les enseignants font-ils pour aborder les fractions avec les élèves ?

L'analyse des réponses des enseignants s'est faite en plusieurs étapes :

- La première a été la compilation des renseignements fournis en réponse à la première partie du questionnaire qui était là pour situer nos participants.
- La seconde étape concerne l'analyse des réponses données à la deuxième partie du questionnaire.

Ces réponses ont été regardées suivant deux perspectives, la première *pédagogique* et la seconde, mathématique. Pour l'analyse à caractère pédagogique, une grille d'analyses a été construite autour des façons d'aborder les concepts. À travers ces façons, nous pouvons ainsi identifier les rôles attribués au maître et à l'élève comme des caractéristiques importantes et intéressantes de sa pédagogie. Nous souhaitions ainsi dresser un portrait de cette pédagogie avec un accent placé sur le lien central entre le maître et l'élève. En parallèle, nous avons effectué une analyse à caractère mathématique des réponses fournies par chaque enseignant : à l'aide des critères pour chaque question, nous avons vérifié, la présence des éléments importants pour le concept de fraction au plan mathématique. Les deux sous-sections qui suivent présentent les détails sur la manière dont ces analyses ont été conduites avec les grilles, pédagogique et mathématique, utilisées, grilles qui sont à chaque fois résumées sous la forme de tableaux récapitulatifs.

2.1.4.1. Analyse à caractère pédagogique des réponses des enseignants

Premièrement, nous nous intéressions aux caractéristiques de la pédagogie qu'utilise l'enseignant dans sa classe. *Le premier axe* de notre analyse s'attache aux modes de représentations - ***matériel, imagé, symbolique, formel*** - mis en œuvre dans les activités d'enseignement et d'apprentissage proposées. Ces modes définissent quatre catégories à l'intérieur desquelles nous nous sommes arrêtées plus particulièrement sur les rôles réservés à l'enseignant et à l'élève.

Ces rôles possibles se situent entre deux extrêmes. À l'un de ces extrêmes, *l'élève se révèle très actif* : c'est lui qui est responsable de construire ses connaissances dans une démarche personnelle. Le rôle du maître est plus discret mais demeure essentiel : il est surtout présent pour proposer des problèmes afin de susciter l'intérêt et de conduire vers la notion mathématique ou encore de soutenir la démarche personnelle des élèves par des remarques ou des questions. À l'autre extrême, *l'enseignant se réserve un rôle nettement plus actif et exigeant pour lui-même.* Il fait presque tout : c'est lui qui agit, qui fournit les renseignements, qui exécute les activités et qui présente les exercices. L'élève garde alors un rôle plus passif : il écoute, enregistre et « apprend ». De là, nous avons détaillé notre grille d'analyses, dont les quatre grandes catégories relèvent, disions-nous au paragraphe précédent, des modes de représentations mis en œuvre, en faisant la part des rôles réservés à l'enseignant et à l'élève et en sachant que, dans la réalité, ce que nous observons va rarement se situer à un extrême ou à l'autre.

Nous présentons dans le tableau suivant les modes de représentations - matériel, imagé, symbolique, formel - mis en œuvre dans les activités d'enseignement et d'apprentissage proposées ainsi que les rôles réservés à l'enseignant et à l'élève dans ces activités.

TABLEAU 21– APPROCHES PEDAGOGIQUES: MODES DE REPRESENTATION ET ROLES DU MAITRE ET DE L'ELEVE. (NAGHIBI-BEIDOKHTI, 2008, P.254)

I) En utilisant des matériels didactiques (manipulations d'objets concrets) :
a) manipulés par les élèves : ce sont les élèves eux-mêmes qui découvrent leur cheminement pour construire leurs connaissances à partir de quelques indications nécessaires que donne l'enseignant pour les orienter et les soutenir. b) manipulés par les élèves, mais l'enseignant donne des instructions aux élèves étape par étape et leur pose parfois des questions pour orienter leur réflexion. c) manipulés par l'enseignant : en posant parfois des questions aux élèves, il réalise l'activité jusqu'à la conclusion. (les élèves sont plus des témoins que des participants actifs).

II) En utilisant des représentations graphiques (recours à des objets semi-concrets) :
a) dessinées par les élèves, l’enseignant pose des questions pour mettre les élèves en réflexion et pour orienter l'activité. b) dessinées par les élèves, l’enseignant pose des questions pour mettre les élèves en réflexion, mais c'est lui qui donne les instructions. c) dessinées par l'enseignant qui pose des questions aux élèves pour les mettre en réflexion et, en expliquant, complète l’activité. d) dessinées par l’enseignant qui explique les étapes à franchir et complète l’activité dont les élèves sont simplement témoins.
III) En utilisant des représentations symboliques ou des représentations mentales :
a) l’enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des objets physiques et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l’objectif. b) l’enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des objets physiques en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème. c) l’enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des représentations graphiques et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l’objectif. d) l’enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des représentations graphiques en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème. e) l’enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des idées ou des règles et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l’objectif. f) l’enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des idées ou des règles en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème.
IV) L’enseignant énonce les règles et formules pour résoudre le problème.

2.1.4.2. *Analyse à caractère mathématique des réponses des enseignants*

Sur le plan mathématique, il nous a semblé utile de mettre en évidence les connaissances des enseignants sur le concept de fraction. Il s'agit simplement de vérifier si, dans sa réponse, l'enseignant manifestait une connaissance suffisante de la matière qu'il abordait, si les éléments de savoirs importants étaient bien présents.

Pour la question 1 de la deuxième partie du questionnaire, nous considérons deux éléments comme importants : ce sont les idées d'équipartition et de choix. C'est pourquoi nous vérifierons la présence de ces éléments dans les explications que donnent les enseignants. Il faut toutefois noter que l'idée d'équipartition nous semble plus essentielle et donc nous jugerons la réponse acceptable quand, au moins, cet élément est présent. Ces indications peuvent être directes (explicites) ou indirectes (implicites) : dans le premier cas, l'enseignant parle explicitement de l'idée d'équipartition ou du choix, alors que dans le deuxième cas, il n'en parle pas directement, mais il la montre, par exemple, à l'aide de dessins divisés en parties égales pour l'équipartition ou avec parties hachurées pour signifier les choix. Il y a un autre cas où nous ne trouvons pas ces éléments dans la réponse. Finalement, nous avons prévu le cas où l'enseignant ne répond pas à notre question.

TABLEAU 22– ANALYSE A CARACTERE MATHEMATIQUE DES REPONSES DES ENSEIGNANTS A LA QUESTION 1 (PARTIE 2 DU QUESTIONNAIRE)

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">Présence des éléments importants pour le concept de fraction au plan mathématique</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Eléments importants à considérer</td><td colspan="2">Oui</td><td rowspan="2">Non</td><td rowspan="2">Pas de réponse ou non mentionné dans la réponse</td></tr>
<tr><td>Explicitement</td><td>Implicitement</td></tr>
<tr><td>Présence de l'idée d'équipartition</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Présence de l'idée de choix</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

TABLEAU 23– ANALYSE A CARACTERE MATHEMATIQUE DES REPONSES D'ENSEIGNANT A LA QUESTION 2 (PARTIE 2 DU QUESTIONNAIRE).

Savoir	Savoir-faire
-Partage équitable -Reconnaître des fractions simples (demi-quart-tiers) -Reconnaître le vocabulaire numérateur et dénominateur -Reconnaître de fractions décimales -Prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers -Lecture des fractions	-Comparaison de fractions -Equivalence de fractions -Décompositions de fractions -Addition de fractions -Soustraction de fractions -Positionner de fractions sur une droite graduées -Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs -Ecrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 -Ecriture des fractions

2.2. Analyse des données construites sur les manuels scolaires

Dans cette section, nous présentons l'analyse des données concernant les manuels scolaires choisis.

2.2.1. Tableau d'analyse descriptive générale des manuels retenus en CM1 et en CM2

Nous choisissons d'étudier les manuels scolaires de quatrième année et de cinquième année du primaire. Ceci s'explique par le fait qu'en France, l'apprentissage structuré et formel des fractions ne débute qu'à partir des 4ème et 5ème années du primaire, avec un approfondissement en 5ème année.

Le tableau 24 présente les variables retenues pour caractériser notre échantillon de manuels scolaires.

TABLEAU 24– LES CARACTERISTIQUES DES MANUELS SCOLAIRES ETUDIEES.

Colonne	Libellé	Observations
1	Titre du manuel scolaire	Les 5 manuels retenus de CM1 sont identifiés par les codes suivants : O1, E1, C1, J, T1. Les 5 manuels retenus de CM2 sont identifiés par les codes suivants : O2, E2, C2, J2, T2.
2	Niveau d'enseignement	Le manuel est destiné aux élèves de niveau CM1, le niveau d'enseignement est codé par CM1. Le manuel est destiné aux élèves de niveau CM2, le niveau d'enseignement est codé par CM2.
3	Editeur	Les éditeurs sont retenus par le nom, il y a trois maisons d'édition : Magnard, Hatier et Retz.
4	Année de parution	Elle est identifiée par l'année de l'édition du manuel
5	Présence des chapitres concernant les fractions et leur place à l'intérieur du manuel	La présence du (des) chapitre(s) sur les fractions est présentée de la manière suivante : oui il existe ou il n'existe pas des pages spécifiques à l'apprentissage des fractions. Par rapport à la place des pages destinées à l'apprentissage des fractions, elle est identifiée par: au début, au milieu ou à la fin du manuel scolaire.
6	Nombre et proportion des pages concernant les fractions au nombre total de pages par rapport au manuel.	La proportion est présentée par une écriture fractionnaire composée du nombre des pages réservées à l'apprentissage des fractions et le nombre total des pages du manuel étudié. De plus, le pourcentage est codé par x %.

Concernant l'effectuation de l'analyse des manuels scolaires choisis, 5 manuels de mathématiques de CM1 et 5 de CM2 sont retenus pour notre recherche, au total, 10 manuels ont été analysés. En effet, pour chaque manuel du niveau CM1, nous avons choisi le même titre de ce manuel en CM2, de manière que les deux manuels soient de la même collection et cela a été fait pour tous les manuels choisis. Les données quantitatives recueillies concernent les 10 manuels.

Dans notre recherche, les manuels scolaires choisis, sont : ***Outils pour les maths*** aux éditions (Magnard, 2011), ***Euro maths*** aux éditions (Hatier, 2009), ***J'apprends les maths*** aux éditions (Retz, 2010), **Cap *maths*** aux éditions (Hatier, 2010) et ***La tribu des maths*** aux éditions (Magnard, 2009). Il s'agit des dernières versions conformes aux programmes 2008 qui prennent en compte les changements de programmes (cette thèse ayant été débutée en 2010). Nous avons retenu des versions équivalentes des différents manuels (conformes aux programmes de 2008). Les collections de manuels retenues sont fréquemment utilisées dans les écoles primaires françaises et sont récentes.

2.2.2. Proportion des pages réservées explicitement aux apprentissages de fractions par rapport au nombre total des pages de chaque manuel étudié en CM1 et en CM2

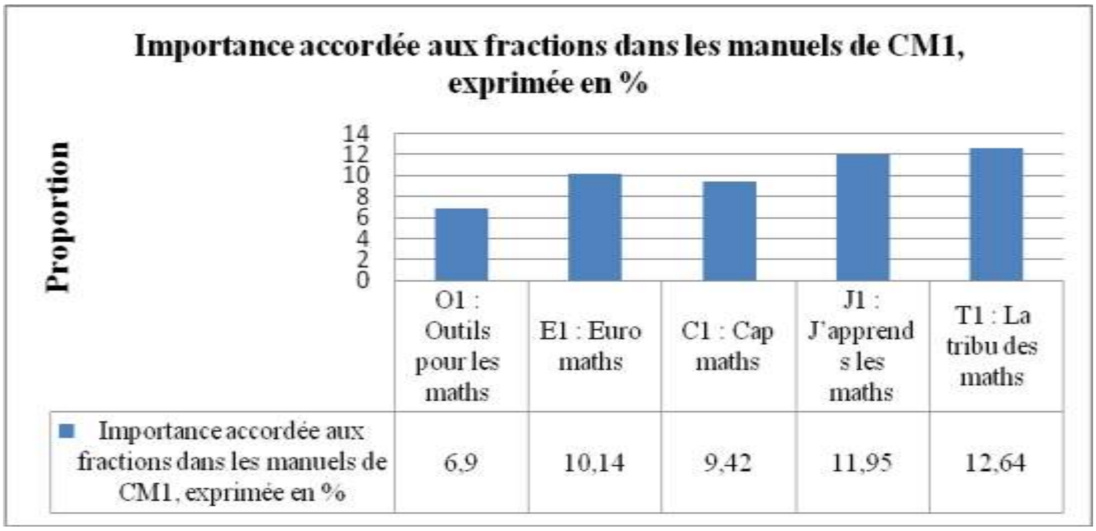


FIGURE 21 – POURCENTAGE DE PRESENCE DES FRACTIONS DANS CHAQUE MANUEL DE CM1 CHOISI.

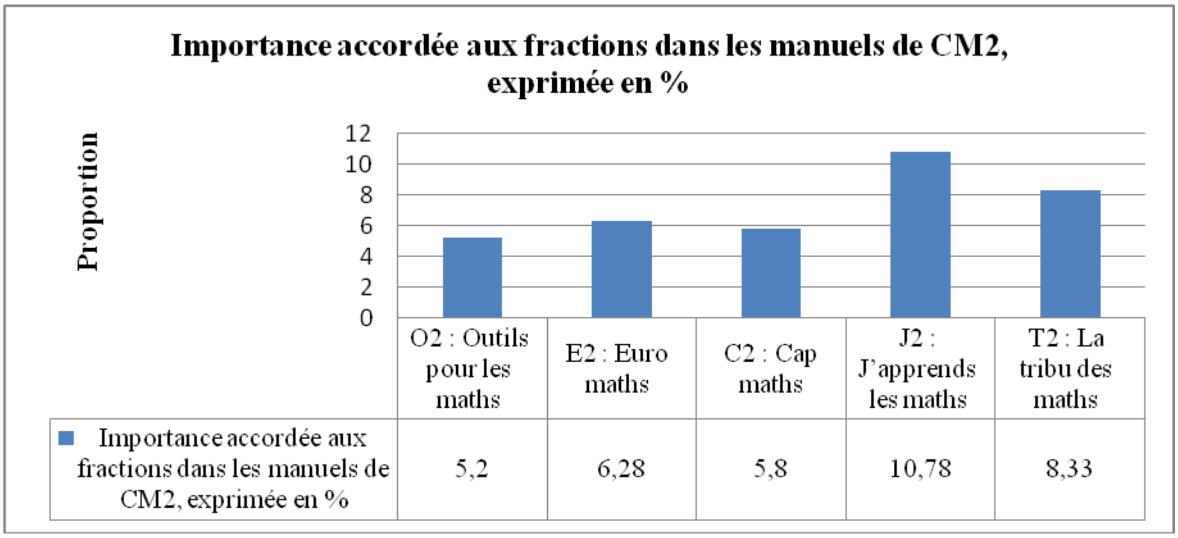


FIGURE 22 – POURCENTAGE DE PRESENCE DES FRACTIONS DANS CHAQUE MANUEL CM2 CHOISI.

5 manuels de mathématiques de CM1 et 5 de CM2 sont choisis dans notre étude pour être analysés. Dans une première approche, par rapport aux manuels de CM1 et en ce qui concerne le poids accordé à l'apprentissage des fractions à l'intérieur de chacun de ces manuels, nous constatons que le pourcentage du nombre de pages réservées explicitement aux apprentissages de fractions par rapport au nombre total des pages du manuel étudié n'est pas

le même et il existe une différence significative. En effet, 11,95% (19/159) des pages dans le manuel « J'apprends les maths » sont consacrées à l'apprentissage des fractions, 12,64% (22/174) dans « La tribu des maths », 6,9% (12/175) dans « Outils pour les maths », 9,42% (18/191) dans « Cap maths » et, dans « Euro maths », il y a 10,14% (21/207). Concernant les manuels de CM2, nous notions également des différences entre le nombre de pages concernant les apprentissages des fractions. 10,78% (18/167) des pages dans le manuel « J'apprends les maths » sont consacrés à l'apprentissage des fractions, 8,33% (16/196) dans « La tribu des maths », 5,2% (10/191) dans « Outils pour les maths », 5,8% (11/191) dans « Cap maths » et, dans « Euro maths », il y a 6,28% (13/207).

Concernant la présentation des fractions et la place des chapitres ou des pages concernées, nous remarquons que les manuels choisis ne présentent pas les fractions de la même manière et ils ne les mettent pas à la même place. Par exemple, le manuel *Outils pour les maths* (dans les deux niveaux *CM1* et *CM2*) consacre un chapitre complet à l'apprentissage des fractions dès le début du manuel, tandis que le manuel *Euro maths* (dans les deux niveaux *CM1* et *CM2*) présente les fractions dans plusieurs pages non consécutives à la fin du manuel. Les deux manuels *Cap maths* et *La tribu des maths* présentent les fractions en *CM1* dans plusieurs pages non consécutives en milieu de ces manuels, mais en *CM2* au début et en milieu du manuel. Le manuel *J'apprends les maths* (dans les deux niveaux *CM1* et *CM2*) présente les fractions dans plusieurs pages non consécutives en milieu et en fin du manuel.

2.2.3. Analyse des manuels scolaires de niveau CM1

Cette analyse concerne 5 manuels scolaires de mathématiques de CM1. Plusieurs activités portant sur les fractions sont analysées, chacune de ces activités est classée par les significations des fractions présentées déjà dans la partie théorique de notre travail. Il est important de mentionner que *le nombre d'activités analysées pour chaque manuel n'est pas le même*, 98 activités sont analysées dans le manuel O1, 122 dans E1, 78 dans C1, 69 dans J1 et 74 dans le manuel T1.

Dans cette section, nous allons donner, en premier lieu, un exemple d'analyse d'une des activités analysées dans l'un des manuels étudiés. En second lieu, nous poursuivons en présentant des graphiques qui traduisent la répartition des significations des fractions présentées dans les manuels scolaires de CM1 ; nous présentons la quantité et le pourcentage des activités portant sur chaque signification de la fraction, puis, nous exposons la place accordée à chacune de celles-ci dans chaque manuel étudié. En dernier lieu, nous réalisons une synthèse sur les significations des fractions présentes dans ces manuels choisis.

2.2.3.1. Exemple d'analyse des manuels de CM1

« Trois cyclistes parcourent un trajet de 120 km à vélo. Voici la distance qu'ils ont parcourue au bout de 2h30.

Marie : $\frac{4}{6}$ du parcours ; Slimane : $\frac{1}{3}$ du parcours ; Clément : $\frac{3}{4}$ du parcours

Combien de kilomètres chaque cycliste a-t-il parcouru ? »

Source : Le manuel « Outils pour les maths » (MAGNARD, 2011, CM1)

Ce problème est classé dans la catégorie *Opérateur*. En effet, l'élève a besoin d'effectuer les deux opérations *multiplication* et *division* pour trouver la distance effectuée par chaque cycliste. Marie a parcouru :

$\frac{4}{6} \times 120 = (4 \times 120) \div 6 = 80$ kilomètres ou $(120 \div 6) \times 4 = 80$ kilomètres

Pour classer ce problème, nous avons toutefois hésité entre deux catégories :

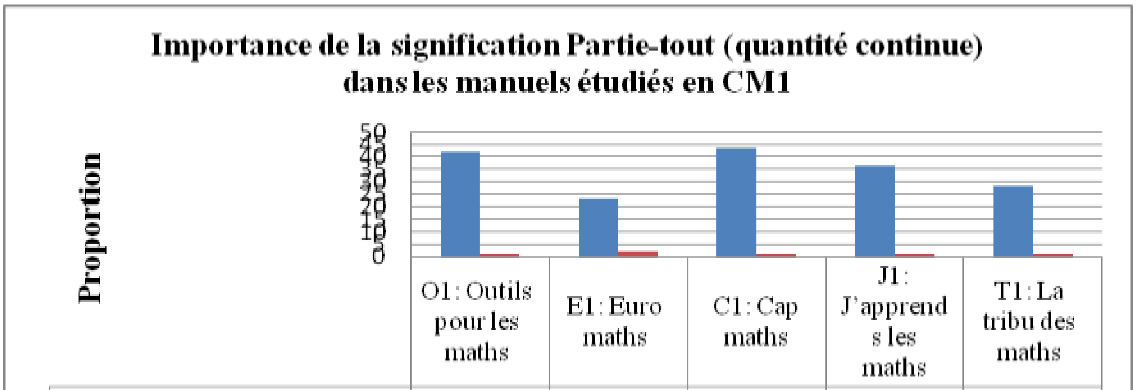
Premièrement, nous avons pensé qu'il s'agissait de la signification *Partie-tout (quantité continue)* puisque le trajet est considéré comme un tout continu, le premier cyclise Marie a effectué une partie du tout (le trajet) avec $\frac{4}{6}$ du parcours, le deuxième cyclise Slimane a effectué une autre partie du tout avec $\frac{1}{3}$ du parcours et le dernier cycliste a effectué une autre partie du tout avec $\frac{3}{4}$ du parcours. Cependant, les trajets effectués par les trois cyclises ne sont pas les mêmes, le trajet total n'est pas divisé également entre ces trois cyclistes. Pour cela, nous avons délaissé cette signification.

Deuxièmement, nous avons hésité avec la signification *Mesure*, mais il n'y a pas d'unité de mesure, aucun trajet effectué a été pris comme unité de mesure des autres trajets, nous avons délaissé cette signification.

2.2.3.2. Répartition des significations de la fraction dans les manuels scolaires de CM1

Pour déterminer les différentes significations exploitées dans les manuels scolaires choisis en CM1, nous allons présenter maintenant chaque signification en mettant en évidence la présence des activités portant sur celle-ci et leur pourcentage dans chaque manuel et nous déterminons également la place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport à la présence des autres significations de la fraction.

La signification Partie-tout (quantité continue)

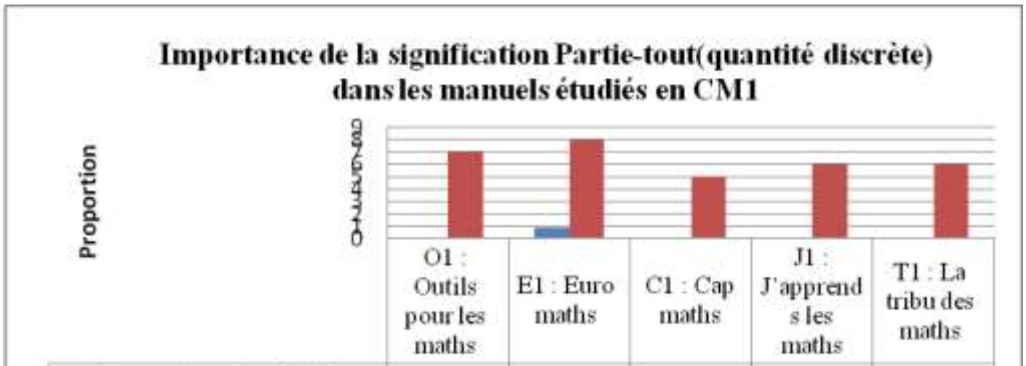


	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Partie-tout (quantité continue) donné en %	41,84	22,95	43,59	36,24	28,38
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	1	2	1	1	1

FIGURE 23 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION PARTIE-TOUT (QUANTITE CONTINUE).

Pour les activités qui portent sur la signification Partie-tout (quantité continue), celles-ci se classent à la première place dans les manuels O1 avec 41,84% des activités, C1 avec 43,59% des activités, J1 avec 36,24% et T1 avec 28,38% des activités analysées. Elles se classent à la deuxième place dans le manuel E1 avec 22,95% des activités derrière celle de Mesure avec 36,07% des activités.

La signification Partie-tout (quantité discrète)

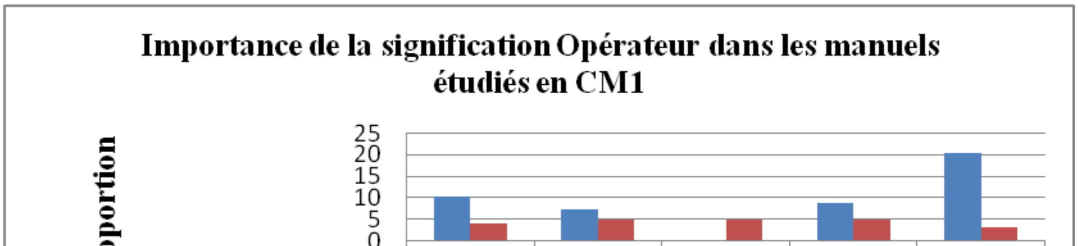


	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Partie-tout (quantité discrète) donné en %	0	0,82	0	0	0
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	7	8	5	6	6

FIGURE 24 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION PARTIE-TOUT (DISCRETE).

Dans les quatre manuels O1, C1, J1 et T1, les activités portant sur la signification de Partie-tout (quantité discrète) sont effectivement absentes, aucune activité faisant partie de cette signification n'a été trouvée. Dans le manuel E1, les activités analysées sont presque absentes et celles-ci se classent à la dernière place avec 0,82 % des activités.

La signification Opérateur

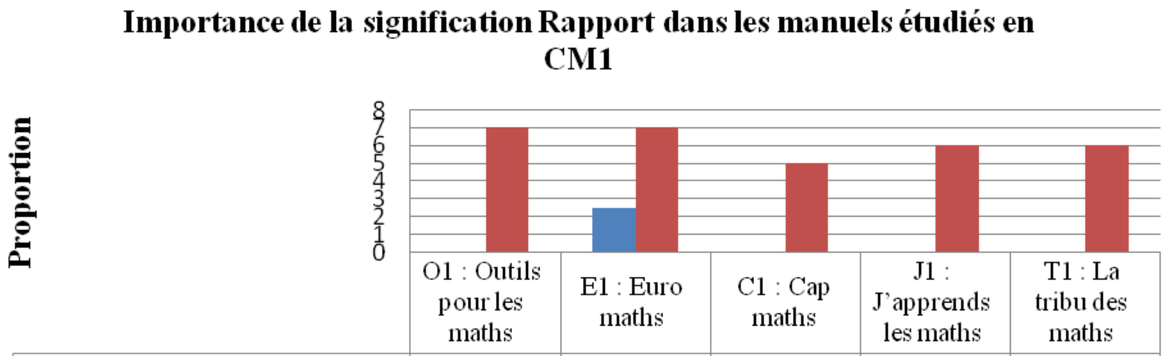


	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Opérateur donné en %	10,2	7,38	0	8,7	20,27
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	4	5	5	5	3

FIGURE 25 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION OPERATEUR.

Les activités portant sur la signification Opérateur représentent 20,27 % des activités analysées du manuel T1, cette signification se classe ainsi à la troisième place derrière celles de *Partie-tout (quantité continue)* et *Mesure*. Dans le manuel C1, les activités portant sur cette signification sont effectivement absentes. Pour les trois manuels O1, E1 et J1, les activités où intervient la signification d'*Opérateur* sont moins nombreuses. 10,2 % des activités analysées dans le manuel O1 font partie de cette catégorie, celle-ci se classe à la quatrième place, le manuel E1 contient 7,38 % des activités portant sur cette signification, ce qui la classe à la cinquième place et enfin les activités dans le manuel J1 se classent à la cinquième place avec 8,7 % des activités.

La signification Rapport

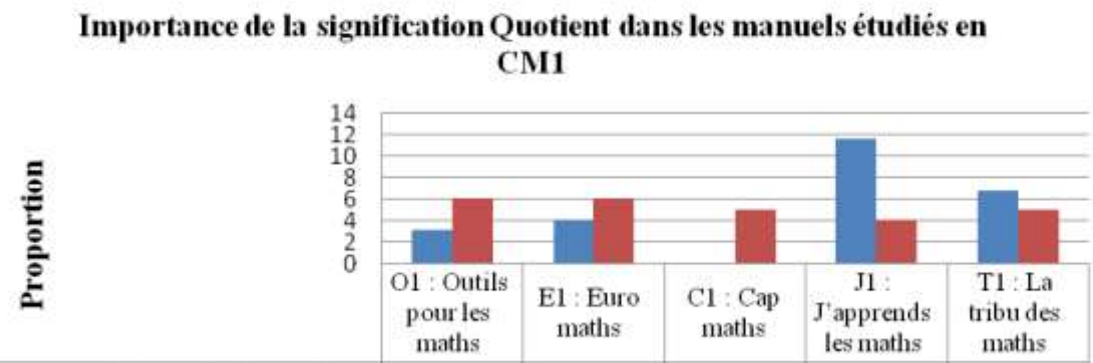


	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Rapport donné en %	0	2,46	0	0	0
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	7	7	5	6	6

FIGURE 26 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION RAPPORT.

Les activités analysées portant sur cette signification de la fraction ne sont présentes que dans le manuel E1 avec 2,46 % des activités et elles occupent la septième place. Par contre, dans les quatre autres manuels scolaires étudiés en CM1, aucune activité n'a été trouvée sur cette catégorie des significations de la fraction.

La signification Quotient

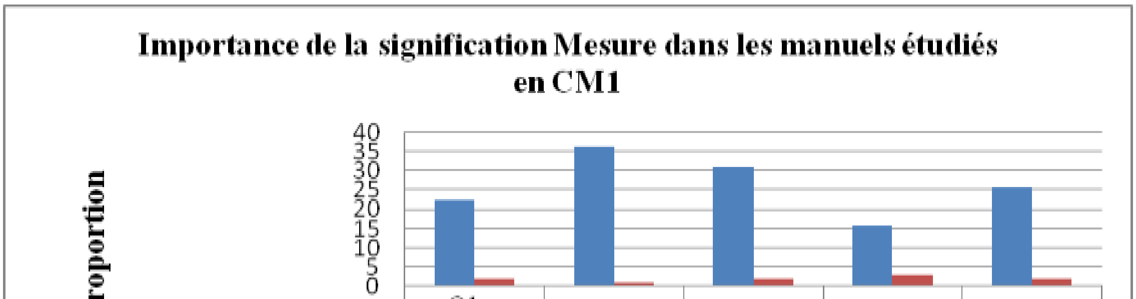


	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Quotient donné en %	3,06	4,01	0	11,59	6,76
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	6	6	5	4	5

FIGURE 27 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION QUOTIENT.

Le manuel J1 se classe à la quatrième place, soit avec 11,59 % des activités, derrière les significations *Partie-tout (quantité continue)*, *Nombre* et *Mesure*. Par contre, les activités portant sur la signification Quotient sont moins présentes dans les autres manuels. En effet, le manuel E1 contient 4,01 % des activités, ce qui classe cette signification à la sixième place. Le manuel T1 se classe à la cinquième place avec 6,76 % des activités analysées. Le manuel O1 contient peu d'activités sur cette signification avec 3,06 % des activités, ce qui lui classe à la sixième place. Enfin, C1 ne contient aucune activité sur cette signification.

La signification Mesure

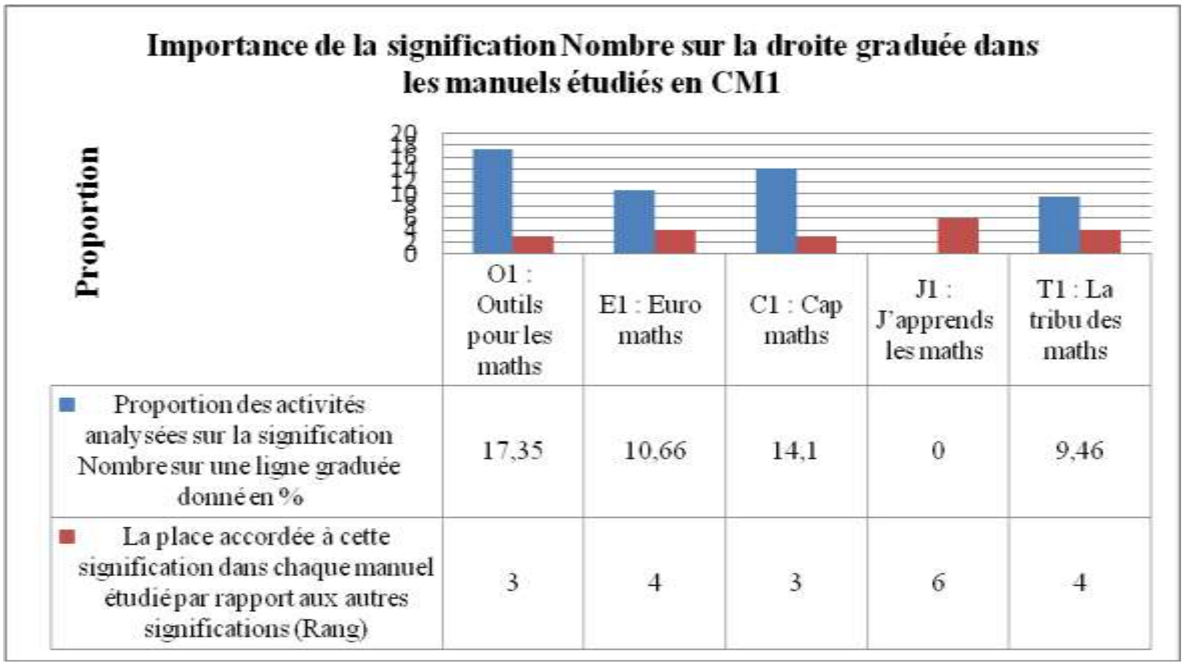


	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Mesure donné en %	22,45	36,07	30,77	15,94	25,68
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	2	1	2	3	2

FIGURE 28 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION MESURE.

La signification de la fraction en tant que *Mesure* serait l'une des plus présentes dans les activités des fractions analysées dans les manuels de CM1 choisis. En effet, dans les manuels O1, C1 et T1, cette catégorie d'activités se classe à la deuxième place, soit avec 22,45% des activités dans le manuel O1, avec 30,77 % dans le manuel C1 et avec 25,68% dans celui de T1. Quant au manuel E1, 36,07% des activités analysées se classent dans cette catégorie, ce qui lui fait prendre la première place. Cependant, moins d'activités de mesure sont présentes dans le manuel J1, 15,94% des activités analysées dans celui-ci font partie de cette catégorie, ce qui la classe à la troisième place derrière les catégories *Partie-tout (quantité continue)* et *Nombre*.

<u>La signification Nombre sur une droite graduée</u>

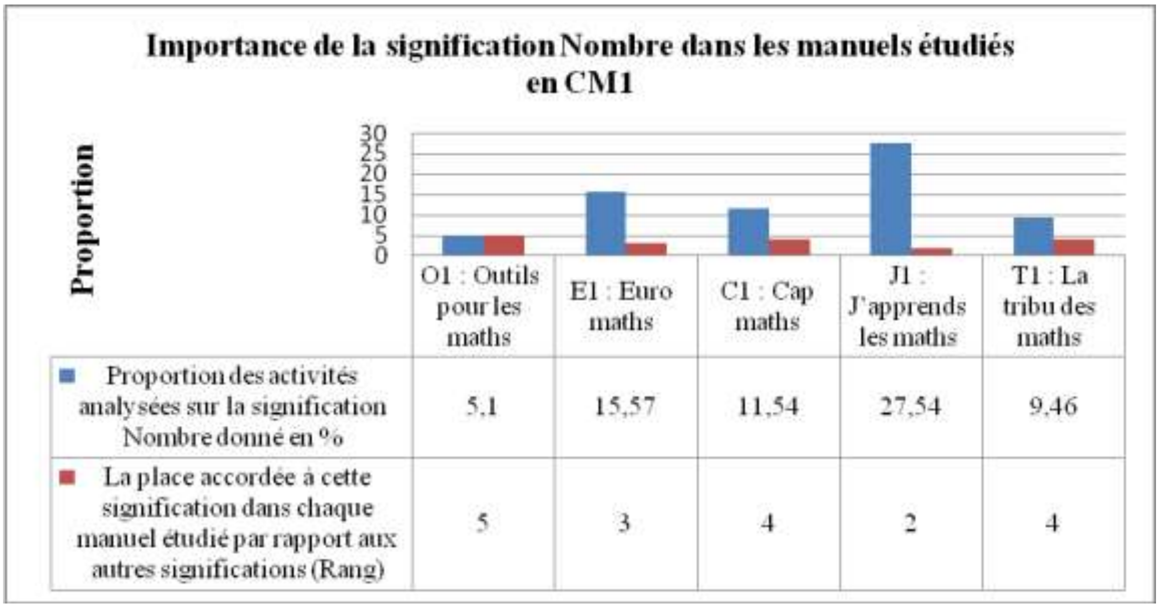


	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Nombre sur une ligne graduée donné en %	17,35	10,66	14,1	0	9,46
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	3	4	3	6	4

FIGURE 29 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION NOMBRE SUR UNE DROITE GRADUEE.

En ce qui concerne les activités portant sur la signification *Nombre sur une droite graduée,* celle-ci se classe à la troisième place dans les deux manuels O1 et C1, soit avec 17,35% des activités analysées dans O1 et 14,1% des activités dans celui de C1 derrière les significations *Partie-tout (quantité continue)* et *Mesure*. Dans E1, cette signification se classe à la quatrième place avec 10,66% des activités derrière les significations *Partie-tout (quantité continue)*, *Mesure* et *Nombre*. Concernant le manuel T1, il contient 9,46 % des activités, ce qui met cette catégorie à la quatrième place derrière les significations *Partie-tout (quantité continue), Mesure* et Opérateur. Enfin, les activités portant sur cette signification sont pratiquement absentes du manuel J1.

La signification Nombre



	O1 : Outils pour les maths	E1 : Euro maths	C1 : Cap maths	J1 : J'apprends les maths	T1 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Nombre donné en %	5,1	15,57	11,54	27,54	9,46
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	5	3	4	2	4

FIGURE 30 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION NOMBRE.

Les activités des fractions qui portent sur la signification *Nombre* sont importantes dans les deux manuels scolaires J1 et E1. Elles se classent à la deuxième place dans le manuel J1 avec 27,54% des activités derrière la signification *Partie-tout (quantité continue)* et, à la troisième place dans les manuels E1, soit avec 15,57% des activités, derrière les significations *Mesure* et *Partie-tout (quantité continue)*. Dans les deux manuels C1 et T1, ces activités se classent à la quatrième place avec 11,54% des activités dans celui de C1 et avec 9,46% des activités dans T1. Dans le manuel O1, ces activités se classent à la cinquième place avec 5,1% des activités, derrière les significations *Partie-tout (quantité continue)*, *Mesure*, *Nombre sur une droite graduée* et *Opérateur*.

La signification Probabilité ou fréquence

Les activités portant sur la signification *Probabilité* sont tout à fait absentes dans les cinq manuels étudiés, aucune activité n'a été trouvée sur cette signification.

2.2.3.3. Synthèse de l'analyse des manuels de CM1 quant aux différentes significations de la fraction présentes

Dans cette section, nous allons présenter les résultats concernant les significations de la fraction exploitées dans les manuels scolaires de mathématiques de CM1 choisis pour notre étude. Mais avant d'avancer dans cette présentation, nous voulons préciser que les écarts entre les répartitions des significations de la fraction sont statistiquement significatifs. En effet, selon le test du Khi-deux effectué, la valeur du Khi-deux est de 76,02 Avec des degrés de liberté 28. Or au risque de 5% (0,05) la valeur maximale que peut prendre le khi-deux est de

41,337. Comme 76,02 est supérieur à 41,337, nous pouvons conclure que nous rejetons l'hypothèse d'indépendance et nous acceptons l'hypothèse de dépendance au risque de 5% de se tromper. Cela signifie donc que nous pouvons généraliser les résultats obtenus autour des significations de la fraction avec ces cinq manuels à un plus grand nombre de manuels de CM1.

Par ailleurs, en ce qui concerne la place qu'accordent les manuels scolaires de CM1 aux diverses significations de la fraction, nous constatons que cette place est différente d'un manuel à l'autre. Nous allons maintenant présenter les résultats concernant la place accordée à chaque signification de la fraction dans chaque manuel scolaire étudié :

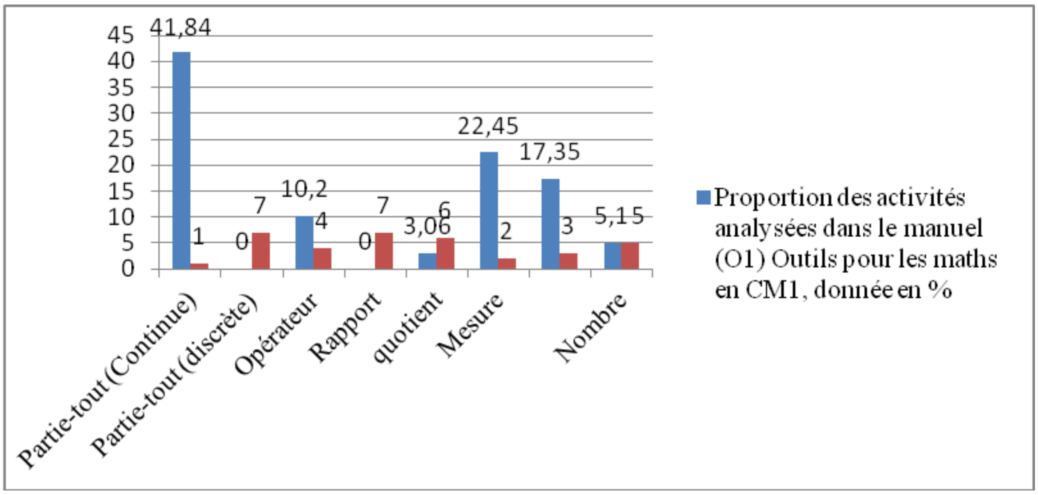


FIGURE 31 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL OUTILS POUR LES MATHS (O1).

Ce diagramme en bâtons montre la place accordée à chaque signification de la fraction dans le manuel O1. En effet, dans celui-ci, c'est la signification *Partie-tout (quantité continue)* qui se classe à la première place avec 41,84% des activités analysées. La signification *Mesure* vient à la deuxième place avec 22,45% des activités et la signification *Nombre sur une droite graduée* est à la troisième place avec 17,35% des activités. La signification *Opérateur* est à la quatrième place avec 10,2% des activités et la signification *Nombre* vient à la cinquième place avec 5,1% des activités. La signification Quotient est à la sixième place avec 3,06% des activités. D'ailleurs, les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* ne sont pas exploitées dans ce manuel.

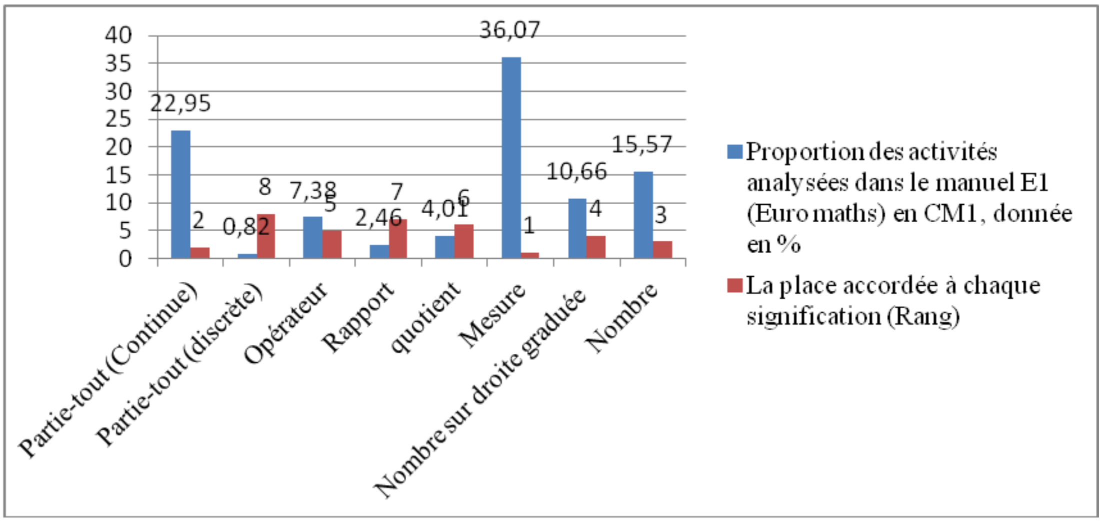


FIGURE 32 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL *EURO MATHS* (E1).

Dans le manuel E1, c'est la signification *Mesure* qui domine avec 36,07% des activités analysées. La signification *Partie-tout (quantité continue)*, se classe à la deuxième place avec 22,95% des activités et la signification *Nombre* est à la troisième place avec 15,57% des activités. Pour les trois significations *Nombre sur une droite graduée*, *Opérateur* et *Quotient*, entre 4% et 11% des activités analysées sont attribuées. D'ailleurs, les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* sont celles les moins présentes dans ce manuel.

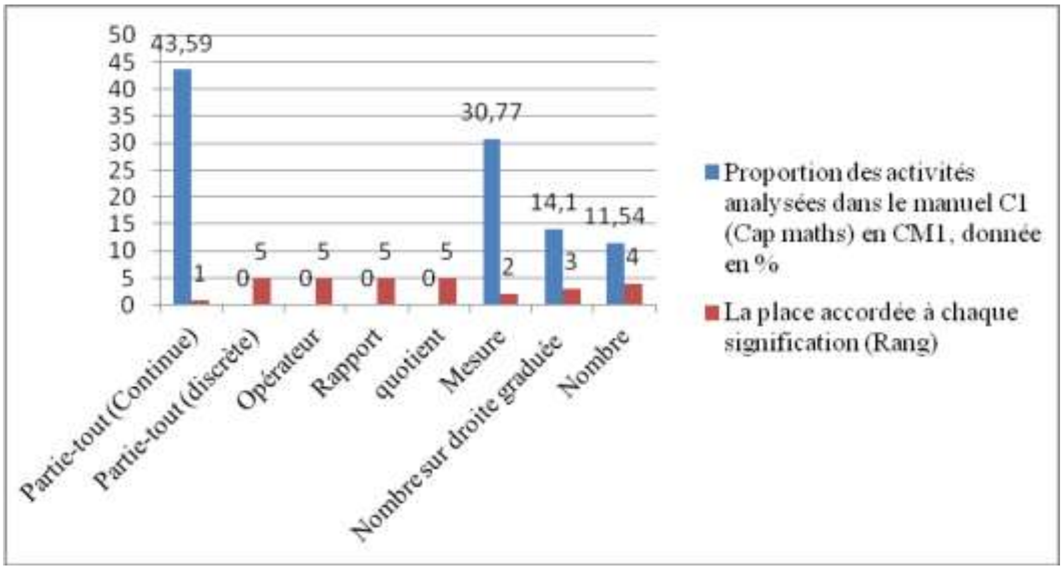


FIGURE 33 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL *CAP MATHS* (C1).

Ici, dans le manuel C1, nous remarquons que la signification *Partie-tout (quantité continue)*, se classe à la première place avec 43,59% des activités. C'est la signification *Mesure* qui prend la deuxième place avec 30,77% des activités analysées. Puis, vient à la troisième place la signification *Nombre sur une droite graduée* avec 14,1% des activités.

Ensuite, 11,54% des activités sont attribuées à la signification *Nombre*, ce qui la place à la quatrième place. Par ailleurs, les quatre significations *Partie-tout (quantité discrète), Opérateur, Rapport et quotient* ne sont pas exploitées dans ce manuel.

Nous constatons que les deux manuels O1 et C1 se ressemblent au point de vue de la répartition des trois significations *Partie-tout (quantité continue), Mesure, Nombre sur une droite graduée*. En effet, la signification *Partie-tout (quantité continue)* se classe à la première place dans O1 et dans C1, la signification *Mesure* prend la deuxième place dans ces deux manuels et la signification *Nombre sur une droite graduée* est à la troisième place.

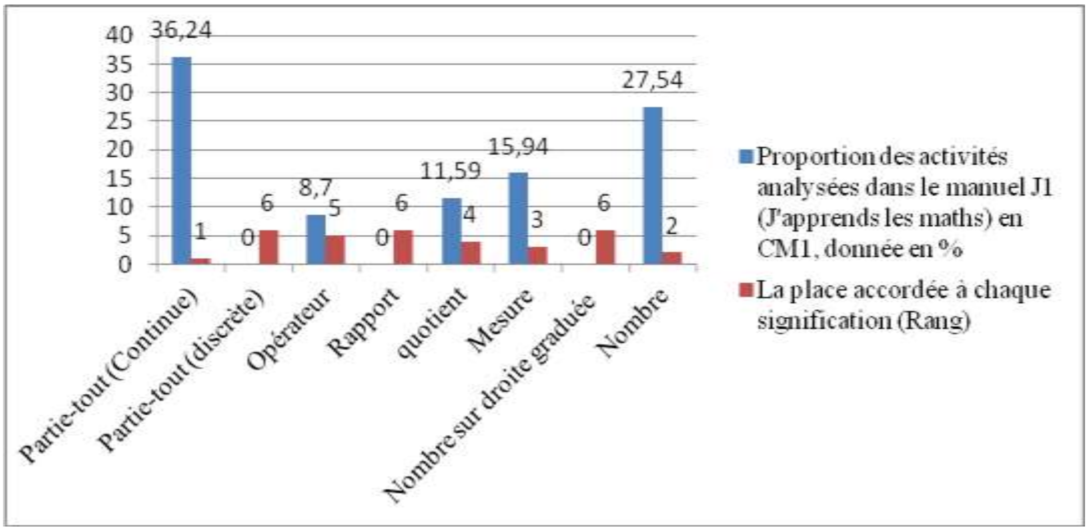


FIGURE 34 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL J'APPRENDS LES MATHS (J1).

Dans le manuel J1, la signification *Partie-tout (quantité continue)* domine et prend la première place avec 36,24% des activités. La signification *Nombre* se classe à la deuxième place avec 27,54% des activités analysées. A la troisième place, c'est la signification *Mesure* qui se classe avec 15,94% des activités et la signification *quotient* vient dans ce manuel à la quatrième place avec 11,59% des activités. La signification *Opérateur* est moins exploitée, elle se classe à la cinquième place avec 8,7% des activités analysées. D'ailleurs, les trois significations *Partie-tout (quantité discrète)*, *Rapport* et *Nombre sur une droite graduée* ne sont pas exploitées dans ce manuel.

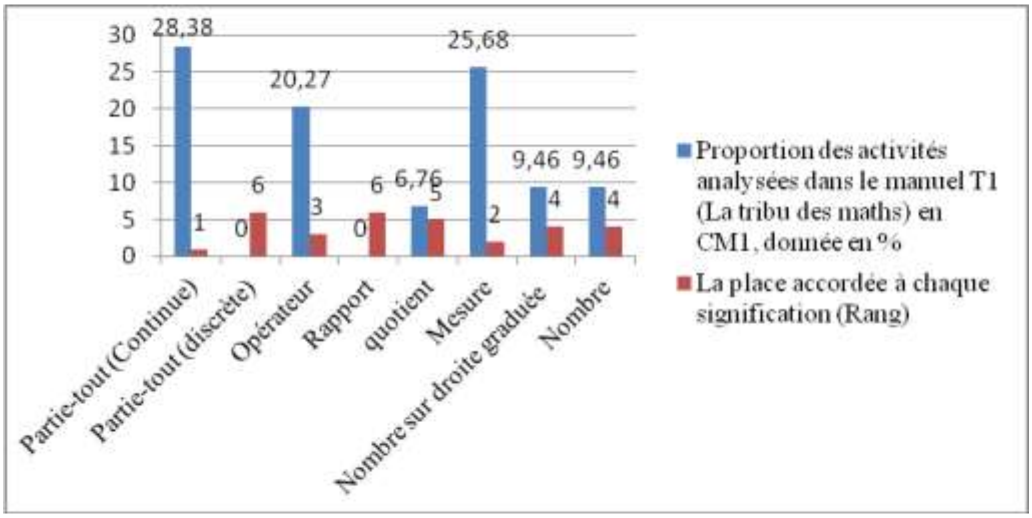


FIGURE 35 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL LA TRIBU DES MATHS (T1).

Dans le manuel T1, c'est la signification *Partie-tout (quantité continue)* qui prend la première place avec 28,38% des activités. La signification *Mesure* se classe à la deuxième place avec 25,68% des activités. La signification *Opérateur* vient à la troisième place avec 20,27% des activités analysées. Les deux significations *Nombre* et *Nombre sur une droite graduée* partagent la quatrième place avec 9,46 % des activités. La signification Quotient est la moins exploitée dans le manuel T1 avec 6,76% des activités, elle occupe la cinquième place. D'ailleurs, les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* ne sont pas exploitées dans ce manuel.

Malgré les différences constatées entre les cinq manuels scolaires étudiés en CM1, il apparait que certaines significations de la fraction demeurent plus exploitées dans l'ensemble de ces manuels. D'après les places attribuées à chaque signification de la fraction et d'après les pourcentages d'activités classées dans chacune de ces significations, on peut dire que les activités qui privilégient les trois significations *Partie-tout (quantité continue), Mesure* et *Nombre sur la droite graduée* sont les plus exploitées et les plus présentes dans les manuels de CM1 choisis pour notre étude.

En premier lieu, la signification Partie-tout (quantité continue) domine dans quatre manuels sur cinq, à savoir les O1, C1, J1 et T1. Par contre, elle est venue à la deuxième place, derrière celle de Mesure, dans le manuel E1 avec 22,95% des activités.

En deuxième lieu, la signification Mesure domine dans le manuel E1. Elle se classe à la deuxième place dans les manuels O1, C1, J1 et T1.

En troisième lieu, en ce qui concerne la signification *Nombre sur une droite graduée,* elle vient à la troisième place dans les manuels O1 et C1, à la quatrième place dans les manuels E1 et T1. Par contre, elle est complétement absente dans le manuel J1.

Concernant les deux significations *Opérateur et Quotient,* elles sont souvent les moins présentes dans ces manuels et elles se classent parfois aux dernières places. Enfin, les deux significations partie-tout (quantité discrète) et Rapport ne sont présentes que dans le manuel E1 avec un pourcentage très faible.

Enfin, la signification de la fraction en tant que *Probabilité* est absente dans les cinq manuels choisis et elle se place toujours en dernière par rapport aux autres significations.

2.2.4. Analyse des manuels scolaires de niveau CM2

Cette analyse a été effectuée sur 5 manuels scolaires de mathématiques de niveau CM2 (cités déjà en haut à la section 2.2.1.3.) ; nous les avons nommé O2, E2, C2, J2 et T2. Les activités portant sur les fractions sont analysées ; chacune de ces activités est catégorisée par les significations des fractions présentées et définies déjà dans la partie théorique de notre travail. *Il est important de mentionner que le nombre d'activités analysées pour chaque manuel n'est pas le même*, 87 activités sont analysées dans le manuel O2, 63 dans E2, 60 dans C2, 66 dans J2 et 75 dans le manuel T2. Nous allons reprendre la même démarche appliquée déjà à l'analyse des manuels scolaires de CM1 (section 2.3.1.2.) pour mener l'analyse des manuels de CM2. Voici un exemple d'analyse d'un des activités des manuels scolaires étudiés.

2.2.4.1. Exemple d'analyse des manuels de CM2

« Une heure c'est 60 minutes.

a. Combien de minutes y a-t-il dans 1/2 heure, dans $\frac{3}{4}$ d'heure ?

b. Quelle fraction d'heure représentent 20 minutes. »

Source : Le manuel Euro Maths (Hatier, 2009, CM2, p.30)

Ce problème est classé dans la catégorie *Mesure*. En effet, 1 heure = 60 minutes est conçue comme unité de mesure qui peut être utile pour calculer les autres quantités demandées dans ce problème, c'est-à-dire :

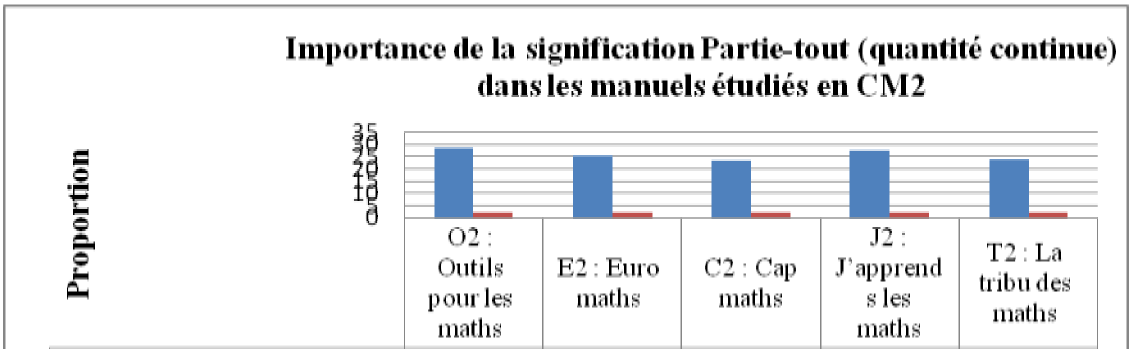
- a. 1/2 heure = 1/2 × 60 minutes = 60 minutes ÷ 2 = 30 minutes.
- b. 60 minutes = 3 fois de 20 minutes ; 60 minutes = 20 × 3, alors 20 = 1/3× 60 minutes = 1/3 d'heure.

Pour continuer, nous présentons les données récupérées des manuels scolaires par des diagrammes en bâtons. Ensuite, nous décrivons ces graphiques en présentant la quantité d'activité portant sur chaque signification de la fraction. Enfin, nous faisons une synthèse sur les significations qui sont présentes dans les activités des manuels scolaires portant sur les fractions.

2.2.4.2. Répartition des significations de la fraction à l'intérieur des manuels scolaires choisis de CM2

Nous allons poursuivre la même démarche faite précédemment (section 2.2.3.2.) afin de déterminer les différentes significations exploitées dans les manuels scolaires choisis en CM2.

<u>La signification Partie-tout (quantité continue)</u>

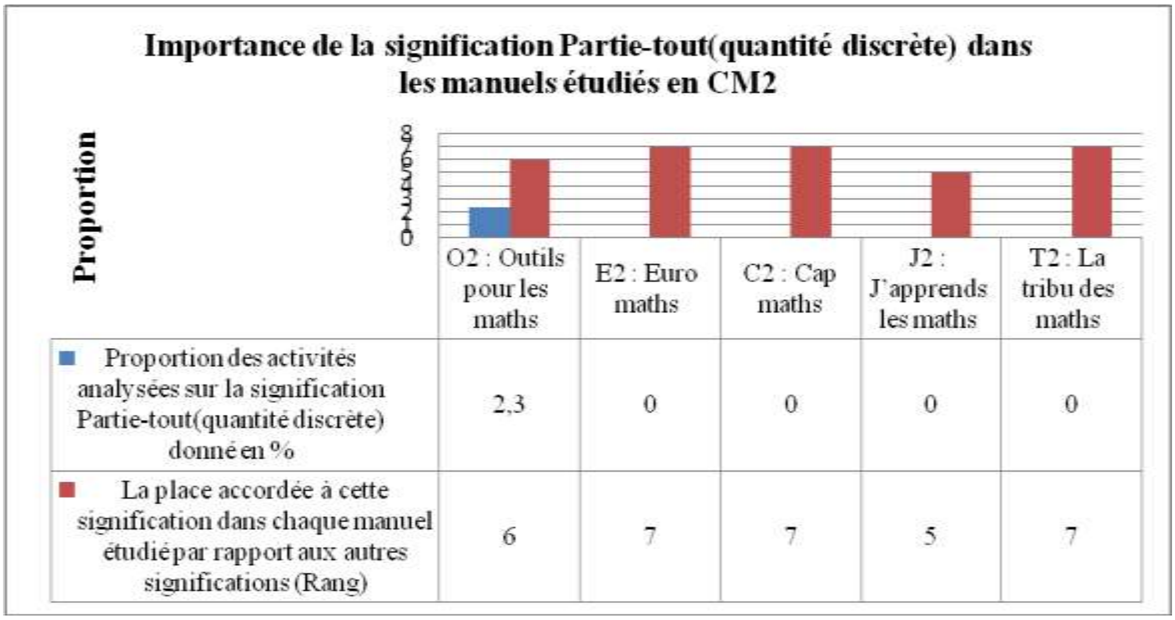


	O2 : Outils pour les maths	E2 : Euro maths	C2 : Cap maths	J2 : J'apprends les maths	T2 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Partie-tout(quantité continue) donné en %	28,74	25,4	23,33	27,27	24
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	2	2	2	2	2

FIGURE 36 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION PARTIE-TOUT (CONTINUE).

Les activités portant sur la signification *Partie-tout (quantité continue)* se classent dans des places centrales comparativement à celles portant sur les autres significations. En effet, la signification *Partie-tout (quantité continue)* se classe à la deuxième place derrière la signification *Nombre* dans les cinq manuels étudiés. En effet, 28,74% des activités analysées, dans le manuel O2, appartiennent à cette catégorie, 25,4% des activités dans celui de T2 ; il s'agit de 23,33% des activités qui font partie de cette catégorie dans le manuel C1 ; les activités privilégiant la signification *Partie-tout (quantité continue)* représentent 27,27% dans le manuel J1 ; enfin, 24% des activités sont attribuées à cette signification dans le manuel T1.

La signification Partie-tout (quantité discrète.)

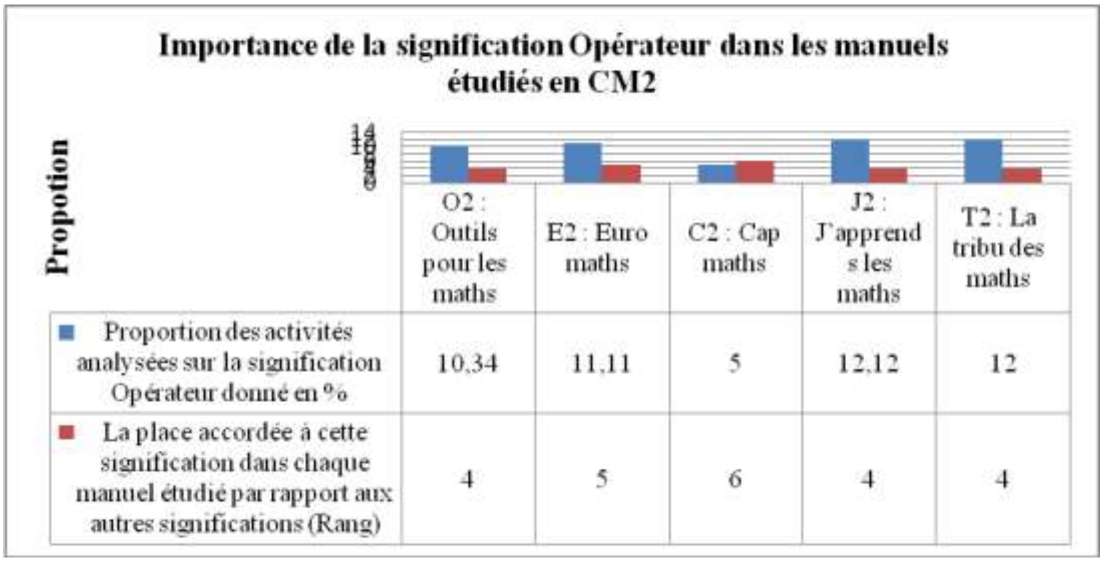


	O2 : Outils pour les maths	E2 : Euro maths	C2 : Cap maths	J2 : J'apprends les maths	T2 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Partie-tout(quantité discrète) donné en %	2,3	0	0	0	0
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	6	7	7	5	7

FIGURE 37 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION PARTIE-TOUT (DISCRETE).

Les activités analysées portant sur la signification *partie-tout (quantité discrète)* ne sont présentes que dans le manuel O2 avec 2,3% des activités, celles-ci se classent à la sixième place. Dans les quatre autres manuels E2, C2, J2 et T2, aucune activité faisant partie de cette catégorie n'a été trouvée.

La signification Opérateur



	O2 : Outils pour les maths	E2 : Euro maths	C2 : Cap maths	J2 : J'apprends les maths	T2 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Opérateur donné en %	10,34	11,11	5	12,12	12
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	4	5	6	4	4

FIGURE 38 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION OPERATEUR.

Ce graphique montre que, dans les trois manuels O2, J2 et T2, les activités portant sur cette signification se classent à la quatrième place, soit avec 10,34% des activités dans le manuel O2 derrière les significations *Nombre, Partie-tout (quantité continue)* et *Mesure*, avec 12,12% des activités dans J2 derrière celles de *Nombre, Partie-tout (quantité continue)* et

Quotient et avec 12% des activités dans T2 derrière celles de de *Nombre*, *Partie-tout (quantité continue)* et *mesure*. Le manuel E2 contient 11,11% des activités portant sur cette signification, ce qui la classe à la cinquième place derrière celles de *Nombre*, *Partie-tout (quantité continue)*, *Nombre sur une droite graduée* et *Mesure*. Enfin, le manuel C2 contient 5% des activités analysées dans cette catégorie, celle-ci se classe ainsi à la sixième classe.

La signification Rapport

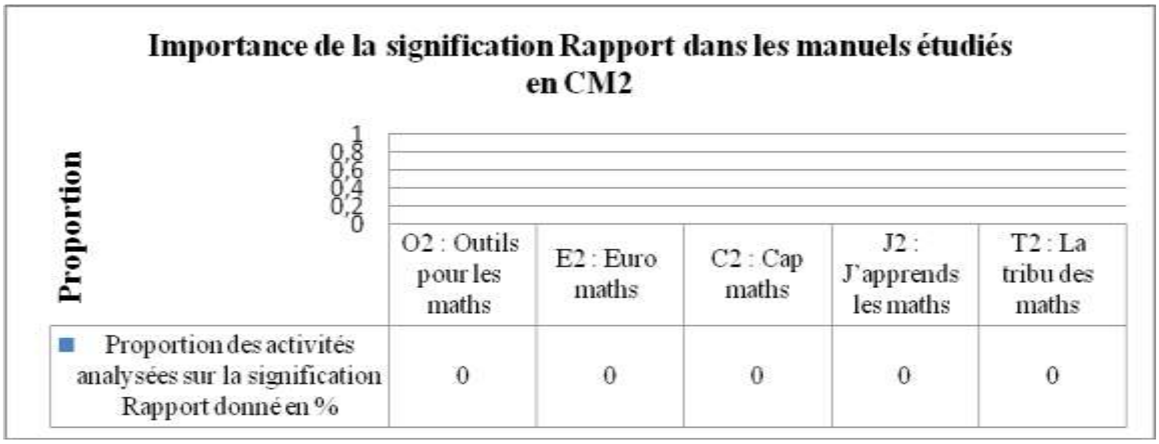


FIGURE 39 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION RAPPORT.

Les activités portant sur la signification *Rapport* sont complétement et pratiquement absentes dans les cinq manuels étudiés, aucune activité faisant, en effet, partie de cette signification n'a été trouvée.

La signification Quotient

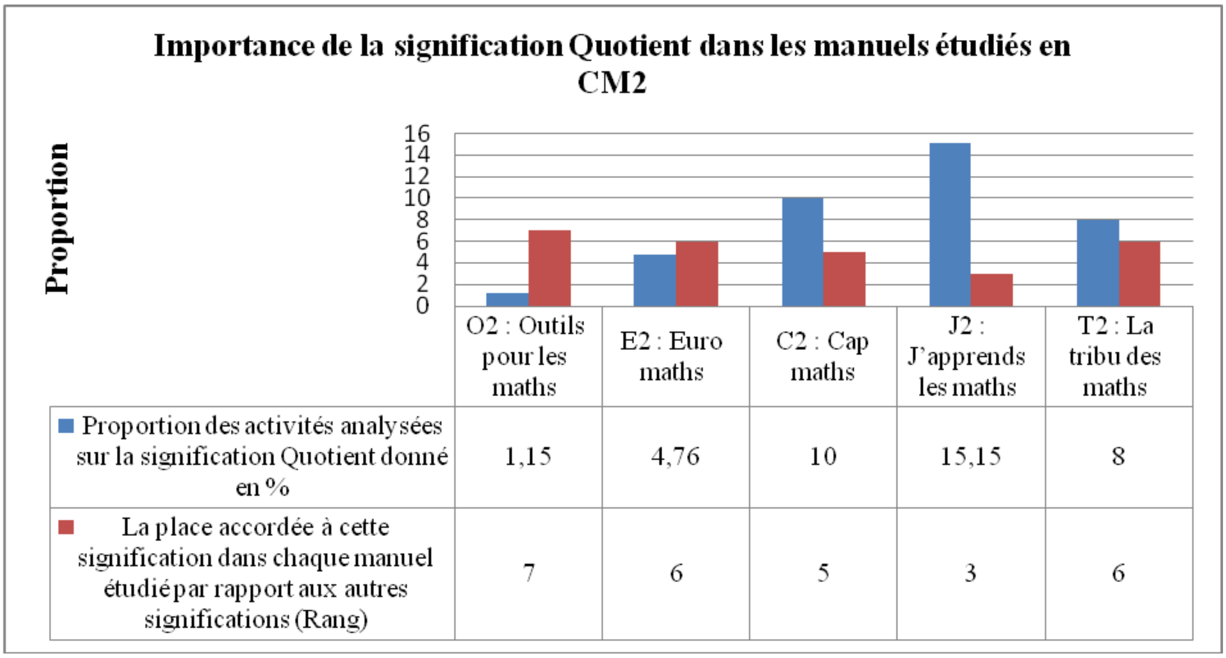


FIGURE 40 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION QUOTIENT.

Les activités portant sur la signification *Quotient* représentent 15,15% des activités analysées du manuel J2, ce qui la classe ainsi à la troisième place derrière les significations *Nombre* et *Partie-tout (quantité continue)*. Dans le manuel C2, cette signification se classe à la cinquième place avec 10% des activités, derrière celles de *Nombre*, *Partie-tout (quantité continue)*, *Mesure* et *Nombre sur la droite graduée*. Les activités où intervient la signification *Quotient* sont moins nombreuses dans les manuels E2, T2 et O2. En effet, 4,76% des activités du manuel E2 et 8% de T2 font partie de cette catégorie, ce qui la classe à la sixième place. Enfin, les activités portant sur cette signification la classent à la septième place dans celui de O2 avec 1,15% des activités.

La signification Mesure

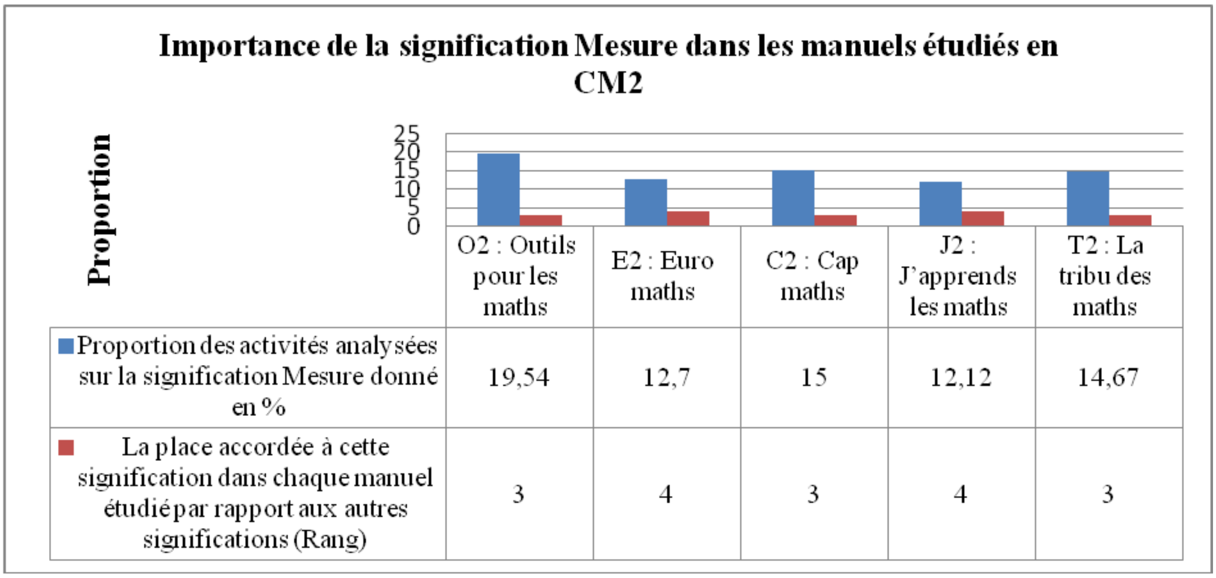
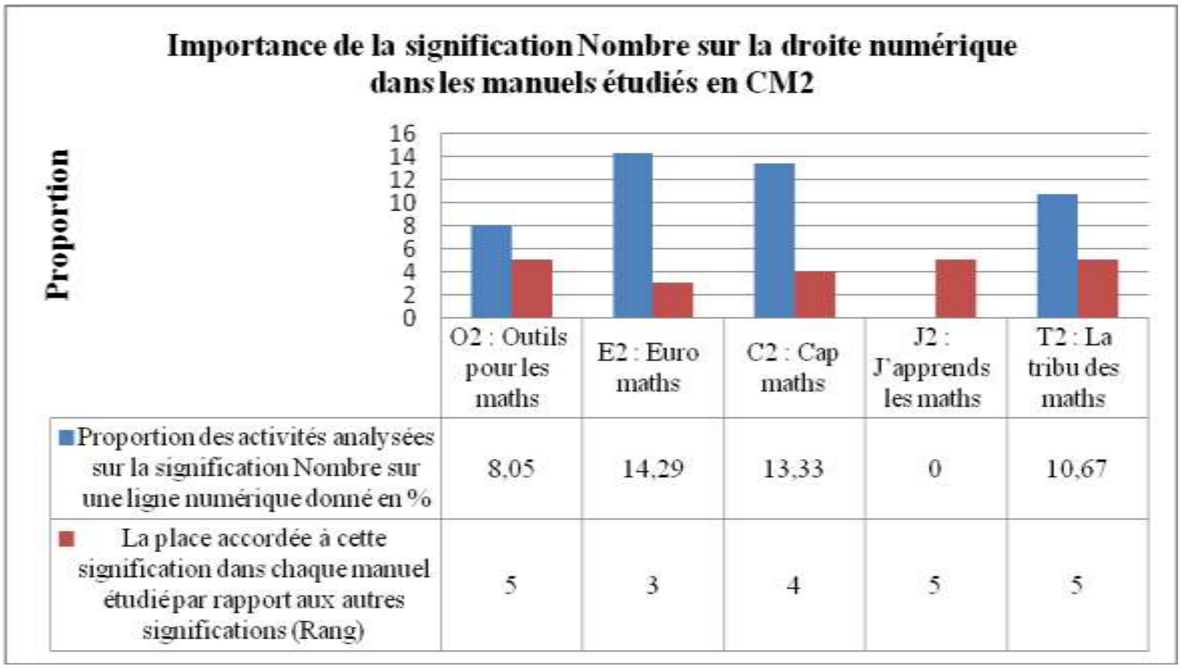


FIGURE 41 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION MESURE.

Ce graphique montre que la signification *Mesure* intervient dans plusieurs activités portant sur les fractions dans des manuels scolaires de CM2. Les activités portant sur celle-ci la classent à la troisième place derrière les deux significations *Nombre* et *Partie-tout (quantité continue)* dans les trois manuels O2, C2 et T2, soit avec 19,54% des activités dans O2, avec 15% des activités dans C2 et avec 14,67% des activités dans T2. Dans les deux manuels E2 et J2, les activités qui font partie de cette catégorie la classent à la quatrième place avec 12,7% des activités dans E2 derrière celles de *Nombre*, *partie-tout (quantité continue)* et *Nombre sur une droite graduée* et avec 12,12% des activités dans T2 derrière les significations *Nombre*, *partie-tout (quantité continue)* et *Mesure*.

La signification Nombre sur une droite numérique

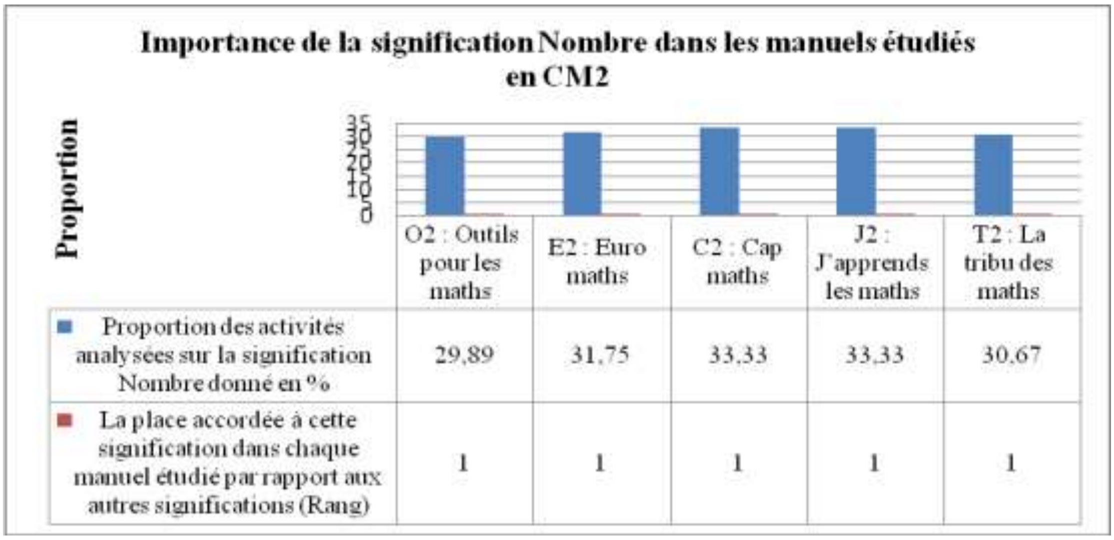


	O2 : Outils pour les maths	E2 : Euro maths	C2 : Cap maths	J2 : J'apprends les maths	T2 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Nombre sur une ligne numérique donné en %	8,05	14,29	13,33	0	10,67
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	5	3	4	5	5

FIGURE 42 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION NOMBRE SUR UNE DROITE GRADUEE.

Les activités portant sur la signification *Nombre sur une droite graduée* sont peu présentes dans les trois manuels O2, C2 et T2. Celles-ci se classent à la quatrième place dans le manuel C2 avec 13,33% des activités derrière les significations *Nombre*, *partie-tout (quantité continue)* et *Mesure*. Elles se classent à la cinquième place dans les deux manuels O2 et T2, celui de O2 contient 8,05% des activités et celui de T2 en contient 10,67%. Enfin, les activités portant sur cette signification sont effectivement absentes dans le manuel J2.

La signification Nombre



	O2 : Outils pour les maths	E2 : Euro maths	C2 : Cap maths	J2 : J'apprends les maths	T2 : La tribu des maths
Proportion des activités analysées sur la signification Nombre donné en %	29,89	31,75	33,33	33,33	30,67
La place accordée à cette signification dans chaque manuel étudié par rapport aux autres significations (Rang)	1	1	1	1	1

FIGURE 43 – ANALYSE DES MANUELS SELON LA SIGNIFICATION NOMBRE.

Selon ce graphique, les activités qui portent sur la signification *Nombre* dominent dans les cinq manuels choisis O2, E2, C2, J2 et T2. En effet, 29,89% des activités analysées du manuel O2 font partie de cette catégorie, 31,75% des activités de celui de E2, 33,33% des activités dans C2, 33,33% des activités dans J2 et enfin 30,67% des activités du manuel T2.

<u>La signification Probabilité ou fréquence</u>

Les activités portant sur la signification *Probabilité* sont tout à fait absentes dans les cinq manuels de CM2 étudiés, aucune activité n’a été trouvée sur cette signification.

2.2.4.3. Synthèse de l'analyse des manuels de CM2 quant aux différentes significations de la fraction présentes.

Pour débuter cette section, avant de présenter nos résultats quant aux significations de la fraction présentes dans les manuels scolaires choisis de CM2, il nous faut noter que les différences observées entre les répartitions des significations de la fraction dans ces manuels sont statistiquement significatives. En effet, selon le test du Khi-deux effectué, la valeur du Khi-deux est de 31,21, avec le degré de liberté 28. Or, au risque de 5% (0,05), la valeur maximale que peut prendre le Khi-deux est de 41,337. Comme 31,21 est inférieur à 41,337, nous pouvons conclure que nous ne rejetons pas l’hypothèse d’indépendance au risque de 5% de se tromper. Donc, cela signifie que les résultats obtenus autour des significations de la fraction avec ces cinq manuels ne sont pas généralisables.

Par ailleurs, d’un manuel scolaire de CM2 à l’autre, nous constatons que la place accordée aux diverses significations de la fraction est différente. Nous allons maintenant présenter nos résultats concernant les différentes significations de la fraction présentes dans chaque manuel scolaire étudié avec les pourcentages des activités portant sur chaque signification et avec la place accordée à chacune de celles-ci :

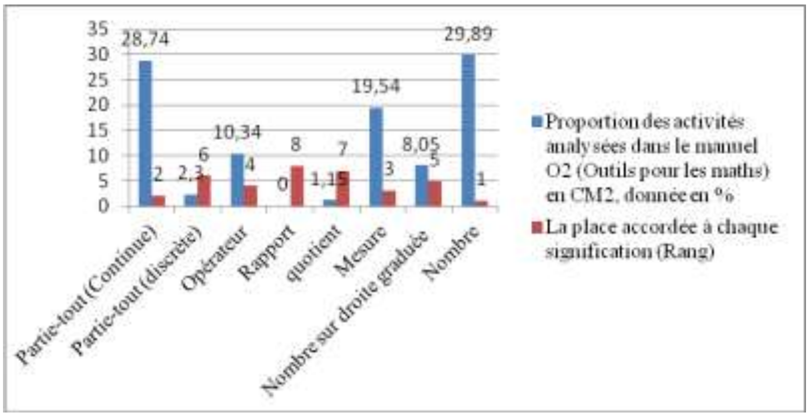


FIGURE 44 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL OUTILS POUR LES MATHS (O2).

Ce graphique nous montre la place accordée à chaque signification de la fraction dans manuel O2. Ici, c'est la signification *Nombre* qui se classe à la première place avec 29,89% des activités analysées. La deuxième place est prise par la signification *Partie-tout (quantité continue)* avec 28,74% des activités. Celle de *Mesure* vient à la troisième place avec 19,54% des activités. La quatrième place est occupée par la signification *Opérateur* avec 10,34% des activités. 8,05% des activités portant sur la signification *Nombre sur une droite graduée*, ce qui la classe à la cinquième place. Les deux significations *Quotient* et *Partie-tout (quantité discrète)* sont les moins présentes, soit avec 2,3% des activités sur celle de *Partie-tout (quantité discrète)* qui vient à la sixième place et avec 1,15% des activités portant sur celle de *Quotient* qui se classe à la septième place. Enfin, aucune activité faisant partie de la signification *Rapport* n'a été trouvé.

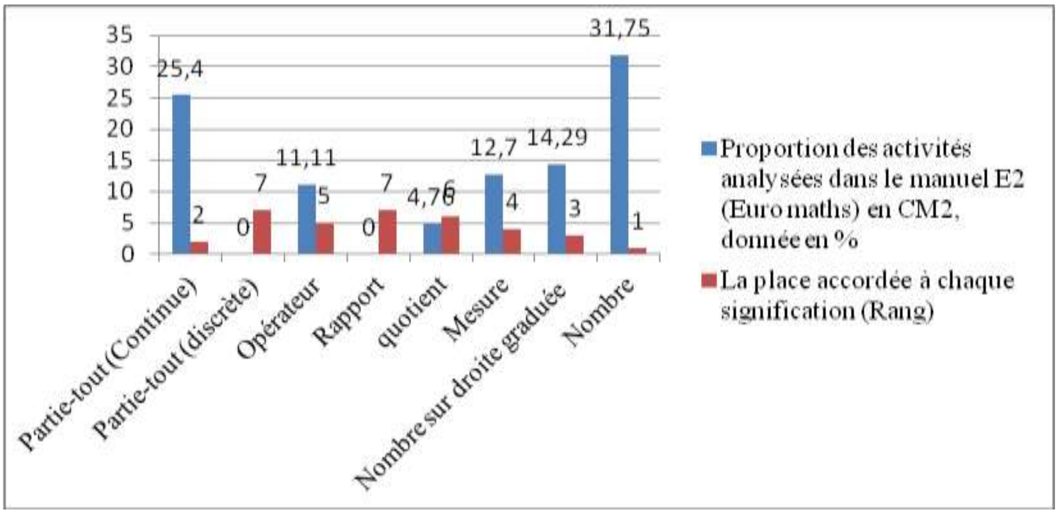


FIGURE 45 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL EURO MATHS (E2).

Dans le manuel E2, la signification *Nombre* domine et prend la première place avec 31,75% des activités. La signification *Partie-tout (quantité continue)* se classe à la deuxième place avec 25,4% des activités analysées. A la troisième place, c'est la signification *Nombre sur une droite graduée* qui se classe avec 14,29% des activités et la signification *Mesure* vient dans ce manuel à la quatrième place avec 12,7% des activités. La signification *Opérateur* se classe à la cinquième place avec 11,11% des activités et la signification Quotient est la moins présente qui se classe à la sixième place avec 4,76% des activités analysées. D'ailleurs, les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* ne sont pas exploitées dans ce manuel.

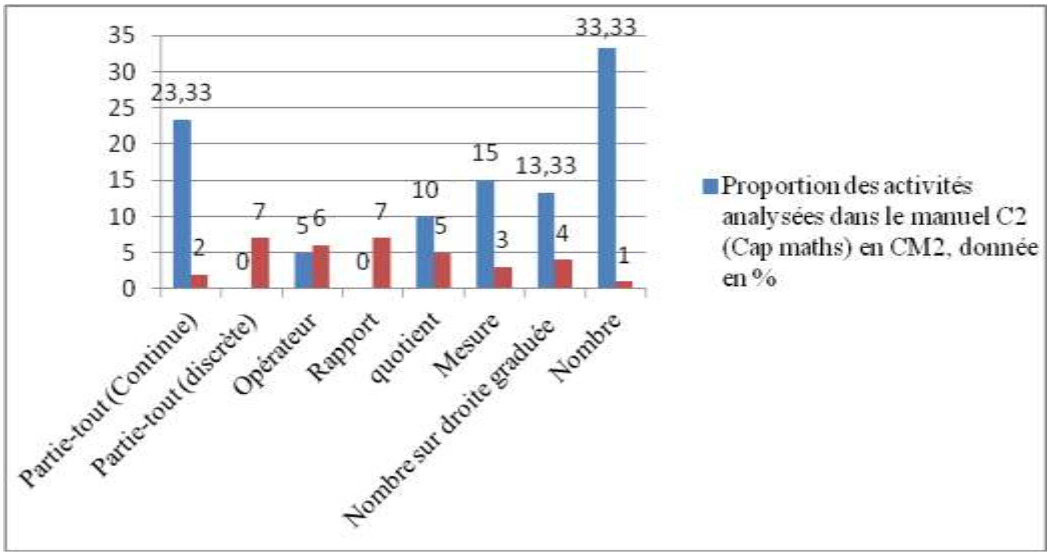


FIGURE 46 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL *CAP MATHS* (C2).

Les trois significations *Nombre*, *Partie-tout (quantité continue) et Mesure* occupent respectivement les trois premières places dans ce manuel. En effet, la signification *Nombre* vient à la première place avec 33,33% des activités, celle de *Partie-tout (quantité continue)* se classe à la deuxième place avec 23,33% des activités et celle de *Mesure* vient à la troisième place avec 15 des activités analysées. 13,33% des activités portant sur la signification *Nombre sur une droite graduée*, ce qui la classe à la quatrième place. Les significations les moins présentes sont celles de Quotient qui se classe à la cinquième place avec 10% des activités et celle d'*Opérateur* qui s'occupe la sixième place avec 5% des activités. D'ailleurs, les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* ne sont pas exploitées dans ce manuel.

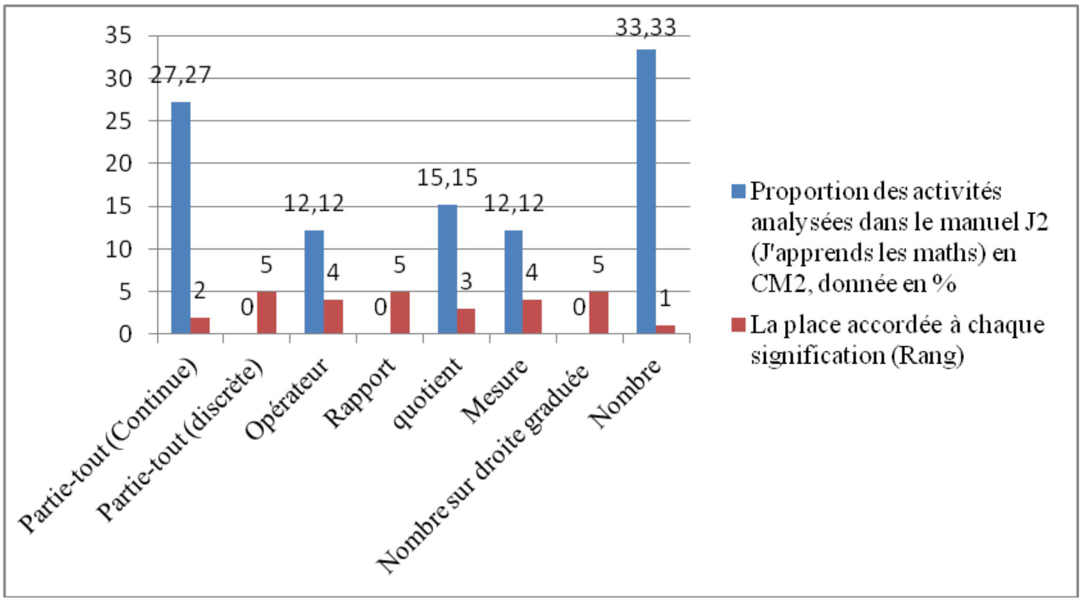


FIGURE 47 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL J'APPRENDS LES MATHS (J2).

Ici, dans le manuel J2, nous observons que la signification *Nombre* se classe à la première place avec 33,33% des activités. Ensuite, c'est la signification *Partie-tout (quantité continue)* qui occupe la deuxième place avec 27,27% des activités analysées. Puis, vient à la troisième place la signification *Quotient* avec 15,15% des activités. De plus, 12,12% des activités portent sur chacune des deux significations *Mesure et Opérateur*, ce qui les classe à la quatrième place. Enfin, les significations *Partie-tout (quantité discrète)*, *Rapport* et *Nombre sur une droite graduée* ne sont pas effectivement présentes dans ce manuel.

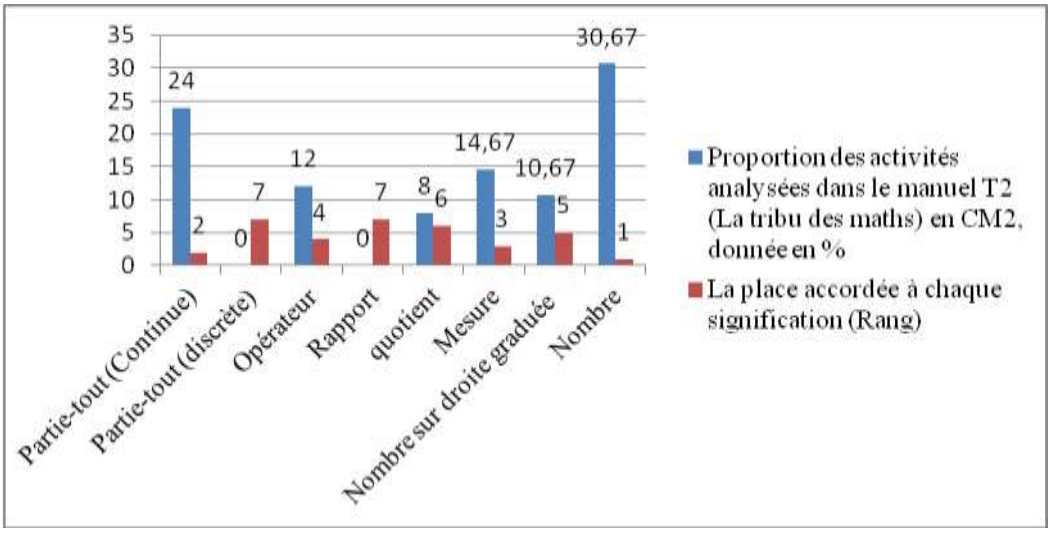


FIGURE 48 – REPARTITION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION DANS LE MANUEL LA TRIBU DES MATHS (T2).

Dans le manuel T2, la signification *Nombre* se classe à la première place avec 30,67% des activités. La signification *Partie-tout (quantité continue)* vient à la deuxième place avec 24% des activités analysées. A la troisième place, c'est la signification *Mesure* qui se classe avec 14,67% des activités. Ensuite, la signification *Opérateur* occupe la quatrième place avec 12% des activités. Puis, la signification *Nombre sur une droite graduée* se place à la cinquième position avec 10,67% des activités. La signification *Quotient* est moins présente dans ce manuel, elle se classe à la sixième place avec 8% des activités analysées. D'ailleurs, les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* ne sont pas pratiquement exploitées dans ce manuel.

Malgré les différences qui sont constatées entre ces cinq manuels scolaires de CM2 par rapport à la place accordée aux significations de la fraction, il semble que certaines significations demeurent plus présentes dans l'ensemble de ces manuels. D'après les places accordées à chaque signification de la fraction et d'après également les pourcentages d'activités classées sous chacune de ces significations, on voit que les activités qui privilégient les deux significations *Nombre* et *Partie-tout (Quantité continue)* sont les plus présentes dans les cinq manuels choisis de CM2.

En premier lieu, la signification *Nombre* domine dans les cinq manuels O2, E2, C2, J2 et T2. En effet, les activités qui font partie de cette signification représentent 29,89% dans le manuel O2, 31,75% dans celui de E2, 33,33% dans le manuel C2, 33,33% dans le manuel J2 et 30,67% dans celui de T2. Cette signification est alors importante comparativement aux autres significations.

En deuxième lieu, dans les cinq manuels étudiés, la signification *Partie-tout (quantité continue)* arrive à la deuxième place derrière la signification *Nombre*. En effet, 28,74% des activités dans O2, 25,4% des activités dans E2, 23,33% des activités dans C2, 27,27 % des activités dans J2 et avec 24% des activités dans T2 font partie de cette signification.

En troisième lieu, la signification *Mesure* occupe la troisième position dans les trois manuels O2, C2 et T2 derrière les deux significations *Nombre* et *partie-tout (quantité continue).* En effet, 19,54% des activités font partie de cette signification dans le manuel O2, 15% des activités dans le manuel C2 et 14,67% des activités dans le manuel T2. D'autre part, cette signification vient à la quatrième place dans les deux manuels E2 et J2, soit avec 12,7% des activités dans E2 et avec 12,12% des activités dans J2.

En quatrième lieu, la signification *Nombre sur la droite graduée* se place à la troisième position dans le manuel E2 avec 14,29% des activités, derrière les deux significations *Nombre* et *Partie-tout (quantité continue)*. Dans le manuel C2, cette signification vient à la quatrième place avec 13,33% des activités. Elle se classe à la cinquième place dans les trois manuels O2, J2 et T2, soit avec 8,05% des activités dans O2, avec 0% des activités dans J2 et avec 10,67% des activités dans T2.

En cinquième lieu, la signification *Opérateur* se place à la quatrième position dans les trois manuels O2, J2 et T2, soit avec 10,34% des activités dans O2, avec 12,12% des activités dans J2 et avec 12% des activités dans T2. Elle vient à la cinquième place dans le manuel E2 avec 11,11% des activités et celle-ci se classe à la sixième place dans le manuel C2 avec 5% des activités.

En sixième lieu, la signification *Quotient* se classe à la troisième place, derrière les deux significations *Nombre* et *Partie-tout (quantité continue),* dans le manuel J2 avec 15,15% des activités. Cette signification vient à la cinquième place dans le manuel C2 avec 10% des activités. Dans les deux manuels E2 et T2, cette signification occupe la sixième position, soit avec 4,76% des activités dans E2 et avec 8 % des activités dans T2. Enfin, elle se classe à la septième place dans le manuel O2 avec 1,15% des activités.

La signification *Partie-tout (quantité discrète)* n'est présente que dans le manuel O2 avec 2,3% des activités analysées. Les activités sur la signification *Rapport* sont effectivement absentes dans les cinq manuels étudiés.

Enfin, la signification de la fraction en tant que *Probabilité* est absente dans les cinq manuels choisis et elle se place toujours en dernier par rapport aux autres significations.

2.2.5. Liens entre les différentes significations présentes dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2

Rappelons la première question posée dans la problématique qui est liée au premier objectif de la recherche : « Quelles significations de la fraction sont en jeu dans les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 ? Quels liens et distinctions entre ces deux niveaux scolaires CM1 et CM2 pouvons-nous identifier ? ».

Afin de répondre à notre question, « Quels liens et distinctions entre ces deux niveaux scolaires CM1 et CM2 pouvons-nous identifier », nous allons tenter d'établir des liens et des distinctions entre les significations de la fraction présentes dans les manuels choisis. Pour cela, nous résumons les significations de la fraction les plus présentes et celles les moins présentes afin de présenter ensuite les liens et distinctions qui existent entre les manuels de CM1 et ceux de CM2.

Cependant, avant de présenter nos résultats, il est utile de préciser que les différences entre les répartitions de chacune des significations de la fraction sont statistiquement significatives d'un niveau scolaire à un autre. Voici le tableau de contingence pour calculer la valeur de Khi-deux :

TABLEAU 25– TABLEAU DE CONTINGENCE.

	Partie-tout (quantité continue)	Partie-tout (quantité discrète)	Opérateur	Rapport	Quotient	Mesure	Nombre sur droite graduée	Nombre	Total
CM1	149	1	40	3	21	120	48	59	441
CM2	91	2	36	0	26	53	32	111	351
Total	240	3	76	3	47	173	80	170	792

En effet, selon le test du Khi-deux qui a été effectué **(Annexe 5),** la valeur du Khi-deux est de 53,61 avec 7 degrés de liberté. Or, au risque de 5% (0,05), la valeur maximale que peut prendre le Khi-deux est de 14,06. Comme 53,61 est supérieur à 14,06, nous pouvons conclure que nous rejetons l'hypothèse d'indépendance et nous acceptons l'hypothèse de dépendance au risque de 5% de se tromper. Cela signifie que nous pouvons généraliser les résultats obtenus autour des significations de la fraction avec ces manuels scolaires à un plus grand nombre de manuels.

Nous rappelons ici que, malgré les différences observées entre les manuels scolaires, il apparait que certaines significations sont plus présentes que d'autres. Nous comparons effectivement l'importance des significations de la fraction de chaque manuel par *les pourcentages et la place accordée* avec celle des autres manuels afin d'arriver, finalement, à avoir un ordre général d'importance pour l'ensemble des manuels analysés d'un niveau scolaire.

Premièrement, dans les manuels scolaires de CM1, les significations de la fraction les plus exploitées et les plus présentes à travers les activités analysées sont respectivement les suivantes : *Partie-tout (quantité continue), Mesure, Nombre* et *Nombre sur une droite graduée.* D'un autre côté, les significations les moins présentes sont respectivement *Opérateur* et *Quotient*. Enfin, les significations absentes de ces manuels sont *partie-tout (quantité discrète) et Rapport.*

Nous présentons dans le tableau suivant ces significations avec les pourcentages de leurs présences dans les manuels scolaires consultés :

TABLEAU 26– PRESENTATION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION LES PLUS EXPLOITEES DANS LES MANUELS SCOLAIRES DE CM1.

	Les manuels scolaires étudiés				
Les significations les plus exploitées	**O1**	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
Partie-tout (quantité continue)	41.84 %	22.95%	43.59%	36.24%	28.38%
Mesure	22,45%	36,07%	30,77%	15,94%	25,68%
Nombre	5,1%	15,57%	11,54%	27,54%	9,46%
Nombre sur une droite graduée	17,35%	10,66%	14,1%	0,00%	9,46%
Les significations les moins exploitées	**O1**	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
Opérateur	10,2%	7,38%	0,00%	8,7%	20,27%
Quotient	3,06%	4,01%	0,00%	11,59%	6,76%
Les significations absentes	**O1**	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
partie-tout (quantité discrète)	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Rapport	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Deuxièmement, dans les manuels scolaires de CM2, les significations de la fraction les plus présentes et les plus observées à travers les activités analysées, portant sur les fractions, sont respectivement les suivantes : *Nombre*, *Partie-tout (quantité continue)* et *Mesure*. D'autre part, les significations les moins présentes sont respectivement *Opérateur*, *Nombre sur une droite graduée* et *Quotient*. Enfin, la signification *Rapport* est effectivement absente de ces manuels et la signification *Partie-tout (quantité discrète)* n'est présente que dans le manuel O2 avec 2,3% des activités analysées.

TABLEAU 27– PRESENTATION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION LES PLUS EXPLOITEES DANS LES MANUELS SCOLAIRES DE CM2.

	Les manuels scolaires étudiés				
Les significations les plus exploitées	**O2**	**E2**	**C2**	**J2**	**T2**
Nombre	29,89%	31,75%	33,33%	33,33%	30,67%
Partie-tout (quantité continue)	28,74%	25,4%	23,33%	27,27%	24%
Mesure	19,54%	12, 7%	15%	12,12%	14,67%
Les significations les moins exploitées	**O2**	**E2**	**C2**	**J2**	**T2**
Opérateur	10,34%	11,11%	5%	12,12%	12%
Nombre sur une droite graduée	8,05	14,29	13,33	0	10,67
Quotient	1,15%	4,76%	10%	15,15%	8%
Les significations absentes	**O2**	**E2**	**C2**	**J2**	**T2**
Rapport	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Partie-tout (quantité discrète)	2,3%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Nous allons maintenant tenter de mettre en évidence les liens et les distinctions qui peuvent exister entre le niveau CM1 et celui de CM2 par rapport aux significations repérées et manifestées dans les manuels scolaires analysés :

Premièrement, dans les deux niveaux scolaires, ce sont les activités relatives aux trois significations *Partie-tout (quantité continue)*, *Nombre* et *Mesure* qui sont les plus importantes. En effet, c'est la signification *Partie-tout (quantité continue)* qui paraît dominer dans l'ensemble des manuels analysés en CM1 et la signification *Mesure* vient en deuxième place, alors qu'en CM2, c'est celle de *Nombre* qui semble dominer dans l'ensemble des manuels de CM2 et la signification *Partie-tout (quantité continue)* vient en deuxième place puis en troisième place vient celle de *Mesure*.

Deuxièmement, la signification *Nombre sur une droite graduée* occupe la troisième ou la quatrième place dans les manuels de CM1, tandis que, dans les manuels de CM2 elle se classe à la troisième, à la quatrième ou à la cinquième place.

Troisièmement, la signification *Opérateur* vient à la troisième, à la quatrième ou à la cinquième place dans les manuels de CM1, alors que, dans les manuels de CM2, celle-ci se classe à la quatrième, à la cinquième ou à la sixième place.

Quatrièmement, dans les manuels des deux niveaux scolaires CM1 et CM2, c'est la signification *Quotient* qui semble être la moins présente.

Enfin, les activités selon les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* se retrouvent à peu près de la même façon dans les deux niveaux scolaires. Celles portant sur la signification *Rapport* sont effectivement absentes dans les manuels analysées de ces deux niveaux, CM1 et CM2, et à l'exclusion du manuel O2 (2,3%), les activités portant sur la signification *Partie-tout (quantité discrète)* sont également absentes dans tous les manuels des deux niveaux.

2.2.6. Analyse des données issues des questionnaires des élèves.

Le but de l'analyse des réponses des élèves au questionnaire est de tenter d'apporter une réponse à notre deuxième question de recherche posée dans la problématique : « De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ? » Cette analyse aidera à la vérification de notre deuxième hypothèse de recherche : « La signification de la fraction la plus présente, chez les élèves de CM1 et de CM2, est celle de *Partie d'un tout*. ».

Nous allons maintenant donner des exemples sur l'analyse de réponse des élèves de CM1 et de CM2 au questionnaire. Nous avons déjà indiqué que les réponses fournies par les élèves ont été classées selon les diverses significations de la fraction définies et abordées dans la partie théorique. Nous avons classé chaque réponse dans une catégorie lorsque cela était possible. Pour chacun des deux niveaux scolaires CM1 et CM2, nous allons, dans la section qui vient, exposer un exemple d'analyse de réponse d'élèves.

2.2.6.1. Exemple d'analyse de réponse des élèves de CM1

Pour toi, une fraction, qu'est-ce que c'est ?

- « Quelque chose qu'on peut partager exemple : 2/8. Il restera 6 parts de gâteau » (élève N° 52).
- « C'est par exemple, un rond qu'on partage en 4 parties, et qui en a 2 parties qui sont coloriées on appelle deux quarts » (élève N° 68).
- « Une fraction c'est quand on coupe par exemple un gâteau et on prend une part » (élève N° 81).
- « J'ai une pizza, je la partage en 4 et j'en mange 1 part » (élève N° 116).
- « C'est quelque chose qui coupe des choses, par exemple: on coupe une tarte en 4 et j'en prends une, j'ai pris un 1/4 » (élève N° 152).

Nous attribuons la signification *Partie-tout (quantité continue)* à ces réponses. Nous constatons que tous ces exemples renvoient à la situation dans laquelle une quantité continue, c'est à dire un seul objet, (un rond, une pizza, un gâteau), est partitionnée en plusieurs parties égales afin de choisir certaines parties sur le tout. En effet, les termes *coupe* et *partage* utilisés par ces élèves renvoient exactement à l'idée essentielle de la signification *Partie-tout (quantité continue)*, celle qui est l'action de partage en partie égales. De plus, les expressions que les élèves utilisent « j'en mange 1 part », « on prend une part », « 2 parties qui sont coloriées » renvoient à l'idée du choix de certaines parties d'un ensemble de parties composant un tout.

2.2.6.2. Exemple d'analyse de réponse des élèves de CM2

Pour toi, une fraction, qu'est-ce que c'est ?

- « C'est un calcul compliqué mais qui sert dans la vie » (élève N° 51).
- « C'est des calculs des maths » (élève N° 53).
- « C'est une opération qui nous sert » (élève N° 67).
- « C'est une opération qui sert à partager des choses » (élève N° 74).
- « C'est une forme de nombre ou de calcul » (élève N° 75).

Nous classons ces réponses dans la signification *Nombre.* En effet, le terme *opérations* renvoie aux fractions qui servent à effectuer des calculs. Nous pouvons dire que, dans cet exemple, aucune autre signification ne peut intervenir.

Après avoir présenté et classé les réponses, données par les élèves de CM1 et de CM2 au questionnaire écrit, dans des tableaux spécifiques, nous allons maintenant étudier les réponses relatives à chaque signification de la fraction. Le but est de déterminer ensuite les significations de la fraction les plus manifestées et utilisées par les élèves de CM1 et ceux de CM2. 160 élèves de CM1 et 115 élèves de CM2 répondent à notre questionnaire. Etant donné que le nombre d'élèves n'est pas le même pour les deux niveaux scolaires, nous choisissons le pourcentage pour comparer les résultats obtenues.

2.2.6.3. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la deuxième question

Pour toi, une fraction, qu'est-ce que c'est ?

Cette question est posée pour savoir ce que l'élève comprend de la fraction et pour déterminer quelle signification il utilise pour définir la fraction. Les élèves vont répondre à la question en se référant à l'une des significations de la fraction que nous avons présentée dans notre travail. De plus, les élèves peuvent définir la fraction comme un symbole d'écriture du nombre rationnel qui se compose d'un numérateur et d'un dénominateur.

Nous allons maintenant présenter les pourcentages de réponses manifestées par les élèves de CM1 et de CM2 sur la deuxième question du questionnaire.

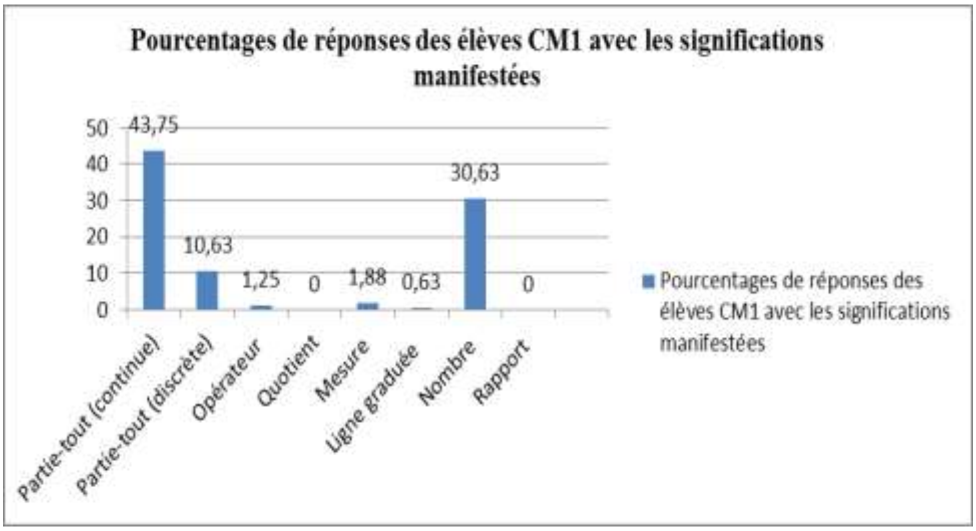


FIGURE 49 – PRESENTATION LES POURCENTAGES DE REPONSES DES ELEVES DE CM1 AVEC LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION MANIFESTEES A LA QUESTION N° 2 DU QUESTIONNAIRE.

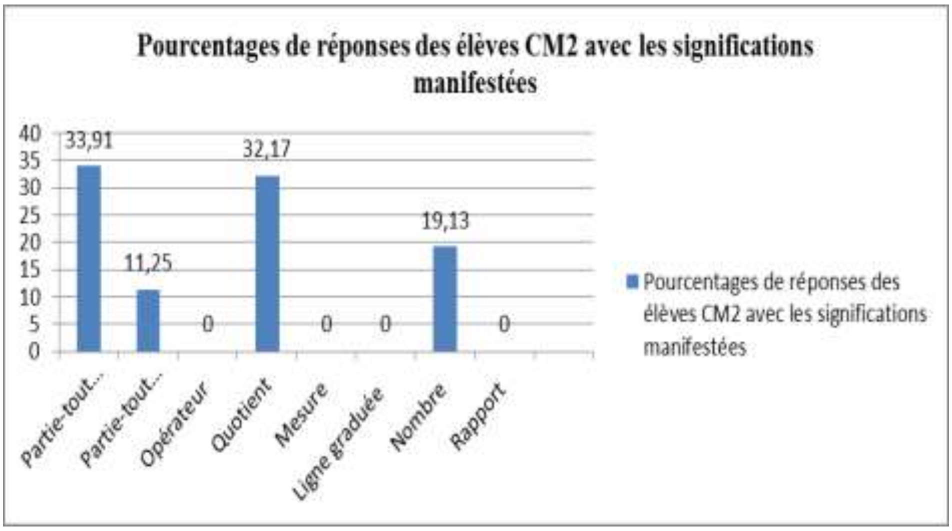


FIGURE 50 – PRESENTATION DES POURCENTAGES DE REPONSES DES ELEVES DE CM2 AVEC LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION MANIFESTEES A LA QUESTION N° 2 DU QUESTIONNAIRE.

Selon ces deux graphiques, nous observons que la signification *Partie-tout (quantité continue)* est celle qui est la plus utilisée chez les élèves de CM1 et de CM2 pour définir la fraction. En effet, 43,75% d'élèves de CM1et 33,91% de ceux de CM2 l'utilisent pour définir la fraction. Comme nous l'avons déjà vu dans la partie théorique, la définition de la signification Partie-tout (quantité continue) consiste à considérer une quantité continue (objet ou région) et à la subdiviser en parties égales afin de choisir certaines parties sur le tout. Les définitions données par les élèves des deux niveaux rejoignent cette définition. Par exemple : « C'est par exemple, un rond qu'on partage en 4 parties, et qui en a 2 parties qui sont coloriées on appelle deux quarts» (élève N° 68, niveau CM1) ou encore « Si on prend un cercle et qu'on le partage en deux c'est un demi 1/2. Si on prend un carré et qu'on le partage en 4 et on en prend 3 c'est 3/4» (élève N° 97, niveau CM2).

10,63% d'élèves de CM1 et 11,25% de ceux de CM2 utilisent la signification *Partie-tout (quantité discrète)* pour définir une fraction. Par exemple : « Une fraction sert à partager des objets » (élève N° 7, niveau CM1) ou encore « C'est quelque chose quand on partage, quand on veut savoir combien de parts partagés» (élève N° 73, niveau CM2).

1,25% (2/160 élèves) d'élèves de CM1 utilisent la signification *Opérateur* pour définir une fraction, par contre, aucun élève de CM2 n'utilise celle-ci pour définir la fraction.

32,17% de CM2 utilisent celle de *Quotient* pour définir une fraction et elle n'est pas utilisée par les élèves de CM1.

1,88% d'élèves de CM1 utilisent la signification *Mesure* pour définir la fraction, tandis qu'aucun de ceux de CM2 n'utilise celle-ci pour donner une définition à la fraction.

La signification *Nombre sur une droite graduée* n'est pas utilisée par les élèves de CM2 mais elle est utilisée par un seul élève de CM1 pour définir la fraction.

La signification *Nombre* est utilisée par 30,63% d'élèves de CM1 et par 19,13% de ceux de CM2 pour définir une fraction. Par exemple : « C'est des nombres, des calculs » (élève N° 23, niveau CM1) ou encore « Une fraction, c'est un nombre » (élève N° 112, niveau CM2).

La signification Rapport n'est pas utilisée par les élèves des deux niveaux pour définir la fraction.

Ces observations nous poussent à créer une nouvelle catégorie qui peut nous aider pour classer et analyser les réponses des élèves, c'est celle de « Ecriture fractionnaire ». Nous n'allons pas considérer cette catégorie comme une des significations attribuées à la fraction, mais comme une manière de la définir. En effet, un bon nombre d'élève définissent la fraction en exprimant son écriture qui comporte un numérateur et un dénominateur. 14,38% d'élèves de CM1 et 22,61% de ceux de CM2 utilisent cette signification pour définir la fraction.

Enfin, nous avons 13,75% (22/160 élèves) d'élèves de CM1 et 9,57% (11/115 élèves) qui n'ont pas répondu pour donner une définition à la fraction.

2.2.6.4. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 A à la troisième question

Donne un exemple où on peut utiliser les fractions dans la vie quotidienne et explique pourquoi ?

Le but de cette question est de savoir quelle signification de la fraction vient à l'esprit de l'élève en premier et de voir quelle signification il utilise pour donner un exemple du quotidien sur les fractions. Nous disons que la signification à laquelle l'élève a pensé est probablement celle avec laquelle il est le plus familier. Les élèves vont répondre à la question en se référant à l'une des significations de la fraction présentées dans notre travail. De plus, les élèves peuvent donner un exemple sur les fractions sous la forme d'une écriture du nombre rationnel qui se compose d'un numérateur et d'un dénominateur comme la fraction 1/2.

Nous allons maintenant présenter les pourcentages de réponses manifestées par les élèves de CM1 et de CM2 à cette question.

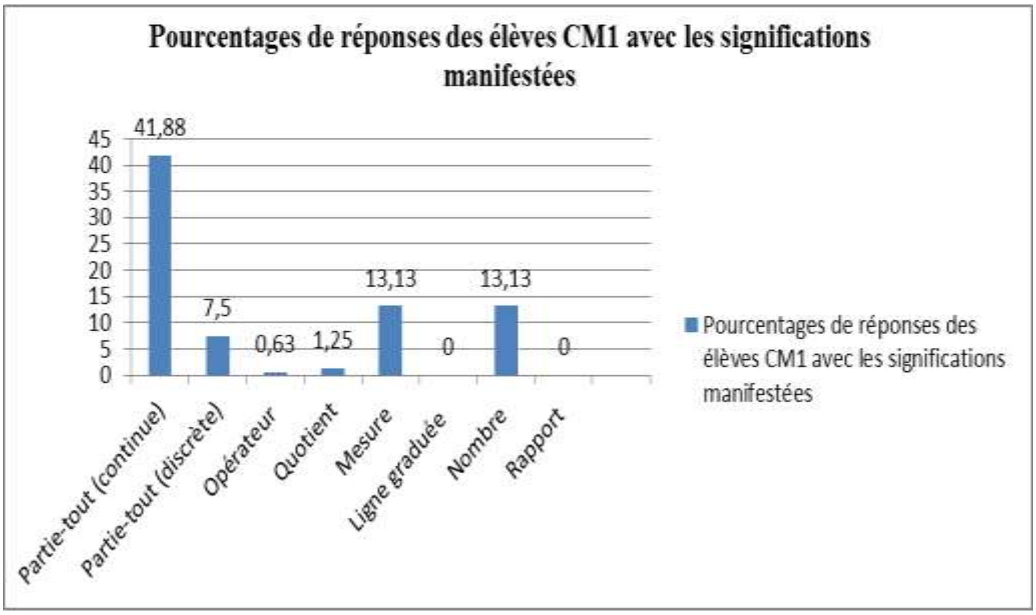


FIGURE 51 – PRESENTATION LES POURCENTAGES DE REPONSES DES ELEVES DE CM1 ET LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION MANIFESTEES A LA QUESTION N° 3 DU QUESTIONNAIRE.

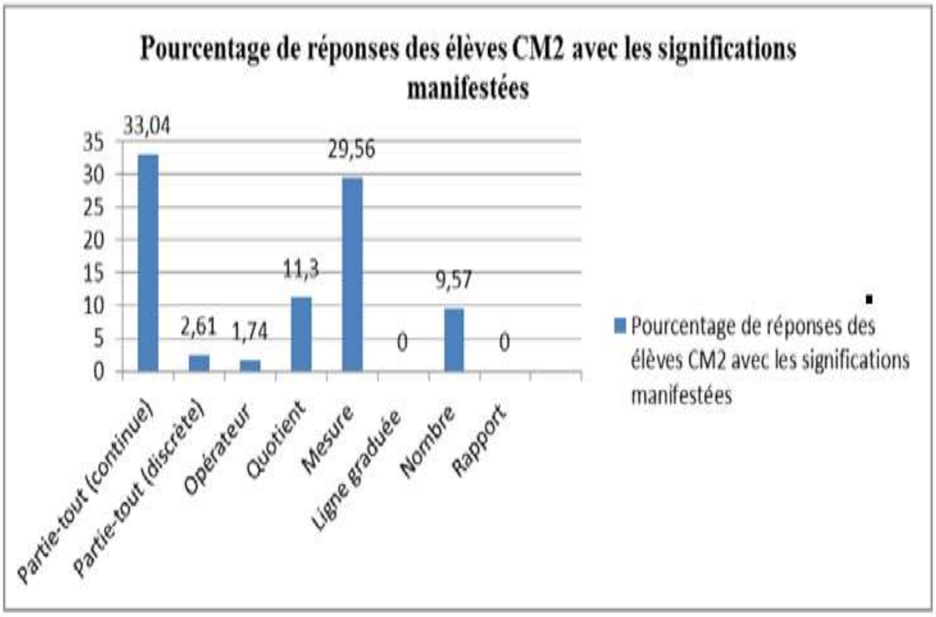


FIGURE 52 – PRESENTATION LES POURCENTAGES DE REPONSES DES ELEVES DE CM2 ET LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION MANIFESTEES A LA QUESTION N° 3 DU QUESTIONNAIRE.

Chez les élèves des deux niveaux CM1 et CM2, la signification partie-tout (quantité continue) se classe à la première place en tant que référence pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions dans la vie quotidienne. En effet, 41,88% d'élèves de CM1 et 33,04% d'élèves de CM2 utilisent cette signification pour donner un exemple. D'un côté, dans les exemples écrits par les élèves de CM1, ces derniers mentionnent différents « touts » à séparer. 33,13% d'élèves choisissent le gâteau, 7,5% d'entre eux prennent la pizza et 1,25% un pain. D'autre côté, chez les élèves de CM2, les trois « touts » employés dans leurs exemple sont la pizza, le pain et le gâteau. De la même façon qu'en CM1, le gâteau est plus utilisé, soit par 27,83% des élèves de CM1, tandis que, 3,48% d'élèves utilisent la pizza et 1,74% de ceux-ci utilisent le pain pour donner un exemple. 7,5% des élèves de CM1 et 2,61% des élèves de CM2 font référence à la signification Partie-tout (quantité discrète) pour donner un exemple d'utilisation des fractions dans la vie quotidienne. En effet, les élèves de CM1 donnent les exemples des résultats scolaires et le partage des objets. Par exemple : « A l'école, les notes comme 9,5/10 » (élève N° 17, niveau CM1) ou encore « Les bonbons, on partage avec des meilleurs amis. 6 bonbons et 3 amis, chacun aura 2 bonbons » (élève N° 80, niveau CM1). Les élèves de CM2 donnent les exemples de l'argent et le partage des objets. Par exemple : « C'est comme je demande à ma mère le quart d'un gâteau ou le quart de 10 euros » (élèves N° 33, niveau CM2) ou encore « 3 quarts 3/4 des bonbons » (élève N° 59, niveau CM2). La signification *Opérateur* est employée par un petit nombre d'élèves pour donner un exemple concret sur l'utilisation des fractions dans la vie quotidienne. En effet, 0,63% (2/160 élèves) d'élèves de CM1 utilisent cette signification avec l'exemple du magasin, « Dans un magasin, Il y a 50% de légumes » (élève N° 56, niveau CM1), et 1,74% des élèves de CM2 utilisent la signification Opérateur avec les exemples de l'école et de l'argent, « Il y a 100 enfants dans une école, les trois quarts partent en classe verte. 3/4 de 100 = 75 » (élève N° 12, niveau CM2). Quant à la signification *Quotient*, 1,25% des élèves de CM1 et 11,3% des élèves de CM2 emploient effectivement cette signification pour donner un exemple de fraction du quotidien. Les élèves de CM1 utilisent cette signification avec l'exemple de calcul, « Quand on a 20 bonbons et on veut les terminer en 5 jours, grâce aux fractions on sait qu'il faudra en manger 4 par jour » (élève N° 41, niveau CM1). Ceux de CM2 utilisent cette signification avec les exemples de calcul 4,35 % des élèves, de bonbons 4,35 % des élèves, de gâteau 0,87 % des élèves ou de pommes 1,78 % des élèves. Par exemple : « Il y a 4 personnes veulent manger 2 pommes » (élève N° 67, niveau CM2). En ce qui concerne la signification *Mesure*, un bon nombre d'élèves de CM1 et de CM2 se réfèrent à cette signification pour donner un exemple concret à l'emploi des fractions au quotidien. En effet, 13,13% des élèves de CM1 et 29,56% des élèves de CM2 utilisent cette signification pour donner un exemple. Les exemples donnés par les élèves de CM1 sont soient des exemples d'argent 5,63% des élèves, de longueur 2,5% des élèves, de temps 1,25% des élèves ou de cuisine 3,75% des élèves. Par exemple : « Dans la cuisine: pour les pâtes au beurre, Il faut 1/4 de beurre » (élève N° 156, niveau CM1). Du côté des élèves de CM2, les catégories utilisées par ces derniers pour donner un exemple de la fraction du quotidien sont également les mêmes catégories qu'en CM1, ce sont celles de temps 13,04% des élèves, de longueur 3,48 % des élèves, d'argent 8,7 % des élèves ou de cuisine 4,35% des élèves. Par rapport à l'utilisation de la signification *Nombre*, 13,13% des élèves de CM1 et 9,57 % des élèves de CM2 font référence à cette signification pour donner un exemple. En effet, leurs exemples sont de calcul, l'élève N° 16 de CM1donne l'exemple « Dans le travail, dans le bureau, chez-toi, car si on est bloqué sur quelque choses on utilise les fractions pour faire des calculs », l'élève N° 86 de CM2 donne l'exemple « On peut les utiliser à l'école ou dans un magasin pour calculer ». Nous constatons qu'aucun élève des deux niveaux CM1 et CM2 n'utilise les deux significations *Nombre sur une droite graduée* et *Rapport* pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien. La signification *Opérateur* est employée par un petit nombre d'élèves pour donner un exemple concret sur l'utilisation des fractions dans la vie quotidienne. En effet, 0,63% (2/160 élèves) d'élèves de CM1 utilisent cette signification.

Enfin, nous avons 23,13% (37/160 élèves) des élèves de CM1 et 17,39% (20/115 élèves) des élèves de CM2 qui n'ont pas répondu pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien.

2.2.6.5. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la quatrième question

Représente la fraction $\frac{1}{4}$?

Le but de cette question est de voir quelle signification de la fraction l'élève est porté à utiliser pour représenter une fraction. Il est probable que la première signification à laquelle l'élève se réfère pour donner la représentation de la fraction est celle avec laquelle il est le plus familier. D'autre part, nous avons choisi la fraction 1/4 parce que chez les jeunes élèves, le partage en 4 est assez connu et maîtrisé. Les réponses et les illustrations données par les élèves feront intervenir une des significations de la fraction présentées dans notre travail. De plus, les élèves peuvent donner une autre écriture à la fraction 1/4 comme 2/8 ou 4/16, ce qui fait référence à l'écriture du nombre rationnel qui contient un numérateur et un dénominateur.

Nous allons maintenant présenter les pourcentages de réponses manifestées par les élèves de CM1 et de CM2.

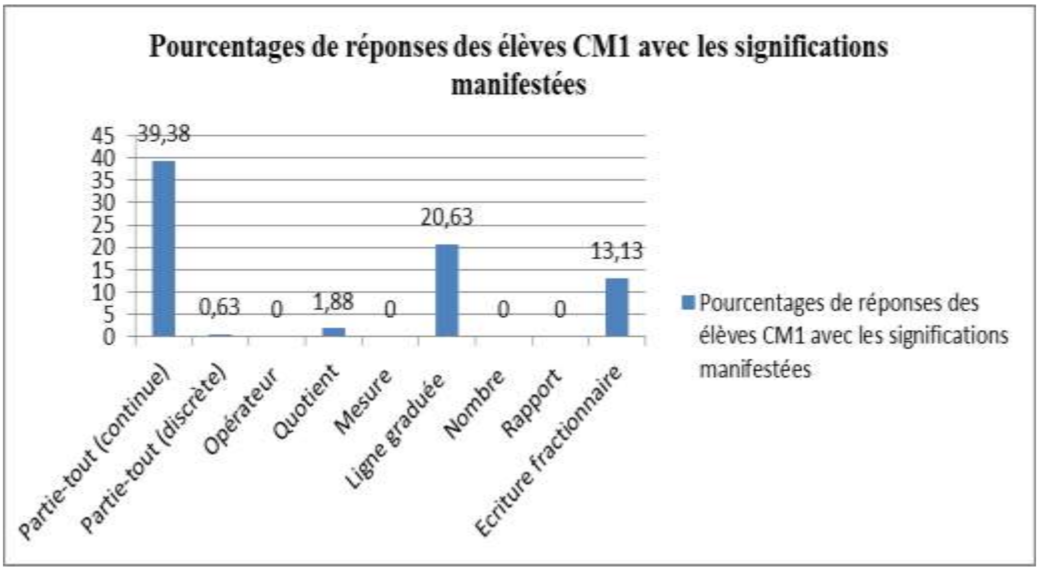


FIGURE 53 – PRESENTATION LES POURCENTAGES DE REPONSES DES ELEVES DE CM1 ET LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION MANIFESTEES A LA QUESTION N° 4 DU QUESTIONNAIRE.

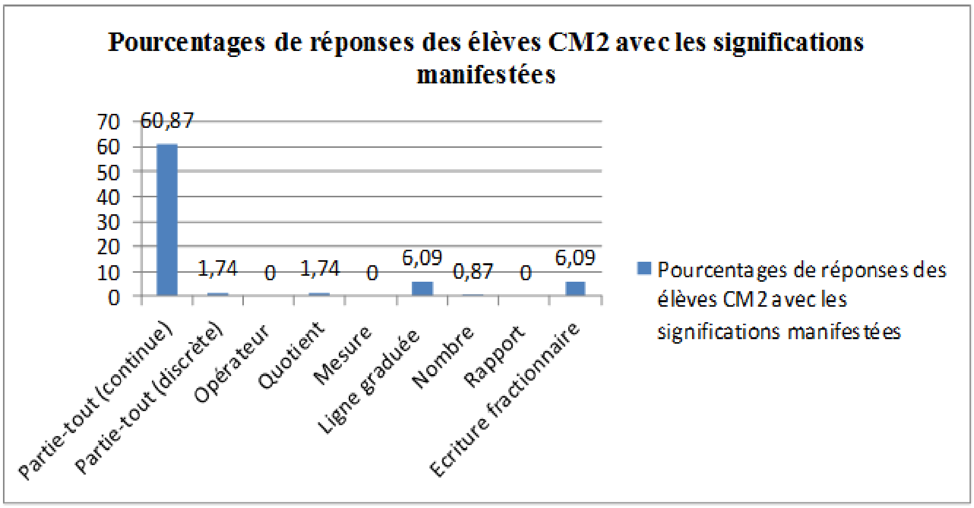


FIGURE 54 – PRESENTATION LES POURCENTAGES DE REPONSES DES ELEVES DE CM2 ET LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION MANIFESTEES A LA QUESTION N° 4 DU QUESTIONNAIRE.

Partie-tout (quantité continue) est la première signification référée pour illustrer une fraction chez les deux niveaux d'élèves CM1 et CM2. En effet, 39,38% des élèves de CM1 et 60,87% de ceux de CM2 l'utilisent. Les « tout » choisis par ces élèves sont un cercle, un rectangle, un carré ou un triangle. En CM1, plus d'élèves choisissent de partager un cercle (34/160 élèves : 21,25%) et les autres prennent un rectangle (13/160 élèves : 8,14%), un carré (14/160 : 8,76%) ou un triangle (3/160 élèves : 1,88%). Quant aux élèves de CM2, la plupart d'entre eux choisissent également de partager un cercle (73,115 élèves : 63,48%) et les autres utilisent un rectangle (20/115 :17,39%) ou encore un carré (11/115 :9,57%). Les élèves qui choisissent la signification partie-tout (quantité continue) ne divisent pas toujours les « tout » en parties égales. En effet, 39,38% des élèves de CM1 sont précis et 3,13% des élèves ne donnent pas une réponse correcte. Quant aux élèves de CM2, 60,87 % des élèves font leur dessin d'une façon correcte tandis que 6,09% des élèves donnent une réponse incorrecte. En ce qui concerne l'utilisation de la signification *Nombre sur une droite graduée*, celle-ci se classe à la deuxième place derrière celle de *Partie-tout (quantité continue)* chez les élèves de CM1 et chez ceux de CM2, elle partage la deuxième place avec la catégorie *Ecriture fractionnaire* derrière celle de *Partie-tout (quantité continue)*, ils se réfèrent à cette signification pour représenter la fraction $\frac{1}{4}$. En effet, 20,63 % des élèves de CM1 et 6,09% des élèves de CM2 l'utilisent pour leur première illustration de la fraction $\frac{1}{4}$. Les élèves de CM1 et de CM2 font référence à la catégorie *Ecriture fractionnaire* pour illustrer la fraction $\frac{1}{4}$, elle se classe à la troisième place chez ceux de CM1 et en deuxième place chez les CM2. En effet, 13,13% des élèves de CM1 et 6,09% des élèves de CM2 utilisent cette catégorie pour leur première illustration de $\frac{1}{4}$. 1,88% des élèves de CM1 et 1,74% des élèves de CM2 se réfèrent à la signification *Quotient* pour représenter la fraction $\frac{1}{4}$. La signification *Partie-tout (quantité discrète)* est employée par un petit nombre d'élèves de CM1 et de CM2 pour l'illustration de la fraction $\frac{1}{4}$. En effet, 0,63% (1/160 élèves) des élèves de CM1 et 1,74% (2/115 élèves) des élèves de CM2 font référence à cette signification afin de représenter la fraction $\frac{1}{4}$. Nous constatons que les trois significations *Opérateur, Mesure* et *Rapport* sont utilisées par aucun élève des deux niveaux CM1 et CM2 afin d'illustrer la fraction $\frac{1}{4}$. De plus, la signification *Nombre* est employée par les élèves de CM2 (1/115 élèves : 0,87 %) et elle n'est pas employée par ceux de CM1 pour illustrer la fraction $\frac{1}{4}$.

Les réponses incorrectes sont plus axées sur la catégorie *Ecriture fractionnaire* et sur la signification *Partie-tout (quantité continue).* En effet, 13/160 élèves (8,13%) des élèves de CM1 et 9/115 élèves (7,83 %) des élèves de CM2 utilisent la catégorie *Ecriture fractionnaire* pour donner une réponse erronée, 3,13 % des élèves de CM1 et 6,09% des élèves de CM2 utilisent la signification *Partie-tout (quantité continue) pour donner une réponse incorrecte.*

Enfin, nous avons 13,13% (21/160 élèves) des élèves de CM1 et 7,83% (9/115 élèves) des élèves de CM2 qui n'ont pas fourni une réponse pour illustrer ou représenter la fraction $\frac{1}{4}$

Avant de poursuivre la présentation des résultats des réponses des élèves concernant les autres questions du questionnaire, nous voulons regarder, à travers les réponses des élèves, les liens qui existent entre les trois questions précédentes (Q1_définir la fraction, Q2_donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien et Q3_illustrer la fraction $\frac{1}{4}$) concernant les différentes significations de la fraction. Pour cela, nous avons utilisé l'approche Analyse Statistique Implicative (A.S.I.) (Gras, Régnier, Guillet, 2009) (Gras, Régnier, Marinica, Guillet, 2013) (Alahmadati, 2015) pour aborder nos résultats ; l'analyse effectuée dans ce cadre théorique est instrumentée par le logiciel C.H.I.C. Grâce à cette méthode, nous exposons les résultats obtenus afin de voir si des liens existent entre ces trois questions par rapport aux différentes catégories de la fraction définies précédemment.

Nous avons travaillé avec 12 variables (V01 à V12), nous avons défini neuf catégories possibles des fractions : Partie d'un tout, Partie d'un ensemble, Opérateur, Quotient, Mesure, Nombre sur une ligne numérique, Nombre, Rapport et Ecriture fractionnaire. De plus, nous allons également prendre en compte la variable *Niveau Scolaire* (CM1 et CM2) et la variable *Non réponse*.

Voici le tableau qui présente les différentes catégories (significations) de la fraction avec les catégories *Non réponse et les niveaux scolaires CM1 et CM2*, celles-ci représentent les variables retenues pour présenter les résultats :

TABLEAU 28– TYPES DES REPONSES CONCERNANT (LES VARIABLES DE L'ETUDE)

Q1 : Pour toi, « Une fraction, qu'est-ce que c'est ?» Q2 : Donne un exemple où on peut utiliser les fractions dans la vie quotidienne et explique pourquoi? Q3 : Représente la fraction 1/4 ?	
Types	**Modalité**
V01	CM1
V02	CM2
V03	Partie-tout
V04	Partie-ensemble
V05	Opérateur
V06	Quotient
V07	Mesure
V08	Nombre sur une ligne numérique
V09	Nombre
V10	Rapport
V11	Ecriture fractionnaire
V12	Non réponse

Nous présentons les notations utilisées pour l'analyse des données : apparaît d'abord la lettre Q qui énonce la question posée, celle-ci est suivie par un chiffre qui représente le numéro de cette question. Puis apparaît la lettre V qui énonce la variable utilisée, celle-ci est suivie également par des chiffres qui donnent le numéro de cette variable manifestée. Nous introduisons un trait pour séparer la question et la variable.

Par exemple :

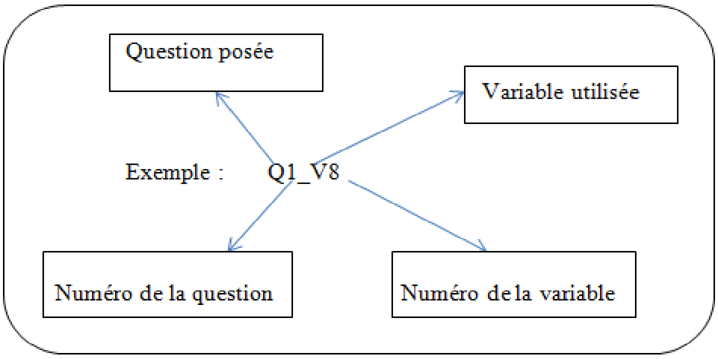


FIGURE 55 – LA NOTATION UTILISEE POUR L'ANALYSE DES DONNEES.

Les variables (V01 à V12) seront traitées comme variables binaires. Grâce à la méthode ASI, nous étudions l'arbre des similarités et le graphe implicatif. Nous allons présenter, tout d'abord, l'arbre des similarités avec tous les résultats obtenus. Puis, nous présentons le graphe implicatif et les résultats donnés et enfin, nous analysons et interprétons ces résultats. Nous commençons par la présentation de l'arbre des similarités. Celui-ci permet, d'une part, de voir s'il existe des similarités entre les variables et d'autre part, d'identifier le niveau de similarité entre les couples de variables. Voici les résultats présentés avec l'arbre des similarités :

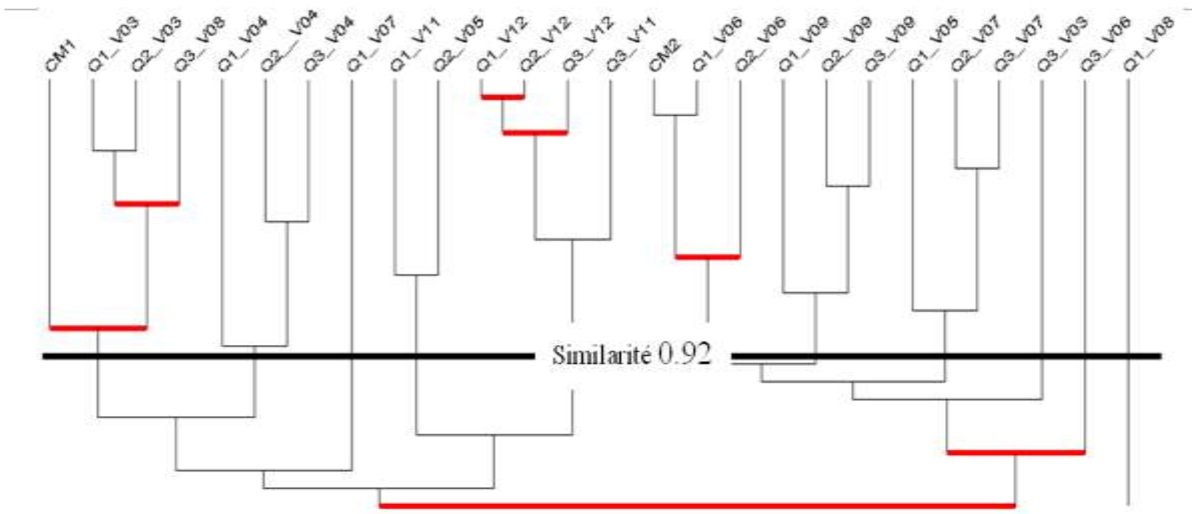


FIGURE 56 – CLASSIFICATION DES VARIABLES AVEC L'ARBRE DES SIMILARITES

Comme le montre l'arbre des similarités, en se limitant au niveau de similarité de 0.92, nous distinguons 7 classes et 4 singletons.

TABLEAU 29– PARTITION RETENUE DES VARIABLES

Classe	Effectif	Contenu
Classe 1	4	(CM1 ((Q1_V03, Q2_V03) Q3_V08))
Classe 2	3	(Q1_V04 (Q2_V04, Q3_V04))
Classe 3	2	(Q1_V11, Q2_V05)
Classe 4	4	(((Q1_V12, Q2_V12) Q3_V12) Q3_V11)
Classe 5	3	((CM2, Q1_V06) Q2_V06)
Classe 6	3	(Q1_V09 (Q2_V09, Q3_V09))
Classe 7	3	(Q1_V05 (Q2_V07, Q3_V07))

Les caractéristiques des classes sont présentées dans le tableau suivant :

TABLEAU 30– CONTRIBUTION DES VARIABLES SUPPLEMENTAIRES A LA CONSTRUCTION DES CLASSES

Classe	Nœud	Contribution de la variable Sexe	Contribution de la variable École
Classe 1	14	Fille	E
Classe 2	15	Fille	B
Classe 3	11	Garçon	D
Classe 4	9	Fille	F
Classe 5	10	Garçon	C
Classe 6	12	Fille	B
Classe 7	13	Garçon	G

De ce qui précède, nous constatons que :

- Lorsque les élèves de CM1 utilisent la signification « Partie d'un tout » pour définir la fraction et pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien, ils ont tendance à utiliser la signification « Nombre sur la droite numérique » pour illustrer la fraction $\frac{1}{4}$. La classe 1 confirme bien ce résultat. Ce sont les filles qui sont le plus contribués dans cette classe et parmi les écoles, c'est l'école E qui est la plus contribuée.
- Lorsque les élèves utilisent la signification « Partie d'un ensemble » pour définir la fraction, ils ont tendance à utiliser cette même signification pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien et pour illustrer la fraction $\frac{1}{4}$. La classe 2 confirme bien ce résultat. Les filles ont plus contribuées dans cette classe que les garçons et c'est l'école B la plus contribuée.
- Lorsque les élèves ne donnent pas de réponse ni à la première question (*Pour toi, une fraction, qu'est-ce que c'est ?*) ni à la deuxième question (*Donne un exemple où on peut utiliser les fractions dans la vie quotidienne et explique pourquoi ?*), alors, ils ne réussissent pas à donner de réponse à la troisième question (*Représente la fraction*

$\frac{1}{4}$?). La classe 4 confirme tout à fait ce résultat. Ici, nous constatons que les filles sont le plus contribuées et l'école F est le plus contribuée.

- Lorsque les élèves de CM2 utilisent la signification de la fraction en tant que « Quotient » pour définir la fraction, ils ont tendance à utiliser cette même signification pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien. La classe 5 confirme ce résultat. Là, ce sont les garçons qui ont plus contribués que les filles dans cette classe et parmi les écoles, c'est celle de C est le plus contribuée.
- Lorsque les élèves utilisent la signification « Nombre » pour définir la fraction, ils ont tendance à utiliser cette même signification pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien et pour illustrer la fraction $\frac{1}{4}$. La classe 6 confirme bien ce résultat. Les filles sont le plus contribuées et l'école B.

Regardons maintenant les résultats que nous livre le graphe implicatif, sachant qu'il donne les tendances à un niveau d'intensité d'implication supérieure au seuil de 0.86. Ce réseau quasi-implicatif concerne les dix variables binaires principales. Les composantes binaires des vecteurs-variables Sexe, Ecole, Niveau scolaire sont prises comme variables supplémentaires.

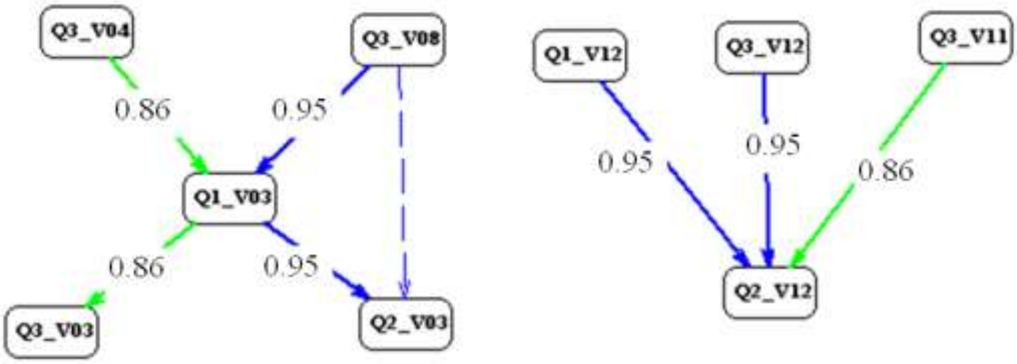


FIGURE 57 – STRUCTURE DES REPONSES ORGANISEES PAR LE GRAPHE IMPLICATIF

TABLEAU 31– CONTRIBUTION DES VARIABLES SUPPLEMENTAIRES A LA CONSTRUCTION DES CHEMINS

	Contributions des variables supplémentaires		
Chemins	Sexe	Ecole	Niveau scolaire
Q3_V08⇒Q1_V03⇒Q2_V03	Fille	E, H	CM1
Q3_V04⇒Q1_V03	Fille	B, C	CM2
Q1_V03⇒Q3_V03	Fille	H, D	CM1
Q1_V12⇒Q2_V12	Garçon	F	CM1
Q3_V12⇒Q2_V12	Fille	F	CM1
Q3_V11⇒Q2_V12	Garçon	F, I	CM1

À un niveau de confiance de 0.95 (flèches bleues), nous avons les quatre quasi-implications suivantes : la première est, si les élèves ne donnent pas de réponse à la question (Pour toi, une fraction, qu'est-ce que c'est ?), ces élèves ont tendance à ne pas donner réponse à la question (Donne un exemple où on peut utiliser les fractions dans la vie quotidienne et explique pourquoi ?). La deuxième quasi-implication est, lorsque les élèves ne donnent pas réponse à la question concernant l'illustration de la fraction 1/4, ils ont tendance à ne pas donner réponse à la question concernant l'utilisation des fractions au quotidien. Ensuite, la troisième quasi-implication est, lorsque les élèves produisent une réponse avec la signification « Nombre sur la droite numérique » à la question (Illustrer la fraction 1/4 ?), ils ont tendance à produire une réponse avec la signification « Partie-tout » à la question (Pour toi, une fraction, qu'est-ce que c'est ?). La quatrième et la dernière quasi-implication est, produire une réponse à la question (Pour toi, une fraction, qu'est-ce que c'est ?) avec la signification « Partie-tout », il y a une tendance à produire une réponse à la question (Donne un exemple où on peut utiliser les fractions dans la vie quotidienne et explique pourquoi ?) avec la même signification (Partie-tout »). Nous constatons qu'il y a une transitive implicative produite entre les variables V03 et V08, c'est-à-dire, entre les deux catégories « Nombre sur la droite numérique » et « Partie-tout ».

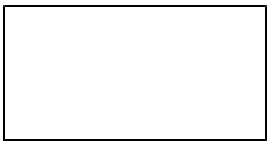
En descendant à un niveau de confiance plus bas, soit 0.86 (flèches vertes), nous voyons que lorsque les élèves ne donnent pas de réponse pour définir la fraction, ils ont tendance à ne pas donner réponse pour illustrer la fraction 1/4. Nous constatons également que lorsque les élèves fournissent une réponse avec la signification « Partie-ensemble » pour illustrer la fraction 1/4, les élèves ont tendance à utiliser la signification « Partie-tout » pour définir la fraction. Enfin, si les élèves donnent réponse avec la catégorie « Ecriture fractionnaire » à la question concernant l'illustration de la fraction 1/4, il y a une tendance qu'ils ne donnent pas de réponse à la question concernant l'utilisation des fractions au quotidien.

L'analyse des réponses des élèves montre que lorsqu'ils utilisent une des significations de la fraction pour définir la fraction, ils ont tendance à utiliser la même signification pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien et/ou illustrer la fraction 1/4. De plus, si les élèves ne donnent pas de réponse pour définir la fraction, ils ont tendance à ne pas donner de réponse ni pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien ni pour illustrer la faction 1/4. L'absence de réponses chez les élèves à ces trois questions pourrait s'expliquer par leur manque de compréhension concernant la notion de fraction, par la complexité des fractions qui sont parmi les concepts mathématiques les plus complexes rencontrés par les enfants à l'école primaire, par la limitation des situations d'apprentissage présentes aux élèves, etc..

Nous poursuivons maintenant la présentation des résultats obtenus des réponses des élèves aux autres questions du questionnaire.

2.2.6.6. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la cinquième question

Représente les $\frac{3}{4}$ du rectangle dessiné ci-dessous ?



Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable d'illustrer une fraction selon la signification *Partie-tout* et de voir si les élèves ont la perception des idées d'équipartition et de choix. Pour faire cela, il faut d'abord que l'élève partage sa figure (rectangle) en quatre parties égales puis il en colorie trois. D'une part, nous avons choisi la fraction 3/4 ; le nombre 4 est un nombre pair ; Vézina (1994) dit qu'il est plus facile de partager un tout en un nombre pair de parties qu'en un nombre impair de parties. De plus, le partage en quatre parties est celui qui vient en deuxième position pour le rectangle selon Véniza. La fraction choisie ne serait pas vue comme une difficulté pour les élèves. L'accent est mis sur le tout et les parties équitables. D'autre part, nous avons choisi une forme fréquemment utilisée, celle d'un rectangle, et pour laquelle l'équipartition n'exige pas de considérations particulières des caractéristiques géométriques de la figure. En effet, il est plus facile à partager un rectangle qu'un cercle (Vézina, 1994). La longueur du rectangle choisi mesure quatre centimètres et sa largeur deux centimètres. Le sujet doit traiter les parties en lien avec le tout, et non pas se concentrer seulement sur le nombre de parties comme le rapportent Pothier et Sawada (1983).

Nous allons maintenant présenter les pourcentages de réponses manifestées par les élèves de CM1 et de CM2. Cette question est une question spécifique sur la signification Partie-tout (quantité continue), elle permet de remarquer que, pratiquement, la plupart des élèves illustrent ou représentent correctement cette signification. En effet, 115/160 élèves de CM1 (71,88 %) et 99/115 élèves de CM2 (86,09%) illustrent de façon correcte cette signification. Nous constatons que le mode de fractionnement du rectangle (le tout) est varié, c'est-à-dire qu'il existe quatre illustrations différentes en CM1 et trois différentes en CM2. Les élèves choisissent surtout des parties qui sont juxtaposées et plus particulièrement les premières, puisque seulement 2,5% (4/160) des élèves de CM1 et 1,74% (2/115) des élèves de CM2 choisissent des parties non juxtaposées. Une difficulté remarquée, chez un bon nombre d'élèves, est celle d'être précis dans l'exécution des illustrations étant donné qu'ils ne font pas des parties égales. En effet, (36/160 élèves) 22,5% de CM1 ne sont pas précis. Les élèves de CM2 semblent accorder un peu plus d'importance à l'égalité des parties dans une fraction parce que moins d'élèves ne sont pas précis, soit (21/115 élèves) 18,26%. Dans l'ensemble, nous pouvons dire que les élèves interrogés illustrent correctement la signification *Partie-tout (quantité continue).*

Par ailleurs, chez les élèves de CM1, 30/160 élèves (18,75%) donnent une réponse erronée sur cette question, tandis que chez les élèves de CM2, 13/115 élèves (11,3%) donnent une réponse incorrecte sur cette question. Enfin, nous avons 15/160 élèves de CM1 (9,38 %) et 3/115 élèves de CM2 (2,61 %) qui n'ont pas donné une réponse à cette question spécifique sur la signification Partie-tout (quantité continue).

2.2.6.7. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la sixième question.

Représente les $\frac{3}{4}$ de cette collection d'objets ?

Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable d'illustrer une fraction selon la signification *Partie d'un ensemble* et de voir si les élèves ont l'habilité à trouver la Partie du tout (le tout est un ensemble d'objets) représentée par une fraction donnée. Pourtant, pour vérifier la présence de cette habilité, nous leur demandons de grouper ou colorier six objets parmi ces huit objets pour obtenir le nombre d'objets représenté par la fraction 3/4. D'une part, nous avons choisi la fraction 3/4, celle-ci est une fraction familière et ne serait pas vue comme une difficulté pour les élèves. L'accent est mis sur le tout et le nombre d'objets qui exprime les 3/4 de huit objets. D'autre part, pour avoir la chance de voir les différentes procédures plausibles par les élèves pour trouver le nombre d'objets représenté par la fraction 3/4, nous choisissons huit objets identiques et nous demandons ensuite de choisir les trois quarts de ces huit objets afin de vérifier si l'élève a bien conscience de la fraction demandée et n’est pas seulement concentré sur le nombre de parties indiqué par le numérateur ou par le dénominateur comme le rapportent Pothier et Sawada (1983).

Nous allons maintenant présenter les pourcentages de réponses manifestées par les élèves de CM1 et de CM2. Cette question spécifique sert à vérifier et à savoir si les élèves de CM1 et de CM2 illustrent correctement la signification Partie-tout (quantité discrète). Pratiquement, un bon nombre d’élèves illustrent de façon correcte cette signification, en effet, plus de la moitié des élèves de CM1 (55% : 88/160) et ceux de CM2 (63, 48% : 73/115) illustrent correctement la signification *Partie-tout (quantité discrète).* Les élèves de chacun des deux niveaux CM1 et CM2 colorient ou encerclent six objets juxtaposés les uns aux autres. Ceux-ci reconnaissent-ils l’invariance de la relation *partie-tout (quantité discrète)* par rapport au choix particulier des objets ? Nous posons l’hypothèse que ceux qui colorient des objets juxtaposés peuvent manifester cette invariance.

Par ailleurs, chez les élèves de CM1, 66/160 élèves (41,25%) donnent une réponse erronée sur cette question, tandis que chez les élèves de CM2, 38/115 élèves (33,04%) donnent une réponse incorrecte sur cette question. Enfin, nous avons 6/160 élèves de CM1 (3,75 %) et 4/115 élèves de CM2 (3,48 %) qui n’ont pas donné de réponse à cette question spécifique sur la signification Partie-tout (quantité discrète).

2.2.6.8. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la septième question.

Place la fraction $\frac{5}{8}$ sur la droite numérique dessinée ci-dessous ?

Cette question est posée pour voir si l’élève est capable d’illustrer une fraction comme un nombre qui se place sur une droite numérique. Nous avons choisi une fraction avec un dénominateur pair, c’est plus simple pour les élèves. Le segment dessiné est d’une longueur de huit centimètres. Le choix de la fraction de 5/8 est fait de sorte que le segment entre 0 et 1 soit facilement fractionné par une procédure comme la dichotomie répétée. Cependant, le numérateur 5 a été choisi pour que l'enfant ne s'arrête pas après le partage, mais nous montre qu’il s'attache aussi au numérateur et détermine le bon point de partage sur le segment (0,1). La conceptualisation de la fraction comme un point sur la droite numérique n’est pas très évidente chez les jeunes enfants. Les difficultés liées à la droite numérique pour les élèves de différents âges ont été rapportées par certains chercheurs comme Behr *et al.* (1983). Ces auteurs indiquent que l'identification de l'unité sur la droite numérique est le premier obstacle pour les enfants. C'est pourquoi nous avons indiqué l'unité sur la droite numérique pour faciliter la tâche dans le questionnaire. Pour représenter la fraction donnée, il faut que l'élève divise l'unité en huit parties égales, puis compte les parties jusqu'à ce qu'il arrive au nombre qui correspond au numérateur, et finalement fait une démarcation pour représenter 5/8. Pour répondre à cette question, les élèves peuvent placer correctement la fraction 5/8 entre les deux nombres entiers 0 et 1. Cette procédure est développée à partir de la signification de *Nombre* puisque une fraction peut être encadrée par deux nombres entiers. Les élèves peuvent également développer une procédure à partir de la signification *Partie d'un tout*, ils peuvent placer la fraction 5/8 entre les deux fractions 4/8 et 6/8 en séparant la droite, ou une partie de la droite, en huit parties et situer 5/8 au cinquième trait.

Maintenant, nous allons présenter les pourcentages de réponses manifestées par les élèves. Cette question est une question spécifique sur la signification *Nombre sur une ligne numérique ou graduée*, elle permet de constater que, pratiquement, un bon nombre d'élèves représentent correctement cette signification. En effet, 77/160 des élèves de CM1 (48,16 %) et 57/115 des élèves de CM2 (49,57%) réussissent la question portant sur cette signification. Ces élèves savent comment graduer une droite numérique et ceux-ci sont précis dans les graduations, ils font les séparations entre les traits d'une manière égale. Les erreurs rencontrées par certains élèves interrogés se rattachant surtout à la signification de la fraction qui est sollicitée à cette question, à savoir celle de *Nombre sur une droite numérique*.

En CM1, la fraction est vue comme un nombre soit entre zéro et un, plus grand que zéro, plus grand que un, égale à zéro ou égale à un. Cependant, c'est entre les nombres zéro et un que les élèves situent le plus souvent la fraction $\frac{5}{8}$.

En CM2, la fraction est vue comme un nombre soit entre zéro et un, égale à un ou plus grand que un. Cependant, c'est entre les nombres zéro et un que les élèves situent la fraction $\frac{5}{8}$ le plus souvent d'une façon correcte.

Enfin, nous constatons que 22,5 % (36/160) des élèves de CM1 et 18,26 % (21/115) des élèves de CM2 n'ont pas donné de réponse à cette question spécifique sur la signification *Nombre sur une ligne graduée*.

2.2.6.9. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la huitième question

Si 4 enfants partagent également 7 pommes, combien de pommes chaque enfant aurait-il ?

Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable d'illustrer une fraction en se servant de la signification de *Quotient*. Pour avoir la chance de voir les différentes procédures plausibles par les élèves pour trouver le quotient, nous choisissons 7 pommes à partager entre 4 enfants et nous demandons ensuite de trouver la quantité de pommes que chaque enfant aura.

Nous avons utilisé la fraction 7/4 qui ne demande pas beaucoup de réflexion de la part des élèves. Les élèves peuvent répondre à cette question en effectuant la division 7 ÷ 4. Cette procédure est développée à partir de la signification de Quotient. En revanche, les élèves peuvent également dessiner 7 pommes, puis les séparer en parties égales et les distribuer aux enfants, cette procédure est développée cette fois à partir de la signification *Partie d'un tout*.

Nous allons maintenant présenter les pourcentages de réponses des élèves de CM1 et de CM2. Cette question spécifique sert à vérifier si les élèves de CM1 et de CM2 représentent correctement la signification *Quotient*. Nous pouvons constater qu'un peu plus du quart des élèves de CM1, soit 28,75% (46/160 élèves) réussissent cette question, tandis qu'un peu plus de la moitié des élèves de CM2, soit 57,39% (66/115 élèves), la réussissent. Les élèves de CM1 donnent quatre réponses correctes différentes, mais équivalentes, alors que les élèves de CM2 donnent 5 réponses correctes différentes, mais également équivalentes. 12,51% (20/160) des élèves de CM1 et 45,21% (52/115) des élèves de CM2 utilisent une procédure développée à partir de la signification *Quotient*, soit 7 ÷ 4, pour donner une bonne réponse. Les autres élèves dessinent des pommes et les séparent, ou séparent les pommes restantes en deux, en trois. Ces procédures sont développées à partir de la signification Partie-tout. Comme réponses incorrectes, il existe 7 réponses incorrectes différentes en CM1 et 5 réponses incorrectes différentes en CM2. Quant aux démarches utilisées, en CM1, les réponses données par les élèves sont variées, par exemple : « L'enfant aura la moitié d'une pomme », « On fait 7 enfants × 4 pommes = 28 pommes », « 2 + 2+ 2+ 2 = 8, Chaque enfant aura 2 pommes », …etc. et en CM2, les réponses des élèves sont également différentes, par exemple : « 4 × 2 = 8 », « Chaque enfant va prendre la moitié d'une pomme »,…etc. La plupart des autres élèves font des dessins illustrant un partage des pommes. Certains séparent ainsi les pommes en deux, en quatre, en sept ou en huit. Enfin, la signification *Quotient* semble plus manifestée chez les élèves de CM2 que chez ceux de CM1 étant donné qu'ils utilisent plus la procédure 7 ÷ 4.

Nous avons 18,75% (30/160) des élèves de CM1 et 22, 61% (26/115) des élèves de CM2 qui n'ont pas répondu à cette question spécifique portant sur la signification *Quotient.*

2.2.6.10. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la neuvième question

Rama dispose 120 euros, elle a dépensé les $\frac{3}{4}$ de cette somme pour acheter un livre, quel montant a-t-elle dépensé ?

Nous avons posé cette question pour voir si l'élève peut illustrer une fraction en se servant de la signification d'*Opérateur*. Le choix de la fraction 3/4 est fait de manière à l'aide de faciliter le calcul avec le nombre 120, c'est-à-dire la division de 120 par le quart est facile à faire. Cette question est une question spécifique sur la signification *Opérateur*. La fraction à la signification d'*Opérateur* est composée de deux opérations, une division exprimée par le dénominateur et une multiplication exprimée par le numérateur. Pour la réponse à cette question, les élèves peuvent procéder au calcul de « 3/4 × 120 » en faisant une multiplication (120 × 3) suivie d'une division (360 ÷ 4) ou une division (120 ÷ 4) suivie d'une multiplication (30 × 3). Ces procédures sont développées à partir de la signification *Opérateur*.

Nous allons maintenant présenter les résultats des réponses des élèves de CM1 et de CM2. Nous constatons que très peu d'élèves utilisent la signification *Opérateur* dans les questions générales, c'est-à-dire de donner une définition à la fraction, donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien ou représenter une fraction donnée. Cela influence, disons-nous, la compréhension que les élèves ont de la signification *Opérateur*. En effet, 33,13% (53/160) des élèves de CM1 et 32,17% (37/115) des élèves de CM2 donnent une réponse erronée à la signification *Opérateur*.

Par ailleurs, un nombre important d'élèves dans les deux niveaux CM1 et CM2 donne une réponse correcte. En effet, 30,63% (49/160) des élèves de CM1 et 34,78% (40/115) des élèves de CM2 réussissent cette question. Les démarches de calcul utilisées par les élèves, pour répondre à la question, sont semblables. La plupart des élèves donnant une bonne réponse, soient 15,63% des élèves de CM1 et 11,30% des élèves de CM2, calculent d'abord 120 ÷ 4 et multiplient par 3 pour avoir la réponse. D'une manière semblable, 10% (16/160) des élèves de CM1 et 9,57% (11/115) des élèves de CM2 donnent la réponse correcte suivante « Elle a dépensé 90€ ». D'autres élèves de CM2, soient 8,70% (10/115), font une démarche pour trouver la réponse en écrivant « 30€ × 4 = 120€ donc 30 × 3 = 90 ; Le montant qu'elle a dépensé est de 90 € ». De plus, nous remarquons que 10,63% (517/160) des élèves de CM1 écrivent la réponse « Les 3/4 de 120 euros », ceci représente le départ du travail sur la signification d'*Opérateur*.

Enfin, nous constatons que plus d'un tiers d'élèves de CM1, soient 36,25 % (58/160), et un tiers de ceux de CM2, soient 33,04 % (38/115) n'ont pas donné de réponse à cette question spécifique sur la signification *Opérateur*.

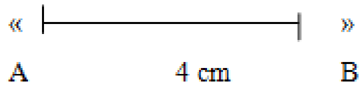
2.2.6.11. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la dixième question

Voici un segment qui est d'une longueur de huit centimètres :

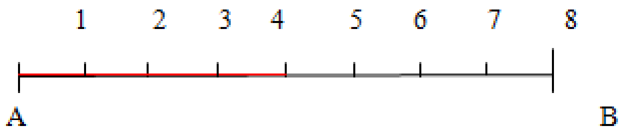
Construis un segment dont la longueur est $\frac{1}{2}$ de la longueur du segment donné.

Le but de cette question est de voir si l'élève est capable d'illustrer une fraction en se servant de la signification de *Mesure*. D'une part, nous avons choisi la fraction 1/2 qui diminue les difficultés de cette question chez les élèves. Il est facile à faire le partage en 2 chez les élèves car c'est le premier partage qu'ils font. D'autre part, nous avons choisi un segment d'une longueur de huit centimètres, ce qui peut faciliter la réponse. En ce qui concerne les procédures possibles utilisées par les élèves pour répondre à cette question, les élèves peuvent dessiner un segment qui représente 1/2 du segment donné, cette procédure est développée à partir de la signification de *Mesure* sachant que l'unité de mesure contient deux fois la partie 1/2. Une autre procédure utilisée par les élèves est la suivante : ils peuvent séparer le segment donné, l'unité de mesure, en deux parties égales et colorier une partie. Ici la procédure est développée à partir de la signification *Partie d'un tout* plutôt de celle de *Mesure*. Une autre procédure : les élèves peuvent considérer le segment comme une droite numérique où ils vont placer la fraction 1/2, cette procédure est développée à partir de la signification Nombre sur une droite numérique plutôt de celle de *Mesure*.

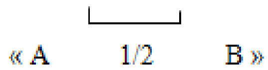
Nous allons présenter les résultats des réponses des élèves à cette question spécifique portant sur la signification de *Mesure*. Nous constatons que la plupart des élèves des deux niveaux CM1 et CM2, soient 71,88 % (115/160) des élèves de CM1 et 74,78 % (86/115) des élèves de CM2, réussissent à répondre correctement à cette question. D'un côté, parmi les réponses correctes, 51,88 % des élèves de CM1 et 51,30% des élèves de CM2 donnent des réponses qui sont vraiment développées à partir de la signification de *Mesure*. Par exemple, un bon nombre d'élèves donne la réponse suivante :



D'un autre côté, parmi les réponses correctes, 20% des élèves de CM1 et 23,48% des élèves de CM2 développent une procédure à partir de la signification *Partie-tout*. En effet, le segment est séparé en Huit et une partie est hachurée, les élèves situent 1/2 ou 4cm au milieu du segment de huit centimètres comme sur une droite numérique, prenons un exemple à ces réponses :



Par ailleurs, 9,38% (15/160) des élèves de CM1 et 9,57% (11/115) des élèves de CM2 donnent une réponse erronée sur cette question. En effet, parmi ces réponses erronées, nous constatons que 6,88% (11/160) des élèves de CM1 et 7,83% (9/115) des élèves de CM2 donnent la réponse suivante :



Enfin, nous avons 18,75 % (30/160) des élèves de CM1 et 15,65 % (18/115) des élèves de CM2 n'ont pas donné de réponse à cette question spécifique sur la signification *Mesure*.

2.2.6.12. Etude de réponse des élèves de CM1 et de CM2 à la onzième question

Dans une salle d'attente, il y a 8 chaises dont 5 sont noires et 3 sont bleues. Combien y a-t-il de chaises bleues par rapport aux chaises noires ?

Cette question est posée pour voir si l'élève est en mesure d'illustrer une fraction selon la signification de *Rapport* partie à partie. Pour répondre à cette question, les élèves peuvent se référer à la signification de *Rapport* en donnant le rapport de partie à partie 3/5 comme c'est demandé. Une autre réponse, les élèves peuvent se référer la signification *Rapport*, mais le rapport de partie à tout, en donnant la réponse 3/8 qui est une réponse incorrecte. Ici, cette réponse est développée à partir de la signification *Partie d'un tout*. Autres réponses incorrectes, les élèves peuvent écrire « 8 – 5= 3 », écrire le chiffre « 3 » qui représente le nombre de chaises bleues, écrire il y 5 chaises noires et 3 chaises bleues, etc.

Maintenant, nous allons présenter les résultats de réponses des élèves à cette question spécifique sur la signification de *Rapport,* cette question sert à vérifier si les élèves de CM1 et de CM2 illustrent correctement cette signification. En effet, 12,5% (20/160) des élèves de CM1 et 13,04% (15/115) des élèves de CM2 donnent la réponse attendue, l'élève N° 3 de CM2 donne l'exemple « Il y a 3 chaises bleues par rapport aux 5 chaises noires en tout 8. Il y a 3/5 ».

Il est bien à noter ici que la signification *Rapport* n'est pas utilisée dans la première partie du questionnaire, c'est-à-dire pour définir une fraction, pour exprimer et donner un exemple et pour représenter une fraction, elle n'est utilisée que pour la question spécifique sur cette signification.

Par ailleurs, les réponses incorrectes données par les élèves de CM1 et de CM2 sont nombreuses, il existe 14 réponses différentes en CM1 et 12 réponses différentes en CM2. Parmi ces réponses erronées, 5,63% (9/160) des élèves de CM1 et 14,78% (17/115) des élèves de CM2 pensent au rapport de partie à tout. En effet, ils écrivent 3/8 pour indiquer le nombre de chaises bleues par rapport au nombre de chaises au total. Une autre réponse erronée donnée par 10% (16/160) des élèves de CM1 et 13,91 % (16/115) des élèves de CM2 consiste à écrire « 5 – 3 = 2. Les chaises noires ont 2 chaises plus que les chaises bleues ». De plus, 9,38% (15/160) des élèves de CM1 écrivent seulement « Il y a 5 chaises bleues et 3 noires » et 7,83% (9/115) des élèves de CM2 écrivent seulement « Il y en a 3 chaises bleues ». Il nous semble, d'une part, que les élèves sont plus habitués à rencontrer des rapports du type partie à tout que des rapports du celui de partie à partie comme le cas de notre question spécifique sur la signification *Rapport* et, d'autre part, que c'est l'expression « par rapport à » qui pose problème.

Enfin, nous constatons qu'un bon nombre d'élèves des deux niveaux CM1 et CM2, soient 40,63% (65/160) de CM1 et 30,43% (35/115) de CM2, ne répond pas à cette question portant sur la signification *Rapport*.

En ce qui concerne la signification *Nombre* et après avoir observé les calculs faits avec les fractions que les élèves, de CM1 et de CM2 interrogés utilisent dans l'ensemble du questionnaire, nous constatons que plus de la moitié (52,38%) des calculs effectués par les élèves de CM1 et 90% des calculs faits par les élèves de CM2, sont corrects. Parmi les calculs exécutés se trouvent : des additions de fractions, des calculs des équivalences d'une fraction donnée et des multiplications de fractions par un nombre naturel. En effet, l'élève N° 107 de

CM1 donne un exemple sur l'addition de fractions « 10/5 = 5/5 + 5/5= 2 entiers ». Par contre, 47,62% des élèves de CM1 et 10% des élèves de CM2 ont fait des erreurs en effectuant des calculs avec les fractions.

Une nouvelle catégorie pour notre analyse

Une catégorie s'ajoute pour nous aider à classer les réponses des élèves de CM1 et de CM2 interrogés dans notre étude, c'est « Ecriture fractionnaire ». Nous allons, ci-dessous, la présenter.

Cette catégorie « Ecriture fractionnaire » s'ajoute à notre analyse, cependant, elle n'est pas considérée comme une signification de la fraction, mais comme une façon de la définir. En effet, il nous faut préciser ici que lorsque les élèves écrivent une fraction, un nombre décimal, un nombre fractionnaire ou un pourcentage, nous classons leur réponse dans cette catégorie. 13,13% (21/160) des élèves de CM1 écrivent une fraction telle 2/8 et 4/16 comme une première illustration pour représenter la fraction 1/4 et 6,09% (7/115) des élèves de CM2 écrivent également les fractions 2/8, 4/16 et 8/32 pour représenter la fraction 1/4. Ainsi, il faut retenir que la forme *Ecriture fractionnaire* est importante dans la définition de la fraction.

2.2.7. Synthèse des significations de la fraction manifestées par les élèves de CM1 et de CM2

Rappelons la deuxième question posée dans la problématique qui est liée au deuxième objectif de la recherche, la question est : « De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ? ».

Après avoir analysé les réponses fournies par les élèves des deux niveaux scolaires CM1 et CM2 aux questions du questionnaire écrit, nous pouvons présenter les significations de la fraction les plus utilisées et les mieux illustrées par ces derniers. Nous allons commencer, ci-après, par décrire les considérations générales concernant ces significations pour les deux niveaux CM1 et CM2. Ensuite, nous allons présenter les principales distinctions entre ces deux niveaux.

2.2.7.1. Synthèse des significations de la fraction manifestées par les élèves de CM1

Pour définir une fraction, pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien et pour illustrer ou représenter une fraction, c'est la signification *Partie-tout (quantité continue)* qui est la plus utilisée par les élèves de CM1. En effet, 43,75% d'élèves de CM1 utilisent cette signification pour définir la fraction, 41,88% de CM1 se réfèrent à celle-ci pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions dans la vie quotidienne et 39,38% des élèves de CM1 se réfèrent à cette signification pour illustrer la fraction 1/4. De plus, nous constatons que 71,88% de ces derniers réussissent la question spécifique sur la signification *Partie-tout (quantité continue)* et sur celle spécifique sur la signification *Mesure*, 55% réussissent celle de *Partie-tout (quantité discrète)*, 48,16% celle de *Nombre sur une droite graduée*, 30,63% réussissent celle d'*Opérateur*, 28,75% réussissent celle de *Quotient* et 12,5% réussissent celle de *Rapport*.

2.2.7.2. Synthèse des significations de la fraction manifestées par les élèves de CM2.

Comme chez les élèves de CM1, nous observons que la signification *Partie-tout (quantité continue)* est la plus utilisée par les élèves de CM2 pour définir la fraction avec 33,91% des élèves, pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien avec 33,04% des élèves et pour illustrer la fraction 1/4, 60,87% des élèves. Ensuite, en ce qui concerne les questions spécifiques posées sur les significations de la fraction, nous remarquons que 86,09% des élèves réussissent la question spécifique sur la signification *Partie-tout (quantité continue)*, 74,78% des élèves réussissent celle sur la signification *Mesure*, 63,48% réussissent celle de *Partie-tout (quantité discrète)*, 57,39% réussissent celle de *Quotient*, 49,57% des élèves réussissent celle sur la signification *Nombre sur une ligne numérique*, 34,78% des élèves réussissent celle d'*Opérateur* et 13,04% des élèves réussissent celle de *Rapport*.

Par ailleurs, après avoir synthétisé les significations de la fraction manifestées et utilisées par les élèves de CM1 et de CM2 selon les réponses données par ces derniers aux questions posées dans notre questionnaire, nous voulons maintenant donner plus d'éclairage sur les deux synthèses présentées précédemment :

Premièrement, nous observons que la signification de la fraction que les élèves de CM1 et de CM2 illustrent et représentent le mieux est celle de *Partie-tout (quantité continue)*. En effet, la signification *Partie-tout (quantité continue)* est la plus utilisée, comme nous l'avons vu précédemment, par ces élèves pour définir la fraction, pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions à la vie quotidienne et pour illustrer la fraction 1/4. Ensuite, généralement, la plupart des élèves utilisent une procédure pour partager le rectangle donné et pour fournir une solution pertinente à la question spécifique à cette signification. Par contre, il nous semble que plusieurs élèves commettent une erreur qui consiste à effectuer le partage du rectangle donné inégalement. De plus, les élèves développent des procédures à partir de la signification *Partie-tout (quantité continue)* pour répondre aux questions portant sur la signification *Nombre sur une droite numérique* et sur celle de *Mesure*. D'autre part, une différence repérée entre les deux niveaux CM1 et CM2 par apport à l'emploi de cette signification, chez les élèves de CM1, au début du questionnaire « pour définir la fraction », les significations manifestées de la fraction sont *Partie-tout (quantité continue)*, *Nombre* qui sert à calculer et *Ecriture fractionnaire*. Chez ceux de CM2, les significations utilisées au départ du questionnaire sont *Partie-tout (quantité continue)*, *Quotient*, *Ecriture fractionnaire* et *Nombre* qui sert à calculer. De plus, nous pouvons constater que la principale distinction entre les élèves de CM1 et de CM2 est que ceux de CM2 semblent accorder un peu plus d'importance à l'idée de l'équipartition. Pour l'une des illustrations données, 20% des élèves de CM1 divisent le rectangle donné en parties égales comparativement à 39,13% des élèves de CM2.

Deuxièmement, les élèves des deux niveaux scolaires CM1 et CM2 réussissent à donner, surtout, des exemples de la vie quotidienne sur l'utilisation des fractions liées à la signification *Partie-tout (quantité continue).* En effet, les élèves de CM1 et de CM2 mentionnent différents types de « touts » pour donner un exemple, soient de gâteau, de pizza et de pain. De plus, pour donner un exemple de la fraction, les deux significations qui suivent la signification *Partie-tout (quantité continue)* sont *Mesure* et *nombre* (ces deux significations sont à égalité) chez les élèves de CM1, alors que chez ceux de CM2, c'est celle de *Mesure* qui vient en deuxième place puis celle de *Nombre*.

Troisièmement, environ la même proportion d'élèves de CM1 et de CM2 réussit à répondre à la question spécifique sur la signification *Nombre sur une ligne numérique* (48,16% en CM1 et 49,57% en CM2). Par contre, les élèves de CM1 utilisent plus cette signification pour illustrer la fraction 1/4 que ceux de CM2 (20, 63% de CM1 contre 6,09% de CM2). De plus, les procédures développées à partir de l'utilisation des significations de *Partie-tout (quantité continue)* et *nombre* situé entre d'autres entiers pour répondre à cette question montrent une difficulté à situer la fraction, correctement, sur la droite numérique.

Quatrièmement, en ce qui concerne l'utilisation des significations *Opérateur*, *Mesure* et *Partie-tout (quantité discrète)*, nous pouvons observer que, environ, la même proportion d'élèves de CM1 et de CM2 réussit les questions spécifiques sur ces significations, mais il existe parfois quelques différences entre ces deux niveaux que nous essayons de mentionner. En effet, 71,88 % de CM1 et 74,78% de CM1 réussissent à donner une réponse attendue à la question spécifique portant sur la signification *Mesure* ; 30,63% de CM1 et 34,78% de CM2 répondent à la question sur l'*Opérateur* et 55% de CM1 et 63,48% de CM2 réussissent la signification de *Partie-tout (quantité discrète)*. Cependant, les élèves de CM2 sont deux fois plus nombreux que ceux de CM1 pour donner un exemple de la fraction comme *Mesure* (29,56% de CM2 contre 13,13% de CM1) et, il apparaît que la plupart des élèves ont de la difficulté à comprendre le sens de la question posée, c'est-à-dire ce que veut dire unité ; un nombre un peu plus important d'élèves de CM1 donnent un exemple sur la signification *Partie-tout (quantité discrète)* que ceux de CM2 (7,5% de CM1 contre 2,61% de CM2).

Cinquièmement, les élèves de CM2 réussissent mieux la question portant sur la signification *Quotient* que ceux de CM1. En effet, 57,39% des élèves de CM2 réussissent celle-ci contre 28,75% de ceux de CM1 qui la réussissent. De plus, un bon nombre d'élèves de CM2 privilégient la signification *Quotient* pour définir la fraction, soit 32,17% des élèves, alors que cette signification est complétement absente chez les élèves de CM1 pour la définition de la fraction.

Sixièmement, la signification de la fraction en tant que *Rapport* semble la moins comprise et la moins réussie par les élèves de CM1 et de CM2. En effet, plusieurs élèves de chaque niveau expriment un rapport de partie à tout au lieu d'un rapport de partie à partie tel que voulu à la question spécifique sur cette signification. De plus, c'est une signification qui n'est pas utilisée ni pour définir la fraction, ni pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien et ni pour illustrer la fraction 1/4.

Enfin, la catégorie *Ecriture fractionnaire* est plus utilisée chez les élèves de CM2 pour définir la fraction que chez ceux de CM1. En effet, 22,61% des élèves de CM2 l'utilisent pour définir la fraction, alors que 14,38% des élèves de CM1 l'utilisent. Par contre, pour représenter la fraction 1/4, plus d'élèves de CM1 se réfèrent à la catégorie *Ecriture fractionnaire* pour illustrer correctement cette fraction que ceux de CM2, soit 13,13 % des élèves de CM1 contre 6,09 % de ceux de CM2.

En conclusion, au vu de l'ensemble du questionnaire écrit et à travers les réponses données par les élèves des deux niveaux scolaires, CM1 et CM2, participant dans notre étude, il apparaît que l'utilisation de *la signification partie d'un tout (quantité continue) de la fraction est celle la plus fréquente.* Nous constatons que la signification *partie-tout (quantité continue)* domine le questionnaire et que celle-ci est également utilisée plusieurs fois dans les questions générales, à savoir pour définir la fraction, pour donner un exemple du quotidien où interviennent les fractions et pour illustrer la fraction 1/4. De plus, les élèves développent des procédures à partir de cette signification pour répondre à d'autres questions spécifiques sur d'autres significations de la fraction. Concernant les trois significations *partie-tout (Quantité discrète), Opérateur* et *Nombre sur une ligne numérique,* celles-ci sont moins utilisées par les élèves de CM1 et de CM2 pour répondre aux questions générales du questionnaire, alors que ces élèves réussissent les questions spécifiques portant sur ces significations. De plus, les significations de *Mesure, Quotient* et *Nombre* sont choisies par les élèves pour répondre aux questions générales du questionnaire et nous remarquons qu'un bon nombre d'élèves de CM1 et de CM2 réussit les significations *Mesure, Quotient* et ces derniers font correctement des calculs.

Par ailleurs, il existe un lien entre les questions générales posées au début du questionnaire et celles qui sont posées, spécifiquement, sur les différentes significations de la fraction quant à l'utilisation de la signification *Rapport*. En effet, les réponses des élèves, de CM1 et de CM2 données à la question portant sur cette signification, montrent que cette signification est moins comprise par ces élèves, alors, c'est normal qu'elle ne soit pas utilisée par ces derniers pour répondre aux questions générales du questionnaire écrit. Nous nous rappelons particulièrement que la signification *Partie-tout (quantité continue)* qui est la plus manifestée par les élèves participant à notre étude.

3. Interprétations des résultats obtenus et discussion

Ce chapitre permet d'apporter une réponse dans le parcours pour atteindre notre objectif général de la recherche, celui-ci concerne l'étude exploratoire des différentes significations possibles de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves du cycle III, surtout chez ceux de CM1 et de CM2. Cet *objectif général* comprend deux objectifs spécifiques et un objectif secondaire, ce sont :

- Reconnaître et exploiter les différentes significations de la fraction présentes dans les situations d'apprentissage qui proposent des activités portant sur les fractions dans cinq manuels scolaires de mathématiques de CM1 et dans cinq manuels de CM2 de mêmes collections. Nous étudions l'importance et la place accordée à chaque signification dans ces manuels choisis. Cela représente *le premier objectif spécifique* de la recherche.
- Identifier les conceptions et représentations chez des élèves de CM1 et de CM2 à l'égard de la notion de fraction, en particulier explorer et exploiter les différentes significations de la fraction données par ces élèves. Cela représente *le second objectif spécifique*.
- Identifier quelles conceptions des concepts mathématiques et de leur apprentissage sont véhiculées par les enseignants, en particulier connaître celles de certains enseignants sur la manière avec laquelle ils abordent les fractions avec leurs élèves. Cela représente *l'objectif secondaire de notre recherche*.

Dans la section suivante, nous allons présenter tous les résultats obtenus de notre recherche.

3.1. Résultats obtenus concernant les hypothèses de notre recherche

Nous présentons, en premier lieu, les résultats obtenus concernant, d'une part, l'analyse des manuels scolaires choisis par rapport aux différentes significations de la fraction exploitées dans ces manuels et, d'autre part, l'analyse des réponses des élèves de CM1 et de CM2 sur le questionnaire écrit qui leur a été proposé. En d'autres termes, nous présentons les résultats de la recherche en ce qui concerne les trois hypothèses de la recherche. En second lieu, nous avançons l'interprétation et la discussion sur ces résultats. Nous allons, dans cette section, présenter les résultats concernant les trois hypothèses de la recherche.

3.1.1. Résultats concernant la première hypothèse

Nous allons maintenant vérifier la première hypothèse posée dans cette recherche : « La signification de la fraction la plus présente est, dans les manuels de CM1, celle de *Partie d'un tout*, et dans les manuels de CM2 celle de *Nombre* ». Elle est liée à la première question posée dans la recherche, qui est « Quelles significations de la fraction sont en jeu dans les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 ? Quels liens et distinctions entre ces deux niveaux scolaires CM1 et CM2 pouvons-nous identifier ? »

L'objectif de l'apprentissage des fractions, au troisième cycle de l'école primaire, est de résoudre des problèmes variés portant sur les fractions où les nombres entiers sont insuffisants (Ministère de l'Education Nationale, 2002, 2007, 2008). Par conséquent, toutes les significations possibles attribuées à la fraction sont importantes. Par exemple, la signification *Quotient*, qui est peu présente dans les manuels scolaires, devient utile en algèbre pour représenter les expressions algébriques avec un dénominateur qui ne peut pas être réduit. La signification *Nombre sur une droite numérique*, qui est peu présente dans les manuels scolaires, est utile pour comparer des fractions et pour déterminer l'équivalence des fractions. Par ailleurs, l'étude des manuels scolaires nous dit que les situations d'apprentissage proposées où interviennent les fractions ne sont pas également réparties parmi les diverses significations de la fraction.

Premièrement, dans les manuels scolaires de CM1, nous constatons que les significations de la fraction les plus exploitées et les plus présentes à travers les activités analysées, portant sur les fractions, sont respectivement présentées dans le tableau suivant :

TABLEAU 32– LE POURCENTAGE DES ACTIVITES PORTANT SUR LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION LES PLUS PRESENTES DANS LES MANUELS ETUDIES DE CM1

Les significations de la fraction les plus présentes dans les manuels de CM1					
	O1	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
Partie d'un tout	41,84%	22,95%	43,59%	36,24%	28,38%
Mesure	22,45%	36,07%	30,77%	15,94%	25,68%
Nombre	5,1%	15,57%	11,54%	27,54%	9,46%
Nombre sur droite numérique	17,35%	10,66%	14,1%	0%	9,46%

En revanche, les significations les moins présentes sont respectivement présentées dans le tableau suivant :

TABLEAU 33– LE POURCENTAGE DES ACTIVITES PORTANT SUR LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION LES MOINS PRESENTES DANS LES MANUELS ETUDIES DE CM1

Les significations de la fraction les moins présentes dans les manuels de CM1					
	O1	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
Opérateur	10,2%	7,38%	0%	8,7%	20,27%
Quotient	3,06%	4,01%	0%	11,59%	6,76%

Enfin, les significations absentes de ces manuels sont *partie-tout (quantité discrète) et Rapport.*

Deuxièmement, dans les manuels scolaires de CM2, nous remarquons que les significations de la fraction les plus présentes et les plus observées à travers les activités analysées, portant sur les fractions, sont respectivement présentées dans le tableau suivant :

TABLEAU 34– LE POURCENTAGE DES ACTIVITES PORTANT SUR LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION LES PLUS PRESENTES DANS LES MANUELS ETUDIES DE CM2

Les significations de la fraction les plus présentes dans les manuels de CM2					
	O2	**E2**	**C2**	**J2**	**T2**
Nombre	29,89%	31,75%	33,33%	33,33%	30,67%
Partie d'un tout	28,74%	25,4%	23,33%	27,27%	24%
Mesure	19,54%	12,7%	15%	12,12%	14,67%

En revanche, les significations les moins présentes sont respectivement présentées dans le tableau suivant :

TABLEAU 35– LE POURCENTAGE DES ACTIVITES PORTANT SUR LES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION LES MOINS PRESENTES DANS LES MANUELS ETUDIES DE CM2

Les significations de la fraction les moins présentes dans les manuels de CM2					
	O2	**E2**	**C2**	**J2**	**T2**
Opérateur	10,34%	11,11%	5%	12,12%	12%
Nombre sur droite numérique	14,29%	13,33%	10,67%	8,05%	0%
Quotient	1,15%	4,76%	10%	15,15%	8%

Enfin, la signification *Rapport* est effectivement absente de ces manuels *et la signification Partie-tout (quantité discrète)* n'est présente que *dans* le manuel O2 avec 2,3% des activités analysées.

A travers ce qui précède, nous pouvons déduire que :

Premièrement, dans les deux niveaux scolaires, ce sont les activités relatives aux trois significations *Partie-tout (quantité continue)*, *Nombre* et *Mesure* qui sont les plus importantes dans les manuels étudiés. En effet, c'est la signification *Partie-tout (quantité continue)* qui domine dans l'ensemble des manuels analysés en CM1 et la signification *Mesure* vient en deuxième place, alors qu'en CM2, c'est celle de *Nombre* qui semble dominer dans l'ensemble des manuels de CM2 et la signification *Partie-tout (quantité continue)* vient en deuxième place puis en troisième place vient celle de *Mesure*.

Deuxièmement, quant à la signification *Nombre sur une droite graduée, celle-ci* semble occuper la troisième ou la quatrième place dans les manuels de CM1, tandis que, dans les manuels de CM2 elle se classe à la troisième, à la quatrième ou à la cinquième place.

Troisièmement, la signification *Opérateur* vient à la troisième, à la quatrième ou à la cinquième place dans les manuels de CM1, alors que, dans les manuels de CM2, celle-ci se classe à la quatrième, à la cinquième ou à la sixième place.

Quatrièmement, dans les manuels des deux niveaux scolaires CM1 et CM2, c'est la signification *Quotient* qui est la moins présente.

Cinquièmement, les activités selon les deux significations *Partie-tout (quantité discrète)* et *Rapport* se retrouvent à peu près de la même façon aux deux niveaux scolaires. Celles portant sur la signification *Rapport* sont effectivement absentes dans les manuels analysées de ces deux niveaux, CM1 et CM2, et les activités portant sur la signification *Partie-tout (quantité discrète)* sont également absentes dans tous les manuels des deux niveaux sauf dans le manuel O2 (2,3%).

De plus, l'importance de la signification *Nombre,* dans les manuels scolaires de CM2, s'explique par l'exploration des opérations sur les fractions (addition, soustraction et multiplication par des nombres naturels) qui est à l'étude au troisième cycle du primaire (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008). Cela justifie également que la signification *Nombre* se classe à la deuxième place dans les manuels de CM1 et à la première place dans ceux de CM2. De même, cette signification, nous l'avons déjà vu, domine l'ensemble des manuels étudiés de CM2 et ceci dans une plus grande proportion qu'en CM1. En effet, plus de la moitié des activités portant sur les fractions sont consacrées à la signification *Nombre* dans les manuels choisis de CM2.

D'un autre côté, la signification *Partie-tout (quantité continue)* prend une importance considérable dans les manuels scolaires étudiés. En effet, concernant cette signification, elle occupe la deuxième place derrière la signification *Nombre* dans l'ensemble des manuels choisis de CM2, alors que, dans les manuels de CM1, elle domine et prend la première place. De plus, les résultats que nous avons obtenus rejoignent ceux de Kieren (1980), Wearne-Hiebert et Hiebert (1983), Mack (1990), Sinicrope et Mick (1992), Adjiage et Pluvinage (2000), Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert (2001) et Blouin (2002) qui indiquent que les activités portant sur les fractions se limitent souvent à la signification *Partie-tout (quantité continue)*. Un enseignement porté vers cette signification conduit toutefois à quelques inconvénients. En effet, Witherspoon (1993) indique qu'il faut connaître la géométrie du modèle pour pouvoir le diviser en parties égales. De plus, Adjiage et Pluvinage (2000) disent que la signification *Partie-tout (quantité continue)*, comme les parts de gâteau, semble facile à comprendre au départ, mais qu'elle renvoie à un univers fermé sur l'unité et qu'elle n'est pas appropriée à une expression de grandeur relative.

Par ailleurs, la signification *Nombre sur une droite numérique* est l'une des significations les moins présentes dans les manuels de CM2. Il est, en effet, difficile de comprendre, pourquoi cette signification est moins présente sachant que les élèves du troisième cycle doivent comparer et ordonner des fractions (Ministère de l'Éducation Nationale, 2002, 2008). Donc, la signification *Nombre sur une droite numérique* devrait prendre plus d'importance dans les manuels scolaires étant donné qu'elle aide à concrétiser ces notions.

Une répartition inégale des significations attribuées à la fraction dans l'enseignement peut conduire certains élèves à avoir peu de référents par rapport aux symboles et aux règles qu'ils utilisent comme le précisent Rouche (1998), Wearne-Hiebert et Hiebert (1983). Cette répartition inégale des significations des fractions, ajoutée à l'importance de la signification

Nombre dans les manuels scolaires pourrait expliquer la difficulté des élèves de CM1 et de CM2 à apprendre les fractions.

La réforme des programmes d'études amènera peut-être un changement dans la répartition des significations des fractions présentées aux élèves. En effet, le programme des mathématiques du troisième cycle du primaire (Ministère de l'Éducation Nationale, 2007) indique que l'élève doit se confronter à des représentations variées des fractions. A titre d'exemple, Picard (1992) affirme que le matériel qui sera utilisé pour enseigner devra être évalué entre autres pour vérifier si les activités avec les fractions sont également réparties parmi les significations exploitées. Cette évaluation de manuels scolaires indiquera ainsi les modifications à apporter aux manuels. En conséquence, l'apprentissage des élèves par rapport aux fractions pourra être facilité.

3.1.2. Résultats concernant la deuxième hypothèse

Nous allons maintenant vérifier la deuxième hypothèse posée dans cette recherche qui est : « La signification de la fraction la plus présente, chez les élèves de CM1 et de CM2, est celle de *Partie d'un tout* ». Cette hypothèse est liée à la seconde question de la recherche : « De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ? ».

Au vu de l'ensemble du questionnaire écrit et à travers les réponses données par les élèves des deux niveaux scolaires, CM1 et CM2, participant dans notre étude, il apparaît que l'utilisation de la signification *partie-tout (quantité continue)* de la fraction est celle que les élèves de CM1 et de CM2 utilisent le plus. Ainsi, cela nous permet de constater que notre hypothèse posée est tout à fait vérifiée. Pour expliquer :

Premièrement, nous observons que la signification *Partie-tout (quantité continue)* est celle qui est la plus utilisée chez les élèves de CM1 et de CM2 pour définir la fraction. 43,75% d'élèves de CM1 et 33,91% de ceux de CM2 l'utilisent pour définir la fraction.

Deuxièmement, chez les élèves des deux niveaux CM1 et CM2, *la signification partie-tout (quantité continue)* se classe à la première place en tant que référence pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien. 41,88% d'élèves de CM1 et 33,04% d'élève de CM2 utilisent cette signification pour donner un exemple.

Troisièmement, *Partie-tout (quantité continue)* est la première signification référée pour illustrer une fraction chez les CM1 et CM2. En effet, 39,38% des élèves de CM1 et 60,87% de ceux de CM2 l'utilisent.

Quatrièmement, en pratique, la plupart des élèves illustrent ou représentent correctement cette signification. En effet, 115/160 élèves (71,88 %) des élèves de CM1 et 99/115 élèves (86,09%) des élèves de CM2 illustrent de façon correcte cette signification. Cependant, l'équipartition des parties est moins respectée par les élèves de CM1 que par ceux de CM2.

Cinquièmement, les élèves développent souvent des procédures à partir de la signification *Partie-tout (quantité continue)* pour répondre aux autres questions spécifiques portant sur la signification *Nombre sur une droite numérique* et sur celle de *Mesure*.

3.1.3. Résultats concernant la troisième hypothèse

Après avoir analysé d'une part les manuels scolaires choisis pour déterminer les significations de la fraction présentées dans ces derniers et d'autre part les réponses données par les élèves de CM1 et de CM2 à notre questionnaire afin de déterminer les signification les plus utilisées par ceux-ci, nous tentons de vérifier la troisième hypothèse posée dans cette recherche qui concerne l'influence possible des significations de la fraction exploitées dans les manuels scolaires sur les illustrations que les élèves de CM1 et de CM2 donnent des fractions. Cependant, puisque la taille de l'échantillon d'élèves participants est réduite et que le nombre de manuels utilisés dans les classes considérées est aussi limité (les manuels E1, C1, J1, O2, C2 et T2 sont utilisés), nous ne pouvons pas éprouver avec une précision suffisante cette hypothèse. Cependant, grâce à certains résultats que nous observons, nous formulons une nouvelle hypothèse et nous allons également la vérifier. Cette hypothèse est : « Les significations de la fraction les plus présentes dans les manuels scolaires choisis, sont celles que les élèves ont plus de facilité à illustrer correctement, ou, celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer ».

À travers les réponses données par les élèves interrogés, nous avons constaté que les significations de la fraction en tant que *partie-tout (quantité continue), Nombre et Mesure* sont les plus importantes dans les manuels étudiés et que les élèves les illustrent correctement en plus de les utiliser régulièrement. En effet, dans les manuels scolaires de CM1, à travers les activités analysées portant sur les fractions, nous constatons que *Partie-tout (quantité continue), Mesure* et *Nombre* sont les trois significations les plus présentes. Et dans les manuels de CM2, les trois significations *Nombre*, *Partie-tout (quantité continue)* et *Mesure* sont les plus exploitées.

D'un autre côté, nous avons remarqué que la signification *Rapport* est absente dans tous les manuels scolaires étudiés en CM1 et en CM2 sauf dans celui de O2 et que les réponses des élèves, à la question portant sur cette signification, montrent que cette signification est moins comprise par ces élèves.

3.2. Interprétations et discussion des résultats obtenus

Nous allons maintenant interpréter les résultats trouvés quant aux illustrations des fractions données par les élèves interrogés. L'étude des activités des élèves au moment où une erreur apparaît peut nous aider à répondre à notre deuxième question de recherche qui est : « De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ? ». En effet, dans les questionnaires écrits destinés aux élèves, nous tenons compte des figures, des dessins, des calculs et des autres traces écrites afin de reconnaître la représentation donnée par l'élève sur un problème mathématique posé. De plus, à la lumière d'autres recherches sur les fractions et des expériences scolaires des élèves, nous tentons une interprétation des résultats obtenus.

L'analyse des manuels scolaires choisis permet d'observer que la signification *Partie-tout (quantité continue)* est importante dans les activités portant sur les fractions dans les manuels scolaires. Cette signification est également la plus utilisée chez les élèves des deux niveaux CM1 et CM2. Toutefois, certains auteurs Kieren (1980), Wearne-Hiebert et Hiebert (1983), Mack (1990), Sinicrope et Mick (1992), Adjiage et Pluvinage (2000), Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert (2001) et Blouin (2002) indiquent que les sens des activités portant sur les fractions qui se limitent souvent à la signification *Partie-tout (quantité continue)* entraînent un répertoire limité de procédures chez les élèves au moment de résoudre des problèmes. Les résultats obtenus convergent vers cette confirmation étant donné que les élèves utilisent souvent des procédures développées à partir de la signification *Partie-tout (quantité continue)* pour répondre à des questions se rapportant à d'autres significations de la fraction. Witherspoon (1993) indique aussi qu'il faut connaître la géométrie du modèle, par exemple celle du cercle, pour pouvoir le diviser également. Une méconnaissance de la géométrie du modèle est peut-être l'une des raisons qui explique que plusieurs élèves de CM1 et de CM2 ne respectent pas le principe d'équipartition. Ils ont surtout de la difficulté à séparer un cercle en trois. De ce côté, Vézina (1994) indique, elle aussi, que la partage du cercle en trois, qui nécessite l'emploi du rayon, est un procédé qui semble plus difficile pour les jeunes élèves.

D’autre part, nous trouvons également comme résultat que la signification *Nombre* est souvent utilisée par les élèves et qu’elle est parmi les significations les plus présentes dans les manuels scolaires choisis. Cependant, nous constatons que les élèves commettent des erreurs en calculant avec les fractions parce qu’ils se réfèrent parfois à des règles qu’ils utilisent mécaniquement. Par exemple, pour effectuer l’addition des deux fractions, certains d’élèves font la somme des numérateurs entre eux et font encore la somme des dénominateurs ensemble. Hasemann (1981) indique à ce sujet que si les règles sont introduites trop tôt chez les élèves, elles ont plus de risques d’être utilisées mécaniquement.

De même, l’analyse des manuels scolaires montre que la signification *Mesure* se classe à la première place dans les manuels de CM1 et à la deuxième place dans ceux de CM2. Nous constatons également, d’après l’analyse des réponses des élèves au questionnaire, que 71,88% des élèves de CM1 et 74,78% des élèves de CM2 réussissent la question portant sur la signification *Mesure*.

D’un autre côté, bien que la signification *Partie-tout (quantité discrète)* soit moins présente ou carrément absente dans les manuels scolaires choisis, les élèves de CM1 et de CM2 l’illustrent correctement. Puisque cette signification est moins présente ou carrément absente dans ces manuels, il paraît que les élèves feraient référence à leurs connaissances antérieures pour développer une compréhension à cette signification. De plus, pour construire la signification de la fraction en tant que *Opérateur*, l’élève s’appuyait sur ses connaissances préalables et son interaction avec son environnement physique et social. Selon Erickson (2001), l’élève construit ses connaissances en s’appuyant sur ses connaissances préalables et son interaction avec son environnement physique et social. En effet, nous constatons que la signification *Opérateur* est peu exploitée dans les manuels scolaires de CM1, mais qu’elle est illustrée correctement par 30,63% (49/160) des élèves questionnés. Nous observons également que cette signification est plus exploitée dans les manuels de CM2 que dans ceux de CM1.

Par ailleurs, les réponses données par les élèves interrogés ne correspondent pas toujours à la question posée dans le questionnaire. Par exemple, les questions portant sur les significations *Opérateur* et *Rapport* sont parfois incomprises par les élèves. En effet, Warne-Hiebert et Hiebert (1983) mentionnent que le but des élèves est de manipuler les nombres donnés d’un problème pour générer une réponse sans nécessairement porter attention à la signification du problème. Cela s’associe à une approche d’enseignement par objectifs où le résultat est plus important que la procédure. Les nouveaux programmes d’études (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008) remplacent cette approche par une approche par compétences où les procédures des élèves sont aussi importantes que leurs réponses.

En ce qui concerne la signification *Nombre sur une droite numérique*, d'un côté, *celle-ci* occupe la troisième ou la quatrième place dans les manuels de CM1, tandis que, dans les manuels de CM2 elle se classe à la troisième, à la quatrième ou à la cinquième place. D'un autre côté, la fraction donnée est bien situé sur la droite numérique par 48,16 % (77/160) des élèves de CM1 et 49,57% (57/115) des élèves de CM2.

De plus, les élèves de CM2 réussissent mieux la question portant sur la signification *Quotient* que ceux de CM1. En effet, 57,39% des élèves de CM2 réussissent celle-ci contre 28,75 de ceux de CM1. Il faut noter que ce résultat est en lien avec les programmes d'études étant donné que situer un nombre sur la droite numérique est une notion importante en CM1 et en CM2 (Ministère de l'Éducation Nationale, 2007, 2008).

D'autre part, comme une répartition inégale, des significations des fractions, est constatée dans les manuels scolaires choisis, nous nous appuyons Warne-Hiebert et Hiebert (1983) et Rouche (1998) qui indiquent que les élèves ont peu de référents sur les symboles et règles qu'ils utilisent pour résoudre des problèmes. L'analyse des questionnaires nous permet de voir que certaines significations de la fraction, comme le *rapport et Quotient* sont moins comprises par les élèves de CM1 que par ceux de CM2. En effet, les élèves de CM2 réussissent mieux à la question portant sur la signification *Quotient* (57,39%) que les élèves de CM1 (28,75%).

Enfin, compte tenu des difficultés que les élèves éprouvent avec certaines significations de la fraction, il nous semble nécessaire de prendre le temps de développer les concepts fondamentaux sur les fractions dès le début de l'enseignement de cette notion en insistant sur la signification de la fraction tout comme Wearne-Hiebert et Hiebert (1983) l'entendent. Wearne-Hiebert et Hiebert (1983), Witherspoon (1993), Adjiage et Pluvinage (2000) et Watanabe (2002) indiquent que les difficultés des fractions, rencontrées par les élèves, pourraient être atténuées en présentant aux élèves des significations plus variées dans les problèmes posés.

4. L'enseignement de la fraction vu par les enseignants

Dans ce dernier chapitre, nous traitons de l'enseignement de la fraction vu par les enseignants des classes participant à notre recherche. L'enseignement, disions-nous, n'explique pas tous les apprentissages, mais il joue un rôle non négligeable. C'est pourquoi nous avons souhaité faire une halte sur l'enseignement de la notion de fraction pour accompagner notre regard en ce qui concerne les représentations et les connaissances des élèves de CM1 et de CM2 des différentes significations de la fraction.

Il est légitime de penser que l'enseignement, tel qu'il est dispensé par les enseignants, favorise chez les élèves la construction d'un sens du concept enseigné. Dans notre situation, le concept de fraction est-il un enseignement de la fraction orienté vers la construction des connaissances par les élèves ? En classe, par exemple, quelle est la place laissée à l'élève et quel rôle se réserve le maître ? Les élèves ont-ils l'occasion d'explorer la notion de fraction par eux-mêmes ? Comment sont-ils accompagnés dans leur démarche ? Voilà des caractéristiques de l'enseignement qui marquent les apprentissages réalisés.

Pour ce faire, comme cela a été déjà expliqué au chapitre 1 de la partie III traitant de la méthodologie de la recherche, nous avons construit un questionnaire que l'on trouvera à l'annexe 7. Après une première partie où nous recueillons les renseignements généraux comme le sexe, l'âge, le niveau scolaire auquel ils enseignent, une seconde partie traite de l'enseignement de la fraction en s'appuyant sur quatre questions :

- comment les enseignants abordent-ils l'enseignement de la fraction ?
- quelle programmation des savoirs et savoir-faire font les enseignants pour l'apprentissage de fractions ?
- quelles connaissances des fractions les enseignants demandent-ils pour évaluer leurs élèves ?
- que suggéreraient les enseignants à propos de la notion de fraction ?

Les réponses à ces questions ont été analysées suivant deux points de vue, pédagogique et mathématique. Notre façon de faire et les éléments retenus pour caractériser les réponses ont été expliqués dans les sections (2.1.4.1.) et (2.1.4.2.) de cette thèse ; elles incluent deux tableaux qui sont repris avec quelques précisions supplémentaires sur les modalités de notre analyse.

4.1. Quelques précisions sur les analyses des réponses au questionnaire des enseignants

La première analyse des réponses des enseignants a été à caractère pédagogique. Nous avons d'abord résumé chaque réponse, puis l'avons caractérisée en fonction des descriptions du tableau présenté dans la section (2.1.4.1.) On y retrouve quatre grandes catégories (numérotées de I à IV) fondées sur des modes de représentation ; ces catégories sont ensuite subdivisées en fonction des rôles respectifs de l'enseignant et de l'élève. Ainsi, une réponse qui se voit attribuer la cote (I b) signifie que l'enseignant a parlé d'utilisation d'un matériel, mais qu'il dirige étroitement les élèves dans leurs manipulations.

Avant d'aller plus loin, signalons deux points à retenir à propos de l'attribution des cotes aux réponses des enseignants. Le premier pour dire qu'une réponse à une question donnée peut parfois correspondre à une seule, mais aussi souvent à plusieurs des descriptions-catégorisations présentées dans le tableau. Ainsi, l'attribution des cotes (I b), (II c) à la réponse d'un enseignant signifie que, dans un premier temps, un matériel didactique est utilisé par les élèves, mais que c'est l'enseignant qui donne les instructions nécessaires, puis que, dans un second temps, une représentation graphique est utilisée par l'enseignant et qu'il donne les explications nécessaires en posant parfois des questions aux élèves. Le second point pour signaler que les réponses des enseignants sont parfois très brèves. Ainsi, il arrive qu'au lieu d'expliquer les séquences d'enseignement, certains donnent quelques indices ou quelques pistes de cheminement pour cet enseignement. Si dans la parenthèse qui suit une description, il n'y a qu'un chiffre (I) par exemple, cela signifie que l'enseignant a parlé de matériel, mais sans préciser si c'est lui-même ou les élèves qui font les manipulations.

Nous avons suivi cette analyse pour la présentation des différents éléments de savoirs et savoir-faire dont nous jugions essentielle la présence dans les propos de l'enseignant. Ces éléments sont rappelés dans le tableau que nous avons reproduit dans la section (2.1.4.2.).

Dans la présentation des analyses dans la section qui suit, nous avons regroupé les enseignants par niveaux, d'abord ceux qui œuvrent à la quatrième année du primaire (CM1) et ceux de la cinquième année (CM2). Pour chacun des enseignants, nous exposons notre analyse pédagogique concernant la première question qui se pose sur la façon dont l'enseignant aborde le concept de fraction, analyse qui résume en même temps la réponse. Puis vient une analyse de la réponse sur le plan mathématique selon le tableau présenté dans la section (2.1.4.2.). Pour la deuxième question, nous allons présenter et répertorier les éléments de savoirs et savoir-faire présents dans les propos de l'enseignant.

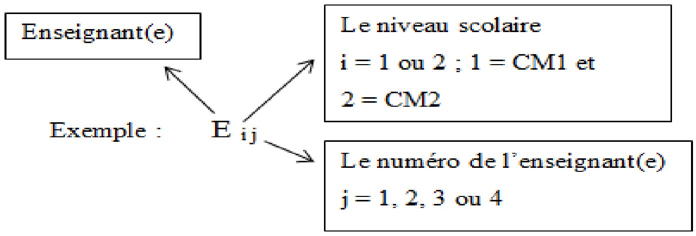
4.2. Analyse des réponses des enseignants

Nous allons présenter, dans la section qui vient l'analyse des réponses des 8 enseignants - 4 en CM1, 3 en CM2 et 1 enseignante en CM1 et CM2 - répondant à notre questionnaire écrit qui leur a été soumis.

Nous présentons les notations utilisées pour l'analyse des données : apparaît d'abord la lettre E qui désigne le mot « enseignant », celle-ci est suivie par les deux indices « i et j » dont

« i » représente le niveau scolaire dans lequel l'enseignant enseigne et « j » donne le numéro de cet enseignant.

Voilà la notation :



Par exemple, E_{13} désigne l'enseignant(e) qui enseigne en CM1 et qui porte le numéro 3. Il existe un cas particulier, une seule enseignante qui travaille à la fois dans le CM1 et CM2, nous la notons par $E_{121.}$ Nous commençons à présenter les résultats concernant les réponses des enseignants de CM1 sur le questionnaire.

4.2.1. Analyse des réponses des enseignants de CM1

Pour chaque enseignant, nous présentons, d'abord, les identifications générales comme le sexe, l'âge, le diplôme obtenu, le manuel scolaire suivi, … Puis, nous présentons les résultats concernant la manière dont l'enseignant aborde le concept de fraction et les différents savoirs et savoir-faire proposés par ce dernier lors de l'apprentissage des fractions à ses élèves.

4.2.1.1. Analyse des réponses de E_{11}

E_{11}	
Identifications générales	
Sexe	Homme
Âge	29,51
Diplôme obtenu	Licence STAPS/ CRPE
Formation sur les fractions	Non
Ancienneté d'enseignement	5 ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	J'apprends les maths, 2010, RETZ
Degré d'usage de ce manuel	Quelques fois
Raison(s) du choix de ce manuel	1- Les exercices sont toujours adaptés au niveau des élèves.

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves.

L'enseignant propose l'utilisation de matériels concrets (I), mais il décrit sa façon d'aborder le concept seulement avec la manipulation d'objets concrets : il propose de partager équitablement un gâteau ou de distribuer un certain nombre de livres dans les groupes. Il propose également l'idée de la lecture de l'heure. Cependant, il n'explique pas de quelle façon il procède ni quels rôles il réserve aux élèves dans la démarche. Nous constatons que, pour introduire l'idée de fraction aux élèves, l'enseignant se réfère aux trois significations : Partie d'un tout, Partie d'un ensemble et Mesure de temps.

Mathématiquement, nous voyons la présence de l'idée d'équipartition et de choix (partage équitable) dans la réponse de l'enseignant, celle-ci est présente d'une façon explicite. Mais, il n'explique pas de quelle façon il procède au partage. Cette réponse est jugée acceptable parce qu'elle présente le critère concernant la présence de l'idée d'équipartition et de choix.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant.

Dans le tableau suivant, nous présentons les propositions de l'enseignant en ce qui concerne le savoir et le savoir-faire qu'il prépare pour les transmettre lors de l'enseignement du concept de fraction à ses élèves :

TABLEAU 36– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{11}

Savoir	Savoir-faire
- Partage équitable - Reconnaître le vocabulaire : numérateur et dénominateur - Savoir représenter une fraction - Reconnaître les fractions décimales	- Comparer de fractions - Additionner de fractions - Soustraire de fractions - Positionner une fraction sur une droite graduée

Question 3 : Classement des significations de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue)

Le tableau présent aborde le classement donné par l'enseignant de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction.

TABLEAU 37– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{11}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
3	2	7	6	8	4	1	5

Chez cet enseignant, nous constatons que les significations de la fraction en tant que *Nombre, Partie-tout (quantité discrète), Partie-tout (quantité continue) et Nombre sur une droite graduée* sont les plus importantes à travailler auprès de ses élèves. En revanche, les significations *Mesure*, *Opérateur* et *Quotient* sont les moins importantes pour l'enseignante.

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

Aucune suggestion n'a été proposée par cet enseignant.

4.2.1.2. *Analyse des réponses de E_{12}*

E_{12}	
Identifications générales	
Sexe	Homme
Âge	32,17
Diplôme obtenu	Licence STAPS/ CRPE
Formation sur les fractions	Non
Ancienneté d'enseignement	3 ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	J'apprends les maths, 2010, RETZ
Degré d'usage de ce manuel	Quelques fois
Raison(s) du choix de ce manuel	Nombreux exercices de difficultés croissantes

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves

L'enseignant met en évidence la notion de partage équitable. Il suggère l'utilisation de matériels concrets (I), il donne l'exemple du découpage d'une pizza en parties égales. Il propose également l'idée du découpage d'une longueur. Mais, il n'explique pas de quelle façon il procède et quels rôles il réservait aux élèves dans la démarche. Pour l'introduction des fractions, nous constatons que l'enseignant se réfère aux deux significations suivantes: Partie d'un tout, Mesure de longueurs.

Sur le plan mathématique, nous voyons, dans la réponse de l'enseignant, la présence de l'idée de partage équitable ; celle-ci est présente d'une façon explicite. Mais, l'enseignant n'explique pas de quelle façon il procède au partage. Cette réponse est jugée acceptable parce qu'elle présente le critère concernant la présence de l'idée d'équipartition.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant

Le tableau suivant présente le savoir et le savoir-faire programmés par l'enseignent pour enseigner le concept de fraction à ses élèves :

TABLEAU 38– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{12}

Savoir	Savoir-faire
- Partage équitable - Représenter d'une fraction	- Comparer de fractions - Positionner une fraction sur une droite graduée

Question 3 : Classement des significations de 1(la plus attendue) à 8(la moins attendue)

Le tableau présent aborde le classement donné de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction.

TABLEAU 39– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{12}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
3	2	7	6	8	4	1	5

Les significations de la fraction en tant que *Nombre, Partie-tout (quantité discrète), Partie-tout (quantité continue) et Nombre sur une droite graduée* semblent être les plus importantes chez l'enseignant. En revanche, les significations *Mesure*, *Opérateur* et *Quotient* sont les moins importantes.

A la différence des autres enseignants, les deux enseignants 1 et 2 ont donné le même classement des significations ; nous constatons qu'il s'agit de deux hommes, du même âge, tous les deux ayant suivi la même formation initiale en licence STAPS, les deux enseignants utilisent le même manuel scolaire ; y aurait-il une relation de cause à effet ?

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

Aucune suggestion n'a été proposée par cet enseignant.

4.2.1.3. Analyse des réponses de E_{13}

E_{13}	
Identifications générales	
Sexe	Homme
Âge	33,56
Diplôme obtenu	Maîtrise de Droit privé
Formation sur les fractions	Non
Ancienneté d'enseignement	10 ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	Euro maths, 2009, Hatier
Degré d'usage de ce manuel	La plupart du temps
Raison(s) du choix de ce manuel	Pour la philosophie du projet et les formes du travail (manipulation, recherche, situations problèmes, prise en compte des représentations mentales…)

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves.

L'enseignant propose d'initier le concept de fraction de trois manières différentes :

- à l'aide de l'utilisation de matériels concrets (I) comme l'utilisation de bandes de longueur, le pliage successif d'objets concrets ;
- à l'aide de l'utilisation de représentations semi-concrètes comme l'utilisation d'une droite numérique ;
- à l'aide de l'utilisation de représentations abstraites par l'écriture des fractions et l'écriture additive des fractions (II) ;

tout cela, sans donner de détails, ni expliquer de quelle façon il procède, ni quels rôles il réservait aux élèves dans la démarche. Nous constatons que, pour introduire l'idée de fraction aux élèves, l'enseignant se réfère aux trois significations suivantes : Partie d'un tout, Mesure de longueurs et Nombre sur une droite graduée.

Mathématiquement, nous constatons que, dans sa réponse, l'enseignant ne mentionne pas l'idée d'équipartition dans la présentation du concept de fraction à ses élèves, et qu'il ne peut pas en voir l'importance. Cette réponse est jugée non acceptable parce qu'aucune des idées d'équipartition ou de choix n'apparaît, même implicitement.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant.

Nous allons présenter le savoir et le savoir-faire organisés par l'enseignant pour enseigner le concept de fraction à ses élèves, le tableau suivant présente ces savoirs :

TABLEAU 40– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{13}

Savoir	Savoir-faire
- Reconnaître des fractions simples - Donner du sens aux fractions décimales	- Equivalence de fractions - Décomposer de fractions - Additionner de fractions - Comparer des nombres décimaux - Positionner une fraction sur une droite graduée

Question 3 : Classement des significations de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue)

Le tableau suivant aborde le classement donné de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction.

TABLEAU 41– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{13}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
4	5	8	7	2	3	1	6

Les significations de la fraction en tant que *Nombre, Mesure, Nombre sur une droite graduée* et *Partie-tout (quantité continue)* semblent être les plus importantes chez le répondant. Par contre, les significations *Opérateur*, *Quotient* et *Rapport* sont les moins importantes.

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

Aucune suggestion n'a été proposée par cet enseignant.

4.2.1.4. Analyse des réponses de E_{14}

E_{14}	
Identifications générales	
Sexe	Femme
Âge	28,33
Diplôme obtenu	BAC+3
Formation sur les fractions	Non
Ancienneté d'enseignement	4 ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	Cap maths, 2010, Hatier
Degré d'usage de ce manuel	Tout mon enseignement sur les fractions y est basé
Raison(s) du choix de ce manuel	Situation de découverte très intéressante.

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves

Avec l'idée de partage équitable, l'enseignante propose l'utilisation de matériels concrets (I), donnant l'exemple du découpage d'une tarte ou d'un gâteau en parties égales. Mais elle n'explique pas de quelle façon elle procède et quels rôles elle réservait aux élèves dans la démarche. L'enseignante se réfère dans sa réponse à la signification suivante : Partie d'un tout.

Sur le plan mathématique, nous voyons, dans la réponse de l'enseignante, la présence de l'idée de partage équitable, présente d'une façon explicite. Mais, elle n'explique pas de quelle façon elle procède à ce partage. Cette réponse est acceptable parce qu'elle présente le critère concernant la présence de l'idée d'équipartition et de choix.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant

Le tableau suivant présente les propositions de l'enseignante en ce qui concerne le savoir et le savoir-faire qu'elle a programmés pour enseigner le concept de fraction à ses élèves :

TABLEAU 42– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{14}

Savoir	Savoir-faire
- Reconnaître des fractions simples (1/2 ; 1/4 ; 1/3) Pour exprimer des longueurs - Donner du sens aux fractions décimales	- Comparer de fractions - Positionner une fraction sur une droite graduée

Question 3 : Classement des significations de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue)

Le tableau présent aborde le classement donné de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction.

TABLEAU 43– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{14}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
1	4	8	7	2	3	6	5

Les significations de la fraction en tant que *Partie-tout (quantité continue)*, *Mesure*, *Nombre sur une droite graduée* et *Partie-tout (quantité discrète)* semblent être les plus importantes chez la répondante. Par contre, les significations *Opérateur*, *Quotient* et *Nombre* sont les moins importantes.

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

Aucune suggestion n'a été proposée par cette enseignante.

4.2.2. Analyse des réponses des enseignants de CM2

Nous présentons maintenant les résultats obtenus des réponses des enseignants de CM2 en ce qui concerne l'initiation au concept de fraction et concernant les différents savoirs et savoir-faire proposés par ces enseignants lors de l'apprentissage des fractions à leurs élèves.

4.2.2.1. *Analyse des réponses de E_{21}*

E_{21}	
Identifications générales	
Sexe	Homme
Âge	34,69
Diplôme obtenu	Formation professionnelle: Brevet d'éducateur sportif-CRPE-CAFIPEMF
Formation sur les fractions	Oui-IUFM
Ancienneté d'enseignement	7ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	La tribu des maths, 2010, Magnard
Degré d'usage de ce manuel	La plupart du temps
Raison(s) du choix de ce manuel	Clarté des précisions didactiques. Anticipation des stratégies élèves. Réinvestissement dans des problèmes divers.

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves

L'enseignant propose du découpage d'une longueur avec des fractions (II). Il ne donne pas plus de détail à ce propos et il n'explique pas de quelle façon il procède et quels rôles il réservait aux élèves dans la démarche. Nous constatons que l'enseignant se réfère à la signification : Mesure de longueurs pour introduire aux élèves le concept de fraction.

Mathématiquement, nous ne voyons pas la présence de l'idée de partage équitable dans la réponse de l'enseignant. Cette réponse est non acceptable parce qu'aucune des idées d'équipartition et de choix n'y apparaît, même implicitement.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant

Dans le tableau suivant, nous présentons le savoir et le savoir-faire programmés par l'enseignant pour aborder le concept de fraction à ses élèves :

TABLEAU 44– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{21}

Savoir	Savoir-faire
- Reconnaître des fractions simples (demi-quart-tiers) pour exprimer des longueurs - Reconnaître le vocabulaire : numérateur et dénominateur	- Comparer de fractions - Décomposer de fractions - Encadrer des fractions - Savoir positionner des fractions sur une droite graduée

Question 3 : Classement des significations de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue)

Le tableau présent aborde le classement donné de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction.

TABLEAU 45– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{21}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
2	3	5	4	1	6	7	8

Les significations de la fraction en tant que *Mesure, Partie-tout (quantité continue), Partie-tout (quantité discrète) et Quotient* semblent être les plus importantes chez le répondant. Par contre, les significations *Rapport, Nombre* et *Nombre sur une droite graduée* sont les moins importantes.

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

L'enseignant a fait deux suggestions :

La première est de réserver la fraction en tant que Quotient au collège.

La seconde est de travailler les fractions supérieures à 1 dès l'école primaire.

4.2.2.2. Analyse des réponses de E_{22}

E_{22}	
Identifications générales	
Sexe	Femme
Âge	23,38
Diplôme obtenu	Licence Histoire-Master MESVC à l'IUFM de Lyon (2013)
Formation sur les fractions	Cours de mathématiques à l'IUFM: 2h sur les fractions pour l'aspect mathématique + 2h pour l'aspect didactique
Ancienneté d'enseignement	2 ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	Outils pour les maths, 2011, MAGNARD
Degré d'usage de ce manuel	Quelques fois
Raison(s) du choix de ce manuel	C'est celui qui est dans l'école.

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves

L'enseignante propose l'utilisation de matériels concrets (I), elle dit qu'elle utilise des bandes de papier pour introduire la fraction 3/4. Elle dit qu'elle découpe les 3/4 et elle les compare avec l'original. Elle ne fournit pas d'autres informations sur la façon dont elle procède à l'aide de ces matériels. L'enseignante, pour introduire les fractions, se réfère à la signification Partie d'un tout.

Mathématiquement, nous voyons la présence de l'idée de partage et de choix mais il n'y a pas de signe que le partage soit équitable. Cette réponse est non acceptable parce qu'aucune des idées d'équipartition et de choix n'apparaît, même implicitement.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant

Pour aborder le concept de fraction à ses élèves, L'enseignante propose les savoirs et savoir-faire suivants, ceux-ci sont présentés dans le tableau suivant :

TABLEAU 46– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{22}

Savoir	Savoir-faire
- Prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers - Travailler sur le sens du numérateur et du dénominateur - Travailler avec des fractions simples (demi,…) puis décimales - Lire des fractions	- Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs - Ecrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions de même dénominateur. - Ecrire des fractions

Question 3 : Classement des significations de 1(la plus attendue) à 8(la moins attendue)

Le tableau suivant aborde le classement donné de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction.

TABLEAU 47– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{22}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
2	1	8	7	4	3	5	6

Les significations de la fraction en tant que *Partie-tout (quantité discrète), Partie-tout (quantité continue), Nombre sur une droite graduée et Mesure,* sont les plus importantes chez l'enseignante. Par contre, les significations *Opérateur*, *Quotient* et *Rapport* sont les moins importantes.

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

L'enseignante a suggéré :

- Fractions en tant que quotients : abordées au collège seulement.
- Dès le départ, travailler sur des fractions supérieures > 1 (pour ne pas créer d'obstacle didactique en laissant croire qu'on ne peut que partager une unité).

4.2.2.3. Analyse des réponses de E_{23}

E_{23}	
Identifications générales	
Sexe	Femme
Âge	27,82
Diplôme obtenu	Licence d'allemand + espagnol (IUFM)
Formation sur les fractions	Non
Ancienneté d'enseignement	6 ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	Outils pour les maths, 2011, MAGNARD
Degré d'usage de ce manuel	La plupart du temps
Raison(s) du choix de ce manuel	1- Leçons claires et synthétiques. 2- Nombreux exercices de difficultés croissantes et classés par thème.

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves

L'enseignant propose d'initier le concept de fraction en se référant aux situations quotidiennes dans lesquelles on utilise des fractions. Celle-ci propose également de recenser le vocabulaire connu: tiers, quart, moitié… Ensuite, elle propose l'utilisation de matériels concrets (I), elle propose de partager équitablement (sans reste) un gâteau entre des enfants. Puis, elle dit qu'elle présente l'idée de la lecture de l'heure. Cependant, elle n'explique pas de quelle façon elle procède et quels rôles elle réservait aux élèves dans la démarche. Nous constatons que, pour introduire l'idée de fraction aux élèves, l'enseignante se réfère aux deux significations : Partie d'un tout et Mesure de temps.

Mathématiquement, nous voyons, dans la réponse de l'enseignante, la présence de l'idée de partage équitable ; celle-ci est présente d'une façon explicite. Mais, elle n'explique pas de quelle façon elle procède à ce partage. Cette réponse est acceptable grâce à la présence de l'idée d'équipartition.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant

Le tableau suivant présente la programmation proposée par l'enseignant concernant le savoir et le savoir-faire pour enseigner le concept de fraction à ses élèves :

TABLEAU 48– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{23}

Savoir	Savoir-faire
- Savoir ce que représentent le numérateur et le dénominateur. - Lire des fractions en chiffres/lettres.	- Savoir positionner des fractions sur une droite graduées. - Ecrire des fractions en chiffres/lettres. - Comparer de fractions - Décomposer de fractions. - Encadrer des fractions

Question 3 : Classement des significations de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue)

Le tableau présent aborde le classement donné de 1(la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction.

TABLEAU 49– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{23}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
3	2	7	6	8	4	1	5

Les significations de la fraction en tant que *Nombre, Partie-tout (quantité discrète), Partie-tout (quantité continue) et Nombre sur une droite graduée* semblent être les plus importantes chez l'enseignante. Par contre, les significations *Mesure*, *Opérateur* et *Quotient* sont les moins importantes.

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

Aucune suggestion n'a été proposée par cette enseignante.

4.2.2.4. Analyse des réponses de E_{121}

E_{121}	
Identifications générales	
Sexe	Femme
Âge	30,79
Diplôme obtenu	Master 2 Sciences de l'Education
Formation sur les fractions	Non
Ancienneté d'enseignement	5 ans
Titre du manuel utilisé, année de parution, éditeur	Cap maths, 2010, Hatier
Degré d'usage de ce manuel	La plupart du temps
Raison(s) du choix de ce manuel	Beaucoup de situations problèmes et de manipulation

Question 1 : Introduction du concept de fraction auprès d'élèves

L'enseignante propose d'initier le concept de fraction en utilisant des représentations semi-concrètes (II), elle propose de travailler avec des segments, mais sans donner de détails à ce propos et sans expliquer de quelle façon elle procède et quels rôles elle réservait aux élèves dans la démarche. Pour introduire l'idée de fraction aux élèves, l'enseignante utilise la signification : Mesure de longueurs.

Mathématiquement, nous ne voyons pas la présence de l'idée de partage équitable dans la réponse de l'enseignante. Cette réponse est non acceptable parce qu'aucune des idées d'équipartition et de choix n'y apparaît, même implicitement.

Question 2 : Eléments de savoirs et savoir-faire présents dans le propos de l'enseignant

Le tableau suivant présente les propositions de l'enseignante en ce qui concerne le savoir et le savoir-faire qu'elle va travailler pour enseigner le concept de fraction à ses élèves :

TABLEAU 50– SAVOIR ET SAVOIR-FAIRE PROPOSE PAR E_{121}

Savoir	Savoir-faire
- Reconnaître des fractions simples (demi-quart-tiers) pour mesurer et exprimer des longueurs - Reconnaître de fractions décimales	- Placer des fractions simples (demi-quart-tiers) sur une droite graduée - Comparer de fractions

Question 3 : Classement des significations de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue)

Le tableau suivant aborde le classement donné de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue) en ce qui concerne les différentes significations de la fraction

TABLEAU 51– CLASSEMENT DES SIGNIFICATIONS DE 1 A 8

Place accordée aux significations chez E_{121}							
Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
4	5	7	8	1	2	3	6

Les significations de la fraction en tant que *Mesure*, *Nombre sur une droite graduée*, *Nombre* et *Partie-tout (quantité continue)* sont les plus importantes chez l'enseignante. Par contre, les significations *Quotient*, *Opérateur* et *Rapport* sont les moins importantes.

Question 4 : Suggestions à propos de la notion de fraction ?

Il est nécessaire de beaucoup manipuler.

4.3. Synthèse et constats des analyses des réponses obtenues de la part des enseignants sur la deuxième partie du questionnaire

Nous allons dans cette section présenter la synthèse des analyses concernant les réponses des enseignants sur les questions formulées à la deuxième partie du questionnaire.

4.3.1. Réponses à la question 1 : Introduction du concept de fraction

Cette question se focalise sur la manière dont les maîtres disent aborder le concept de fraction avec leurs élèves. Sur le plan pédagogique, nous constatons que, sur les 8 répondants, 5 maîtres ont recours à un matériel concret pour aborder les fractions. Nous attribuons la cote (I) à leur réponse ou à une partie de leur réponse. Nous pouvons aussi noter qu'aucun ne dit laisser la responsabilité d'organiser les manipulations aux élèves ; ces 5 maîtres vont plutôt faire eux-mêmes les manipulations devant les élèves. Enfin, ils parlent d'utilisation du matériel sans préciser ni leur rôle, ni celui des élèves. Leur comportement est-il dicté par le fait que ces maîtres pensent que la question est trop difficile à aborder par les élèves et qu'il faille les mener sur la piste exacte que le maître a décidée, ou par le fait que les maîtres sont trop mal à l'aise avec cette question pour laisser une liberté aux élèves ?

Sur les 8 répondants, 2 disent avoir recours aux représentations graphiques, nous attribuons la cote (II) à leur réponse ou à une partie de leur réponse. Ils parlent du recours aux représentations graphiques sans expliquer leur rôle et le rôle des élèves. 1 seul répondant se propose d'utiliser à la fois le matériel concret et les représentations graphiques.

TABLEAU 52– RESUME DES JUGEMENTS PEDAGOGIQUES ET MATHEMATIQUES

	Question 1	
Enseignants CM1	**Jugement pédagogique**	**Jugement mathématique**
E_{11}	I	Acceptable
E_{12}	I	Acceptable
E_{13}	I, II	Non acceptable
E_{14}	I	Acceptable
Enseignants CM2		
E_{21}	II	Non acceptable
E_{22}	I	Non acceptable
E_{23}	I	Acceptable
Enseignants CM1 et CM2		
E_{121}	II	Non acceptable

Jugement pédagogique : cote de I à IV.

Jugement mathématique : **Réponse acceptable** (c'est qu'un des critères les plus importants est présent) ou **Réponse non acceptable (**c'est que les critères ne sont pas présents).

Aucune réponse n'a été classée dans la catégorie III (représentations symboliques et mentales) ni de manière explicite ni de manière implicite. Cela signifie que si nous voulons aller jusqu'aux représentations mentales et symboliques en présentant la fraction, nous ne devons pas nous limiter à l'utilisation des représentations matérielles ou graphiques.

Sur le plan mathématique, la moitié des réponses, soit 4, ont été jugées acceptables, au sens où l'idée la plus importante, celle d'équipartition, était présente. Cela nous laisse 4 réponses jugées non acceptables. Lorsque les réponses des enseignants sont jugées non acceptables, il ne faut pas taxer les maîtres concernés d'incompétents. Si les réponses ont reçu ce 'non acceptable', c'est qu'aucune des idées d'équipartition et de choix n'y apparaît, même implicitement. Cela signifie simplement que le maître n'y pense pas au moment de répondre et la question, très générale, ne l'a pas amené sur ce terrain. Nous pouvons aussi noter que les

8 répondants ont pratiquement répondu à cette question et nous n’avons pas de « non réponse ».

En somme, à titre de constat, les enseignants laissent presque toute la place aux manipulations et/ou aux représentations imagées (dessins). Ils n’abordent pas le concept de fraction de manière symbolique ou formelle. Ce type d'enseignement tradition est vraisemblablement atténué par une tendance plus constructiviste : laisser à l’élève la chance de mieux appréhender le concept en mettant ses sens à contribution. Le maître demeure par ailleurs contrôlant ; l’enquête ayant été effectuée en juin, le maître sent peut-être que le temps lui est compté pour finir l’enseignement de la matière.

Pour conclure, en ce qui concerne l’introduction du concept de fraction, nous constatons que les enseignants ont eu recours au matériel concret ainsi qu’à l’usage des représentations graphiques, ce qui nous éloigne de l'image d'un enseignement fondé sur la seule transmission des connaissances d'un maître vers un élève. En général, les réponses cataloguées I, c'est-à-dire parlant d’utilisation de matériel didactique, sont plus nombreuses à la question 1, soient 6 réponses sur 8. Par contre, nous avons rangé 3 réponses dans la catégorie II, aucune réponse rangée dans les catégories III et IV. Cette présence, de réponses dans la catégorie II, parfois dominante, s’explique parce que ces représentations sont plus faciles à utiliser : il est plus simple de dessiner une figure au tableau ou sur une feuille que de penser à amener et à garder en classe des pommes et des gâteaux. En ce qui concerne les rôles respectifs de l’enseignant et des élèves, nous pouvons noter qu’aucun maître ne dit laisser la responsabilité d’organiser les manipulations aux élèves, les maîtres répondants vont plutôt faire eux-mêmes les manipulations devant les élèves. Cependant, ils n’expliquent pas de quelle façon ils procèdent et quels rôles réservaient aux élèves dans la démarche.

4.3.2. Réponses à la question 2 : Programmation des éléments de savoirs et savoir-faire par les enseignants

Cette question porte sur la façon dont les maîtres procèdent pour préparer les éléments de savoirs et le savoir-faire à transmettre aux élèves en ce qui concerne le concept de fraction ; cette étape de programmation des savoirs avance celle de la présentation effective du concept dans la classe. Dans la section qui vient, nous allons, d’abord, présenter les éléments de savoir manifestés dans les réponses des 8 enseignants, puis nous allons présenter les éléments de savoir-faire programmés. Le tableau suivant présente les éléments de savoir répertoriés des réponses des 8 enseignants interrogés :

TABLEAU 53– PRESENTATION LES ELEMENTS DE SAVOIRS PROGRAMMES PAR LES 8 ENSEIGNANTS

Savoirs répertoriés	**E_{11}**	**E_{12}**	**E_{13}**	**E_{14}**	**E_{21}**	**E_{22}**	**E_{23}**	**E_{121}**
Partage équitable	✓	✓						
Reconnaître le vocabulaire : numérateur et dénominateur	✓				✓	✓	✓	
Reconnaître des fractions simples (demi, quart…)			✓	✓	✓	✓		✓
Reconnaître de fractions décimales	✓		✓	✓				✓
Savoir lire des fractions						✓	✓	
Prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers						✓		

Dans ce tableau, nous constatons que, sur les 8 répondants, 5 enseignants (E_{13}, E_{14}, E_{21}, E_{22}, E_{121}) donnent une importance à l'idée de *reconnaître des fractions simples (demi, quart,…)* lors de la préparation pour aborder les fractions à leurs élèves. Pour le savoir *reconnaître le vocabulaire numérateur et dénominateur*, les 4 enseignants (E_{11}, E_{21}, E_{22}, E_{23}) le donnent important dans leurs préparations. Les 4 enseignants (E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{121}) donnent le savoir *reconnaître des fractions décimales* dans la préparation pour présenter les fractions aux élèves. De plus, l'idée de *partage équitable* n'a été donnée que par les 2 enseignants (E_{11}, E_{12}) et l'idée *savoir lire des fractions* a été donnée par les 2 enseignants (E_{22}, E_{23}) lors de la préparation pour aborder les fractions. Enfin, un seul enseignant (E_{22}) accorde une importance à savoir *prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers* dans sa préparation.

Dans le tableau suivant, nous présentons les éléments du savoir-faire présents dans les réponses données par les 8 enseignants participants.

TABLEAU 54– PRESENTATION LES SAVOIR-FAIRE PROGRAMMES PAR LES 8 ENSEIGNANTS

Savoir-faire répertorié	**E_{11}**	**E_{12}**	**E_{13}**	**E_{14}**	**E_{21}**	**E_{22}**	**E_{23}**	**E_{121}**
Comparer de fractions	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓
Adition de fractions	✓		✓			✓		
Soustraction de fractions	✓							
Décomposition de fractions			✓		✓		✓	
Positionner de fractions sur une droite graduée	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓
Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs					✓	✓	✓	
Ecriture des fractions						✓	✓	
Equivalence de fractions			✓					
Ecrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.						✓		

En ce qui concerne le savoir-faire proposé par les enseignants répondants, nous constatons que les mêmes 7 enseignants (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{21}, E_{23}, E_{121}) ont mentionné les deux idées *comparaison de fractions* et *positionner de fractions sur une droite graduée* dans leurs propos lors de la préparation à la présentation des fractions à leurs élèves. Pour l'idée *addition de fractions*, les 3 enseignants (E_{11}, E_{13}, E_{22}) disent avoir cette idée dans la préparation pour aborder les fractions, les 3 enseignants (E_{13}, E_{21}, E_{23}) disent avoir l'idée de *décomposition de fractions* et les 3 enseignants (E_{21}, E_{22}, E_{23}) disent avoir celle d'*encadrer une fraction par deux entiers consécutifs*. Deux enseignants (E_{22}, E_{23}) mentionnent l'idée *écriture des fractions* dans leurs préparations. Enfin, les trois idées *soustraction de fraction*, *équivalence des fractions* et *écrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieur à 1* sont celles les moins présentes dans les propos des enseignants, un seul enseignant répondant pour chaque idée.

A la préparation pour aborder le concept de fraction, nous constatons qu'un nombre important (6 enseignants sur 8) ne mentionnent pas dans leurs propos l'idée importante de *partage équitable*. Ce qui peut expliquer que les élèves n'aient pas pris en compte cette notion pour partager une figure afin de représenter une fraction donnée. En revanche, les idées *reconnaître des fractions simples* et *reconnaître le vocabulaire numérateur et dénominateur* ont été bien présentes chez la plupart des répondants. Cela peut s'expliquer par le fait que ces enseignants préparent leurs cours en se référant aux compétences mathématiques demandées à l'élève à la fin du CM1 et du CM2, à travers l'apprentissage de fractions, selon les programmes « Horaires et Programmes d'Enseignements de l'Ecole Primaire », du BO hors - série n° 3 du 19 juin 2008 (p.27) :

- En CM1 :
  - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.
  - Utiliser des fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.
- En CM2 :
  - Encadrer une fraction simple par deux nombres entiers consécutifs.
  - Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et une fraction inférieure à 1.
  - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.

Par ailleurs, nous observons la présence forte, dans les réponses, de deux éléments du savoir-faire, soient, *la comparaison de fractions* et *positionner de fractions sur une droite* *graduée*. En effet, 7 enseignants sur 8 mentionnent ces idées dans leurs propos. Cela peut s'expliquer par le fait que les manuels scolaires consacrent une place importante à ces deux idées. Mais l'idée *écrire une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1* est très peu présente dans les propos des enseignants malgré sa présence parmi les compétences mathématiques à travailler en CM2. Cela peut être expliqué par le fait que les enseignants ne souhaitent pas encore travailler le calcul avec les fractions en utilisant des symboles et des formules ou qu'ils pensent que les enfants ne sont pas encore capables de faire des opérations sur les fractions, cela se fera plus tard au collège !

4.3.3. Réponses à la question 3 : Présentation des significations de la fraction classées par les 8 enseignants de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue)

Nous allons, dans la section qui vient, présenter les réponses données par les enseignants de CM1 et de CM2 concernant la classification des significations de la fraction de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue).

4.3.3.1. Les réponses des enseignants de CM1

Voici les réponses données par les enseignants de CM1 concernant la classification des significations de la fraction de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue).

TABLEAU 55–ORDRE DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION PAR LES ENSEIGNANTS DE CM1

Place accordée aux significations de la fraction chez les enseignants de CM1								
Enseignants en CM1	Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
E_{11}	3	2	7	6	8	4	1	5
E_{12}	3	2	7	6	8	4	1	5
E_{13}	4	5	8	7	2	3	1	6
E_{14}	1	4	8	7	2	3	6	5

Nous pouvons tenter de voir s'il existe une tendance à l'accord sur l'ordre d'importance accordée par les enseignants de CM1. Nous utilisons le test de concordance W de Kendall. Le calcul du coefficient W conduit à la valeur : $W \approx 0.5833$. Il advient que cette valeur nous amène à rejeter l'hypothèse d'absence de concordance au niveau de risque $\alpha=0.05$. La valeur critique est $w_c \approx 0.5023$. Nous pouvons donc considérer que les quatre enseignants auraient tendance à s'accorder sur l'ordre suivant d'importance des significations :

1_Nombre	2_Partie-Tout (quantité continue)	3_Partie-Tout (quantité discrète)	4_Nombre sur une droite graduée	5_Mesure	6_Rapport	7_Quotient	8_Opérateur

4.3.3.2. Les réponses des enseignants de CM2

Voici les réponses des enseignants de CM2 concernant la classification des significations de la fraction de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue).

TABLEAU 56– ORDRE DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION PAR LES ENSEIGNANTS DE CM2

Place accordée aux significations de la fraction chez les enseignants de CM2								
Enseignants en CM2	Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
E_{21}	2	3	5	4	1	6	7	8
E_{22}	2	1	8	7	4	3	5	6
E_{23}	3	2	7	6	8	4	1	5

En ce qui concerne l'ordre d'importance accordée par les enseignants de CM2, le calcul du coefficient W conduit à la valeur : $W \approx 0.4867$. Il advient que cette valeur nous amène à ne pas rejeter l'hypothèse d'absence de concordance au niveau de risque $\alpha = 0.05$. La valeur critique étant $w_c \approx 0.5023$. Dit autrement il n'existe pas de consensus entre ces trois enseignants

4.3.3.3. Les réponses de l'enseignante de CM1 et CM2

Voici la réponse de l'enseignante de CM1 et CM2 concernant la classification des significations de la fraction de 1 (la plus attendue) à 8 (la moins attendue).

TABLEAU 57– CLASSIFICATION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION PAR L'ENSEIGNANTE DE CM1 ET CM2

Place accordée aux significations de la fraction chez l'enseignante de CM1 et CM2								
Enseignants	Partie- tout (quantité continue)	Partie- tout (quantité discrète)	Opérateur	quotient	Mesure	Nombre sur une droite graduée	Nombre	Rapport
E_{121}	4	5	7	8	1	2	3	6

Avec ces trois tableaux, nous constatons que :

- Chez les 4 enseignants de CM1, les significations de la fraction les plus attendues sont respectivement : *Nombre*, *Partie d'un ensemble*, *Partie d'un tout* et *Nombre sur une droite graduée*. Par contre, les significations les moins attendues sont respectivement : *Opérateur*, *Quotient* et *Rapport*.
- Chez les 3 enseignants de CM2, celles les plus attendues sont respectivement : *Partie d'un ensemble*, *Partie d'un tout* et *Nombre sur une droite graduée*. Par contre, les significations les moins attendues sont respectivement : *Opérateur*, *Rapport* et *Quotient*.
- Chez l'enseignante de CM1 et CM2, ce sont les significations *Mesure, Nombre sur une droite graduée*, *Nombre et Partie d'un tout* qui sont respectivement celles les plus

attendues. Par contre, les significations les moins attendues sont respectivement : *Quotient*, *Opérateur* et *Rapport*.

Pour conclure cette partie concernant l'analyse de réponses des 8 enseignants ayant répondu à notre questionnaire écrit, nous pouvons dire que l'analyse que nous avons faite repose sur un discours des maîtres sur leur enseignement. Un tel discours ne reflète pas nécessairement toute la réalité de cet enseignement : il se peut par exemple qu'un phénomène de désirabilité ait joué, les participants livrant les propos qu'ils jugeaient les plus acceptables où qu'ils sentaient attendus des personnes qui les interrogeaient. Ainsi, lors de leur préparation et de leur formation, les maîtres ont appris la séquence du passage du concret ou semi-concret à l'abstrait et cela se retrouve dans le discours de plusieurs. Il se peut aussi que certains aient répondu avec une franchise totale, mais qu'ils voient leur enseignement d'une manière qui ne corresponde pas tout à fait à ce qu'il est. Enfin, nous pouvons retenir que le discours entendu témoigne d'une connaissance réelle des théories modernes sur l'apprentissage, Il ne reste plus qu'à aller voir ce qui se passe dans les classes !

Conclusion

Cette partie est composée d'un certain nombre de rappels. D'abord, un rappel des éléments de la problématique afin de remettre en mémoire l'origine et les questions de recherche qui sont le fil conducteur de ce travail. Puis, un rappel de la méthode qui a permis d'apporter des éléments de réponses à ces questions. Cela nous amènera à résumer ces éléments de réponses : d'abord ceux concernant l'analyse des manuels scolaires choisis de CM1 et de CM2 par rapport aux différentes significations de la fraction, puis ceux concernant l'analyse des réponses des élèves de CM1 et de CM2 au questionnaire portant sur les fractions, enfin ceux tirés de l'analyse du discours des enseignants sur leur enseignement de la notion de fraction. Nous ferons ensuite un retour critique traitant, en premier lieu, la partie touchant les élèves et, en second lieu, celle qui concerne les enseignants. Cette conclusion se terminera sur des perspectives qui peuvent servir comme une source d'inspiration pour d'autres recherches dans le domaine.

Rappel des éléments de la problématique de la recherche

Nous avons déjà présenté les divers aspects qui recouvrent le concept de fraction et son enseignement-apprentissage, la diversité de ces aspects nous a poussé à nous intéresser à l'étude de ce concept. Les fractions sont parmi les concepts mathématiques les plus complexes rencontrés par les enfants dans les années du primaire. L'apprentissage des fractions devient plus important au troisième cycle du primaire avec une exploration des calculs avec les fractions qui sera approfondie en stade scolaire plus avancé. La fraction intervient dans quelques activités courantes comme le partage, la comparaison d'objets, l'heure, les unités de mesure, etc... Cette forme d'écriture d'un nombre peut également être utile pour certains professionnels dans leur métier, comme cuisinier, menuisier, maçon, et autres.

Avec ce concept difficile, certains élèves rencontrent des difficultés dans l'apprentissage des fractions comme l'utilisation d'un symbole comportant deux nombres, numérateur et dénominateur, le manque de diversité des représentations possibles des fractions, les connaissances antérieures sur les nombres entiers qui interfèrent parfois avec l'apprentissage des fractions et les opérations sur les fractions qui impliquent beaucoup de règles que les élèves tendent à utiliser mécaniquement. Par ailleurs, les fractions comprennent une notion multiforme englobant plusieurs significations interdépendantes, c'est l'un des principaux facteurs de leur complexité et ce caractère plurivoque des fractions constitue une difficulté importante de leur apprentissage. De nombreux auteurs ont déjà insisté sur ce point et ont recensé les neuf significations possibles de la fraction qui sont : *Partie d'un tout (quantité continue ou un seul objet), Partie d'un tout (quantité discrète ou un ensemble d'objets), Opérateur, Rapport, Quotient, Mesure, Probabilité, Nombre sur une droite graduée* et *Nombre*. L'utilisation de ces significations dans l'apprentissage des fractions peut faciliter la compréhension chez les élèves.

L'objectif général de la recherche que nous venons de présenter est l'étude des différentes significations possibles de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III. Pour mener cette recherche, nous avons dû choisir certains niveaux scolaires ; nous en avons retenu deux, les CM1 et CM2 puisqu'ils sont cruciaux dans l'apprentissage de la fraction ; ces deux niveaux représentent les deux derniers niveaux du cycle III de l'école primaire. L'avancée de nos lectures, l'ensemble des éléments qui composent notre partie théorique concernant le concept de fraction et l'attribut des différentes significations à une écriture fractionnaire nous ont finalement amené à poser la problématique de notre recherche sous une série de deux questions :

- Quelles significations de la fraction sont en jeu dans les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels scolaires de CM1 et de CM2 ? Quels liens et distinctions entre ces deux niveaux scolaires CM1 et CM2 pouvons-nous identifier ?
- De quelles manières et sous quelles formes les élèves de CM1 et de CM2 se représentent et représentent-ils les fractions ? Quels liens peut-on identifier entre leurs représentations et leurs connaissances et expériences scolaires ?

Notre étude débouche sur des éléments de réponses à ces questions, mais aussi et surtout à des questions plus précises accompagnées d'hypothèses et de suggestions pour des outils de recherche qui permettront de poursuivre les investigations. C'est là qui réside l'objet premier de toute recherche dite exploratoire.

Une grille d'analyse appliquée aux manuels scolaires et un questionnaire écrit destiné aux élèves de CM1 et de CM2 nous a aidé à apporter des réponses aux questions de recherche.

À ces questions spécifiques s'est ajouté un objectif secondaire concernant l'enseignement des fractions vu par les enseignants des classes CM1 et CM2 concernées dans notre recherche. Ici, notre préoccupation porte sur les caractéristiques de l'enseignement des mathématiques auquel ces élèves sont soumis. À nos yeux, les élèves arrivaient à donner du sens à leurs apprentissages parce que l'enseignement auquel ils avaient été soumis le leur avait permis. Cette préoccupation pour l'enseignement est demeurée subsidiaire au cours de notre étude car, pour porter notre regard sur l'enseignement, nous nous sommes appuyés uniquement sur le discours des enseignants. Il faut noter qu'il y a parfois des différences importantes entre la pratique et le discours sur la pratique, ce phénomène de « désirabilité » peut apporter quelques fautes dans la description d'une réalité. Mais ce discours ne pouvait qu'être révélateur de ce que les maîtres pensent souhaitables, notamment autour de la question des rôles qu'ils s'attribuent et de ceux qu'ils réservent à leurs élèves ou encore, de la place qu'ils font aux représentations matérielles, graphiques ou mentales, éléments sur lesquels nous avons centré notre analyse de l'enseignement de la fraction.

Rappel sur la méthodologie de la recherche et ses outils

Nous avons mené notre étude d'un côté avec cinq manuels de mathématiques de CM1 et 5 manuels de CM2, il faut préciser que ces manuels tiennent compte systématiquement des programmes en vigueur pendant l'année de leur édition, soit les programmes de 2008, et d'un autre côté avec des participants de deux natures. Deux groupes d'élèves, de CM1 et de CM2 du primaire, provenant de douze classes différentes pour un grand total de 275 élèves ; 160 de CM1 et 115 de CM2 et huit enseignants auxquels nous avons posé nos questions sur leurs façons d'aborder la fraction avec leurs élèves

Pour réaliser cette recherche, deux méthodes ont été utilisées : une grille d'analyse et un questionnaire écrit. *En premier lieu*, nous avons construit une grille d'analyse pour évaluer l'importance et la place accordée à chaque signification de la fraction et faire exploiter les significations de la fraction présentes dans cinq manuels de mathématiques de CM1 et cinq manuels choisis de CM2. Pour ce faire, nous avons classé toutes les activités (les situations d'apprentissages) portant sur les fractions par signification de la fraction selon les définitions retenues de ces significations. *En second lieu*, afin de voir comment les élèves de CM1 et de CM2, interrogés dans ce travail, représentent et illustrent les fractions et souhaitant travailler avec le plus grand nombre possible de participant, nous avons construit un questionnaire écrit inspiré de Blouin (2002), Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert (2001), des manuels scolaires, des activités proposées par Guy Brousseau ainsi que des exercices diffusés sur des sites Internet. Onze questions composaient ce questionnaire dont quatre questions générales et sept questions portant sur les différentes significations de la fraction. Nous avons regroupé les réponses des élèves par signification des fractions de manière à reconnaître et à déterminer les significations utilisées par les élèves.

En ce qui concerne les enseignants, nous voulions connaître leurs conceptions de l'enseignement de la fraction. À cet effet, nous avons construit un questionnaire écrit composé de deux parties, la première ayant pour le but de situer notre échantillon ; formation et expérience des maîtres interrogés, classes où ils exercent, etc... Ce à quoi nous nous intéressons vraiment pour la recherche, c'est la seconde partie portant sur les conceptions, la manière de traiter de la « fraction » par les enseignants interrogés. Pour analyser les réponses obtenues, une grille d'analyse a été construite autour des caractéristiques intéressantes de la pédagogie mise en œuvre et des façons d'aborder les fractions par le maître. Le premier axe de notre analyse s'attache aux modes de représentation - matériel, image, etc. - retenus dans les activités d'enseignement et d'apprentissage proposées. À l'intérieur de chaque catégorie, nous nous sommes arrêté plus particulièrement aux rôles réservés à l'enseignant et à l'élève. En parallèle, nous avons porté un jugement sur la réponse fournie par l'enseignant : nous avons vérifié la présence des éléments importants pour le concept de fraction sur le plan mathématique.

Rappel des résultats de la recherche

La finalité de notre recherche était centrée sur deux axes principaux.

En premier axe, en ce qui concerne l'enseignement des fractions reçu particulièrement avec les manuels scolaires, nous avons étudié les différentes significations de la fraction au travers des manuels scolaires choisis de CM1 et de CM2. L'analyse effectuée sur les manuels peut permettre de dire que les activités ou les situations d'apprentissage proposées dans les manuels ne sont pas réparties à égalité entre les diverses significations de la fraction. Toutefois, il est à noter que les programmes d'études, au troisième cycle de l'école primaire, indiquent que le but de l'apprentissage des fractions est de résoudre des problèmes variés portant sur les fractions où les nombres entiers sont insuffisants (Ministère de l'Education Nationale, 2002, 2007, 2008).

L'analyse nous a permis de constater deux réalités. D'une part dans les manuels scolaires de CM1, les significations de la fraction les plus présentes à travers les activités analysées sont respectivement les suivantes : *Partie-tout (quantité continue), Mesure, Nombre* et *Nombre sur une droite graduée.* D'autre part, dans les manuels scolaires de CM2, les significations les plus présentes sont respectivement les suivantes : *Nombre*, *Partie-tout* *(quantité continue)* et *Mesure*. Cela confirme bien la première hypothèse da la recherche « La signification de la fraction la plus présente est, dans les manuels de CM1 celle de *Partie d'un tout*, et dans les manuels de CM2 celle de *Nombre* ». Cette place importante accordée à la signification de la fraction en tant que *Partie d'un tout* peut s'expliquer par le fait que les activités ou les situations d'apprentissage portant sur les fractions se limitent souvent à cette signification. De même, l'importance de la signification de la fraction en tant que *Nombre* vient peut-être de la place accordée aux opérations sur les fractions. En ce qui concerne les deux significations *Mesure* et *Nombre sur une droite graduée*, nous constatons que ces significations sont un peu plus importantes dans les manuels de CM1. A travers cette même analyse, nous trouvons également que les significations *Opérateur* et *Quotient* sont les moins présentes dans les manuels de CM1 et de CM2. La signification *Nombre sur une droite graduée* est un peu plus importante dans les manuels de CM1 et elle est l'une des moins exploitées dans les manuels de CM2 : ordonner des fractions, placer des nombres et des fractions sur une droite graduée font partie du programme du troisième cycle de l'école primaire en France. Les activités portant sur les deux significations *Partie d'un tout (quantité discrète)* et *Rapport* sont absentes dans tous les manuels choisis de CM1 et de CM2 sauf dans le manuel Outils pour les maths (CM2) avec une présence très faible.

À titre de conclusion, nous pouvons dire que cette répartition inégale des significations de la fraction qui se manifeste dans les manuels scolaires choisis peut avoir ou porter une influence sur l'apprentissage des fractions par les élèves. Nous remarquons également que certains enseignants semblent s'appuyer surtout sur les manuels scolaires pour préparer et réaliser leur enseignement.

En deuxième axe, en ce qui concerne l'apprentissage des élèves, l'analyse était autour des connaissances et des représentations des élèves de CM1 et de CM2 par rapport aux diverses significations de la fraction. Cette analyse montre bien que la signification de la fraction la plus présente, chez les élèves de CM1 et de CM2, est celle de *Partie d'un tout (quantité continue)*. Alors, la deuxième hypothèse de la recherche est validée « La signification de la fraction la plus présente, chez les élèves de CM1 et de CM2, est celle de *Partie d'un tout* ». En effet, les élèves utilisent cette signification pour définir la fraction (43,75% de CM1 et 33,91% de CM2), pour donner un exemple sur l'utilisation des fractions au quotidien (41,88% de CM1 et 33,04% de CM2) et pour illustrer une fraction donnée (39,38% de CM1 et 60,87% de CM2). Toutefois, les élèves de CM1 sont plus nombreux à définir la fraction et à donner des exemples relatifs à cette signification. En revanche, les élèves de CM2 sont plus nombreux à illustrer une fraction en se référant à la signification *Partie d'un tout (quantité continue)*. De plus, pratiquement, la plupart des élèves illustre correctement cette signification, soit 71,88 % de CM1 et 86,09% de CM2. Cependant, les élèves de CM1 ont plus de difficulté que ceux de CM2 à respecter l'idée de l'équipartition ; cela est expliqué par Vézina (1994) qui indique que le partage du cercle en trois parties strictement égales devient plus facile lorsque les enfants grandissent. Enfin, les élèves développent des procédures liées à la signification *Partie-tout (quantité continue)* pour répondre à des questions spécifiques relatives à d'autres significations de la fraction comme la signification *Nombre sur une droite numérique* et celle de *Mesure*. Cela confirme les propos de plusieurs auteurs (Blouin, 2002 ; Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001 ; Adjiage et Pluvinage, 2000 ; Kieren, 1980) qui indiquent que des activités ou des situations d'apprentissage limitées à la signification de *Partie d'un tout (quantité continue)* entraînent un répertoire limité de procédures chez les élèves.

Environ la même proportion d'élèves de CM1 et de CM2 réussit la question spécifique sur la signification *Nombre sur une ligne numérique*. En revanche, les élèves de CM1 utilisent davantage cette signification pour illustrer la fraction 1/4. En ce qui concerne l'utilisation des significations *Opérateur, Mesure* et *Partie-tout (quantité discrète),* elles sont correctement illustrées. Les élèves de CM2 sont deux fois plus nombreux que ceux de CM1 à donner un exemple de la fraction comme *Mesure* et il apparaît que la plupart des élèves a de la difficulté à comprendre le sens de la question posée, c'est-à-dire ce que veut dire unité. Par ailleurs, les élèves de CM2 réussissent mieux la question portant sur la signification *Quotient*. De plus, un bon nombre d'élèves de CM2 privilégient la signification *Quotient* pour définir la fraction, alors que cette signification est complétement absente chez les élèves de CM1 pour la définition de la fraction. Enfin, parmi toutes les significations, celle de *Rapport* semble la moins comprise par les élèves de CM1 et de CM2. Plusieurs élèves de chaque niveau expriment un rapport de partie à un tout au lieu d'un rapport de partie à partie tel que attendue à la question spécifique sur cette signification.

En ce qui concerne l'influence de l'enseignement des fractions sur l'apprentissage des élèves, nous constatons que l'enseignement des fractions qui est particulièrement véhiculée par les manuels scolaires semble avoir une certaine influence sur les significations que les élèves utilisent pour résoudre des problèmes portant sur les fractions. En effet, les élèves utilisent les significations les plus fréquemment présentes dans les manuels scolaires : *Partie d'un tout, Nombre* et *Mesure*. En revanche, les significations *Opérateur* et *Rapport* sont celles les moins présentes dans les manuels de CM1 et de CM2, ces significations sont également celles les moins utilisées par les élèves. Là, nous pouvons dire que la troisième hypothèse est confirmée « Les significations de la fraction les plus présentes dans les manuels scolaires choisis, sont celles que les élèves ont plus de facilité à illustrer correctement, ou, celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer ». Une répartition inégale des significations présentes dans les manuels scolaires amène-t-elle quelques conséquences dans l'apprentissage des élèves ? La proportion importante des activités portant sur la signification de la fraction en tant que *Partie d'un tout* dans les manuels scolaires pourrait expliquer les difficultés des élèves par rapport à certaines significations des fractions comme les significations *Rapport*, *Opérateur* et *Quotient*.

Nous avons effectué une analyse autour des conceptions des enseignants des classes concernées sur la manière avec laquelle les enseignants abordent les fractions avec leurs élèves. *Sur le plan pédagogique*, dans l'enseignement de la fraction, les enseignants interrogés laissent une large place à l'utilisation du matériel concret ou des représentations imagées, de manière à ce que les élèves puissent mieux donner du sens aux notions. Pour introduire le concept de la fraction avec leurs élèves, les enseignants préfèrent utiliser du matériel concret ou des représentations graphiques. Concernant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, aucun maître ne dit laisser la responsabilité d'organiser les manipulations à ses élèves, les maîtres vont plutôt faire eux-mêmes les manipulations devant les élèves, mais ils n'expliquent pas de quelle façon ils procèdent. Ceci pourrait sans doute s'expliquer par le fait que les maîtres se sentent limités par le temps, parce qu'ils peuvent souhaiter mieux contrôler la situation, attitude normale que nous pouvons retrouver chez tous les enseignants de tous les pays et qui laisserait penser que ces enseignants ne sont pas assez à l'aise avec ces notions de fraction ! Lors de la préparation à la présentation des fractions à leurs élèves, la plupart des enseignants n'ont pas mentionné l'idée importante de l'équipartition, ce qui peut expliquer les difficultés des élèves pour partager une figure afin de représenter une fraction donnée. En revanche, les idées *reconnaître des fractions simples* et *reconnaître le vocabulaire numérateur et dénominateur*, *la comparaison de fractions* et *positionner de fractions sur une droite graduée* ont été bien présentes chez la plupart des enseignants. Pour évaluer les élèves, les significations de la fraction considérées importantes à demander aux élèves sont celles qui sont les plus présentes chez les élèves dans leurs réponses sur les questions portant sur les fractions. En revanche, les significations peu présentes chez les élèves, ce sont celles que les enseignants avouent avoir le moins d'attrait pour les travailler avec leurs élèves. *Sur le plan mathématique*, les différentes idées importantes, les savoirs et savoir-faire portant sur les fractions sont généralement présents dans le discours de la plupart des enseignants.

Enfin, quelques remarques sont importantes à retenir dans notre situation. Il faut rappeler que nous avons ici analysé le discours des enseignants et non des données d'observations en classe. Il ne faut donc pas oublier l'effet de désirabilité, c'est-à-dire ce que disent les maîtres n'est pas forcement ce qu'ils font dans leurs classes. Il se peut qu'ils répondent ce qu'ils jugent que l'examinateur désire. Nous pouvons néanmoins regarder positivement leurs réponses et les considérer comme utiles puisqu'elles nous renseignent sur ce que l'enseignant pense être la façon la plus acceptable d'enseigner, façon qui correspond à ce qui a pu lui être proposé lors de sa formation.

Limites de la recherche

Lors de la réalisation de cette recherche nous avons pu identifier quelques limites.

Premièrement, d'autres chercheurs pourraient catégoriser les significations de la fraction autrement. Ils pourraient également proposer de placer une activité portant sur les fractions dans plus d'une catégorie. Toutefois, les activités portant sur les fractions dans les manuels scolaires ne seraient pas réparties également. Par ailleurs, puisque le nombre de manuels scolaires choisis est limité, soit 5 manuels de CM1 et 5 manuels de CM2, nous ne pouvons pas généraliser les résultats obtenus de l'analyse de ces manuels. Si nous recommencions ce travail, nous analyserions un nombre plus grand de manuels scolaires.

Deuxièmement, il est difficile de généraliser les résultats de cette recherche concernant l'apprentissage du concept de fraction. En effet, 160 élèves de CM1 et 115 élèves de CM2 qui répondent au questionnaire, l'échantillon composé de ces élèves est choisi par la méthode de l'échantillonnage de convenance. Dans cette méthode, nous ne spécifions pas clairement la population d'où est issu l'échantillon. N'ont été choisis que ceux qui se trouvent à la portée de l'enquêteur ou dans le lieu où l'enquête a été réalisée. En plus, nous ne connaissons pas la probabilité précise de ces personnes pour pouvoir être choisie. Le choix s'est porté sur des écoles primaires situées dans la ville de Lyon et ses environs.

Troisièmement, concernant le questionnaire destiné aux élèves, nous l'avons exploité totalement car nous avons constaté qu'il était assez pertinent pour notre thème de recherche. Des élèves n'ont pas compris certaines questions et en particulier les termes utilisés. Par exemple, pour la question sept portant sur la signification *Mesure*, le terme *unité* est peu compris par les élèves. Si nous recommencions cette recherche, nous changerions ce terme par un autre plus connu par les élèves. Par ailleurs, dans le questionnnaire, nous ajouterions une question sur la signification de *Nombre* étant donné qu'il a été plus difficile de vérifier l'utilisation de cette signification chez les élèves dans l'ensemble du questionnaire.

Quatrièmement, pour étudier l'enseignement de la notion de fraction effectivement dispensé par les enseignants dans les classes et pour bien connaître le rôle de l'élève dans la construction de ses savoirs et savoir-faire, ses interactions avec son enseignant, ses camarades et son milieu, il aurait fallu réaliser une observation dans la classe ou filmer des séances réalisées par certains enseignants lors de la présentation de ce concept aux élèves. En ce qui concerne l'échantillon des enseignants, nous avons réalisé notre travail avec les enseignants de certaines classes concernées dans notre étude, c'est-à-dire avec ceux qui acceptaient de participer. Si nous recommencions cette recherche, nous proposerions d'augmenter la population des enseignants en en questionnant d'autres, s'il le faut en allant prendre des enseignants de classes n'ayant pas participé à notre étude. Au terme de l'étude, nous estimons que le questionnaire destiné aux enseignants n'était pas assez pertinent : il nous aurait fallu ajouter des questions sur les opérations sur les fractions comme la comparaison de fractions, l'équivalence de fractions et l'addition de fractions de même dénominateur.

Perspectives de la recherche

Au terme de cette recherche, des pistes pour prolonger ce travail seraient de le compléter en envisageant d'autres axes d'étude pour des recherches ultérieures. Nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement au pôle élève mais il serait possible d'aller voir du côté des enseignants et de leurs pratiques effectives dans la classe. Un aspect que nous aurions voulu exploiter, c'est observer une des classes au moment de la transmission de la notion de fraction. Un autre aspect : pour avoir une image effective et plus claire en ce qui concerne l'influence de l'enseignement des fractions reçu particulièrement avec les manuels scolaires sur l'apprentissage des élèves des fractions, il nous aurait fallu observer des enseignements qui abordent les fractions avec leurs élèves en utilisant un ou plusieurs manuels scolaires que nous avons analysés.

Pour permettre de clarifier les réponses des élèves, d'obtenir de l'information sur la connaissance que les élèves ont des diverses significations de la fraction et de vérifier si les réponses données au questionnaire sont liées avec la représentation mentale que l'élève a vraiment du problème posé, des entretiens avec certains élèves nous semblent une méthode pertinente pour vérifier si les mauvaises réponses des élèves viennent d'une compréhension superficielle des significations de la fraction. Par exemple, un des avantages de l'entretien est qu'il donne de l'information détaillée ; le langage non verbal peut-être observé comme les gestes et les réactions spontanées.

On pourrait encore mener une étude comparative sur l'analyse du contenu du livre scolaire de mathématiques destiné aux élèves de 5ème année de l'école primaire en Syrie et de l'un des manuels de mathématiques choisis de CM2 en France concernant le concept de fraction.

Il serait possible d'effectuer une étude comparable avec d'autres niveaux de classe, par exemple au début du collège, en classe de 6ème, où les notions travaillées ne sont pas nouvelles. Nous pourrions réaliser une comparaison entre la dernière classe du primaire CM2 et la première classe du secondaire 6ème.

Enfin, je voudrais mettre en évidence sur un livre qui s'intitule « Histoire des mathématiques pour les collèges ». Ce livre vise à transmettre aux enseignants (en particulier du premier cycle) quelques connaissances de base en Histoire des mathématiques ; leur suggérer des activités qui permettront à leurs élèves de prendre contact avec un aspect bien négligé dans l'enseignement des mathématiques, sans pour cela avoir l'impression de s'engager « hors programme ».Voici dans la figure suivante la photocopie de la couverture de ce livre daté de 1980.

FIGURE 58 – COUVERTURE LE LIVRE « HISTOIRE DES MATHEMATIQUES POUR LES COLLEGES »

Bibliographie

Aberkane, F. C. (2007). *Enseigner les mathématiques à l'école primaire*. Paris, France : Hachette éducation.

Adjiage, R. et Pluvinage, F. (2000). Un registre unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20* (1), 41-88.

Alahmadati, A. A. (2015). Étude des significations données à la notion de fraction par des élèves de CM1 et de CM2 de l'école primaire en France. Dans J. C. Régnier, Y. Slimani, R. Gras, I. Ben Tarbout et A. Dhouibi (Eds.), *Analyse Statistique Implicative. Des sciences dures aux sciences humaines et sociales* (P. 386-401), Tunisie, ARSA : Bibliothèque nationale de Tunisie.

Albarello, L. et Charlier, J. E. (2010). *Société réflexive et pratiques de recherche*. Louvain-la Neuve : Academia Bruylant.

Angeli, C. (2002). *Le transfert de connaissances pour l'addition des fractions* (mémoire professionnel PLC2). I.U.F.M. de l'Académie de Montpellier, Site de Nîmes.

Araujo Lima, A., Lisée, V., Lenoir, Y. et Lemire, J. (2006). Connaissance et utilisation des manuels scolaires québécois, ce qu'en disent des futures enseignantes du primaire. Dans M. Lebrun (Eds.), *Le Manuel scolaire, un outil à multiples facettes* (p. 301-325). Québec : Presse de l'Université du Québec, collection éducation-recherche.

Ardilly, P. (2004). *Echantillonnage et méthodes d'enquêtes*. Paris : Dunod.

Assude, T. et Margolinas, C. (2005). Aperçu sur les rôles des manuels dans la recherche en didactique des mathématiques. Dans E. Bruillard (Eds.), *Manuels scolaires, regards croisés : Documents, actes et rapports pour l'éducation* (p. 231-241). Académie de Caen : CRDP Basse- Normandie.

Ball, D. L. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90* (4), 449-466.

Baroody, A. J. et Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to k-8 mathematics instruction*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*. Paris, France : Seuil.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. et Silver, E. A. (1983). Rational Numbers Concepts. In R. Lesh et M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (p.91-125). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. et Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational Numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for research in mathematics education, 15* (5), 323-341.

Behr, M. et Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (p. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. et Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 296-333). New York: Macmillan.

Behr, M., Harel, G., Post, T. et Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis- emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema and T.A.Romberg (Ed.), *Rational numbers: An integration of research* (p. 13-47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bemelmans, F. (1977). Le calcul tel qu'il est reçu par l'enfant. *Revue des sciences de l'éducation, 111* (2), 161-180.

Benoit, P., Chemla, K. et Ritter, J. (1992). *Histoire de fraction, fraction d'histoire*. Basel. Boston, Berlin: Birkhäuser Verlage.

Bittencourt, J. F. (2008). *Analyse didactique comparée des rapports à l'enseigner : étude de cas de deux enseignants en mathématiques au Brésil* (thèse de doctorat en Didactique des Mathématiques). Université Toulouse III – Paul Sabatier, Toulouse, France.

Bond, J. (1998). *Étude de la relation entre la construction des opérateurs de la fraction et la construction opératoire de la notion de rapport auprès d'élèves de la première à la cinquième secondaire* (mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtrise en Education). Université du Québec à Chicoutimi, Canada.

Boulet, G. (1998). Didactical implications of children's difficulties in learning the fraction concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20* (4), 19-34.

Boulet, G. (1999). Large halves, small halves: Accounting for children's ordering of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21* (3), 48-66.

Blouin, P. (1999). Pour mieux comprendre la construction des nombres rationnels. Dans F. Conne et G. Lemoyne (Ed.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 199-211). Montréal: Presses de l'Université de Montréal.

Blouin, P. (2002). *Dessine-moi un bateau : la multiplication par un et demi*. Québec, Canada: Edition Bande Didactique.

Briand, J. et Chevalier, M. C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des Mathématiques*. Editions Hatier, Hatier pédagogie.

Brissiaud, R. (1998). *Les fractions et les décimaux au CM1, Une nouvelle approche.* Communication présentée aux Actes du XXV[ème] colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (p. 147-171). IREM de Brest, France.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques, *2* (1), 37-127.

Brousseau G. (1986 b), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques,* (Thèse de doctorat), Université de Bordeaux 1, Bordeaux, France.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7* (2), Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux, France: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation, 30* (2), 241-277. Récupéré le 31 mai 2011 du site de la revue : http://www.erudit.org/revue/rse/2004/v30/n2/012669ar.pdf

Bruillard, E. (2005). Les manuels scolaires questionnés par la recherche. Dans E. Bruillard (Ed.), Manuels scolaires, regards croisés : Documents, actes et rapports, pour l'éducation (p.13-36). Académie de Caen : CRDP Basse - Normandie.

Brun, J. (1981). A propos de la didactique des mathématiques. *Revue Math-École*, 14-20.

Brun, J. (1996). *Didactique des mathématiques*. Lausanne : Éditions Delachaux et Niestlé.

Bucheton, D. (1999). Les manuels : un lien entre l'école, la famille, l'élève et les savoirs. Dans S. Plaine (Ed.), *Documents actes et rapports pour l'éducation : Manuels et enseignement du française* (p. 41-50). Académie de Caen : CRDP Basse - Normandie.

Burns, M. (2000). About Teaching Mathematics: A K-8 Resource. *Math Solutions Publications*, P.223- 224.

Carpenter, T. D., Coburn, T. G., Reys, R. E. et Wilson, J. W. (1976). Addition and multiplication with fractions. *Arithmetic teacher*, *23*, 137-141.

Carpenter, T. P., Fennema, E. et Romberg, T. A. (1993). Rational Numbers. Hillsdale New-Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Charalambos, Y. et Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. Dans H. L. Chick and J. L. Vincent (Ed.), *Proceedings of the 29th PME Conference*, *2*, 233-240. Melbourne: University of Melbourne.

Charles, K. et Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics, 43* (2), 191-221.

Chevallard, Y. (1985/1991). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble, France : La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Structure et fonctions. *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématique*s.

Choppin, A. (1999). L'évolution des conceptions et des rôles du manuel scolaire. Dans S. Plane (Ed.), *Documents, actes et rapports pour l'éducation : Manuels et enseignement du française*. Académie de Caen : CRDP Basse - Normandie.

Choppin, A. (2005). L'édition scolaire Française et ses contraintes : Une perspective historique. Dans E. Bruillard (Ed.), *Manuels scolaires, regards croisés : Documents, actes et rapports pour l'éducation* (P. 39-53). CRDP Basse - Normandie.

Christiaens, E. S. (1995). *Une approche conceptuelle des fractions à l'école élémentaire* (Thèse de doctorat en Sciences de l'Education). Université Paris V, Paris, France.

Coquin Viennot, D. et Camos, V. (2006). Décimaux et fractions. Dans P. Barrouillet et V. Camos, (Eds.), *La cognition mathématique chez l'enfant* (p.145-154). Marseille, France : Solal.

Corrieu, L. (1999). *Dictionnaire du professeur des écoles, enseignement des mathématiques.* Paris, France : Vuibert.

Couturat, L. (1973). *De l'infini mathématique*. Paris, Librairie scientifique et technique.

Coxford, A. et Ellerbruch, L. (1975). *Mathematics Learning in Early Childhood: Fractional Numbers*. Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics Yearbook.

Cramer, K., Behr, M., Post, T. et Lesh, R. (1997). *Rational number project: Fraction Lessons for the middle grades-Level 2*. Dubuque, Iowa: Kendall/Hunt Publishing Company.

Da Silva Junior, C. G. (2010). *Manuel scolaire de mathématique et formation continue des enseignants au collège et au lycée en France et au Brésil. Le cas de la statistique et de son enseignement* (thèse de doctorat en sciences de l'éducation). Université Lumière Lyon2, Lyon, France.

Davis, G., Hunting, R. P. et Pearn, C. (1993). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know? *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 63-76.

De Champlain, D., Mathieu, P., Patenaude, P. et Tessier, H. (1996). *Lexique mathématique : enseignement secondaire*. Les éditions du triangle d'or. Québec, Canada: Beauport.

De Ketele, J. M. (2000). En guise de synthèse : Convergences autour des compétences. Dans C. Bosman, F. M. Gerard et X. Roegiers (Eds.), *Quel avenir pour les compétences ?* (p. 187-191). Bruxelles : De Boeck Université.

De Moura Braga, E. (2009). *Enseignement-apprentissage de la statistique, TICE et environnement numérique de travail. Étude des effets de supports didactiques numériques, médiateurs dans la conceptualisation en statistique* (thèse de doctorat en sciences de l'éducation). Université Lumière Lyon2, Lyon, France.

Desjardins M. et Hétu, J. C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Québec : Presse de l'université de Montréal.

Develay, M. (1992). *De l'apprentissage à l'enseignement*. Paris : ESF.

Dienes, Z. P. (1966). Construction des mathématiques. Paris : Presses Universitaires de France.

Dienes, Z. P. (1971). *Fractions.* Paris : OCDL.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques, une réalisation dans tout le cursus primaire* (Thèse de Doctorat). Université Paris 7, France.

Douady R. et Perrin-Glorian, M. J. (1986*). Liaison Ecole-Collège. Nombres décimaux*. Brochure de l'IREM de Paris sud.

Dubois, C., Fénichel, M. et Pauvert, M. (1993). *Se former pour enseigner les mathématiques - Numération, décimaux.* Paris : Armand Colin.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* (IREM de Strasbourg), *5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Exploration Recherches en Sciences de l'Education. Peter Lang.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *Relime, Numero Especial*, 45-81.

Ellerbruch, L. W. et Payne, J. N. (1978). A teaching sequence from initial fraction concepts through the addition of unlike fractions. Dans M. Suydam (Ed.), *Developing computational skills: 1978 yearbook* (p. 129-147). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Erickson, G. (2001). Point de vue, Programme de recherches et apprentissage des sciences. *Didaskalia*, 19, 101-126.

Fandino Pinilla, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, 7*, 23-45. Récupéré le 01 janvier 2012 du site

http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/fandino/133%20Fractions.pdf

Fénichel, M. et Pauvert, M. (1997). *L'épreuve de mathématiques au concours de professeur des écoles.* Paris, France: Armand Colin.

Fénichel, M. et Pfaff, N. (2005). *Donner du sens aux mathématiques. Nombres, opérations et grandeurs.* Paris, France: Bordas.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Boston: D. Reidel publishing company.

Galion, T.(1998). *Brins d'Histoire des maths. Ecriture des nombres*. Galion, Lyon.

Ganassali S. et Moscarola, J. (2007). *Les enquêtes par questionnaire avec Sphinx*. Paris: Pearson Education.

Gérard, F. M. et Roegiers, X. (2003). *Des manuels scolaires pour apprendre : concevoir, évaluer,utiliser.* Bruxelles, Belgique : Editions de Boeck Université.

Goldin, G. and Steingold, N. (2001). System of mathematical representation and development of mathematical concepts. In F. R. Curcio (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics: The roles of representation in school mathematics*, Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Gras R., Régnier J.-C. et Guillet F. (2009). *Analyse Statistique Implicative. Une méthoded'analyse de données pour la recherche de causalités. Toulouse: Cépaduès Editions.*

Gras R., Régnier J.-C., Marinica, C. et Guillet F. (2013). *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités.* Toulouse: Cépaduès Editions.

Gray, E. M. (1993). *The Transition from Whole Number to Fraction, International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic*. University of Georgia: Athens, GA.

Grégoire, J. et Meert, G. (2005). L'apprentissage des nombres rationnels et ses obstacles. Dans M. P. Noël (Ed.), *Les troubles du calcul* (p 223- 251). Marseille : Solal.

Grégoire, J. (2008). Aux sources des difficultés de l'apprentissage des fractions. *Séminaire présenté au LAPSE*, ULB, le 14 février 2008.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11 -16.* London: Murray.

Hart, K. (1989). Fractions: Equivalence and addition. Dans D.C. Johnson (Ed.), *Children's Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching* (P. 46-75). Windsor: NFER-Nelson.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational studies in mathematics*, *12*, 71-87.

Hembree, R. (1990). The Nature, Effects and Relief of Mathematic Anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21* (l), 33-46.

Hétu, J. C. et Desjardins, M. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Montréal, Canada : Presses de l'université du Québec.

Hiebert, J. et Tonnessen, L. H. (1978). Development of the fraction concept in two physical

Contexts: An exploratory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *9* (5), 374-378.

Hiebert, J. et Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the Major Themes. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (P. 1-18). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. and Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *A handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 65-100). New York: Macmillan Library.

Hocquenghem, M.-L., Missenard, C., Missenard, D., Monnet, F., Serfati, A.-M. et Tartary, G. (1980). *Histoire des mathématiques pour les collèges*. Paris : IREM Université Paris7, CEDIC.

Horaires, objectifs et programmes pour le Cycle Moyen, Arrêté du 18 juillet 1980.

Houssaye, J. (1982). *Le triangle pédagogique. Proposition et pratiques d'un modèle d'analyse de la situation éducative* (Doctorat d'Etat ès Lettres et Sciences humaines). Université Paris X, France.

Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres. Lorsque les nombres racontent les hommes*. Paris : Seghers.

Irma de Strasbourg. (2004-2005). *Histoire des mathématiques*. UFR de mathématique et d'informatique, Université Louis Pasteur Strasbourg. Consulté le 15 octobre 2014 http://www-irma.u-strasbg.fr/~baumann/polyh.pdf.

Jencks, M. S., Peck, M. D. et Chatterley, J. L. (1980). Why Blame the Kids? We teach mistakes!. *Arithmetic Teacher*, *28* (2), 38-42.

Kamii, C. et Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 365-378.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics project*. Windsor: NFER-Nelson.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. Dans R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop ERIC/SMEAC* (P. 101–144). Ohio: Columbus.

Kieren, T. E. et Southwell, B. (1979). The Development in Children and Adolescents of the Construct of Rational Numbers as Operators. *The Alberta Journal of Educational Research*, *25* (4), 234-247.

Kieren, T. E. (1980). Knowing rational numbers: ideas and symbols. Selected issues in mathematics education sous the direction of Mary Montgomery Lindquist. Berkeley, Californie : Mccuthan Publishing Corporation, USA, 69-81.

Kieren, T. E. et Nelson, L. (1981). Partitioning and unit recognition in performance on rational number tasks. Dans T. Post et M. Roberts (Eds.), *Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (P. 91 - 102). Minneapolis, MN: University of Minnesota.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: It's intuitive and formal development. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (P. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge : Implications for curriculum and instruction. Dans R. Leinhardt, R. Putnam et R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (P. 323-371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema et T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (P. 49-84). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Oh1sson, S. (1988). Mathematical Meaning and App1icational Meaning in the Semantics of fractions and related Concepts. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds.*), Number Concepts and operations in the Middle Grades* (P. 53-92). Reston : NCTM.

Laborde, C. et Vergnaud, G. (1994). Apprentissages et didactique. Où en est-on ? Dans G. Vergnaud (Ed.), *les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques*. Paris : Hachette.

Lafortune, L. et Massé, B. (2006). La conception et la rédaction de manuels scolaires dans un perspectif socioconstructiviste : un exemple en mathématique. Dans M. Lebrun (Ed.), *Le Manuel scolaire - un outil à multiples facettes* (P. 79-109). Presses de L'université du Québec, Collection éducation - recherche.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24* (l), 41-61.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27* (2), 170 - 193.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational number. Dans A. Cuoco (Ed.), *the roles of representation in school mathematics* (P. 146-165). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2002). Part-Whole Comparisons with Unitizing. Dans B. Litwiller et G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (P. 79-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. Dans F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (P. 629-668). Charlotte, NC : Information Age Publishing Inc.

Larousse, P. (1992). *Le petit Larousse illustré 1993*. Paris, France : Larousse.

Lasnier, F. (2000). *Réussir la formation par compétences*. Montréal, Québec : Guérin.

Legendre, R. (1993). *Dictionnaire actuel de l'éducation*. Montréal, Québec : Guérin.

Les cycles à l'école primaire, 1991.

Robert, P. (2014). Le petit Robert, dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française. Paris : Le Robert

Lesh, R., Post, T. R. et Behr, M. J. (1988). Proportional Reasoning. Dans J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (P. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K. (1984). Preparing Teachers to teach rational numbers. *Arithmetic teacher, 31* (6), 54-56.

Levain, J. P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational studies in mathematics*, *23*, 139-161.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, *21* (1), 16-32.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema, et T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers (P. 85–106).

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fractions concepts when building informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, *26* (5), 422-441.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema et T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (P. 261-288). New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Martinand, J-. L. (1987). Quelques remarques sur les didactiques de disciplines. *Les sciences de l'éducation*, *1*(2), 23-35.

Maurice-Naville, D. et Montagero, J. (1994). *Piaget ou l'intelligence en marche.* Belgique : Pierre Mardaga.

Maurin, C. et Joshua, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. Paris: Ellipses.

Medeiros de Araujo Frutuoso, M. N. (2009). *Réformes de l'éducation et impacts sur la formation des enseignants et leurs pratiques pédagogiques en salle de classe* (Thèse de doctorat en Sciences de l'Education). Université Lumière Lyon2, Lyon, France.

Mercier, P. (2004). *Le passage de l'école primaire à l'école secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions* (mémoire présenté à la faculté des études supérieures de l'Université Laval pour l'obtention du grade de maître ès arts(M.A)). Université de Laval, Québec, Canada.

Métoudi, M. et Duchauffour, H. (2001). *Des manuels et des maîtres. Les Cahiers de Savoirlivre*. Paris : Editions savoir livre.

Mialaret, G. (1967). *L'apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : Dessarts, Belgique.

Mick, H. W. et Sinicrope, R. (1989). Tow meanings of fraction multiplication. *School Science and Mathematics*, *89* (8), 632-639.

Mucchielli, R. (1990). *Le questionnaire dans l'enquête psycho-sociale : connaissance du problème*. Paris: E.S.F- Entreprise moderne d'éd.

Naghibi-Beidokhti, M. (2008). Un portait de la compréhension du concept de la fraction : une étude exploratoire en Iran (Thèse de doctorat en Didactique des mathématiques). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

Neyret, R. (1995). Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants (Thèse de doctorat en Sciences de l'éducation). Université Laval, Québec, Canada.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, *26*, 400-417.

Niemi, D. (1996). Assessing conceptual understanding in mathematics: representation, problem solutions, justifications and explanations. *The journal of Educational Research*, *89* (6), 351-363.

Nison, A. (1975). *Collection pratiques sociales : Travail social et méthodes d'enquête sociologique*. Paris : E.S.F.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I -Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11* (2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept part II: Problem-structure at successive stages; Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11* (3), 331-363.

Novillis, C. F. (1976). An Analysis of the Fraction Concept into a Hierarchy of Selected Sub-concepts and the Testing of Hierarchical Dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7* (3), 131-144.

Nunes, T. et Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Oxford, UK: Blackwell.

Palacio-Quintin, E. (1987). Apprendre les mathématiques, un jeu d'enfant. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Parrat-Dayan, S. et Vonèche, J. (1991). Conservation, notions et pratiques cognitives: étude de leurs interrelations. Dans Bideaud, J., Meljac, C. et Fischer, J. P. (Eds.), *Les chemins du nombre* (P. 91-112). Presses Universitaires de Lille.

Payne, J. N. (1984). Teaching Rational Numbers. *Arithmetic Teacher, 31* (6), 14-17.

Piaget, J., Inhelder, B. et Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris : PUF.

Picard, C. (1992). Élaboration et évaluation d'un matériel didactique portant sur la notion de fraction en cinquième année du primaire. *Revue des sciences de l'éducation, 18* (1), 29-40. Récupéré le 20 novembre 2011 du site http://id.erudit.org/iderudit/900718ar

Pitkethly, A. et Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *30,* 5-38.

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Bern : Peter Lang S.A.

Pothier, Y. et Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 307-317.

Pothier, Y. et Sawada, D. (1990). Partitioning: An Approach to Fractions. *Arithmetic Teacher*, *38* (4), 12-17.

Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R. & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 18-36.

Post, T. et Cramer, K. (1987). Children's strategies when ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher*, *35* (2), 33-35.

Post, T. (1989). Fractions and other rational numbers. *Arithmetic Teacher, 37* (1), P. 3-28.

Post, T., Behr, M. et Lesh, R. (1982). Interpretations of rational number concepts. Dans L. Silvey and J. Smart (Eds.), *Mathematics for grades 5-9* (P. 59-72). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R. et Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. Dans T. Carpenter et E. Fennema (Eds.), *Research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum and Associates.

Plaisance, E. et Vergnaud, G. (2005). *Les sciences de l'éducation.* Paris, France : Editions la Découvert, 4ème édition (P. 43-59), Collection Repères.

Prevost, F. J. (1984). Teaching rational numbers, junior high school. *Arithmetic Teacher*, *31* (6), 43-46.

Programme et enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, Arrêté du 2 janvier 1970.

Programme de l'école primaire, Arrêté du 22 février 1995.

Programme de l'école primaire, cycle des approfondissements, BO n° 1 du 14 février 2002.

Programme de l'école primaire, cycle des approfondissements, BO n° 5 du 12 avril 2007, P.137.

Programmes d'Enseignements de l'Ecole Primaire, BO hors-série n° 3 du 19 juin 2008, p.27.

Raynal, F. et Rieunier, A. (1997). *Pédagogie : dictionnaire des concepts clés : apprentissages, formation, psychologie cognitive*. Préface de Marcel Postic. Paris : ESF.

Régnier, J. C. (2013). Autour des questions méthodologiques soulevées par la construction, le traitement et l'analyse des données utiles à la recherche en sciences humaines et sociales. Quelques apports de l'Analyse Statistique Implicative : de l'exploratoire au confirmatoire. *Séminaire RESEIDA* - Université Paris VIII (4 juin 2013).

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. Dans M. Perlmutter (Ed.), *Perspective on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (P. 159-194). Hilsda1e, NJ: Lawrence Elbraum Associates Inc.

Ricco, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics, 13*, 289-327.

Riddle, M. et Rodzwill, B. (2000). Fractions: What happens between kindergarten and the army? *Teaching Children Mathematics*, 202-206.

Roegiers, X. (2000). *Une pédagogie de l'intégration*. Bruxelles : De Boeck.

Rouche, N. (1998). *L'esprit des sciences. Pourquoi ont-ils inventé les fractions?* Paris : Ellipses.

Rosar, D., Van Nieuwenhoven, C. et Jonnaert, P. (2001). Les fractions, comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves ? *Instantanées mathématiques*, *32* (2), 4-16.

Roseman, L. (1985). Ten Essential Concepts for Remediation in Mathematics. *Mathematics Teacher*, *78* (7), 502-507.

Saenz, Ludlow. (1995). Ann's fraction schemes. *Kluwer Academic Publishers, 28*, 101-132.

Saidan, A. S. (1997). Numération et arithmétique. Dans A. Allard, J.-C. Chabrier, M.-T. Debarnot, D.C. Lindberg, R. Rashed, B.A. Rosenfeld, M.M. Rozhanskaya, G.A. Russell, A.S. Saidan et A.P. Youschkevitch (Eds.), *Histoire des sciences arabes*, tome2 : *Mathématiques et physique* (p.11-29). Paris : Seuil.

Salim, M. (1978). *Etude des premières connaissances sur les fractions chez l'enfant de 6 ans à 12 ans* (thèse de doctorat en Sciences Sociales). Université de la Sorbonne, Paris, France.

Saxe, G. B., Gearhart, M. et Nasir, N. (2001). Enhancing students' understanding of mathematics: A study of three contrasting approaches to professional support. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*, 55-79.

Séguin, R. (1989). *The elaboration of school textbooks, Methodological guide*. *Division of Educational Sciences, Contents and Methods of Education*. Unesco.

Sierpinska, A. (1988). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. *Colloque International : Construction des savoirs - Obstacles et conflits.* Montréal: Agence d'ARC Inc.

Sinicrope, R. et Mick, H. W. (1992). Multiplication of fractions through paper folding. *Arithmetic Teacher*, *40* (2), 116-121.

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. Dans B. Litwiller et G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smyth, M. (1983). Mathematics around the world. *Arithmetic Teacher*, *30* (8), 18-20.

Sowder, J. T. (1988). Mental Computation and Number Comparison: Their roles in the Development of Number Sense and Computational Estimation. Dand J. Hiebert et M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (P. 182-1 97). Reston: NCTM.

Stegen, P., Géron, C. et Daro, S. (2007). *L'enseignement des rationnels à la liaison primaire – secondaire*. Des balises théoriques pour structurer l'apprentissage des rationnels (p.11-21).

Stolovitch, H. D. et Larocque, G. (1983). *Introduction à la technologie de l'instruction*. Québec: Éditions Préfontaine.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema et T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (P. 289-326). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tardif, J. (1999). *Le transfert des apprentissages*. Montréal : Les Editions Logiques.

Therrien, D., Dionne, J. et Mura, R. (1994). *La didactique de la mathématique*. Québec: Presses inter universitaires.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. *Journal for research in mathematics education, 31* (1), 5-25.

Tobias, J. M. (2009). *Preservice Elementary Teachers' Development of Rational Number understanding through the social perspective and the relationship among social and individual environments* (These de doctorate in the Department of Teaching and Learning Principles in the College of Education). University of Central Florida, Orlando, Florida.

Trespalacios, J. H. (2008). *The effects of Two Generative Activities on Learner Comprehension of Part-Whole Meaning of Rational Numbers Using Virtual Manipulatives* (These de doctorat en Philosophie dans le curriculum & de l'instruction). Institut polytechnique et Université d'État de Virginie, Blachsburg, VA.

Vargas, C. (2006). Les Manuels scolaires : Imperfections nécessaires, imperfections et imperfections contingentes. Dans M. Lebrun (Ed.), *Le Manuel scolaire – un outil à multiples facettes* (P. 13-33). Presses de l'Université du Québec, Collection éducation - recherche.

Vézina, N. (1994). *Le développement de la partition en nombres paires et impaires chez les jeunes enfants* (Mémoire de Maîtrise). Université de Moncton, Moncton, Canada.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative Structures*. Dans R. Lesh et M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (P. 127-174). New York: Academie Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. Dans J. Hiebert et M. Behr (Ed.), *number concepts and operations in the middle* grades (P. 141-161). Hillsdale N.J: Erlbaum/Reston, VA, NCTM.

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage éditions.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2), 133-169.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptuel Field: What and Why? Dans G. Harel et J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Leaming of Mathematics* (p. 41-59). New York: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1996a). La théorie des champs conceptuels. Dans J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (P. 197-242). Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Vergnaud, G. (2007). Qu'est-ce qu'apprendre ?, Dans un Colloque : *Les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages dus élèves*. IUFM du Pôle Nord-Est. Besançon 14 et 15 de mars 2007.

Verret, M. (1975). *Le temps des études*. Paris : Honoré Champion.

Vincent, S. (1992). *Construction des structures multiplicatives chez des jeunes élèves du primaire* (Thèse de doctorat). Université de Montréal, Canada.

Wacheux, M. (2012). *L'introduction des nombres décimaux au cycle 3* (mémoire de master 2 en professorat des écoles). Iufm de Lille, Université d'Artois. HAL.

Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fraction. T*eaching children mathematics, 8* (8), 457-463.

Wearne-Hiebert, D. C. et Hiebert, J. (1983). Junior High student's understanding of fractions. *School, Science and mathematics, 83* (2), 96-106.

Witherspoon, M. (1993). Fractions : in search of meaning. *Arithmetic Teacher*, *40* (58). 482-485.

Zhang, J. J. (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science*, *21*(2), 179-217.

Index auteurs

Sitographie

[1] Histoire des fractions, http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/les-fractions . (Consulté le 20 avril 2011).

[2] Les fractions égyptiennes, http://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/notions-et-theoremes/les-developpements/409-les-fractions-egyptiennes. (Consulté le 04 septembre 2011).

[2] L'Organisation pédagogique et le plan d'études des écoles primaires publiques, arrêté du 27 juillet 1882, http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_primaire1882.pdf (Consulté le 24 novembre 2013).

Index Graphiques

Index Tableaux