



# Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche

Michel Legris

► **To cite this version:**

Michel Legris. Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1996. Français. <tel-00869936>

**HAL Id: tel-00869936**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00869936>**

Submitted on 4 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée par

**Michel LEGRIS**  
Ingénieur ECP

pour obtenir le grade de DOCTEUR

de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

( Arrêté ministériel du 30 mars 1992 )

(Spécialité : Génie électrique)

---

---

**Identification de l'état magnétique  
d'un système ferromagnétique  
à partir de mesures du champ proche**

---

---

Date de soutenance : 22 novembre 1996

Composition du jury :

**M. Jean Paul BONGIRAUD**  
**M. Jean Louis COULOMB**  
**M. Laurent KRAHENBUHL**  
**M. Dominique LESSELIER**  
**M. Christian TONIAZZI**

Directeur de thèse  
Rapporteur  
Rapporteur

Thèse préparée au Groupe d'Etudes Sous-Marines de l'Atlantique (GESMA) à BREST



---

## Remerciements

Tâche ô combien délicate que de procéder aux remerciements en rendant avec justesse, toute la gratitude que j'éprouve envers des personnes qui ont accordé une part de leur peine à contribuer au succès de l'aventure que fût le travail présenté dans cette thèse.

Tout d'abord un très grand merci à M. Christian TONIAZZI, pour m'avoir proposé ce sujet, encadré (et supporté) pendant la réalisation de ce travail et pour avoir représenté le GESMA au jury de cette thèse.

Qu'il soit vivement remercié de m'avoir libéré des tâches administratives éreintantes, me permettant de consacrer une grande part de mon temps à taquiner la physique.

Qu'il soit tout autant salué pour toute la confiance qu'il m'a accordé et pour l'organisation périodique de campagnes d'essais qui furent à chaque fois, des défis posés aux algorithmes et des sources fructueuses d'inspiration et de réalisme.

Merci à M. Jean Louis COULOMB pour avoir accepté de diriger les travaux de thèse et pour m'avoir conseillé utilement, en particulier pendant la rédaction.

Merci à MM. Laurent KRAHENBUHL et Dominique LESSELIER pour l'honneur qu'il m'ont fait d'accepter d'être rapporteur et pour avoir donné de leur temps à la conclusion de ces travaux. J'espère pouvoir me faire pardonner de l'épaisseur du document.

Merci à M. François Régis MARTIN-LAUZER, directeur du GESMA, pour avoir autorisé la publication de ce document.

Merci à M. Jean Paul BONGIRAUD pour tous ses conseils et tous ses encouragements et pour représenter le LMN au jury de cette thèse.

Merci à MM. Philippe LOPEZ, Philippe LE THIEC, René CARDINAL, Gilbert JEGOU et Christian LOBJOIS pour avoir détourné l'attention de MURPHY avec zèle, gentillesse et compétence, me permettant d'avoir des résultats de mesures de très grande qualité.



---

Merci à tous les membres du GESMA et du LMN non encore cités, en particulier ceux des divisions Magnétisme de Lanvéoc et Quéliverzan, pour m'avoir appris le métier et supporté avec gentillesse et sourires pendant ces quelques années à partager les mêmes joies et les mêmes peines.



---

## **-3.- Sommaire**

<b>-2.- Résumé.....</b>	<b>7</b>
<b>-1.- Notations et conventions.....</b>	<b>9</b>
-1.1- Remarques générales sur les notations.....	9
-1.2- Conventions sur les grandeurs.....	10
-1.2.a- Formules physiques	
-1.2.b- Formules matricielles	
-1.2.c- Figures géométriques	
-1.3- Conventions de mise en page.....	11
-1.4- Symboles utilisés.....	12
<b>0.- Introduction.....</b>	<b>15</b>
0.1- Aperçus de la magnétostatique.....	15
0.2- Contexte de l'étude.....	16
0.3- Itinéraire.....	17
<b>1.- Analyse du problème.....</b>	<b>19</b>
1.1- Méthode de mesure actuelle.....	19
1.1.a- Objectif des mesures et objets mesurés	
1.1.b- Moyens de mesure	
1.2- Nouveaux besoins exprimés.....	26
1.2.a- Limitations de ce type de mesure	
1.2.b- Objectifs généraux d'une nouvelle méthode	
1.2.c- Précisions sur les objectifs	
1.3- Solutions possibles.....	29
1.3.a- Présentation de l'alternative	
1.3.b- Problème direct	
1.3.c- Problème inverse	
1.4- Synthèse des méthodes employées.....	33
1.4.a- Problèmes similaires	

1.4.b- Algorithmes d'inversion	
<b>1.5- Propriétés des sources rencontrées</b> .....	36
1.5.a- Matériaux ferromagnétiques	
1.5.b- Courants électriques	
1.5.c- Aimantations mesurées dans cette étude	
1.5.d- Hypothèses retenues par la suite	
<b>2.- Harmoniques sphériques</b> .....	43
<b>2.1- Propriétés recherchées du modèle mathématique</b> .....	43
2.1.a- Sources élémentaires	
2.1.b- Indiscernabilité des sources	
2.1.c- Propriétés des champs magnétiques	
<b>2.2- Modélisation par harmoniques sphériques</b> .....	47
2.2.a- Définition	
2.2.b- Précision sur les notations utilisées pour les harmoniques sphériques	
2.2.c- Zone de validité de la formule	
<b>2.3- Intérêt de la modélisation</b> .....	49
2.3.a- Découplage de la source et de la mesure	
2.3.b- Amortissement en fonction de la distance	
2.3.c- Orthogonalité des différents termes	
2.3.d- Représentation des harmoniques sphériques	
<b>2.4- Ordre de grandeur des coefficients d'aimantation</b> .....	53
2.4.a- Induction dans une sphère ferromagnétique homogène	
2.4.b- Dipôle isolé dans une sphère	
2.4.c- Cas général	
<b>2.5- Limites de la représentation en harmoniques sphériques</b> .....	57
2.5.a- Rappel rapide des avantages de la représentation	
2.5.b- Découplage du problème physique	
2.5.c- Dimension des $a_{rm}$	
2.5.d- Géométrie des sources	
<b>2.6- Extension aux ellipsoïdes</b> .....	61
2.6.a- Ellipsoïdes de révolution allongés	
2.6.b- Ellipsoïdes de révolution aplatis	
2.6.c- Application au moteur Baudouin	
<b>3.- Intégrales surfaciques</b> .....	69
<b>3.1- Alternative aux fonctions harmoniques</b> .....	69
3.1.a- Passage à une résolution numérique	
3.1.b- Importance des conditions aux limites	
<b>3.2- Les représentations surfaciques</b> .....	72
3.2.a- L'équation de Green	
3.2.b- Grandeurs surfaciques utilisables	
3.2.c- Equivalence masse/induction normale et dipôle	

normal/potentiel	
<b>3.3- Application d'une telle représentation</b> .....	79
3.3.a- Choix de la grandeur surfacique	
3.3.b- Discrétisation de la grandeur surfacique	
<b>3.4- Précision de l'interpolation de la grandeur</b> .....	84
3.4.a- Intérêt du calcul de précision d'interpolation	
3.4.b- Précision de l'interpolation sur la surface	
3.4.c- Compromis entre la finesse du maillage et la profondeur d'interpolation	
<b>3.5- Avantages et inconvénients d'un maillage surfacique</b> .....	89
3.5.a- Diversité des géométries	
3.5.b- Interprétation des grandeurs	
3.5.c- Lourdeur et imprécision des calculs numériques	
3.5.d- Lourdeur de la description géométrique	
3.5.e- Représentation locale	
 <b>4.- Améliorations de la base</b> .....	 93
<b>4.1- Recherche d'une représentation globale de l'état magnétique</b> .....	93
4.1.a- Représentation globale contre représentation locale	
4.1.b- Nécessité d'une représentation globale	
4.1.c- Tentatives de solutions	
<b>4.2- Utilisation d'un nouveau produit scalaire sur <math>\Sigma</math></b> .....	98
4.2.a- Définition d'un nouveau produit scalaire	
4.2.b- Interprétation de la représentation duale $w$	
4.2.c- Extension du produit scalaire dans le cas d'une distribution de monopôles	
<b>4.3- Base orthonormée de la représentation surfacique</b> .....	100
4.3.a- Construction de la base	
4.3.b- Décroissance des effets des différents termes en fonction de la distance	
4.3.c- Base orthonormée des aimantations de $\Omega_i$	
4.3.d- Représentation dans le cas du moteur Baudouin	
<b>4.4- Problèmes pratiques de la construction de la base orthonormée</b> .....	105
4.4.a- Instabilité de calcul sur un cas simple	
4.4.b- Précision du maillage	
<b>4.5- Vecteurs identifiés dans le cas du moteur Baudouin</b> .....	107
4.5.a- Conditions de l'identification	
4.5.b- Résultats	
4.5.c- Eléments d'interprétation	
<b>4.6- Prospective pour l'amélioration du modèle</b> .....	113
4.6.a- Base "optimale" sans information sur le modèle	
4.6.b- Intégration de l'information sur la physique	
4.6.c- Calcul du biais dû à la perméabilité des matériaux	
4.6.d- Interprétation physique des formules	
4.6.e- Cas de sources en surface	

<b>5.- Problèmes inverses.....</b>	<b>119</b>
5.1- Objectifs de l'inversion.....	121
5.1.a- Chemin accompli	
5.1.b- Performances souhaitées	
5.1.c- Un cas test : identification du moteur Baudouin	
5.2- Utilisation de l'information a priori.....	125
5.2.a- Recherche de nouvelles sources d'informations	
5.2.b- Modélisation du caractère incertain des informations	
5.2.c- Informations a priori sur le moteur Baudouin	
5.3- Inversion du système.....	131
5.3.a- Loi de Bayes	
5.3.b- Choix de la meilleure estimée	
5.3.c- Calculabilité de l'estimée	
5.3.d- Conclusion partielle sur le choix	
5.4- Estimateur linéaire.....	134
5.4.a- Résolution du système	
5.4.b- Remarques générales sur l'estimateur linéaire	
5.5- Estimation de l'état magnétique du moteur Baudouin.....	138
5.5.a- Estimation du champ sous le moteur	
5.5.b- Résultats bruts	
<b>6.- Validation et optimisation.....</b>	<b>145</b>
6.1- Interprétation de l'estimateur linéaire.....	145
6.1.a- Objectifs de l'étude complémentaire	
6.1.b- Interprétation des formules	
6.2- Performances a priori du système.....	147
6.2.a- Incertitude a priori de l'estimée	
6.2.b- Optimisation des positions capteurs	
6.3- Performances a posteriori.....	155
6.3.a- Probabilité a posteriori de la mesure	
6.3.b- Test du Chi deux sur l'estimée	
6.3.c- Réutilisation de l'information a posteriori	
6.4- Extension à trois cas non linéaires.....	160
6.4.a- Probabilité en double exponentielle	
6.4.b- Algorithme tolérant aux erreurs d'alignement des capteurs	
6.4.c- Utilisation de capteurs scalaires	
<b>7.- Etude paramétrique d'un cas simple.....</b>	<b>165</b>
7.1- Présentation du problème.....	165
7.1.a- But de l'étude	
7.1.b- Description du problème simplifié	
7.2- Variance dans l'espace du potentiel magnétique et de ses dérivées.....	167
7.2.a- Variance de l'induction et de son gradient	

7.2.b- Remarques sur les dépendances entre champs et gradients	
<b>7.3- Formules d'erreur d'identification</b> .....	170
7.3.a- Hypothèses supplémentaires	
7.3.b- Expression générale	
7.3.c- Application à plusieurs types de capteur	
<b>7.4- Performance de l'identification</b> .....	175
7.4.a- Description des paramètres	
7.4.b- Domaine de variation des paramètres	
7.4.c- Expressions utilisées	
7.4.d- Résultats	
<b>7.5- Généralisation dans le cas de capteurs réels</b> .....	184
7.5.a- Les capteurs réels	
7.5.b- Types de capteur retenus	
7.5.c- Cas particulier des capteurs possédant des corrélations	
7.5.d- Résultats	
<b>7.6- Enseignements tirés</b> .....	194
<b>8.- Conclusion</b> .....	197
<b>8.1- Obtention des objectifs</b> .....	197
8.1.a- Comparaison entre plusieurs mesures	
8.1.b- Identification des sources en temps réel	
8.1.c- Extrapolation des champs	
8.1.d- Vérification de la qualité de mesure	
<b>8.2- Application de la méthode</b> .....	199
8.2.a- En magnétostatique	
8.2.b- Dans d'autres domaines de la mesure	
<b>8.3- Développements possibles</b> .....	200
8.3.a- Finesse des modélisations	
8.3.b- Lois de probabilité	
<b>9.- Références bibliographiques</b> .....	201
<b>A.- Boîte à outils mathématiques</b> .....	203
<b>A.1- Repères orthogonaux</b> .....	203
A.1.a- Changement de coordonnées dans le cas général	
A.1.b- Coordonnées sphériques	
A.1.c- Coordonnées ellipsoïdales (ellipsoïde de révolution allongé)	
A.1.d- Coordonnées ellipsoïdales (ellipsoïde de révolution aplati)	
<b>A.2- Calcul des fonctions de Legendre</b> .....	206
A.2.a- Généralités et définitions	
A.2.b- Calcul de $P_{rm}$	
A.2.c- Calcul de $Q_{rm}$	
A.2.d- Fonctions associées	

A.2.e- Expression des premières fonctions de Legendre	
<b>A.3- Expression des premiers harmoniques sphériques.....</b>	<b>213</b>
<b>A.4- Angle solide et équations de Green.....</b>	<b>214</b>
A.4.a- Angle solide	
A.4.b- Fonctions de Green	
A.4.c- 1 <sup>ière</sup> formule de Green	
A.4.d- 2 <sup>nde</sup> formule de Green	
A.4.e- 3 <sup>ième</sup> formule de Green	
<b>A.5 Potentiels et champs magnétostatiques.....</b>	<b>216</b>
<b>A.6- Décomposition en valeurs singulières.....</b>	<b>217</b>
A.6.a- Définition des valeurs singulières	
A.6.b - Résolution d'un système d'équations par les moindres carrés	
<b>A.7- Réduction d'un vecteur aléatoire.....</b>	<b>219</b>
A.7.a- Théorème	
A.7.b- Démonstration	
<b>B.- Justification des formules.....</b>	<b>223</b>
<b>B.1- Harmoniques sphériques.....</b>	<b>223</b>
B.1.a -Expression du potentiel scalaire en fonction des harmoniques sphériques	
B.1.b- Base des champs magnétiques	
B.1.c- Coefficients harmoniques dans le cas d'un dipôle isolé dans une sphère	
<b>B.2- Intégrales surfaciques.....</b>	<b>231</b>
B2.a- Précision de l'interpolation	
<b>B.3- Amélioration de la base.....</b>	<b>235</b>
B.3.a- Démonstration du produit scalaire	
B.3.b- Calcul de la réaction du matériau	
<b>B.4- Problèmes inverses.....</b>	<b>243</b>
B.4.a- Recherche du meilleur estimateur linéaire	
B.4.b- Algorithme pour les capteurs scalaires	
<b>B.5- Etude paramétrique.....</b>	<b>248</b>
B.5.a- Variance du potentiel scalaire magnétique	
B.5.b- Variance de l'induction magnétique	
B.5.c- Variance du gradient de l'induction magnétique	
B.5.d- Variance de l'erreur d'identification	

## -2.- Résumé

Pour connaître l'état magnétique d'un objet complexe, bien souvent la seule solution est de mesurer l'induction créée par la pièce en un nombre discret et fini de points. La difficulté est alors de remonter à l'aimantation à partir de ces mesures.

Nous commençons d'abord par présenter le problème de manière intuitive ainsi que les hypothèses de départ. Ensuite, en s'inspirant des travaux effectués dans plusieurs domaines technologiques où des difficultés similaires surgissent, nous élaborons une stratégie de résolution.

Celle-ci se décompose en deux parties : d'une part, la création d'un modèle des sources qui assure la bijectivité entre cette représentation et les champs mesurables, d'autre part, la résolution d'un problème inverse par des méthodes classiques mais performantes.

La première modélisation utilisée est la décomposition du champ sur une base générée par les fonctions harmoniques sphériques. Après en avoir exposé les avantages et les inconvénients, nous nous orientons vers une autre représentation, la distribution de sources magnétiques élémentaires équivalentes réparties sur la surface de l'objet étudié. Ce nouveau modèle se révèle beaucoup plus souple que le premier, mais ne dispose pas des mêmes atouts. Nous créons alors une synthèse des deux qui combine leurs propriétés respectives.

Muni de ce nouvel outil mathématique, nous cherchons à projeter les mesures sur ce modèle. L'indétermination due à l'imperfection de la mesure et des hypothèses est contournée par l'utilisation d'un algorithme bayésien qui permet d'intégrer l'incertitude et les incohérences du système. En contrepartie, nous n'obtenons plus qu'un intervalle de confiance sur les valeurs recherchées.

Pour utiliser au mieux ces algorithmes, il peut être utile de pouvoir connaître a priori la précision qu'il est possible d'atteindre pour une configuration donnée. Ce n'est hélas faisable de manière analytique qu'au prix de nombreuses simplifications. Mais ce calcul permet de tirer quand même des conclusions intéressantes sur le choix des capteurs de mesure et sur leur position.



## -1.- Notations et conventions

### -1.1- Remarques générales sur les notations

Tout au long de notre exposé, nous avons cherché à justifier nos choix et nos affirmations. A cause de cela, nous n'avons pas pu éviter de présenter de nombreux développements mathématiques. Dans la mesure du possible, nous avons cherché à éviter l'utilisation d'un langage mathématique qui, bien que souvent sobre et élégant, exige une trop forte accoutumance des notions utilisées pour permettre une compréhension rapide des idées exposées.

Un certain nombre de conventions usuelles permet toutefois d'alléger les formules et de dégager l'idée qu'elles transmettent, en défrichant les herbes folles de symboles qui pourraient la masquer.

Tout au long de ce rapport, nous faisons appel à plusieurs branches de la physique et des mathématiques qui possèdent leurs propres conventions pour distinguer les grandeurs. Par exemple, un magnéticien comprend tout de suite la formule :

$$\vec{B} = \mu_0(\mu_r \vec{H} + \vec{m})$$

sans explication de chacun des termes utilisés. Mais parfois ces domaines multiples utilisent des conventions qui ne sont pas compatibles entre elles.  $E(x)$  est-elle la partie entière du réel  $x$  ou l'espérance de la variable  $x$  ?  $V$  est-il le potentiel scalaire ou la matrice de variance d'un vecteur aléatoire ?

Même dans un même corps de métier, des conventions incompatibles peuvent exister. L'équation du potentiel scalaire créé par un dipôle magnétique est-elle :

$$V = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \text{ ou } V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \text{ ou encore } V = \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} ?$$

Tout dépend des conventions choisies dans les unités.

Pour notre part, nous utilisons toujours les unités MKSA rationalisées.

Enfin, les performances typographiques du traitement de texte utilisé nous imposent quelques entorses par rapport aux conventions courantes. En calcul matriciel, une notation classique pour une matrice à deux dimensions est  $\underline{M}$ , nous préférons  $\mathbb{M}$ .

## -1.2- Conventions sur les grandeurs

Dans les notations, nous faisons la différence entre les formules issues de la théorie du magnétisme, que nous appelons formules physiques et celles provenant du calcul matriciel, que nous appelons formules matricielles.

### -1.2.a- Formules physiques

Une grandeur scalaire est notée  $x$  ou  $X$

Une grandeur vectorielle (axial ou polaire) est notée  $\vec{X}$ .

Une grandeur tensorielle d'ordre 2 est notée  $\mathbb{X}$ .

Nous utilisons aussi les notations classiques pour les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \text{gradient} &: \vec{\nabla}_x \\ \text{divergence} &: \nabla \cdot \vec{X} \\ \text{rotationnel} &: \vec{\nabla} \wedge \vec{X} \\ \text{Laplacien} &: \Delta x \end{aligned}$$

### -1.2.b- Formules matricielles

Les grandeurs scalaires sont notées  $x$ .

Les vecteurs colonnes sont notés  $X$  et les vecteurs lignes  $X^t$ .

Les matrices à deux dimensions sont notées  $\mathbb{X}$ .

$\mathbb{X}^t$  correspond à la matrice transposée de  $\mathbb{X}$ .

Nous aurions pu utiliser les mêmes notations dans les formules physiques et les formules matricielles, mais nous perdions alors de la souplesse vis à vis des notations usuelles des grandeurs.

### -1.2.c- Figures géométriques

Sauf mention explicite, nous nous plaçons en général dans le cas de la géométrie suivante :

- $\Omega$  : volume fermé.
- $\Omega_i$  : intérieur du volume.
- $\Omega_e$  : extérieur du volume.
- $\Sigma$  : surface du volume.
- M : point courant de  $\Sigma$ .
- P : point de calcul du champ ou du potentiel.
- $\vec{n}$  : normale en M de  $\Sigma$  ( $\vec{n}$  est dirigé vers l'extérieur  $\Omega_e$ ).

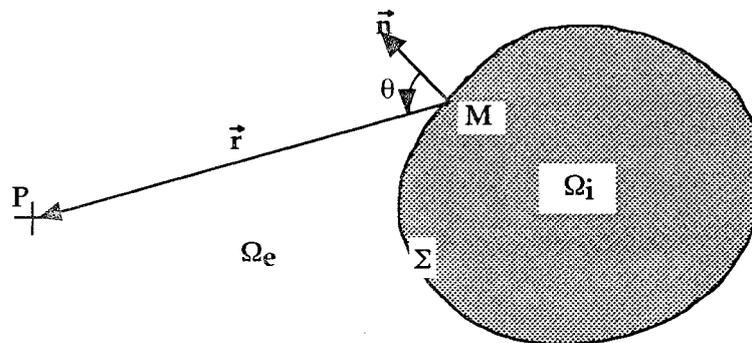


figure -1.1 : Géométrie du problème

Nous définissons aussi :

- $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$  : vecteur distance entre M et P.
- et  $\theta = \text{angle de } \vec{n} \text{ vers } \vec{r}$ .

### -1.3- Conventions de mise en page

Dans ces pages, nous avons recherché une certaine exhaustivité. Le pendant de ce souhait est le risque de perdre le lecteur dans un ensemble touffu et peu structuré. Dans la mesure du possible, par des conventions discrètes, nous avons souhaité amplifier ou au contraire atténuer la portée de certains paragraphes.

A ces fins, nous utilisons les symboles suivants :

$\triangle$ : doit attirer l'attention sur un danger potentiel autour d'une formule ou d'une affirmation. Celle-ci peut par exemple n'être valable que dans des conditions restreintes ou risquer d'entraîner une mauvaise interprétation. La nature du danger est bien entendu précisée.

$\oplus$ : est placé en tête de tout paragraphe qui explicite les conditions d'application d'une formule ou d'une conclusion.

$\square$ : tente de faire pardonner l'auteur de ses apartés au milieu d'un développement ou d'une explication.

### -1.4- Symboles utilisés

$a_{\text{tm}}$  : paramètres magnétiques d'un objet

$A$  : vecteur des paramètres dans les méthodes inverses

$\underline{A}$  : estimée du vecteur des paramètres

$B$  ou  $\vec{B}$  : induction magnétique

$B$  : vecteur des mesures

$d$  : distance entre la source et le point d'observation

$\mathbb{E}_A$  : matrice diagonale inférieure, décomposition de Cholesky d'une matrice de variance/covariance

$\mathbb{F}$  : matrice de transfert entre les paramètres et la mesure

$G(M,P)$  : fonction de Green de l'espace vide entre les points  $M$  et  $P$ .

$\mathbb{G}$  : tenseur du gradient magnétique

$\mathbb{G}$  : matrice de transfert entre les paramètres et l'induction magnétique en plusieurs points de l'espace

$H$  ou  $\vec{H}$  : champ magnétique

$\mathbb{H}_1$  : matrice de l'estimateur linéaire

$H_2$  : vecteur de l'estimateur linéaire

$\vec{J}$  : densité volumique de courants

$m$  ou  $\vec{m}$  : densité volumique d'aimantation

$m$  : densité volumique ou surfacique de monopôles

$m$  : ordre des fonctions de Legendre

$M$  : point de l'ensemble des sources

$M$  ou  $\vec{M}$  : aimantation dipolaire d'un objet

$M_X$  : vecteur espérance du vecteur  $X$

$n$  ou  $\vec{n}$  : normale extérieur à la surface  $\Sigma$

$n$  : degré des fonctions de Legendre

$P$  : point de mesure ou de calcul

$P_n^m$  : fonction de Legendre de première espèce

$\mathbb{P}$  : matrice unitaire de  $m$  éléments

- $Q_n^m$  : fonction de Legendre de seconde espèce  
 $\mathbb{Q}$  : matrice unitaire de  $n$  éléments  
 $\vec{r}(r)$  : vecteur distance entre l'origine ou la source et le point d'observation (son module).  
 $r$  : première coordonnée du repère sphérique  
 $r_0$  : distance entre l'origine et la source  
 $r_0$  : rayon de la sphère de modélisation  
 $\mathbb{V}_X$  : matrice de variance/covariance du vecteur  $X$   
 $v_{nm}$  : fonction de base des représentations de dipôles normaux surfaciques  
 $V$  : potentiel magnétique scalaire.  
 $w$  : bruit capteur  
 $\mathbb{W}$  : matrice de variance du bruit capteur  
 $w_{nm}$  : fonction de base des représentations de monopôles surfaciques  
 $Y_n^m$  : harmoniques sphériques de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .  
 $\alpha$  : vecteur aléatoire d'espérance nulle, de variance unité et de termes linéairement indépendants deux à deux  
 $\hat{\alpha}$  : estimée du vecteur  $\alpha$   
 $\delta_{ij}$  : indice de Kronecker  
 $\varepsilon$  : erreur d'identification  
 $\varphi$  : troisième coordonnée du repère sphérique ou ellipsoïdal  
 $\lambda$  : valeur singulière  
 $\lambda$  : matrice rectangulaire dont seuls les éléments  $\lambda_{ij}$  sont non nuls  
 $\mu_0$  : perméabilité du vide  
 $\mu_r$  : perméabilité relative d'un objet  
 $v$  :  $-\Omega_\Sigma(P)/4\pi$   
 $\theta$  : deuxième coordonnée du repère sphérique ou ellipsoïdal  
 $\rho$  : première coordonnée du repère ellipsoïdal  
 $\sigma_x$  : écart type de la valeur  $x$   
 $\Sigma$  : surface  
 $\tau_n$  : densité surfacique de dipôles normaux  
 $\Omega$  : volume  
 $\Omega_i$  : volume intérieur  
 $\Omega_e$  : volume extérieur  
 $\Omega_\Sigma(P)$  : angle solide de la surface  $\Sigma$  vue du point  $P$



## 0.- Introduction

### 0.1- Aperçus de la magnétostatique

La magnétostatique est une partie de la physique assez méconnue. Quand on déclare que l'on fait de la recherche dans un laboratoire dont le principal sujet est l'étude des champs faibles en magnétostatique, les interlocuteurs ont très souvent une idée fautive du type de travail effectué.

Il y a en général deux réactions possibles. Soit ils s'imaginent être devant un "magnétiseur" et commencent à disserter sur les fluides magnétiques guérisseurs, soit, plus rarement, ils ont des réminiscences d'un cours du lycée, appendice d'un exposé plus général sur l'électricité. Ce cours les a marqué non pas pour son intérêt intrinsèque, mais pour les difficultés de maniement du petit bonhomme d'Ampère ayant entraîné presque inévitablement une baisse de la moyenne générale.

Même ceux-ci pensaient en toute bonne foi que la magnétostatique était un domaine clos, ne nécessitant plus d'efforts de recherche. Certitude à peine ébranlée par les échos dans la presse de bonds faramineux dans la technologie des supraconducteurs.

Et pourtant..., la magnétostatique a fait l'objet très tôt d'une théorie dans le sens moderne du terme. En effet, dès la fin de la Renaissance, William Gilbert, un contemporain de Galilée, chercha à percer le secret de la boussole. Depuis, cette science a continué à se développer. Après les premières applications dans la navigation, elle a été essentiellement motrice des progrès de l'électrotechnique. Plus récemment, elle contribue aux avancées de la prospection géophysique et de la médecine (version moderne des sourciers et des magnétiseurs ?).

De plus, la technologie aidant, elle possède la particularité d'embrasser des ordres de grandeur extraordinaires, somme toute assez rares dans les autres secteurs. Le chercheur en médecine analyse des magnétoencéphalogrammes traquant des variations de l'ordre de  $10^{-14}$  Teslas (10 fT), alors que le physicien des plasmas cherche à maîtriser des inductions magnétiques d'une dizaine de Teslas !

Enfin, malgré le travail considérable effectué par plusieurs générations de physi-

ciens, dont le plus marquant est peut-être le professeur L. Néel, les propriétés magnétiques des matériaux sont encore largement incomprises.

Malgré cette introduction, notre mémoire ne traite que très peu de la physique du magnétisme (très certainement pas suffisamment), mais il présente essentiellement des méthodes de calcul numérique associées à l'interprétation de la mesure. L'application directe des théories qui y sont développées, concerne la mesure des inductions magnétiques assez faibles (entre 1 nT et 100  $\mu$ T). Mais compte tenu de l'universalité des lois de la physique, les algorithmes de ce document sont généralisables à d'autres ordres de grandeur des valeurs de champ, ainsi qu'après quelques adaptations, à d'autres domaines de la physique.

## 0.2- Contexte de l'étude

L'une des missions de l'organisme dans lequel les travaux de cette thèse ont été menés est de prédire, mesurer, puis réduire les inductions magnétiques générées par des objets manufacturés de toute taille, depuis la boîte de conserve ... jusqu'au porte-avion de plus de 20000 tonnes. Si mesurer l'effet de ces "anomalies magnétiques" en quelques points est une tâche assez aisée, les caractériser ou les comparer entre elles est beaucoup plus difficile.

Le plus souvent, ces mesures sont enregistrées par l'intermédiaire de capteurs magnétiques de type "flux-gate" qui quantifient soit la valeur d'une ou plusieurs composantes du vecteur induction magnétique en un point de l'espace, soit la différence entre les mêmes composantes de l'induction magnétique en deux points rapprochés (ce qui approxime bien les composantes de la matrice gradient de l'induction magnétique).

Pendant des décennies, nous avons dû nous contenter de ces valeurs et de l'extrapolation au niveau des sources par des modèles simplistes (de type dipolaire essentiellement). C'est hélas généralement insuffisant pour pouvoir répondre de manière certaine aux interrogations que peuvent avoir les commanditaires de ces essais.

- quelle est l'aimantation de l'objet mesuré ?
- quelle induction fait l'objet mesuré, en d'autres points de l'espace (bien entendu, généralement en des points où il est impossible de placer des capteurs) ?
- le magnétisme de l'objet mesuré a-t-il varié après un traitement ? de combien ?
- voire même, quelle partie de l'objet a le plus varié ou à quel moment du traitement a-t-il évolué ?

La réponse à toutes ces questions passe obligatoirement par une étape intermédiaire qui nous amène au sujet de ce rapport :

*"l'identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique  
à partir de mesures du champ proche"*

### 0.3- Itinéraire

Dans le premier chapitre, nous faisons une étude grossière de ce problème, présentons quelques généralités sur le comportement des pièces étudiées et effectuons un rapide tour d'horizon des méthodes utilisées dans des secteurs d'activité similaires. Nous en profitons aussi pour présenter le moteur Baudouin DNP8 qui sert, tout au long du document, de cobaye et d'illustration à nos algorithmes. Après avoir posé le problème, analysé ses tenants et élaboré une stratégie de résolution, nous sommes armés pour franchir les différentes difficultés de notre périple, accompagnés de notre moteur. Nous faisons attention dans cette partie à insister sur le sens physique des choses et nous limitons intentionnellement le nombre de formules mathématiques.

Dans les trois chapitres suivants, nous construisons de manière progressive une représentation mathématique des sources magnétiques adaptée à notre problème. Sans trop dévoiler ici le contenu de cette partie, nous pouvons dire que nous en trouvons deux, chacune ayant des avantages et des inconvénients complémentaires. Il suffit alors de les hybrider pour en créer une troisième qui se révèle adéquate. Nous laissons pourtant la porte ouverte à des améliorations futures. C'est la grande étape de notre parcours.

Ensuite, nous nous éloignons du magnétisme et nous faisons un détour vers les terres d'un passionnant domaine de l'analyse numérique, actuellement en développement : la théorie des problèmes inverses. Mais hélas, nous ne faisons que les effleurer, et nous n'en rapportons que les moindres carrés, mais munis d'un précieux manuel d'utilisation.

Enrichis de cette expérience, nous avons la connaissance qui nous permet de prendre du recul et de faire les meilleurs choix. A cette fin, nous explorons de manière analytique un cas simple pour identifier les paramètres clés de la méthode et pour l'utiliser à moindre risque.

Dans la conclusion, nous laissons la porte ouverte à des améliorations ultérieures.



# 1.- Analyse du problème

## 1.1- Méthode de mesure actuelle

### 1.1.a- Objectif des mesures et objets mesurés

Depuis plus de cinquante ans, la mesure des variations de champ magnétique est utilisée dans des armes de guerre (principalement les mines sous-marines et terrestres) pour détecter la présence d'engins. En effet, les objets manufacturés contiennent pour la plupart, soit des matériaux ferromagnétiques, soit des courants électriques qui génèrent un champ magnétique se superposant au champ terrestre créant par là, une "anomalie" mesurable par l'ennemi.

La compétition technologique entre le glaive et le bouclier a amené les armées à contrôler sévèrement le niveau d'aimantation de certains instruments exposés aux mines.

L'établissement militaire pour lequel ce travail a été réalisé, a justement pour mission de mesurer puis éventuellement de réduire l'anomalie de champ magnétique créé par les objets qui lui sont confiés.

En pratique, on s'aperçoit qu'à peu près tout appareil ou machine est susceptible d'être mesuré un jour. Nous pourrions en effet faire une liste à la Jacques Prévert des objets passés entre les mains des expérimentateurs. On y trouverait pêle-mêle des navires de guerre, des canettes de bière, des véhicules, des couteaux de plongée, des armoires électriques, des boîtes de haricots, des moteurs Diesel...

Profitons de cette liste pour présenter l'objet qui nous va nous servir tout au long de cette étude pour tester les algorithmes et illustrer les résultats (figure 1.1). Il s'agit d'un moteur Diesel de 600 cv de marque Baudouin et de type DNP8. C'est un moteur de propulsion utilisé par la Marine Nationale sur ... un voilier !

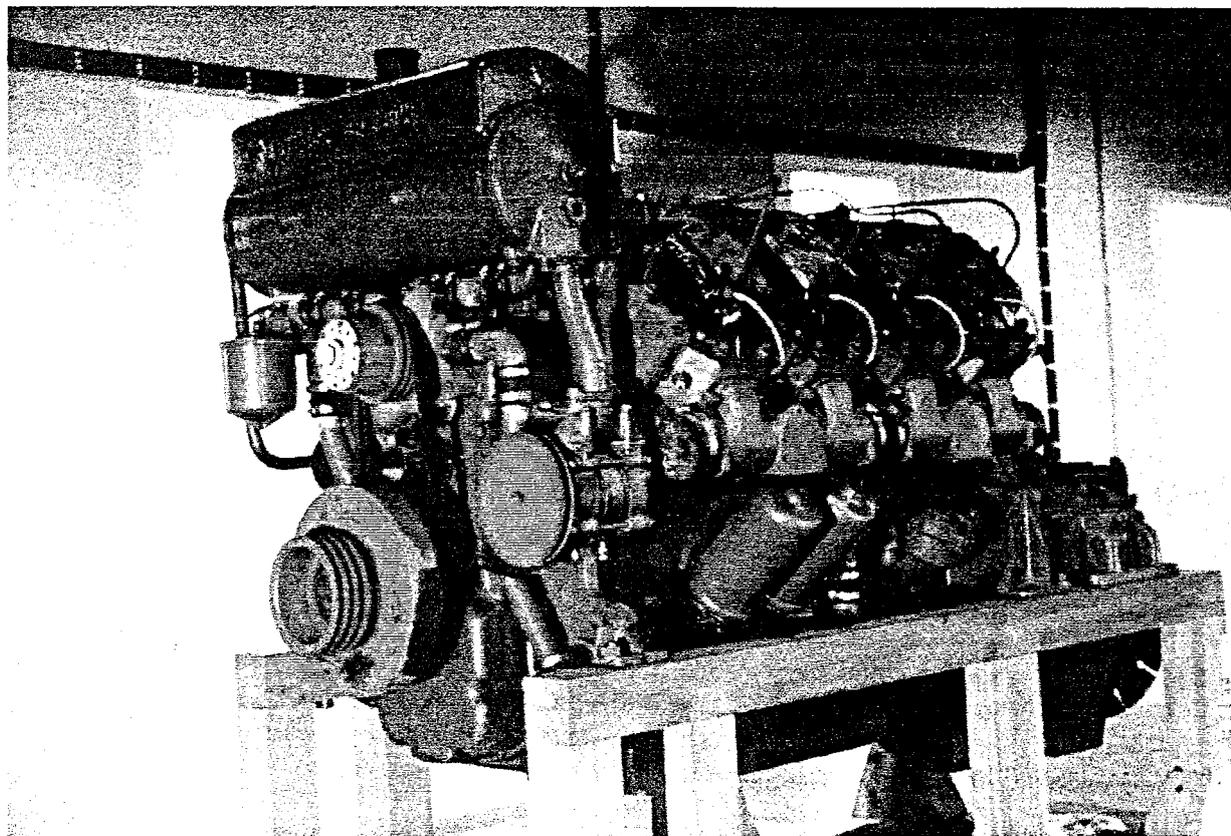


Figure 1.1 : Moteur utilisé pour les mesures

### 1.1.b- Moyens de mesure

Bien entendu, les conditions de mesure d'un petit récipient sont très différentes de celles d'un navire entier. Cependant, à la fois le principe et les ordres de grandeur des champs mesurés restent les mêmes.

Le principe général dans le cas de pièces de taille moyenne est schématisé en figure 1.2 (avec notre moteur).

Comme l'aimantation d'un objet ferromagnétique dépend très fortement du module et de l'orientation du champ inducteur relativement à la pièce mesurée, nous appliquons dans la zone de mesure un champ magnétique connu et homogène à l'aide de boucles de courants réparties dans la salle d'expérimentation (celles-ci ne sont pas représentées sur le schéma mais sont partiellement visibles sur les reproductions 1.1 et 1.5).

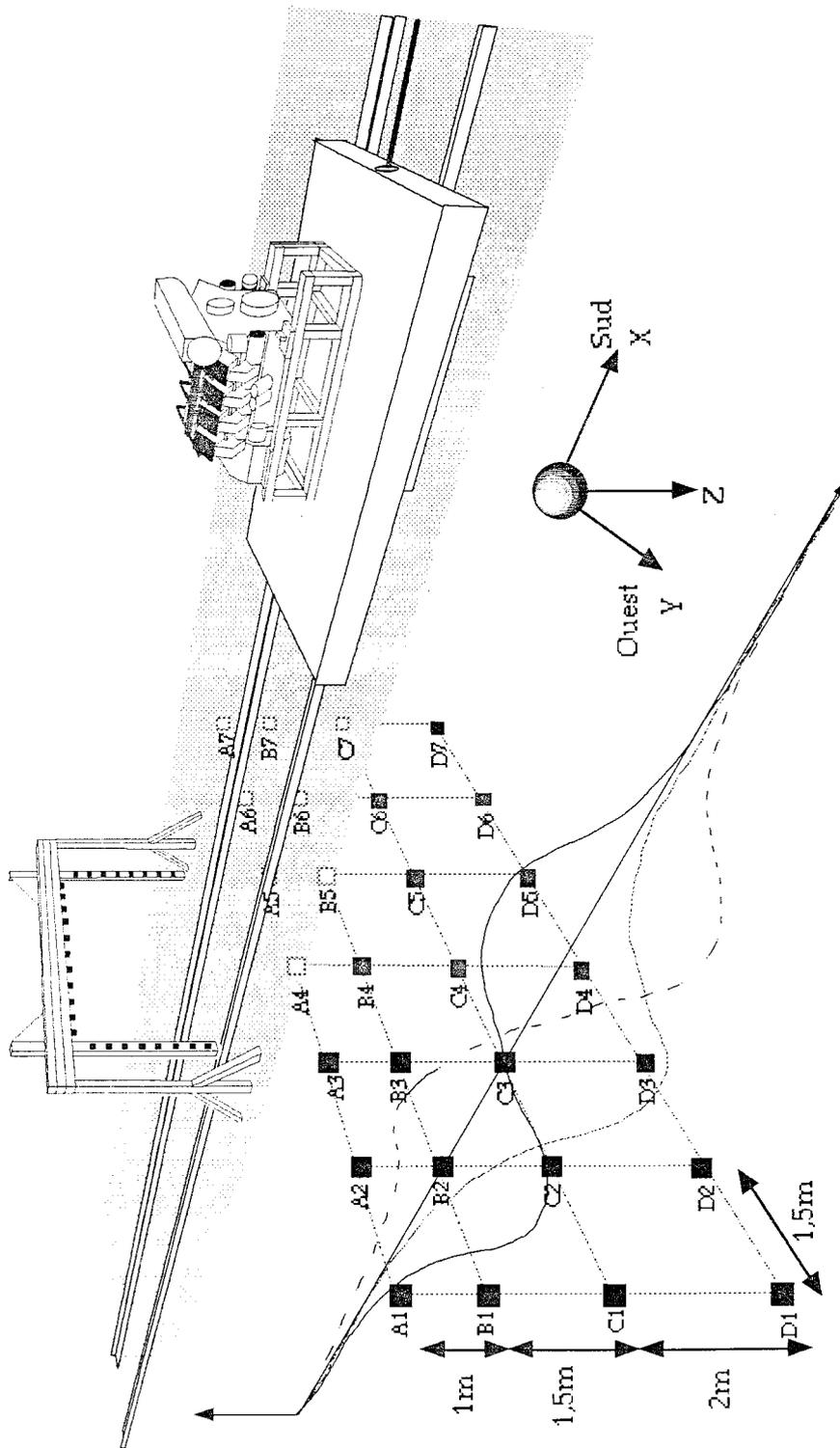


Figure 1.2 : Schéma de la chaîne de mesure

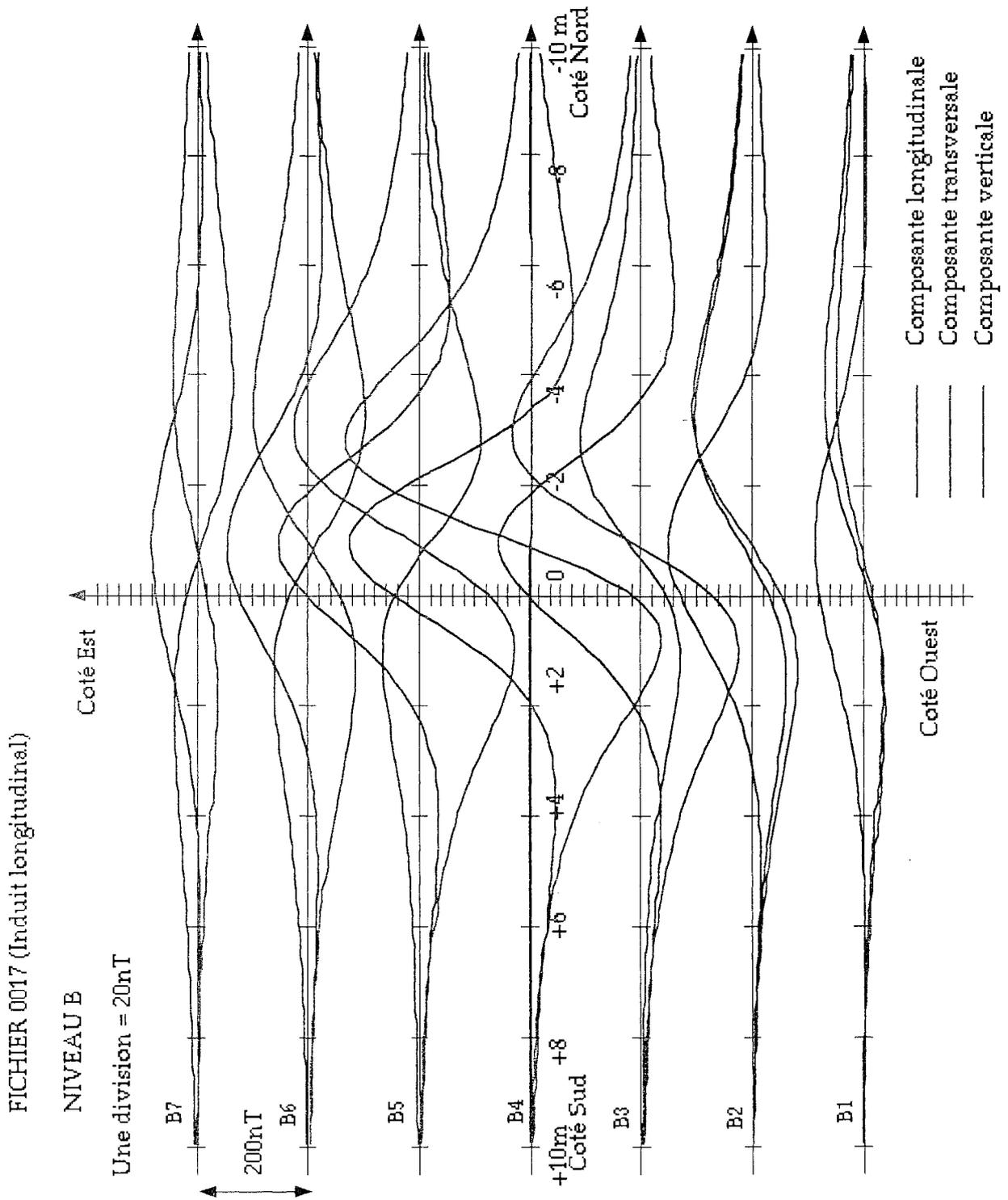


Figure 1.3 : Tracé des signatures magnétiques du niveau B (fichier 0017)

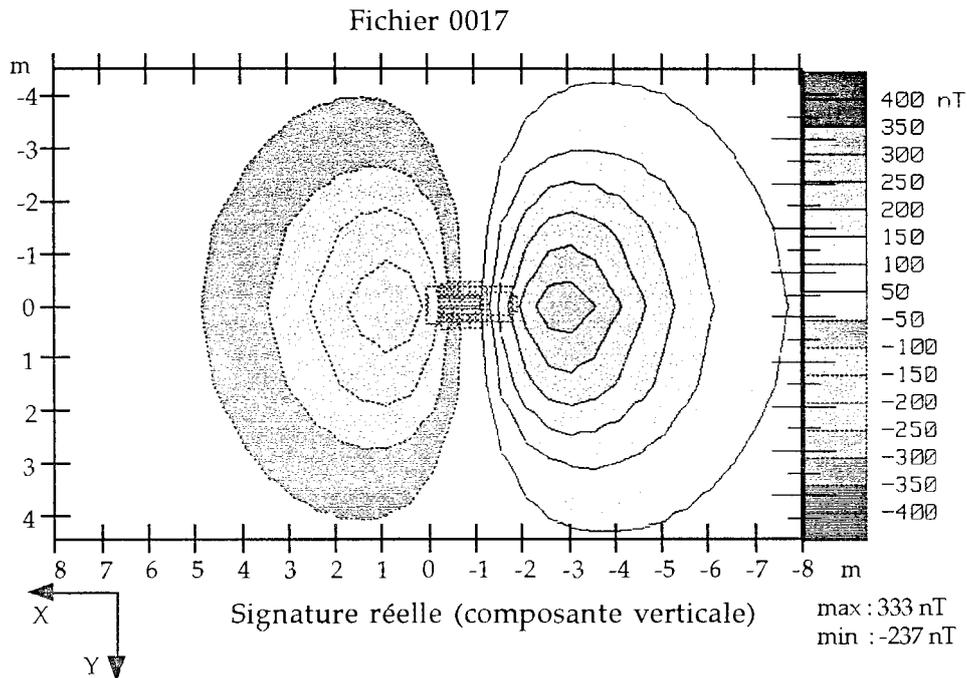


Figure 1.4 : Composante verticale du champ au niveau B

Nous disposons l'objet sur un chariot (bien entendu amagnétique) et nous tirons l'ensemble au dessus d'une ou plusieurs lignes de capteurs magnétiques situées dans une fosse, échelonnées sur plusieurs niveaux. Dans le cas de nos essais, nous avons enregistré les mesures sur quatre des cinq rangées disponibles.

Chaque capteur (de technologie "flux-gate") mesure les variations des trois composantes du vecteur champ magnétique au cours du temps, vis à vis de l'état initial (correspondant approximativement au champ en l'absence de la pièce mesurée). Comme la position du chariot est aussi enregistrée, nous ramenons après les mesures dans un repère lié à l'objet. En figure 1.3, nous pouvons voir un exemple de résultat correspondant aux sept capteurs du niveau B (deuxième niveau). Suivant l'usage, ces résultats peuvent aussi être représentés sous forme de courbes isoniveaux (figure 1.4, la composante verticale du niveau B pour la même mesure que la figure 1.3).

Pour les besoins particuliers des tests des algorithmes présentés dans ce document nous avons ajouté provisoirement un portique (représenté sur la figure 1.2). Il comporte 27 minicapteurs "flux-gates" triaxes (de 3 cm de côté et possédant des sondes de 10 mm de long). Ces capteurs mesurent le champ sur les côtés et le dessus du moteur. Les figures 1.5 et 1.6 représentent l'ensemble de mesure sous forme d'une photographie et d'un schéma (les silhouettes en pointillés sur le schéma correspondent aux modèles que nous utiliserons par la suite).

Enfin, toujours pour le même fichier de mesure, les figures 1.7 et 1.8 représentent la composante transversale du champ respectivement sur le plan supérieur

(capteurs H) et sur le plan vertical situé à l'Ouest (capteurs W).

Pour mesurer des navires, il n'est bien entendu pas question de les déplacer dans cette chaîne de mesure.

Dans ce cas, les capteurs sont immergés au fond de la mer (pas trop loin des côtes), et le navire se déplace au dessus, se guidant à l'aide d'amers. Le champ magnétique inducteur est partiellement contrôlé en faisant naviguer le navire sous plusieurs caps (au moins les quatre directions cardinales) et les effets recherchés extraits de la mesure par demi-sommes et demi-différences. La distance verticale entre le navire et l'alignement des capteurs est ajustée en prenant rendez-vous avec la marée.

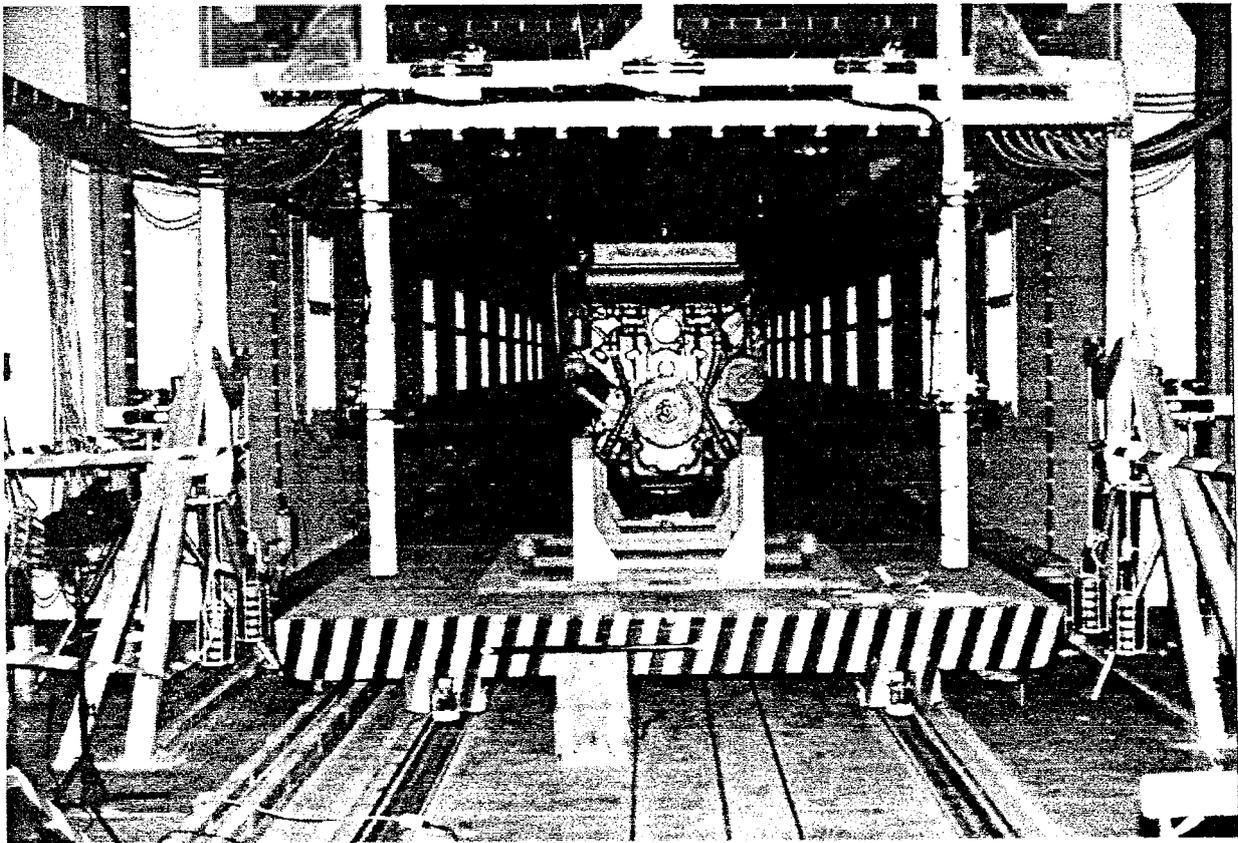


Figure 15 : Vue d'ensemble du moteur et de la chaîne de mesure

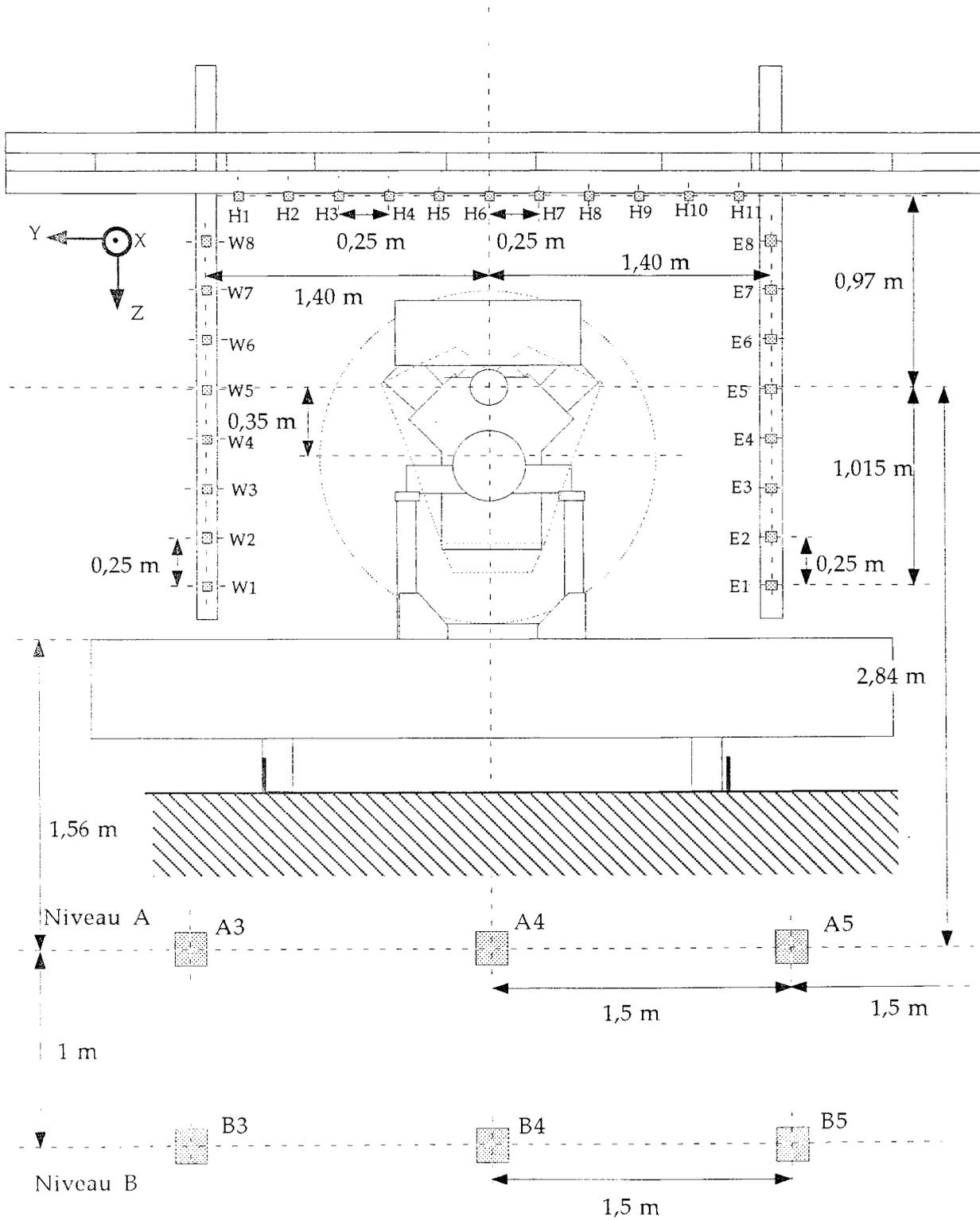


Figure 1.6 : Schéma des positions du portique porte-capteurs

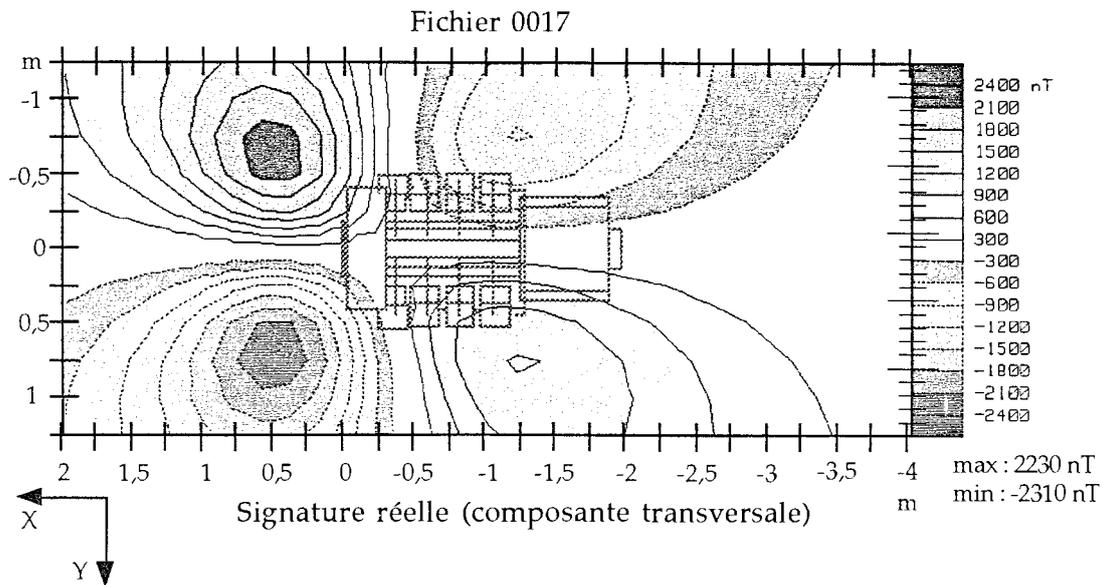


Figure 1.7 : Composante transversale du champ sur le niveau horizontal du portique (au dessus du moteur : capteurs H)

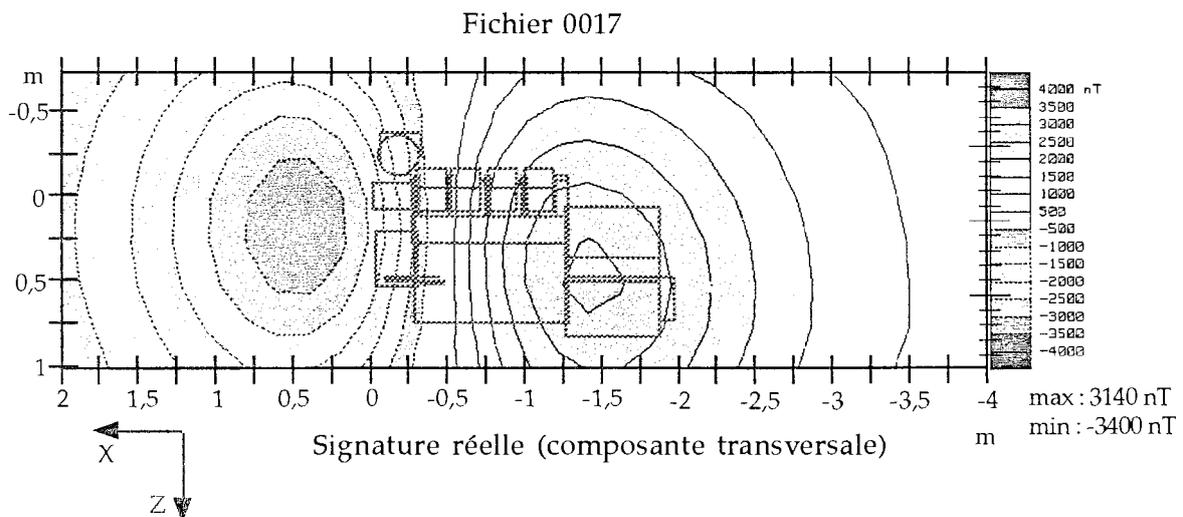


Figure 1.8 : Composante transversale du champ sur le plan vertical ouest du portique (capteur W)

## 1.2- Nouveaux besoins exprimés

### 1.2.a- Limitations de ce type de mesure

Ce type de mesure a de nombreux avantages et est pratiqué depuis très longtemps, mais il souffre aussi des défauts intrinsèques à ce genre de méthode.

Parmi les qualités, nous pouvons citer par exemple la simplicité de mise en œu-

vre et l'économie de capteurs magnétiques qu'elle entraîne grâce au déplacement de l'objet. Mais nous allons plutôt dresser la liste des inconvénients qui nous ont poussé à entreprendre les travaux exposés dans ce mémoire.

Le principal problème vient de la difficulté d'interprétation des courbes tracées et de l'obtention de conclusions quantitatives sur l'aimantation des pièces.

Par exemple, une caractéristique importante et recherchée de l'état magnétique est l'aimantation équivalente dipolaire. Elle correspond à l'amplitude du dipôle qui, remplaçant l'objet, ferait le même champ à très grande distance.

La méthode directe pour l'obtenir serait de mesurer le champ à grande distance et de remonter à l'aimantation en utilisant l'équation du dipôle. Cependant souvent cette méthode est très difficile à mettre en œuvre car les champs lointains sont d'amplitude très faible (l'amplitude des champs diminue avec le cube de la distance alors que l'aspect dipolaire n'augmente, nous le verrons, que linéairement avec la distance). La mesure de l'anomalie nécessite un signal d'amplitude assez forte qui n'est guère disponible qu'à une distance réduite de l'objet. Mais, en général, la complexité du champ à cette distance ne permet pas une analyse directe. Pour se persuader de la rapidité de l'amortissement, il suffit de comparer sur les figures 1.4 et 1.7, les amplitudes relatives des maxima des valeurs de champs (respectivement à 1m 30 et 3m 50 du centre du moteur).

La combinaison entre la translation de l'objet et la saisie temporelle du signal entraîne rapidement une autre limitation. En effet, dans le principe de la mesure, une hypothèse implicite importante est faite : l'aimantation de la pièce ne doit pas varier pendant le déplacement du chariot, sinon les cartes de champ dans le repère de l'objet deviennent fausses. A l'inverse, par cette méthode, il est impossible de mesurer l'évolution temporelle du champ magnétique.

En revanche, il serait possible de faire une mesure temporelle si l'objet était fixe par rapport aux capteurs. Mais dans ce cas, pour avoir la même quantité d'informations, le nombre de capteurs nécessaires serait nettement plus important voire rédhibitoire, car il faut en paver tout le volume de mesure et non plus seulement un plan générateur.

Nous voyons donc que si nous voulons faire la mesure de l'évolution temporelle des aimantations sans augmenter trop fortement les coûts, nous devons tirer le plus d'information possible des capteurs.

Enfin, il est très difficile de faire le parallèle entre deux pièces différentes ou entre deux mesures distinctes d'une même pièce, car nous sommes incapables de comparer deux signatures magnétiques faites dans des conditions différentes (en particulier à une distance objet/capteur variable).

### 1.2.b- Objectifs généraux d'une nouvelle méthode

L'objectif que nous nous sommes assignés est de trouver des méthodes générales qui permettent d'améliorer la caractérisation du magnétisme à partir de mesures de champs ou de gradients.

Nous venons de voir que la méthode actuelle est de puissance limitée et ne répond pas totalement à nos besoins. Par notre travail, nous allons chercher à dépasser ces contraintes.

Le but est d'obtenir à la fin du document une procédure qui nous permette d'accéder à ces nouvelles propriétés :

-obtenir une caractérisation "intrinsèque" du magnétisme de l'objet mesuré. Par ce qualificatif, nous indiquons que nous souhaitons que le résultat de l'analyse soit le plus possible indépendant des conditions de la mesure.

-être capable de comparer les états magnétiques de deux appareils distincts, même si leurs sources d'aimantation ou leur géométrie ne sont pas de même nature. Vis à vis de l'objectif précédent, nous cherchons en plus à ce que la représentation finale des résultats ne soit pas liée à l'objet mesuré.

-faire cette identification en "temps réel", c'est à dire dans un délai court et connu. Cette condition va nous permettre en particulier de pouvoir suivre l'évolution du magnétisme du corps étudié et même, le cas échéant, le contrôler.

### 1.2.c- Précisions sur les objectifs

Avant de poursuivre, nous allons revenir sur quelques notions évoquées ci-dessus. Commençons par préciser ce que nous entendons par "caractériser le magnétisme".

Il y a intrinsèquement deux façons de caractériser un phénomène. La première, qui est de loin la plus noble, consiste à connaître et identifier les sources réelles, c'est à dire dans notre problème, à retrouver l'aimantation de chaque partie de l'objet étudié.

Dans le cas d'une voiture par exemple, nous devrions pouvoir dire qu'elle est la contribution de la carrosserie par rapport à celle du moteur. Ce problème est très difficile et nous ne ferons que de l'effleurer. La seconde méthode est de se contenter d'être capable de définir les effets du phénomène, c'est à dire que nous considérons la mission accomplie si nous pouvons prédire le champ magnétique créé à l'extérieur de l'objet en tout point de l'espace (nous excluons cependant la zone proche de l'objet). C'est sur ce point que nous concentrerons nos efforts.

Présentons aussi quelques autres limitations que nous nous sommes imposés dans cette étude.

Ⓜ Tout d'abord, nous considérons que l'objet à mesurer est immobile ou tout au moins, que si il est mobile, sa trajectoire est connue ou mesurable.

Ⓜ Dans le même esprit, nous supposons que les sources magnétiques sont localisées dans les pièces étudiées et donc d'extension géométrique bien connue.

### 1.3- Solutions possibles

#### 1.3.a- Présentation de l'alternative

Si les mesures de l'induction magnétique en quelques points de l'espace ne nous suffisent pas, c'est que ce n'est pas exactement l'information souhaitée, mais cependant quelque chose qui y est très liée. Nous recherchons en fait l'aimantation des pièces, laquelle n'est pas directement mesurable. Il n'existe pas de capteur d'aimantation même si celle-ci est une grandeur physique réelle (contrairement, par exemple, au potentiel magnétique qui n'est que virtuel). La difficulté d'une mesure directe vient de sa qualité de grandeur extensive, répartie dans tout le volume d'une manière qui peut être extrêmement complexe, comme c'est le cas dans un matériau ferromagnétique.

Devant cette impossibilité de mesure directe, nous avons deux attitudes possibles :

-soit identifier les causes de l'aimantation (souvent un champ magnétique externe dans les cas qui nous concernent) et modéliser leur influence. Dans ce cas, la mesure de ces causes, qui est parfois facile, nous permettra d'estimer les aimantations. Nous aurons alors à résoudre un problème direct.

-soit mesurer les conséquences de l'aimantation (l'induction magnétique) et remonter à la source. Nous aurons alors un problème inverse à traiter.

Chacune des deux démarches a ses contraintes.

#### 1.3.b- Problème direct

Le problème direct pêche souvent par la mauvaise connaissance que l'on a des caractéristiques physiques qui interviennent dans le modèle ou tout simplement par la complexité du modèle. Ce manque d'information est souvent source d'erreurs. De plus ce type de méthode ne permet pas, en général, un contrôle du résultat. En conséquence, le calcul peut parfois diverger par rapport à la réalité.

Il peut cependant être avantageux dans certains cas. Nous allons présenter un exemple.

### Cas d'un solénoïde parcouru par un courant

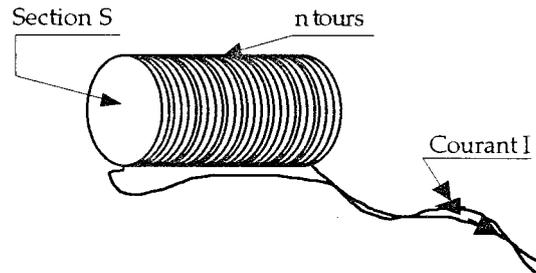


Figure 1.9 : Solénoïde

C'est une situation assez simple. Le solénoïde a une géométrie régulière assez facile à mesurer. Son aimantation dipolaire est liée au courant électrique qui le traverse par la loi bien connue :

$$M = nIS \quad (1.1)$$

Donc à partir d'une mesure du courant  $I$  et de la géométrie de l'objet ( $n$  et  $S$ ), nous trouvons facilement l'aimantation ainsi que l'induction magnétique en tout point de l'espace (à l'exception du voisinage direct des conducteurs qui reste un calcul non trivial), et par là, nous sommes capables de répondre à tous les points du problème présenté dans le premier paragraphe.

Notre démarche peut être alors résumée dans le schéma suivant :

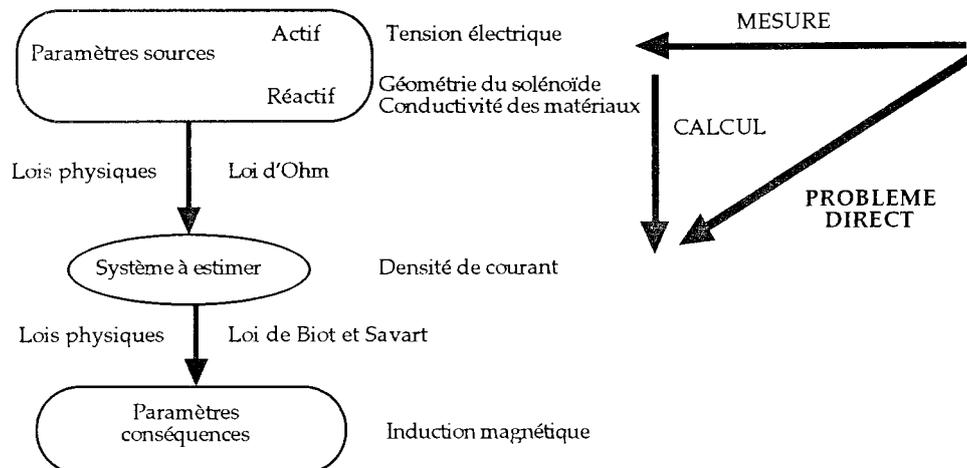


Figure 1.10 : Schéma du problème direct

### 1.3.c- Problème inverse

Bien entendu, il existe de nombreuses situations où cette démarche n'est pas réaliste. Prenons un autre exemple, à partir d'un objet de structure pourtant très simple :

#### Cas d'un tournevis

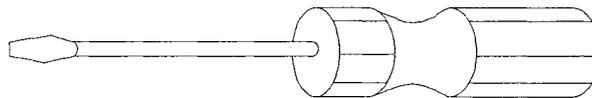


Figure 1.11 : Tournevis

Le tournevis est un objet simple mais souvent ferromagnétique. Il présente donc une aimantation qui dépend de ses paramètres physiques (dont sa perméabilité magnétique) et du champ inducteur. Là, les difficultés commencent.

La perméabilité est une fonction très complexe qui est non seulement non linéaire par rapport au champ inducteur mais qui, en plus, présente un fort phénomène d'hystérésis. C'est à dire que si nous souhaitons connaître l'aimantation du tournevis, il faudrait connaître tout son passé avec non seulement les champs inducteurs dans lesquels il a été plongé mais aussi les contraintes mécaniques et les températures qu'il a subi. Ce, depuis le dernier événement qui a effacé ses états magnétiques (cela peut remonter à la fusion avant la coulée de l'acier composant le tournevis).

Il est clair que dans le cas du tournevis, le problème direct est très complexe et que nous devons nous tourner vers la résolution d'un problème inverse. C'est à dire retrouver l'aimantation du tournevis à partir de la mesure des champs qu'il génère.

Le schéma de raisonnement est alors celui de la figure 1.12.

Le problème inverse présente aussi des difficultés. Nous rappelons que le but est d'identifier les causes à partir des effets.

Physiquement, il existe une fonction qui lie les causes aux effets. Il s'agit donc de modéliser cette fonction (ce qui est assez simple dans notre cas puis qu'il s'agit de l'équation du champ d'un dipôle magnétique intégré sur le volume de l'objet) et d'en trouver la fonction inverse pour estimer l'aimantation à partir du champ mesuré.

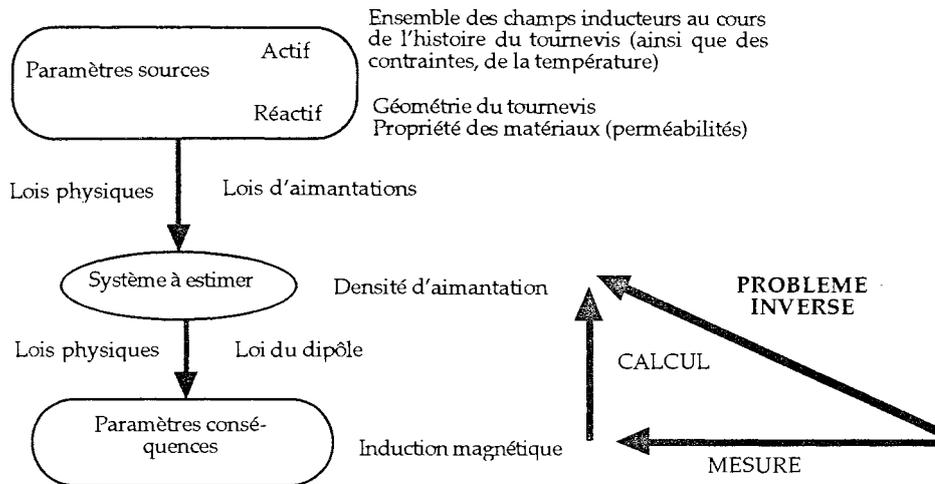


Figure 1.12 : Schéma du problème inverse

L'obstacle majeur vient du fait qu'en règle générale, la fonction n'est pas injective. C'est à dire que si nous supposons connu le champ magnétique en quelques points de l'espace, il existe plusieurs distributions d'aimantation qui peuvent expliquer ce champ, une seule d'entre elles étant réelle.

Cette non inversibilité peut prendre des proportions importantes. Dans la géométrie suivante où les numéros 1 et 2 représentent des capteurs de mesure des trois composantes vectorielles de l'induction magnétique et le rectangle la pièce à mesurer, nous pouvons expliquer les champs mesurés au moins de deux manières très différentes avec des dipôles ponctuels situés dans la pièce (les aimantations trouvées sont de directions opposées !) alors que nous avons 6 voies de mesures (deux capteurs mesurant les trois composantes du vecteur champ magnétique).

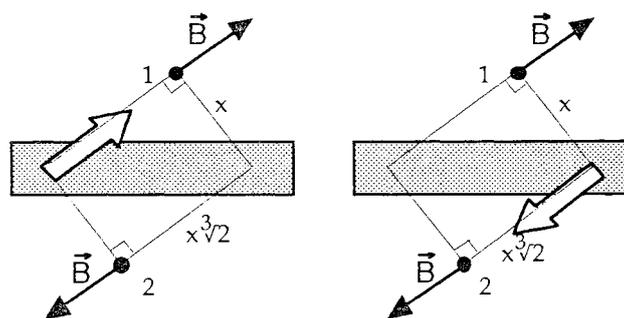


Figure 1.13 : multiplicité des sources créant un même champ

Nous verrons par la suite que cette non inversibilité prend plusieurs formes plus ou moins gênantes.

## 1.4- Synthèse des méthodes employées

### 1.4.a- Problèmes similaires

Notre première action a été de s'enquérir de la façon de procéder non seulement des personnes travaillant dans le même secteur d'activité que nous et confrontées à des difficultés similaires mais aussi des autres corps de métier traitant de mesures magnétiques.

Nous avons pu recenser un certain nombre de problèmes connexes dans plusieurs domaines d'activités. Sans avoir la volonté d'être exhaustif, présentons-en quand même quelques uns.

#### Militaire

Dans l'activité militaire, les mesures de champs magnétiques faibles sont utilisées dans deux grands domaines, la guerre des mines et la détection sous-marine. Dans les deux cas, le principe est le même car on cherche à détecter et parfois localiser un navire (ou un sous-marin) par son indiscretion magnétique.

Toujours dans le domaine militaire, nous mentionnerons aussi la recherche de mines terrestres par des systèmes de "poêle à frire".

#### Médecine

La médecine utilise depuis assez longtemps maintenant les électrocardiogrammes pour contrôler l'activité cardiaque. Pour affiner les diagnostics, la recherche médicale s'emploie à trouver la localisation et caractériser l'amplitude des courants électriques sources de la mesure à partir d'un réseau d'électrodes.

Les progrès spectaculaires obtenus dans la mesure des champs magnétiques extrêmement faibles, permis par la technologie de capteurs SQUID, ont autorisé le développement d'une nouvelle activité : la magnétoencéphalographie. A partir d'un réseau de micro-capteurs sensibles au gradient du champ magnétique répartis autour de la boîte crânienne du patient, le médecin tente de localiser les courants ioniques et leur évolution dans l'espace et dans le temps.

#### Géophysique

Les géophysiciens ont pour métier d'analyser un milieu particulièrement opaque et difficile à pénétrer : le sol. Ils n'ont pratiquement à leur disposition que des méthodes indirectes (à l'exception des forages de puits qui restent coûteux et ponctuels).

De par cette spécificité, ils ont su acquérir une grande expérience des problèmes inverses et garder dans ce secteur une bonne activité de recherche.

Dans chaque cas, ils analysent la perturbation créée par le sol et ses hétérogénéités sur une grandeur physique. Celle-ci peut être provoquée artificiellement (systèmes actifs), ou être naturelle (systèmes passifs). Parmi les méthodes utilisées résolvant un problème similaire au nôtre, nous pouvons mentionner la magnétostatique et la gravimétrie.

#### Contrôle non destructif

L'analyse des matériaux en métallurgie est aussi confrontée à des problèmes similaires quand il est demandé de rechercher des micro-fissures internes dans une pièce mécanique sans détruire celle-ci. Comme dans le cas de la géophysique, on recherche les hétérogénéités des matériaux à partir de la réaction de celui-ci à une grandeur physique.

Si le matériau est ferromagnétique (aciers), une méthode utilisée est de fortement l'aimanter, puis de rechercher toutes les inhomogénéités du magnétisme avec des sondes à effet Hall qui balayent la surface.

Si le matériau est fortement conducteur (alliages légers), la recherche des défauts est effectuée à partir de la mesure des courants de Foucault, provoqués dans la matière par un fort champ électromagnétique extérieur.

Les opérateurs cherchent en premier lieu à détecter la présence ou non des failles ainsi que leur position, mais ils tentent aussi de compléter l'information en déterminant la géométrie de celles-ci.

#### Fusion nucléaire

Une des technologies utilisées pour provoquer la fusion contrôlée de la matière est le Tokamac. Mais dans ce cadre, les ingénieurs doivent maintenir un confinement élevé d'un plasma, à partir de forces de Laplace contrôlées en régulant des courants électriques.

La température du plasma est telle que sa mesure ne peut se faire qu'à distance. C'est donc les données de flux-mètres disposés autour de la cavité qui permettent de remonter par méthode inverse à la position du plasma et de stabiliser celui-ci.

#### **1.4.b- Algorithmes d'inversion**

Le but de l'inversion est de trouver la ou les sources du type choisi, présentes

dans le domaine de définition et qui soient compatibles avec la mesure.

Toutes les méthodes employées dans les domaines cités dans le paragraphe précédent, utilisent une ou plusieurs projections pour trouver les sources. Par contre, elles diffèrent sur la façon de choisir la solution parmi toutes les configurations qui génèrent la même mesure.

En règle générale, les sources cherchées sont caractérisées par une infinité de valeurs alors que la mesure ne se compose que d'un nombre fini de données. Il en résulte que la relation liant les deux grandeurs n'est pas inversible.

Il faut donc d'une manière ou d'une autre choisir une solution parmi l'ensemble possible.

Nous avons regroupé les critères de choix en trois familles. Cette séparation est assez arbitraire car certaines méthodes peuvent être l'aboutissement de plusieurs démarches à la fois. Il faut plus considérer ces trois ensembles comme trois démarches différentes, conduisant à des solutions parfois similaires.

Présentons les, agrémentées à chaque fois d'exemples pris dans la littérature :

#### Recherche d'une solution paramétrée

Nous avons souvent une idée a priori de la solution recherchée. Cette information permet de définir un sous-ensemble de l'ensemble des solutions possibles. Si ce sous-ensemble est suffisamment restreint et opportun, on passe d'un problème sous-dimensionné à un problème bien dimensionné voire surdimensionné et donc pouvant être résolu par des moyens classiques.

Par exemple, les géophysiciens ont souvent une idée préconçue de la forme des solutions qu'ils cherchent en procédant à des sondages préliminaires. Plutôt que de rechercher une distribution quelconque de densité de sources magnétiques pour interpréter la mesure d'un champ magnétique, ils vont chercher des solutions correspondant à des formes simples (souvent polyhédriques) de zones homogènes qui sont assez représentatives de failles, de pendages ou d'intrusions. La recherche de ces corps simples se fait souvent par déconvolution du signal [WANG], [KEATING] en utilisant les propriétés eulériennes du champ magnétique. Nous trouvons la même méthode dans un cas de contrôle non destructif où la forme d'une faille est recherchée sous forme d'une géométrie simple [HOOLE].

#### Recherche d'une classe de solutions

Au lieu de chercher à réduire l'ensemble des sources à partir d'une forme a priori, on préfère plutôt étudier quelles sont les propriétés observables des sources et restructurer l'espace des solutions pour ne déduire de la mesure que la classe d'appartenance de la solution, et non une solution parmi l'ensemble possible.

Une méthode de ce type, très souvent utilisée, est l'utilisation des harmoniques sphériques. Les classes observables sont alors des multipôles de degrés divers, situés en un point du domaine de définition. La contribution de chaque terme est calculée de manière directe par transformée de Fourier de signal (voir [ROY] dans le domaine spatial, [SALIOU] dans le secteur militaire ou encore [GESELOWITZ] pour l'application médicale).

#### Recherche d'une solution extrême

Parmi l'ensemble des solutions possibles, nous pouvons en choisir une "extrême" au sens d'un critère à définir en fonction du problème à résoudre. Cela part du principe que les solutions extrêmes sont souvent des fonctions remarquables et caractéristiques.

Parmi les critères choisis, on peut trouver ceux-ci [PRESS] :

- recherche de la solution de norme minimale.
- recherche de la solution la plus régulière.
- recherche de la solution la plus stable.
- recherche de la solution la plus vraisemblable.
- recherche de la solution la plus compacte.

D'ailleurs, ces critères amènent généralement des solutions identiques. Souvent, en effet, la solution la plus stable est à la fois celle de norme minimale et la plus régulière.

Cette approche peut être facilement combinée avec les deux autres, dès que celles-ci ne garantissent pas l'inversibilité de la fonction. Elle est aussi très populaire car elle se réduit aux moindres carrés pondérés, dans les problèmes linéaires.

### **1.5- Propriétés des sources rencontrées**

Avant d'entreprendre, à partir du chapitre suivant, la modélisation mathématique du problème, il est intéressant d'avoir un bref aperçu du type de sources que nous sommes susceptibles de rencontrer dans la mesure d'objets "courants".

Dans les objets industriels, nous nous trouvons en face de deux grandes sources de magnétisme statique : les matériaux ferromagnétiques et les courants électriques industriels.

### 1.5.a- Matériaux ferromagnétiques

Ce sont (et de loin) les perturbations les plus courantes que nous pouvons rencontrer. En effet, le fer est à la fois probablement l'un des corps les plus communs sur terre et un matériau aux qualités mécaniques très appréciées. La plupart des objets de la vie de tous les jours contient du fer ou de l'acier (un de ses alliages), du plus petit (épingle, agrafe,...) au plus grand (immeuble en béton armé). Il est à noter cependant que le fer n'est pas le seul corps pur ferromagnétique (le nickel et le cobalt le sont aussi) et que ses alliages ne sont pas tous ferromagnétiques (en particulier, beaucoup d'inox ne sont pas ferromagnétiques). A titre anecdotique, il existe aussi des alliages ferromagnétiques dont aucun des corps purs le constituant ne l'est.

Ces sources ne créent pas des champs de forme quelconque mais ils restent extrêmement complexes à modéliser.

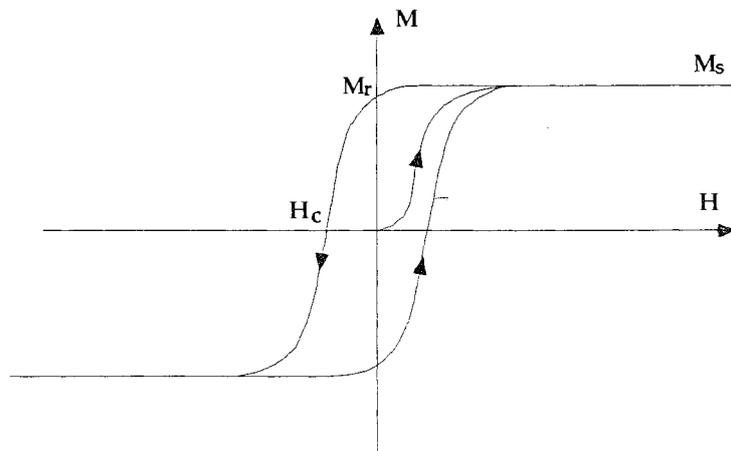


figure 1.14 : cycle d'hystérésis

Nous allons essayer de résumer très brièvement les caractéristiques du ferromagnétisme.

Les matériaux possédant cette propriété peuvent acquérir une aimantation intense dès qu'on les plonge dans un champ magnétique. L'aimantation ainsi acquise va générer une induction magnétique qui va s'ajouter au champ d'excitation. Si on supprime le champ, il ne va pas perdre la totalité de son aimantation. Il possède en quelque sorte une mémoire des phénomènes qu'il subit, ce qui va rendre son comportement non linéaire.

Pour caractériser le ferromagnétisme, généralement nous traçons une courbe représentant l'aimantation  $\vec{M}$  ou l'induction  $\vec{B}$  générée par cette aimantation en fonction du champ d'excitation  $\vec{H}$  au cours du temps. Si ce champ  $\vec{H}$  est cyclique, nous obtenons en général une courbe du type de la figure 1.14.

L'aimantation  $\vec{M}_r$  qui est l'aimantation résiduelle si on annule l'excitation  $\vec{H}$ , est appelée "aimantation rémanente", le champ  $-\vec{H}_c$  qui est le champ à appliquer pour avoir une aimantation nulle après une saturation du matériau est le "champ coercitif".

Autour de ce type de courbe, on définit aussi d'autres grandeurs, en particulier les différentes perméabilités que sont les pentes des courbes d'hystérésis (équilibre, réversible, initiale, anhystérétique,...).

La représentation ci dessus est un cas typique. Les différents matériaux peuvent avoir pour les mêmes cycles  $\vec{H}$  des courbes de formes différentes. De plus, il faut être conscient que cette courbe n'est qu'une représentation en deux dimensions d'un phénomène qui en comporte six : trois composantes d'aimantation et trois composantes de champ (sans compter le temps et l'histoire du matériau qui multiplie les dimensions du phénomène à l'infini...).

En schématisant à l'extrême, on peut trouver deux grandes familles de comportement pour les matériaux : le ferromagnétisme dur et le ferromagnétisme doux.

### 1.5.b- Courants électriques

Les courants électriques sont aussi sources d'un champ magnétique observable pendant la mesure de machines. On distinguera ici deux catégories de courants, suivant qu'il s'agit de courants naturels ou non.

#### Courants d'origine industrielle

Les réseaux courants continus créent bien entendu un champ magnétique statique proportionnel à la surface embrassée par les boucles qu'ils forment. Mais les réseaux alternatifs peuvent aussi créer des champs statiques ou très basses fréquences par l'intermédiaire de comportements non linéaires de certains appareils. Par exemple, les diodes ou les thyristors vont créer des portions de réseau à moyenne non nulle et un moteur asynchrone peut créer des fluctuations à la fréquence de glissement du moteur.

De plus, il est assez fréquent d'associer les boucles de courants avec les matériaux ferromagnétiques soit pour amplifier leurs effets (moteurs électriques), soit pour coupler deux circuits (transformateur).

Ces champs auront des propriétés différentes des matériaux ferromagnétiques :

-ils vont être très corrélés aux intensités débitées dans les appareils et donc à leur mode de fonctionnement. Le calcul direct est plutôt plus facile.

-sauf cas particuliers, ils n'ont pas d'effet d'hystérésis. Les rares fois où les courants interagissent avec des matériaux magnétiques, ce sont dans des appareillages électriques (moteurs, transformateurs, ...). Dans ces cas, les champs intenses et les aciers très doux utilisés rendent négligeables les dispersions (les cycles seront toujours parcourus de la même façon).

#### Courants d'origine "naturelle"

Par "naturelle", nous entendons des courants qui sont générés par des sources internes au corps étudié et qui ne sont en général pas souhaités. Se trouvent dans ce cas, en particulier, les courants de Foucault et les courants de corrosion.

Les courants de Foucault sont des courants qui sont créés dans les milieux conducteurs quand ceux-ci sont plongés dans un champ inducteur instationnaire. Ils sont donc présents soit quand le champ magnétique varie, soit quand l'objet est mobile. Par nature, les champs créés par ces courants ne sont pas statiques, mais ils peuvent apparaître comme tels quand l'objet est mobile et l'observateur fixe par rapport au champ inducteur. De plus ils peuvent être non négligeables même à des fréquences très basses.

Pour pouvoir les modéliser, il faut connaître la conductivité des matériaux et la variation de l'induction dans un repère lié à l'objet. Ils devraient être accessibles au problème direct, au moins dans des cas simples, car ils ne présentent pas de phénomènes non linéaires.

D'autres courants électriques pouvant perturber le système sont les courants de corrosion. Ceux-ci sont créés quand des métaux de natures différentes sont à la fois en contact électrique direct et par l'intermédiaire d'un électrolyte. Alors l'un des métaux s'oxyde et un courant électrique s'établit. Souvent non désiré, il est là aussi difficile de connaître la distribution des courants dans le volume car elle dépend des conductivités relatives des corps ainsi que des couples redox.

#### **1.5.c- Aimantations mesurées dans cette étude**

Bien entendu, le moteur que nous avons testé n'a pas fonctionné pendant nos essais, nous n'avons donc enregistré que des sources d'origine ferromagnétique. Cependant pour avoir plusieurs cas test et pouvoir apprécier les comportements des algorithmes sur une bonne diversité de sources magnétiques, nous avons artificiellement aimanté et désaimanté le moteur dans plusieurs directions.

Tout d'abord, l'aimantation du moteur va réagir au champ externe auquel il est soumis (en général le champ magnétique terrestre). Comme le champ magnétique terrestre est faible par rapport aux valeurs de champ caractérisant les courbes d'hystérésis, en première approximation, la réaction de l'objet va être linéaire et réversible. Le coefficient de proportionnalité (appelé perméabilité réversible) est

presque toujours très proche de la perméabilité initiale. L'aimantation acquise par ce champ est appelée "aimantation induite" et elle est souvent de même direction que le champ externe appelé "champ inducteur".

Comme notre système de mesure permettait de simuler un champ magnétique de direction quelconque, nous avons fait des essais dans plusieurs situations.

En appliquant un champ magnétique extérieur fort puis en le ramenant à zéro, nous pouvons changer de manière plus durable l'aimantation de l'objet en amenant son point de repos sur la courbe d'hystérésis entre plus et moins l'aimantation rémanente.

Il existe plusieurs méthodes pour appliquer ce champ, qui se caractérisent par une position et une stabilité du point de repos variables.

Nous avons en particulier appliqué un champ inducteur très fort dans une direction et ramené celui-ci à zéro (qui est la procédure la plus simple pour aimanter un objet). Cette méthode sera appelée "impulsion".

Mais nous avons aussi effectué ce que nous appelons des "aimantations d'équilibre". Cette méthode qui permet en théorie d'avoir une aimantation très stable, consiste en l'application de deux champs externes, l'un constant et dans la direction dans laquelle on souhaite aimanter l'objet, l'autre, très fort et de la forme d'une sinusoïde amortie.

Comme, il fallait faire une sélection, nous avons choisi de présenter les résultats des algorithmes pour 7 mesures, correspondant au tableau suivant :

Numéro de la mesure	Champ inducteur pendant la mesure	Type d'aimantation du moteur	Direction d'aimantation
0017	-X : 40000 nT (-Longitudinal)	Equilibre	0 (Désaimantation)
0031	-Z : 30000 nT (-Vertical)	Equilibre	0 (Désaimantation)
0033	+Y : 40000 nT (+Transversal)	Equilibre	0 (Désaimantation)
0079	<800 nT (Transversal)	Impulsion	+X (+Longitudinal)
0089	<800 nT (Transversal)	Equilibre	+Z (+Vertical)
0099	<800 nT (Transversal)	Impulsion	-Y (-Transversal)
0154	<800 nT (Transversal)	Impulsion	-Z (-Vertical)

### 1.5.d- Hypothèses retenues par la suite

Le paragraphe précédent nous a donné un très rapide tour d'horizon des sources de champ que nous rencontrons dans la mesure d'objets.

L'intérêt de cette revue est de pouvoir choisir au mieux les modèles que nous emploierons pour nos algorithmes. Ce modèle devra être capable de reproduire ces différentes sources de manière économique et efficace.

De plus, nous avons vu que certaines méthodes d'inversion demandent des informations a priori sur les sources. Nous devons maintenant être capable de savoir quel type de calcul direct est faisable.

Nous ferons par la suite les hypothèses minimales suivantes compatibles avec les types de sources recensés.

Tout d'abord, nous allons faire quelques postulats sur l'information disponible sur les sources. Nous souhaitons avoir une méthode qui soit utilisable dans le cas de mesures opérationnelles et non uniquement dans des conditions de laboratoire. Ainsi toute l'information utilisée dans la modélisation a priori doit être facilement disponible.

⊕ Nous supposerons que nous connaîtrons les dimensions approximatives des objets mesurés ainsi qu'éventuellement les grandes lignes des propriétés physiques des pièces les constituant et de leur disposition. Cela revient essentiellement à être capable de lire un plan et de savoir si les matériaux se classent parmi les catégories : isolant, conducteur, ferromagnétique doux, ferromagnétique dur.

⊕ Le deuxième postulat est que nous sommes capables de définir un ensemble discret de volumes finis de sources, autrement dit que les sources sont localisées dans une zone connue.

Nous allons faire aussi des hypothèses sur le comportement mathématique des distributions de sources pour garantir la validité des développements faits et la convergence des séries que nous aurons à manipuler.

⊕ Les distributions de sources seront non seulement d'énergie finie mais aussi "assez régulières". Nous pourrions introduire les espaces de Sobolev et imposer aux fonctions de distribution de sources d'être de carré sommable et que toutes leurs dérivées successives existent et soient de carrés sommables. Mais nous nous contenterons de dire que les termes de fluctuation croissante des fonctions interviennent de manière décroissante dans la solution.



## 2.- Harmoniques sphériques

### 2.1- Propriétés recherchées du modèle mathématique

#### 2.1.a- Sources élémentaires

Comme nous l'avons déjà dit, nous ne pouvons pas retrouver les sources magnétiques à partir de la mesure sans précaution. Nous devons en particulier séparer dans les équations la partie "observable" des sources (au plus un nombre fini de paramètres) de la partie non observable (un nombre infini d'ordre 3, c'est à dire un espace tridimensionnel).

La théorie du magnétisme a isolé une origine unique à tous les champs magnétiques : le déplacement de charges électriques. Il peut être macroscopique (courant électrique dans un conducteur par exemple) ou alors microscopique et même interne aux atomes (ferromagnétisme en particulier).

Dans le cas des distributions macroscopiques, nous définissons un vecteur densité de courants volumiques  $\vec{j}$  pour caractériser les sources. Quand ces courants s'établissent dans l'atome, ce vecteur va varier avec une échelle des distances très petite et il est plus pratique de définir une grandeur appelée densité volumique d'aimantation  $\vec{m}$  qui est représentative de l'effet des courants atomiques à l'échelle macroscopique.

Pour tous les objets créant un champ magnétique, nous pouvons donc représenter les sources par deux distributions de champs vectoriels, la distribution de vecteur aimantation  $\vec{m}$  (modélisant les courants microscopiques à l'intérieur de l'objet) et la distribution de courants volumiques  $\vec{j}$  (modélisant les courants macroscopiques). Ce sont deux distributions volumiques de vecteurs tridimensionnels, d'où 6 paramètres dont 5 indépendants si nous introduisons la condition de continuité pour les courants.

$$\nabla \cdot \vec{j}(M) = 0 \quad \text{div } \vec{j} = 0 \quad (2.1)$$

L'induction magnétique en tout point P de l'espace (intérieur et extérieur de l'objet) vérifie alors l'équation intégrale :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{M \in \Omega_i} \left( \vec{j}(M) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\Omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{M \in \Omega_i} \left( 3 \frac{(\vec{m}(M) \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}(M)}{r^3} \right) d\Omega$$

*Calculer les sources*      *Brucorac 2/10*      *diverit courants magnétiques*      *noter*

ainsi que les équations locales :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m} \right) &= \vec{j} \end{aligned}$$

(2.3)

La grandeur  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m}$  est notée  $\vec{H}$  (vecteur champ magnétique) alors que  $\vec{B}$  est appelé induction magnétique ou densité de flux magnétique.

**[Rq]** les noms "champ magnétique" pour  $\vec{H}$  et "induction magnétique" pour  $\vec{B}$  sont les noms officiels recommandés par la Commission Electrotechnique Internationale. Cependant on trouve encore couramment les noms de champ magnétique pour  $\vec{B}$  et d'excitation magnétique pour  $\vec{H}$ . Les deux entités correspondent à des champs de vecteurs, nous utiliserons donc champ magnétique indifféremment pour l'un et l'autre, mais en veillant à ne pas introduire d'ambiguïtés.

**2.1.b- Indiscernabilité des sources**

La séparation entre les courants microscopiques et macroscopiques que nous avons faite dans le paragraphe précédent est arbitraire. Rien que pour cette raison, nous avons une indétermination sur la répartition des sources.

En effet, pour les courants microscopiques, nous avons la relation :

$$\vec{j} = \nabla \wedge \vec{m}$$

(2.4)

Nous ne pourrons pas séparer les effets. Donc toute distribution de dipôles magnétiques possède une distribution de courants ayant un effet analogue. De même, pour une distribution de courants donnée, il y a plusieurs distributions de dipôles normaux qui créent le même champ en tout point. Il suffit que la relation précédente soit vérifiée.

Ainsi par exemple, une boucle de courant  $\vec{j}$  fera le même champ en tout point de l'espace qu'une densité surfacique constante  $\vec{\tau}$  de dipôles magnétiques normaux à la surface qui épouserait la boucle de courant et qui vérifierait la relation sur les amplitudes :

$$j = \tau \quad (2.5)$$

Nous ne pourrions séparer ces différentes sources que si nous avons suffisamment d'informations sur la structure de la pièce.

Nous pouvons aller plus loin dans l'étude des sources indiscernables en considérant les propriétés importantes des solutions de l'équation de Laplace.

### 2.1.c- Propriétés des champs magnétiques

#### Potentiel scalaire

Pour la suite du raisonnement, il est utile d'introduire une nouvelle grandeur, le potentiel scalaire.

Supposons que nous avons une représentation avec une distribution de dipôles magnétiques mais sans courant volumique. Dans ce cas, dans tout le domaine, nous avons la relation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{0} \quad (2.6)$$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour que dans tout l'espace, on puisse définir une grandeur  $V$  (à une constante près) telle que :

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}V \quad (2.7)$$

De plus, dans tout sous espace où il n'y a pas de densité d'aimantation (par exemple  $\Omega_e$ ), nous avons :

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla}V \quad (A.53)$$

Comme la divergence de  $\vec{B}$  est nulle partout,  $V$  doit obéir dans tout espace sans source à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \quad (2.8)$$

### Remarques sur la validité de V

Nous nous sommes volontairement limités à un espace sans courant électrique, mais uniquement avec une densité de dipôles. Dans le cas où nous avons un courant électrique, nous pouvons toujours passer par une distribution de dipôles magnétiques équivalents. Alors, nous nous heurtons à une difficulté car si pour une distribution de courants  $\vec{j}$ , nous prenons une répartition de dipôles magnétiques équivalents  $\vec{m}$ , nous aurons V qui obéira dans tout l'espace à l'équation :

$$\Delta V = \nabla \cdot \vec{m} \quad (2.9)$$

Or même si les courants sont confinés dans  $\Omega_i$ , les distributions équivalentes  $\vec{m}$  ne le sont pas forcément d'où V n'est plus obligatoirement une fonction harmonique dans  $\Omega_e$ .

**Rq** On démontre, [DURAND2], que nous pouvons avoir une densité  $\vec{m}$  équivalente à  $\vec{j}$  qui est définie dans le même espace  $\Omega_i$  que  $\vec{j}$  si l'ensemble  $\Omega_i$  est une réunion d'ensembles simplement connexes (un ensemble est simplement connexe si il n'est pas troué). Dans ce cas, V vérifie à l'extérieur de  $\Omega_i$  l'équation de Laplace.

### Résolution de l'équation de Laplace

De nombreux mathématiciens et physiciens ont étudié l'ensemble des solutions de cette équation. Nous allons utiliser quelques uns de leurs résultats.

Dans le cas où  $\Omega_e$  est l'espace tout entier, la solution de l'équation de Laplace est  $V(P) = \vec{a} \cdot \vec{OP} + b$  en tout point P, ce qui correspond à un champ magnétique constant.  $\vec{a}$  et b dépendent alors des conditions à l'infini. Si nous supposons aucune source à l'infini, le champ magnétique est nul.

Si le volume  $\Omega_i$  n'est pas vide, la solution V dépend des conditions aux limites à l'infini et sur la surface  $\Sigma$  [EUVRARD]. Ainsi, si nous fixons le potentiel sur  $\Sigma$ , et si nous assurons l'absence de sources à l'infini, nous pouvons déterminer le potentiel en tout point de l'espace  $\Omega_e$  où l'équation de Laplace est vérifiée.

Alors qu'au début de ce chapitre, nous faisons dépendre le champ magnétique de deux distributions volumiques de champs vectoriels, nous voyons qu'il est réductible au gradient d'un champ scalaire qui est entièrement déterminé par sa valeur sur la surface de séparation entre  $\Omega_e$  et  $\Omega_i$  notée  $\Sigma$ . Nous sommes donc passés d'une densité volumique d'une grandeur à 5 composantes, à la densité

surfacique d'une grandeur scalaire.

Nous allons voir que nous pouvons encore réduire le nombre de paramètres indépendants.

## 2.2- Modélisation par harmoniques sphériques

### 2.2.a- Définition

Un des développements de l'équation de Laplace est intéressant [DURAND1]. Dans certaines classes de référentiel, l'équation de Laplace est à variables séparables. C'est à dire que nous avons un repère (tridimensionnel forcément) déterminé par les trois paramètres  $(r, \theta, \varphi)$  où le potentiel s'exprime sous la forme :

$$V = V_1(r)V_2(\theta)V_3(\varphi) \quad (2.10)$$

Le repère sphérique fait partie de cette classe. Contentons nous d'y exprimer la forme générale du potentiel scalaire issu de sources magnétiques localisées près de l'origine.

Le principe général est de partir de la formule du potentiel scalaire et de faire un développement limité de l'inverse de la distance. Le détail de la démonstration se trouve dans l'annexe B.1.a.

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M) \cdot \vec{\nabla}_M \left( r_0^n Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \right) \right\rangle d\Omega \quad (B.9)$$

en notant  $Y_n^m$  les harmoniques sphériques définis par :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\varphi) & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} \sin(m\varphi) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (B.6)$$

$\square$  Les fonctions  $P_n^m$  sont des fonctions spéciales connues sous le nom de fonctions de Legendre de première espèce [ROBIN]. La terminologie des termes  $n$  et  $m$  varie selon les auteurs. [ABRAMOWITZ] appelle  $n$ , le degré de la fonction et  $m$ , l'ordre. Nous suivrons ces indications.

### 2.2.b- Précision sur les notations utilisées pour les harmoniques sphériques

Il existe dans la littérature plusieurs définitions des harmoniques sphériques et il nous paraît important de préciser et de justifier le choix que nous avons fait.

La définition la plus universellement utilisée est :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (2.11)$$

Tout d'abord, l'utilisation des nombres complexes permet de garder l'expression très compacte en ne différenciant pas les expressions suivant le signe de  $m$ . Mais comme la solution finale (le potentiel scalaire) est réelle, cela impose que les coefficients des termes conjugués soient eux mêmes conjugués. Pour éviter cette contrainte, nous avons exprimé les harmoniques en termes réels, tout en introduisant le coefficient  $\sqrt{2}$  pour conserver la norme.

Plus intéressante est l'introduction du coefficient :

$$\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}$$

Ce coefficient permet aux harmoniques sphériques de définir une base orthonormée des fonctions définies sur la surface d'une sphère de rayon unité. C'est à dire que nous avons :

$$\iint_{M \in \Sigma} Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^{m'}(\theta', \varphi') d\Sigma = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.12)$$

Cependant, dans ce cas, l'expression du développement limité de l'inverse de la distance est moins naturelle, puisque (en utilisant les notations du chapitre B.1.a) :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \quad (2.13)$$

Nous retrouverions donc ce coefficient dans l'expression du potentiel scalaire en fonction de la densité d'aimantation dipolaire, ce qui ne nous paraît pas opportun.

La définition que nous utilisons a été introduite par Adolf Schmidt et est souvent utilisée par les géophysiciens [ROBIN].

### 2.2.c- Zone de validité de la formule

Avant de manipuler cette formule, précisons sa zone de validité. Tout d'abord elle n'est valable que si  $V$  est une fonction harmonique, c'est à dire à l'extérieur des sources magnétiques, dans  $\Omega_e$ .

Mais cela ne suffit pas. Il faut aussi que la série soit convergente. Nous pouvons voir (annexe B.1.a) que cette série provient du développement limité de l'expression de  $1/d$  et qu'elle n'est convergente qu'à l'expresse condition que  $r$  soit strictement supérieure à  $r_0$ .

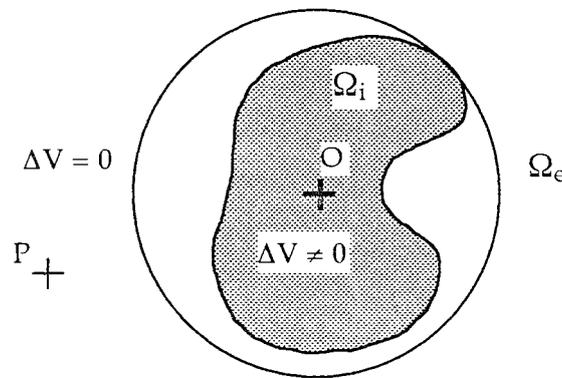


Figure 2.1 : Sphère à l'extérieur de laquelle le développement est valide

Cette expression n'aura donc un sens au point  $P$  que si tous les points  $M$  sont plus proches de l'origine que le point  $P$ . C'est à dire que cette expression est convergente pour tout point  $P$  à l'extérieur d'une sphère de centre l'origine et englobant toutes les sources.

## 2.3- Intérêt de la modélisation

### 2.3.a- Découplage de la source et de la mesure

Par rapport au but fixé, nous voyons tout de suite l'intérêt d'une telle représentation. En effet, à partir de l'expression du potentiel scalaire, par une simple dérivation, nous avons l'expression du champ magnétique en tout point de  $\Omega_e$  et par une dérivation de plus, nous avons l'expression du gradient du champ magnétique.

Or les expressions du champ et du gradient prennent bien entendu la même for-

me c'est à dire une somme sur un double indice  $n, m$ .

De plus, chaque élément de cette somme est le produit de deux termes :

$$\frac{1}{4\pi r^{n+1}} Y_n^\pi(\theta, \varphi)$$

qui ne dépend que de la géométrie du système et en particulier de la position du point où calculer le potentiel scalaire magnétique.

$$a_{nm} = \iiint_{M \in \Omega_i} \langle \vec{m}(M) \cdot \vec{\nabla}_M \left( \frac{1}{r_0^n} Y_n^\pi(\theta_0, \varphi_0) \right) \rangle d\Omega \quad (2.14)$$

qui ne dépend que des caractéristiques magnétiques de la source.

Ce découplage de la mesure et de la source magnétique est très important. En effet, supposons que nous ayons des capteurs de champ et de gradient magnétiques. Ces capteurs mesureront soit le champ magnétique, donc une expression du type :

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^\pi(\theta, \varphi) \right) \quad (2.15)$$

ou éventuellement, une combinaison linéaire des composantes de ce vecteur, soit le gradient du champ magnétique, c'est à dire une ou plusieurs composantes de la matrice :

$$\mathbb{G}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \vec{\nabla}_P \left( \vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^\pi(\theta, \varphi) \right) \right) \quad (2.16)$$

Dans les deux cas, nous avons une combinaison linéaire d'un ensemble de valeurs caractéristiques de l'état magnétique de l'objet (les coefficients  $a_{nm}$ ) c'est à dire des termes qui sont fonction des inconnues cherchées. Malgré leur forme qui peut être assez compliquée, les facteurs multiplicatifs ne dépendent que de la géométrie du système et des conditions de mesure, c'est à dire de données supposées connues du problème.

Quel est le bilan de cette opération ?

Au départ, nous avons des mesures (le champ et le gradient en quelques points) dont nous ne savons trop quoi faire, et une infinité d'inconnues (l'état magnétique du système) que nous ne savons pas trop calculer.

Nous avons introduit les coefficients  $a_{nm}$  qui doivent être considérés comme des variables intermédiaires, qui sont toujours inconnues mais qui possèdent vis à

vis de notre problème de remarquables propriétés.

Premièrement, ils sont intrinsèques à l'objet et au repère considéré, c'est à dire qu'ils sont indépendants de la mesure. Si par une mesure donnée supposée parfaite, on obtient un ensemble de valeurs pour les  $a_{nm}$ , une mesure faite dans d'autres conditions doit donner les mêmes valeurs si elles sont exprimées dans le même repère et si l'état magnétique de l'objet n'a pas changé.

Ensuite la dépendance entre d'une part, les champs et les gradients et d'autre part, les composantes  $a_{nm}$  est linéaire. Il est donc très simple de calculer ces coefficients par rapport à la mesure (une fois le problème de la sous-détermination résolue...).

Nous avons aussi d'autres propriétés bien sympathiques.

### 2.3.b- Amortissement en fonction de la distance

Exprimons  $V$  en fonction des coefficients  $a_{nm}$  :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (2.17)$$

Si nous étudions les dépendances des termes en fonction de la distance à l'origine du point  $P$ , nous observons pour chaque indice  $n$ , une dépendance des termes du potentiel en  $1/r^{n+1}$ . Cette propriété a des conséquences très importantes pour appréhender l'observabilité des sources magnétiques par la mesure de l'induction.

Essayons de quantifier un peu cette propriété en supposant un objet localisé dans un zone sphérique près de l'origine et dans un état magnétique donné.

Nous aurons 3 termes du potentiel qui s'amortissent en  $1/r^2$  (les termes dipolaires pour  $n=1$  et  $m$  allant de  $-1$  à  $1$ ), 5 termes qui s'amortissent en  $1/r^3$  (les termes quadrupolaires) et  $2n+1$  termes qui s'amortissent en  $1/r^{n+1}$ .

Pour  $r$  tendant vers l'infini, seuls les termes dipolaires sont non négligeables. Le champ très lointain ne dépend donc au plus que de trois paramètres indépendants et nous retrouvons le champ créé par un dipôle centré (Les magnéticiens savent qu'à l'infini, toute masse magnétique localisée est équivalente à un dipôle). Si nous nous approchons de l'anomalie, les termes en  $1/r^3$  deviennent non négligeables et nous devons intégrer 5 termes supplémentaires (les termes quadrupolaires) qui viennent s'ajouter aux termes dipolaires. Ainsi de suite, plus nous nous approchons de la zone aimantée, plus nous devons prendre en

compte des termes supplémentaires du développement pour avoir une bonne approximation du champ.

Nous pouvons tirer là une conclusion essentielle pour notre travail.

Si nous avons une ou plusieurs anomalies et si nous plaçons des capteurs magnétiques à une distance donnée de ces sources, les capteurs ayant une précision finie, nous ne pourrons observer sur ceux-ci qu'un nombre limité des paramètres  $a_{nm}$  (disons ceux correspondant à  $n \leq n_0$ ). Cependant, ils seront suffisants pour caractériser le champ magnétique en tout point situé à une distance égale ou supérieure aux capteurs magnétiques avec une précision au moins équivalente à la mesure. Réciproquement, avec des capteurs à cette distance, nous savons que nous ne pourrons pas remonter aux autres termes correspondant à  $n > n_0$  et donc estimer le champ très proche avec une bonne précision.

La figure suivante montre, à l'échelle, le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour caractériser le champ d'une distribution de sources à peu près homogène dans une sphère (ce qui correspond, nous allons le voir, à un ensemble de coefficient  $a_{nm}$  de même ordre de grandeur).

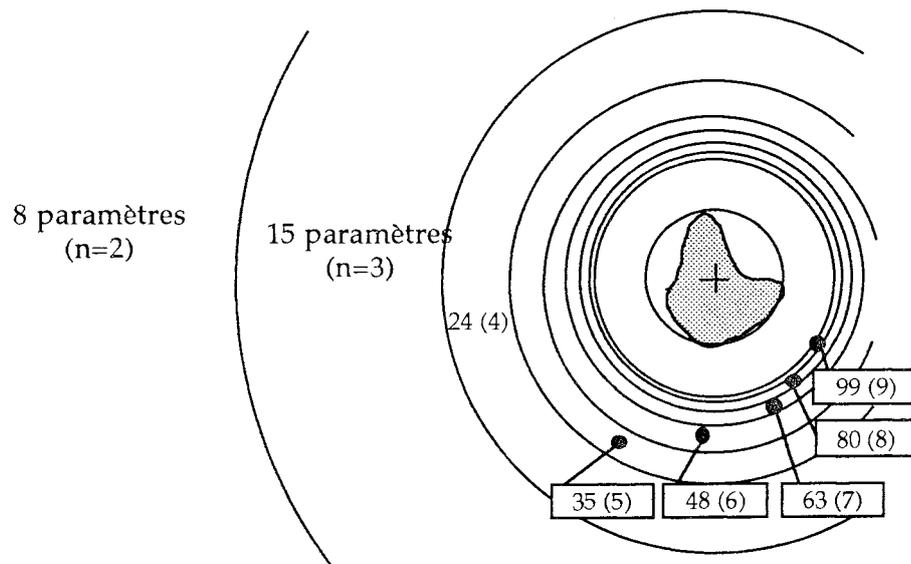


Figure 2.2 : Nombre de paramètres nécessaires pour expliquer 95% du champ en fonction de la distance

### 2.3.c- Orthogonalité des différents termes

Il existe un avantage supplémentaire à la représentation des anomalies magnétiques par des harmoniques sphériques. C'est l'indépendance des coefficients harmoniques.

Exprimons le potentiel magnétique créé par chaque harmonique sphérique sur la surface  $\Sigma$  de la sphère  $\Omega_1$ .

$$V_{nm} = \frac{1}{4\pi r^{n+1}} a_{nm} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (2.18)$$

Nous montrons dans l'annexe B.1.b que ces termes peuvent définir une base orthogonale du potentiel et donc des champs magnétiques de  $\Omega_e$ , le produit scalaire associé étant l'intégrale sur  $\Sigma$  des produits des potentiels.

Dans un chapitre ultérieur, nous trouverons une base encore plus intéressante.

### 2.3.d- Représentation des harmoniques sphériques

Pour fixer les idées, nous avons représenté dans la figure 2.3 les potentiels  $V_{nm}$  sur la surface d'une sphère de rayon unité pour quelques uns des harmoniques. Comme nous venons de le voir, ils correspondent aux fonctions  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  à un coefficient multiplicatif près.

△ Comme sur toutes les représentations isovaleures sur un objet tridimensionnel de ce rapport, les valeurs sont normalisées par rapport à leur maximum. Les zones en rouge correspondent aux grandeurs positives et les zones en bleu correspondent aux grandeurs négatives. Le maillage, représenté en bas de la figure et utilisé uniquement pour le tracé, reste assez grossier d'où le caractère irrégulier de certaines figures.

□ Les valeurs  $m$  positives se déduisent des valeurs négatives par une rotation d'un quart de tour autour de l'axe  $z$ .

## 2.4- Ordre de grandeur des coefficients d'aimantation

Les valeurs respectives des termes  $a_{nm}$  dépendent fortement de l'hétérogénéité des sources magnétiques, et par là-même sont difficiles à évaluer.

Si on se donne une distribution donnée quelconque de coefficients  $a_{nm}$ , nous pouvons toujours trouver une répartition de sources qui correspond à ces valeurs. Cependant ces sources n'auront pas nécessairement une répartition physique, ni même une énergie finie.

Pour donner une idée des valeurs que peuvent avoir ces coefficients, nous pouvons soit nous reporter à l'expérience, soit voir ce qui se passe dans quelques cas simples.

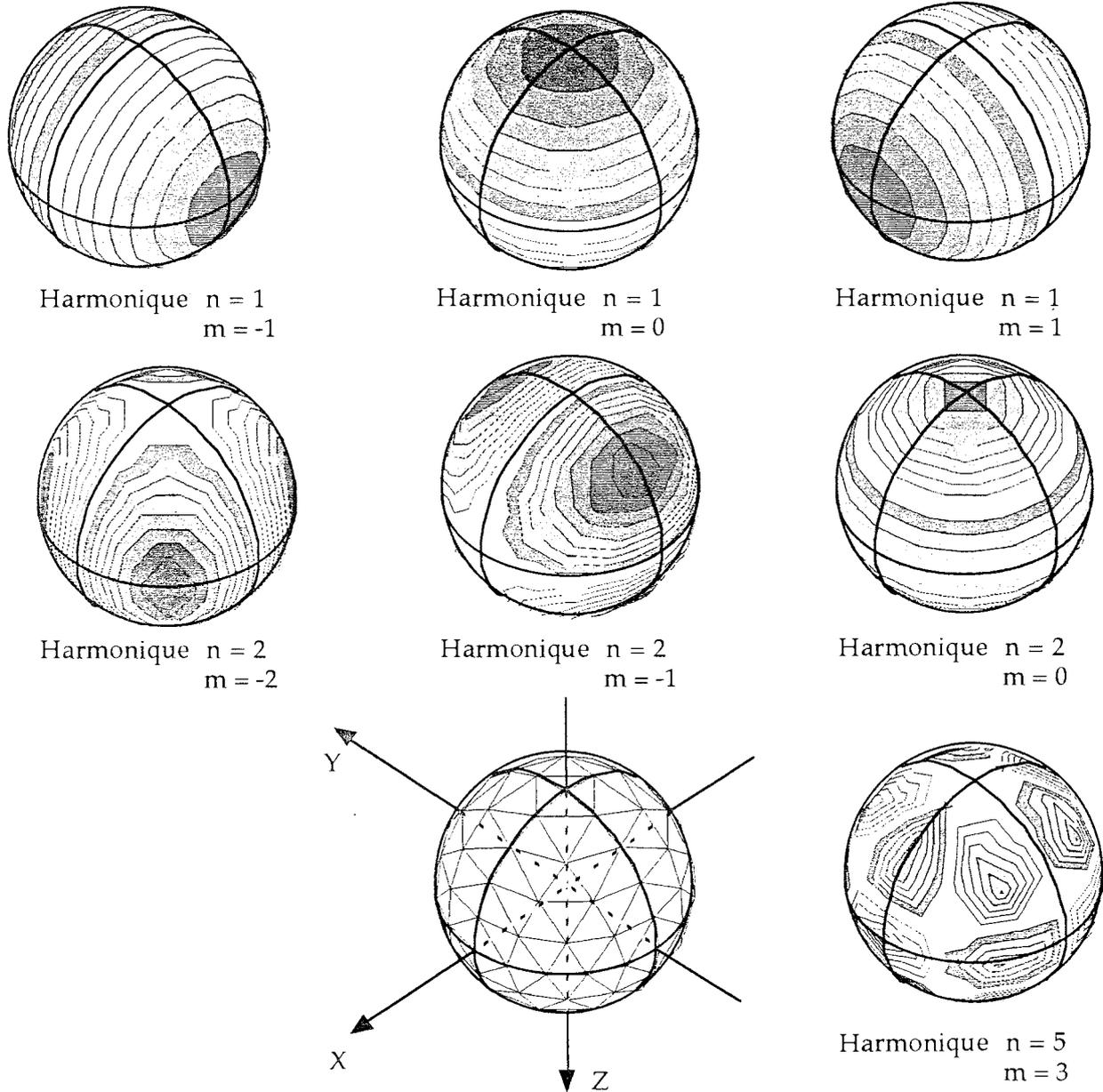


Figure 2.3 : Représentations des premiers harmoniques sphériques.

### 2.4.a- Induction dans une sphère ferromagnétique homogène

Dans le cas d'un champ induit dans une sphère magnétique homogène, les termes dipolaires sont faciles à calculer. Par contre tous les termes de degré supérieur sont nuls si le développement est fait à partir du centre de la sphère.

$$\begin{aligned} a_{1m} &= 3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} H_{1r} \\ a_{nm} &= 0 \text{ si } n > 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$H_m$  est le champ inducteur dans la direction correspondant au coefficient dipolaire  $a_{1m}$ , c'est à dire avec les conventions prises pour le repère :

$$\begin{aligned} H_{-1} &= -H_y \\ H_0 &= H_z \\ H_1 &= -H_x \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.4.b- Dipôle isolé dans une sphère

Nous pouvons aussi calculer les coefficients correspondant à une source dipolaire isolée d'aimantation  $\vec{M}$  située dans une sphère.

Le calcul, assez long, est reportée dans l'annexe B.1.c.

Il donne les résultats suivants :

- dans le cas d'un dipôle isolé de composantes aléatoires situé sur la surface d'une sphère de rayon  $r_0$ , si  $M$  est l'espérance du module de l'aimantation du dipôle, l'écart-type des composantes  $a_{nm}$  est :

$$\sigma_{a_{nm}} = r_0^{n-1} M \sqrt{\frac{n}{3}} \quad (B.33)$$

- en prenant les mêmes notations, si le dipôle est situé à l'intérieur de la sphère de rayon  $r_0$ .

$$\sigma_{a_{nm}} = r_0^{n-1} M \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \quad (B.34b)$$

△ Bien entendu, on suppose les densités des paramètres aléatoires uniformes.

Nous voyons que le développement en harmoniques sphériques d'un dipôle isolé va dépendre de la distance de ce dipôle au point du développement. Plus le

dipôle est loin de l'origine, plus les termes de degré élevé sont importants.

La démonstration de ce résultat permet d'obtenir une relation intermédiaire qui est remarquable (voir l'annexe) :

$$\sum_{m=-n}^n a_{nm}^2 = (r_0^{n-1})^2 \left[ n^2 M_r^2 + \frac{n(n+1)}{2} (M_\theta^2 + M_\varphi^2) \right] \quad (\text{B.30})$$

C'est à dire que la somme des carrés des contributions correspondant à un degré donné ne dépend que de la distance entre le dipôle et l'origine du développement et de l'orientation relative de l'aimantation par rapport à l'axe origine-dipôle. Il ne dépend pas directement des angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

Par ailleurs, en faisant le calcul direct, on peut démontrer que tous les termes  $a_{nm}$  sont des variables aléatoires indépendantes, mais qui ont une même variance pour un degré  $n$  donné.

#### 2.4.c- Cas général

A cause de la méconnaissance des aimantations internes, il est difficile d'estimer la décroissance des coefficients dans le cas général. Une masse importante à très forte perméabilité va se rapprocher du cas de la sphère fortement aimantée (décroissance rapide des  $a_{nm}$  pour  $n$  croissant) car la densité d'aimantation va être très homogène. En revanche, un ensemble de pièces d'aimantations opposées va diminuer l'intensité relative des termes dipolaires vis à vis des coefficients de degré plus élevé.

Dans le cas du moteur Baudouin, nous avons représenté figure 2.4 les valeurs des coefficients des harmoniques sphériques pour les sept fichiers que nous avons sélectionnés.

Nous avons aussi représenté par les valeurs  $+$  ou  $-\sigma$ , l'écart-type qui est obtenu en appliquant la formule (B.34b) à une sphère approximant au mieux le moteur (rayon de 0m 90 et aimantation dipolaire de 100 Am<sup>2</sup>).

Nous voyons que les ordres de grandeurs des valeurs calculées par la formule (B.34b) sont approximativement bons (au moins pour les trois premiers degrés).

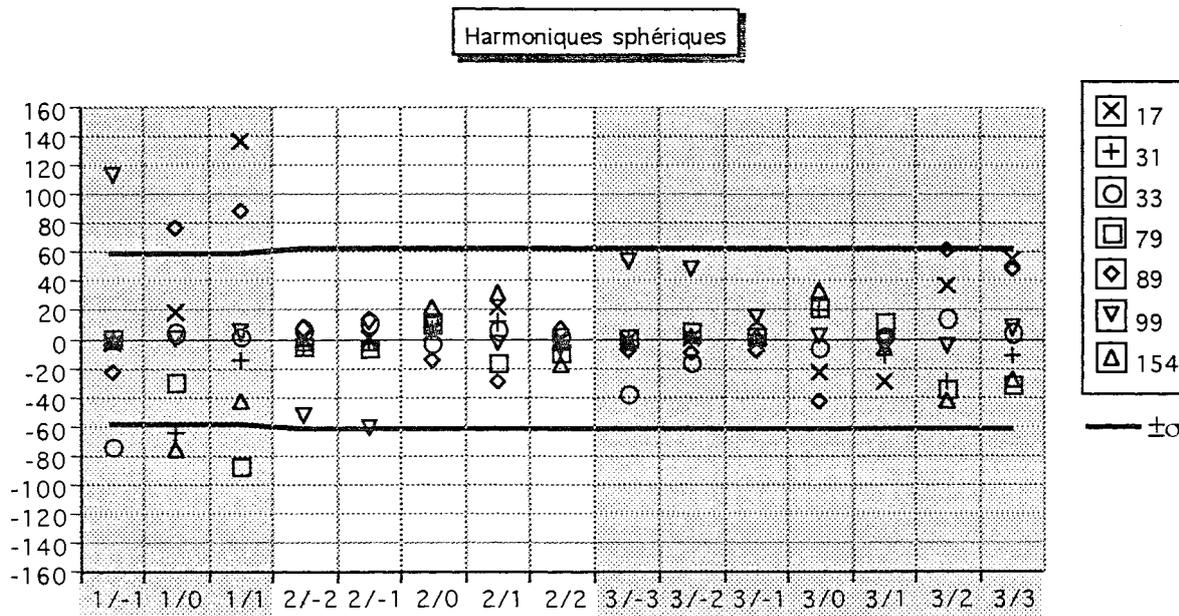


Figure 24 : Valeurs des coefficients harmoniques pour les 7 mesures sélectionnées (unité  $\text{Am}^2$  pour les termes dipolaires)

△ Si, sur le graphique, l'unités utilisée pour les trois termes dipolaires est  $\text{Am}^2$ , elle est  $\text{Am}^3$  pour les termes quadrupolaires, et  $\text{Am}^4$  pour les termes octupolaires.

## 2.5- Limites de la représentation en harmoniques sphériques

### 2.5.a- Rappel rapide des avantages de la représentation

Cette modélisation a été recherchée dans le but d'obtenir une description des sources magnétiques qui soit parfaitement adaptée à la mesure que nous pouvons en faire.

Or nous avons acquis par cette représentation un certain nombre de propriétés :

#### Indépendance à la mesure

Les paramètres  $a_{nm}$  sont intrinsèques à l'état magnétique du système et ne dépendent pas des conditions de mesures. Nous pouvons donc comparer deux résultats entre eux même si les conditions de mesures sont modifiées.

### Amortissement en fonction de la distance

L'effet à une distance donnée des différents termes est décroissant avec le degré  $n$ . Si entre l'objet et les capteurs de mesure il existe une certaine distance minimale, nous pouvons nous arrêter dans le développement limité à un indice  $n_0$  donné qui dépendra de la précision souhaitée. Nous pourrions alors ne retenir que les  $n_0(n_0+2)$  premiers termes pour décrire l'état magnétique à une distance supérieure ou égale à celle des capteurs. Réciproquement, tous les termes de degré supérieur à  $n_0$  sont inaccessibles à la mesure (pour une précision donnée des capteurs).

### Linéarité des dépendances

L'expression du potentiel, mais aussi celles du champ et du gradient du champ magnétique sont linéaires en fonction des paramètres magnétiques  $a_{nm}$ . Cela facilite grandement leur inversion.

### Orthogonalité des fonctions

Nous avons pu définir un produit scalaire des potentiels  $V$  (à l'extérieur d'une sphère englobant les sources) et nous avons vu que les coefficients d'aimantation étaient les composantes du potentiel dans une base orthogonale pour ce produit scalaire.

### Ordre de grandeur des $a_{nm}$

Dans un cas simple (dipôle unique décentré), nous avons calculé les ordres de grandeurs des coefficients d'aimantation  $a_{nm}$ . Nous avons pu voir qu'ils étaient approximativement calculables et significatifs du décentrement des sources par rapport à l'origine.

## **2.5.b- Découplage du problème physique**

Pour définir cette représentation, nous n'avons utilisé que les propriétés mathématiques des champs magnétiques et en particulier l'harmonicité du potentiel scalaire.

A aucun moment nous n'avons introduit le comportement des anomalies ou leur géométrie, à l'exception du fait qu'il existe une sphère de rayon fini contenant toutes les sources.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'inclusion d'informations sur les sources provenant du problème direct est très utile pour rendre la mesure in-

versible. Mais dans notre cas, nous ne voyons pas comment procéder car il n'est pas apparu de relation simple entre les propriétés physiques de la pièce et les coefficients. Nous avons tout au plus été capable d'appréhender quels pouvaient être les ordres de grandeurs des coefficients.

Réciproquement, si la mesure donne un ensemble de coefficients  $a_{nm}$ , nous ne saurons pas les interpréter. Seuls les 3 termes correspondant à  $n=1$  sont identifiés aux termes dipolaires de la source, lesquels ont un sens physique immédiat.

### 2.5.c- Dimension des $a_{nm}$

Un point sur lequel nous n'avons pas insisté pour l'instant est le fait que tous les  $a_{nm}$  ne s'expriment pas dans les mêmes unités.

La séparation entre les coefficients  $a_{nm}$  et  $Y_n^\pi$  était arbitraire et elle a été faite à la fois pour garantir des ordres de grandeurs similaires pour les paramètres quand  $m$  varie et pour identifier les premiers termes aux aimantations dipolaires des pièces. Les termes suivants correspondent aux différents moments (au sens mathématique du terme) des aimantations (c'est à dire les quadripôles, les octupôles, etc...). Cependant si les termes  $a_{1m}$  s'expriment en  $Am^2$ , les termes  $a_{2m}$  s'expriment en  $Am^3$ , les termes  $a_{3m}$  en  $Am^4$ , etc...

Ceci ne serait pas gênant si ce n'est que les ordres de grandeurs relatifs des coefficients vont dépendre de l'unité choisie ou de l'échelle du problème. Ainsi si on exprime les dimensions du problème dans une unité 1000 fois plus petite (en millimètres par exemple), les coefficients  $a_{2m}$  vont être 1000 fois plus grand, les coefficients  $a_{3m}$   $10^6$  fois plus grands, les coefficients  $a_{4m}$   $10^9$  fois plus grand, alors que ni les valeurs de l'induction magnétique, ni les valeurs des sources ne seront changées. Quand on n'y prend garde, ceci peut être à l'origine d'instabilités numériques.

Pour s'affranchir de cette difficulté, nous pourrions faire un changement de variable et chercher non plus les coefficients  $a_{nm}$  mais, par exemple, les coefficients  $r_0^n a_{nm}$  qui s'expriment dans la même unité. Cependant, dans certains cas, le terme  $r_0$  n'est pas facile à définir, et l'indépendance entre les sources et la modélisation disparaît.

### 2.5.d- Géométrie des sources

Nous avons vu que plus nous étions loins de la sphère englobant toutes les sources, moins nous avons besoin de termes pour définir le champ magnétique en un point donné.

Pour simplifier, prenons le cas d'un dipôle isolé dans  $\Omega_i$ .

Nous avons vu que les ordres de grandeur des coefficients  $a_{nm}$  étaient :

$$a_{nm} \approx r_0^{n-1} M \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \quad (\text{B.34b})$$

Nous pouvons alors en déduire les ordres de grandeur sur le potentiel des termes d'ordre  $n$ , que nous noterons  $V_n$  en supposant les différents termes  $a_{nm}$  indépendants (le calcul rigoureux est présenté dans le chapitre 7) :

$$V_n \approx \frac{1}{4\pi r^2} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} M \quad (2.21)$$

Ainsi la dépendance entre la contribution des termes de degré 1 et les termes suivants est essentiellement fonction du rapport entre  $r$  et  $r_0$ .

Si par exemple, nous souhaitons caractériser le champ lointain d'une source avec  $n_c$  voies de mesures, nous allons placer les capteurs dans une zone où nous saurons que les  $n_c$  premiers termes sont non négligeables et que tous les autres termes le sont. Nous en déduisons une distance  $d$  minimale entre la sphère et les positions des capteurs.

Si par contre l'objet est très allongé, nous serons obligé de prendre une sphère dont le rayon est lié à la plus grande dimension de la pièce alors que nous sentons confusément que nous pourrions approcher plus près les capteurs.

Cela est dû au fait que toute une zone à l'intérieur de la sphère mais à l'extérieur de l'objet est vide de source, alors que la modélisation ne fait pas cette hypothèse et suppose pour le signal des capteurs, un plus grand nombre de degrés de liberté que réellement présent.

La première solution est de découper l'objet et de définir plusieurs sphères pour séparer les zones où les sources sont présentes des zones réservées aux capteurs. La théorie des harmoniques sphériques est parfaitement linéaire, et il est tout à fait valide de découper ainsi l'espace des sources.

Cela pose quand même quelques problèmes car ce découpage est arbitraire et nous perdons le fait que les harmoniques sont intrinsèques aux anomalies. De plus nous perdons l'unicité du développement, certaines sources se trouvant dans plusieurs petites sphères en même temps. Ce dernier point peut altérer fortement l'inversion du système.

La seconde méthode serait de trouver un développement dont la convergence ne se fait plus en fonction de la distance à l'origine (d'où des zones sphériques "d'iso-degré de libertés") mais par rapport à une expression qui tienne plus compte de la forme de l'objet.

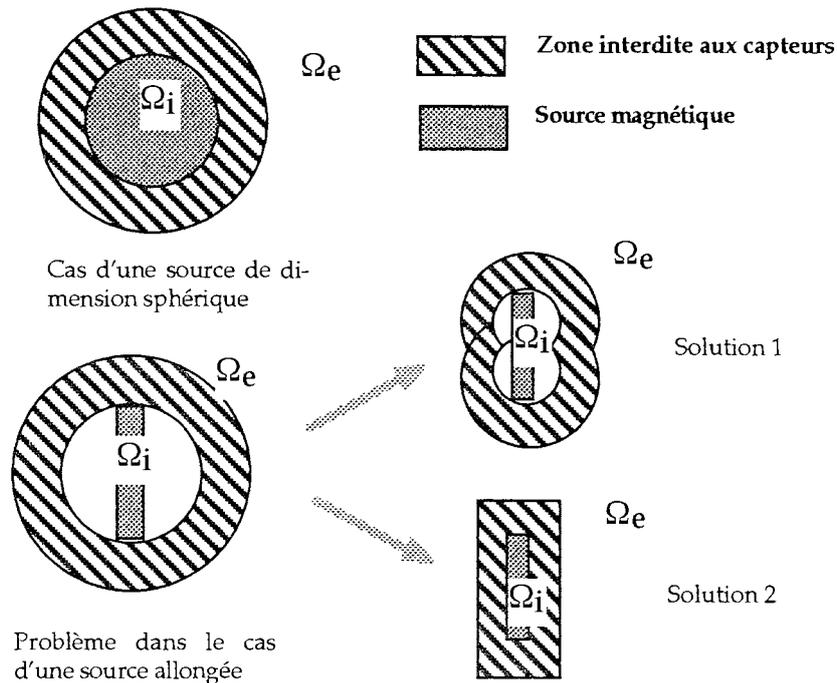


Figure 2.5 : Géométries possibles pour une anomalie non sphérique

## 2.6- Extension aux ellipsoïdes

Tout le développement des harmoniques sphériques que nous avons fait dans le cas d'une sphère peut être reproduit dans le cas d'un ellipsoïde de révolution allongé ou aplati. Nous allons présenter les résultats des deux cas (les bases sont présentées dans [DURAND1], [DURAND2] et [ROBIN]).

### 2.6.a- Ellipsoïdes de révolution allongés

Dans un des paragraphes précédents, nous avons fait l'hypothèse que l'équation de Laplace était à variables séparables quand elle était exprimée dans un repère sphérique. Nous pouvons faire la même hypothèse dans un repère ellipsoïdal :

soit le repère suivant correspondant à un ellipsoïde allongé. Un point M a dans ce repère les coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{sh} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y &= c \operatorname{sh} \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z &= c \operatorname{ch} \rho \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

avec  $c$  la focale de l'ellipsoïde.

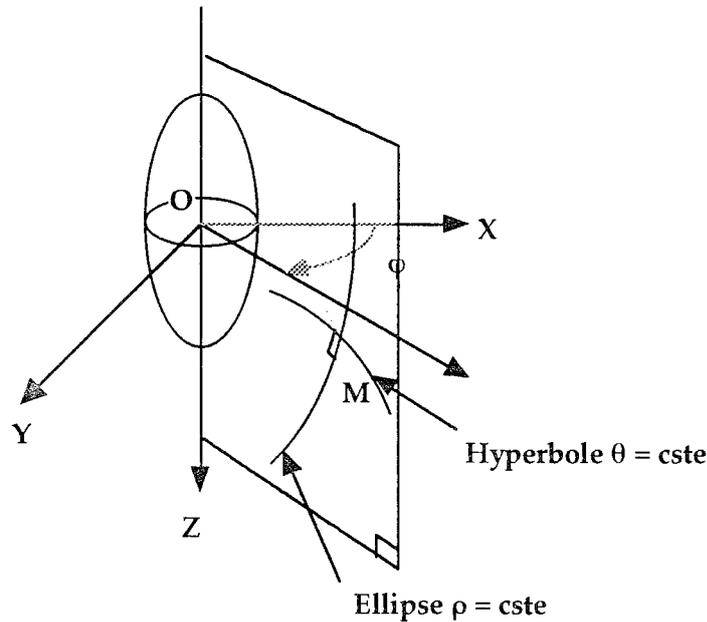


Figure 2.6 : Repère ellipsoïdal

Dans ce cas toute solution de  $\Delta V = 0$  s'exprime sous la forme [DURAND1] :

$$\begin{aligned}
 V &= V_1(\rho) V_2(\theta) V_3(\varphi) \text{ avec} \\
 V_1(\rho) &= A_m P_n^m(\text{ch}\rho) + B_m Q_n^m(\text{ch}\rho) \\
 V_2(\theta) &= C_m P_n^m(\cos\theta) + D_m Q_n^m(\cos\theta) \\
 V_3(\varphi) &= E_m \cos m\varphi + F_m \sin m\varphi
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

avec  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$ ,  $D_{nm}$ ,  $E_m$  et  $F_m$  des constantes arbitraires.

**[Rq]** Le symbole  $Q_n^m$  définit une autre famille de fonctions de Legendre, celle de seconde espèce.

Comme pour le repère sphérique, si les sources magnétiques sont localisées et si l'origine du repère est dans  $\Omega_i$ , nous pouvons toujours exploiter la condition "V tend à l'infini vers 0 au moins aussi rapidement que  $1/r^2$ ".

Comme  $r \approx c \text{ ch}\rho$  quand  $r \rightarrow \infty$  (en notant  $c$  la focale de l'ellipsoïde) et comme :

$$Q_n^m(\text{ch}\rho) \approx (-1)^m \frac{(n+m)!}{(2n+1)!!} \frac{1}{(\text{ch}\rho)^{n+1}} \approx (-1)^m \frac{(n+m)!}{(2n+1)!!} \frac{c^{n+1}}{r^{n+1}} \tag{2.23}$$

**[Rq]** La notation  $(2n+1)!!$  symbolise le produit  $(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots$  quand  $r \rightarrow \infty$  et :

$$P_n^m(\text{ch}\rho) \approx (-1)^m \frac{(2n-1)!!}{(n-m)!} (\text{ch}\rho)^n \approx (-1)^m \frac{(2n-1)!!}{(n-m)!} \frac{r^n}{c^n} \quad (2.24)$$

nous pouvons affirmer que  $A_{nm}=0$  et  $B_{0m}=0$ .

De même, quelque soit  $\theta$ , le potentiel reste fini d'où  $D_{nm}=0$ .

Sans restreindre la généralité, nous pouvons avoir l'ensemble des solutions sous la forme :

$$V(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( A_m Q_n^m(\text{ch}\rho) P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos(m\varphi) & \text{si } m \geq 0 \\ \sin(m\varphi) & \text{si } m < 0 \end{cases} \right) \quad (2.25)$$

Nous pouvons aussi calculer le champ  $\vec{B}$ , en prenant le gradient de cette expression.

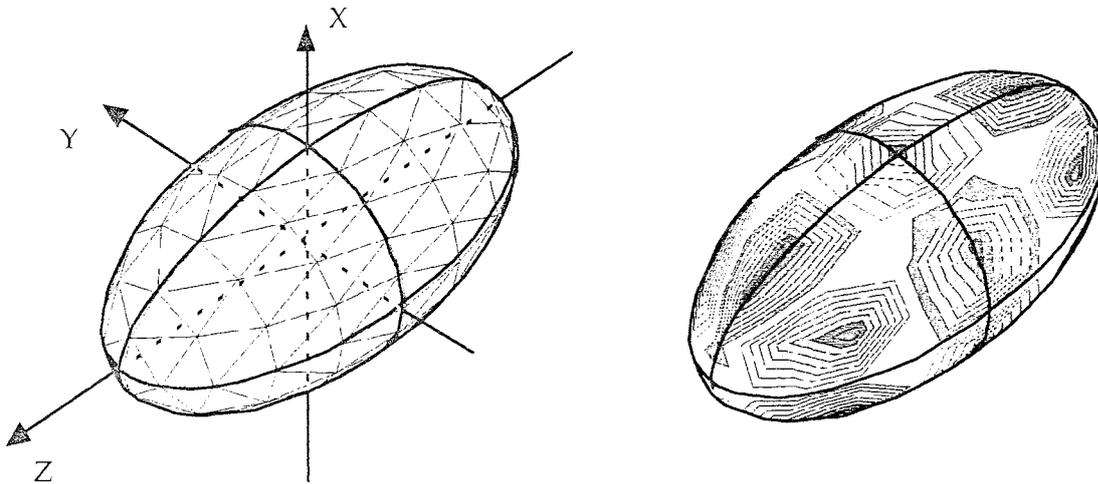


Figure 2.7: Ellipsoïde allongé (harmonique  $n = 5, m = 3$ )

Pour jouir des mêmes propriétés de normalisation entre les harmoniques sphériques et les harmoniques ellipsoïdales, ainsi que pour assurer la continuité du développement quand l'ellipsoïde tend vers une sphère, nous exprimerons le développement sous la forme :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \frac{(-1)^m (2n+1)!!}{c^{n+1} (n+m)!} Q_n^m(\text{ch}\rho) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (2.26)$$

Nous avons sensiblement les mêmes propriétés que le développement dans un repère sphérique. Par contre, nous perdons quand même la propriété d'orthogonalité sur la surface du modèle.

Comme pour la sphère nous pouvons représenter (figure 2.7) le potentiel sur la surface de l'ellipsoïde ( $\Delta$  nous avons tourné les axes par rapport à la sphère).

### 2.6.b- Ellipsoïdes de révolution aplatis

Le raisonnement peut aussi s'étendre au cas d'un repère ellipsoïdal associé à un ellipsoïde de révolution aplati. La démarche est exactement la même :

Les coordonnées d'un point dans ce repère s'exprime par :

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y &= c \operatorname{ch} \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z &= c \operatorname{sh} \rho \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

avec  $c$  la focale de l'ellipsoïde.

Toute solution de  $\Delta V = 0$  s'exprime sous la forme [DURAND1] :

$$\begin{aligned} V &= V_1(\rho) V_2(\theta) V_3(\varphi) \text{ avec} \\ V_1(\rho) &= A_m P_n^m(\operatorname{ish} \rho) + B_m Q_n^m(\operatorname{ish} \rho) \\ V_2(\theta) &= C_m P_n^m(\cos \theta) + D_m Q_n^m(\cos \theta) \\ V_3(\varphi) &= E_m \cos m \varphi + F_m \sin m \varphi \end{aligned} \quad (\text{2.27})$$

et  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$ ,  $D_{nm}$ ,  $E_m$  et  $F_m$  des constantes arbitraires ( $i$  dans  $\operatorname{ish} \rho$ , est le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ ).

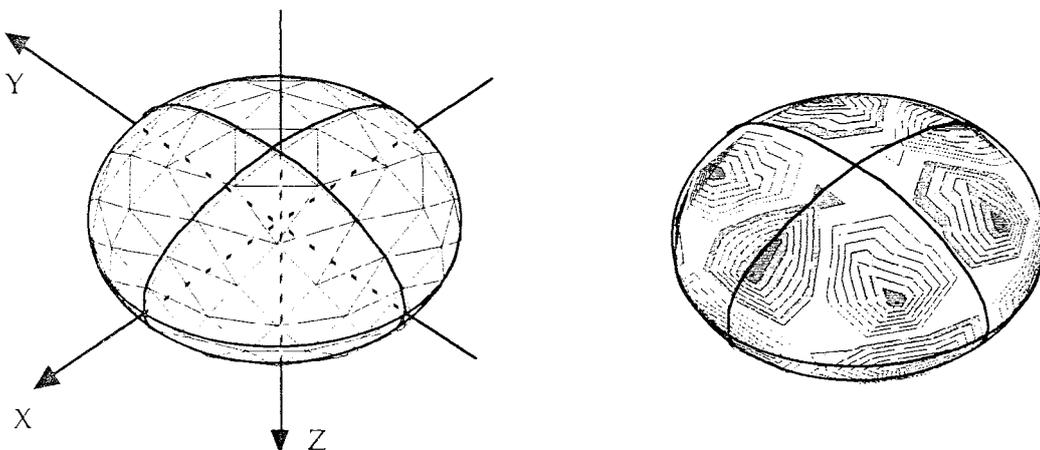


Figure 2.8 : Ellipsoïde aplati (harmonique  $n = 5$ ,  $m = 3$ )

Nous pouvons raisonner au niveau des harmoniques sphériques en termes de coefficients réels ou complexes. Jusqu'à présent, comme le potentiel scalaire est réel, nous utilisons la notation en réel. Seulement dans ce cas particulier, nous noterons  $Q_n^m(\text{ish}\rho)$  parce que cela évite de traîner des  $(-1)^{f(n,m)}$  dont l'expression analytique de  $f()$  est lourde.

En fait  $Q_n^m(\text{ish}\rho)$  est soit imaginaire pur, soit réel pur. Si nous avons un réel pur, on garde son expression, sinon nous divisons par  $i$  (ce qui évite d'avoir un coefficient multiplicateur imaginaire pour retrouver un potentiel scalaire réel).

Les mêmes conditions de continuité que précédemment nous amènent à l'expression normalisée :

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \frac{(-1)^{E(\frac{n}{2})+m+1} (2n+1)!!}{c^{n+1} (n+m)!} Q_n^m(\text{ish}\rho) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (2.28)$$

où  $E()$  correspond à la partie entière de la valeur et  $Q_n^m(\text{ish}\rho)$  est interprété comme mentionné.

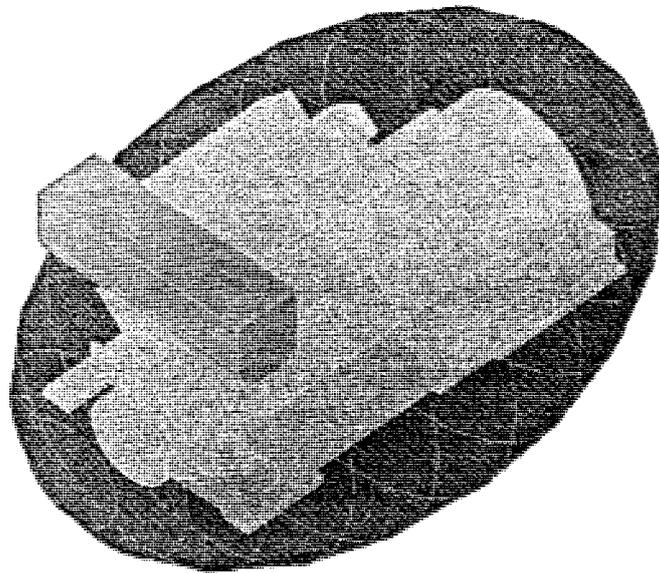


Figure 2.9 : Moteur entouré par l'ellipsoïde de modélisation

### 2.6.c- Application au moteur Baudouin

Cette formulation s'adapte particulièrement bien à la pièce que nous avons sélectionnée, qui de par sa forme oblongue s'insère facilement à l'intérieur d'un ellipsoïde allongé. Pour s'en persuader, nous avons représenté le schéma du moteur dans l'ellipsoïde choisi (figure 2.9).

La silhouette de cet ellipsoïde a aussi été dessinée sur la figure 1.6. Les dimensions du demi grand axe et des deux demi petits axes sont respectivement 1,3 m et 0,835 m. Ces dimensions sont à comparer avec la longueur hors tout du moteur (1,95 m de long, 1,10 m de large et 1,15 m de haut sans prendre en compte l'échangeur eau/eau).

Malgré le fait que nous n'ayons pas englobé l'échangeur (qui n'est pas magnétique) dans l'ellipsoïde, nous pouvons nous apercevoir que son encombrement est nettement supérieur à celui du moteur (de 30 à 50% de plus sur chaque dimension et un facteur 3 pour le volume). La figure 1.6 montre aussi très bien que l'ellipsoïde est plus proche des lignes de capteurs que le moteur augmentant par là le nombre de paramètres à identifier par rapport à ce qu'on aurait pu espérer.

Rq Si l'échangeur avait été magnétique, la meilleure solution aurait été de rajouter un autre ellipsoïde allongé qui englobe seulement l'échangeur.

A titre d'exemple, nous présentons figure 2.10, les valeurs identifiées pour les harmoniques ellipsoïdaux dans le cas du fichier 0017 (Induit longitudinal).

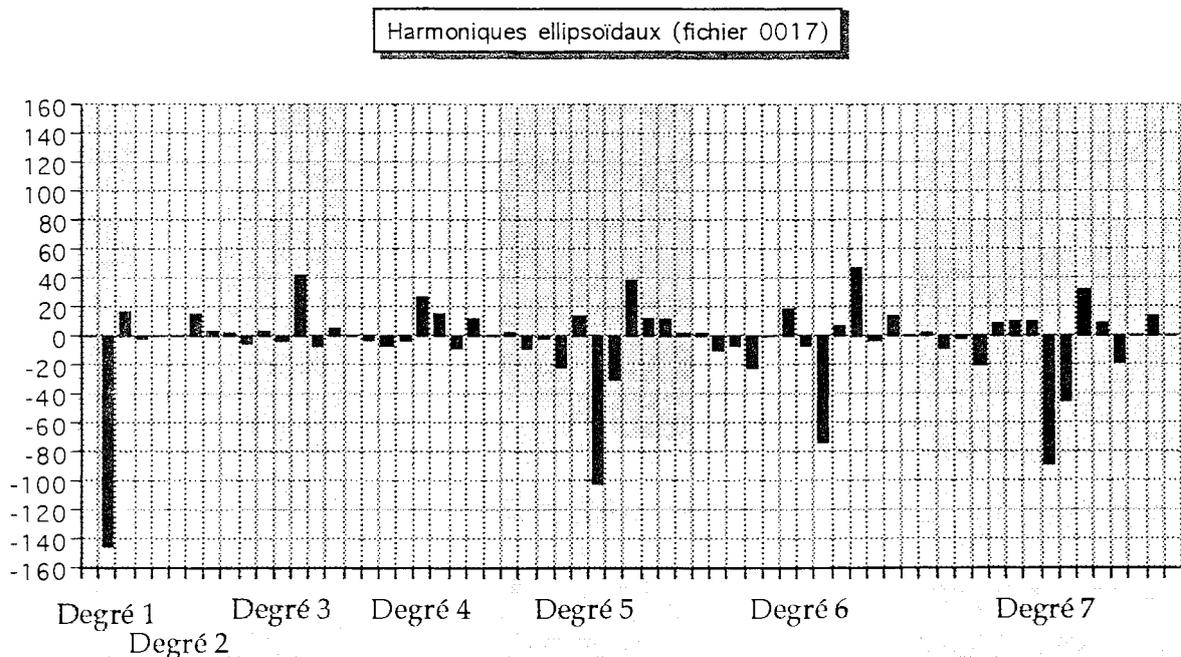


Figure 2.10 : Harmoniques ellipsoïdaux correspondant au fichier 0017

Si nous comparons avec les harmoniques sur la sphère, nous pouvons nous apercevoir que les coefficients sont du même ordre de grandeur.

Tout aussi intéressant, nous pouvons représenter les valeurs identifiées sous la forme d'un potentiel sur la surface de l'ellipsoïde (figure 2.11). Nous pouvons du premier coup d'œil reconnaître une aimantation principale selon X. Les irrégularités (écart entre un ellipsoïde uniformément aimanté et le moteur) sont cependant délicates à interpréter, même si une tendance est que le potentiel augmente aux points du modèle proches du moteur.

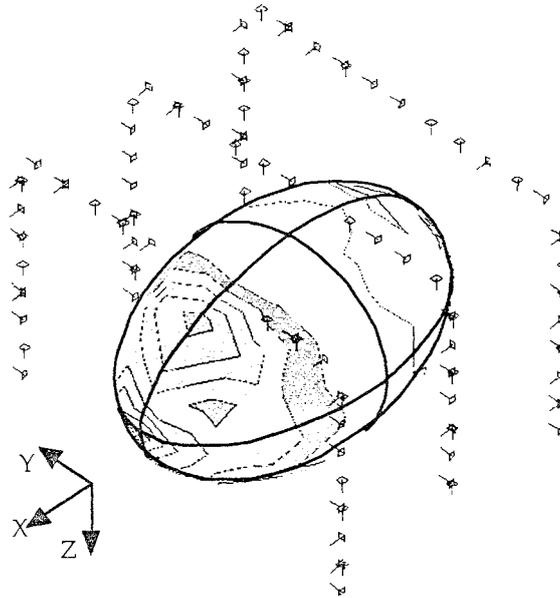


Figure 2.11 : Potentiel identifié sur la surface de l'ellipsoïde pour le fichier 0017 et position des sondes ayant servi à l'identification



## 3.- Intégrales surfaciques

### 3.1- Alternative aux fonctions harmoniques

#### 3.1.a- Passage à une résolution numérique

Les référentiels dans lesquels l'équation de Laplace est à variables séparables et qui conduisent à des solutions analytiques sous forme de fonctions harmoniques sont rares. [DURAND1] en cite 11 :

- coordonnées cartésiennes
- coordonnées cylindriques
- coordonnées du cylindre à base elliptique
- coordonnées du cylindre à base parabolique
- coordonnées sphériques
- coordonnées de l'ellipsoïde allongé
- coordonnées de l'ellipsoïde aplati
- coordonnées du paraboloid
- coordonnées ellipsoïdales
- coordonnées paraboliques
- coordonnées coniques

Cependant, toujours d'après [DURAND1], il existe au moins 40 systèmes de coordonnées où l'équation de Laplace admet des solutions du type :

$$V(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) V_1(x_1) V_2(x_2) V_3(x_3)$$

Les solutions dans ces systèmes référentiels restent complexes et d'intérêt très ponctuel.

Les sphères étaient une forme pratique quant à la simplicité des calculs et la dépendance explicite entre l'effet des harmoniques et la distance. Seulement, une géométrie sphérique n'a qu'un paramètre de forme, son rayon. Nous n'avons alors aucune souplesse pour faire épouser au mieux une sphère à nos objets. Nous avons étendu nos calculs aux ellipsoïdes de révolution qui sont des volumes plus souples puisque nous avons à notre disposition deux paramètres de

forme pour ajuster ces figures aux anomalies : le rayon et la focale (nous avons aussi une liberté pour définir la direction de l'axe de révolution).

Nous pourrions alors être tenté d'utiliser des harmoniques issus des parallélépipèdes (repère cartésien) qui ajouteraient une dimension supplémentaire en passant à trois paramètres (longueur, largeur et hauteur), mais ce type de géométrie n'est guère attractif.

D'abord, nous continuerons à être limité au niveau de la souplesse pour adapter la forme de la représentation à celle de l'objet étudié. Le progrès n'est que faible. De plus les harmoniques "naturels" définis sur un parallélépipède n'ont pas des propriétés aussi intéressantes que ceux définis sur les ellipsoïdes de révolution. En particulier, nous retrouvons des expressions sous forme d'un produit de coordonnées en  $1/x^{n+1}$ ,  $1/y^{n+1}$  et  $1/z^{n+1}$  qui peuvent être réordonnés en termes en  $1/r^{n+1}$  mais pas de manière simple. Nous introduirions, comme précédemment, 3 termes dipolaires mais 6 termes quadrupolaires sont candidats "naturels" ainsi que 9 termes octupolaires alors que seuls respectivement 5 et 7 termes sont indépendants.

Ne pouvant trouver une grande amélioration, nous avons préféré changer de direction (mais pour un temps seulement, nous retrouverons très rapidement les harmoniques).

Une grande contrainte, qui restait implicite dans les paragraphes précédents, était de trouver une décomposition qui soit analytique. Nous allons faire tomber cette barrière et entrer dans le domaine du numérique, a priori seul capable de pouvoir manipuler une géométrie quelconque.

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que nous pouvions définir dans l'espace vectoriel des champs magnétiques de  $\Omega_e$ , créés par des sources de  $\Omega_i$ , un produit scalaire qui ne tenait compte que du potentiel sur la surface  $\Sigma$ .

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \iint_{M \in \Sigma} V_1(M) V_2(M) dM \quad (3.1)$$

Nous pouvons en conclure que  $V$  dans  $\Omega_e$  est entièrement déterminé par sa valeur sur  $\Sigma$ . C'est à dire, qu'au même titre que les sources de  $\Omega_i$  peuvent être identifiées par un ensemble de coefficients correspondant aux harmoniques sphériques, elles peuvent aussi être identifiées au potentiel scalaire sur une surface  $\Sigma$  entourant  $\Omega_i$ .

N'est ce pas un retour en arrière puisque nous repassons d'une représentation par un nombre fini de valeurs à une représentation par un nombre infini d'ordre deux? Nous allons voir que non.

### 3.1.b- Importance des conditions aux limites

Chercher le potentiel dans  $\Omega_e$  connaissant celui-ci sur  $\Sigma$  et avec l'hypothèse que toutes les sources sont dans  $\Omega_i$ , peut se résumer à la résolution de l'équation de Laplace dans  $\Omega_e$  avec des conditions aux limites particulières.

Fixer le potentiel sur  $\Sigma$  revient à imposer une condition aux limites dite de Dirichlet. Cependant le confinement des sources dans  $\Omega_i$  implique une condition plus complexe à l'infini (l'autre frontière de  $\Omega_e$ ) : le potentiel doit s'amortir au moins comme  $1/r^2$ .

Toujours en laissant les mêmes conditions aux limites à l'infini, nous pouvons trouver d'autres conditions sur  $\Sigma$  qui permettent de définir une fonction harmonique dans  $\Omega_e$ . Elles peuvent varier à l'infini, mais une notion permet de limiter fortement le nombre des types de conditions aux limites utilisables.

Le mathématicien Hadamard a défini la notion de problème bien posé.

Un tel problème doit avoir trois propriétés [EUVRARD] :

- il doit exister au moins une solution.
- la solution doit être unique.
- la solution doit dépendre continûment des conditions aux limites.

Quand ces trois critères sont vérifiés, nous pouvons garantir que pour une condition donnée sur la surface  $\Sigma$  (qui correspond généralement à la distribution d'une certaine grandeur) est associée une fonction harmonique unique dans  $\Omega_e$  et réciproquement, pour toutes les solutions régulières de l'équation de Laplace, il existe une répartition "quasi-unique" de la grandeur surfacique qui accepte cette solution.

"Quasi-unique" car elle n'est unique que sous des conditions de continuité des valeurs prises sur la frontière  $\Sigma$ . Si seule la valeur en un point de  $\Sigma$  change, la solution  $V$  trouvée sera identique.

Sous certaines conditions de régularité, nous avons donc des relations bijectives entre les potentiels scalaires magnétiques dans  $\Omega_e$  et les valeurs prises par la grandeur sur la frontière  $\Sigma$ . La donnée de l'un implique celle de l'autre.

## 3.2- Les représentations surfaciques

### 3.2.a- L'équation de Green

Nous avons vu que la donnée d'une grandeur sur la frontière  $\Sigma$  peut suffire à caractériser le champ en tout point de  $\Omega_e$ . Nous avons aussi vu que cette grandeur peut être le potentiel scalaire sur la frontière (Dirichlet). Ce n'est pas la seule possibilité.

Reprenons la description géométrique précédente et reposons l'équation de Laplace :

$$\forall P \in \Omega_e \quad \Delta V(P) = 0 \quad (3.2)$$

Nous avons alors  $V(P)$  qui vérifie la troisième formule de Green ([EUVRARD], [DURAND1] ou annexe A.4) ( $n$  est la normale extérieure de  $\Sigma$ ) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } P \in \Omega_e \quad V(P) \\ \text{Si } P \in \Sigma \quad \frac{1}{2} V(P) \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \left( V(M) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{\partial V(M)}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\Sigma \quad (3.3)$$

Ces deux équations relient les valeurs du potentiel scalaire surfacique entre elles et les relient aussi au potentiel scalaire dans  $\Omega_e$ .

Comme par définition, nous avons une relation entre l'induction  $\vec{B}$  et le potentiel  $V$  :

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} V \quad (A.53)$$

nous en déduisons que :

$$B_n = -\mu_0 \frac{\partial V}{\partial n} \quad (3.4)$$

De l'équation de Green, nous remarquons alors que nous avons une équation intégrale qui lie  $V$  et  $B_n$  sur  $\Sigma$ . Ces deux grandeurs ne sont donc pas indépendantes et nous pouvons calculer l'une des grandeurs à partir de la connaissance de l'autre sur  $\Sigma$ .

Cette condition montre aussi que le fait de poser comme condition aux limites, la valeur de la grandeur et de la dérivée sur une même portion de frontière  $\Sigma$

(problème de Cauchy) n'est pas un problème bien posé. En effet, l'équation de Green correspond à une équation de compatibilité entre le potentiel et sa dérivée sur  $\Sigma$ . Si les deux grandeurs ne sont pas compatibles, il n'y a pas de solution possible. Si les deux grandeurs sont compatibles, le problème n'est bien posé que si elles sont données sur toutes les frontières.

△ La relation entre l'induction et le potentiel scalaire, sous la forme présentée ici, n'est valide avec les coefficients choisis que dans le système MKSA rationalisé. Ce choix correspond à l'usage, et les équations du magnétisme dans ce système sont rappelées en annexe A. Pour les conventions, la lecture de la référence [LOPEZ] peut être utile.

### 3.2.b- Grandeurs surfaciques utilisables

Présentons quelques grandeurs définies sur la frontière  $\Sigma$  et qui sont substituables au potentiel scalaire sur la surface tout en garantissant un problème bien posé.

#### Masses magnétiques (potentiel de simple couche)

Par analogie avec le champ électrostatique où une densité de charges électriques sur une surface  $\Sigma$  crée un potentiel et un champ électrostatique dans l'espace  $\Omega_e$ , nous pouvons définir de façon similaire une densité de charges magnétiques (appelés "masses magnétiques" ou "monopôles" et notés  $m$ ). Pour respecter les propriétés supplémentaires du champ magnétique par rapport au champ électrique, à savoir que le flux à travers une surface fermée est toujours nul (ce qui se traduit mathématiquement par la nullité de la divergence de l'induction magnétique), nous devons respecter une contrainte supplémentaire sur la distribution de monopôles :

$$\iiint_{M \in \Omega_i} m(M) \, d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

Nous pouvons alors supposer de même une distribution surfacique de monopôles sur  $\Sigma$ , toujours avec la contrainte :

$$\iint_{M \in \Sigma} m(M) \, d\Sigma = 0 \quad (3.5b)$$

Résoudre l'équation de Laplace compatible avec une distribution de monopôles sur la surface  $\Sigma$  est alors un problème bien posé : il y a bijectivité entre les masses magnétiques vérifiant la contrainte et les inductions magnétiques possibles dans

$\Omega_e$ ,

La relation entre le potentiel scalaire en un point P de  $\Omega_e$  et la distribution de monopôles est particulièrement simple :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \frac{m(M)}{r} d\Sigma \quad (\text{A.57})$$

avec r : distance entre les points M et P.

Mathématiquement, une grandeur telle que m s'appelle un potentiel de simple couche.

Rq Les monopôles magnétiques n'ont aucune signification physique, mais ils sont assez souvent utilisés en modélisation magnétique car le champ généré par des pièces de forme simple et uniformément aimantées est souvent équivalent à une distribution très simple de monopôles sur la surface (nous en verrons un exemple).

#### Dipôles normaux à la surface (potentiel de double couche)

De la même façon que l'on peut définir une distribution de monopôles, nous pouvons aussi définir une distribution de dipôles. On peut caractériser le potentiel magnétique dans  $\Omega_e$  par une distribution surfacique de dipôles normaux à la surface  $\Sigma$ . Nous la noterons  $\tau_n$ .

Cette grandeur s'appelle un potentiel de double couche. Il n'y a pas de contrainte spécifique sur cette distribution.

Nous avons la relation liant la distribution et le potentiel scalaire :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \tau_n(M) \frac{\cos(\theta)}{r^2} d\Sigma \quad (\text{A.55})$$

avec r : distance entre les points M et P et  $\theta$  : l'angle entre la normale tournée vers l'extérieur  $\vec{n}$  au point M et le vecteur  $\overrightarrow{MP}$ .

Contrairement aux monopôles, cette représentation n'est pas biunivoque : si on suppose  $\tau_n$  constant, la formule devient :

$$V(P) = \frac{\tau_n}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \frac{\cos(\theta)}{r^2} d\Sigma \quad (3.6)$$

C'est à dire que le potentiel en P est proportionnel à l'angle solide de la surface  $\Sigma$  vue du point P. Comme la surface  $\Sigma$  est fermée et le point P est à l'extérieur, cet angle solide est toujours nul. D'où la distribution de dipôles normaux n'est défini qu'à une constante près.

Un moyen simple de rendre le problème biunivoque est d'astreindre la distribution à une jauge, c'est à dire à ne retenir que les solutions vérifiant :

$$\iint_{M \in \Sigma} \tau_n(M) d\Sigma = 0 \quad (3.7)$$

### Courants surfaciques

Pour mémoire, nous pouvons aussi caractériser le potentiel magnétique dans  $\Omega_e$  par une distribution de courants électriques surfaciques sur  $\Sigma$ . Nous les noterons  $\vec{j}$ .

Cette distribution n'apporte probablement aucun avantage numérique, puisque c'est une grandeur bidimensionnelle. Pour être physiquement réaliste, elle doit obéir à des contraintes dont une divergence nulle (divergence définie dans les coordonnées surfaciques).

$$\text{div}_{\Sigma}(\vec{j}) = 0 \quad (3.8)$$

L'expression entre l'induction magnétique et ces courants est plus directe que celle entre le potentiel et les courants.

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \frac{\vec{j}(M) \wedge \vec{r}}{r^2} d\Sigma \quad (3.9)$$

### Induction magnétique normale à la surface (condition de Neumann)

L'induction magnétique normale à la surface peut caractériser le potentiel scalaire magnétique. La formule de passage de  $B_n(M)$  à  $V(P)$  est assez délicate : il faut utiliser les fonctions de Green.

D'abord le champ magnétique normal sur la surface doit, comme pour les masses magnétiques, respecter une contrainte de cohérence pour avoir un sens physique : le flux du champ magnétique sur une surface fermée étant nul, il doit vérifier la condition :

$$\iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial V(M)}{\partial n} d\Sigma = 0 \quad (3.10)$$

(nous rappelons que  $B_n = -\mu_0 \frac{\partial V}{\partial n}$ )

Pour passer d'une distribution d'induction magnétique normale à une surface fermée à l'induction en tout point de la pièce, il faut procéder en deux étapes :

- d'abord calculer le potentiel scalaire compatible avec la distribution d'induction normale en résolvant l'équation de Green sur la surface :

$$\frac{1}{2} V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \left( V(M) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{\partial V(M)}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\Sigma \quad (3.3a)$$

- puis calculer le potentiel en tout point P en réutilisant l'équation de Green, cette fois ci sur le domaine extérieur.

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \left( V(M) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{\partial V(M)}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\Sigma \quad (3.3b)$$

#### Potentiel scalaire (condition de Dirichlet)

Enfin, bien évidemment, le potentiel sur  $\Sigma$  permet de caractériser le potentiel en tout point de  $\Omega$ . C'est le problème de Dirichlet. L'expression de  $V(P)$  en fonction de  $V_\Sigma(M)$  se trouve aussi en calculant, à l'aide de l'équation de Green sur la surface, la quantité duale (c'est à dire ici le champ magnétique normal à la surface) et en réutilisant après l'équation de Green dans  $\Omega_e$ .

Tout comme les dipôles normaux, le potentiel scalaire est défini à une constante près : nous pouvons alors prendre une contrainte de jauge pour rétablir l'unicité.

### 3.2.c- Equivalence masse/induction normale et dipôle normal/potentiel

Dans les grandeurs exposées ci-dessus, nous avons pu observer une grande similitude entre, d'une part, les masses magnétiques et les inductions normales sur la surface et d'autre part, les potentiels sur la surface et les dipôles normaux.

La première similitude se trouve dans les contraintes de représentation. Nous avons la même condition d'existence entre les masses et les inductions, à savoir, l'intégrale de la grandeur sur la surface est nulle.

$$\iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial V(M)}{\partial n} d\Sigma = \iint_{M \in \Sigma} m(M) d\Sigma = 0 \quad (3.11)$$

De même, le potentiel et la répartition de dipôles normaux sont définis à une constante près.

Si nous détaillons l'équation de Green donnant le potentiel scalaire dans  $\Omega_e$  en fonction du champ et du potentiel sur  $\Sigma$ , nous avons la formule suivante :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \left( V(M) \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{\partial V(M)}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\Sigma \quad (3.3b)$$

ce qui donne en reprenant les notations de l'annexe A :

$$\begin{aligned} V(P) &= \iint_{M \in \Sigma} \left( -V(M) \frac{\partial G}{\partial n} + \frac{\partial V(M)}{\partial n} G \right) d\Sigma \\ &= \iint_{M \in \Sigma} -V(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial V(M)}{\partial n} G d\Sigma \\ &= \iint_{M \in \Sigma} [-V(M)] \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \iint_{M \in \Sigma} \left[ -\frac{B_n}{\mu_0} \right] G d\Sigma \end{aligned} \quad (3.12)$$

Parallèlement si on a sur la surface  $\Sigma$ , une distribution de masse magnétique  $m$  et une distribution de dipôles normaux  $\tau_n$ , le potentiel dans  $\Omega_e$  est :

$$V(P) = \iint_{M \in \Sigma} [-\tau(M)] \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \iint_{M \in \Sigma} [-m(M)] G d\Sigma \quad (3.13)$$

Nous avons donc la même formule entre le potentiel surfacique et la densité de dipôles d'une part et la densité de monopôles et le champ normal à la surface d'autre part. Mais ils ne sont pas identiques.

A partir d'une induction et d'un potentiel surfacique, nous pouvons immédiatement considérer une distribution de dipôles et de monopôles qui font dans  $\Omega_e$  le même effet, en reprenant pour les monopôles les valeurs de l'induction normale et pour les dipôles la valeur du potentiel. Mais nous ne pouvons pas à contrario, à partir d'une distribution de monopôles et de dipôles, les considérer comme le potentiel et l'induction sur la surface. Nous avons vu, en effet, qu'il existe une relation de compatibilité entre eux qui doit être vérifiée.

De plus, si les deux distributions font effectivement le même champ dans  $\Omega_e$ , ils ne le font pas dans  $\Omega_i$ . En particulier, à partir des équations de Green, nous voyons qu'une distribution de dipôles et de monopôles qui vérifient la relation de compatibilité sur la surface  $\Sigma$ , génère un champ nul dans  $\Omega_i$ .

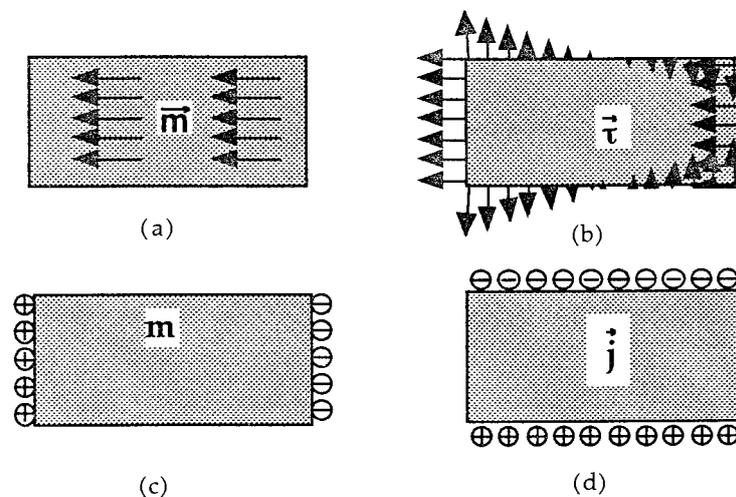


Figure 3.1 : Répartition surfacique équivalente à une aimantation homogène dans un cylindre

- (a) : densité d'aimantation constante
- (b) : répartition linéaire de dipôles normaux sur la surface
- (c) : densité de masses magnétiques constante et opposée sur 2 faces
- (d) : solénoïde de courants surfaciques

### 3.3- Application d'une telle représentation

#### 3.3.a- Choix de la grandeur surfacique

Nous pouvons maintenant nous demander si parmi les grandeurs surfaciques que nous venons de présenter, il y en a une qui est préférable aux autres ?

La réponse n'est pas simple, car elle dépend de plusieurs paramètres. On peut en citer quelques uns :

- interprétation physique de la grandeur sélectionnée.
- robustesse numérique des résolutions d'équations.
- charge de calcul.
- facilité de trouver des fonctions supports de la base.

Nous pouvons cependant déjà donner quelques éléments de réponse :

-sont les plus interprétables, les grandeurs directement mesurables en physique. Seule l'induction normale à la surface a une existence réelle et est directement mesurable dans toutes les configurations. Les dipôles normaux et les courants surfaciques pourraient avoir cette existence, mais dans notre cas, ils restent virtuels : le champ observé serait identique à un champ créé par la présence de ces grandeurs. Les potentiels et les monopôles sont aussi virtuels et ne sont pas mesurables : ils ne peuvent être interprétés que par analogie (avec l'électrostatique par exemple).

-la robustesse des expressions ne peut être estimée que par une analyse détaillée des équations et par des simulations. On peut seulement dire, par exemple, que le calcul des masses magnétiques ne sera pas très robuste. En effet, si on développe l'expression du potentiel en fonction de la distance à partir d'un point de référence  $O$  à l'intérieur de  $\Omega_i$ , nous obtenons une expression du type :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \iint_{M \in \Sigma} m(M) d\Sigma + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^3 \left( \iint_{M \in \Sigma} x_i m(M) d\Sigma \right) + \frac{1}{r^3} \dots \right) \quad (3.14)$$

Le premier terme, correspondant à la somme des masses sur la surface  $\Sigma$ , doit être nul.

Or, si par imprécision numérique, il n'est pas rigoureusement nul, l'erreur va s'amortir avec l'inverse de la distance, c'est à dire beaucoup moins vite que le vrai potentiel. Il en résulte une difficulté dans le calcul des champs lointains.

-en ce qui concerne la charge de calcul, c'est l'expression des masses magnétiques qui est la plus simple, suivie de près par l'expression des dipôles normaux. Les courants surfaciques sont plutôt complexes à manipuler compte tenu de leurs

valeurs vectorielles et du nombre trop important de paramètres (mais non indépendants). Les expressions du champ et du potentiel surfacique nécessitent la résolution de l'équation de Green, ce qui ajoute en complexité.

-la recherche du support de la base, c'est à dire des fonctions approximantes qui permettront de définir numériquement la grandeur, est légèrement plus facile dans le cas des dipôles normaux que dans le cas des masses magnétiques. Dans les cas les plus courants qui nous concernent (un objet ferromagnétique de perméabilité forte), la répartition de dipôles normaux équivalente est continue sur la surface mais la répartition de masses magnétiques ne l'est pas sur les angles vifs de la coque. Le traitement des discontinuités sur les arêtes ajoute une difficulté numérique qui peut devenir gênante.

A titre d'exemple, nous avons tracé figure 3.2 les répartitions de dipôles normaux et de masses magnétiques correspondant à une densité volumique d'aimantation constante et longitudinale sur un volume correspondant approximativement au moteur Baudouin.

Sur cet exemple, justement, nous n'avons pas doublé les noeuds du maillage (non représenté) utilisés dans le calcul des monopôles au niveau des arêtes, ce qui explique que sur chaque face plane la densité de monopôle n'est pas rigoureusement constante.

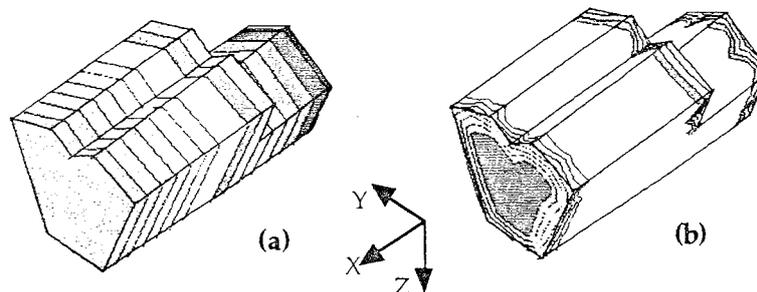


Figure 3.2 : Densité surfacique de dipôle normaux (a) et de masses magnétiques (b) correspondant à une densité d'aimantation homogène du volume (selon X) (valeurs normalisées)

De ce rapide tour d'horizon, il apparaît que la grandeur la plus favorable à manipuler est le dipôle normal à la surface auquel on ajoute la jauge "somme des dipôles sur la surface nulle" pour assurer la bijectivité et pour stabiliser le système. Mais cela ne nous dispensera pas de manipuler les fonctions de Green si on souhaite récupérer des états magnétiques provenant de codes de calculs. Ceux-ci donnent en effet souvent leurs résultats sous forme de champs et de potentiels qu'il faudra convertir dans la grandeur que nous avons choisie.

### 3.3.b- Discrétisation de la grandeur surfacique

Maintenant que nous avons choisi la grandeur surfacique qui va caractériser tous les champs dans l'espace, il faut continuer à simplifier notre problème en définissant une ou plusieurs coques surfaciques contenant toutes les sources magnétiques. De plus, comme il est probable que nous ne pourrons pas donner une expression analytique de la fonction de répartition des dipôles magnétiques, il faut choisir une discrétisation de cette fonction (c'est à dire une base de fonctions qui servira à une interpolation de la distribution).

Même si nous ne faisons pas d'équation d'équilibre dans le matériau, cette représentation est très proche des méthodes d'intégrales de frontière. Nous pouvons donc faire le même type de représentation et utiliser les mêmes fonctions que celles employées couramment dans les grands codes de calculs.

#### Choix de la surface

Les surfaces choisies pour faire l'identification doivent avoir une propriété essentielle, à savoir que toutes les sources magnétiques doivent être englobées dans cet ensemble de surfaces. Une autre propriété, non cruciale mais qui conditionne de beaucoup l'efficacité en permettant de réduire la base des champs admissibles, est d'avoir des surfaces englobant le volume, les plus petites possibles. Cependant, contrairement aux méthodes des éléments finis ou des intégrales de frontière, la surface n'a pas besoin d'être ajustée avec une frontière physique tant que l'on n'établit pas d'équation d'équilibre.

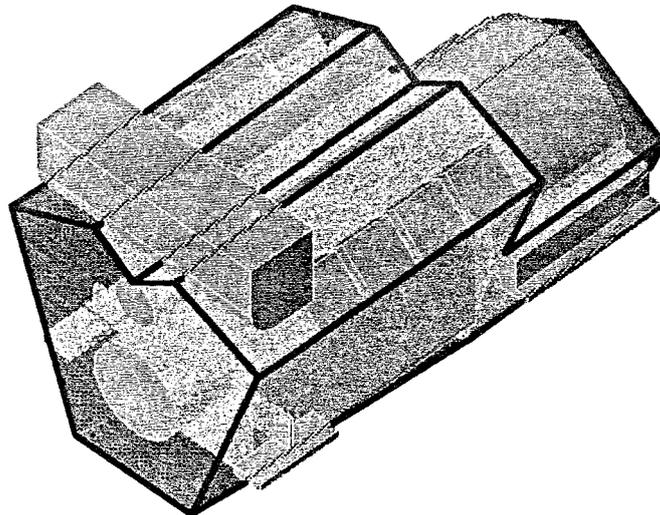


Figure 3.3 : Coque définie autour du moteur

Une description de surface simple et universellement utilisée est l'emploi d'un ou plusieurs polyèdres irréguliers pour entourer les sources. Chaque surface  $\Sigma$

fermée est un ensemble de facettes triangulaires. Sur chaque facette est défini un ensemble de fonctions qui serviront de fonctions d'interpolation.

Comme pour les ellipsoïdes, nous représentons dans la figure 3.3 la surface choisie pour notre moteur test (la silhouette de cette surface est aussi représentée figure 1.5). Là aussi, nous n'avons pas intégré l'échangeur eau/eau dans la coque, cependant cette fois-ci cela n'aurait posé aucun problème.

Il faut aussi remarquer la simplicité du modèle ainsi que l'espace gagné par rapport à l'ellipsoïde.

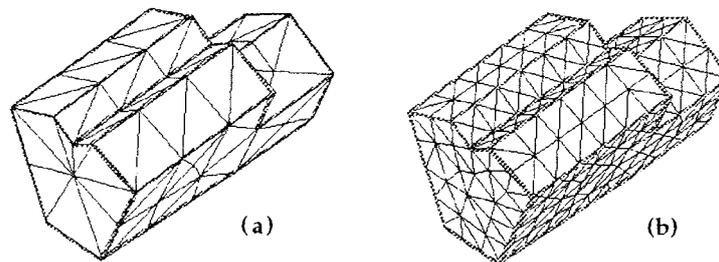


Figure 3.4 : Exemple de maillages utilisés

### Choix des fonctions d'interpolation

Certaines classes de fonctions sont couramment utilisées comme fonctions d'interpolation pour une valeur surfacique : les polynômes bidimensionnels de degré donné  $k$ . Ce degré est un élément important qui conditionne la précision de l'interpolation et le nombre d'inconnues nécessaires pour identifier la fonction d'interpolation.

En éléments finis, les bases utilisées sont les bases polynomiales complètes de degré  $k$  (avec  $k=1$  ou  $2$  en général).

Si  $k=0$ , nous avons l'ensemble des fonctions constantes (base à 1 degré de liberté).

Si  $k=1$ , nous avons l'ensemble des fonctions linéaires (3 dimensions puisque de la forme  $u = a + bx + cy$ )

Si  $k=2$ , nous avons l'ensemble des fonctions quadratiques (6 dimensions de la forme  $u = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ ).

Dans le cas général, la base complète des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  a  $(k+1)(k+2)/2$  dimensions.

La figure 3.5 montre l'allure de ces fonctions dans le cas d'éléments linéiques (monodimensionnels).

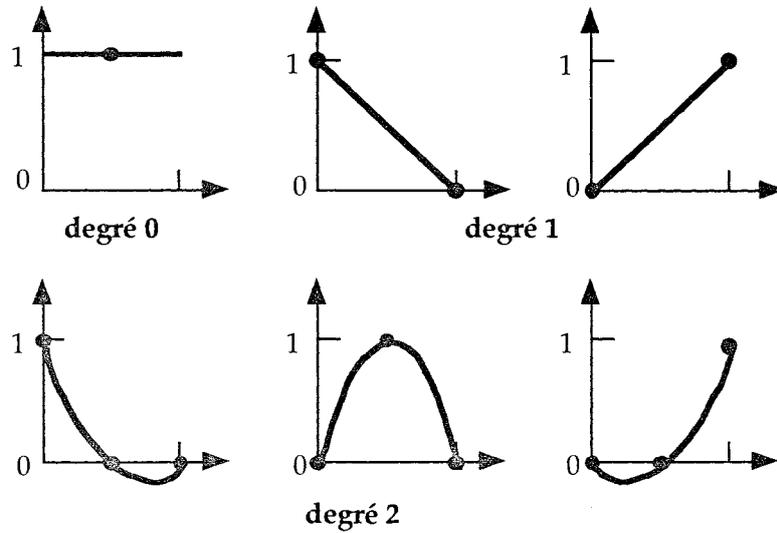


Figure 3.5 : Exemple de base polynomiale sur une maille monodimensionnelle

En règle générale, les numériciens prennent un sous-ensemble de ces bases qui garantit la continuité des fonctions d'interpolation entre les différentes mailles.

Pour ce faire, ils définissent ainsi les fonctions de base :

soit un triangle  $T$  ayant les points  $A, B$  et  $C$  pour sommets auquel on associe un système de coordonnées triangulaires.

$\square$  un point  $M$  du triangle a pour coordonnées  $a, b$  et  $c$  tel que :

$$\begin{aligned} aMA + bMB + cMC &= 0 \text{ et} \\ a + b + c &= 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

On définit alors une base des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  par l'ensemble des  $(k+1)(k+2)/2$  fonctions suivantes :

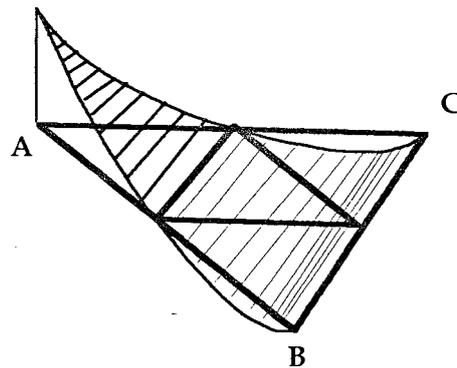
Soit  $M$  un point de coordonnées  $a, b, c$  [ZIENKIEWICZ] :

$$P_{lmn}(M) = l_1^k(a)l_m^k(b)l_n^k(c)$$

avec  $l, m, n$ , 3 entiers positifs tels que  $l+m+n = k$ .

$l_i^k(x)$  est une fonction d'interpolation de Lagrange, définie par :

$$\begin{aligned} l_i^k(x) &= \frac{\left(x - \frac{0}{k}\right)\left(x - \frac{1}{k}\right)\left(x - \frac{2}{k}\right)\dots\left(x - \frac{i-1}{k}\right)}{\left(\frac{i}{k} - \frac{0}{k}\right)\left(\frac{i}{k} - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{i}{k} - \frac{2}{k}\right)\dots\left(\frac{i}{k} - \frac{i-1}{k}\right)} \\ l_0^k(x) &= 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Figure 3.6 : Fonction  $l_0^2(a)$ 

Ces fonctions ont la propriété de valoir 1 sur un des nœuds régulièrement répartis de la maille et de s'annuler sur les autres. Le coefficient correspondant à l'interpolation de la fonction  $P_{lmn}$  est alors la valeur de la fonction à interpoler sur le seul nœud non nul de  $P_{lmn}$ . La condition de continuité mentionnée tout à l'heure correspond donc à forcer sur chaque nœud du bord de la maille une valeur unique qu'il partagera sur toutes les mailles auxquelles il appartient.

Par contre cette condition ne serait pas à garder sur les arêtes vives dans le cas d'une représentation par masses magnétiques.

### 3.4- Précision de l'interpolation de la grandeur

#### 3.4.a- Intérêt du calcul de précision d'interpolation

Avec les harmoniques sphériques, nous avons une propriété très intéressante de décroissance des paramètres avec des puissances croissantes de la distance, quand on augmente la profondeur du développement.

Il serait peut-être utile d'avoir une telle propriété dans le cas d'une modélisation sur cette surface maillée. Cela permettrait d'optimiser les calculs et le nombre de paramètres indépendants en fonction non seulement de la distance entre les pièces et les points de calculs mais aussi de la précision souhaitée.

Plus nous serons loin des facettes, moins il sera utile de mailler finement et moins il sera nécessaire d'aller profond dans l'interpolation des fonctions. Ainsi une pièce dont nous ne cherchons la valeur du champ qu'à l'infini serait modélisable par un maillage polyédrique extrêmement simple, comme par exemple un tétraèdre avec juste un paramètre par face. Nous pouvons d'ailleurs remarquer qu'une telle modélisation comporte 4 paramètres, ce qui avec la condition de la somme des masses magnétiques ou des dipôles normaux nuls sur la surface, donne 3 degrés de liberté correspondant aux trois composantes de

l'aimantation du dipôle équivalent à l'infini.

Si la pièce est de grande taille, nous pouvons de même moduler la précision de chaque facette en fonction de la distance facette/capteur. Il serait inutile de mailler plus finement. Cette souplesse existe dans les maillages des éléments finis, mais est impossible avec une modélisation en harmoniques sphériques.

$\square$  Les intégrales de frontière ne bénéficient pas de ces avantages car elles font interagir entre elles les différents points de la pièce et les distances en jeu sont des dimensions internes à l'objet modélisé. Pour une précision donnée des équilibres, ce sont les formes qui doivent être respectées avec une certaine précision, indépendante de la distance à laquelle nous calculerons postérieurement le champ. Le maillage doit alors conserver sa finesse et les calculs sont alourdis. En effet [EUVRARD] montre que l'ordre d'interpolation des géométries (c'est à dire la discrétisation des volumes) doit être supérieur à l'ordre d'interpolation des grandeurs surfaciques. Or, il n'est pas trivial d'approximer des surfaces quelconques par mieux que des facettes planes. Ainsi, dans ce cas, il est illusoire d'utiliser des fonctions d'interpolations plus raffinées que des fonctions constantes par morceaux.

### 3.4.b- Précision de l'interpolation sur la surface

Essayons de déterminer la précision de l'interpolation en fonction du degré  $k$  du polynôme et de la dimension des mailles. Cela permettra par la suite de choisir les fonctions d'interpolation et la taille des mailles.

D'après [DAUTRAY] ou [EUVRARD], nous avons une propriété intéressante de ces polynômes :

Si  $u$  est la fonction exacte à interpoler,  
 si  $v$  est le polynôme interpolant (base complète de degré  $k$ ),  
 si  $r$  est une dimension liée à la dimension maximale de l'élément fini, par exemple, le diamètre du plus petit cercle entourant l'élément,

si la fonction  $u$  est bornée et à dérivées bornées jusqu'à l'ordre  $k+1$ ,  
 alors

$$\exists C \in \mathbb{R} / |u - v| \leq C r^{k+1} |u| \quad (3.17)$$

Nous pouvons ainsi borner l'erreur d'interpolation sur la surface.

Nous pouvons aussi exprimer l'incertitude sur le champ, à une certaine distance  $d$  de l'élément :

Soit  $V_u$  le potentiel scalaire généré par la distribution de dipôles normaux  $u$  réels,

soit  $V_v$  le potentiel scalaire généré par la distribution de dipôles normaux  $v$ , interpolée,

comme l'équation de Laplace est linéaire,  $V_u - V_v$  est un potentiel qui est généré par la distribution de dipôles normaux  $u-v$ , il obéit donc à l'équation de Laplace, et c'est aussi une fonction décroissante avec la distance en au moins  $1/d^2$ .

Le problème du choix du maillage est d'avoir suffisamment peu de degrés de liberté pour ne pas compliquer les calculs (et ne pas rendre le problème trop peu inversible), mais suffisamment pour rendre compte de toutes les inductions possibles et mesurables.

Par ailleurs, dans l'annexe B2, nous démontrons la loi d'évolution de l'erreur sur le potentiel scalaire, en fonction de l'ordre des fonctions d'interpolation de la grandeur surfacique. Nous avons fait le calcul dans le cas où la grandeur modélisée est la répartition de masses magnétiques car les calculs sont plus simples.

Nous démontrons alors que si nous interpolons la densité de masses magnétiques par une base complète de polynômes de degré  $k$ , l'erreur sur le potentiel calculé à une distance  $d$  décroît comme  $1/d^{k+1}$ .

### 3.4.c- Compromis entre la finesse du maillage et la profondeur d'interpolation

Nous venons de voir que si nous augmentons l'ordre des polynômes d'interpolation, nous avons une amélioration de la précision de la modélisation pour une distance donnée. Montrons maintenant que nous avons de même une amélioration de la précision quand nous diminuons la taille du maillage.

Nous venons de voir que la précision de la fonction d'interpolation sur la maille était telle que :

$$\exists C \in \mathbb{R} / |u - v| \leq C r^{k+1} |u| \quad (3.17)$$

avec  $r$  une valeur caractéristique de la dimension de la maille. Nous pouvons prendre, comme dans la démonstration, le rayon du plus petit cercle entourant le triangle, par exemple.

Pour la norme de la fonction  $u$ , nous utiliserons la norme des espaces de Sobolev [DAUTRAY].

$$|u|_{k,1} = \sum_{j=0}^k \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial^j u}{\partial M^j} \right|^k dS \quad (3.18)$$

Soit  $\Sigma_i$ , un sous-maillage en  $n$  éléments de la maille  $\Sigma$ , telle que :

$$\Sigma = \cup \Sigma_i$$

soit  $u_i$  la restriction de la répartition de masse magnétique sur la sous-maille  $\Sigma_i$ ,  
soit  $v_i$  l'interpolation de la fonction  $u_i$  sur la sous-maille  $\Sigma_i$ ,  
alors :

$$\text{pour } i \in \{1, 2, \dots, n\} \exists C_i \in \mathbb{R} / |u_i - v_i| \leq C_i r_i^{k+1} |u_i| \quad (3.19)$$

Or les normes de Sobolev sont additives sur une réunion d'ensembles d'intersections nulles deux à deux. D'où si on note  $C'$ , le maximum des  $C_i$  et  $r'$  le maximum des  $r_i$ , alors (3.19) devient :

$$\exists C' \in \mathbb{R} / |u - \cup v_i| \leq C' r'^{k+1} |u| \quad (3.20)$$

que nous devons comparer à :

$$\exists C \in \mathbb{R} / |u - v| \leq C r^{k+1} |u| \quad (3.21)$$

Nous avons donc augmenté la précision minimum, puisque  $r'$  sera inférieure à  $r$ , mais nous avons aussi augmenté le nombre d'inconnues.

Pour étudier le compromis "degré d'interpolation des fonctions de base/ finesse du maillage" en conservant le nombre d'inconnues, nous allons quantifier cette valeur de  $r'$  dans le cas particulier de triangles équilatéraux réguliers (figure 3.7).

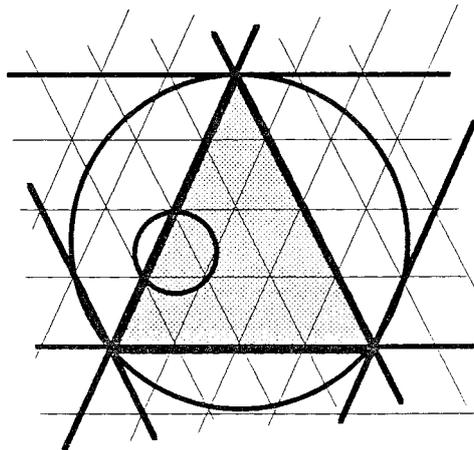


Figure 3.7 : Maillage régulier d'une surface plane

Soit un triangle équilatéral de côté de longueur  $a$ . Ce triangle est inscrit dans le

cercle de rayon  $r = a/\sqrt{3}$ . Nous pouvons y modéliser une grandeur surfacique de deux manières qui possèdent le même nombre d'inconnues :

- soit nous le subdivisons en  $k^2$  sous triangles équilatéraux de côté de longueur  $a/k$  (et donc de rayon du cercle entourant  $a/k\sqrt{3}$ ) et nous interpolons sur ce réseau par des fonctions polynomiales linéaires. En tenant compte des conditions de continuité entre les mailles, nous avons un total de  $k^2/2$  inconnues et un résidu de norme inférieure à  $C(r/k)^2|u|$  dont l'effet à la distance  $d$  s'amortit en  $(r/kd)^2$  (convergent pour  $d > r/k$ ).

- soit nous utilisons une fonction d'interpolation de degré  $k$ . Cela demande aussi  $k^2/2$  inconnues (avec les mêmes conditions de continuité), et nous avons un résidu de norme inférieure à  $C'r^{k+1}|u|$  dont l'effet à la distance  $d$  s'amortit en  $(r/d)^{k+1}$  (convergent pour  $d > r$ ).

Nous pouvons schématiser la précision en fonction du degré d'interpolation des fonctions de bases par la figure 3.8.

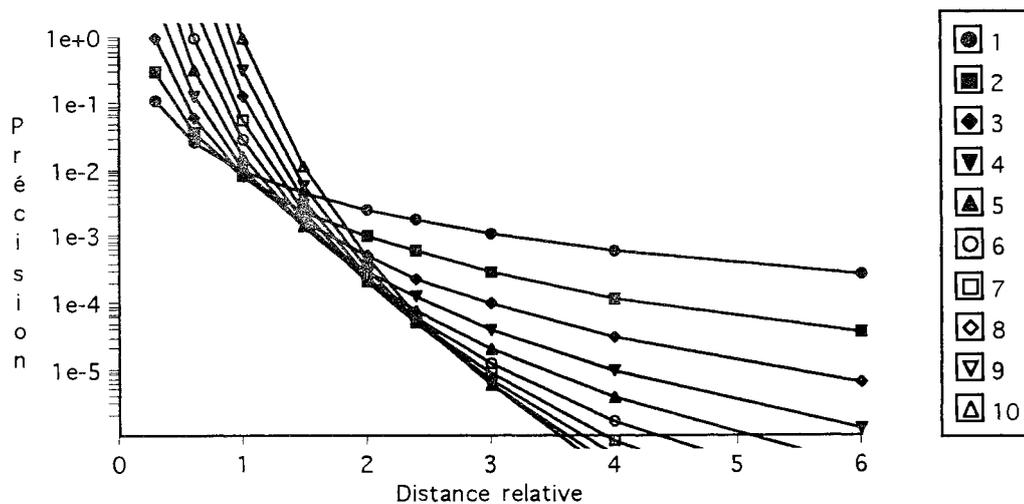


Figure 3.8 : Précision de la modélisation en fonction du degré d'interpolation (en légende) et de la distance relative

Il est plus intéressant d'avoir de grands degrés d'interpolation pour les grandes distances et des faibles degrés à courte distance. La plus grande simplicité de calcul des bases de degré faible pèse en fait très lourd dans le choix de cette alternative.

Il est aussi utile de comparer une discrétisation comme celle présentée et une décomposition en harmoniques sphériques. Cependant le calcul rigoureux est très délicat compte tenu du fait que la description géométrique est différente : les

harmoniques sphériques s'appliquent surtout sur des ellipsoïdes de révolutions, alors que les bases présentées se dessinent autour de polyèdres (éventuellement irréguliers).

Ce que l'on peut en dire est que la décomposition en harmoniques sphériques est un peu un passage à la limite sur une facette (devenue courbe) et un degré d'interpolation infini. Il se comporte donc beaucoup mieux à grande distance et moins bien à courte distance.

### 3.5- Avantages et inconvénients d'un maillage surfacique

Comme nous l'avons fait pour les harmoniques sphériques, nous allons chercher à cerner les avantages et les inconvénients d'une modélisation par une grandeur sur une surface entourant les anomalies magnétiques.

#### 3.5.a - Diversité des géométries

Tout d'abord, une forte limitation des harmoniques sphériques disparaît parce que nous ne sommes plus limités à des espaces ellipsoïdaux de révolution. Toute surface fermée convient (tant qu'elle n'est pas trouée). La souplesse est aussi augmentée par la liberté de choix que permet le maillage. Nous pouvons augmenter l'ordre des polynômes pour améliorer la précision à grande distance ou diminuer la taille des mailles pour augmenter la précision à faible distance. Mais mieux encore, nous pouvons adapter la taille de chaque maille à la distance entre la maille et les points de mesure. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que nous n'atteindrons ni la précision à grande distance des harmoniques, ni le faible nombre de degré de liberté pour une modélisation à grande distance.

Dans le cas du moteur Baudouin, nous avons pu voir le gain que nous avons dans la réduction du volume du modèle et de la distance entre le modèle et l'anomalie.

#### 3.5.b- Interprétation des grandeurs

Un autre avantage se trouve être de pouvoir choisir une grandeur physique qui soit plus facilement interprétable que les harmoniques. Avec un peu d'expérience, l'analyse des dipôles normaux ou des masses magnétiques identifiées, doit permettre de connaître dans certain cas la position ou la répartition des sources réelles plus facilement qu'avec les harmoniques. En revanche, la coque devient plus spécifique à la source et on perd la généralité de la représentation. Bien que ce ne soit pas obligatoire, nous serons tentés de définir une surface  $\Sigma$  différente pour chaque pièce à mesurer, pour optimiser la distance des capteurs.

Tout le reste du document est consacré à l'identification des grandeurs surfaciques, en particulier dans le cas du moteur Baudouin. Cependant, il nous semble opportun de présenter par anticipation les résultats obtenus, pour illustrer ce chapitre et montrer à quoi peuvent ressembler ces répartitions équivalentes dans un cas réel.

Pour les fichiers sélectionnés au chapitre 1, nous avons présenté figure 3.9, les densités de dipôles normaux identifiées sur le moteur Baudouin, ainsi que les positions relatives de quelques uns des points de mesures utilisés (nous reviendrons sur ce point).

Sur cette figure, il est très facile de voir les aimantations générales du moteur et de reconnaître par exemple, si l'aimantation est verticale, longitudinale ou transversale, ainsi que le sens de l'aimantation.

En comparant par exemple le fichier 0017 avec la figure 3.2, on s'aperçoit à quel point l'aimantation induite longitudinale est proche d'une densité d'aimantation volumique et homogène.

Parmi les caractéristiques communes, nous pouvons aussi remarquer que les aimantations induites sont plus régulières (peu de termes d'ordre élevé) que les aimantations permanentes.

De même, nous pouvons nous apercevoir (ce qui est quasiment impossible avec un développement en harmoniques sphériques ou ellipsoïdaux) que sur toutes les mesures, la densité de dipôles est relativement plus importante au niveau de l'échangeur eau/eau que dans le reste du modèle. Une explication possible est que malgré les apparences (test au contact avec un aimant), il existe quelques sources internes dans l'échangeur que nous avons ignorées.

Enfin, l'identification de l'aimantation permanente transversale (fichier 0099) montre deux curiosités.

Tout d'abord la répartition d'aimantation est fortement décentrée vers le dessus du moteur (nous pouvons par exemple comparer avec l'aimantation induite transversale). Une analyse un peu plus poussée, nous a montré que les injecteurs qui sont des petits tuyaux placés transversalement sur le dessus du moteur (voir figure 1.1), étaient situés très près des boucles de courants qui nous ont permis d'aimanter le moteur. Ils se seraient alors fortement aimantés comparative-ment au moteur, pour lequel cette direction n'est pas une direction préférentielle d'aimantation.

Ensuite, nous pouvons voir une inversion des signes des dipôles normaux sur le bas du moteur. Il s'agit d'un artefact de l'identification sur lequel nous reviendrons au chapitre suivant.

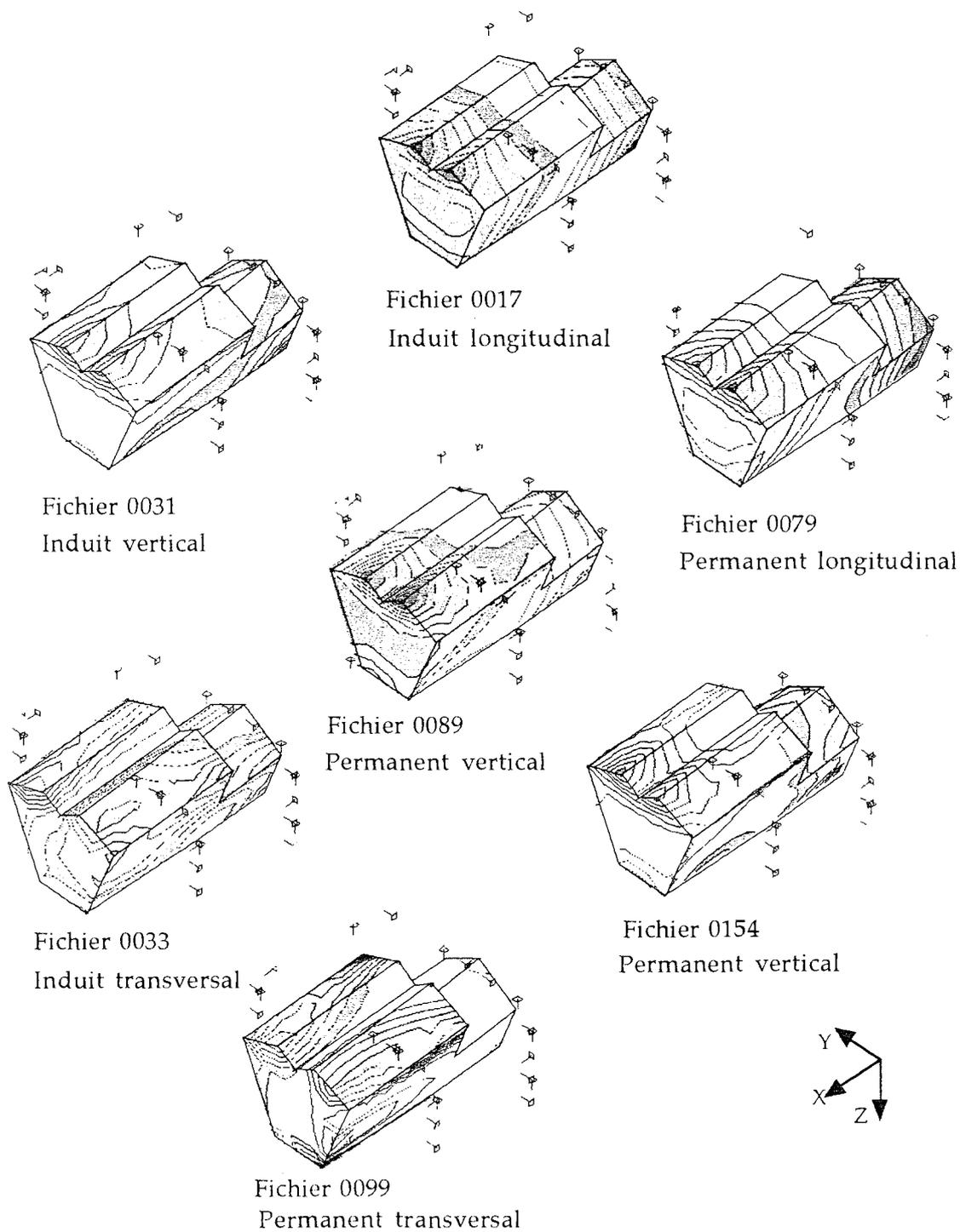


Figure 3.9 : Identification des états magnétiques du moteur Baudouin

### 3.5.c- Lourdeur et imprécision des calculs numériques

Si les formules permettant le calcul du potentiel et du champ, à partir d'une répartition de dipôles ou de masses, sont plus simples que les formules des harmoniques sphériques, leur calcul ne peut se faire que de manière numérique, ce qui entraîne à la fois des opérations plus longues et un résultat moins précis. Généralement, nous utilisons une intégration par la méthode de Gauss avec un ordre dépendant de la distance entre la maille et le point de calcul, pour calculer l'effet de la grandeur surfacique.

### 3.5.d- Lourdeur de la description géométrique

Il faut définir et décrire numériquement la surface  $\Sigma$ . La liberté plus grande a son contrepoint qui est de saisir informatiquement cette géométrie. La description de la surface  $\Sigma$  puis le maillage de celle-ci sont des opérations longues et complexes qui nécessitent l'utilisation d'outils lourds tels qu'un mailleur. Cependant, comme nous l'avons présenté dans le paragraphe précédent, le mailleur peut rester sommaire et ne créer que des mailles de taille inférieure aux limites données par la fidélité de reconstitution du champ en un point donné.

Il est à remarquer d'ailleurs qu'il est inutile et même coûteux, de saisir des détails de la géométrie qui seraient plus petits que la taille optimale des mailles.

### 3.6.e- Représentation locale

La représentation de la grandeur magnétique est une représentation locale. Cette propriété est à la fois un avantage et un inconvénient. L'avantage tient du fait que, comme mentionné précédemment, l'interprétation physique des résultats d'une identification s'en trouve facilitée. Par contre, le calcul est beaucoup plus sensible à la position des points de mesure qui servent à l'identification. Ce problème va être exposé dans le chapitre suivant.

## 4.- Amélioration de la base

### 4.1- Recherche d'une représentation globale de l'état magnétique

#### 4.1.a- Représentation globale contre représentation locale

Le but de notre problème est, rappelons le, de résoudre un problème inverse. Or nous avons déjà mentionné à plusieurs reprises que nous nous heurtons à un problème sous-dimensionné et donc que pour chaque ensemble de mesures, nous devons nous attendre à trouver plusieurs solutions du problème sans obligatoirement trouver un critère pour en préférer l'une à l'autre.

Une grande partie de l'algorithme va donc être de choisir une solution unique parmi l'ensemble admissible.

C'est dans cette optique que nous avons développé une représentation par harmoniques sphériques. Celle-ci, ordonnant les différentes aimantations en fonction de leur effet à distance, sépare de manière naturelle, les effets observables de l'aimantation des sources, des effets inobservables.

Dans l'inversion, nous ne chercherons à préciser à l'aide de la mesure que les phénomènes observables, les autres termes seront soit ignorés (ils prendront alors la valeur 0 par sécurité), soit déduits d'informations extérieures (information a priori).

La représentation par harmoniques sphériques est une représentation que nous appellerons "globale", parce qu'une variation d'un des coefficients du développement en harmoniques sphériques, correspondra à un changement de l'état magnétique de l'objet entier. Réciproquement, le changement d'aimantation d'une petite partie de l'objet étudié se traduira par la modification de tous les termes du développement.

Au premier abord, une telle propriété pourrait être considérée comme un inconvénient puisqu'il ne permet pas un passage intuitif entre une description magnétique de l'objet et sa représentation. C'est en fait un avantage et nous al-

lons voir pourquoi.

Nous avons comme hypothèse de départ que nous ne connaissons que très peu la structure interne de l'objet à mesurer. Quand nous exploitons le signal donné par les capteurs, il n'y a pas de raison particulière à privilégier un point de l'objet plutôt qu'un autre, mais par contre il est plus normal de faire contribuer tout l'objet de manière répartie.

#### 4.1.b- Nécessité d'une représentation globale

Prenons un exemple simpliste qui permet de fixer les idées. Supposons un objet bidimensionnel découpé en 12 mailles entouré par exemple de 4 capteurs.

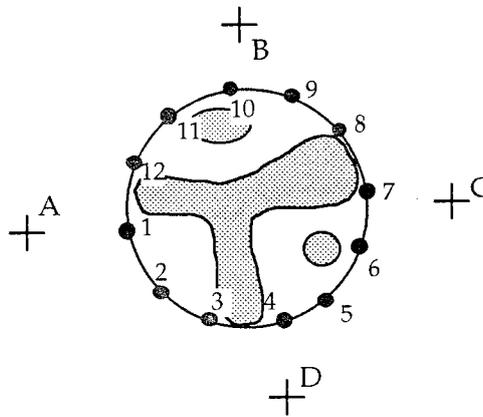


Figure 4.1 : Schéma de l'identification d'une anomalie

Nous poserons notre système sous la forme

$$B = \mathbb{F}A \quad (4.1)$$

avec B un vecteur de 4 éléments si les capteurs sont monoaxes et A un vecteur de 11 éléments correspondant aux 11 degrés de liberté du système (nombre de nœuds moins une équation car l'intégrale sur la surface de la grandeur surfacique doit rester nulle).

Quelle base des grandeurs surfaciques va t'on utiliser ?

Le premier réflexe est d'utiliser directement les fonctions d'interpolation de la grandeur surfacique. Seulement ces fonctions n'appartiennent pas à l'ensemble des solutions recherchées puisqu'elles ne garantissent pas la nullité de la grandeur sur la surface du modèle.

L'approche naïve dans ce cas, est de choisir un nœud parmi les douze, d'identifier sur les onze nœuds restants et de calculer le douzième pour garantir la nullité. Mais pourquoi en particulieriser un plutôt qu'un autre ? On s'aperçoit déjà

par cette condition que la grandeur surfacique n'est pas elle-même locale.

Même si cette difficulté peut être contournée par un changement de variables, il apparaît tout de suite un autre obstacle.

Sans trop dévoiler les chapitres suivants, nous pouvons dire que l'équation va être résolue par moindres carrés, et que la solution va être du type :

$$A = \mathbb{R}^t(\mathbb{R}\mathbb{F}^t)^{-1}B \quad (4.2)$$

Cette équation permet de trouver parmi toutes les solutions possibles pour A, celle de norme minimale. Or nous nous apercevons, en regardant la figure 4.1, que certains nœuds se trouvent plus près des capteurs que d'autres. Comme l'effet des sources sur le champ est en inverse cube de la distance (dans le cas d'une représentation dipolaire), à effet identique, il est du point de vue de la norme de la solution, plus "économique" de favoriser les nœuds proches des capteurs que les nœuds lointains.

Ainsi, dans notre exemple, les nœuds 1, 4, 7 et 10 sont fortement favorisés par rapport aux autres. C'est à dire que la solution est très liée aux emplacements choisis pour les capteurs ainsi qu'à la forme du maillage effectué sur la coque.

#### 4.1.c- Tentatives de solutions

Nous venons de voir que l'utilisation brutale de la représentation surfacique risque, si on n'y prête attention de favoriser des solutions aux dépens d'autres sans raison physique à cela.

##### Pondération des nœuds

Dans les moindres carrés, pour favoriser certaines solutions par rapport à d'autres (ou le contraire), on peut pondérer les équations et par exemple, diminuer artificiellement l'amplitude des nœuds en fonction de leur distance aux capteurs.

Le réglage des coefficients est bien entendu délicat, sans réelle théorie pour les déterminer. Il nous paraît plus sûr de se fonder sur des critères physiques pour opérer.

##### Corrélation entre les nœuds voisins

En fait, nous refusons une solution qui augmenterait artificiellement les sources près des capteurs pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, comme nous l'avons dit, il n'y a pas de motif pour que les sources

soient plus près des capteurs (sauf bien entendu, si on possède des informations a priori qui nous feraient placer les capteurs près des sources).

Mais, aussi une telle solution génère en plus des champs observables, des champs inobservables non nuls. C'est à dire que nous n'aurons pas les solutions les plus régulières du problème, ni les plus stables.

Pour forcer la régularité de la solution, nous pouvons introduire une corrélation entre les nœuds voisins qui serait fonction de la distance.

Cette démarche peut paraître alléchante, mais le réglage des coefficients n'est pas simple, si on veut être sûr de conserver toutes les solutions observables et d'éliminer la plus grande partie des solutions non observables.

La recherche de ces vecteurs se complique d'autant plus que les fonctions de corrélation recherchées doivent garantir le maintien de la somme de la distribution sur la surface nulle.

#### Orthonormalisation de la représentation des dipôles normaux

Nous pouvons enfin nous inspirer du développement en harmoniques sphériques et donc effectuer un changement de repère de la base de sources surfaciques qui soit globale et qui possède le plus grand nombre possible des propriétés des harmoniques.

Parmi les propriétés que nous souhaitons avoir, nous pouvons mentionner :

- orthonormalisation des fonctions de base : nous cherchons à avoir un ensemble rassemblant des fonctions qui soient le plus possible indépendantes les unes des autres et qui correspondent au même "ordre de grandeur" vis à vis des sources magnétiques pour ne pas favoriser une des fonctions par rapport aux autres dans la représentation.
- une propriété intéressante des harmoniques sphériques est d'avoir un ensemble de fonctions qui constitue facilement un développement limité pour les champs magnétiques. Les différents vecteurs de base rassemblent des sources dont les effets à distance s'amortissent de plus en plus vite au fur et à mesure que l'on prend des vecteurs plus loin dans la base. Nous chercherons à garder cette propriété.
- enfin, nous allons chercher une base qui soit la plus intrinsèque possible et qui ne dépende que de la surface  $\Sigma$ . Elle ne doit pas dépendre des positions des points de mesures, ni du degré de précision souhaité, ni même (si possible) de la représentation physique choisie.

Supposons que nous prenions comme grandeur surfacique, le potentiel à la surface.

Si nous définissons comme base, les premières harmoniques sphériques à partir d'un point situé à l'intérieur de la surface, où plutôt les interpolations sur le maillage de ces fonctions, nous obtenons un ensemble  $\{v_{\mathbf{m}}\}$  de vecteurs :

$$v_{\mathbf{m}}(M) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_0^{n+1}} Y_n^{\mathbf{m}}(\theta_0, \varphi_0) \quad (4.3)$$

et le potentiel en tout point de  $\Omega_e$  correspondant à la répartition  $v_{\mathbf{m}}$ , est :

$$V_{\mathbf{m}}(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{\mathbf{m}}(\theta, \varphi) \quad (4.4)$$

(solution triviale du problème de Dirichlet)

L'ensemble des fonctions surfaciques forme une base de  $\Omega_e$  correspondant aux amortissements recherchés mais elle n'est pas orthonormée (sauf si  $\Omega_i$  est une sphère).

△ Nous savons que l'ensemble  $\{v_{\mathbf{m}}\}$  est une base dans le cas d'une sphère centrée sur l'origine. Nous pouvons raisonnablement penser que  $\{v_{\mathbf{m}}\}$  le reste pour beaucoup de surfaces  $\Sigma$ . Mais il existe des cas (qui restent à préciser) où nous n'avons pas une base. Nous pouvons en construire des exemples comme celui de la figure 4.2. Dans ce cas, les valeurs de  $v_{\mathbf{m}}$  sont toujours liées entre les zones 1, 2 et 3 (même valeur de  $\theta$  et  $\varphi$ ) alors que les grandeurs surfaciques peuvent être quelconques.

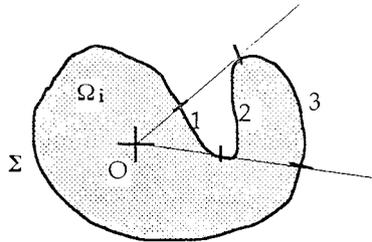


Figure 4.2: Exemple de surface où  $\tau_i$  n'est pas une base

Nous pouvons alors l'orthonormaliser par la méthode de Gram-Schmidt, mais dans ce cas, on risque de perdre les propriétés de décroissance.

Prenons le produit scalaire que nous utilisons dans le cas de la sphère :

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \iint_{M \in \Sigma} v_1(M) v_2(M) d\Sigma \quad (3.1)$$

Nous pouvons cependant conserver les décroissances en partant des termes d'ordre élevé.

Soit l'ensemble de départ tronqué à l'ordre  $n$   $\{v_{1-1}, v_{10}, \dots, v_{nn}\}$ ,

Si nous orthonormalisons à partir du dernier terme en décrémentant les indices, chaque terme est une combinaison linéaire de termes de degrés égaux ou supérieurs, son amortissement est équivalent ou supérieur. En fait, pour des raisons de degrés de libertés, l'amortissement est conservé.

Nous nous retrouvons donc avec une base orthonormée qui obéit aux différents critères recherchés. Si la répartition en potentiel surfacique ne nous convient pas, nous pouvons toujours chercher des solutions exprimées en fonction d'autres grandeurs en utilisant les formules d'équivalence (qui utilisent les équations de Green).

Mais, hélas, une telle base ne peut nous convenir, car elle n'est pas suffisamment intrinsèque. Si pour une raison ou une autre, nous devons tronquer le développement limité à une autre valeur de  $n$ , la nouvelle base trouvée sera totalement différente. Elle dépend donc beaucoup trop de la procédure de calcul.

## 4.2- Utilisation d'un nouveau produit scalaire sur $\Sigma$

### 4.2.a- Définition d'un nouveau produit scalaire

Après un certain nombre de tâtonnements, nous avons trouvé une représentation satisfaisante vis à vis des propriétés recherchées. Pour commencer nous devons utiliser un autre produit scalaire.

Soit  $\mathbb{V} = \{v\}$ , l'ensemble des distributions scalaires sur  $\Sigma$  satisfaisant la propriété suivante :

$$\iint_{M \in \Sigma} v(M) d\Sigma = 0 \quad (4.5)$$

Soit  $v$  une distribution de  $\mathbb{V}$ , nous allons alors définir une nouvelle distribution liée à  $v$ .

Considérons le problème de Dirichlet intérieur suivant : cherchons la fonction  $\varphi(P)$  définie dans  $\Omega_i$ , telle que

$$\forall M \in \Sigma \varphi(M) = v(M) \quad (4.6)$$

et qui soit harmonique dans  $\Omega_i$ . Nous avons vu que  $\varphi(P)$  existe et est unique, nous définissons alors  $w$  :

$$\forall M \in \Sigma \quad w(M) = \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \quad (4.7)$$

Soit  $v_i$  et  $v_j$  deux distributions de  $\mathbb{V}$ , nous posons (en notant le volume de  $\Omega_i$  par  $V$ ) :

$$\langle v_i, v_j \rangle = V \iint_{M \in \Sigma} v_i w_j d\Sigma \quad (4.8)$$

Rq L'introduction du coefficient  $V$  permet d'avoir une aimantation globale de  $1 \text{ Am}^2$  pour un vecteur normé correspondant à une densité d'aimantation constante.

#### 4.2.b- Interprétation de la représentation duale $w$

Nous démontrons dans l'annexe B.3.a que nous avons bien un produit scalaire. Pendant cette démonstration, nous montrons aussi une propriété importante qui nous est utile pour l'interprétation.

$$\begin{aligned} \langle v_j, v_i \rangle &= V \iint_{M \in \Sigma} v_j w_i d\Sigma \\ &= V \iiint_{P \in \Omega_i} \vec{\nabla} \varphi_j \cdot \vec{\nabla} \varphi_i d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si  $v$  est une distribution de dipôles normaux, nous utilisons le produit scalaire présenté. Mais nous avons quelques propriétés intéressantes :

Dans ce produit scalaire, pour toute distribution surfacique  $v$  de dipôles normaux, nous avons défini une autre distribution surfacique  $w$ . Cette distribution (qui appartient aussi à  $\mathbb{V}$ ) représente la répartition de masse magnétique qui crée le même champ dans  $\Omega_e$  que  $v$ .

A partir de la troisième formule de Green (annexe A), il est facile de démontrer que pour tout point  $P \in \Omega_e$  nous avons la relation :

$$V(P) = \iint_{M \in \Sigma} -v \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = \iint_{M \in \Sigma} -w G d\Sigma \quad (4.10)$$

qui démontre la permutabilité entre une distribution  $v$  de dipôles normaux et une distribution  $w$  de monopôles.

#### 4.2.c- Extension du produit scalaire dans le cas d'une distribution de monopôles

La propriété précédente permet de définir un produit scalaire dans le cas d'une distribution de monopôles.

Soit  $w$  une distribution de monopôles, nous définissons  $\psi$  fonction harmonique de  $\Omega_j$  telle que :

$$\forall M \in \Sigma \quad \frac{\partial \psi(M)}{\partial n} = w(M) \quad (4.11)$$

avec la contrainte de jauge sur  $\psi$  qui garantit que le problème est bien posé. puis la fonction

$$v / \forall M \in \Sigma \quad v(M) = \psi(M) \quad (4.12)$$

alors le produit scalaire est le suivant :

soit  $w_i$  et  $w_j$  deux distributions de  $\mathbb{V}$ , nous posons :

$$\langle w_i, w_j \rangle = V \iint_{M \in \Sigma} v_i w_j d\Sigma \quad (4.13)$$

### 4.3- Base orthonormée de la représentation surfacique

#### 4.3.a- Construction de la base

Munis du produit scalaire que nous venons de définir, nous allons considérer l'ensemble de fonctions suivantes :

Soit  $O$  un point de  $\Omega_j$ , considérons la distribution de dipôles normaux  $\tau_{nm}$  (avec  $n$  variant de 0 à  $\infty$  et  $m$  variant de  $-n$  à  $n$ ) :

$$\forall M \in \Sigma \quad \tau_{nm}(M) = r_0^n Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \quad (4.14)$$

Nous allons orthonormaliser cet ensemble de vecteurs par la méthode de Gram-Schmidt avec  $n$  et  $m$  croissant, nous définissons alors un ensemble  $\{v_{nm}\}$  qui correspond à notre nouvelle base (après retrait de  $v_{00}$ ).

### 4.3.b- Décroissance des effets des différents termes en fonction de la distance

#### Propriétés préliminaires

$\square$  Pour simplifier les notations, nous allons définir les conventions suivantes.

Nous utiliserons pour les vecteurs de la base et pour les harmoniques sphériques indifféremment un indice simple  $i$  ou double  $n,m$  :

$$v_i = v_{nm}, \tau_i = \tau_{nm}.$$

Si nous posons  $i=n^2+n+m$ , nous pouvons garantir la bijectivité entre les deux représentations.

Etendons la fonction  $\tau_i$  sur tout  $\Omega_i$ . Comme  $v_i$  est une combinaison linéaire de  $\tau_i$ , nous pouvons aussi l'étendre sur  $\Omega_i$ .

Si nous reprenons le produit scalaire, nous avons vu la propriété :

$$\langle v_i, v_j \rangle = V \iint_{M \in \Sigma} v_i v_j d\Sigma = V \iiint_{M \in \Omega_i} \vec{\nabla} v_i \cdot \vec{\nabla} v_j d\Omega \quad (4.9b)$$

Par définition,  $v_i$  est une combinaison linéaire de  $\tau_j$  avec  $j \leq i$ , il existe donc pour tout  $n$  donné, une matrice  $\mathbb{M}$  triangulaire inférieure de rang  $n$ , telle que :

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \dots \\ \tau_n \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

#### $\{v_i\}$ est une base orthonormée

Si  $\{\tau_i\}$  est une base des fonctions définies sur la surface  $\Sigma$  de moyenne nulle, alors par construction (orthonormalisation de Gram-Schmidt),  $\{v_i\}$  est une base orthonormée des fonctions de  $\Sigma$  et donc des potentiels de  $\Omega_e$ .

$\triangle$  Comme pour la base des  $\{v_{nm}\}$  du début du chapitre, il est facile de montrer que les  $\{\tau_i\}$  sont une base dans le cas d'une sphère centrée sur l'origine. Nous pouvons tout autant supposer que les fonctions  $r^n Y_n^m$  ne formeront plus un système libre dans une situation comme celle de la figure 4.2.

$$\langle v_i, \tau_j \rangle = 0 \text{ si } j < i$$

Nous avons vu que  $\mathbb{M}$  est une matrice triangulaire inférieure. Comme  $\mathbb{M}$  est une matrice régulière, alors  $\mathbb{M}^{-1}$  existe et est une matrice triangulaire inférieure. Nous en déduisons donc qu'il existe une combinaison linéaire telle que :

$$\exists \{ \lambda_k \} \in \mathbb{R}^{j+1} / \tau_j = \sum_{k=0}^j \lambda_k v_k \quad (4.16)$$

D' où

$$\begin{aligned} \langle v_i, \tau_j \rangle &= \sum_{k=0}^j \lambda_k \langle v_i, v_k \rangle \\ &= 0 \text{ si } j < i \end{aligned} \quad (4.17)$$

Le potentiel créé par  $v_i$  décroît en fonction de la distance comme  $1/r^{n+1}$

Calculons le potentiel créé par la distribution de dipôles normaux sur la surface  $v_i$ .

$$V(P) = \iint_{M \in \Sigma} -v_i(M) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n} d\Sigma \quad (4.18)$$

Si nous appliquons la première formule de Green, nous obtenons :

$$V(P) = - \iiint_{M \in \Omega_i} \vec{\nabla}_M v_i(M) \vec{\nabla}_M G(M,P) d\Omega \quad (4.19)$$

La fonction de Green  $G(M,P)$  n'est autre que la fonction  $1/d$  à un coefficient près. Comme nous l'avons déjà fait dans le second chapitre, nous pouvons décomposer  $G$  en fonction des harmoniques sphériques. Nous avons alors après permutation de la somme et de l'intégrale :

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \iiint_{M \in \Omega_i} \langle \vec{\nabla}_M(v_i), \vec{\nabla}_M(\tau_m) \rangle d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n(j)+1}} Y_{n(j)}^{m(j)}(\theta, \varphi) \iiint_{M \in \Omega_i} \langle \vec{\nabla}_M(v_i), \vec{\nabla}_M(\tau_j) \rangle d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n(j)+1}} Y_{n(j)}^{m(j)}(\theta, \varphi) \langle v_i, \tau_j \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

Or nous venons de voir que si  $j < i$ , alors  $\langle v_i, \tau_j \rangle = 0$

D'où

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n(j)+1}} Y_{n(j)}^{m(j)}(\theta, \varphi) \langle v_i, \tau_j \rangle \quad (4.21)$$

C'est à dire que le potentiel créé par  $v_{rm}$  s'amortit au moins en  $1/r^{n+1}$ .

#### 4.3.c- Base orthonormée des aimantations de $\Omega_i$

Nous avons montré que les répartitions des  $v_{rm}$  étaient (sous des conditions qui restent à préciser pour  $\Sigma$ ) une base orthonormée des répartitions de dipôles normaux sur la surface  $\Sigma$ . Cependant, nous pouvons penser que le produit scalaire que nous avons introduit reste très artificiel et ne s'appuie pas sur la normalisation des phénomènes physiques.

Nous pouvons montrer que ce n'est pas le cas et que c'est une orthonormalisation de l'ensemble des sources possibles de  $\Omega_i$ .

Soit une distribution d'aimantation  $\vec{m}$  dans  $\Omega_i$ . Celle-ci définit un champ de vecteurs absolument quelconque dans  $\Omega_i$ . Nous pouvons alors définir pour ce champ le produit scalaire "naturel" :

$$\langle \vec{m}_1, \vec{m}_2 \rangle = \iiint_{\Omega_i} \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 d\Omega \quad (4.22)$$

Nous pouvons faire une analogie immédiate avec l'expression du produit scalaire défini sous la forme :

$$\langle v_i, v_j \rangle = V \iint_{M \in \Sigma} v_i w_j d\Sigma = V \iiint_{M \in \Omega_i} \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_j d\Omega \quad (4.9)$$

L'ensemble  $\{\vec{\nabla} \varphi_i\}$  est générateur d'un sous-espace vectoriel des champs de vecteurs de  $\Omega_i$ . En fait, il s'agit d'une base orthonormée des aimantations qui créent un champ non nul à l'extérieur d'une sphère englobant  $\Omega_i$ .

Rq Il est notable que les 3 premiers termes de la base correspondent aux distributions d'aimantations constantes dans le volume selon les trois directions princi-

pales.

A un coefficient de normalisation près, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^{-1} = -r \sin \theta \sin \varphi = -y \\ \varphi_1^0 = r \cos \theta = z \\ \varphi_1^1 = -r \sin \theta \cos \varphi = -x \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \varphi_1^{-1} = -\vec{e}_y \\ \vec{\nabla} \varphi_1^0 = \vec{e}_z \\ \vec{\nabla} \varphi_1^1 = -\vec{e}_x \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

#### 4.3.d- Représentation dans le cas du moteur Baudouin

Naturellement, cette base a de nombreuses similitudes avec les harmoniques sphériques, avec l'avantage supplémentaire d'être orthonormalisée sur une surface quelconque. Pour s'en convaincre tout à fait, nous pouvons représenter sous forme de dipôles normaux quelques uns des vecteurs de base sur la surface du modèle du moteur Baudouin (Figure 4.3  $\Delta$  pour des raisons techniques, le premier vecteur est inversé).

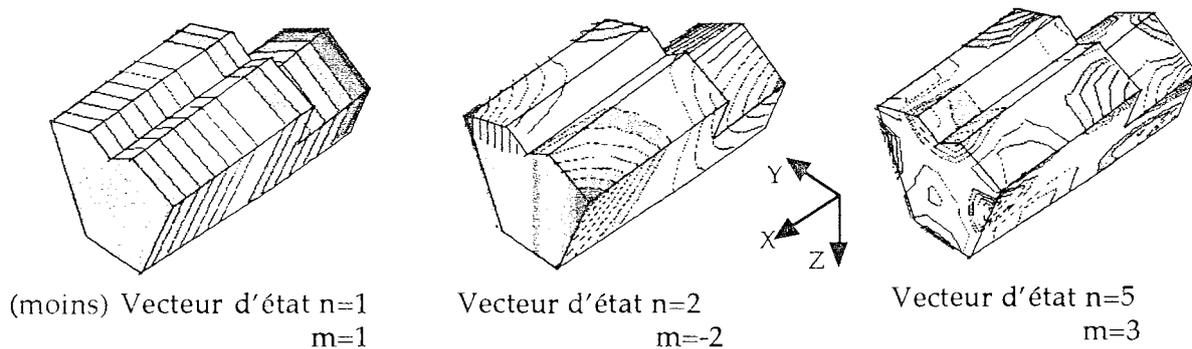


Figure 4.3 : Trois termes de la nouvelle base orthonormées

Nous pouvons faire immédiatement le rapprochement avec les termes équivalents en harmoniques sphériques. Et nous voyons que nous avons une sorte de généralisation à une forme quelconque des harmoniques.

$\square$  On pourrait objecter que dans le cas des harmoniques sphériques nous avons représenté le potentiel à la surface, alors qu'ici nous avons calculé la densité de dipôles normaux. En fait, dans le cas de la sphère, on peut montrer que les deux sont homothétiques.

#### 4.4- Problèmes pratiques de la construction de la base orthonormée

Notre nouvelle base présente des aspects assez pratiques, mais il reste quand même au moins un inconvénient majeur : le calcul des vecteurs de base est assez délicat vis à vis des instabilités numériques.

##### 4.4.a- Instabilité de calcul dans un cas simple

Le calcul de l'impact du bruit numérique sur la construction de la base est difficile dans le cas général. Nous allons tenter de l'appréhender dans un cas simple.

Supposons une modélisation correspondant à une sphère de rayon  $r_0$  décalée d'une distance  $d$  de l'origine  $O$ . Supposons aussi que ce décalage intervienne selon l'axe des  $z$ .

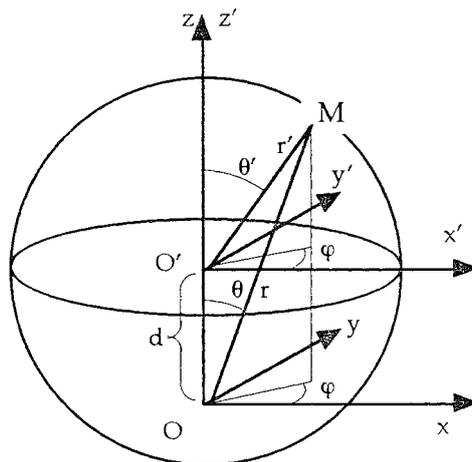


Figure 4.4 : Référentiel du problème

Calculons par la méthode du paragraphe précédent la nouvelle base.

Tout d'abord, il est facile de démontrer que l'ensemble des fonctions suivantes définies sur la surface de la sphère :

$$v_{n,m}(M) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \sqrt{\frac{3(2n+1)}{n}} Y_n^m(\theta', \varphi') \quad (4.24)$$

muni du nouveau produit scalaire est effectivement une base orthonormée de la sphère.

Dans la procédure pour trouver la base orthonormée associée à la sphère, nous

devons considérer les fonctions harmoniques suivantes associées au point O.

$$\tau_{n,m}(M) = r^n Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (4.25)$$

Nous pouvons exprimer ces fonctions dans un repère d'origine O' et de même axe. En prenant par exemple [ROBIN], nous avons :

$$\begin{aligned} \tau_{n,m}(M) &= r^n Y_n^m(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{i=0}^{n-m} \sqrt{\frac{(n-m)! (n+m)!}{(n-i-m)! (n-i+m)!}} \frac{d^i}{i!} r^{n-i} Y_{n-i}^m(\theta', \varphi') \end{aligned} \quad (4.26)$$

D'où en exprimant  $\tau_{n,m}$  en fonction des vecteurs  $v_{n,m}$  définies par (4.24), nous obtenons :

$$\tau_{n,m}(M) = \sum_{i=0}^{n-m} 4\pi r_0^2 \sqrt{\frac{n-i}{3(2n-2i+1)}} \sqrt{\frac{(n-m)! (n+m)!}{(n-i-m)! (n-i+m)!}} \frac{d^i}{i!} r_0^{n-i} v_{n,i,m}(M) \quad (4.27)$$

L'orthonormalisation de l'ensemble  $\tau_{n,m}$  par la méthode de Gram-Schmidt permet de retrouver directement l'ensemble des  $\{v_{n,m}\}$ . Cependant cet exemple montre bien le risque d'instabilité de la méthode.

En effet, si nous prenons n grand et m petit, par exemple m=0, nous voyons que l'expression

$$\frac{1}{i!} \sqrt{\frac{(n-i) (n-m)! (n+m)!}{3(2n-2i+1) (n-i-m)! (n-i+m)!}}$$

peut prendre des valeurs très grandes devant 1, impliquant des instabilités du type  $\infty-\infty$  pour obtenir  $v_{n,m}$  à partir du traitement de  $\tau_{n,m}$ .

Par exemple, pour n=15 et m=0, nous avons les valeurs suivantes pour l'expression en fonction de i :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
coef.	0,4	6,0	42,1	182,0	545,0	1196,4	1988,8	2548,6	2538,0	1963,1	1168,9	525,4	172,0	38,3	5,0	0,0

Donc si le ratio  $d/r_0$  n'est pas très petit, les termes  $v_{14,0}$  à  $v_{0,0}$  qui devront être retranchés de  $\tau_{15,0}$  peuvent être très grand devant le terme  $v_{15,0}$  (i=0) qui va être calculé.

Ces instabilités peuvent intervenir dans deux cas quand nous devons chercher des termes pour n important :

- si l'origine des harmoniques qui sont utilisés pour trouver les fonctions de bases est éloignée du centre de la surface sur laquelle est effectuée le développement.
- si la surface utilisée possède des dimensions très différentes les unes des autres.

#### 4.4.b- Précision du maillage

Nous avons déjà eu un chapitre sur la taille optimale des mailles en fonction de la précision désirée du modèle. Celui-ci est grandement fonction de la distance entre les anomalies et les zones de validité du modèle construit. Dans notre cas, où l'orthonormalisation se fait sur la surface de l'anomalie, nous devons, comme pour les méthodes intégrales de frontière, avoir un maillage différent et a priori plus fin, puisque maintenant, c'est la précision du calcul du produit scalaire qui va dimensionner sa taille.

La précision du maillage doit tenir compte de deux critères :

- la fonction trouvée doit être suffisamment précise pour être utilisable dans la zone de validité du modèle, d'où un maillage et des fonctions d'interpolation au moins équivalents à ceux calculés dans les chapitres précédents.
- les produits scalaires doivent être précis pour que la fonction finale soit juste (même en tenant compte de la non-normalisation des fonctions de départ).

Nous venons de voir sur un exemple simple, que dès que les surfaces à mailler sont complexes ou loin de la forme d'une sphère centrée, la précision demandée dans les produits scalaires est importante.

Ce maillage par contre peut être abandonné, une fois l'orthonormalisation effectuée.

### 4.5- Vecteurs identifiés dans le cas du moteur Baudouin

#### 4.5.a- Conditions de l'identification

Bien évidemment, nous avons utilisé cette représentation dans le cas du moteur mesuré.

Même si pour identifier les vecteurs, nous avons utilisé des algorithmes qui ne sont présentés que dans le chapitre suivant, il n'est pas inutile de montrer dès maintenant les vecteurs mesurés.

### Capteurs utilisés

Pour des raisons de temps de calcul et de stabilité numérique, nous n'avons pas utilisé toutes les mesures pour faire l'identification. C'est d'ailleurs d'autant moins nécessaire qu'à cause de la distance entre le "tunnel" de mesures et le moteur, le nombre de degrés de liberté du champ magnétique est nettement plus faible que le nombre de points disponibles.

Nous avons en fait utilisé 99 points de mesures, correspondant à des composantes du champ magnétique réparties autour du moteur comme le montre la figure 4.5.

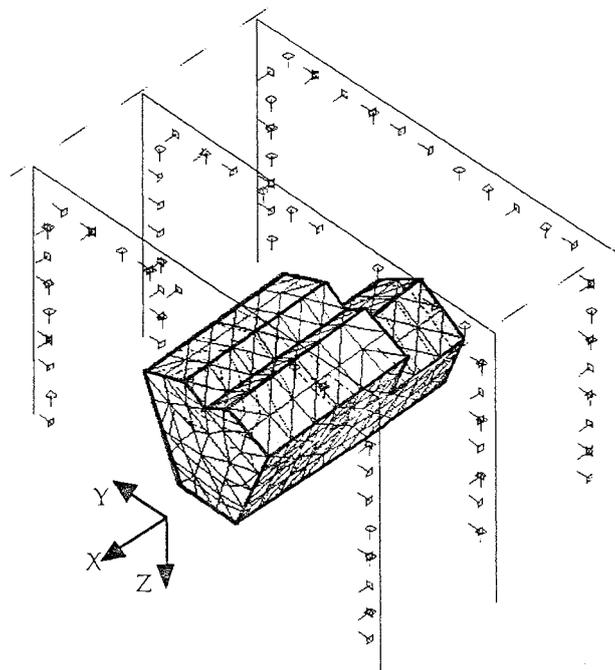


Figure 4.5 : Position des capteurs pour l'identification de l'état magnétique du moteur

### Maillage

Le maillage grossier ((a) de la figure 3.4) aurait suffi pour reproduire le champ à la distance des capteurs. Cependant, il ne convient pas à l'orthonormalisation des fonctions de base. Nous avons donc utilisé le maillage fin (b) pour trouver les vecteurs d'états et pour des raisons pratiques (et esthétiques), nous l'avons conservé.

### Degré du développement

Nous avons développé les fonctions jusqu'au degré 7, ce qui nous fait 63 vecteurs de base. Cependant pour les graphiques visualisés au chapitre 3, nous nous

sommes restreints au moment de l'identification aux fonctions de base jusqu'au degré 5 (figure 3.8). Nous allons voir que dans certains cas, c'est insuffisant.

#### 4.5.b- Résultats

Les figures suivantes présentent les états identifiés jusqu'au degré 7 pour les 7 fichiers de mesure sélectionnés.

Les valeurs représentées sont les coefficients multiplicatifs de chaque vecteur de la base orthonormée du moteur. Pour les trois premiers vecteurs, la norme correspond à une aimantation de  $1 \text{ Am}^2$ . Donc les coefficients pour ces trois vecteurs correspondent à l'aimantation en  $\text{Am}^2$  dans la direction concernée.

Nous montrons dans le chapitre suivant que nous pouvons calculer une variance théorique de l'erreur d'identification. Nous avons défini sur les figures notre plage d'acceptation pour les harmoniques comme étant la valeur identifiée plus ou moins l'écart type théorique (zone grisée). Il faut cependant garder à l'esprit que cette information n'est qu'indicative, car les hypothèses de calcul ne sont pas forcément exactes.

Pour l'interprétation de ces courbes, il est nécessaire de savoir que, comme pour les harmoniques sphériques du chapitre 2, le terme d'ordre  $(n=1, m=-1)$  correspond, dans le repère du moteur à une aimantation négative en transversal (-Y), le terme d'ordre  $(n=1, m=0)$  correspond à une aimantation positive en vertical (+Z) et le terme d'ordre  $(n=1, m=1)$  correspond à une aimantation négative longitudinale (-X).



Figure 4.6 : "spectre" du moteur Baudouin (fichier 0017 : induit longitudinal)

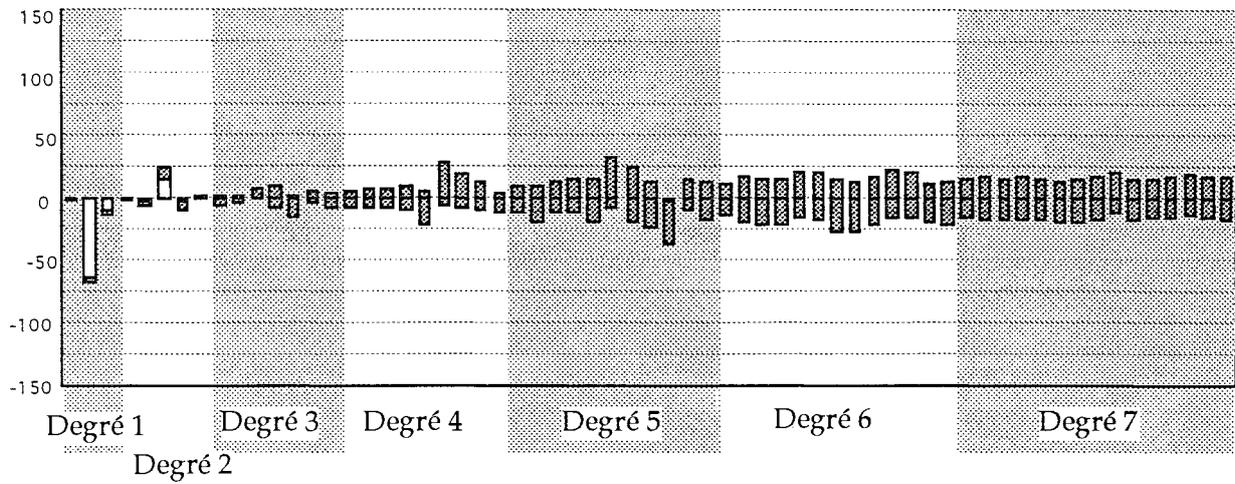


Figure 4.7 : "spectre" du moteur Baudouin (fichier 0031 : induit vertical)

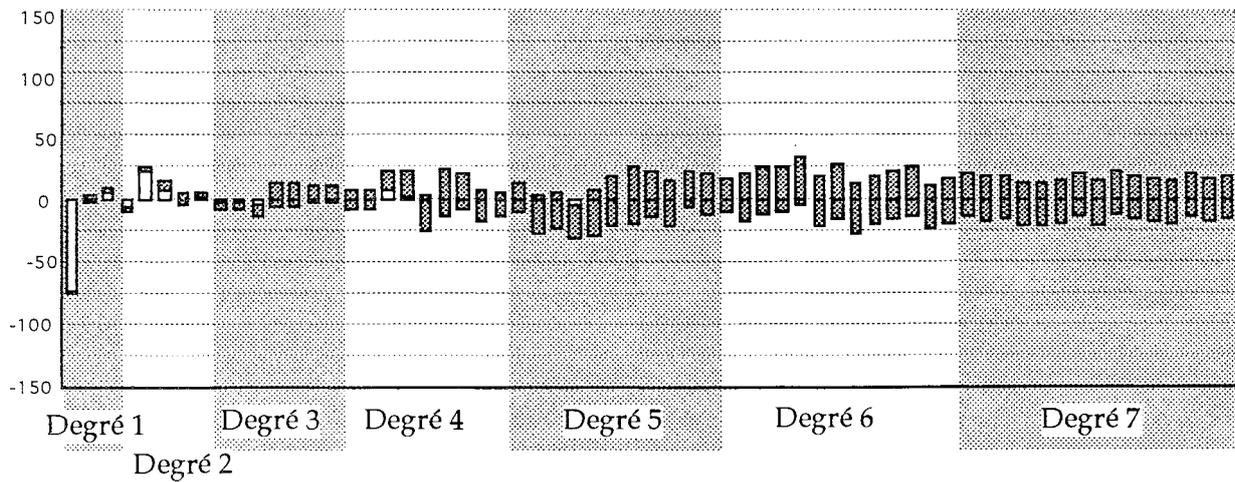


Figure 4.8 : "spectre" du moteur Baudouin (fichier 0033 : induit transversal)

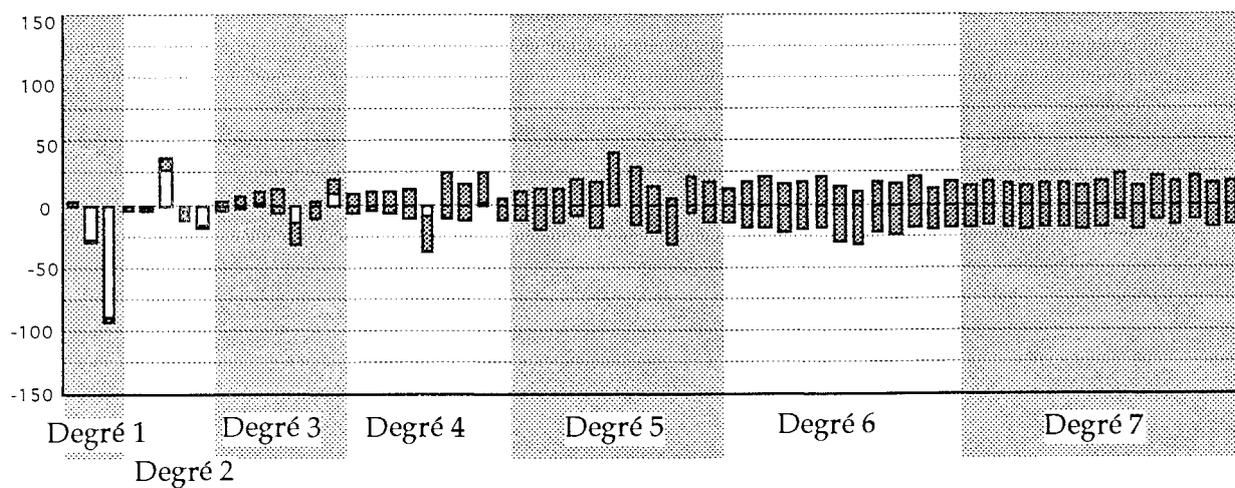


Figure 4.9 : "spectre" du moteur Baudouin (fichier 0079 : permanent longitudinal)

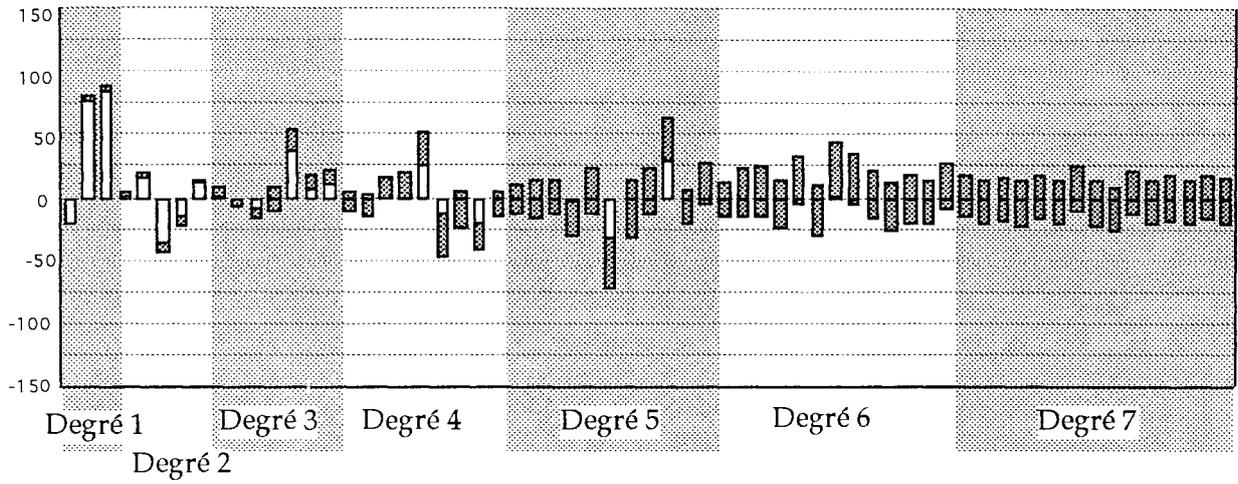


Figure 4.10 : "spectre" du moteur Baudouin (fichier 0089 : permanent vertical)

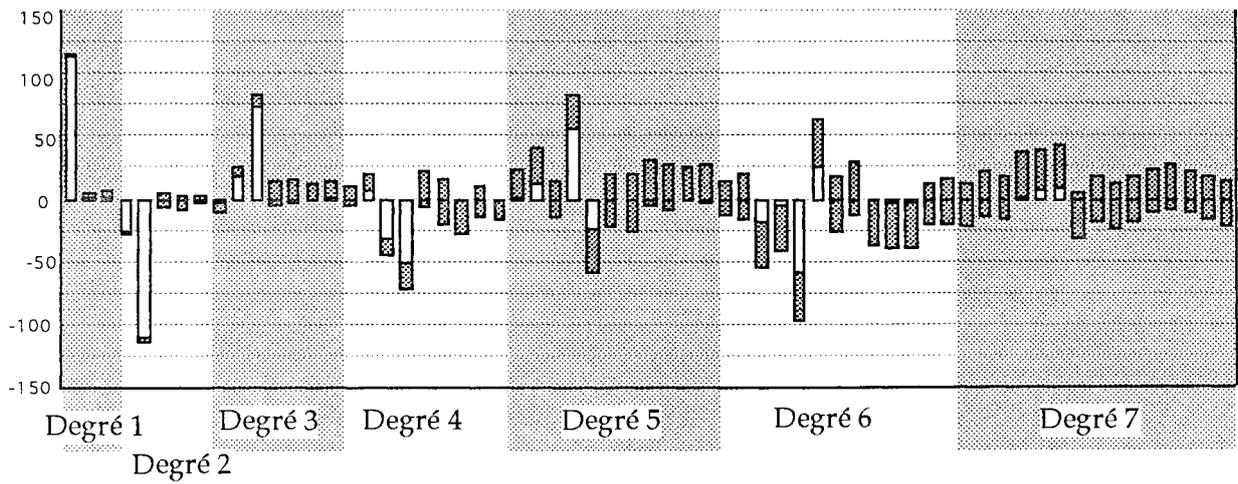


Figure 4.11 : "spectre" du moteur Baudouin (fichier 0099 : permanent transversal)

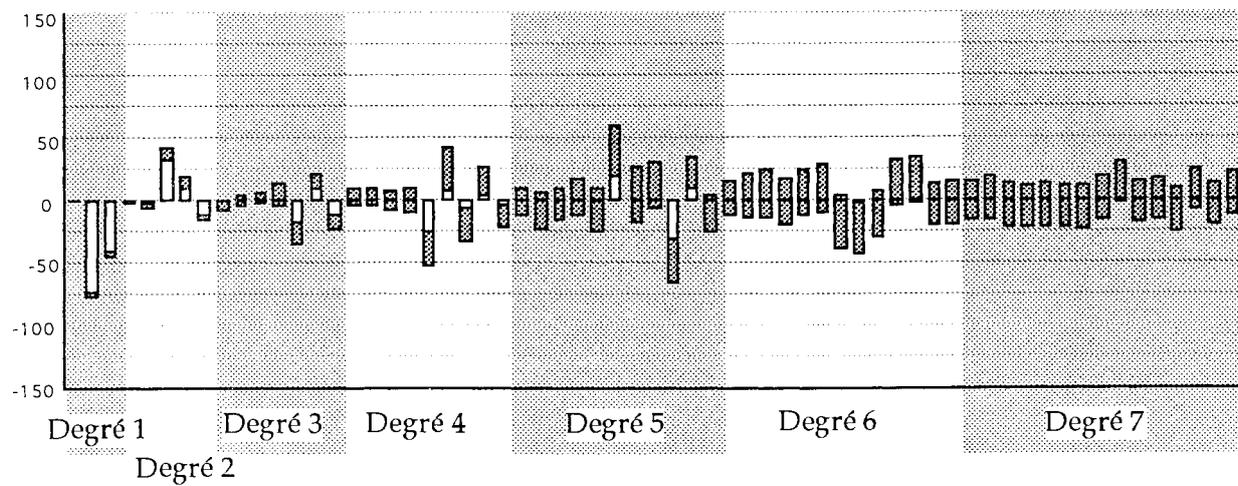


Figure 4.12 : "spectre" du moteur Baudouin (fichier 0154 : permanent vertical)

#### 4.5.c- Éléments d'interprétation

Bien que ce ne soit pas le sujet de ce mémoire, nous pouvons tirer des enseignements de ces quelques cas.

D'abord, les hypothèses de décroissance des harmoniques (en supposant un dipôle isolé réparti de façon aléatoire dans le moteur) ne sont pas prises en défaut puisque tous les termes identifiés sont approximativement du même ordre de grandeur. En fait nous pourrions même utiliser des hypothèses plus restrictives car les termes de degré élevé sont plutôt plus petits que les termes dipolaires.

Un autre fait remarquable qui justifie pleinement les efforts jusque là consentis est de remarquer à quel point les aimantations induites se projettent particulièrement bien sur les termes dipolaires, montrant qu'à la distance des capteurs, le moteur s'identifie à la coque uniformément aimantée.

Cette propriété était beaucoup moins manifeste quand nous avons projeté l'aimantation induite longitudinale sur la sphère ou l'ellipsoïde (figures 2.4 et 2.10). L'intérêt d'utiliser une représentation plus proche de la physique du système se justifie pleinement puisqu'elle permet de tronquer plus rapidement le développement harmonique.

Nous voyons aussi qu'une induction longitudinale crée une légère composante verticale et réciproquement pour l'induction verticale. La raison est assez simple. La relation entre l'aimantation induite et le champ inducteur peut être approximée par un tenseur d'ordre 2. Celui-ci possède 3 vecteurs propres. Si le vecteur Y (transversal) est un vecteur propre grâce à la symétrie du moteur, les vecteurs X et Z ne le sont pas. Le réducteur, assez massif et placé plus bas que le moteur, en est probablement la cause.

Les aimantations permanentes ne sont pas aussi régulières que les aimantations induites et ne peuvent se projeter complètement sur une aimantation uniforme du modèle.

Nous ferons aussi deux remarques.

Tout d'abord à titre anecdotique, les aimantations théoriquement verticales du moteur (fichier 0089 et 0154) ne s'avèrent pas si verticales que cela. En particulier, le premier des deux possède une composante longitudinale plus forte que la composante verticale ! Même si la composante longitudinale est la direction privilégiée d'aimantation du moteur, seule une maladresse expérimentale peut expliquer ce résultat (par exemple, un biais du champ pendant l'équilibre magnétique mal réglé ou une sinusoïde amortie (qui était appliquée dans la direction longitudinale) coupée trop tôt).

Ensuite, l'aimantation transversale (fichier 0099) possède un "spectre" différent des autres avec pour chaque degré, quelques composantes d'amplitude très forte. Cela confirme ce que nous disions dans l'explication de la figure 3.9 à savoir qu'il

existe sur la périphérie du moteur (en fait au dessus) des sources relativement très fortes. Nous voyons aussi qu'une partie de l'énergie du signal s'identifie sur des termes de degré 6. Or dans le cas de la figure 3.9, nous avons arrêté le développement au degré 5. Cette troncature trop précoce a dû entraîner à la fois une instabilité de l'algorithme et un phénomène de Gibbs, provoquant une inversion des termes dipolaires normaux identifiés sur le bas du moteur.

## 4.6- Prospective pour l'amélioration du modèle

### 4.6.a- Base "optimale" sans information sur le modèle

Jusqu'à présent, nous avons travaillé avec le minimum d'hypothèses sur l'objet étudié puisque nous nous sommes restreints à supposer que les sources étaient assez régulières et qu'elles étaient confinées dans une zone prédéfinie.

A partir de ces postulats, nous avons bâti une représentation bien adaptée à la résolution du problème inverse. Cependant, si nous possédons sur l'objet mesuré des informations supplémentaires, il est intéressant de les exploiter.

En particulier, si nous utilisons de manière directe la base orthonormée étudiée précédemment, nous ne privilégions pas un type d'aimantation par rapport un autre et en particulier nous ne favorisons pas une aimantation régulière par rapport à une aimantation irrégulière.

Les mesures du moteur Baudouin nous montrent pourtant très bien que la répartition de l'aimantation interne n'est pas aussi aléatoire que le supposent les hypothèses (en particulier pour les aimantations induites).

Nous pouvons bien entendu favoriser les termes de la base correspondant à des densités d'aimantation constantes (les 3 premiers vecteurs) par rapport aux termes suivants au niveau du problème inverse. Mais cela passe par la détermination de coefficients empiriques difficiles à trouver sans tâtonnements.

Il serait plus intéressant de biaiser la base en fonction des paramètres connus du système.

### 4.6.b- Intégration de l'information sur la physique

Le principe du modèle choisi est de représenter sous la forme d'une base orthonormée "pratique" les sources. En particulier, tous les termes de l'aimantation sont présents avec des poids égaux.

Si nous intégrons une partie de la physique du système, la modélisation devra alors prendre en compte les corrélations entre les aimantations qu'elle entraîne

et reprendre le principe d'une représentation orthonormée plus en amont dans le système.

Par exemple, l'induction magnétique obéit à la loi locale :

$$\vec{B} = \mu_0(\mu_r \vec{H} + \vec{m}) \quad (4.28)$$

l'aimantation apparente du matériau dépend à la fois de la densité d'aimantation permanente  $\vec{m}$  et du champ magnétique local  $\vec{H}$  lequel est la somme du champ magnétique extérieur et de l'effet des sources magnétiques voisines, elles mêmes influencées par une aimantation permanente et un champ inducteur.

Nous avons donc une répartition de sources internes (la densité d'aimantation permanente) et un champ extérieur  $\vec{H}_e$ , qui créent d'autres sources  $\mu_r \vec{H} - \vec{H}_e$  que nous pouvons interpréter comme la réaction réversible du matériau (les composantes irréversibles de la réaction du matériau étant incluses dans la répartition de sources internes). L'amplitude de cette aimantation réversible dépend fortement de la valeur de la perméabilité du matériau  $\mu_r$  et de sa forme.

Les matériaux ferromagnétiques ont des valeurs de perméabilité très élevées et cette caractéristique ainsi que la géométrie peuvent influencer très fortement sur la répartition des sources. Il pourrait être utile d'en tenir compte.

Présentons une méthode possible pour intégrer cette information dans notre solution.

Au lieu de chercher une base orthonormée des aimantations du matériau, nous allons chercher une base orthonormée des sources de cette aimantation, c'est à dire à la fois des champs inducteurs possibles et des sources irréversibles d'aimantation. A partir de cette base, nous calculerons d'abord la réaction des sources réversibles d'aimantation avec la valeur supposée de  $\mu_r$  puis l'induction en tout point de l'espace.

Par rapport aux principes qui nous ont guidé jusqu'à présent, nous faisons une entorse assez importante puisque nous introduisons de manière directe dans nos calculs la perméabilité qui ne peut être déterminée que de manière imprécise. D'abord parce que sa mesure est difficile, mais aussi parce qu'elle n'est pas constante et dépend elle même d'un grand nombre de phénomènes dont les plus forts sont le champ magnétique lui-même, les contraintes internes du matériau et la température.

Parce que la perméabilité introduite n'est qu'une approximation, il est important de s'assurer que la représentation finale permet l'inclusion dans le modèle de toutes les sources possibles. L'inclusion d'une perméabilité ne devant être considérée que comme un biais qui favorise une partie des solutions par rapport à d'autres.

Pour le faire, il existe plusieurs solutions. L'une est de s'assurer que la représentation permet de simuler toutes les distributions magnétiques. Dans ce cas, une mésestimation de la perméabilité se traduit par exemple par le fait qu'une partie des sources réversibles est identifiée par des sources irréversibles.

Une autre méthode est de superposer les deux types de représentation (celle avec hypothèses sur la perméabilité et celle sans) avec une pondération relative entre elles. Cette pondération dépend de la confiance que nous avons dans l'estimation des propriétés physiques.

#### 4.6.c- Calcul du biais dû à la perméabilité des matériaux

Nous avons établi dans l'annexe B.3, les formules qui permettent de calculer la déformation des champs entraînée par la présence de matériaux ferromagnétiques.

Ce calcul est formulé dans le cas où tout le volume  $\Omega_i$  est rempli par un matériau linéaire de perméabilité  $\mu_r$ .

La formule est légèrement différente suivant que les sources d'aimantations sont internes ou externes à l'objet.

##### Sources externes

Dans le cas externe, nous avons alors un champ magnétique qui va créer dans l'objet une aimantation induite. Nous avons alors directement calculé la répartition équivalente  $\tau(P)$  de sources surfaciques dipolaires à cet effet en fonction du champ inducteur (correspondant à un potentiel  $V_0$ ).

$\tau(P)$  est alors solution en tout point P de la surface, de l'équation :

$$\left(\frac{1}{1-\mu_r} - \nu\right)\tau(P) + \iint_{M \in \Sigma} \tau(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = V_0(P) \quad (B.75)$$

##### Sources internes

Si les sources sont internes (correspondant soit à une aimantation rigide du matériau soit à des courants électriques, nous devons trouver la répartition surfacique dipolaire  $\tau(P)$  de l'ensemble source plus réaction du matériau par rapport à la réaction surfacique dipolaire  $\tau(P)$  de l'aimantation source.

$$\left(\frac{1}{1-\mu_r}\right)\tau'(P) + \iint_{M \in \Sigma} \tau'(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = \frac{\mu_r \tau(P)}{(1-\mu_r)} \quad (\text{B.68})$$

Nous pouvons remarquer que cette équation ne diffère de la première que par le second membre.

#### 4.6.d- Interprétation physique des formules

Nous avons obtenu deux systèmes d'équations à résoudre pour connaître les sources magnétiques intégrant la réaction du matériau à une sollicitation interne ou externe.

Les équations obtenues correspondent aux équations intégrales de frontière. D'un point de vue numérique, elles ne sont pas simples à résoudre car non seulement le premier membre inclut une intégrale singulière (mais convergente), mais aussi le système, une fois discrétisé, n'est pas très bien conditionné pour des valeurs élevées de  $\mu_r$ .

Si  $\mu_r = 1$ , on retrouve  $\tau' = \tau$  dans le cas des sources internes et  $\tau' = 0$  dans le cas des sources externes (il n'y a pas de réaction réversible du matériau).

Si au contraire  $\mu_r \approx \infty$ , la réaction du matériau dépend essentiellement de la géométrie et des champs démagnétisants. Il est important de remarquer qu'une forte perméabilité va amplifier les effets des sources extérieures et réduire les effets des sources internes (blindage).

Cependant, ce phénomène est très relatif, car les sources internes sont d'autant plus fortes que le matériau est ferromagnétique. Cette conclusion n'est réellement applicable que dans le cas de sources par courants électriques.

#### 4.6.e- Cas de sources en surface

Il est légitime de se poser la question de l'effet de sources sur la surface.

Tout d'abord, un grand nombre d'objets mesurés peut être considéré de manière simplifiée comme une masse interne fortement ferromagnétique (par exemple le bloc cylindres du moteur Baudouin) auquel on ajoute une quantité de petites pièces autour, objets rapportés qui peuvent être très magnétiques (par exemple, les injecteurs de ce même moteur).

Ensuite, les termes harmoniques qui vont nous poser le plus de difficultés sont ceux de degré élevé. Or compte tenu de l'expression des coefficients magnétiques, ce sont les sources situées en périphérie qui contribueront le plus à ces ter-

mes.

Un matériau de perméabilité infinie se comporte vis à vis des monopôles magnétiques extérieurs comme un miroir qui change le signe (une charge crée une source image de signe opposé), et donc comme un miroir vis à vis des courants électriques extérieurs. Nous avons alors plusieurs cas de figures :

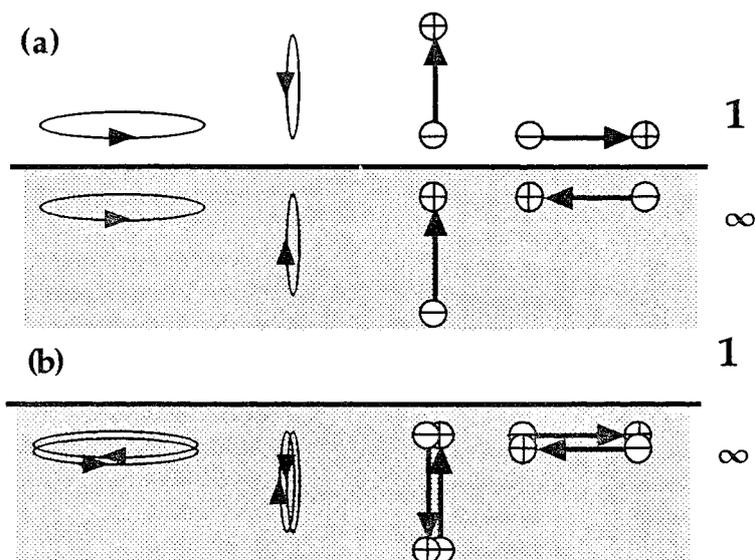


figure 4.13 : Solutions images pour des sources magnétiques situées respectivement à l'extérieur (a) et à l'intérieur (b) d'un corps de perméabilité infinie

Nous nous apercevons que l'effet dipolaire d'une source tangentielle extérieure à l'objet est atténué en présence d'une masse fortement ferromagnétique mais que le terme dipolaire d'une source normale est au contraire amplifié si elle se trouve à l'extérieur et atténué dans le cas contraire.

Ce n'est pas sans conséquence dans notre représentation multipolaire. En effet un objet fortement ferromagnétique va contribuer à amplifier une partie des sources périphériques relativement aux sources internes et probablement amplifier les termes d'ordre supérieur du développement.



## 5.- Problèmes inverses

### 5.1- Objectifs de l'inversion

#### 5.1.a- Chemin accompli

Nous avons compris dans le premier chapitre que le problème d'identification des sources magnétiques à partir de mesures de champs et de gradients pouvait être sous-dimensionné. Nous avons aussi vu qu'alors plusieurs approches sont possibles pour contourner la difficulté mais qu'une en particulier peut retenir notre attention : la théorie des problèmes inverses.

D'après [TARANTOLA], la résolution d'un problème inverse demande deux préalables. Il faut paramétrer le système, puis résoudre le problème direct dans ce formalisme. Les chapitres précédents ont été consacrés à ces deux étapes.

En effet notre étude nous a permis de réduire de façon efficace l'espace des paramètres, puisque nous sommes passés de la définition "naturelle" des sources magnétiques (les vecteurs  $\vec{j}$  et  $\vec{m}$ ) qui est une description de deux champs vectoriels tridimensionnels de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à un ensemble discret de grandeurs scalaires.

Nous avons pu le faire tout en restant dans des hypothèses simples :

- $\textcircled{H}$  les sources magnétiques sont d'énergie finie.
- $\textcircled{H}$  les sources magnétiques se répartissent dans un nombre discret de sous-ensembles bornés de l'espace.
- $\textcircled{H}$  elles restent confinées en des ensembles simplement connexes.
- $\textcircled{H}$  les capteurs magnétiques sont à l'extérieur des ensembles de sources magnétiques et à une distance finie de ceux-ci.

Après cette étape fondamentale qui a rendu le problème simplement envisageable, nous avons cherché à réduire ce nombre d'inconnues qui reste encore élevé en tentant d'intégrer dans les équations certains aspects du comportement des matériaux.

Nous pouvons maintenant nous consacrer à la résolution du problème inverse. C'est à dire trouver les valeurs des paramètres magnétiques à partir de la mesure et de toute l'information dont nous disposons. La procédure de fusion de toutes ces données doit pouvoir permettre d'obtenir, sinon une solution unique, au moins un ensemble restreint de solutions.

### 5.1.b- Performances souhaitées

Pour être acceptable, l'algorithme d'inversion doit avoir les qualités que nous allons énumérer :

- il doit être quasi-optimal, c'est-à-dire qu'il doit tirer le maximum de l'information disponible par tous les capteurs.

- il doit être stable, convergent et précis : il doit fournir une valeur proche de la réalité en toute circonstance, quels que soient les bruits qui peuvent survenir sur les capteurs.

- il doit être numériquement réalisable et ne pas nécessiter trop de calcul. La complexité des algorithmes numériques se mesure en formulant le nombre d'opérations en fonction du nombre  $n$  des paramètres. Compte tenu de la quantité de grandeurs à manipuler, il est souhaitable d'avoir des calculs de l'ordre de  $kn^3$  au total. Si nous devons avoir un état magnétique en temps réel ou sur un grand nombre de mesures, comme il paraît difficile d'avoir des calculs inférieurs à  $n^2$ , il faut se fixer comme objectif un taux de charge de calcul de l'ordre de  $kn^2$  à chaque itération (éventuellement après un calcul préliminaire en  $k'n^3$ ).

### 5.1.c- Un cas test : identification du moteur Baudouin

#### Compléments sur les conditions de mesure

Nous allons continuer à illustrer notre propos en appliquant aux mesures du moteur Baudouin les équations que nous établissons. Pour valider les propriétés des algorithmes, nous avons choisi de tester quatre configurations. Deux situations "riches" où nous utilisons beaucoup de points de mesures pour identifier l'état magnétique et deux situations "pauvres" où nous restreignons au maximum le nombre de capteurs.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté le principe des mesures tel que

l'on procède.

Tout d'abord, à chaque début de passage, un zéro électronique est fait sur tous les capteurs permettant de s'affranchir du champ magnétique terrestre (ou de tout autre champ simulé) pendant les mesures.

Ensuite le chariot avance et l'acquisition démarre. Pendant que le moteur passe sous le portique, les valeurs de tous les capteurs sont lues chaque fois que le chariot avance de 2 cm. Comme il y a 27 capteurs triaxes sur le portique (figure 1.6) et 28 capteurs triaxes dans la fosse sous le moteur (figure 1.2) et que l'acquisition est faite sur une distance de 20 m, nous disposons d'environ 165 000 points pour un passage du moteur.

Mises dans le référentiel du moteur, nous disposons pratiquement des valeurs vectorielles de l'induction magnétique en tout point d'une sorte de tunnel autour du moteur ainsi que d'un grand volume au dessous.

L'intérêt d'avoir une telle quantité de mesures est de pouvoir simuler un ensemble de capteurs fixes en à peu près n'importe quelle position. Il suffit alors de choisir les points de mesure les plus proches des positions souhaitées.

Cependant, les capteurs du portique et de la fosse n'ont pas les mêmes caractéristiques.

Pour simplifier, nous pouvons dire que les capteurs du portique sont relativement peu précis (erreur de l'ordre de 10 à 20 nT après traitement passe-bas mais avec occasionnellement un offset pouvant monter jusqu'à 100 nT) mais en contrepartie, ils possèdent une grande dynamique ( $\pm 100 \mu\text{T}$ ) et leur position est connue très précisément (à 2 mm près) ainsi que leur orientation (à  $5/10^{\text{ème}}$  de degrés).

Les capteurs de la fosse sont très précis (de l'ordre de 1 à 2 nT), possèdent une faible dynamique ( $\pm 1 \mu\text{T}$ ) et l'erreur sur leur position et orientation est mal connue (probablement respectivement de l'ordre de quelques centimètres et du degré).

Pour cette raison, nous utilisons les capteurs du portique pour les points servant à estimer l'état magnétique du moteur Baudouin et nous nous servons des mesures dans la fosse pour vérifier l'identification trouvée. A cette fin, nous avons choisi en particulier le niveau B de la fosse (figure 1.2) parce qu'il présente un bon compromis entre le champ lointain (caractérisant le champ dipolaire) et le rapport signal sur bruit.

### Configurations testées

Les deux configurations avec beaucoup de capteurs sont représentées figure 5.1 et celles avec peu de capteurs sont représentées figure 5.2.

Nous pouvons préciser la démarche qui nous a conduit à ces positions de cap-

teurs. Le nombre de voies utilisées pour les deux choix avec beaucoup de capteurs est essentiellement guidé par deux critères : avoir suffisamment de sondes pour discriminer tous les états magnétiques observables (nous avons utilisé un développement jusqu'au degré 7 d'où 63 paramètres magnétiques), mais pas trop pour conserver des temps de calcul raisonnables et garantir sans trop de peine une bonne stabilité pendant les calculs matriciels (les matrices manipulées sont essentiellement pleines).

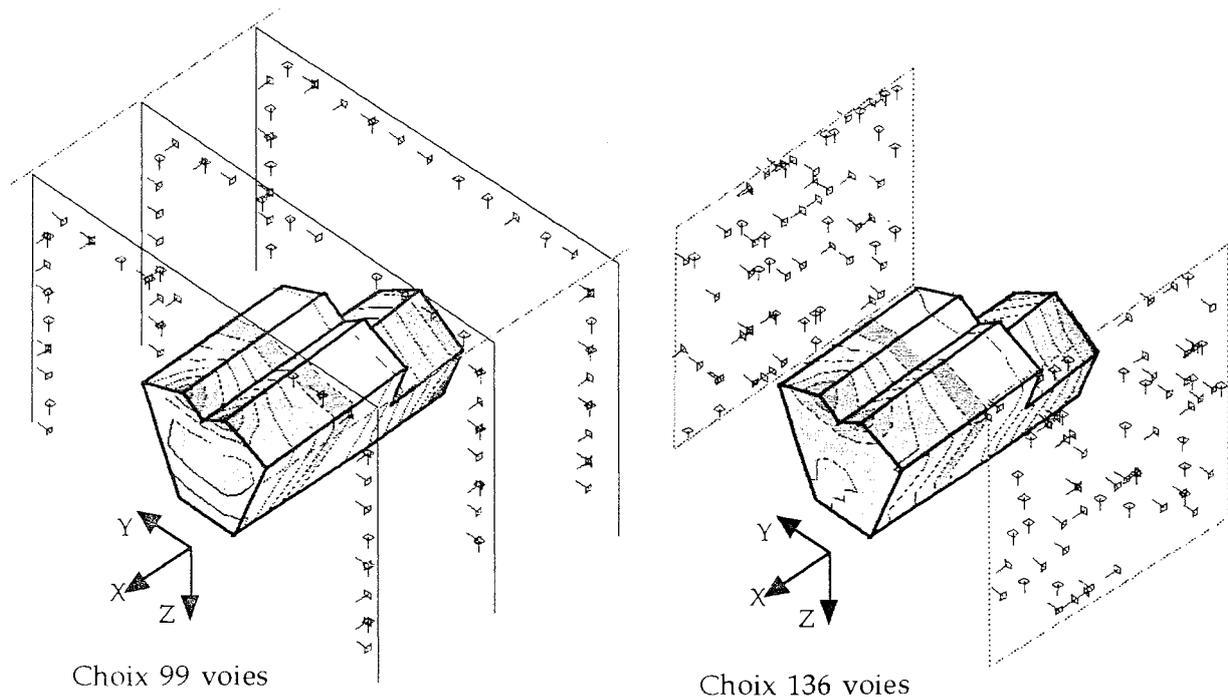


Figure 5.1 : Deux configurations avec beaucoup de capteurs  
(avec sur le moteur, la répartition de dipôles identifiée dans le cas du fichier 0017)

La centaine de voies nous paraît un bon compromis. Nous avons alors choisi deux distributions, l'une à peu près régulière et l'autre plus irrégulière. Dans chaque cas, nous avons retiré les capteurs dont les informations sont manifestement fausses (entre 5 et 10 voies de mesures sur les 81 sondes du portique).

Pour appréhender la robustesse des algorithmes avec peu d'informations dues à la mesure, nous avons choisi un cas où on utilise 5 capteurs triaxes et un cas comportant 8 capteurs triaxes. Pour espérer de bonnes estimations des termes dipolaires, il est nécessaire d'optimiser numériquement les positions capteurs à partir de la modélisation. La procédure est expliquée dans le chapitre suivant.

Dans les deux configurations obtenues après l'optimisation, les capteurs les plus bas du portique sont sélectionnés. Or la sonde verticale du capteur E1 ne fonctionne pas. Nous avons alors pris la sonde verticale du capteur immédiatement voisin (E2). Mais dans le choix avec 8 capteurs, une sonde très proche est aussi

utilisée ! Ainsi des 24 sondes, il y en a essentiellement que 23 qui sont utiles. Dans la figure suivante, nous pouvons remarquer que les positions après optimisation sont plus éloignées dans le cas avec 5 capteurs que dans le cas avec 8 capteurs (nous le justifierons théoriquement au chapitre 7).

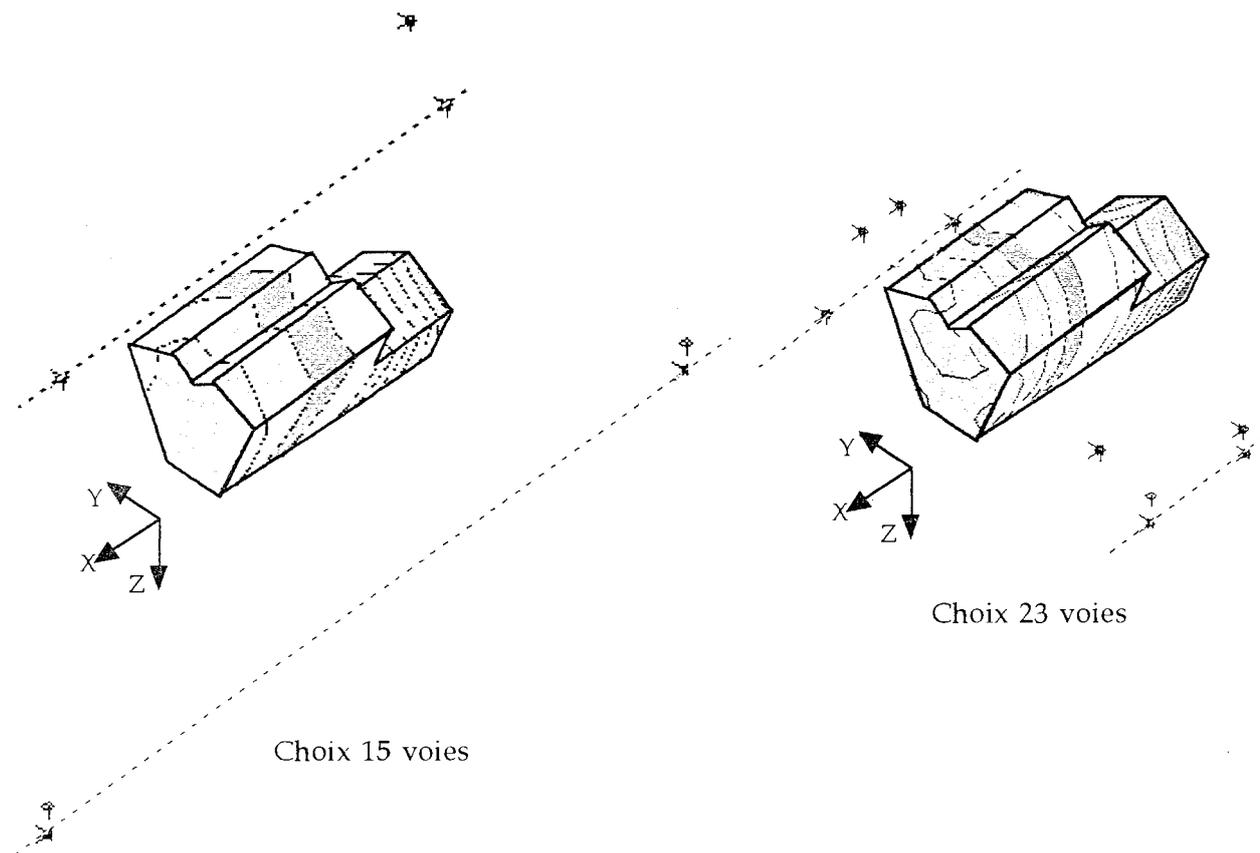


Figure 5.2 : Deux configurations avec peu de capteurs  
(avec sur le moteur la répartition de dipôles identifiée pour le fichier 0017)

### Liste des paramètres

Notons par  $B$  le vecteur incluant l'ensemble des mesures du système et par  $A$  l'ensemble des paramètres du système, c'est à dire toutes les grandeurs qui influent sur la mesure  $B$ .

La résolution du problème direct nous a permis de définir à la fois les paramètres magnétiques du vecteur  $A$  et la fonctionnelle correspondant à la fonction de la mesure qui associe  $B$  à  $A$ .

$$B = f(A) \quad (5.1)$$

D'autres paramètres que le développement magnétique de la source peuvent influencer sur  $B$ . La première étape est donc de définir plus précisément le vecteur  $A$ .

Bien évidemment, nous avons l'état magnétique des sources, c'est à dire tous les composants  $a_m$  correspondant aux modélisations par harmoniques sphériques ou par les autres modèles. En fait, nous avons tout au moins les premiers éléments de ceux-ci, c'est à dire ceux qui ont un effet à la distance où se trouvent les capteurs. Dans notre cas où nous utilisons la base magnétique décrite au chapitre 4, nous portons le développement jusqu'au degré 7 (degré 5 dans le cas des figures). Nous avons donc 63 paramètres magnétiques.

Dans notre cas particulier, nous rappelons que nous n'avons pas à inclure le champ inducteur puisque seules les variations du champ magnétique sont mesurées.

Mais nous avons aussi d'autres paramètres, non magnétiques ceux là, qui agissent sur la mesure et dont l'origine provient essentiellement des imperfections des capteurs (dérive de température, bruit, erreur de gain, mésalignement, etc...). Dans un premier temps, nous modélisons l'ensemble de ces influences par un paramètre par sonde capteur, noté  $w$ , qui représente l'erreur du capteur considéré.

Chaque élément du vecteur mesure  $B$  ayant son erreur propre et donc créant un paramètre  $w$  dans le vecteur  $A$ , nous sommes déjà sûr que le système est sous-déterminé.

Nous obtenons alors un système matriciel car nous avons vu que la dépendance entre les composantes du champ et les harmoniques sphériques sont linéaires.

L'équation (5.1) devient alors :

$$B = \mathbb{F}A \quad (5.2)$$

qui, écrit plus explicitement (dans le cas avec 15 voies de mesures), donne :

$$\begin{pmatrix} b_{1x} \\ b_{1y} \\ b_{1z} \\ b_{2x} \\ \dots \\ b_{5z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x,1/-1} f_{1x,1/0} & \dots & f_{1x,7/7} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{1y,1/-1} f_{1y,1/0} & \dots & f_{1y,7/7} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{1z,1/-1} f_{1z,1/0} & \dots & f_{1z,7/7} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{2x,1/-1} f_{2x,1/0} & \dots & f_{2x,7/7} & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ f_{5z,1/-1} f_{5z,1/0} & \dots & f_{6z,7/7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1/-1} \\ a_{1/0} \\ \dots \\ a_{7/7} \\ w_{1x} \\ w_{1y} \\ w_{1z} \\ w_{2x} \\ \dots \\ w_{5z} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Nous avons alors 78 inconnues pour 15 équations.

## 5.2- Utilisation de l'information a priori

### 5.2.a- Recherche de nouvelles sources d'informations

Nous venons de voir qu'il reste encore plus d'inconnues que d'équations. Le système possède alors une infinité de solutions.

Pour faire un choix parmi les solutions possibles, l'approche naturelle est de rechercher de l'information complémentaire dans le système, pour le rendre moins sous-déterminé. Pour cela, il faut inventorier les types d'informations possibles et voir si elles ont déjà été intégrées dans les équations et sinon savoir comment les utiliser.

Jusqu'à présent, nous avons plutôt cherché à restreindre les hypothèses à leur strict minimum pour rester général mais aussi surtout par crainte d'introduire des informations fausses. En particulier, nous avons essentiellement employé les propriétés "mathématiques" des équations de Laplace (harmonicité du potentiel).

Bien entendu d'autres renseignements peuvent être utilisés. Ils proviennent essentiellement de deux origines :

-des informations sur la structure des objets mesurés et les lois de comportement des matériaux permettent de tirer des caractéristiques physiques du système (nous avons vu une démarche possible dans le chapitre précédent).

-des mesures initiales ou complémentaires (que nous pouvons appeler "mesures de calibration") peuvent aussi aider la résolution du système.

Ces deux démarches peuvent encore apporter une réduction du nombre de degrés de liberté du système en éliminant de la formulation paramétrique les solutions qui sont physiquement impossibles parce que nécessitant une énergie trop grande ou encore parce que les conditions nécessaires à leur présence ne sont pas réalisées (par exemple un parcours imposé du cycle d'hystérésis).

La première approche serait de dire que chacune de ces catégories d'information (appelée information a priori) amène des équations mathématiques supplémentaires, qu'il suffit d'intégrer dans un système global d'équations que l'on cherche à résoudre. Hélas ce raisonnement est incorrect dans la mesure où il faut tenir compte de la nature incomplète et incertaine des différentes informations.

Les conclusions des lois de comportement sont sujettes à caution car les calculs sont souvent infaisables (nous ne savons pas modéliser de façon correcte les cycles d'hystérésis) et les valeurs nécessaires à la résolution sont souvent imprécises (arrive-t-on à connaître avec suffisamment d'exactitude les perméabilités ou même simplement les géométries des pièces ? Comment déterminer les aimantations initiales d'un ensemble complexe ?).

Les mesures de calibration sont aussi entachées des erreurs dues aux capteurs et à la méthodologie de la mesure. Enfin, elles peuvent comporter des informations volatiles qui sont rapidement hors contexte. Par exemple, nous pouvons obtenir le reflet de la valeur d'une grandeur physique à un instant donné, mais ce paramètre peut ensuite évoluer de façon incontrôlée au cours du temps.

Il faut donc pouvoir inclure dans le raisonnement et dans les équations tout l'aspect incertain et incomplet de l'information.

Même si on arrive à intégrer l'incertitude des mesures et des hypothèses, celle-ci peut elle-même être entachée d'erreur. Nous pouvons par exemple faire trop confiance à une partie des données et arriver à des conclusions incohérentes. Il est nécessaire de pouvoir évaluer et intégrer l'incohérence d'un ensemble de données à tout moment et d'agir en conséquence. La robustesse de la méthode ne peut être acquise qu'à ce prix là.

### 5.2.b- Modélisation du caractère incertain des informations

Il nous faut absolument un outil qui nous permette de caractériser pour chaque nouvelle information, son caractère plus ou moins sûr. Une démarche courante utilisée dans les problèmes inverses est d'introduire pour le paramètre  $A$  une loi de probabilité qui caractérise la "certitude" que nous avons d'une donnée.

#### Lois de probabilité

Rappelons que pour définir une loi de probabilité, il faut un ensemble  $\Omega$ , une classe  $\mathfrak{D}$  de parties de  $\Omega$  appelé tribu, qui doit posséder les propriétés suivantes [SAPORTA] :

- si  $A \in \mathfrak{D}$  alors  $\bar{A} \in \mathfrak{D}$  ( $\bar{A}$  correspond au complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ )
- pour toute suite finie ou infinie  $\{A_i\}$  d'éléments de  $\mathfrak{D}$ , alors  $\cup A_i \in \mathfrak{D}$
- $\Omega \in \mathfrak{D}$

Nous appelons alors loi de probabilité toute application  $p$  de  $\mathfrak{D}$  dans  $[0,1]$  qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$$p(\Omega) = 1$$

pour toute suite finie ou infinie  $\{A_i\}$  d'éléments de  $\mathfrak{D}$  deux à deux

incompatibles :  $p(\cup A_i) = \sum p(A_i)$

Rq deux éléments sont dits incompatibles si leur intersection est nulle.

### Interprétation des lois de probabilité

Quand on apprend les lois de probabilité, on associe généralement celles-ci avec le hasard et l'aléatoire. Si par exemple, on dispose des boules noires et blanches dans un sac opaque et si nous tirons une boule de ce sac, celle-ci a une certaine probabilité d'être noire (0,5 si il y a un nombre identique de boules des deux couleurs).

Sur un grand nombre de tirages, nous pouvons définir le nombre de fois que la boule sera noire. Ces valeurs peuvent être associées à une loi de probabilité.

La probabilité 1 est associée à un événement certain d'arriver.

La probabilité 0 est associée à un événement certain de ne pas arriver.

La probabilité de 0,5 est associée à un événement certain d'arriver une fois sur deux sur un nombre infini de tirages.

Cependant, nous pouvons avoir d'autres interprétations possibles des lois de probabilités. En particulier, nous pouvons associer une grandeur ayant les mêmes propriétés qui correspond à une mesure de "l'information subjective" [TARANTOLA] que nous avons d'un état. C'est l'interprétation Bayésienne de l'information.

Nous avons alors :

la probabilité 1 associée à un événement certain d'être juste.

la probabilité 0 associée à un événement certain d'être faux.

La probabilité de 0,5 est associée à un événement totalement incertain.

Dans le cas de nos boules, nous ne pouvons faire qu'un seul tirage les yeux fermés.

Ainsi nous pouvons associer à un événement une notion de certitude et d'incertitude. Si une loi de probabilité est associée à l'information, c'est uniquement parce qu'elle possède les mêmes propriétés mathématiques.

### Introduction de la notion de cohérence des données

Il manque cependant à cette mesure un autre concept qui nous est utile, la cohérence des informations.

Nous pouvons, par exemple, faire une hypothèse sur la connaissance d'un paramètre, laquelle peut être démentie par une mesure. Il faut donc une mesure de la confiance que l'on porte à l'hypothèse.

Il n'y a pas dans la littérature de manière formelle de l'écrire, cependant la probabilité d'une valeur a posteriori donne une bonne indication.

Pour l'illustrer, supposons la mesure bruitée d'un paramètre  $a$ .

Par exemple, on prend pour  $a$  une loi de probabilité (d'information) gaussienne d'espérance 0 et de variance 1, et pour l'erreur de mesure  $b$ , la même loi gaussienne d'espérance 0 et de variance 1.

On fait une mesure qui donne 6 pour la valeur de  $a+b$ .

Nous avons alors le calcul des probabilités de  $a$ ,  $b$  et  $a+b$  qui sont des lois gaussiennes si la mesure et le bruit sont indépendants :

$$\begin{aligned} p(a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2} \\ p(b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}b^2} \\ p(a+b) &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{2}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

La loi de probabilité conditionnelle donne une loi a posteriori pour  $a$  connaissant la mesure :

$$p(a|a+b=6) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}2(a-3)^2} \quad (5.5)$$

c'est à dire une loi gaussienne d'espérance 3 et de variance 1/2.

Cependant cette information a posteriori doit être tempérée par la probabilité de trouver une mesure supérieure ou égale à 6, qui est de

$$p(a+b \geq 6) = \int_6^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}} dx \approx 10^{-5} \quad (5.6)$$

c'est à dire extrêmement faible.

La faiblesse de cette valeur doit nous mettre en garde sur la validité des hypothèses.

### 5.2.c- Informations a priori sur le moteur Baudouin

#### Information sur les termes d'aimantations

Dans le premier chapitre, nous avons montré les origines possibles des sources d'aimantation que l'on peut trouver dans les pièces mesurées sur notre station d'essais. Nous avons alors vu que l'origine principale est l'aimantation naturelle que prennent les parties ferromagnétiques des objets. Celle-ci a un comportement complexe puisqu'elle est dotée d'un effet de "mémoire" (effet justement très utilisé dans les mémoires informatiques !).

Sauf à faire une modélisation très fine comme celle évoquée dans la fin du chapitre précédent, nous n'avons pas beaucoup d'informations a priori à injecter dans le système, d'autant qu'il est important pour la stabilité de ne faire que des hypothèses justes.

La première hypothèse faite, mais dont nous avons déjà parlé et intégrée dans les équations est de dire que les sources magnétiques se trouvent concentrées à l'intérieur de la coque géométrique que nous avons tracée autour du moteur. C'est probablement l'hypothèse principale.

Ensuite il serait bon de trouver les lois de probabilités de notre connaissance de l'aimantation des objets. Dans le cas général, on ne peut pas favoriser une distribution d'aimantation par rapport à une distribution identique mais de signe opposé. Cela entraîne l'utilisation d'une loi de probabilité symétrique et une espérance  $M_A$  nulle.

Il faut ensuite estimer l'aimantation dipolaire des anomalies en fonction de critères plus ou moins empiriques. L'un des plus simples, utilisés pour les objets ferromagnétiques, est de considérer que l'aimantation est proportionnelle au poids de matériaux magnétiques avec un coefficient de  $0,1 \text{ Am}^2$  par kilogramme. Il existe cependant des formules plus complètes tenant compte des formes de l'objet et des coefficients internes de remplissage, pour estimer la valeur du terme dipolaire de l'aimantation.

Notre moteur faisant 1 tonne, nous prenons un coefficient de  $100 \text{ Am}^2$  comme ordre de grandeur du dipôle équivalent au moteur.

Nous pouvons ensuite considérer une loi de décroissance entre les termes harmoniques en fonction du degré. Cette loi de décroissance dépend évidemment de la taille de l'objet (n'oublions pas que les différents coefficients n'ont pas la même unité dans le cas des harmoniques sphériques). Une bonne hypothèse de départ est de considérer le cas d'une distribution homogène de sources à l'intérieur de l'objet. Il n'y aura pas de décroissance dans le cas de notre base orthonormée des dipôles surfaciques et un coefficient de :

$$\sigma_{am}^2 = r_0^{n-1} M \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \quad (5.7)$$

dans une modélisation par harmoniques sphériques (de rayon  $r_0$ ). Si la modélisation est faite sur un ellipsoïde de révolution pas trop éloigné d'une sphère, nous prendrons un  $r_0$  "moyen".

Le moteur est assez massif et est rempli de manière relativement homogène de matériaux ferromagnétiques. Nous pouvons alors oser penser que la situation où l'aimantation du moteur est équivalente à un dipôle situé en périphérie de la coque est peu probable. A cause de cela, nous nous permettons d'ajouter à l'amortissement des termes harmoniques un coefficient supplémentaire  $\rho$  (revenant à réduire de manière artificielle la taille de la coque). Nous prenons

$$\rho = 0,75 \quad (5.8)$$

(coefficient choisi de manière très empirique).

Enfin, en absence de toute autre information (que pourrait donner une analyse plus fine), nous supposons les paramètres indépendants deux à deux.

$\square$  Il existe des cas où il est facile d'introduire des corrélations entre les inconnues du système. Par exemple, si nous mesurons l'induction terrestre, nous pouvons biaiser les termes dipolaires des anomalies magnétiques car ils sont vraisemblablement corrélés avec cette induction. De même si nous connaissons une mesure ancienne de l'état magnétique, nous pouvons l'introduire comme espérance de l'état magnétique et n'introduire dans la variance que l'écart crédible dû à l'erreur de mesure et à l'évolution de la source magnétique.

#### Information sur l'incertitude capteur

Au même titre que les aimantations, l'erreur faite par chaque capteur est un des paramètres du système à résoudre. Il faut donc lui affecter une loi de probabilité. Si le constructeur des capteurs est sérieux, il doit être capable de donner les ordres de grandeur des sources d'incertitude de son matériel. Dans le cas d'un capteur magnétique vectoriel de type "flux-gate", nous pouvons répartir ces sources d'erreur en plusieurs paramètres (figure 5.3) auquel nous pouvons ajouter l'erreur de mésalignement de la sonde par rapport à la référence mécanique du capteur. Il est parfois aussi utile de connaître les dérives de ces paramètres en fonction de la température, de l'amplitude des champs mesurés (effet d'hystérésis) ou du vieillissement des sondes.

L'erreur de mesure est aussi dépendante de causes externes au capteur. Nous pouvons mentionner l'incertitude de la connaissance de la position et de l'orientation du capteur par rapport au modèle ainsi que l'existence d'un "champ magnétique diffus" qui est en fait l'induction magnétique créée par toutes les sources non prises en compte dans le modèle.

Vis à vis de toutes les précautions que nous avons prises au niveau expérimental, nous avons estimé l'incertitude de la mesure à environ 50 nT.

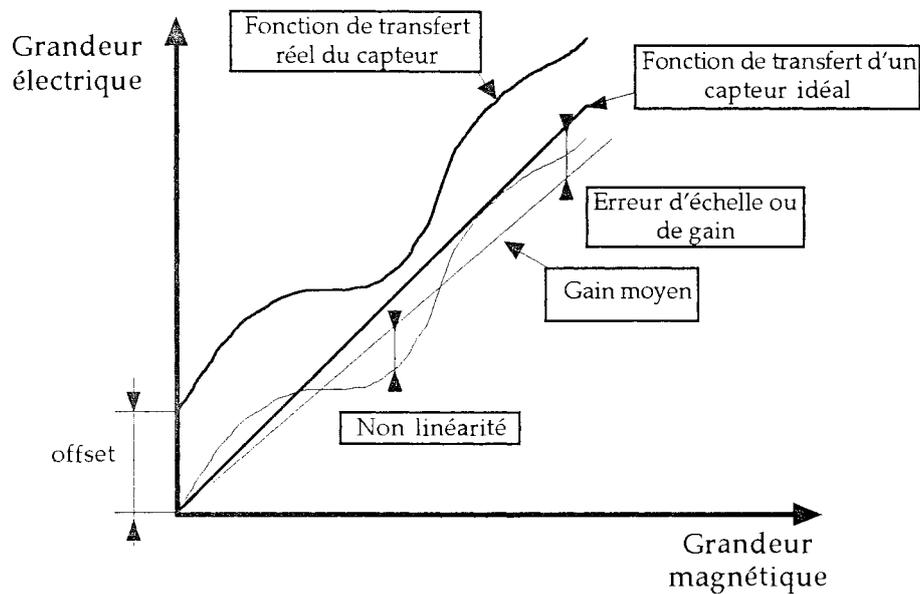


Figure 5.3 : Schéma des erreurs capteurs

Pour les capteurs aussi, en absence de biais clairement identifié, nous prendrons l'espérance de l'erreur de mesure égale à zéro.

### Lois de probabilités choisies

Dans notre expérimentation, nous n'avons défini que les ordres de grandeur des différents paramètres, mais nous n'avons pas parlé de la loi de probabilité elle-même.

La raison est très simple. Nous n'en avons pas la moindre idée ! En l'absence d'une théorie sur la connaissance, nous transformerons dans les deux paragraphes précédents le mot "ordre de grandeur" par le mot "écart-type", et nous ne ferons pas d'hypothèse sur la forme de la loi de probabilité.

## 5.3- Inversion du système

### 5.3.a- Loi de Bayes

Supposons que nous ayons affecté au vecteur  $A$ , une loi de probabilité  $p(A)$ . Calculons maintenant, à partir d'une mesure  $B$ , l'estimée de  $A$ . La manière la plus rigoureuse de donner une solution de  $A$  est de donner la loi de probabilité de  $A$  connaissant la mesure  $B$ , c'est à dire de calculer la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  (qui rappelons le, s'interprète comme la crédibilité de  $A$  sachant  $B$ ).

Celle-ci est donnée par la loi de Bayes.

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) p(A)}{p(B)} \quad (5.9)$$

Seulement, cette équation n'est pas facilement calculable dans le cas général.

### 5.3.b- Choix de la meilleure estimée

Ne pouvant calculer  $p(A|B)$  simplement, plutôt que d'avoir la loi de probabilité complète de  $A$ , nous allons nous contenter d'obtenir une valeur de  $A$  "représentative" des valeurs vraisemblables. Nous allons essayer cependant d'y ajouter une information sur la précision obtenue (c'est à dire sur la dispersion possible des valeurs).

Les critères généralement pris pour estimer une variable et sa précision sont ceux-ci (d'après [SAPORTA]) :

Valeur caractéristique		Dispersion associée	
mode	$\chi_0 / p(\chi_0) = \max_y p(y)$		
médiane	$\chi_1 = X / \int_{y_{\min}}^x p(y) dy = \frac{1}{2}$	écart	$V_1 = \int_y  y - \chi_1  p(y) dy$
espérance	$\chi_2 = \int_y y p(y) dy$	variance	$V_2 = \int_y (y - \chi_2)^2 p(y) dy$
milieu de l'étendue	$\chi_3 = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2}$	étendue	$V_3 = y_{\max} - y_{\min}$

Une propriété importante est que si la loi de probabilité est symétrique, toutes ces valeurs ( $\chi_0$  à  $\chi_3$ ) sont confondues (pas le mode si il est à valeur multiple). Par contre dans le cas contraire, les différentes valeurs ne sont pas identiques et le choix d'un critère par rapport à un autre dépend du résultat que l'on souhaite.

Si on souhaite minimiser l'erreur maximum quelque soit la probabilité d'atteindre cette valeur maximum, il faut choisir le milieu de l'étendue (qui minimise l'étendue). Si, par contre, il est souhaitable d'avoir le plus souvent possible une erreur extrêmement faible, il vaut mieux prendre le mode (c'est à dire la valeur la plus probable). Enfin, si on choisit de minimiser la variance de l'erreur, il faut

choisir l'espérance.

Il est probable qu'aucun des critères extrêmes n'est bon, et qu'il faut choisir un juste milieu.

### 5.3.c- Calculabilité de l'estimée

Le choix de l'estimée est essentiellement dicté par la possibilité de le calculer facilement.

En effet, les différentes estimées ne sont facilement calculables que dans des hypothèses précises des lois de probabilités. Le cas le plus simple est l'espérance qui est calculable de manière linéaire dans le cas où toutes les probabilités sont gaussiennes.

Cependant la médiane est calculable par la méthode du simplex dans le cas où toutes les probabilités sont de forme double-exponentielle ([PRESS] ou [TARANTOLA]). Il est probable que nous devons nous limiter à ces deux cas, si nous souhaitons un filtre optimal.

Nous pouvons aussi nous contenter de filtres non optimaux mais plus simples. Dans ce cas, l'estimation de l'espérance sous hypothèse gaussienne est le meilleur estimateur linéaire de l'espérance pour toutes les autres lois de probabilité. Hélas, c'est quand même un estimateur plutôt mauvais si les lois de probabilité sont très étalées (problème de la robustesse).

### 5.3.d- Conclusion partielle sur le choix

Nous venons de voir que plusieurs choix de critères sont possibles ayant chacun leurs avantages et leurs inconvénients. La question que l'on peut se poser est la suivante : est ce que ce choix est crucial pour les performances des algorithmes ? En d'autres termes est ce que l'estimateur linéaire qui simplifie extrêmement les calculs (mais n'est optimal que sous l'hypothèse des probabilités gaussienne) est utilisable ?

Nous pouvons juste apporter un élément de réponse.

Si le système est plutôt sur-dimensionné, nous avons alors beaucoup d'équations pour un nombre restreint d'inconnues, lesquelles peuvent être calculées très précisément. Mais le grand nombre d'équations supposées liées augmente très fortement la chance de tomber sur des équations contradictoires avec les hypothèses (fausses) de comportement des paramètres. Il entraîne donc des instabilités et une faible robustesse. Le calcul est alors effectivement très sensible à la forme des queues de probabilités du système.

Si par contre, le système est sous-dimensionné, le manque d'équations fait que seules les grandes tendances des lois de probabilités (espérance, variance...) contribue à la solution et que la forme de ces lois n'est pas prédominante.

Cependant, le cas réel est un peu plus subtil, car le système d'équations, tout en étant sous-déterminé pour la majorité des paramètres, peut être sur-déterminé pour un sous ensemble de ceux-ci et donc entraîner une divergence du système.

Il est important de noter que nous verrons un moyen d'estimer a posteriori si le système a plutôt divergé ou convergé.

## 5.4- Estimateur linéaire

### 5.4.a- Résolution du système

Nous pouvons associer au vecteur  $A$ , une matrice de variance/covariance notée  $V_A$  qui est définie non négative et un vecteur espérance mathématique de  $A$  noté  $M_A$ . De plus, compte tenu des propriétés des matrices définies non négatives, nous avons l'existence d'une matrice triangulaire inférieure notée  $E_A$  (voir [PRESS]) telle que (décomposition de Cholesky de la matrice) :

$$V_A = E_A E_A^t \quad (5.10)$$

L'annexe A.7 permet d'affirmer alors qu'il existe au moins un vecteur  $\alpha$  de variables aléatoires (processus aléatoires si on s'intéresse à l'évolution temporelle des phénomènes) centrées et linéairement indépendantes (mais non obligatoirement gaussiennes ni indépendantes) tel que :

$$A = E_A \alpha + M_A \quad (5.11)$$

**Rq** Nous pouvons être étonnés de considérer qu'un phénomène tel que, par exemple, l'induction terrestre soit considéré comme un phénomène incertain. En fait comme dans toute détermination, la connaissance de cette induction est entachée d'erreurs. Nous avons donc une partie connue (que nous identifions à l'espérance de la variable, évoluant éventuellement dans le temps) ajoutée à une partie indéterminée due à la présence de légères erreurs (qui correspond à la partie aléatoire de la variable). Dans le cas limite d'une variable absolument certaine, la variance sera nulle.

La démonstration de la résolution du système est décrite dans l'annexe B.4. Nous allons seulement présenter ici les résultats.

En reprenant les notations précédentes et en supposant que la matrice  $E_A$  se décompose en valeurs singulières selon :

$$\mathbb{F}\mathbb{E}_A = \mathbb{P}\mathbb{\Lambda}\mathbb{Q}^t = (\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbb{Q}_1 \quad \mathbb{Q}_2)^t \quad (5.12)$$

avec  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  deux matrices carrées respectivement de dimension  $m$  (nombre de voies de mesures) et  $n$  (nombre de paramètres), unitaires et  $\mathbb{\Lambda}$  une matrice diagonale de  $k$  valeurs non nulles.

L'estimation linéaire de  $A$  (noté  $\underline{A}$ ) s'écrit alors :

$$\underline{A} = \mathbb{H}_1\mathbb{B} + \mathbb{H}_2$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1 &= \mathbb{E}_A\mathbb{Q}\mathbb{\Lambda}^{-1}\mathbb{P}^t + \mathbb{H}_3\mathbb{P}^t \\ \mathbb{H}_2 &= (\mathbb{I} - \mathbb{H}_1\mathbb{F})\mathbb{M}_A \end{aligned} \quad (B.82)$$

avec la notation :

$$\mathbb{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et avec  $\mathbb{H}_3$  une matrice quelconque de dimension  $m, n$  de la forme  $(0 \ X)$  c'est à dire avec les  $k$  premières colonnes nulles ( $k$  étant le rang de la matrice  $\mathbb{F}\mathbb{E}_A$ ).

Dans le cas très général où  $\mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t$  est inversible et où la solution de norme minimale est cherchée, le système d'équation se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1 &= \mathbb{V}_A\mathbb{F}^t(\mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t)^{-1} \\ \mathbb{H}_2 &= (\mathbb{I} - \mathbb{H}_1\mathbb{F})\mathbb{M}_A \end{aligned} \quad (B.82b)$$

#### 5.4.b- Remarques générales sur l'estimateur linéaire

##### Généralité des deux formules

La seconde formule pour  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  est un peu moins complète que la première.

Elle fait l'hypothèse que  $\mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t$  est inversible, c'est à dire que tous les modes de  $B$  sont excitables. Mais c'est en général vrai, car le bruit de mesure suffit à exciter les modes.

Dans le cas contraire, à cause de  $\mathbb{H}_3$ , nous pouvons avoir un ensemble infini d'estimateurs qui peuvent expliquer de manière équivalente une mesure B.

Il est intéressant de voir à quelle condition cela correspond.

Quand nous décomposons  $\mathbb{F}\mathbb{E}_A$  en valeurs singulières, nous observons que certaines combinaisons des coefficients  $\alpha$  sont observables (celles correspondant aux  $k$  premières lignes de la matrice unitaire  $\mathbb{Q}^t$ ) alors que d'autres ne le sont pas (les  $n-k$  dernières lignes de la matrice  $\mathbb{Q}^t$ )

Réciproquement, tous les modes de mesure B peuvent ne pas être excités. C'est à dire, qu'un certain nombre de combinaisons linéaires des coefficients du vecteur mesure B peuvent ne jamais apparaître (les  $m-k$  dernières lignes de la matrice unitaire  $\mathbb{P}$ ). Cela correspond au fait que tous les états de la mesure B ne sont pas commandables. Puisque ces modes (c'est à dire certaines combinaisons linéaires des éléments du vecteur mesure) ne peuvent pas apparaître, nous pouvons les multiplier par n'importe quelle valeur, le résultat doit toujours rester à zéro. C'est en cela qu'apparaît une matrice  $\mathbb{H}_3$  presque quelconque dans l'estimateur.

△ Cependant, physiquement, ne pas mettre  $\mathbb{H}_3$  à zéro est très dangereux. En effet, il s'agit d'une modélisation de la réalité et donc certains termes ont été négligés (par exemple les termes de degré élevé du développement en harmoniques sphériques). Ainsi les différents modes non excités de B dans le modèle peuvent l'être légèrement dans la réalité, et ne pas mettre  $\mathbb{H}_3$  à zéro, revient à amplifier ces termes d'une manière nuisible puisque non modélisée (et donc non contrôlée).

D'ailleurs, même si certains modes de B ne sont pas physiquement excités, le bruit numérique pendant la résolution du système se chargera de le faire.

□ Il est assez curieux finalement que les problèmes apparaissent à partir du moment où les mesures B sont redondantes (autre façon de dire que  $\mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t$  n'est pas inversible !)

En fait, il est important de faire attention dès que les valeurs de  $\lambda$  sont faibles.

En effet, dans la matrice  $\mathbb{H}_1$ , apparaissent les coefficients  $\lambda^{-1}$ . C'est à dire que moins une combinaison linéaire des sources physiques  $\alpha$  fait sentir son effet dans la mesure, plus son poids est important dans l'estimateur  $\mathbb{H}_1$  !

Cela peut paraître normal dans le sens que des effets de faible amplitude doivent être fortement amplifiés pour pouvoir être identifiés, mais c'est dangereux à partir du moment où d'autres effets indésirables (en particulier le bruit numérique) sont aussi amplifiés dans le même rapport.

Les différents auteurs ([PRESS] ou [LAWSON]) considèrent que la solution sage est de se fixer un seuil au dessous duquel toute valeur singulière est considérée comme nulle. Ce seuil est déterminé empiriquement en fonction de la précision des calculs.

### Effet stabilisateur du bruit capteur

Supposons que chaque capteur est bruité, alors l'introduction de l'incertitude des capteurs dans le vecteur  $A$  va amener la matrice  $\mathbb{F} \mathbb{V}_A \mathbb{F}^t$  à être inversible.

En effet, chaque sonde aura une partie de son incertitude (que nous assimilerons au bruit du capteur) indépendante des autres sondes et des paramètres physiques introduits dans le vecteur  $A$ . Nous pouvons alors décomposer le vecteur  $A$  en deux sous vecteurs  $A_1$  et  $A_2$ ,  $A_2$  correspondant aux termes d'incertitudes indépendants et  $\mathbb{F}$  en deux sous matrices  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_2$  avec  $\mathbb{F}_2$  étant l'identité.

$$\mathbb{F}A = (\mathbb{F}_1 \quad \mathbb{I}) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

A partir de cette définition, nous pouvons mettre  $\mathbb{V}_A$  sous la forme :

$$\mathbb{V}_A = \begin{pmatrix} \mathbb{V}_{A1} & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

avec  $w^2$  une matrice diagonale de valeurs propres strictement positives et de dimension  $m$  ( $m$  étant le nombre de sondes).

Si nous calculons à partir de cette définition, nous avons :

$$\mathbb{F} \mathbb{V}_A \mathbb{F}^t = \mathbb{F}_1 \mathbb{V}_{A1} \mathbb{F}_1^t + w^2 \quad (5.15)$$

$\mathbb{F} \mathbb{V}_{A1} \mathbb{F}^t$  est une matrice positive,  $w^2$  est une matrice strictement positive.

Donc quel que soit  $X$ , vecteur de dimension  $m$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \mathbb{V}_A \mathbb{F}^t X &= \mathbb{F}_1 \mathbb{V}_{A1} \mathbb{F}_1^t X + w^2 X \\ &\geq w_{\min}^2 X \end{aligned} \quad (5.16)$$

avec  $w_{\min}^2$  la plus petite valeur propre de  $w^2$ .

Nous pouvons en déduire que non seulement  $\mathbb{F} \mathbb{V}_A \mathbb{F}^t$  est inversible mais en plus que ses valeurs propres sont supérieures à celles de  $w^2$ . Nous pouvons en dire de même des  $m$  premières valeurs singulières de  $\mathbb{F} \mathbb{E}_A$  (elles en sont les racines carrées).

Il est à remarquer que si toutes les sondes ont la même incertitude de variance  $w^2$ , et si  $\lambda_i$  sont les valeurs singulières de  $\mathbb{F}_1$ , alors  $\lambda_i^2 + w^2$  sont les valeurs propres de  $\mathbb{FV}_A\mathbb{F}^t$ .

**Rq** Le risque de divergence qui apparaît lorsque nous avons des capteurs qui sont des combinaisons linéaires les uns des autres, est lié au problème de la cohérence des données.

Quand on applique le théorème des probabilités conditionnelles (équation (5.9), dont les équations que nous venons de présenter en sont une forme dans le cas linéaire, nous avons une division par la probabilité de la mesure. Dans le cas qui nous préoccupe, le moindre bruit numérique peut faire que vis à vis de notre modèle, cette probabilité devient très proche de zéro et nous avons en fait une division par zéro.

Le fait de rajouter un bruit indépendant pour chaque capteur permet "d'étaler" la probabilité de B et donc de minimiser le risque de cette division par zéro.

#### Extension si nous voulons une fonction de A minimale

Si nous cherchons à estimer non pas les paramètres sources A mais une fonction linéaire de ces paramètres, par exemple une estimée du champ en un ou plusieurs points donnés autour de la zone de mesures, il est équivalent de chercher la meilleure estimée de A.

Si par exemple on a :

$$\begin{aligned} B &= \mathbb{F}A \\ R &= \mathbb{G}A \end{aligned} \quad (5.17)$$

La meilleure estimée de R en fonction de la mesure B est :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \mathbb{G}\mathbb{M}_A + \mathbb{G}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t(\mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t)^{-1}(B - \mathbb{F}\mathbb{M}_A) \\ &= \underline{\mathbb{G}}A \end{aligned} \quad (5.18)$$

## 5.5- Estimation de l'état magnétique du moteur Baudouin

### 5.5.a- Estimation du champ sous le moteur

A partir des quatre ensembles de capteurs que nous avons choisis pour l'identification, à partir des écart-types supposés pour les paramètres de la mesure, et enfin en utilisant la formule que nous venons d'établir (5.14), nous sommes capa-

bles d'identifier les sources magnétiques équivalentes du moteur.

Seulement, il s'agit aussi de vérifier les états trouvés. Un moyen assez facile de vérifier les solutions et de recalculer, à partir de l'état magnétique identifié, l'induction magnétique en des points de mesure autres que ceux déjà utilisés. Pour cela, nous utilisons la formule (5.18) et estimons le champ magnétique en des points de mesure qui se trouvent sous le moteur.

Plus particulièrement, nous utilisons les composantes verticales du champ du niveau B sous le moteur qui, nous l'avons dit, présente un bon compromis entre le champ lointain (discrimination des termes dipolaires) et le niveau de signal.

Nous estimons à chaque fois le signal maximum et l'erreur d'estimation maximale, sur l'ensemble des composantes mesurées dans ce plan, ainsi que l'erreur relative (définie comme l'erreur maximale sur le signal maximal dans le plan).

#### 5.5.b- Résultats bruts

Présentons sous forme de tableau les résultats obtenus.

Numéro de fichier	Maximum du signal (nT)	Nombre de sondes d'identification			
		15	23	99	136
0017 (Induit long.)	333	14,7 (4,4%)	13,6 (4,1%)	12,2(3,7%)	13,0 (3,9%)
0031 (Induit vert.)	266	10,0 (3,7%)	7,0 (2,6%)	5,2 (1,9%)	4,4 (1,7%)
0033 (Induit transv.)	134	14,9 (11,2%)	18,9 (14,2%)	14,9 (11,2%)	13,1 (9,8%)
0079 (Perm. long.)	250	7,7 (3,1%)	5,4 (2,1%)	7,3 (2,9%)	6,5 (2,6%)
0089 (Perm. vert.)	376	8,3 (2,2%)	13,7 (3,6%)	7,9 (2,1%)	9,5 (2,5%)
0099 (Perm. transv.)	178	29,9 (16,8%)	7,3 (4,1%)	12,1 (6,8%)	18,3 (10,3%)
0154 (Perm. vert.)	292	10,5 (3,6%)	4,4 (1,5%)	5,4 (1,8%)	4,7 (1,6%)
Théorique	462	36 (7,8%)	25 (5,5%)	16 (3,4%)	13 (2,8%)

Dans le tableau ci dessus, les résultats de l'erreur d'estimation des composantes verticales du champ sont exprimées en nT et en pourcentage de la valeur maximale de cette même composante verticale. Les résultats théoriques seront com-

mentés ultérieurement.

Brutalement, nous pouvons tirer trois remarques de ce tableau :

- le bon résultat général des algorithmes d'estimation de l'aimantation.
- les bonnes performances des résultats avec peu de capteurs vis à vis de ceux avec beaucoup de capteurs.
- des résultats des estimations plutôt moins bons, chaque fois que l'on mesure une aimantation principalement transversale.

A titre d'exemple, nous présentons dans les figures suivantes quelques exemples de signaux et d'erreurs d'identification (figure 5.4 à 5.7)

Les valeurs maximales des erreurs sur les figures diffèrent très légèrement des valeurs exprimées dans le tableau car les conditions de l'extrapolation n'étaient pas rigoureusement identiques. Il y a notamment des petites différences dans le maillage, le degré de développement de la base (degré 5) mais aussi dans l'écart type des bruits capteurs (10 nT).

Les échelles de couleurs utilisées mettent en évidence la forme de l'erreur mais pas son amplitude relative au signal. Si nous exprimons sur le même graphique, la mesure réelle et le champ estimé, nous avons respectivement pour les mêmes cas (figures 5.8 et 5.9 avec les mêmes paramètres que dans le tableau).

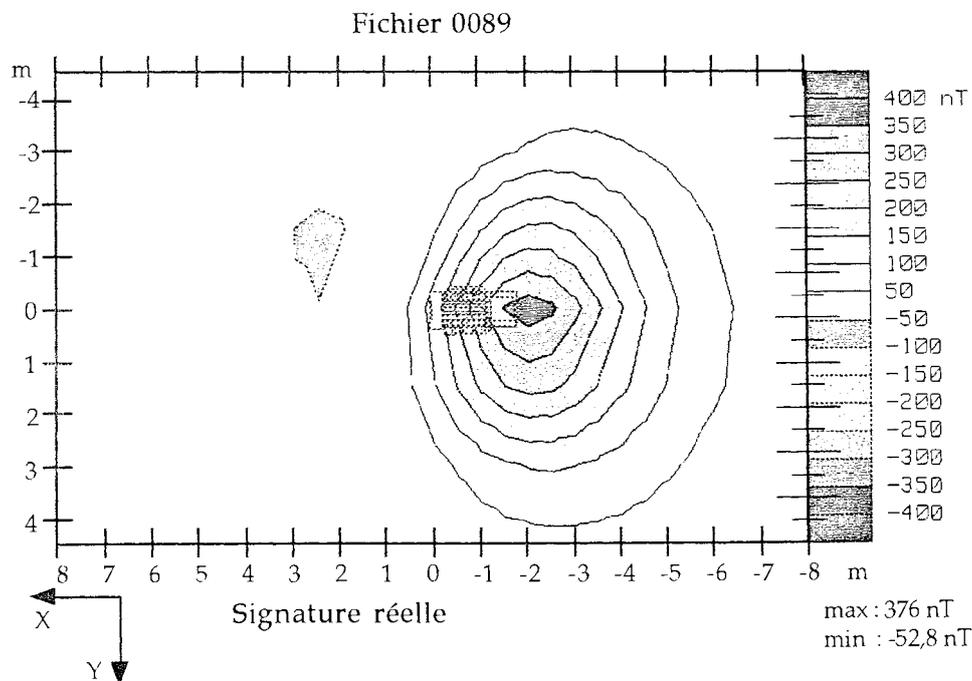


Figure 5.4 : Composante verticale du signal sur le niveau B (fichier 0089)

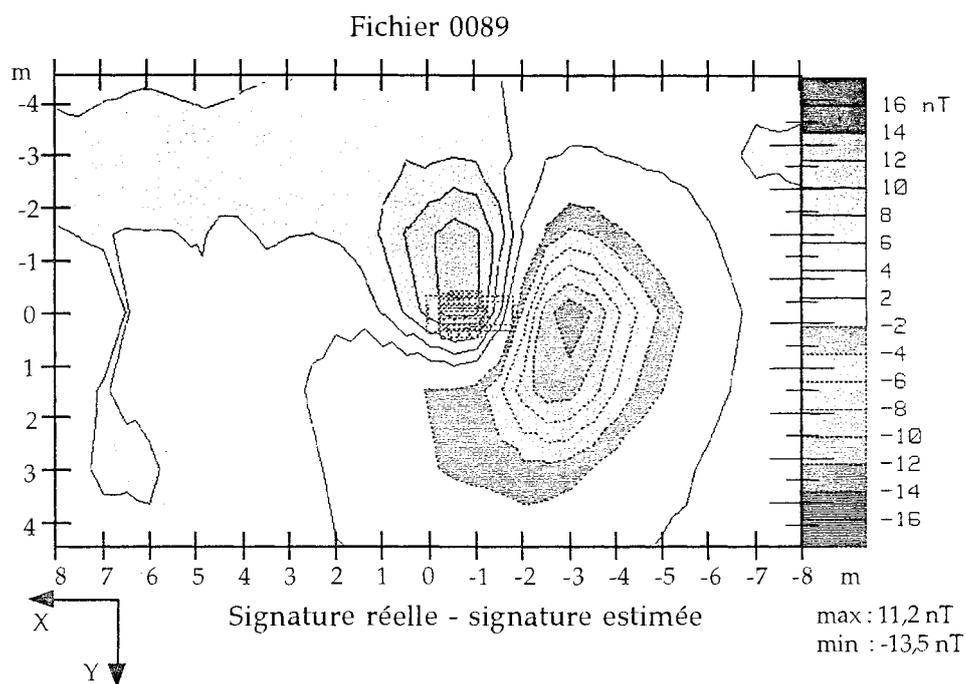


Figure 5.5 : Erreur d'identification de la composante verticale du signal (avec 15 voies)

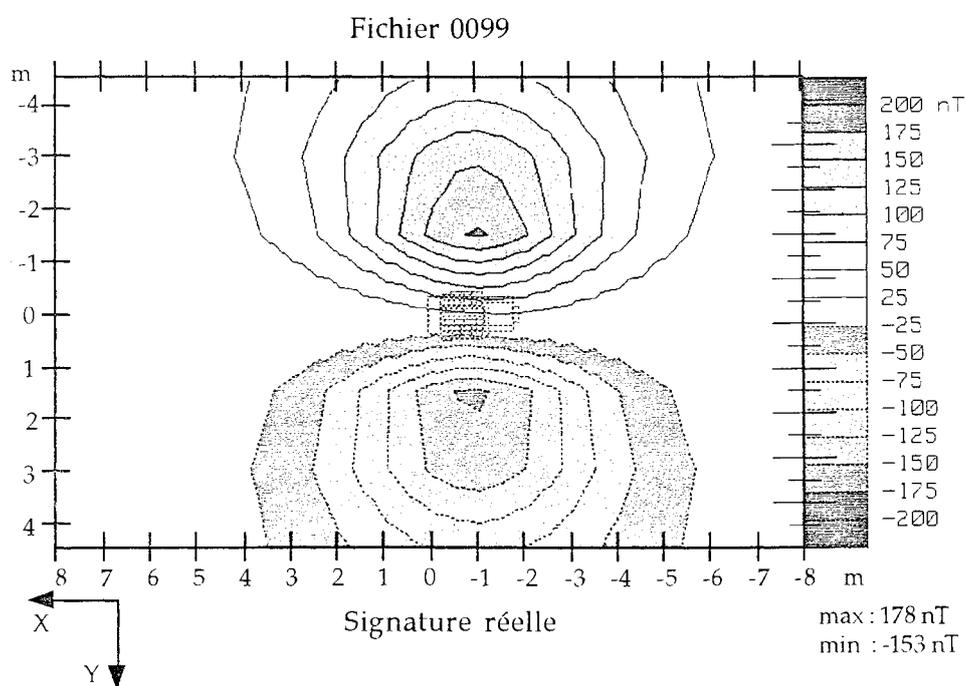


Figure 5.6 : Composante verticale du signal sur le niveau B (fichier 0099)

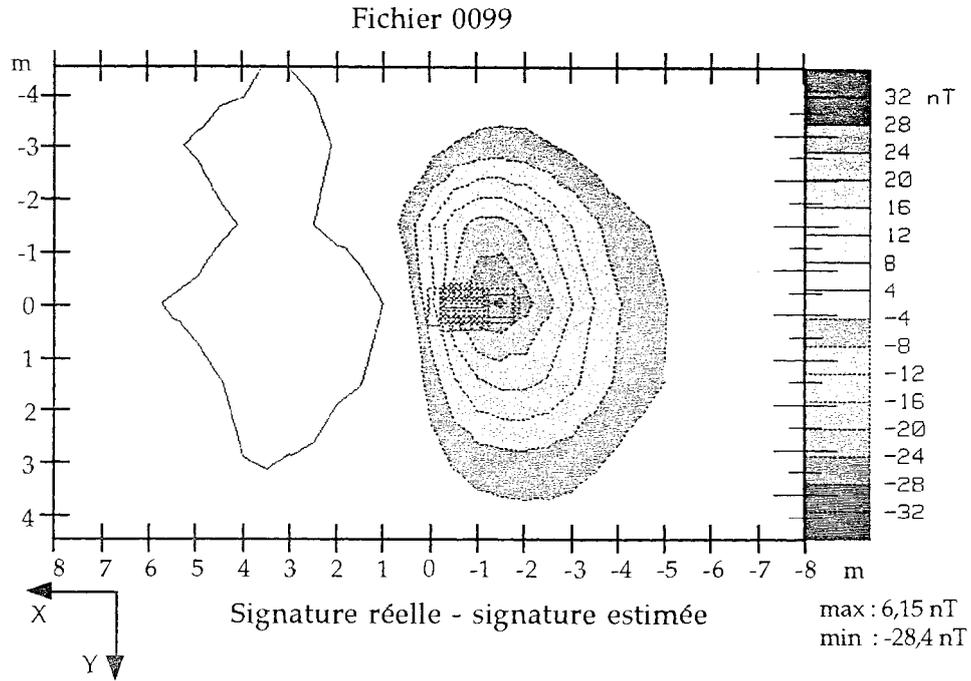


Figure 5.7 : Erreur d'identification de la composante verticale du signal (avec 15 voies)

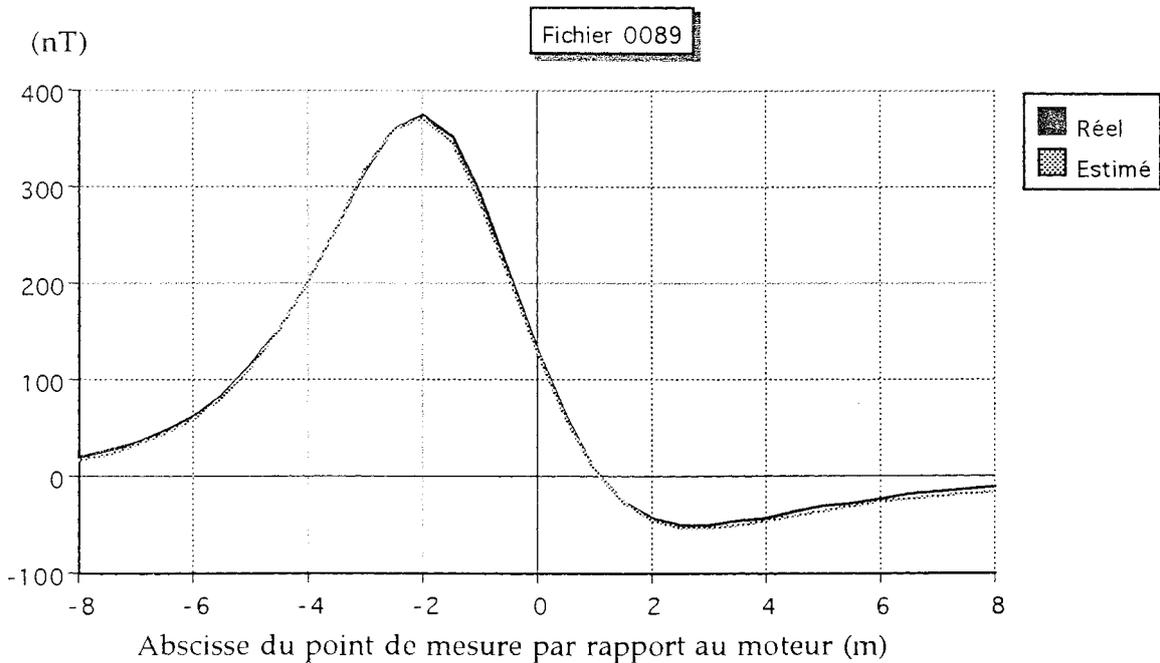


Figure 5.7 : Mesure et signal estimé (avec 15 voies) sur le capteur B4 (composante verticale)  
(Attention : l'abscisse est inversée par rapport aux isoniveaux)

La forme de l'erreur d'identification peut être relativement riche d'enseignement sur l'origine de l'écart entre les signatures réelles et estimées.

Par exemple, sur les courbes isoniveaux de l'erreur pour le fichier 0099 (figure 5.7), nous voyons qu'elle a la forme d'une signature d'origine le moteur (plus précisément, elle a la forme d'une aimantation verticale du moteur), il est donc probable que l'origine vienne d'une erreur d'estimation.

L'erreur d'identification pour le fichier 0089 (figure 5.5), montre en plus d'une signature du moteur, une forte composante continue (de l'ordre de 2 à 4 nT). Celle-ci ne peut pas être explicable par une erreur d'identification. En fait, au moment du zéro électronique des capteurs, le moteur était à une douzaine de mètres de la fosse et créait encore un champ résiduel sur ceux-ci, mais qui a été retranché alors même qu'il s'agit de signal utile. Cette erreur existe aussi pour le fichier 0099 mais est masquée par les autres sources d'erreur.

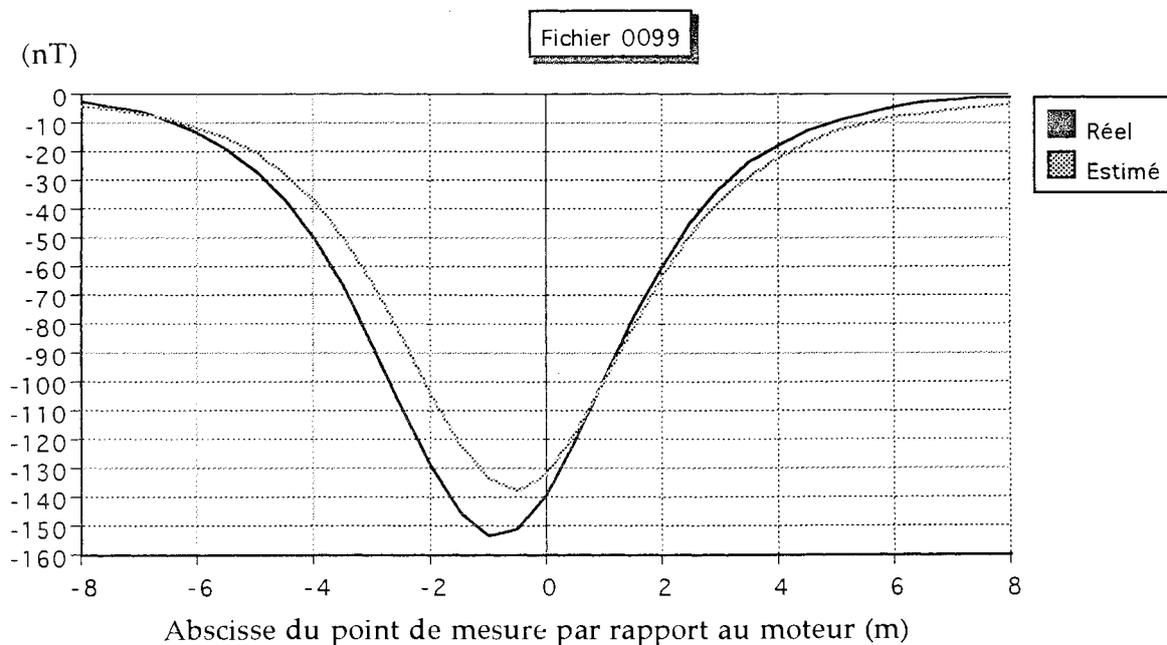


Figure 5.8 : Mesure et signal estimé (avec 15 voies) sur le capteur B3 (composante verticale)  
(Attention : l'abscisse est inversée par rapport aux isoniveaux)



## 6.- Validation et optimisation

### 6.1- Interprétation de l'estimateur linéaire

#### 6.1.a - Objectifs de l'étude complémentaire

Nous aurions pu rester à ce niveau de la recherche des problèmes inverses, mais ce serait se priver de tous les outils de contrôle et d'amélioration que peuvent fournir cette théorie. En effet, jusqu'à présent, les bénéfices obtenus sont assez faibles par rapport à une analyse par les moindres carrés. En fait, nous allons voir que le formalisme du chapitre précédent donne des moyens assez performants pour connaître a priori mais aussi a posteriori la qualité d'une estimation.

On peut en effet considérer de manière simpliste l'algorithme entier comme un instrument de mesure de l'aimantation de l'objet. Or, pour être utile, un appareil de mesure doit non seulement être précis et fidèle, mais on doit aussi pouvoir être capable de quantifier sa précision.

Tout d'abord, revenons sur l'estimateur linéaire et analysons plus finement comment il fonctionne.

#### 6.1.b- Interprétation des formules

Supposons pour simplifier que  $k=m$  c'est à dire que nous n'avons pas de capteur redondant, mais aussi que la matrice de variance  $\mathbb{V}_A$  est inversible (cela revient à supposer qu'aucun terme de  $A$  n'est soit constant, soit combinaison linéaire d'autres termes de  $A$ ).

Soit la matrice  $\mathbb{F}$  et le vecteur  $A$ , nous avons

$$B = \mathbb{F}A \tag{5.2}$$

Décomposons, non pas  $\mathbb{F}\mathbb{E}_A$  mais  $\mathbb{F}$  en valeurs singulières.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 B &= \mathbb{F}A = \mathbb{P}'\lambda'Q'tA \\
 &= \mathbb{P}' \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{pmatrix} A \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbb{F}'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec  $\mathbb{F}'_1$  inversible et  $\tilde{A} = Q'tA$

$\tilde{A}$  n'est que l'expression de  $A$  dans une autre base orthonormée. Ce vecteur a pour espérance  $M_{\tilde{A}} = Q'tM_A$  et pour variance  $V_{\tilde{A}} = Q'tV_AQ$ .

Calculons la matrice de l'estimateur de  $\tilde{A}$ .

$$\begin{aligned}
 \underline{\tilde{A}} &= M_A + V_A \mathbb{F}'t (\mathbb{F} V_A \mathbb{F}'t)^{-1} (B - \mathbb{F}M_A) \\
 &= M_A + Q V_{\tilde{A}} \mathbb{F}'t (\mathbb{F}' V_{\tilde{A}} \mathbb{F}'t)^{-1} (B - \mathbb{F}'M_{\tilde{A}})
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Si on pose :

$$V_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^t & V_{22} \end{pmatrix}$$

nous avons :

$$\underline{\tilde{A}} = M_A + Q V_{\tilde{A}} \mathbb{F}'t (\mathbb{F}'_1 V_{11} \mathbb{F}'_1 t)^{-1} (B - \mathbb{F}'M_{\tilde{A}}) \tag{6.3}$$

en développant plus, nous obtenons :

$$\underline{\tilde{A}} = Q \tilde{\underline{A}} \tag{6.4}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\underline{A}}_1 &= M_{\tilde{A}1} + \mathbb{F}'_1^{-1} (B - M_B) \\
 \tilde{\underline{A}}_2 &= M_{\tilde{A}2} + V_{12}^t V_{11}^{-1} \mathbb{F}'_1^{-1} (B - M_B) \\
 &= M_{\tilde{A}2} + V_{12}^t V_{11}^{-1} (\tilde{\underline{A}}_1 - M_{\tilde{A}1})
 \end{aligned}$$

Nous pouvons analyser un peu ces deux formules :

Nous avons une partie des paramètres du vecteur  $A$  qui est observable : le sous-vecteur  $\tilde{A}_1$  et une autre partie non observable :  $\tilde{A}_2$ .

Pour la partie observable, nous la déterminons directement par inversion de  $\mathbb{F}'_1$

et la reportons pour estimer  $A$  par l'intermédiaire de la matrice  $Q$ .

Par contre, nous essayons de déterminer  $\tilde{A}_2$ , qui n'est pas directement observable, par les corrélations supposées avec  $\tilde{A}_1$ . Nous avons  $(F'_1)^{-1}$  qui donne  $\tilde{A}_1$  et  $V_{12}^t V_{11}^{-1}$  qui donne l'estimée de  $\tilde{A}_2$  en fonction de ses corrélations avec  $\tilde{A}_1$ . Nous remarquons effectivement que s'il n'y avait pas de corrélation entre  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$ , alors  $V_{12}^t$  serait nul, et que la meilleure supposition que nous pourrions faire sur  $\tilde{A}_2$  est que les valeurs seraient égales à leur espérance.

Même si les différents paramètres sont supposés indépendants, cette méthode peut améliorer les performances de l'estimation. Il suffit de supposer les différents paramètres d'ordre de grandeur différents pour avoir, après orthogonalisation (recherche de  $F'_1$ ), une corrélation  $V_{12}^t \neq 0$ .

## 6.2- Performances a priori du système

### 6.2.a- Incertitude a priori de l'estimée

Pour pouvoir faire tous ces calculs, nous avons fait des hypothèses sur le système et en particulier sur le domaine de variation des différentes grandeurs.

En effet, l'estimateur linéaire a été choisi pour minimiser la variance de l'erreur de l'estimation ( $\varepsilon = \underline{A} - A$ ). Cela suppose implicitement que nous avons déjà calculé cette variance. En combinant les équations (B.78 et B.82b) nous obtenons effectivement :

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= (H_1 F - I) V_A (H_1 F - I)^t \\ &= V_A - V_A F^t (F V_A F^t)^{-1} F V_A \end{aligned} \quad (6.5)$$

C'est à dire que pour une configuration donnée, si les hypothèses a priori sont justes, nous pouvons dire, paramètre par paramètre, quelle est l'étendue de l'erreur avant même de commencer l'expérimentation. C'est ainsi que nous avons pu exprimer les incertitudes de mesure dans les figures 4.6 à 4.12.

Par des variantes de cette formule, en reprenant les notations précédentes, nous pouvons tout autant prédire l'incertitude sur les paramètres normalisés  $\alpha$ , ou encore sur toute combinaison linéaire des paramètres :

$$\begin{aligned} V_{\underline{\alpha}-\alpha} &= (E_A^t F^t (F V_A F^t)^{-1} F E_A - I) (E_A^t F^t (F V_A F^t)^{-1} F E_A - I) \\ &= I - E_A^t F^t (F V_A F^t)^{-1} F E_A \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$V_{R-R} = G (H_1 F - I) V_A (H_1 F - I)^t G^t$$

$$= G V_{AG}^t - G V_{AF}^t (F V_{AF}^t)^{-1} F V_{AG}^t \quad (6.7)$$

Bien entendu, il ne s'agit que d'estimations de l'erreur compte tenu des connaissances et des suppositions que nous faisons a priori sur le système. Si nos hypothèses sont fausses, cette évaluation n'a aucun sens.

Appliquons ce développement sur nos essais avec le moteur.

Nous pouvons tout d'abord présenter les erreurs d'estimation sur les termes d'aimantation (exprimé en échelle log pour pouvoir montrer l'ordre de grandeur sur les termes dipolaires).

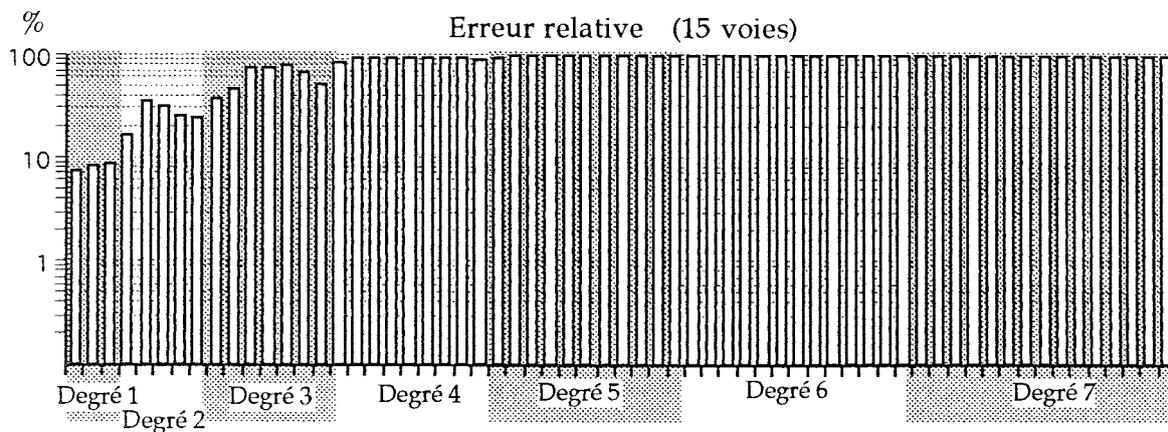


Figure 6.1 : Ecart-type relatif de l'erreur d'estimation prédite (pour 15 voies)

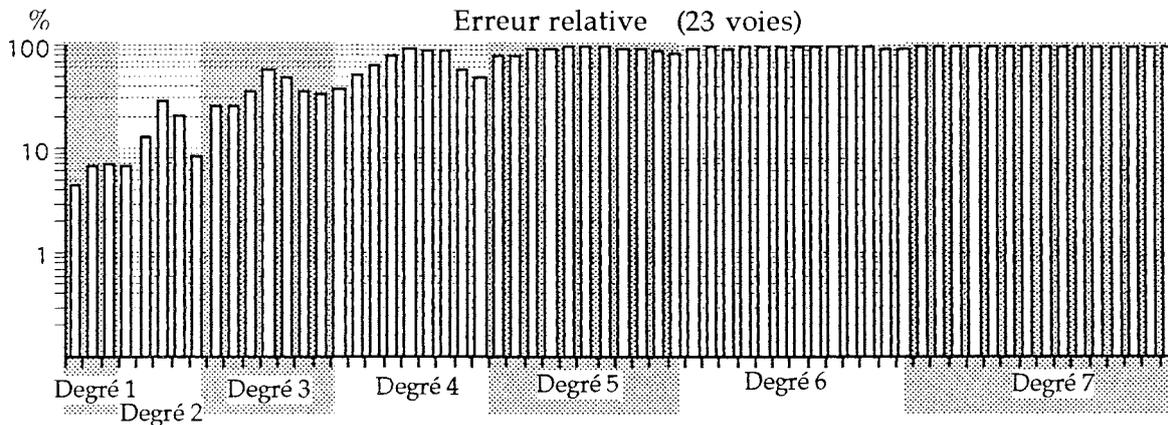


Figure 6.2 : Ecart-type relatif de l'erreur d'estimation prédite (pour 23 voies)

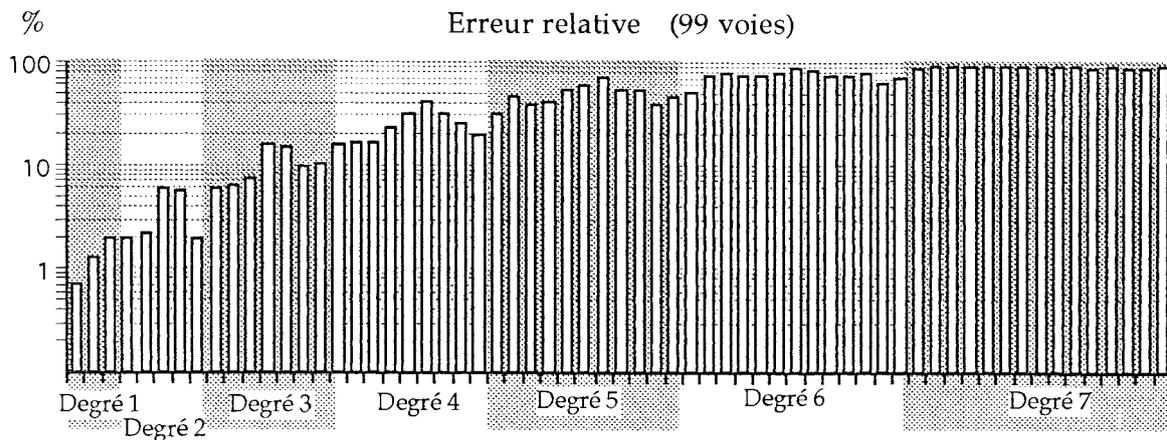


Figure 6.3: Ecart-type relatif de l'erreur d'estimation prédite (pour 99 voies)

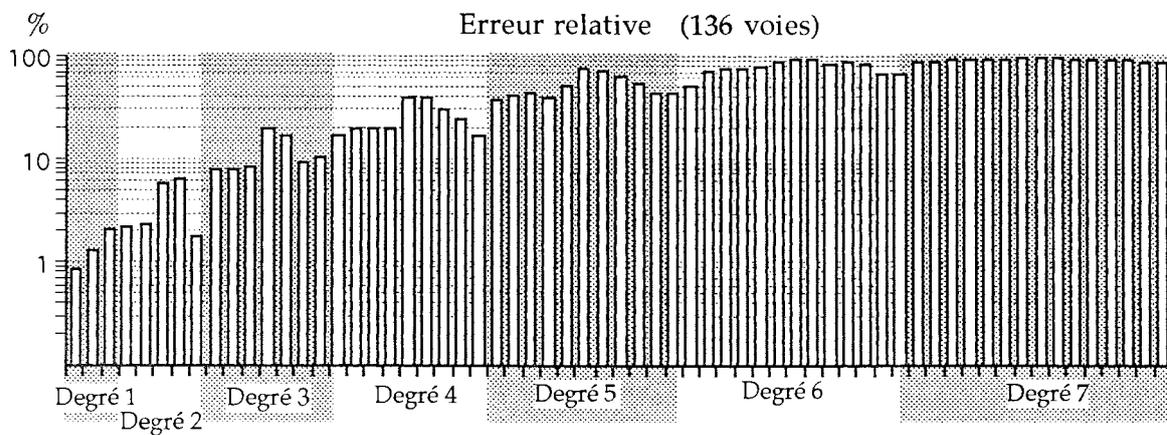


Figure 6.4 : Ecart-type relatif de l'erreur d'estimation prédite (pour 136 voies)

De ces courbes, on peut remarquer que le nombre de termes identifiés est inférieur au nombre de voies de mesure. Non seulement le bruit capteur diminue la précision du calcul, mais en plus la disposition des capteurs peut déterminer précisément des combinaisons de coefficients sans pour autant pouvoir les discriminer les uns des autres (en fait, nous ne représentons dans ces courbes que la diagonale de l'écart-type de l'erreur et non les corrélations entre paramètres).

Les précisions théoriques avec 99 et 136 voies sont à peu près similaires. Nous avons donc retenu la configuration à 99 voies pour identifier les coefficients présentés dans les figures 4.6 à 4.12.

Par la formule (6.13), nous pouvons tout aussi bien tracer l'erreur théorique de l'estimation du champ sur le niveau B. La figure 6.5 présente par exemple l'erreur théorique sur le capteur central du niveau B (B4) pour une identification avec 15 voies de mesure.

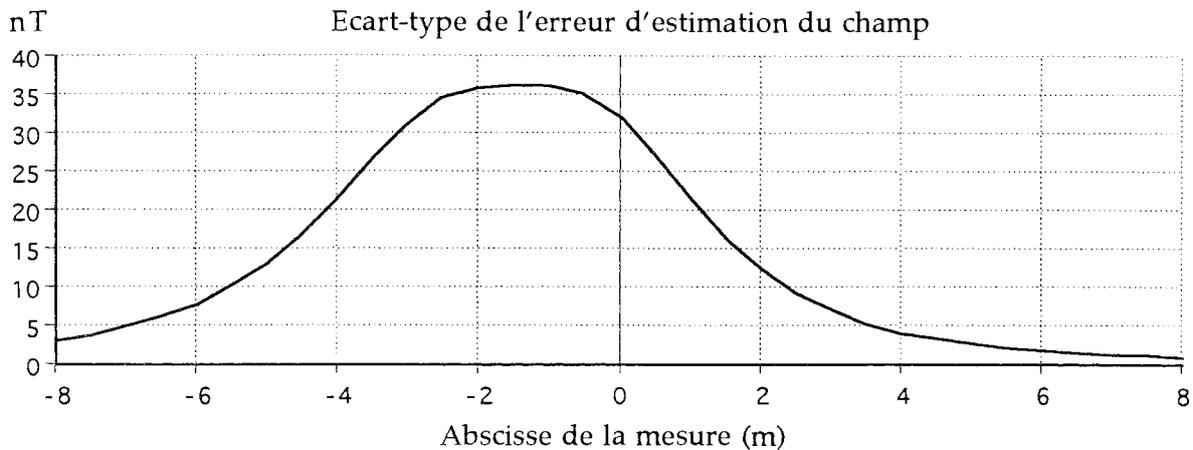


Figure 6.5 : Ecart-type de l'erreur d'identification du champ sur le capteur B4

Nous pouvons bien entendu connaître l'erreur d'identification réelle du champ magnétique sur les capteurs fosses en la comparant avec la mesure. Nous ne nous en sommes pas privés, en reportant sur la dernière ligne du tableau du paragraphe 5.5.b, le maximum de l'écart-type de l'erreur théorique sur les capteurs ayant servi à la mesure.

La dispersion des résultats des mesures étant assez élevée, nous nous contentons de dire que l'ordre de grandeur est respecté.

### 6.2.b- Optimisation des positions des capteurs

#### Principe général

Ne serait-ce que dans le cas précédent, où nous voyons qu'une configuration avec 136 voies de mesures n'est pas beaucoup plus précise (théoriquement) qu'une autre ne comportant que 99 voies de mesure, nous pouvons deviner que pour un nombre de capteurs donné, la position de ceux-ci va réellement déterminer l'inversibilité du système et donc la précision de l'identification.

Or nous avons un outil qui permet de prédire l'erreur du système. Nous devons donc pouvoir être capables de comparer l'efficacité relative de plusieurs ensembles de positions capteurs, voire même d'optimiser la position des capteurs pour réduire l'erreur au maximum.

La difficulté principale provient de la dépendance complexe des performances des algorithmes en fonction de la géométrie du système de mesure. En effet les positions relatives des sources et des capteurs de mesure interviennent de manière complexe dans la matrice de transfert entre l'état d'aimantation et le champ magnétique (matrice  $\mathbb{F}$ ).

Le réflexe est alors d'utiliser une approche "brutale", à savoir procéder à une optimisation non linéaire des positions des capteurs pour minimiser un critère représentatif de la performance de l'identification.

L'avantage de cette méthode est son côté automatique, cependant elle est lourde et ne permet pas toujours de garantir la pertinence de la solution. De plus il n'est pas toujours facile d'intégrer des contraintes extérieures telles que l'encombrement de la zone d'expérimentation.

Pour procéder à une telle optimisation, il faut définir une fonctionnelle à optimiser et une méthode d'optimisation.

La fonctionnelle doit correspondre à un critère de performance, fonction de la position des capteurs.

### Réduction de la variance de l'erreur

Le critère le plus immédiat est la minimisation de la variance de l'erreur estimée sur les aimantations, puisque nous venons de voir qu'elle est très simplement disponible.

Nous avons vu que dans le cas des hypothèses d'un estimateur linéaire, nous pouvons exprimer la variance de l'erreur d'estimation des aimantations :

$$\mathbb{V}_\varepsilon = \mathbb{V}_A - \mathbb{V}_A \mathbb{F}^t (\mathbb{F} \mathbb{V}_A \mathbb{F}^t)^{-1} \mathbb{F} \mathbb{V}_A \quad (6.5)$$

L'inconvénient de raisonner sur les aimantations est d'avoir un vecteur  $\varepsilon$  dont tous les éléments ne s'expriment pas dans la même unité. De plus la précision souhaitée sur certains termes de l'aimantation peut être différente de celles d'autres termes. Enfin, même si les problèmes d'unité ne se posent pas, si le critère est la minimisation de plusieurs coefficients (par exemple, les trois composantes dipolaires), il faut choisir si on préfère minimiser la moyenne de l'erreur (c'est à dire la moyenne de la variance des erreurs d'estimation), la variance maximale ou d'autres critères telle que l'erreur maximale possible.

Déjà, pour pouvoir comparer des choses comparables, il faut exprimer les différents coefficients à identifier dans une même unité. Il faut donc définir une matrice  $\mathbb{G}$  qui projette les coefficients dans un espace où la comparaison est possible.

Si nous nous intéressons uniquement aux termes dipolaires, la matrice  $\mathbb{G}$  sera de la forme :

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Si nous cherchons à minimiser les erreurs relatives des coefficients, nous au-

rons alors :

$$\mathbb{G} = \mathbb{E}A^{-1} \quad (6.9)$$

Nous pouvons tout aussi chercher à minimiser l'effet des erreurs sur le champ en un ensemble donné de points. Dans ce cas,  $\mathbb{G}$  sera la matrice de transfert entre les sources et cet ensemble de points.

La nouvelle erreur s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbb{G}(\underline{A}-A) \\ &= (\mathbb{G}V_A F^t (F V_A F^t)^{-1} F E_A - \mathbb{G}E_A) \alpha \end{aligned} \quad (6.10)$$

Nous avons alors à chercher les positions des capteurs qui minimisent ce vecteur.

Si nous notons  $\mathbb{X}$  la matrice de passage entre  $\alpha$  et  $\varepsilon$ , d'éléments  $x_{ij}$  avec  $i$  l'indice sur les lignes et  $j$  l'indice sur les colonnes.

Nous avons alors :

$$\varepsilon_i = \sum_j x_{ij} \alpha_j \quad (6.11)$$

La variance de l'erreur pour chaque terme sera donc :

$$v_{\varepsilon_i} = \sum_j x_{ij}^2 \quad (6.12)$$

Nous pouvons écrire plusieurs critères suivant que l'on cherche à minimiser la variance moyenne sur tous les termes (C1), la variance maximale (C2) ou l'erreur maximale possible (C3).

Pour le critère C1, on recherchera les positions qui minimisent :

$$c_1 = \frac{1}{n_i} \sum_i \sum_j x_{ij}^2 \quad (6.13)$$

(avec  $n_i$  le nombre de paramètres estimés). Ce critère est la norme de Frobenius de la matrice  $\mathbb{X}$  divisée par le nombre de lignes.

Pour le critère C2, on recherchera les positions qui minimisent :

$$c_2 = \max_i \sum_j x_{ij}^2 \quad (6.14)$$

et pour le critère C3, si on suppose en plus que tous les  $\alpha_j$  ont même loi de probabilité symétrique et qu'ils sont bornés.

$$c_3 = \max_i \sum_j |\kappa_{ij}| \quad (6.15)$$

Ces critères souffrent d'un inconvénient majeur. Le calcul de la matrice  $\mathbb{X}$  est lourd, puisque à chaque modification de la position d'un ou plusieurs capteurs, il faut recalculer la matrice  $\mathbb{F}$  et inverser une des matrices de calcul intermédiaire. La lenteur de ce calcul ( $kn^3$  par itération) empêche une optimisation par méthode stochastique. Il faut donc se "rabattre" sur des optimisations par la méthode de la plus grande pente (type Newton) et là, nous tombons sur une autre difficulté car les fonctions  $c_2$  et  $c_3$  ne sont dérivables que par morceaux (la convergence en est fortement ralentie). Il est donc conseillé dans ce cas d'utiliser le critère C1 dont la fonction est tout le temps dérivable si les capteurs sont bruités.

Même avec l'utilisation de ce critère, l'optimisation reste très délicate et limitée pour plusieurs raisons :

- elle n'est adaptée que dans le cadre des algorithmes linéaires. A la fin de ce chapitre, nous verrons des extensions non linéaires des algorithmes mais pour lesquels l'optimisation des positions des capteurs pose encore plus de problèmes.

- la réalité peut être très différente de nos hypothèses a priori et peut ruiner le résultat de nos efforts d'optimisation du système.

- enfin, les différentes expérimentations que nous avons faites, nous ont montré la présence d'un grand nombre de minima locaux dans lesquels l'algorithme a de grandes propensions à s'arrêter.

Pour contourner ce second problème, nous utilisons en fait une technique de multistart avec démarrage sur des positions proches de celles données par l'étude paramétrique (chapitre suivant).

### Dérivée de la fonction critère $c_1$

Nous avons choisi le critère C1 parce qu'il avait la qualité d'être dérivable (une discontinuité de la fonction ne peut théoriquement arriver que si deux capteurs supposés parfaits se superposent pendant l'optimisation créant une singularité de la matrice  $\mathbb{F} \mathbb{V}_A \mathbb{F}^t$ ). Il est utile de savoir calculer cette dérivée.

Si  $n$  est le nombre de variables utilisées pour le critère d'erreur (dimension du vecteur  $\epsilon$ ) et si  $m$  est le nombre d'inconnues normalisées (dimension du vecteur  $\alpha$ ).

$$c_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\pi} x_{ij}^2 \quad (6.13)$$

Sa dérivée par rapport à la  $k^{\text{ième}}$  position de capteurs servant à l'identification :

$$\frac{\partial c_1}{\partial M_k} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\pi} x_{ij} \frac{\partial x_{ij}}{\partial M_k} \quad (6.16)$$

$\frac{\partial x_{ij}}{\partial M_k}$  est l'élément d'indice  $i, j$  de la dérivée de la matrice  $\mathbb{X}$  par rapport à la  $k^{\text{ième}}$  position de capteurs servant à l'identification. C'est à dire (en notant  $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial M_k}$  par  $\mathbb{F}'$ ):

$$\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial M_k} = \mathbb{G} \mathbb{E}_A [(\mathbb{I} - \mathbb{H}_1 \mathbb{F} \mathbb{E}_A)(\mathbb{H}_1 \mathbb{F}' \mathbb{E}_A)^t + (\mathbb{H}_1 \mathbb{F}' \mathbb{E}_A)(\mathbb{I} - \mathbb{H}_1 \mathbb{F} \mathbb{E}_A)^t] \quad (6.17)$$

### Résultats

De nombreux essais expérimentaux nous permettent de penser que cette dernière méthode est la seule réaliste car les temps de calcul sont très longs. Nous avons donc utilisé cette méthode pour trouver les deux configurations avec respectivement 15 et 23 sondes.

Nous avons pris comme critère la somme quadratique des erreurs sur le plan formé par les mesures du niveau B (les trois composantes confondues).

Cependant, nous avons été obligés de restreindre l'ensemble des positions valides à rester dans le "U" inversé représentant l'espace où des mesures du champ sont disponibles. Cette contrainte géométrique supplémentaire augmente le risque de s'arrêter sur un minimum local. Les solutions obtenues (après seulement un essai et arrêt au premier minimum trouvé) dessinées figure 5.2 ne nous semblent pas réellement optimales (ne serait ce que par leur manque de symétrie alors que le problème posé était symétrique).

Mais, dans les deux cas, nous obtenons une diminution de l'écart-type théorique de l'erreur d'un facteur 2 à 3 par rapport à une position initiale des capteurs qui ne nous semblait pourtant pas illogique.

Une grande difficulté reste d'ailleurs de pouvoir estimer si les performances théoriques obtenues après une optimisation sont loins ou non des meilleurs résultats possibles, et donc, si il est raisonnable de recommencer l'optimisation. Nous verrons dans le chapitre suivant un calcul approché qui devrait permettre de donner un ordre de grandeur du meilleur résultat possible.

## 6.3- Performances a posteriori

### 6.3.a- Probabilité a posteriori de la mesure

Nous avons vu que la loi de probabilité que nous donnons sur les différents coefficients est en général très arbitraire et est plus construite à partir de convictions que de faits réels. Nous pourrions alors nous poser la question sur la possibilité que nous aurions à utiliser les résultats de la mesure pour tenter de vérifier la validité des hypothèses faites a priori (et donc aussi la validité du résultat). Il serait d'ailleurs encore plus utile d'être capable de modifier cette information a priori en fonction d'enseignements donnés par les mesures.

Tout d'abord, supposons les hypothèses de départ justes et calculons la statistique attendue pour la mesure B.

Nous avons :

$$B = \mathbb{F}A$$

$$M_B = \mathbb{F}M_A \quad (6.18)$$

et

$$\mathbb{V}_B = \mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t \quad (6.19)$$

Ainsi, nous avons aussi une connaissance a priori des valeurs prises par la mesure. Nous pouvons bien entendu la comparer avec la réalité et donc avoir déjà une idée de la vraisemblance de nos hypothèses, avant même de procéder aux calculs d'extrapolation. Si la mesure B est un vecteur qui avait très peu de raisons d'apparaître d'après l'information a priori, nous pouvons déjà douter de la cohérence de notre estimation.

Seulement, calculer cette vraisemblance demande autant d'opérations que calculer l'estimée. Nous allons voir maintenant un moyen plus rapide de juger la cohérence du système.

### 6.3.b- Test du Chi deux sur l'estimée

Si nous pouvons calculer la cohérence de l'information a priori et de la mesure, nous pouvons aussi faire le même traitement sur l'estimée des paramètres A (appelée  $\underline{A}$ ). Pour des raisons pratiques, nous allons plutôt calculer les espérances et variances de  $\underline{\alpha}$  qui est l'estimée de  $\alpha$  (l'ensemble des paramètres réduits).

$$\underline{\alpha} = \mathbb{Q}\lambda^{-1}\mathbb{P}^t B$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{Q}\lambda^{-1}\mathbf{P}^t\mathbf{P}\lambda\mathbf{Q}^t\boldsymbol{\alpha} \\
&= \mathbf{Q}\lambda^{-1}\lambda\mathbf{Q}^t\boldsymbol{\alpha} \\
&= \mathbf{H}'_1\boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$\Delta\lambda^{-1}\lambda$  n'est pas  $\mathbb{I}$  !

d'où :

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \tag{6.21}$$

et

$$\mathbf{V}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{H}'_1\mathbf{H}'_1{}^t \tag{6.22}$$

En fait, il est facile de montrer que  $\mathbf{H}'_1$  est une projection orthogonale, car

$$\mathbf{H}'_1 = \mathbf{H}'_1\mathbf{H}'_1 \tag{6.23}$$

Cette fois-ci, si nous supposons que les éléments du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  suivent une loi de Laplace-Gauss centrée réduite et indépendante deux à deux, et parce que  $\mathbf{H}'_1$  est une projection orthogonale, alors nous pourrions affirmer que la somme quadratique des estimées  $\boldsymbol{\alpha}$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté ( $\nu$  étant le rang de la matrice de projection) [SAPORTA].

Si pendant le calcul nous n'avons pas écarté de valeurs singulières,  $\nu$  sera le nombre d'équations du système.

Nous aurions alors une estimation très simple de la probabilité a posteriori de la validité de la solution à partir d'une grandeur qui peut être un sous-produit du calcul de l'estimée.

Toutefois même si les paramètres ne suivent pas une loi de Laplace-Gauss, il est toujours utile de construire le coefficient :

$$\varepsilon^2 = \sum \boldsymbol{\alpha}^2 \tag{6.24}$$

et de vérifier que sa valeur n'est ni trop grande, ni trop petite. Cependant connaître les bornes tolérables reste assez délicat et ne peut être établi que par l'expérience.

Une valeur de  $\varepsilon^2$  grande est en général très improbable. Si cela apparaît quand même, c'est que selon toute vraisemblance, les hypothèses de départ sont fausses et qu'il faut les reconsidérer. En particulier, il se peut qu'un ou plusieurs paramètres ne se trouvent pas dans la plage attendue.

Ce qui est tout aussi vrai, c'est si la valeur de  $\varepsilon^2$  est trop basse (leur probabilité d'apparition est tout aussi faible). Cela signifie que nous avons été probablement

trop pessimistes et que nous avons considéré une étendue trop forte pour un certain nombre de paramètres.

Il est important de comprendre que les valeurs prises par  $\epsilon^2$  ne sont que des indications, mais que l'on peut quand même avoir des valeurs crédibles de  $\epsilon^2$  sans pour autant avoir un résultat juste.

Nous avons aussi calculé l'expression de  $\epsilon^2$  pendant nos essais.

Numéro de fichier	Somme des $\alpha^2$			
	15	23	99	136
0017 (Induit long.)	2,6	3,0	9,9	12,0
0031 (Induit vert.)	0,6	0,7	4,4	4,4
0033 (Induit transv.)	1,1	1,5	10,3	15,2
0079 (Perm. long.)	1,5	1,6	5,9	6,9
0089 (Perm. vert.)	2,6	3,2	26,8	17,0
0099 (Perm. transv.)	3,7	6,7	76,7	46,7
0154 (Perm. vert.)	1,2	1,5	23,5	11,5

Si cette somme suivait une loi de  $\chi^2_v$ , l'espérance des valeurs serait égale à  $v$  (c'est à dire le nombre de voies) et la variance serait égale à  $2v$ . Nous en sommes très loin (environ un facteur 10 sur l'espérance) !

Cette différence est issue directement de l'écart entre les lois réelles et les lois de Laplace Gauss mais peut-être aussi de valeurs trop optimistes des variances choisies.

Nous avons mentionné le fait qu'après l'optimisation des positions capteurs pour respectivement 5 et 8 capteurs triaxes, nous avons modifié le choix donné par l'algorithme car une sonde ne fonctionnait pas. Pour illustrer le comportement de la somme et de la précision de l'identification quand quelques données sont fausses, nous présentons les résultats obtenus sans changement de la voie de mesure défectueuse.

Dans les deux cas, cela revient à deux voies de mesures forcées à zéro. Nous voyons alors une très nette montée de l'erreur et de la somme. Nous pouvons observer cependant quelques cas où la somme des carrés reste faible mais l'erreur forte (par exemple fichier 0033 avec 15 sondes). La solution trouvée est alors réa-

liste mais fausse (ce comportement est naturel dans un système très sous-dimensionné). Mais nous pouvons aussi trouver des solutions fortement divergentes qui sont très bien détectées par notre agrégat (par exemple fichier 0033 avec 24 sondes).

Numéro de fichier	15 sondes		24 sondes	
	% erreur	$\epsilon^2 = \sum \alpha^2$	% erreur	$\epsilon^2 = \sum \alpha^2$
0017 (Induit long.)	21 %	19	24 %	76
0031 (Induit vert.)	28 %	5,4	46 %	33
0033 (Induit transv.)	75 %	3,8	344 %	283
0079 (Perm. long.)	20 %	9,6	21 %	31
0089 (Perm. vert.)	36 %	28	61 %	84
0099 (Perm. transv.)	76 %	9,5	260 %	437
0154 (Perm. vert.)	29 %	12	42 %	30

### 6.3.c- Réutilisation de l'information a posteriori

Nous venons de voir que l'arrivée des mesures apporte une information supplémentaire qui est la loi d'apparition réelle de la mesure B. Il s'agit bien d'une information dans le sens où elle peut permettre de valider (ou d'invalider) les hypothèses a priori.

La question qui nous vient naturellement à l'esprit est de savoir si cette information est exploitable pour modifier la connaissance a priori ou améliorer la qualité de l'identification.

Pour répondre à cette question, nous allons reprendre le formalisme que nous avons en faisant un changement de variables qui sépare la partie du vecteur A observable de celle qui ne l'est pas :

$$B = \begin{pmatrix} F'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{pmatrix} \quad (6.1b)$$

avec  $\tilde{A} = Q^t A$  et  $F'_1$  inversible.

Si nous calculons l'espérance et la variance a posteriori de  $\tilde{A}$ , nous avons, comme dans le paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} M_{\tilde{A}_1|B} &= M_{\tilde{A}_1} + \mathbb{F}'_1^{-1}(B - M_B) \\ &= \mathbb{F}'_1^{-1}B \\ M_{\tilde{A}_2|B} &= M_{\tilde{A}_2} + \mathbb{V}_{12}^t \mathbb{V}_{11}^{-1} \mathbb{F}'_1^{-1}(B - M_B) \\ &= M_{\tilde{A}_2} + \mathbb{V}_{12}^t \mathbb{V}_{11}^{-1}(M_{\tilde{A}_1|B} - M_{\tilde{A}_1}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

et pour les variances a posteriori :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{V}_{11|B} & \mathbb{V}_{12|B} \\ \mathbb{V}_{12|B}^t & \mathbb{V}_{22|B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{V}_{22} - \mathbb{V}_{12}^t \mathbb{V}_{11}^{-1} \mathbb{V}_{12} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Interprétons ces formules.

Tout d'abord, la partie observable devient une grandeur certaine correspondant à la mesure (sa variance devient nulle) ce qui est normal. Par contre la connaissance de la partie non observable est modifiée par l'intermédiaire des corrélations avec la partie observable.

Ce qui est en fait important de savoir, c'est si l'information que nous obtenons est exploitable pour les mesures futures et si cela permet d'affiner le problème inverse.

Par exemple, nous pourrions alors essayer d'utiliser la statistique des mesures passées pour affiner les vecteurs espérances et les matrices de variance, c'est à dire, nous pourrions remplacer  $M_B$  par la moyenne des mesures ( $\underline{M}_B$ ) et  $V_B$  par les corrélations entre les mesures ( $\underline{V}_B$ ).

Les probabilités de A seraient remplacées par :

$$\begin{pmatrix} M_{\tilde{A}_1} \\ M_{\tilde{A}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_1^{-t} \underline{M}_B \\ M_{\tilde{A}_2} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathbb{V}_{11} & \mathbb{V}_{12} \\ \mathbb{V}_{12}^t & \mathbb{V}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_1^{-t} \underline{V}_B \mathbb{F}_1^{-1} & ? \\ ? & \mathbb{V}_{22} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

mais on se heurte à plusieurs difficultés.

Tout d'abord seule l'espérance de la partie observable est modifiée or celle-ci n'intervient pas dans la formule. Il n'y a donc pas d'apport d'information pour une résolution ultérieure.

Ensuite, la modification des variances pose un problème, car la modification d'une partie de la matrice ne donne aucune indication sur l'influence de ces changements sur les autres parties. En particulier, l'intercorrélacion entre la partie observable et la partie non observable devient fautive mais sans hypothèse supplémentaire, il n'y a pas d'information sur comment la corriger.

Pour pouvoir aller plus loin, il faudrait probabiliser les hypothèses sur l'information a priori et leur donner un taux de confiance, mais c'est aller bien loin.

Si par exemple, on fait l'hypothèse que l'information sur le bruit est sûr et qu'il est sûr aussi que le bruit est décorrélé de la grandeur physique, alors effectivement on pourrait améliorer la résolution.

Nous retrouvons en fait un nouveau problème inverse à un niveau plus haut : il faut introduire des lois d'incertitudes sur les lois d'incertitudes !

## 6.4 Extension à trois cas non linéaires

### 6.4.a- Probabilité en double exponentielle

Nous avons vu que la loi de probabilité gaussienne est une loi qui entraîne des solutions peu robustes compte tenu de l'amortissement très fort (loi en  $e^{-x^2}$ ) des valeurs qui dépassent l'ordre de grandeur de l'écart-type. Nous avons aussi vu en conséquence que l'estimateur linéaire (qui n'est optimal que dans le cas gaussien) ne se comporte pas toujours de manière stable.

On trouve dans la littérature de nombreuses études effectuées pour trouver des estimateurs qui se comportent mieux vis à vis des valeurs extrêmes que l'estimateur linéaire, tout en restant calculables. Un candidat intéressant est la loi en double exponentielle.

$$p(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-x_0|}{\sigma}} \quad (6.29)$$

La loi en double exponentielle a une queue de probabilité qui descend très vite, (en exponentielle) mais quand même incomparablement moins vite qu'une loi gaussienne (en exponentielle carrée).

Si tous les paramètres suivent une telle loi, il est possible par des algorithmes assez rapides, de trouver la solution la plus probable.

Si, pour la loi gaussienne, la solution était celle qui minimisait :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \alpha^2 \quad (6.30)$$

pour la loi en double exponentielle, la solution doit minimiser :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad (6.31)$$

Dans la littérature [IMSL], existent des algorithmes permettant de résoudre les problèmes d'optimisation linéaire avec contraintes linéaires :

C'est un problème du type :

soit  $A$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,

soit  $B$  une matrice de  $m_1$  lignes et  $n$  colonnes et  $b$  un vecteur de  $m_1$  lignes,

soit  $C$  une matrice de  $m_2$  lignes et  $n$  colonnes et  $c$  un vecteur de  $m_2$  lignes,

soit  $D$  une matrice de  $m_3$  lignes et  $n$  colonnes et  $d$  un vecteur de  $m_3$  lignes,

trouver  $X$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  qui maximise  $A^t X$  et qui vérifie les contraintes

$$\begin{aligned} X &\geq 0 \\ BX &= b \\ CX &\geq c \\ DX &\leq d \end{aligned} \quad (6.32)$$

La méthode la plus utilisée pour résoudre ce problème est la méthode du simplexe [PRESS] ou [TARANTOLA].

Notre problème peut se résumer à cette optimisation. L'astuce donnée par [TARANTOLA] est de remarquer que trouver :

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \text{ minimum}$$

qui vérifie :

$$B = FE_A \alpha + FM_A$$

est équivalent à trouver :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (\beta_i + \gamma_i) \text{ minimum} \\ \text{avec } &\left\{ \begin{array}{l} \beta_i \geq 0 \\ \gamma_i \geq 0 \\ FE_A(\beta_i - \gamma_i) = B - FM_A \end{array} \right. \end{aligned}$$

qui correspond à la forme standard du problème d'optimisation du simplexe.

### 6.4.b- Algorithme tolérant aux erreurs d'alignement des capteurs

#### Besoins

Parmi les erreurs induites par les sondes, il faut intégrer les incertitudes dues à une mauvaise localisation des capteurs autour du système étudié. En règle générale, les erreurs sur les positions relatives des capteurs sont négligeables, ou plus précisément les systèmes de localisation ont une précision suffisante pour nos besoins. Par contre, dans le cas de la présence d'un fort champ inducteur, les erreurs de mesure de l'alignement des capteurs peuvent être redoutables. Que l'on juge :

- dans le cas du moteur Baudouin, si nous ne nous affranchissons pas du champ terrestre, nous aurions une anomalie d'environ  $100 \text{ Am}^2$  immergée dans un champ inducteur de  $50000 \text{ nT}$  avec un réseau de capteurs à  $2 \text{ m}$  du centre de l'objet.

En faisant l'approximation dipolaire, on s'aperçoit que le champ de l'anomalie sur les capteurs est de l'ordre de  $1000 \text{ nT}$  à  $2000 \text{ nT}$  alors que le champ général serait de  $50000 \text{ nT}$ . Le gradient de champ serait de  $3000 \text{ nT/m}$  à  $6000 \text{ nT/m}$ .

Si nous acceptons une erreur de  $3\%$  sur l'identification de l'anomalie, cela entraîne sur la mesure de la position une erreur maximale de  $1 \text{ cm}$  et d'alignement de  $3$  à  $4$  centièmes de degrés. La difficulté du respect de ces deux contraintes n'est absolument pas la même.

De plus, compte tenu de la précision exigée en alignement, même si la mesure est possible, le support du capteur doit être très rigide et insensible à tout ce qui peut créer des déformations telles que la dilatation thermique ou les contraintes mécaniques.

L'erreur d'alignement ne se traite cependant pas de manière identique sur tous les axes de mesure et nous pouvons (dans le cas de capteurs vectoriels triaxiaux et d'un nombre suffisant de capteurs) améliorer fortement l'algorithme d'estimation de l'aimantation en introduisant une non-linéarité.

#### Algorithme

En fait, si il y a une erreur d'orientation d'un capteur vectoriel, celle-ci va se traduire par un signal parasite sur le signal nominal proportionnel au cosinus de l'angle de mésalignement dans la direction du signal et proportionnel au sinus dans les axes perpendiculaires. Donc si cet angle est petit, (inférieur à  $2^\circ$  dans l'exemple précédent pour identifier le cosinus à  $1$  en faisant une erreur inférieure à  $30 \text{ nT}$ ), nous pouvons linéariser l'erreur capteur et introduire l'incertitude d'alignement dans la matrice  $\mathbb{W}$  d'erreur capteur.

Soit un capteur triaxe d'erreur interne d'écart-type  $w$  pour chacune des sondes et

d'erreur d'alignement d'écart-type  $\alpha$  radians. Ce capteur donne un signal de composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$ .

Dans la direction du vecteur induction, la variance de l'erreur capteur sera donc  $w^2$  et dans les deux directions perpendiculaires :  $w^2 + \alpha^2 B^2$  (en supposant l'angle  $\alpha$  petit).

Soit  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  les composantes du vecteur  $\vec{n}$  directeur de  $\vec{B}$ , nous pouvons définir deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  perpendiculaires au vecteur  $\vec{n}$  de composantes respectives  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  et  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ .

La décomposition canonique de l'erreur capteur peut alors prendre la forme :

$$\varepsilon = \mathbb{E}A$$

avec le vecteur  $A$  composé de variables aléatoires centrées, de variance unité et linéairement indépendantes deux à deux et  $\mathbb{E}$  la matrice :

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & \alpha B u_x & \alpha B v_x \\ 0 & w & 0 & \alpha B u_y & \alpha B v_y \\ 0 & 0 & w & \alpha B u_z & \alpha B v_z \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

La variance de l'erreur du capteur est donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{E}^t &= \begin{pmatrix} w^2 + \alpha^2 B^2(u_x^2 + v_x^2) & \alpha^2 B^2(u_x u_y + v_x v_y) & \alpha^2 B^2(u_x u_z + v_x v_z) \\ \alpha^2 B^2(u_x u_y + v_x v_y) & w^2 + \alpha^2 B^2(u_y^2 + v_y^2) & \alpha^2 B^2(u_y u_z + v_y v_z) \\ \alpha^2 B^2(u_x u_z + v_x v_z) & \alpha^2 B^2(u_y u_z + v_y v_z) & w^2 + \alpha^2 B^2(u_z^2 + v_z^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w^2 + \alpha^2 B^2(1 - n_x^2) & -\alpha^2 B^2 n_x n_y & -\alpha^2 B^2 n_x n_z \\ -\alpha^2 B^2 n_x n_y & w^2 + \alpha^2 B^2(1 - n_y^2) & -\alpha^2 B^2 n_y n_z \\ -\alpha^2 B^2 n_x n_z & -\alpha^2 B^2 n_y n_z & w^2 + \alpha^2 B^2(1 - n_z^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.34)$$

(La dernière égalité se trouve tout de suite si on remarque que par définition, la matrice :

$$\begin{pmatrix} n_x u_x v_x \\ n_y u_y v_y \\ n_z u_z v_z \end{pmatrix}$$

est une matrice unitaire).

L'algorithme vient alors de manière naturelle : à chaque itération de calcul, nous remplaçons pour chaque sous-ensemble correspondant à un vecteur triaxe, la sous-matrice 3x3 du bruit capteur par l'expression que nous venons de calcu-

ler et nous utilisons ces nouvelles valeurs pour exprimer la matrice  $\mathbb{H}_1$  et le vecteur  $\mathbb{H}_2$ .

Les différents essais que nous avons faits montrent la relative robustesse de cet algorithme. De plus, ce principe général peut être modifié à l'infini pour intégrer, par exemple, un sous ensemble de capteurs rigides entre eux, pour précalculer les matrices pour différentes orientations du champ inducteur dans le but d'accélérer les calculs, pour estimer dans le cas d'un système rigide mais inconnu le mésalignement des capteurs à partir de plusieurs mesures.

Si l'approximation linéaire n'est plus envisageable, on peut toujours tenter d'utiliser cet algorithme en utilisant les valeurs affinées de  $B$  par récurrence ou au pire, utiliser l'algorithme suivant qui est adapté aux capteurs scalaires.

#### 6.4.c- Utilisation de capteurs scalaires

Jusqu'à présent, nous avons supposé l'utilisation de capteurs magnétiques de champ et de gradient qui présentent comme nous allons le voir dans un chapitre futur de nombreux avantages.

En particulier, avec la représentation par les harmoniques sphériques ou les dipôles surfaciques, nous avons une dépendance linéaire entre les paramètres modélisant la pièce étudiée et les signaux sur les capteurs de mesure.

Cependant, dans la gamme de signaux qui nous préoccupe, ils ont aussi quelques inconvénients dont l'incertitude d'alignement que nous venons de décrire n'est pas le moindre. Nous pouvons aussi ajouter la sensibilité des technologies utilisées vis à vis d'effets tel que la température du capteur.

Il existe une technologie de capteurs très précis qui ne présente pas ces inconvénients : les capteurs scalaires. Ces capteurs, utilisant soit la résonance des protons (RMN) soit celle des électrons (RPE), sont intrinsèquement très précis. De plus, ils donnent une information scalaire (le module du champ) et non vectorielle. Cette propriété est à la fois un avantage et un inconvénient.

L'avantage est que la mesure du module du champ ne dépend pas de l'orientation du capteur, supprimant la contrainte de mesure de l'alignement du capteur dans le champ.

L'inconvénient vient du fait que le module du champ ne dépend plus linéairement des paramètres magnétiques de l'objet mesuré. Il faut donc adapter les algorithmes.

Dans l'annexe B.4.b, nous présentons l'algorithme qui, bien que simple dans son principe, est d'une présentation lourde. Par ailleurs, nous démontrons la stabilité de l'algorithme choisi face aux perturbations.

## 7.- Etude paramétrique d'un cas simple

### 7.1- Présentation du problème

#### 7.1.a- But de l'étude

Dans les chapitres précédents, nous avons construit d'un point de vue purement théorique, un algorithme permettant d'identifier un champ magnétique créé par des anomalies localisées.

Nous allons maintenant chercher à connaître dans le cadre le plus général possible les performances du système.

L'optique d'une telle étude est double. D'une part, nous pourrions dimensionner une installation avec une bonne confiance (combien de capteurs et de quelle qualité pour obtenir une précision souhaitée ?), d'autre part, la connaissance des paramètres influençant la mesure permettra de faire des choix technologiques importants améliorant les algorithmes.

La diversité des configurations possibles ne permet pas de faire une étude analytique exhaustive de la méthode. Une possibilité serait alors de faire une recherche numérique systématique.

Nous avons délibérément choisi une autre approche. Nous avons simplifié au maximum les données du problème et nous nous sommes restreints à une configuration simplifiée que nous avons cherché à résoudre au maximum de manière théorique.

L'intérêt est de, non seulement connaître les performances, mais aussi de voir comment chaque paramètre contribue à la solution. Nous avons ainsi tiré des enseignements qui auraient très difficilement pu être déduits par une expérimentation numérique.

Nous allons réduire fortement le problème et affirmer un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses formeront les limites du modèle et de la validité des conclusions émises.

### 7.1.b- Description du problème simplifié

Soit un ensemble de sources magnétiques, à quelle précision relative (et absolue), peut-on estimer l'aimantation de ces anomalies à l'aide de capteurs magnétiques ?

Déjà, cette tentative d'énoncé est incomplète. Nous pouvons nous attendre en effet, à ce que cela dépende d'un grand nombre de paramètres, comme le bruit des capteurs choisis, leur nombre, l'amplitude des sources ou leur répartition. Il va falloir identifier ces dépendances et éventuellement les réduire pour garder des formules suffisamment générales.

⊕ 1<sup>ère</sup> simplification : **nous allons supposer qu'il y a une anomalie unique située dans une zone sphérique.**

L'ensemble des paramètres est composé de plusieurs types d'aimantation que nous ordonnerons selon les degrés croissants du développement en harmoniques sphériques  $a_{ij}$ , par rapport au centre de la sphère incluant les sources.

Nous avons déjà calculé l'influence de ces paramètres en un point M :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (2.17)$$

avec

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\varphi) & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} \sin(m\varphi) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (B.6)$$

Nous avons donc sur le potentiel, différentes influences s'amortissant en puissances croissantes de  $r$ , avec 3 composantes pour l'effet dipolaire, 5 pour l'effet quadrupolaire, etc...

Essayons d'estimer le potentiel moyen créé par les composantes d'un degré  $n$  donné, après avoir formulé une autre hypothèse que nous justifierons plus loin.

⊕ 2<sup>ème</sup> simplification : **nous allons supposer que les coefficients  $a_{nm}$  sont indépendants et qu'ils sont pour un  $n$  donné de même ordre de grandeur.**

Ils ont alors un même écart-type, noté  $\sigma_{an}$ . Cela revient à considérer que la sphère n'a pas de direction ni de zone privilégiée d'aimantation. Nous avons vu

dans le chapitre sur les harmoniques sphériques que cette hypothèse est valide si on suppose un dipôle isolé situé dans la sphère.

## 7.2- Variance dans l'espace du potentiel magnétique et de ses dérivées

### 7.2.a- Variance de l'induction et de son gradient

Pour calculer les caractéristiques statistiques de la matrice de transfert entre les sources et la mesure, il est nécessaire de calculer, pour une source quelconque, les variances du potentiel scalaire en tout point de l'espace hors de la sphère, ainsi que ses dérivées premières et secondes, c'est à dire la variance de l'induction magnétique et de la matrice gradient.

La démonstration est très calculatoire et est présentée en annexe B.5. Nous nous contentons ici de présenter les résultats.

#### Variance du potentiel scalaire pour les termes de degré n

$$\sigma_{V_n}^2 = \sigma_{a_n}^2 \left( \frac{1}{4\pi r^{n+1}} \right)^2 \quad (\text{B.99})$$

Cette équation s'entend comme la contribution de l'ensemble des  $2n+1$  termes harmoniques de degré n sur la variance du potentiel scalaire. Par contre,  $\sigma_{a_n}^2$  est la variance de n'importe lequel de ces termes.

#### Variance de l'induction magnétique pour les termes de degré n

Nous avons rassemblé ces résultats sous la forme d'un tableau. Pour obtenir la variance d'une composante de l'induction ou la covariance entre deux composantes, l'élément correspondant du tableau doit être multiplié par le facteur :

$$\left( \frac{\mu_0 \sigma_{a_n}}{4\pi r^{n+2}} \right)^2$$

Pour des raisons pratiques, les composantes s'entendent dans le repère sphérique et seule la moitié de la matrice symétrique est représentée.

	$B_r$	$B_\theta$	$B_\varphi$
$B_r$	$(n+1)^2$	-	-
$B_\theta$	0	$\frac{n(n+1)}{2}$	-
$B_\varphi$	0	0	$\frac{n(n+1)}{2}$

Variance du gradient de l'induction magnétique pour les termes de degré n

Par le même principe, nous pouvons calculer les covariances entre les composantes de la matrice gradient.

Là aussi, pour obtenir les termes de variances et de covariances, nous devons multiplier par le facteur multiplicatif :

$$\left(\frac{\mu_0 \sigma_{an}}{4\pi r^{n+3}}\right)^2$$

	$G_{rr}$	$G_{r\theta}$	$G_{r\varphi}$	$G_{\theta\theta}$	$G_{\theta\varphi}$	$G_{\varphi\varphi}$
$G_{rr}$	$(n+1)^2(n+2)^2$	-	-	-	-	-
$G_{r\theta}$	0	$\frac{n(n+1)(n+2)^2}{2}$	-	-	-	-
$G_{r\varphi}$	0	0	$\frac{n(n+1)(n+2)^2}{2}$	-	-	-
$G_{\theta\theta}$	$\frac{-(n+1)^2(n+2)^2}{2}$	0	0	$\frac{(n+1)(n+2)}{8}(3n^2+5n+4)$	-	-
$G_{\theta\varphi}$	0	0	0	0	$\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}$	-
$G_{\varphi\varphi}$	$\frac{-(n+1)^2(n+2)^2}{2}$	0	0	$\frac{(n+1)(n+2)}{8}(n^2+7n+4)$	0	$\frac{(n+1)(n+2)}{8}(3n^2+5n+4)$

Covariance entre l'induction magnétique et les gradients pour les termes de degré  $n$

Enfin, les termes d'inductions et de gradients ne sont pas indépendants, il est important de les calculer aussi.

Cette fois ci, le terme multiplicatif est :

$$\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{\sigma_{a_n}^2}{r^{2n+5}}$$

	$G_{rr}$	$G_{r\theta}$	$G_{r\varphi}$	$G_{\theta\theta}$	$G_{\theta\varphi}$	$G_{\varphi\varphi}$
$B_r$	$-(n+1)^2(n+2)$	0	0	$\frac{(n+1)^2(n+2)}{2}$	0	$\frac{(n+1)^2(n+2)}{2}$
$B_\theta$	0	$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$	0	0	0	0
$B_\varphi$	0	0	$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$	0	0	0

**7.2.b- Remarques sur les dépendances entre champs et gradients**

Toutes les valeurs de champs et de gradients sont non corrélées à l'exception d'une part de  $G_{rr}$ ,  $G_{\theta\theta}$  et  $G_{\varphi\varphi}$  et d'autre part des trois couples  $(B_r, G_{rr})$ ,  $(B_\theta, G_{r\theta})$  et  $(B_\varphi, G_{r\varphi})$ . Entre ces différentes valeurs, il existe des relations de dépendance très simples qui sont :

$$\begin{aligned} G_{rr} + G_{\theta\theta} + G_{\varphi\varphi} &= 0 \\ G_{rr} &= \frac{-(n+2)}{r} B_r \\ G_{r\theta} &= \frac{-(n+2)}{r} B_\theta \\ G_{r\varphi} &= \frac{-(n+2)}{r} B_\varphi \end{aligned} \tag{7.1}$$

Autant la première relation est indépendante du degré des sources magnétiques (dipôles, quadrupôles, etc...) et est vraie quelles que soient les sources magnétiques, autant les trois suivantes en dépendent ainsi que des positions. Ainsi, un capteur gradientométrique, différence de deux triaxes, disposé de manière radiale par rapport à la source (donc qui mesurera  $G_{rr}$ ,  $G_{r\theta}$  et  $G_{r\varphi}$ ) aura des mesures qui seront corrélées avec le champ inducteur.

Il est à remarquer que cette dépendance peut être utilisée pour localiser une source magnétique isolée [LATOIR] à partir des informations champ et gradient.

### 7.3- Formules d'erreur d'identification

#### 7.3.a- Hypothèses supplémentaires

Le calcul de l'erreur d'identification est reporté dans l'annexe B.5.d. Pour y parvenir, nous avons fait des hypothèses supplémentaires.

⊕ Tout d'abord, nous avons supposé que **nous avons  $n_c$  voies de mesures de caractéristiques identiques.**

Cela suppose d'avoir des capteurs de même type, situés à même distance de l'objet et dans la même position relative. Par exemple, nous pouvons avoir  $n_c$  magnétomètres situés radialement et à égale distance de la sphère de modélisation. Cette propriété nous permet de garantir pour chaque sonde le même rapport signal sur bruit.

Alors nous pouvons poser le système :

$$B = \mathbb{F}A \quad (5.2)$$

Dans les expressions, pour simplifier, nous avons pris  $n_c$  tel que

$$n_c = m_c(m_c+2) \text{ avec } m_c \text{ entier positif.}$$

Nous généraliserons, mais de manière non rigoureuse, à d'autres entiers.

⊕ Nous avons fait une seconde hypothèse en affirmant que **les capteurs sont placés de manière quasi optimale si les  $n_c$  premières colonnes de la matrice  $\mathbb{F}$  sont orthogonales.**

Implicitement, cela veut aussi dire que l'on suppose qu'il existe au moins une position de capteurs qui permette cette configuration.

#### Confirmation numérique de la première hypothèse

Nous avons procédé à plusieurs optimisations numériques, selon la méthode exposée dans le chapitre 6. Nous l'avons en particulier fait sur des modèles sphériques. Dans les cas simples, présence d'une sphère, quelques capteurs assez

élémentaires (pas plus de 3 sondes par capteur), l'optimisation converge effectivement vers une distribution de tous les capteurs à une distance identique de la sphère. Dans les cas plus complexes, il y a effectivement une tendance de ce type (cependant elle n'est pas systématique), mais nous n'avons jamais pu garantir une convergence vers le minimum global de l'optimisation. Dans les optimisations sur le moteur Baudouin, la tendance est déjà respectée (figure 5.2) bien que le modèle ne soit pas sphérique et que les capteurs soient contraints à rester près des mesures disponibles.

### Confirmation numérique de la seconde hypothèse

La seconde hypothèse est moins intuitive. Elle est pourtant aussi relativement bien respectée, comme l'ont montré les optimisations numériques. Pour s'en convaincre, nous avons tracé sur les figures suivantes, non pas la matrice  $\mathbb{F}^t\mathbb{F}$ , mais cette matrice après normalisation. Expliqué avec les notations déjà utilisées pour la décomposition en valeurs singulières, nous n'avons pas tracé  $Q\Lambda^2Q^t$ , mais  $Q\Lambda\Lambda^{-1}Q^t$ .

Nous obtenons alors pour les optimisations à 15 et 24 sondes les figures 7.1 à 7.4. L'abscisse des quatre graphiques correspond aux lignes de la matrice (mais aussi aux colonnes puisque la matrice est symétrique) et chaque point représente un élément de la matrice de la ligne correspondante dont la valeur est donnée par l'ordonnée. Les points des premières lignes proches de 1 sont justement ceux de la diagonale.

Les deux premières figures correspondent à l'optimisation effectuée avec la condition de garder les capteurs près des positions des mesures disponibles (c'est à dire les positions réellement utilisées dans les chapitres précédents). Les deux figures suivantes correspondent à d'autres optimisations avec autant de capteurs triaxes mais sans contrainte géométrique.

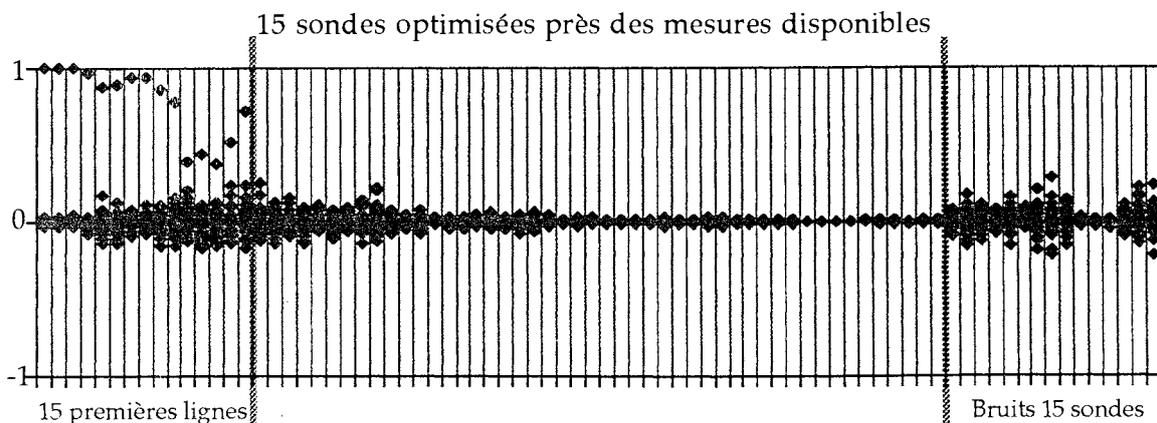
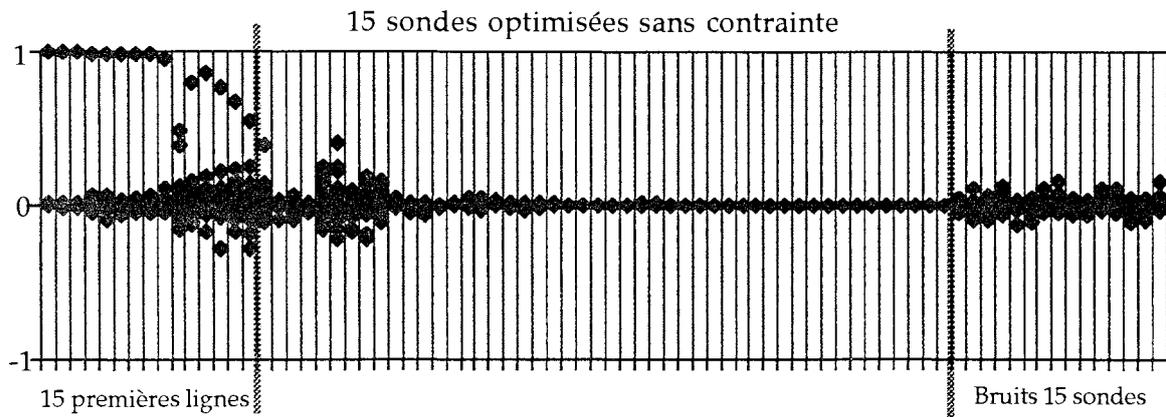
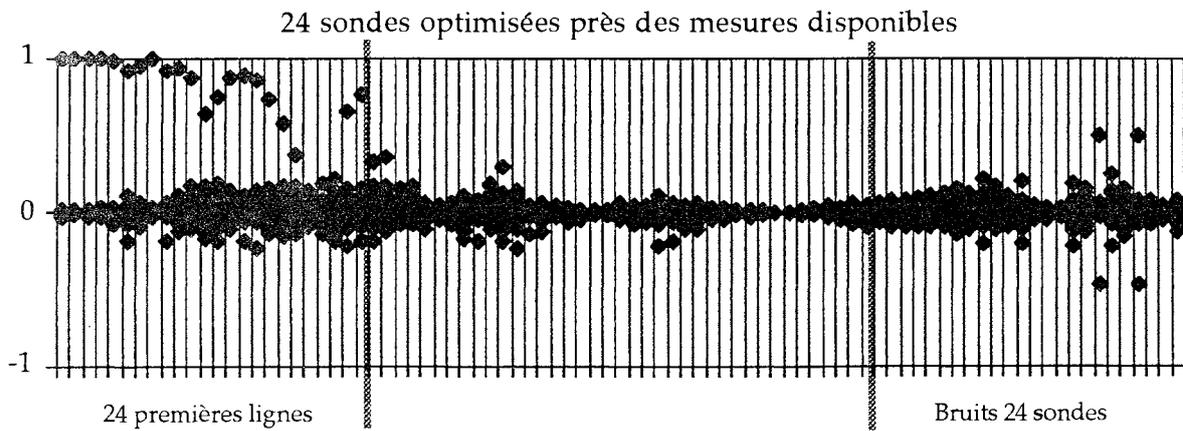
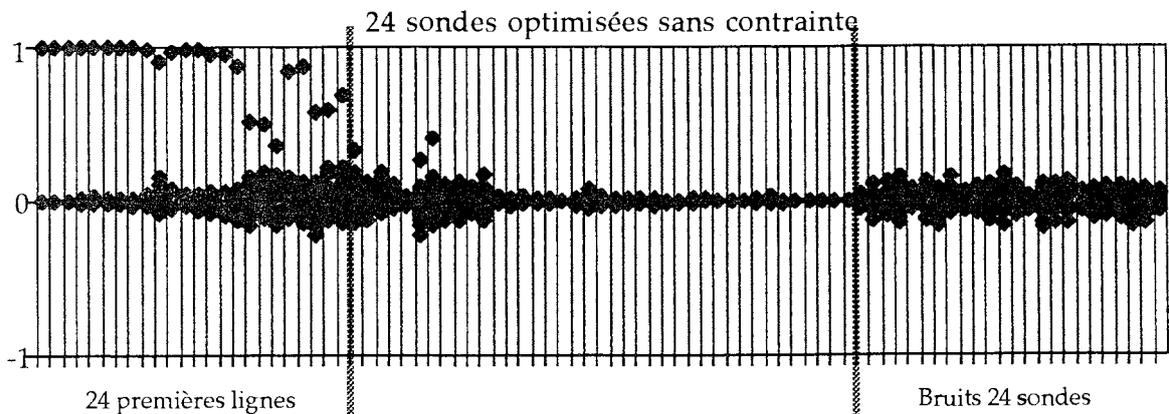


Figure 7.1 : "Vue de profil" de la matrice  $\mathbb{F}^t\mathbb{F}$  "normalisée"

Figure 7.2 : "Vue de profil" de la matrice  $F^t F$  "normalisée"Figure 7.3 : "Vue de profil" de la matrice  $F^t F$  "normalisée"Figure 7.4 : "Vue de profil" de la matrice  $F^t F$  "normalisée"

### 7.3.b- Expression générale

Pour rendre l'expression finale plus modulaire et permettre de l'appliquer à plusieurs sources et types de capteurs, nous avons séparé la variance des coefficients harmoniques pour le degré  $n$ , noté  $\sigma_{an}^2$  et la contribution de tous les harmoniques de degré  $n$  sur la variance du champ, noté  $M_n$ .

$$\sigma_{\varepsilon_m}^2 = \frac{\sum_{k=n_c+1}^n M_k \sigma_{a_k}^2 + w^2}{\frac{n_c}{2m+1} M_{nr} \sigma_{a_m}^2 + \sum_{k=n_c+1}^n M_k \sigma_{a_k}^2 + w^2} \quad (7.2)$$

Dans cette expression,

- $n$  est le degré maximal de développement des harmoniques dont l'effet est non négligeable.
- $m_c$  est la valeur telle que  $n_c = m_c(m_c+2)$
- $m$  est le degré de la composante dont on calcule la précision d'identification.
- $w$  est l'écart-type du bruit de la sonde
- $\varepsilon_m$  est l'erreur relative sur les termes d'aimantations de degré  $m$ .

### 7.3.c- Application à plusieurs types de capteurs

Dans le cas d'un dipôle réparti aléatoirement dans une sphère, nous avons l'expression suivante pour  $\sigma_{a_k}^2$  en fonction de l'espérance du module :

$$\sigma_{a_k}^2 = \frac{k}{2k+1} r_0^{2k-2} M^2 \quad (7.3)$$

Nous pouvons rappeler les valeurs de  $M_k$  pour les différentes configurations "canoniques" que nous avons calculées :

#### Magnétomètre placé radialement (noté dans la suite M1R)

Il mesure  $B_r$

$$M_k = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{k+1}{r^{k+2}} \right)^2 \quad (7.4)$$

#### Magnétomètre placé orthoradialement (noté M1O)

Il mesure  $B_\theta$  ou  $B_\varphi$

$$M_k = \frac{k(k+1)}{2} \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^{k+2}} \right)^2 \quad (7.5)$$

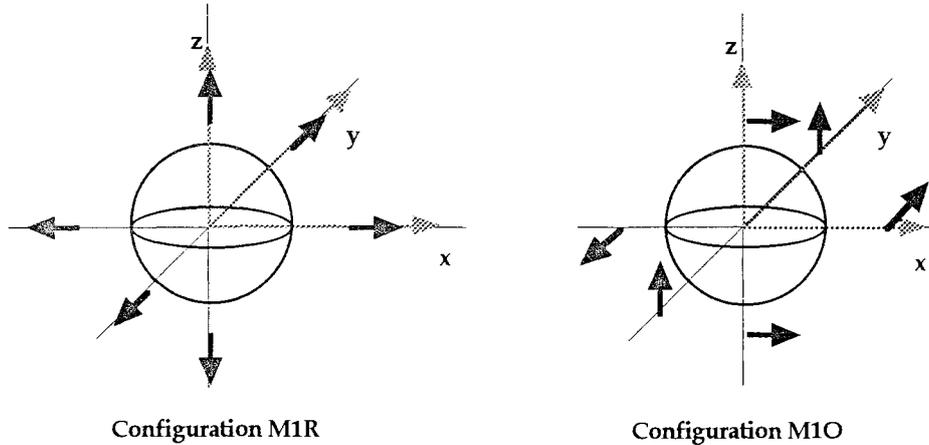


Figure 7.5 : Configurations magnétomètres envisagées

### Gradientmètre axial placé radialement (noté GA1R)

Il mesure  $G_{rr}$

$$M_k = \left( \frac{\mu_0 (k+1)(k+2)}{4\pi r^{k+3}} \right)^2 \quad (7.6)$$

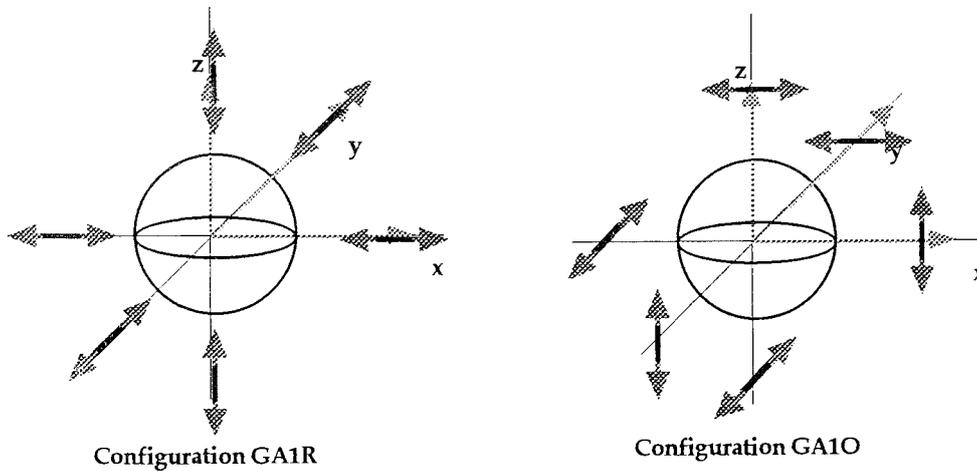


Figure 7.6 : Configurations gradientmètres axiaux envisagées

### Gradientmètre axial placé orthoradialement (noté GA1O)

Il mesure  $G_{\theta\theta}$  ou  $G_{\varphi\varphi}$

$$M_k = \frac{(k+1)(k+2)}{8} (3k^2 + 5k + 4) \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^{k+3}} \right)^2 \quad (7.7)$$

Gradientmètre croisé placé radialement (noté GC1R)

Il mesure  $G_{r\theta}$ ,  $G_{r\varphi}$ ,  $G_{\theta r}$  ou  $G_{\varphi r}$

$$M_k = \frac{k(k+1)}{2} (k+2)^2 \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(k+2)}{r^{k+3}} \right)^2 \quad (7.8)$$

Gradientmètre croisé placé orthoradialement (noté GC1O)

Il mesure  $G_{\theta\varphi}$  ou  $G_{\varphi\theta}$

$$M_k = \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{2} \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^{k+3}} \right)^2 \quad (7.9)$$

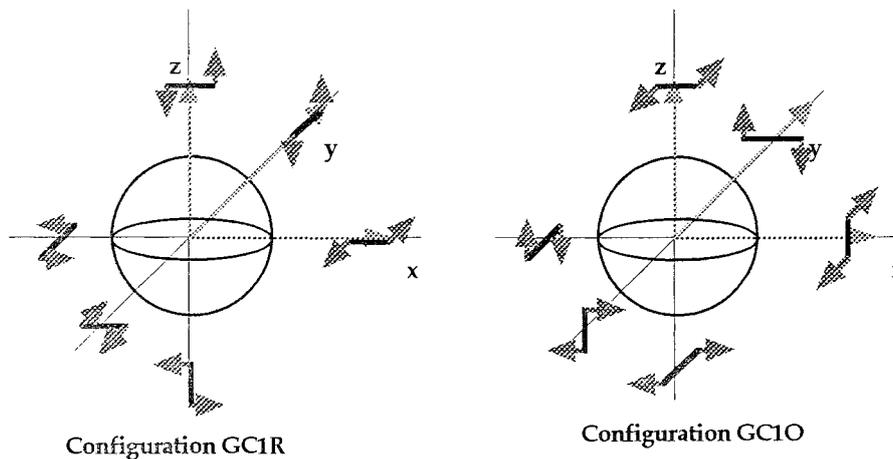


Figure 7.6 : Configurations gradientmètres croisés envisagées

## 7.4- Performance de l'identification

### 7.4.a- Description des paramètres

Nous allons tout d'abord faire la liste des paramètres qui influent sur le système. Nous pouvons les séparer en deux familles : les caractéristiques des sources qui correspondent à des conditions données du problème et les caractéristiques des capteurs (nombre, placement, performance) sur lesquels l'expérimentateur peut jouer pour avoir une performance requise.

### Paramètres des sources

Dans les calculs précédents, nous avons fait l'hypothèse que les sources étaient localisées dans une sphère de rayon  $r_0$  et que l'espérance du module de l'amplitude est  $M$ . Enfin, nous avons supposé que l'amortissement des termes de degré élevé correspondait statistiquement à celui d'un dipôle isolé placé de manière aléatoire dans la sphère.

Nous ne connaissons pas la statistique des termes d'une source réelle. Ainsi nous allons introduire deux facteurs correcteurs empiriques qui permettent de faire varier cet amortissement.

Tout d'abord, nous allons tenter de traduire la confiance que nous avons sur la "régularité" du magnétisme de l'anomalie. Si l'aimantation de l'objet ainsi que sa géométrie sont régulières, le comportement magnétique est proche de celui d'un dipôle centré. Dans le cas contraire, l'amortissement est plus lent que celui supposé. Nous introduisons alors un coefficient  $\rho_0$ , qui permet d'augmenter ou de réduire à volonté l'amortissement.

Ainsi nous prenons :

$$\sigma_{a_k}^2 = \rho_0^{k-1} \frac{k}{2k+1} r_0^{2k-2} \sigma_M^2 \quad (7.10)$$

Ensuite si la pièce possède un modèle fin provenant d'un calcul ou d'une mesure de calibration, nous connaissons alors de manière directe une partie de son aimantation. Seul le résiduel d'aimantation est à identifier et cela peut se traduire dans les formules, comme si les termes à identifier autres que l'aimantation dipolaire étaient d'amplitude plus faible. Nous le modélisons par un coefficient  $\rho$  constant et inférieur à 1 sur tous les termes résiduels (pour  $m > m_0$ ).

Enfin, nous allons opérer deux changements de variables dans la formule.

Une fois combinée, les expressions de  $M_k$  et  $\sigma_{a_k}^2$  se mettent sous la forme :

- pour les magnétomètres :

$$M_k \sigma_{a_k}^2 = f \left[ \left( \frac{\sigma_M}{r_0^3} \right)^2, \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2k+4} \right] \quad (7.11)$$

- pour les gradientmètres :

$$M_k \sigma_{a_k}^2 = f \left[ \left( \frac{\sigma_M}{r_0^3} \right)^2, \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2k+4}, \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right] \quad (7.12)$$

Nous normalisons donc  $r$  par  $r_0$  (en posant  $r' = r/r_0$ ) et plutôt que prendre l'aimantation, nous prenons la densité volumique d'aimantation que nous déter-

minons par l'espérance de son module  $M'$  (le  $1/r^2$  résiduel dans le cas des gradientmètres est neutralisé en normalisant le bruit capteur).

La relation entre notre nouvelle variable et  $\sigma^2_M$  est :

$$M'^2 = \frac{M^2}{\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3\right)^2} \quad (7.13)$$

### Paramètres des capteurs

Nous supposons que nous avons  $n_c$  sondes de type identique. Ce type pourra être l'un de ceux présenté au paragraphe 7.3c. Comme nous allons estimer l'erreur sur les termes dipolaires, nous n'utilisons pas la sonde GC10 qui ne peut pas mesurer les coefficients de degré 1.

Nous supposons que la position de ces capteurs par rapport au centre de la sphère des anomalies est identique (nous l'avons déjà appelé  $\mathbf{r}$ ) et que ces capteurs sont positionnés de telle sorte que la matrice de transfert  $\mathbb{F}$  entre les capteurs et les  $n_c$  premiers paramètres aient ses colonnes orthogonales, ce qui est, semble-t-il, proche de la situation optimale.

Nous supposons le bruit des capteurs centré et indépendant d'écart-type  $\mathbf{b}_m$  pour les sondes magnétométriques et  $\mathbf{b}_g$  pour les sondes gradientométriques. Pour permettre la normalisation par  $r_0$ , le bruit capteur des gradientmètres qui normalement s'exprime en T/m est normalisé (multiplié par)  $r_0$  et s'exprime en T.

### Critère de performance

A partir de ces données nous allons chercher à connaître la précision de caractérisation de l'aimantation dipolaire de la pièce. Le critère de performance est  $\epsilon$ , la précision relative de l'identification des 3 termes dipolaires.

Il est important de noter que dans la liste des paramètres de cette étude, plusieurs sont représentatifs du système physique et sont les conditions extérieures du problème :  $r_0$ ,  $M$ ,  $\rho_0$ .  $\rho$  est par contre un paramètre qui dépend directement de la finesse des modèles élaborés. Enfin les bruits capteurs  $\mathbf{b}_m$  et  $\mathbf{b}_g$ , leur nombre ainsi que leur type sont directement représentatifs du coût de la solution.

#### 7.4.b- Domaine de variation des paramètres

Il faut attribuer à tous ces paramètres des valeurs réalistes pour tracer des abaques utiles. Nous allons définir les domaines de variations de chacun de ceux-ci, en précisant à chaque fois une valeur moyenne qui sera celle prise par défaut (quand le paramètre est figé).

Les paramètres à faire varier, sont :

$M'$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho$ ,  $b_m$  ou  $b'_g$ ,  $n_c$  et le type de sonde.

La distance  $r'$  n'est pas a priori un de ces paramètres, sauf si il existe de fortes contraintes spatiales pour positionner les capteurs. En effet, il existe toujours une valeur optimale de la distance  $r'$  qui minimise l'erreur. C'est celle que nous choisissons par défaut.

A chaque fois, nous représentons l'écart-type de l'erreur  $\varepsilon$  en fonction de ces paramètres.

#### Type de capteurs

Nous supposons dans un premier temps que les différents capteurs sont de même type et même orientation relative par rapport à la pièce. D'après les calculs que nous avons faits, nous avons pu reconnaître 6 familles qui, rappelons le, sont :

- magnétomètre placé radialement à la pièce (M1R) : il mesure  $B_r$ .
- magnétomètre placé orthoradialement à la pièce (M1O) : il mesure  $B_\theta$  ou  $B_\varphi$ .
- gradientmètre axial placé radialement à la pièce (GA1R) : il mesure  $G_{rr}$ .
- gradientmètre axial placé orthoradialement à la pièce (GA1O) : il mesure  $G_{\theta\theta}$  ou  $G_{\varphi\varphi}$ .
- gradientmètre croisé placé radialement à la pièce (GC1R) : il mesure  $G_{r\theta}$ ,  $G_{r\varphi}$ ,  $G_{\theta r}$  ou  $G_{\varphi r}$ .
- gradientmètre croisé placé orthoradialement à la pièce (GC1O) : il mesure  $G_{\theta\varphi}$  ou  $G_{\varphi\theta}$ , celui-ci ne pouvant seul, identifier les termes dipolaires.

#### Nombre de voies de mesures $n_c$

Nous identifions ici une seule pièce, ou tout au moins un ensemble réduit de pièces logeant dans une seule modélisation. Nous cherchons donc à utiliser le minimum de capteurs pour arriver à nos fins. Nous considérons un nombre de voies de mesures compris entre 3 et 30 voies. La valeur par défaut est prise arbitrairement égale à 12.

### Densité magnétique $M'$

Nous considérerons la densité d'une sphère de perméabilité infinie comme un maximum (elle est de  $96 \text{ Am}^{-1}$  pour un champ inducteur de  $32 \text{ Am}^{-1}$ ). Des mesures faites sur des objets manufacturés en acier (moteurs thermiques) ont donné des densités d'environ  $30$  à  $50 \text{ Am}^{-1}$  rapporté au volume de modélisation. Dans le cas du moteur Baudouin, nous avons trouvé des modules d'aimantations de l'ordre de  $100$  à  $150 \text{ Am}^2$  alors que le volume du moteur est de  $0,7 \text{ m}^3$ , celui du modèle maillé de  $1,3 \text{ m}^3$  et celui de l'ellipsoïde de  $3,7 \text{ m}^3$  (donc des densités comprises entre  $27 \text{ Am}^{-1}$  et  $200 \text{ Am}^{-1}$  suivant le modèle et la mesure). Nous regardons entre  $10$  et  $100 \text{ Am}^{-1}$ , avec une valeur de  $50 \text{ Am}^{-1}$  pour le cas moyen.

### Amortissement des termes $\rho_0$

Les mesures sur le moteur montrent un amortissement plutôt fort (excepté pour les aimantations transversales), mais d'autres essais non présentés dans ce rapport peuvent donner des amortissements faibles. Nous faisons varier  $\rho_0$  entre  $0,1$  et  $1,5$ , mais nous prenons la valeur  $0,75$  dans le cas moyen.

### Précision de modélisation $\rho$

La détermination de ce paramètre est purement empirique.

Cette précision dépend beaucoup de la nature des pièces et de la finesse de la modélisation théorique ou de la calibration. Si on possède des modèles fins, on peut peut-être espérer déterminer  $80\%$  ( $\rho = 0,2$ ) des termes de degré élevé pour les aimantations induites grâce à l'information a priori. Mais il est peu probable d'arriver à un tel ratio pour les état permanents (nous prenons  $\rho=1$ ).

### Erreur de mesure des capteurs

Un autre paramètre déterminé empiriquement.

Dans ce bruit capteur, nous devons inclure le champ diffus (sources externes à la modélisation) et les erreurs capteurs dues à la mésestimation de l'induction terrestre et à l'erreur d'alignement dans ce même champ. Dans le cas d'un capteur scalaire nous devons pouvoir descendre à  $10 \text{ nT}$  mais rester aux environs de  $100 \text{ nT}$  pour les capteurs vectoriels (si on s'affranchit du problème du mésalignement dans le champ terrestre). Nous faisons varier ces valeurs de  $10 \text{ nT}$  à  $200 \text{ nT}$  pour les magnétomètres et de  $10 \text{ nT/m}$  à  $200 \text{ nT/m}$  pour les gradientmètres (ce qui fait une valeur réduite de  $6$  à  $120 \text{ nT}$  pour un modèle de  $1 \text{ m}^3$ ). Pour le cas moyen, nous prenons pour les deux  $50 \text{ nT}$ .

### Erreur d'identification

Nous cherchons à assurer une erreur d'identification inférieure à 10%. Une bonne sécurité serait d'estimer entre 5% et 10%. La valeur prise par défaut est de 7,5%.

#### 7.4.c- Expressions utilisées

Nous allons faire un dernier ajustement dans les formules pour permettre de l'interpoler pour des nombres de sondes qui ne correspondent pas à un entier du type  $n(n+2)$  (qui permet de tomber juste dans les degrés harmoniques identifiés).

Pour cela, nous allons définir deux nombres :

$$m_c / m_c^2 \leq n_c \leq m_c(m_c+2)$$

$$\delta_k / \left\{ \begin{array}{l} \delta_{n_c} = \left( \frac{m_c(m_c+2) - n_c}{2m_c+1} \right)^2 \\ \delta_k = 1 \text{ si } k \geq m_c+1 \end{array} \right.$$
(7.14)

Tous ces paramètres réunis, nous pouvons montrer à titre d'exemple l'expression que l'on obtient pour un magnétomètre placé radialement (M1R)

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum_{k=n_c}^n \delta_k (k+1)^2 \frac{k}{2k+1} \left[ \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{k-1}}{3r^{k+2}} M' \right]^2 + b_{\pi}^2}{\frac{n_c 4}{3} \left( \frac{\mu_0}{3r^3} M' \right)^2 + \sum_{k=n_c}^n \delta_k (k+1)^2 \frac{k}{2k+1} \left[ \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{k-1}}{3r^{k+2}} M' \right]^2 + b_{\pi}^2}$$
(7.15)

#### 7.4.d- Résultats

Le domaine paramétrique est vaste. Nous avons donc cherché à tracer les tendances en faisant varier un paramètre après l'autre, toutes les autres valeurs étant celles par défaut.

Des courbes suivantes, nous pouvons tout de suite tirer des enseignements sur les configurations les plus intéressantes des sondes. En particulier, que ce soit pour les sondes magnétométriques ou pour les sondes gradientométriques, les configurations où les capteurs se trouvent en position normale par rapport à la pièce sont nettement plus favorables que les configurations où les capteurs se trouvent parallèles à la pièce. Nous rappelons qu'il est très délicat de comparer les magnétomètres et les gradientmètres compte tenu de la normalisation du bruit gradientométrique.

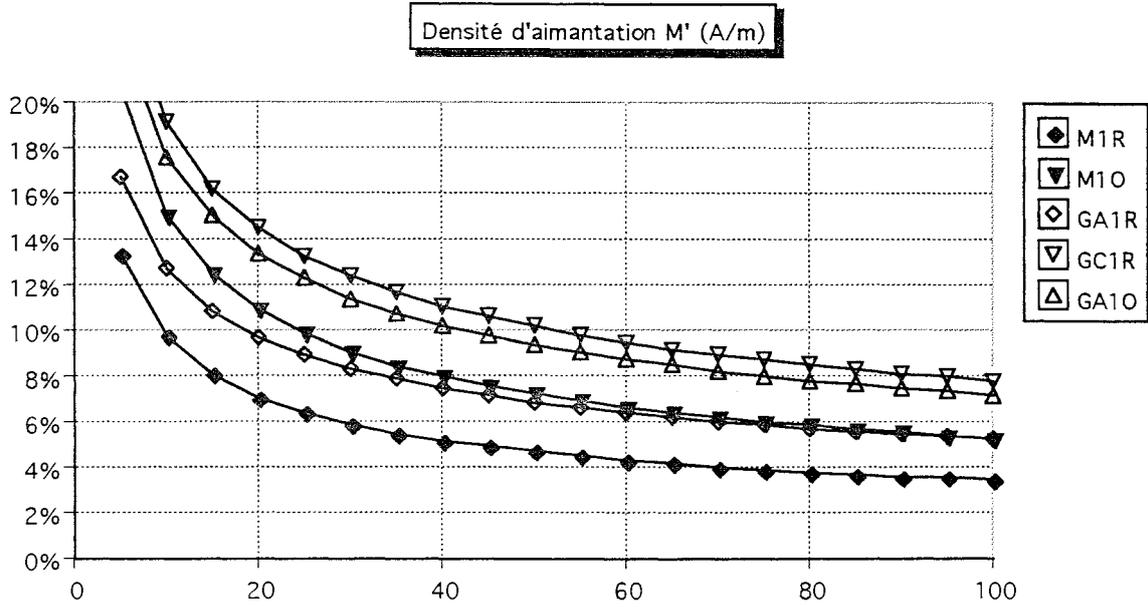


Figure 7.8 : Influence de la densité d'aimantation sur l'incertitude d'identification

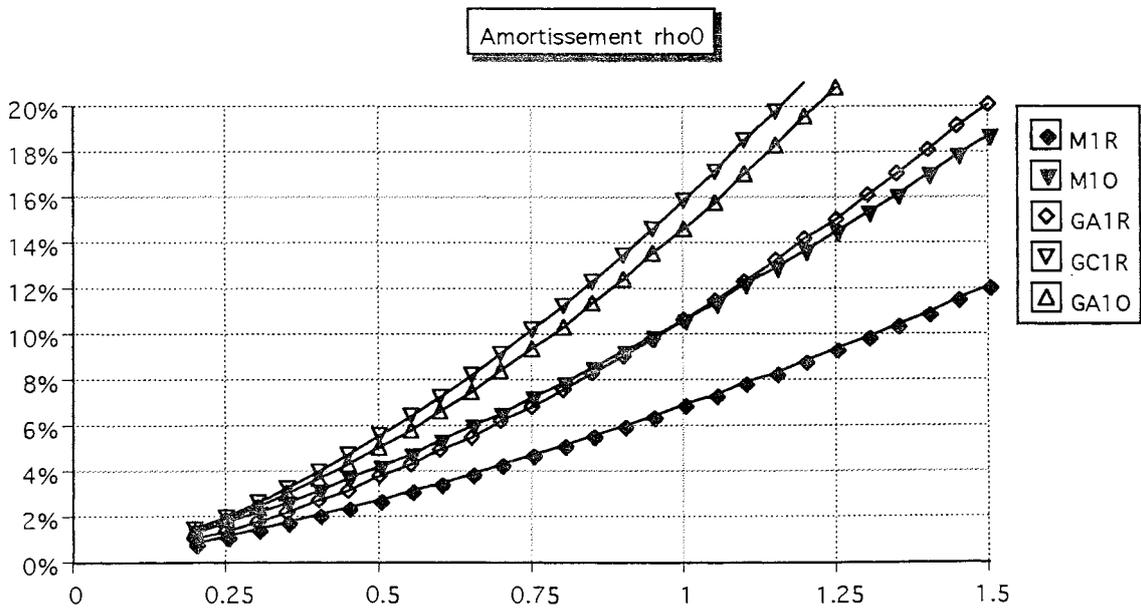


Figure 7.9 : Influence de la décroissance des harmoniques sur l'incertitude d'identification

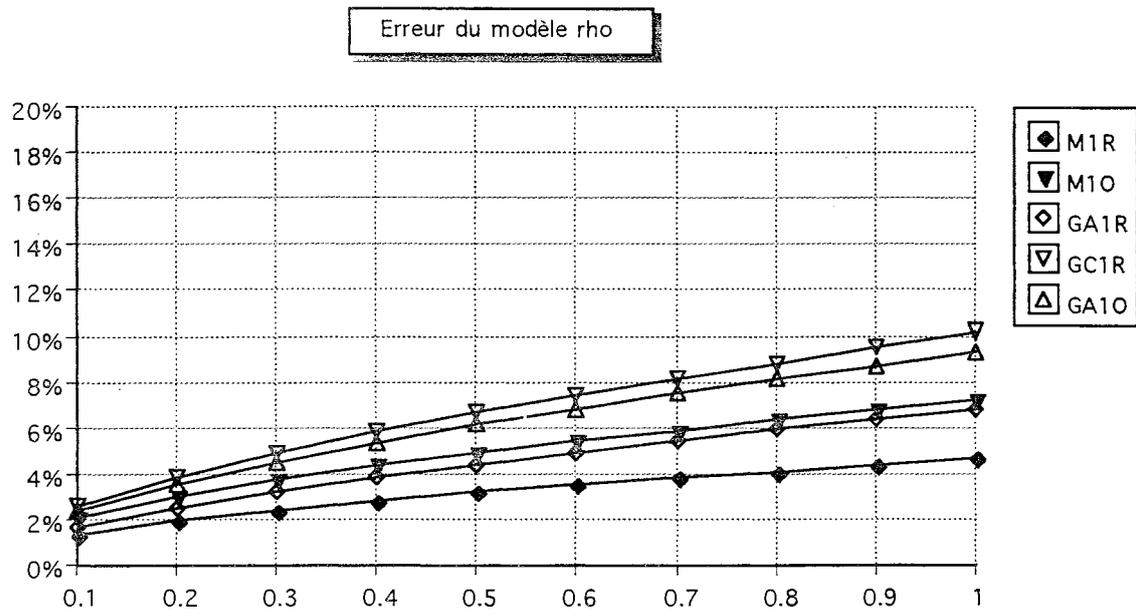


Figure 7.10 : Influence du modèle sur l'incertitude d'identification

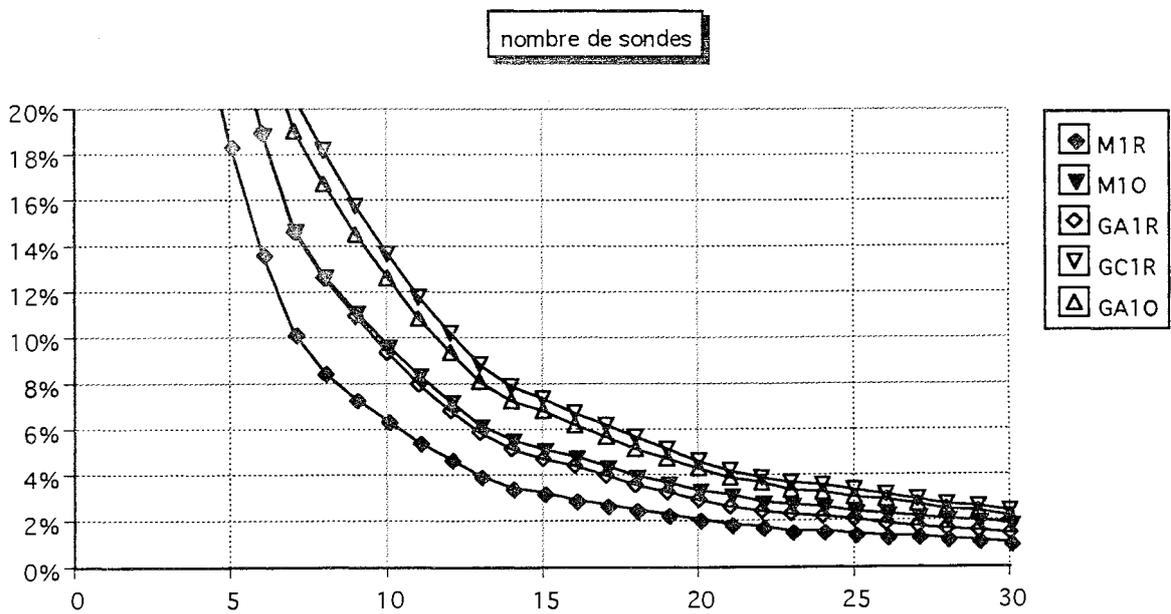


Figure 7.11 : Influence du nombre de sondes sur l'incertitude d'identification

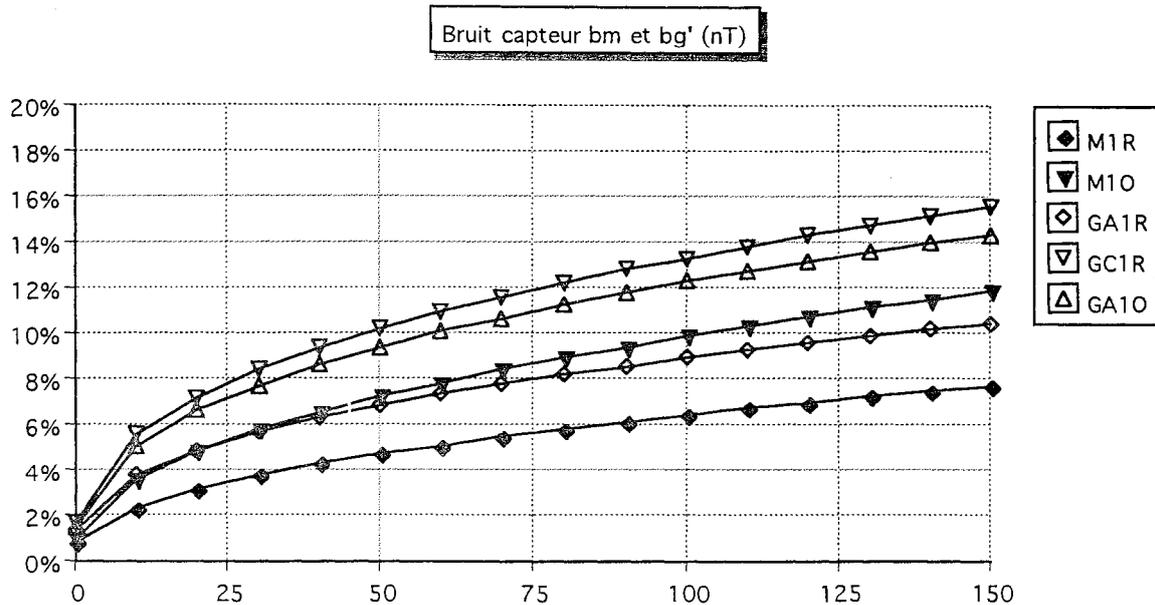


Figure 7.12 : Influence de l'erreur de mesure sur l'incertitude d'identification

Toutes ces courbes sont aisément interprétables dès que l'on remarque que plus les harmoniques sont faibles par rapport aux termes dipolaires, plus les capteurs peuvent être proches et travailler dans de meilleures conditions de rapport signal sur bruit.

Par ailleurs il est intéressant de regarder l'influence de la distance de placement des capteurs vis à vis des performances (figure 7.13). Tout d'abord, nous nous apercevons que la distance optimale dépend du type de sondes. Pour les distances inférieures à l'optimum, le trop grand nombre de degrés de liberté est le facteur limitatif, pour les distances supérieures, la dégradation vient de la faiblesse du signal.

Quand le rapport signal sur bruit est bon, il est remarquable que les courbes des magnétomètres se séparent des courbes des gradientmètres et sont nettement meilleures. Cela vient du fait que la dérivation opérée par le gradientmètre amplifie les variations spatiales et donc les degrés élevés des harmoniques.

Un dernier point notable est la différence de vitesse de variation des deux branches des courbes pour certains types de capteurs. Si la distance optimale ne peut pas être atteinte, pour ne pas dégrader les performances, il vaut mieux se trouver plus loin de l'objet que plus près.

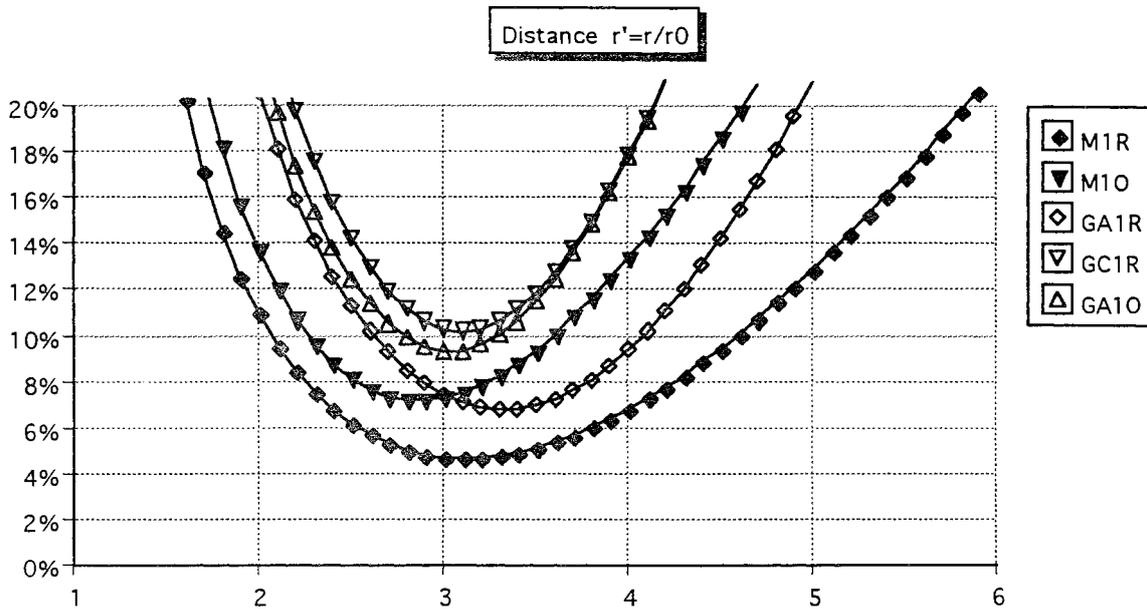


Figure 7.13 : Influence de la distance de placement sur l'incertitude d'identification

## 7.5- Généralisation dans le cas de capteurs réels

### 7.5.a- Les capteurs réels

Les formules développées précédemment ne s'appliquent que lorsque tous les capteurs sont de même type et de même orientation relative vis à vis de la source. Ces conditions peuvent être respectées si nous disposons de capteurs ne donnant qu'un signal, mais cela ne peut pas être le cas quand ils disposent de plusieurs sondes. Par exemple, si nous avons un magnétomètre triaxial, les sondes ont des orientations différentes (les 3 sondes sont en général placées orthogonalement). Mais quelle que soit la position du capteur, nous pouvons toujours trouver trois combinaisons des voies de mesure qui se comportent comme une sonde placée radialement (du type M1R) et deux sondes orthogonales placées orthoradialement (donc du type M1O).

Il est cependant tentant d'estimer les performances de ces capteurs, même si le résultat doit être approximatif et issu d'un raisonnement faux. Dans les formules précédentes, nous avons fait essentiellement deux approximations. Tout d'abord que les paramètres non identifiés sont indépendants sur chaque sonde et de la même variance, et puis que les paramètres identifiés se projettent de manière orthogonale sur les voies de mesures.

Nous appliquons un facteur d'échelle sur les voies pour ramener le bruit à un niveau identique sur chaque capteur, ce qui est essentiel pour mélanger les diffé-

rents canaux. Par contre, nous sommes obligés de supposer qu'alors il est possible de trouver des positions capteurs qui permettent l'orthogonalité (c'est probablement optimiste). Ce calcul est d'autant plus erroné que les sondes élémentaires se comportent de manière distincte.

Dans le cas du capteur triaxial, par exemple, la formule est :

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{\frac{n_c}{3} \frac{1}{3} \left( \frac{4 \left( \frac{\mu_0}{3r^3} M' \right)^2}{\sum_{k=n_c}^n \delta_k (k+1)^2 \frac{k}{2k+1} \left[ \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{k-1}}{3r^{k+2}} M' \right]^2 + b_r^2} + 2 \frac{\left( \frac{\mu_0}{3r^3} M' \right)^2}{\sum_{k=n_c}^n \delta_k \frac{k(k+1)}{2} \frac{k}{2k+1} \left[ \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{k-1}}{3r^{k+2}} M' \right]^2 + b_r^2} \right) + 1} \quad (7.16)$$

Ceci ne reste valable que si les sondes sont non corrélées.

### 7.5.b- Types de capteur retenus

Nous avons choisi de calculer ces performances pour 6 variantes de capteurs plus ou moins couramment utilisées (3 magnétomètres et 3 gradientmètres) dans différentes configurations d'où un total de 11 cas.

#### Capteur magnétométrique vectoriel monoaxe (M1R)

C'est le cas très courant d'une sonde magnétométrique monoaxe. Nous la plaçons systématiquement radialement car nous venons de voir que cette situation est préférable (sonde du type M1R).

#### Capteur magnétométrique vectoriel triaxe (M3)

Ce cas est aussi courant. Nous avons alors 3 sondes orthogonales et comme nous venons de le voir, les performances sont obtenues par combinaison d'une sonde M1R et de deux sondes M1O. C'est ce type de capteur qui a été choisi pour les essais du moteur Baudouin.

#### Capteur scalaire (MS)

En présence du champ terrestre, si la source est d'amplitude faible, nous avons vu (paragraphe B.4.b) que ce capteur se comporte comme un capteur vectoriel orienté dans la direction du champ. Si nous supposons les capteurs disposés régulièrement autour de l'anomalie, le cas moyen est comme pour le capteur M3, une combinaison d'une sonde M1R et de deux sondes M1O. Cependant il n'y a qu'une voie par capteur.

### Capteur gradientmétrique monoaxe axial (GA1R et MGA1R)

Nous appelons capteur axial, un capteur qui donne une information correspondant à un terme de la diagonale de la matrice gradient. Comme pour le capteur magnétométrique, nous ne le plaçons que dans une position radiale.

Compte tenu de la technologie de ce type de capteur conçu quasiment exclusivement comme le signal différence de deux sondes magnétométriques alignées (dans le cas axial) ou parallèles (dans le cas que nous notons croisé), le signal magnétométrique est souvent disponible.

Nous considérons donc deux situations. La première où seul le gradient est exploité (sonde de type GA1R) et la seconde où nous utilisons aussi le signal magnétométrique (sonde de type MGA1R).

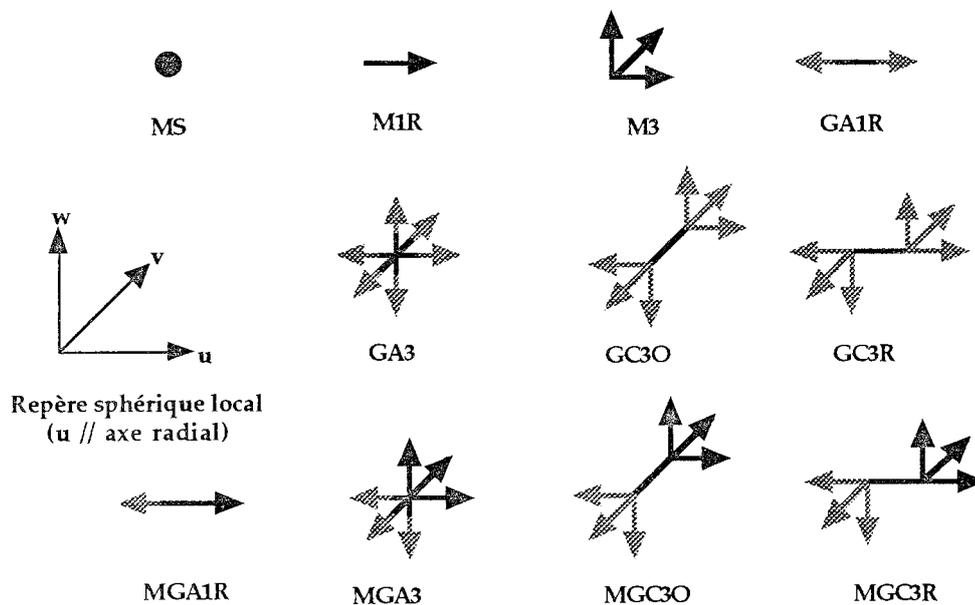


Figure 7.14 : Exemple de configurations testées

### Capteur gradientmétrique triaxe axial (GA3 et MGA3)

Cela correspond à la mise en place de trois sondes gradientmétriques axiales placées orthogonalement. Il est intéressant de savoir que ce type de capteur existe, bien que les signaux des trois voies soient liés (leur somme, trace de la matrice gradient est nulle).

Dans le paragraphe suivant, nous présenterons comment nous traitons ce cas.

Capteur gradientmétrique triaxe croisé (GC3R, MGC3R, GC3O, MGC3O)

Ces capteurs sont constitués (sur le principe) de la différence de deux capteurs triaxes décalés. Ce capteur mesure en fait trois composantes correspondant à une colonne de la matrice gradient. Contrairement au cas du gradientmètre axial, ces trois composantes sont toujours indépendantes.

Nous supposons deux positions, l'une où l'axe du gradient est placé radialement à l'anomalie (GC3R), l'autre où l'axe est placé parallèlement (GC3O). Dans le premier cas, les sondes concernées sont GA1R et GC1R (plus éventuellement M1R et M1O), dans le second, les sondes sont GA1O, GC1R et GC1O (plus M1R et M1O).

**7.5.c- Cas particulier des capteurs possédant des corrélations**Gradientmètre triaxe axial

C'est le cas le plus simple à traiter.

Nous avons vu que les trois sondes sont liées et que, en particulier, la somme des signaux des trois sondes est nulle.

Pour chaque matrice 3x3 correspondant à un capteur, nous allons chercher une orthogonalisation pour trouver deux signaux indépendants.

Prenons tout d'abord le cas des sondes  $G_{\theta\theta}$  et  $G_{\varphi\varphi}$ . Nous allons chercher une matrice de rotation qui génèrent 2 signaux linéairement indépendants.

On cherche  $\gamma$  telle que :

$$E[(\cos \gamma G_{\theta\theta} - \sin \gamma G_{\varphi\varphi})(\sin \gamma G_{\theta\theta} + \cos \gamma G_{\varphi\varphi})] = 0 \quad (7.17)$$

Nous avons alors  $\gamma = \pi/4$  et pour chaque degré  $n$ , la matrice de variance/covariance suivante :

	$\frac{\sqrt{2}}{2}(G_{\theta\theta}+G_{\varphi\varphi})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(G_{\theta\theta}-G_{\varphi\varphi})$
$\frac{\sqrt{2}}{2}(G_{\theta\theta}+G_{\varphi\varphi})$	$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2}$	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}(G_{\theta\theta}-G_{\varphi\varphi})$	0	$\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

Comme l'angle  $\gamma$  ne dépend pas de l'ordre  $n$ , nous pouvons réellement appli-

quer cette rotation à toutes les voies des gradientmètres, de même, comme  $\sqrt{2}/2(G_{\theta\theta}+G_{\varphi\varphi})$  est colinéaire à  $G_{rr}$ , nous pouvons utiliser une combinaison linéaire des deux, permettant de réduire le bruit capteur apparent.

Nous utilisons en final, les combinaisons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(G_{rr} - G_{\theta\theta} - G_{\varphi\varphi}) \\ & \frac{1}{2}(G_{\theta\theta} - G_{\varphi\varphi}) \end{aligned}$$

qui ont respectivement les mêmes variances en fonction du degré que  $G_{rr}$  et  $G_{\theta\theta}$  et les variances de bruits capteurs apparents  $3/4 b_g^2$  et  $1/2 b_g^2$ .

### Capteurs combinés magnétomètres et gradientmètres

Les capteurs combinés magnétomètres et gradientmètres possèdent aussi des corrélations entre leurs voies. Nous allons cependant nous apercevoir que ce cas est un peu plus compliqué que le précédent. Pour bien en comprendre le principe, nous allons prendre le gradientmètre monoaxial combiné (MGA1R).

Cherchons comme au paragraphe précédent à orthonormaliser les deux composantes d'un même capteur à partir d'une rotation d'angle  $\gamma$ . Nous avons, en notant  $j$  et  $k$  les indices de l'harmonique correspondant à l'inconnue d'indice  $i$ ,

$$B_r(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(j+1) \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{j-1}}{3r^{j+2}} M' Y_j^k(\theta, \varphi) + b_r \alpha_{n+1} \quad (7.18)$$

et

$$G_{rr}(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^n -\alpha_i(j+1)(j+2) \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{j-1}}{3r^{j+3}} M' Y_j^k(\theta, \varphi) + b'_g \alpha_{n+2} \quad (7.19)$$

Si nous calculons la corrélation entre les combinaisons linéaires de  $B_r$  et  $G_{rr}$ , compte tenu des propriétés statistiques des  $\alpha_i$ , nous avons :

$$\begin{aligned} & E((\cos \gamma B_r - \sin \gamma G_{rr})(\sin \gamma B_r + \cos \gamma G_{rr})) \\ & = \sum_{i=1}^n \left( \cos \gamma + \sin \gamma \frac{(j+2)}{r'} \right) \left( \sin \gamma - \cos \gamma \frac{(j+2)}{r'} \right) (j+1)^2 \frac{j}{2j+1} \left( \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{j-1}}{3r^{j+2}} M' \right)^2 (Y_j^k(\theta, \varphi))^2 \\ & = \sum_{j=1}^n \left( \sin 2\gamma \frac{1}{2} \left( 1 - \left[ \frac{(j+2)}{r'} \right]^2 \right) - \cos 2\gamma \frac{(j+2)}{r'} \right) (j+1)^2 \frac{j}{2j+1} \left( \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{j-1}}{3r^{j+2}} M' \right)^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Il n'existe pas de valeur pour le coefficient  $\gamma$  qui réduise à 0 tous les termes de la corrélation (c'est à dire pour toutes les valeurs de  $j$ ). L'expression (7.20) ne peut

être réduite que de manière globale et il paraît donc difficile de calculer l'incertitude de l'identification de manière fiable.

Nous allons nous en sortir en allant totalement à contre courant de cette première démarche.

Plutôt que chercher des combinaisons qui soient indépendantes les unes des autres, nous allons au contraire remplacer tous les couples de voies ( $B_r, G_{rr}$ ) par une seule voie "synthétique", combinaison de ces deux voies mais qui possède des propriétés sympathiques.

Reprenons tout d'abord l'expression des relations entre les composantes de champs et celles de gradients :

$$\begin{aligned} G_{rr} &= \frac{-(n+2)}{r} B_r \\ G_{r\theta} &= \frac{-(n+2)}{r} B_\theta \\ G_{r\varphi} &= \frac{-(n+2)}{r} B_\varphi \end{aligned} \quad (7.1)$$

Cette relation est non seulement vraie globalement pour un degré d'harmonique donné  $n$ , mais elle est aussi vraie terme à terme, c'est à dire que nous avons, en reprenant nos notations :

$$(G_{rr})_j = \frac{-(j+2)}{r'} (B_r)_j \quad (7.21)$$

Si nous calculons l'expression du signal de notre capteur "synthétique" pour une valeur donnée de  $\gamma$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & [\cos \gamma B_r(\theta, \varphi) - \sin \gamma G_{rr}(\theta, \varphi)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \cos \gamma + \sin \gamma \frac{(j+2)}{r'} \right) (j+1) \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \frac{\mu_0 \rho \rho_0^{j-1}}{3r^{j+3}} M Y_j^k(\theta, \varphi) \alpha_i \\ & \quad + \cos \gamma b_r \alpha_{n+1} + \sin \gamma b'_g \alpha_{n+2} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Si par exemple, nous prenons pour  $\gamma$  la valeur  $-\text{Arctg}(r'/(j+2))$ , tous les termes de degré  $j$  deviennent nuls. C'est à dire que notre nouveau capteur est totalement insensible à tous les termes harmoniques de degré  $j$  !

Pour donner un ordre d'idée, nous avons représenté, figure 7.15, pour un cas arbitraire, les décroissances relatives des différents termes pour un capteur magnétométrique, gradientométrique et une combinaison des deux, réglée pour annuler les termes d'ordre 3. Le rapport signal à bruit est nettement meilleur et compense le fait que nous n'avons créé qu'un signal composite avec 2 voies de mesures.

Il faut contrebalancer ce point par le fait que cette combinaison à tendance à

amplifier le bruit capteur. Elle est donc d'autant plus efficace que le capteur est bon.

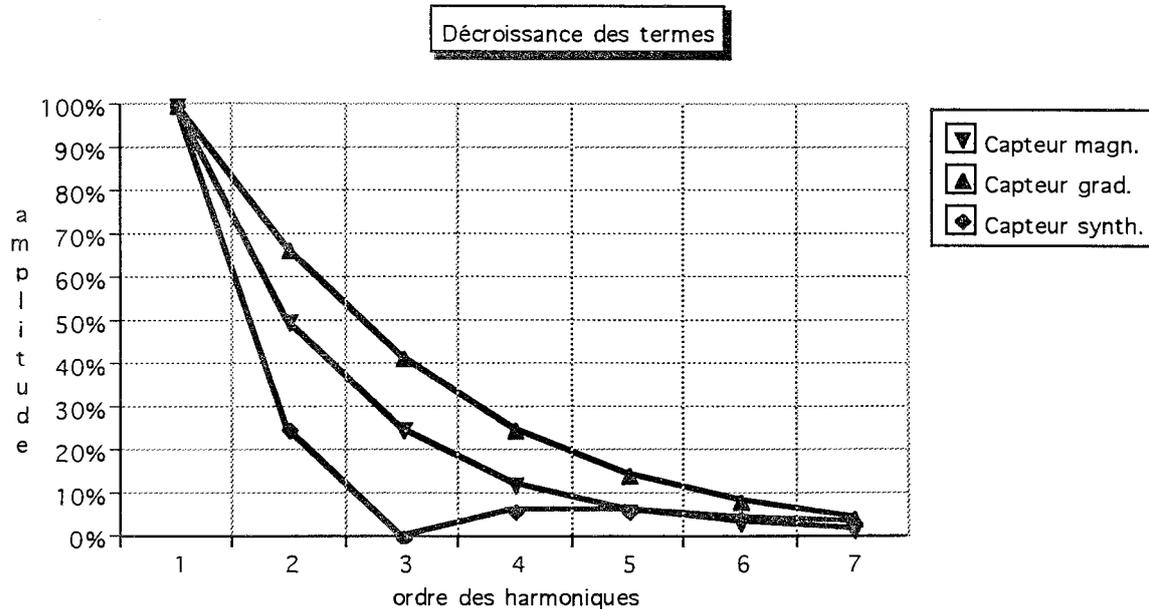


Figure 7.15 : Décroissance relative des contributions des harmoniques pour 3 types de capteurs

#### 7.4.d- Résultats

A partir de tous les calculs précédents, nous pouvons tracer des courbes de performances pour des capteurs plus réalistes que dans les premiers graphiques.

Tout d'abord, traçons la courbe de performance en fonction de la distance (figure 7.16)

Nous pouvons observer le comportement particulier des quatre capteurs combinés (MGA1R, MGA3, MGC3R et MGC3O) dont les positions optimales se trouvent beaucoup plus près de la pièce que les autres capteurs. Ces quatre types de capteurs sont les seuls pour lesquels des voies bénéficient des combinaisons étudiées dans le paragraphe précédent. Par contre pour des distances élevées, ces capteurs sont relativement moins bons car la combinaison diminue le rapport signal sur bruit du capteur.

La première tendance est de comparer les différentes solutions pour un nombre identique de capteurs, nous avons alors les courbes de performances suivantes (figure 7.17).

Nous avons alors 3 grandes familles qui se détachent et qui dépendent essentiellement du nombre de voies disponibles sur les capteurs (6 voies sur un capteur triaxe combiné pour 1 voie pour un capteur scalaire).

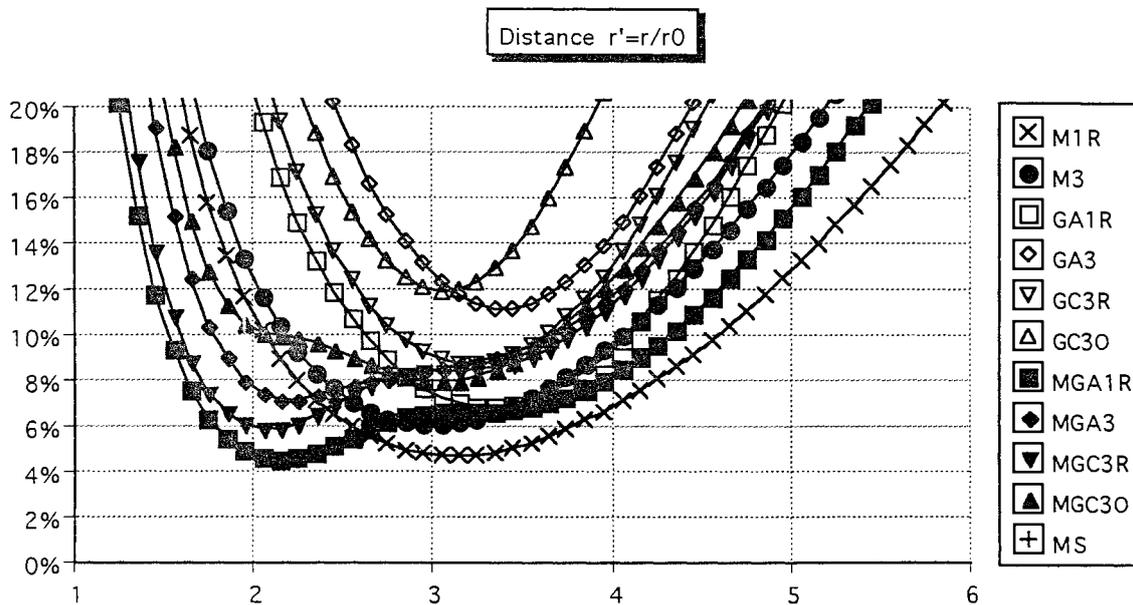


Figure 7.16 : Influence de la distance de placement sur l'incertitude d'identification

En fait pour deux capteurs de performances intrinsèques comparables, le prix du capteur est essentiellement proportionnel au nombre de sondes. Nous avons représenté dans la figure 7.18, les courbes en fonction de ce critère qui est plus proche d'une courbe "performance/prix" (en supposant cependant une sonde par gradient ce qui est technologiquement faux).

L'avantage vient alors aux capteurs unitaires qui ont la souplesse de permettre à chaque voie d'être placée dans une configuration à bon signal sur bruit.

La qualité du capteur influe aussi sur le coût. Nous pouvons encore améliorer notre étude performance/coût en traçant pour nos capteurs, les couples (nombre de sondes/précision admissible) et (nombre de capteurs/précision admissible) pour une performance d'identification donnée (ici 7,5% d'erreur). (Il faut cependant continuer à garder à l'esprit que le bruit magnétomètre et le bruit gradient-mètre sont incomparables).

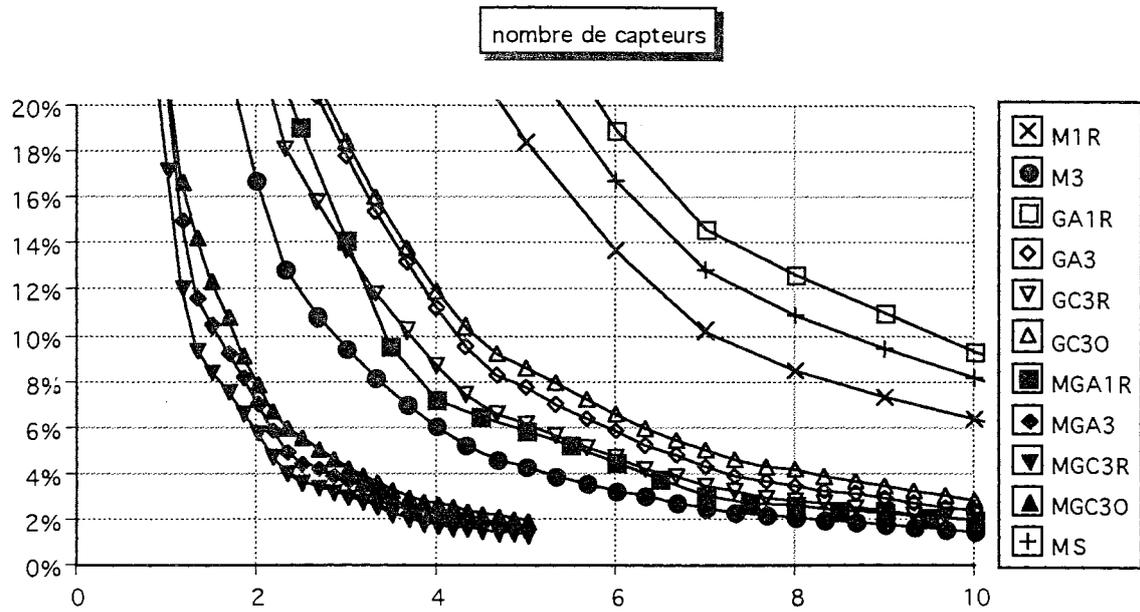


Figure 7.17 : Influence du nombre de capteurs sur l'incertitude d'identification

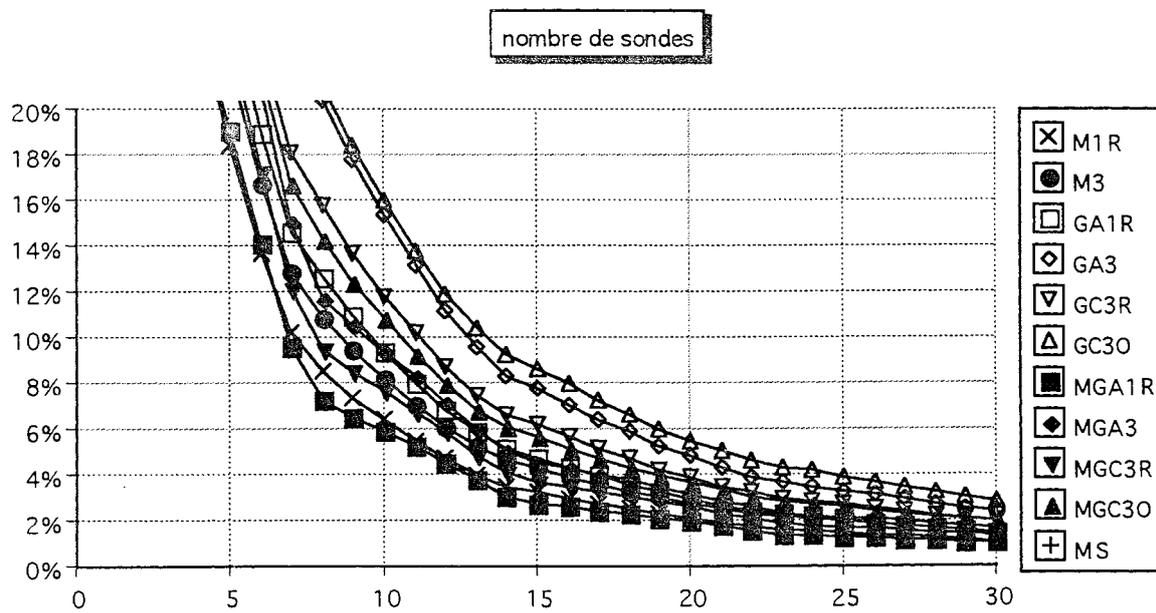


Figure 7.18 : Influence du nombre de sondes sur l'incertitude d'identification

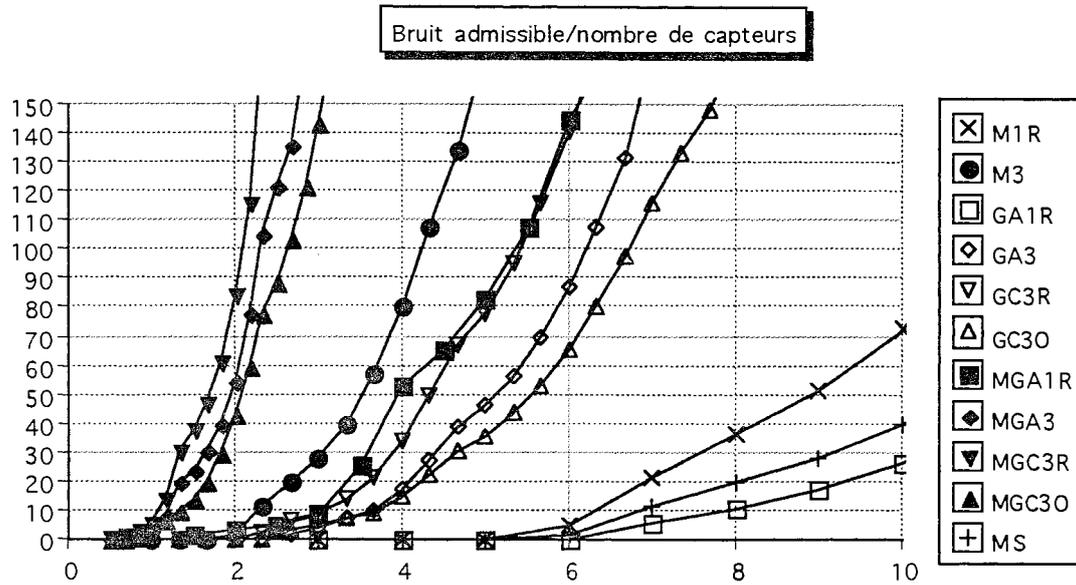


Figure 7.19: Couple nombre de capteurs/bruit capteur pour une performance de 7,5%)

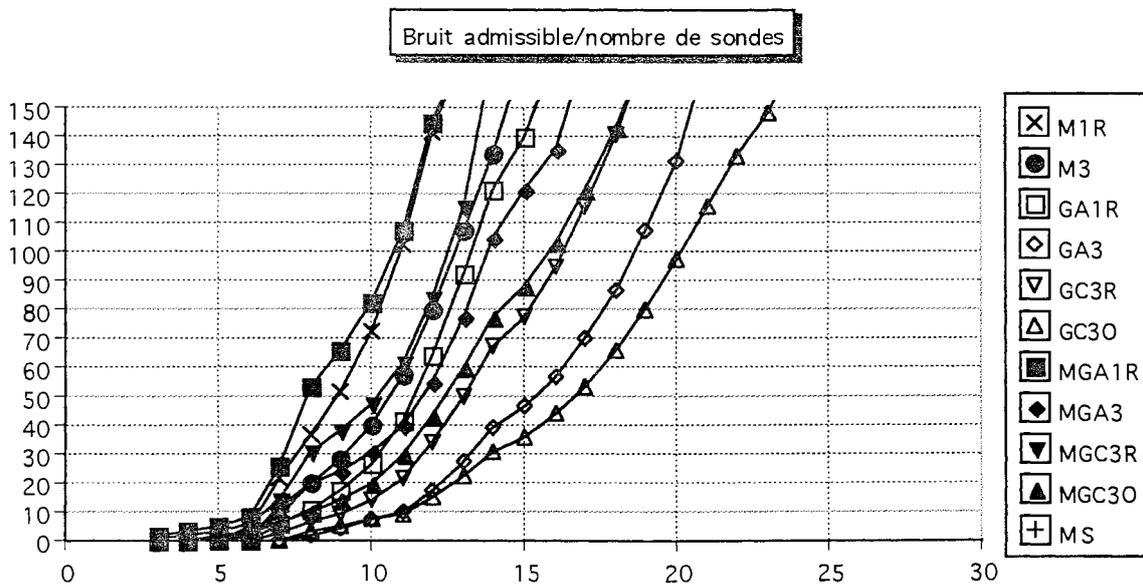


Figure 7.20 : Couple nombre de sondes/bruit capteur pour une performance de 7,5%)

## 7.6- Enseignements tirés

Dans ce chapitre, nous avons exécuté un calcul long, compliqué et au fur et à mesure, nous avons dû procéder à des simplifications ou des hypothèses qui furent nécessaires pour pouvoir le mener à terme au dépens souvent de la précision.

Il n'a cependant pas été inutile, loin de là, car les conclusions sont à la hauteur de notre investissement. Tout d'abord nous avons vu les relations entre les composantes des champs et des gradients qui varient en fonction du degré des harmoniques. Cela permet déjà de voir les types de sondes et les orientations qui permettront une décroissance rapide des termes.

Ensuite le calcul des performances permet de tirer des conclusions grossières et rapides sur la sensibilité des paramètres vis à vis de la précision d'identification. Pour n'en retenir que deux, nous citerons l'influence énorme de la densité d'aimantation et de la complexité de cette aimantation (coefficient  $\rho_0$ ) sur les performances et le fait que pour doubler la précision, il faut pratiquement doubler le nombre de sondes.

Un point tout aussi important mais moins évident est l'estimation des valeurs propres de la matrice  $\mathbb{F}^t\mathbb{F}$  qui correspondent à une position optimale des capteurs (annexe B.5.d).

Dans le chapitre précédent, nous avons été confrontés à l'optimisation des positions capteurs et à la difficulté de savoir si la solution donnée par une optimisation non linéaire est loin ou non de l'optimum réel. Dans notre cas simplifié, nous avons pu estimer l'ordre de grandeur des valeurs propres de  $\mathbb{F}^t\mathbb{F}$  (et donc par voie de conséquence de  $\mathbb{F}\mathbb{F}^t$  aussi). Les différentes expériences et simulations informatiques effectuées tendraient à confirmer que les valeurs calculées correspondent à la situation optimale.

Nous avons pu aussi mettre en évidence le comportement particulier des combinaisons entre les capteurs magnétiques et les capteurs gradientométriques. Grâce aux propriétés eulériennes de la fonction champ, nous pouvons discriminer plus fortement les harmoniques entre eux et approcher les capteurs des anomalies (les choses étant égales par ailleurs). Il est à remarquer que ces mêmes propriétés peuvent servir à localiser un dipôle isolé par une mesure statique.

Enfin, nous avons pu tracer des familles d'abaques qui permettent de choisir la solution de capteurs la plus appropriée pour un problème donné. Cependant, ceux-ci sont très approchés et ne sont valables que pour une seule source qui est assez sphérique. Il faut bien entendu adapter les différentes variables à son problème particulier.

Dans le cas général, nous avons plusieurs sources qui ne sont pas d'ordre de grandeur similaire et qui n'ont donc pas à être identifiées avec la même préci-

sion. De même il n'y a ni additivité, ni critère de maximum entre les qualités d'identification de deux sources côte à côte à cause du mélange entre leurs signatures.

Il faut aussi retenir de ce calcul que nous n'avons pas tenu compte du champ terrestre. Il sera nécessaire de réserver un minimum de trois sondes pour le caractériser, mais il peut aussi interdire l'utilisation de toute solution comportant des magnétomètres si des problèmes d'alignement des sondes se posent.

Enfin, et c'est loin d'être négligeable, nous n'avons qu'une idée assez imprécise des ordres de grandeur des différents termes (densité d'aimantation et valeur relative des différents  $a_{\text{m}}$ ) or ces deux paramètres ont un très fort impact sur les résultats.



## 8.- Conclusion

### 8.1- Obtention des objectifs

Nous voici à la fin de ce voyage et il est l'heure de tirer un bilan des avancées opérées. Nous espérons au début de ce rapport obtenir une méthode de mesure permettant sinon une interprétation fine des résultats, au moins une quantification des origines de l'effet mesuré.

Reprenons, point par point, les propriétés souhaitées que nous énoncions dans le premier chapitre et estimons là-dessus les nouveaux acquis.

#### 8.1.a- Comparaison entre plusieurs mesures

Nous voulions être capables de comparer entre elles plusieurs mesures en s'affranchissant des conditions expérimentales. Sur ce point, nous avons fait de grands progrès en projetant la mesure dans un système qui est intrinsèque soit à l'espace géométrique (les harmoniques sphériques), soit à la pièce mesurée (base des distributions surfaciques sur la pièce).

Etant, dans de très larges proportions, indépendante de la source, la représentation harmonique est très adaptée à la comparaison de plusieurs sources de types distincts. La représentation sur une base de l'anomalie permet d'être plus précis mais étant propre à l'objet mesuré, doit essentiellement être utilisée pour l'étude de l'évolution magnétique d'une même pièce ou pour la comparaison d'un lot de pièces identiques.

Un point essentiel pour la comparaison de plusieurs systèmes magnétiques, est l'unicité du résultat de la mesure de plusieurs états identiques dans des conditions variées. Nous pouvons la garantir, car nous avons construit une représentation des anomalies qui assure la bijectivité vis à vis des champs externes. Cependant la mesure sous-échantillonnant fortement ce champ, des capteurs placés en des endroits distincts peuvent entraîner des résultats différents. Ce point peut être maîtrisé car nous ne nous contentons pas de donner les valeurs identifiées, mais nous fournissons une estimation de la précision de la détermination.

L'identité entre deux états magnétiques peut alors être tranchée par un test statistique.

#### **8.1.b- Identification des sources en temps réel**

Une deuxième qualité recherchée était de pouvoir procéder à ces identifications en temps réel. Les calculs présentés dans ce rapport entraînent le calcul des valeurs singulières d'une matrice. Celui-ci est fait par des méthodes numériques dont la charge est de l'ordre de  $kn^3$ , ce qui reste lourd. Cependant, dans le cas où les hypothèses statistiques et géométriques du système sont invariantes dans le temps, ces calculs peuvent être faits de façon préliminaire, l'adaptation au cours du temps ne se résumant plus qu'à la multiplication du vecteur des mesures par une matrice (charge de l'ordre de  $k'n^2$ ) facilement implantable dans une boucle "temps réel". Des méthodes plus raffinées peuvent aussi être dérivées, par l'adaptation d'un filtrage de Kalman ou par une adaptation des matrices en temps masqué, si les hypothèses (par exemple une variation temporelle de l'espérance) ont une évolution lente.

#### **8.1.c- Extrapolation des champs**

Un des avantages évidents d'avoir une représentation de l'état magnétique de l'objet et non pas seulement de la mesure du champ magnétique est de pouvoir recalculer en tout point de l'espace le champ rayonné. Bien entendu, la précision de l'extrapolation dépend de la qualité de la mesure. Il sera par exemple hasardeux d'estimer le champ magnétique en un point plus proche de la pièce que les positions des capteurs de mesure car nous avons vu qu'une partie de l'information n'est pas observable. Par ailleurs, une fois encore, nous pouvons estimer une erreur d'extrapolation qui permet d'appréhender la précision accessible.

#### **8.1.d -Vérification de la qualité de mesure**

Un des acquis essentiels de cette méthode est de fournir non seulement une grandeur significative de l'erreur d'identification et donc de savoir si la précision espérée est accessible, mais aussi, d'estimer dans certains cas, la validité des hypothèses.

Cependant les conditions d'application restent très restrictives et il importe d'établir les hypothèses nécessaires avec une très grande prudence. Il est probable que sur ce point, les algorithmes peuvent être améliorés.

## 8.2- Application de la méthode

### 8.2.a- En magnétostatique

Nous avons illustré ces algorithmes par la nécessité d'identifier des sources magnétiques d'amplitude relativement faible dans des objets industriels. Ils sont parfaitement généralisables, sans aucune difficulté, à la mesure de tout champ magnétostatique, depuis les champs extrêmement faibles de la magnétoencéphalographie aux champs très forts générés dans les accélérateurs de particules.

De même nous avons pris les développements harmoniques dans le cas d'une mesure extérieure d'un objet limité dans l'espace (permettant l'utilisation des harmoniques sphériques). Nous pouvons tout aussi bien utiliser d'autres développements harmoniques pour, par exemple, mesurer ou contrôler le champ dans une cavité ou un local fermé (en utilisant dans ce cas là, des harmoniques du type  $r^n Y_n^m(\theta, \varphi)$  par exemple).

Les qualités temps réel des algorithmes développés permettent aussi d'envisager un contrôle instantané de l'évolution du champ ou de l'état magnétique d'un objet. Ainsi il paraît possible de suivre la démagnétisation d'un corps tout en s'affranchissant de l'effet des champs inducteurs.

Enfin, pour mémoire, ce traitement peut être utilisé comme un filtrage adapté très efficace d'une mesure magnétique ou comme le moyen de comprimer très fortement l'ensemble des données correspondant à une carte de champ magnétique.

### 8.2.b- Dans d'autres domaines de la mesure

Sans modification majeure, les méthodes exposées dans ce document peuvent être appliquées dans tous les systèmes régis par les équations de Laplace. Nous pouvons mentionner l'électrostatique, la gravitation, la mécanique des fluides. Dans les deux premiers domaines, la nullité du flux n'est pas requise, impliquant l'intégration dans les harmoniques du premier terme  $Y_0^0$  et probablement l'utilisation des potentiels de simple couche et non de double couche dans les représentations surfaciques.

Les systèmes radiatifs dans les milieux homogènes (acoustique ou électromagnétisme par exemple) qui sont solutions de l'équation de Helmholtz acceptent des développements sous forme de fonctions de Green généralisées et d'harmoniques sphériques. Nous pourrions donc leur appliquer les méthodes présentées mais avec le grand inconvénient de ne pas avoir le même amortissement des termes en fonction de la distance. Le nombre de termes à manipuler ne resterait faible que si la source reste petite devant la longueur d'onde (disons ne dépasse

pas quelques longueurs d'onde). Les traitements seraient par contre beaucoup plus lourds car nous ne pourrions pas nous affranchir de l'aspect temporel ou fréquentiel des phénomènes.

### **8.3- Développements possibles**

Enfin, dans ce document nous avons à chaque fois présenté des directions possibles d'amélioration des algorithmes. Il est apparu essentiellement deux axes : l'utilisation dans l'information a priori de modèles fins du système et l'usage de lois de probabilités plus exactes.

#### **8.3.a- Finesse des modélisations**

Nous pourrions concevoir deux voies possibles de réflexion.

Nous avons déjà montré dans le chapitre 4 comment on peut commencer à intégrer des lois de comportement des matériaux. Nous pourrions essayer d'intégrer des modèles plus fins, issus par exemple d'un code de type éléments finis, où nous inclurions les informations connues (géométrie de l'objet, valeur supposée des perméabilités) qui pourrait simplement estimer l'espérance de l'état magnétique, voire servir à calculer de manière beaucoup plus fine les corrélations entre les paramètres magnétiques.

#### **8.3.b- Lois de probabilité**

Les estimateurs linéaires que nous avons utilisés présentent beaucoup de limitations vis à vis, en particulier, de la stabilité et de la justesse des performances prédites.

Un grand effort doit pouvoir être fait pour utiliser des algorithmes plus fiables et plus proches de notre connaissance a priori. L'une des grandes difficultés est qu'un nouvel algorithme serait forcément non linéaire et impliquerait un calcul plus complexe (peut-être itératif).

Enfin un problème d'un grand intérêt pratique mais qui est à cheval entre l'amélioration des modèles et celui des lois de probabilités, est la mise aux point d'algorithmes permettant de trouver la position d'un nombre fini de dipôles à partir de mesures de capteurs fixes.

## 9.- Références bibliographiques

- [ABRAMOWITZ] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN  
"Handbook of Mathematical Functions"  
Dover Publications (1968)
- [DAUTRAY] R. DAUTRAY, J. L. LIONS  
"Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques"  
Editions du CEA-Masson (1984)
- [DURAND1] E. DURAND  
"Electrostatique" Tome 1 à 3  
Masson et C<sup>i</sup>e (1964 - 1966)
- [DURAND2] E. DURAND  
"Magnétostatique"  
Masson et C<sup>i</sup>e (1968)
- [EUVRARD] D. EUVRARD  
"Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur"  
Masson (1990)
- [GESELOWITZ] D. GESELOWITZ  
"Two theorems concerning the quadrupole applicable to electro-cardiography"  
IEEE Transactions on bio-medical engineering vol 12 n° 3&4 de juillet/octobre 1965
- [IMSL] collectif  
"IMSL Math Library Users Manual"  
IMSL Inc. Houston TX
- [KEATING] P. KEATING, M. PILKINGTON  
"An automated method for the interpretation of magnetic vertical-gradient anomalies"  
Geophysics volume 55 n° 3 de mars 1990
- [LATOUR] P. LATOUR  
"Magnetic Localization using field and field gradient properties"  
Undersea Defence Technology proceedings UDT 1991
- [LAWSON] C. L. LAWSON, R. J. HANSON  
"Solving Least Squares Problems"  
Prentice-Hall series in automatic computation 1974

- [LOPEZ] P. LOPEZ  
"Standardization of data exchanges (CLDg MOU)"  
Rapport GESMA n°1950 du 3 avril 1991
- [PRESS] W. H. PRESS B. P. FLANNERY S. A. TEUKOLSKY W. T. VETTERLING  
"Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. Second Edition"  
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (1992)
- [HOOLE] S. HOOLE, S. SUBRAMANIAN, R. SALDHANA, J.L. COULOMB, J.C. SABONNADIÈRE  
"Inverse problem methodology and finite elements in the identification of cracks, sources, materials and their geometry in inaccessible locations"  
IEEE Transactions on Magnetics, vol 27 n° 3 de mai 1991
- [ROBIN] L. ROBIN  
"Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales" (Tome 1 à 3)  
GAUTHIER-VILLARS (1957)
- [ROY] T. ROY  
"Spacecraft magnetic field modelling"  
IEEE Transactions on Magnetics, vol 13 n° 1 de janvier 1977
- [SALIOU] J. SALIOU  
"Détermination optimale des composantes multipolaires d'une source magnétique par analyse du champ proche"  
Mémoire Diplôme Ingénieur CNAM Spécialité informatique Option calcul scientifique soutenue le 1<sup>er</sup> avril 1982
- [SAPORTA] G. SAPORTA  
"Théories et méthodes de la statistique"  
Société des éditions Technip (1976)
- [SPIEGEL] M. R. SPIEGEL  
"Formules et tables de mathématiques"  
Série Schaum  
Groupe Mc Graw Hill (1978)
- [TARANTOLA] A. TARANTOLA  
"Inverse problem Theory : Methods for data fitting and model parameter estimation"  
Elsevier (1987)
- [WANG] X. WANG, R. O. HANSEN  
"Inversion for magnetic anomalies of arbitrary three-dimensional bodies"  
Geophysics volume 55 n° 10 d'octobre 1990
- [ZIENKIEWICZ] O. C. ZIENKIEWICZ  
"La méthode des éléments finis"  
Groupe Mc Graw-Hill (1979)

## A.- Boîte à outils mathématiques

Dans cette annexe, nous avons rassemblé les définitions et les formules, points de départ des développements de cette thèse. En règle générale, nous n'avons pas souhaité rappeler les démonstrations. Dans quelques cas, cependant, nous avons apporté quelques explications aux équations du document. Enfin, certaines formules importantes, en particulier pour les harmoniques sphériques, sont introduites dans le corps de la thèse lui-même.

### A.1- Repères orthogonaux

#### A.1.a- Changement de coordonnées dans le cas général

D'après les références [DURAND1] et [SPIEGEL],

soit un repère cartésien  $(x_1, x_2, x_3)$  tridimensionnel avec un ensemble de vecteurs de base  $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ , posons les équations pour exprimer des relations dans un autre repère  $(u_1, u_2, u_3)$ ,

soit les équations de passage du nouveau repère vers l'ancien :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 &= x_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \tag{A.1}$$

soit un vecteur quelconque,  $\vec{r} = x_1\hat{i}_1 + x_2\hat{i}_2 + x_3\hat{i}_3$ , posons :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \vec{e}_i \tag{A.2}$$

avec  $\vec{e}_i$  vecteur unitaire et  $h_i$  positif ou nul.

Si l'ensemble  $\{\vec{e}_i\}$  est toujours un ensemble de vecteurs orthogonaux, le repère

$(u_1, u_2, u_3)$  est appelé repère orthogonal.

Si le repère est orthogonal, nous avons les expressions suivantes :

△ Dans les lignes ci-dessous, les additions  $i+1$  et  $i+2$  correspondent à des additions modulo 3.

$$\text{gradient : } \vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial\phi}{\partial u_i} \vec{e}_i \quad (\text{A.3})$$

$$\text{divergence : } \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial u_i} (h_{i+1} h_{i+2} A_i) \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{rotationnel : } \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{h_{i+1} h_{i+2}} \left[ \frac{\partial}{\partial u_{i+1}} (h_{i+2} A_{i+2}) - \frac{\partial}{\partial u_{i+2}} (h_{i+1} A_{i+1}) \right] \vec{e}_i \quad (\text{A.5})$$

$$\text{laplacien : } \Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{h_{i+1} h_{i+2}}{h_i} \frac{\partial\phi}{\partial u_i} \right) \right) \quad (\text{A.6})$$

Nous pouvons appliquer ces formules à quelques repères particuliers que nous utilisons dans ce rapport.

### A.1.b- Coordonnées sphériques

Suivant les conventions du dessin :

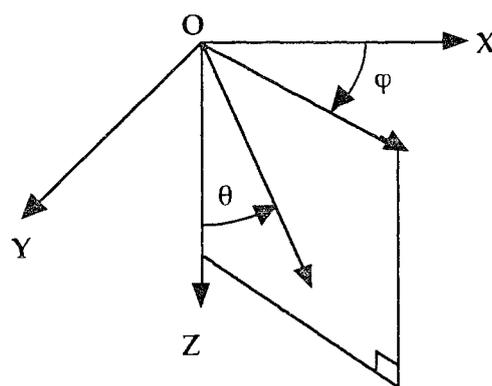


Figure A.1 : Repère sphérique

nous avons la relation entre  $x, y, z$  et  $r, \theta, \phi$  :

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$\begin{aligned} y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$

d'où

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin\theta$$

et

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

### A.1.c- Coordonnées ellipsoïdales (ellipsoïde de révolution allongé)

Suivant les conventions du dessin :

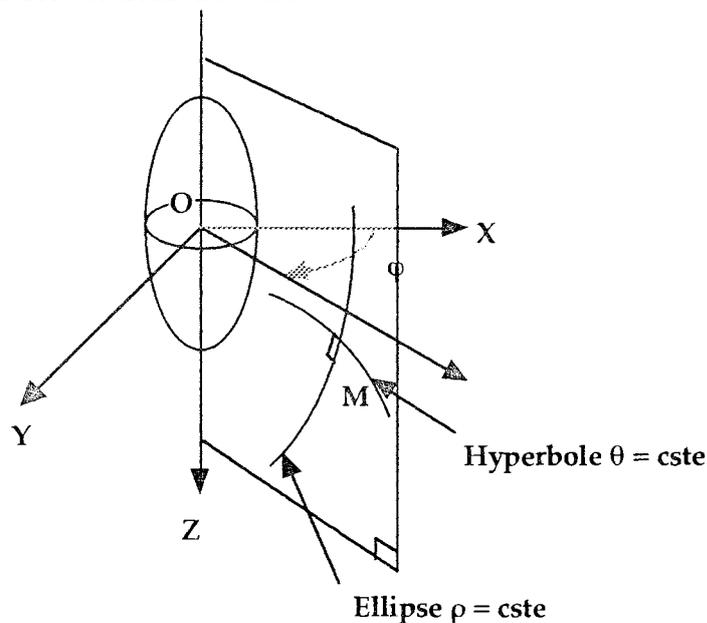


Figure A.2: Coordonnées ellipsoïdales

en notant  $c$  la focale de l'ellipsoïde, nous avons la relation entre  $x, y, z$  et  $\rho, \theta, \varphi$  :

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{sh}\rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= c \operatorname{sh}\rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= c \operatorname{ch}\rho \cos\theta \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

avec  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$

d'où

$$h_1 = h_2 = c \sqrt{\text{sh}^2 \rho + \sin^2 \theta}$$

$$\text{et } h_3 = c \text{sh} \rho \sin \theta$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \rho + \sin^2 \theta}} \begin{pmatrix} \text{ch} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \text{ch} \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \text{sh} \rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \rho + \sin^2 \theta}} \begin{pmatrix} \text{sh} \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \text{sh} \rho \cos \theta \sin \varphi \\ -\text{ch} \rho \sin \theta \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

#### A.1.d- Coordonnées ellipsoïdales (ellipsoïde de révolution aplati)

En suivant les mêmes conventions que le paragraphe précédent, nous avons :

$$x = c \text{ch} \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = c \text{ch} \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = c \text{sh} \rho \cos \theta$$

(A.11)

avec  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$

d'où

$$h_1 = h_2 = c \sqrt{\text{sh}^2 \rho + \cos^2 \theta}$$

$$\text{et } h_3 = c \text{ch} \rho \sin \theta$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \rho + \cos^2 \theta}} \begin{pmatrix} \text{sh} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \text{sh} \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \text{ch} \rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \rho + \cos^2 \theta}} \begin{pmatrix} \text{ch} \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \text{ch} \rho \cos \theta \sin \varphi \\ -\text{sh} \rho \sin \theta \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

## A.2- Calcul des fonctions de Legendre

### A.2.a- Généralités et définitions

Les références [ROBIN] et [ABRAMOVITZ] donnent plusieurs possibilités pour calculer les fonctions de Legendre de première et deuxième espèces.

Nous avons principalement trois méthodes :

-partir de la définition :

$$P_n^{\pi}(x) = (-1)^{\pi} (1-x^2)^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{\pi} P_n(x)}{dx^{\pi}} \quad (\text{A.13})$$

et

$$Q_n^{\pi}(x) = (-1)^{\pi} (1-x^2)^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{\pi} Q_n(x)}{dx^{\pi}} \quad (\text{A.14})$$

avec les polynômes de Legendre définis par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (\text{A.15})$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) - W_{n-1}(x) \quad (\text{A.16})$$

$$W_{n-1}(x) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} P_{p-1}(x) P_{n-p}(x) \quad (\text{A.17})$$

$$W_{-1}(x) = 0 \quad (\text{A.18})$$

-à partir de développements limités

-à partir de formules de récurrence.

△ Suivant les ouvrages, la définition de  $P_n^{\pi}$  et  $Q_n^{\pi}$  peut varier (en particulier, la présence du coefficient  $(-1)^{\pi}$ ). Nous utilisons les conventions les plus courantes.

△ Par ailleurs, les définitions de  $P_n^{\pi}$  et  $Q_n^{\pi}$  sont différentes suivant que l'argument est un réel compris entre -1 et +1 (comme  $\cos\theta$ ) ou un complexe  $z$ . Dans ce dernier cas, le domaine de définition est tout le plan complexe moins le demi-axe réel  $]-\infty, +1]$ . Ces fonctions de Legendre complexes interviennent dans le calcul des harmoniques ellipsoïdales. Les définitions sont alors respectivement :

$$P_n^{\pi}(z) = (z^2-1)^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{\pi} P_n(z)}{dz^{\pi}} \quad (\text{A.19})$$

$$Q_n^{\pi}(z) = (z^2-1)^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{\pi} Q_n(z)}{dz^{\pi}} \quad (\text{A.20})$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2-1)^n}{dz^n} \quad (\text{A.21})$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - W_{n-1}(z) \quad (\text{A.22})$$

$$W_{n-1}(z) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} P_{p-1}(z) P_{n-p}(z) \quad (\text{A.23})$$

$$W_{-1}(z) = 0 \quad (\text{A.24})$$

### A.2.b- Calcul de $P_n^m$

Il existe des formules reliant les différentes fonctions pour des degrés et des ordres différents. Citons-en trois de base [ROBIN] :

$$\begin{aligned} (n-m+2)P_{n+2}^m(\cos\theta) - (2n+3)\cos\theta P_{n+1}^m(\cos\theta) + (n+m+1)P_n^m(\cos\theta) &= 0 \\ P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta) + (2n+1)\sin\theta P_n^m(\cos\theta) - P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta) &= 0 \\ P_n^{m+2}(\cos\theta) + 2(m+1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}P_n^{m+1}(\cos\theta) + (n-m)(n+m+1)P_n^m(\cos\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$\square$  Ces trois formules sont aussi valables dans le cas de  $Q_n^m(\cos\theta)$ .

Les fonctions associées de Legendre dans le plan complexe obéissent à des relations de récurrence légèrement modifiées :

$$\begin{aligned} (n-m+2)P_{n+2}^m(z) - (2n+3)zP_{n+1}^m(z) + (n+m+1)P_n^m(z) &= 0 \\ P_{n+1}^{m+1}(z) - (2n+1)\sqrt{z^2-1}P_n^m(z) - P_{n-1}^{m+1}(z) &= 0 \\ P_n^{m+2}(z) + 2(m+1)\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}P_n^{m+1}(z) - (n-m)(n+m+1)P_n^m(z) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

( $\triangle$  Il faut faire attention aux signes parfois différents).

Connaissant les expressions des premières valeurs  $P_0^0$ ,  $Q_0^0$  et  $Q_0^1$ , nous pouvons trouver un chemin par récurrence qui nous amène au  $P_n^m$  ou au  $Q_n^m$  voulu.

Ceci peut se résumer à trouver un chemin partant de  $P_0^0$  jusqu'au  $P_n^m$  choisi, sur une grille de ce type :

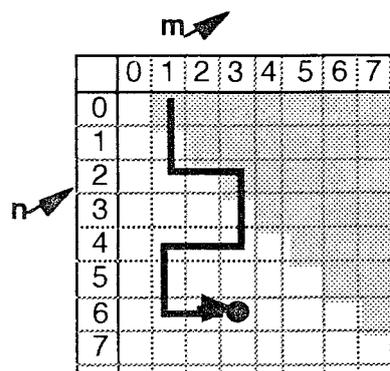


Figure A3 : Principe des chemins de récurrences

Les formules de récurrence sont les règles de transition d'une cellule à la suivante. Nous avons défini en (A.25) les lois des chemins suivants :

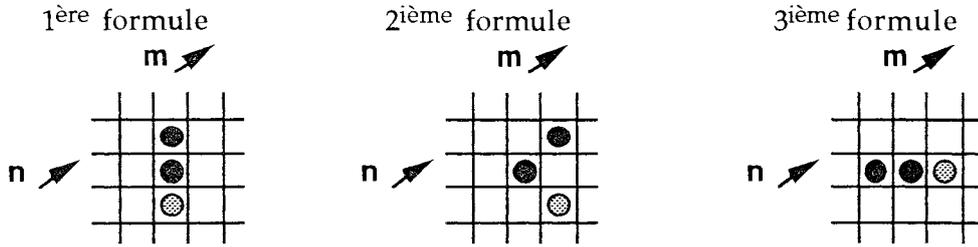


Figure A4 : Formules pour le calcul des  $P_n^m$

Nous ne devons calculer  $P_n^\pi$  que pour des arguments du type  $\cos\theta$ . Les formules de récurrence sont toutes stables, sauf pour  $\theta = \pi/2$ . Là, en effet,  $\sin\theta$  s'annule pouvant provoquer des instabilités quand apparaît une division par  $\sin\theta$  (la troisième formule par exemple). Il nous faut donc trouver un chemin qui ne divise jamais par  $\sin\theta$ .

Nous avons choisi le chemin suivant :

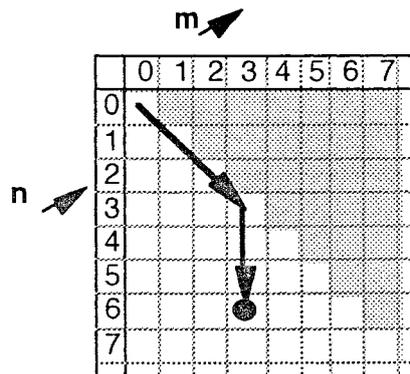


Figure A5 : Chemin utilisé pour le calcul des  $P_n^m$

Pour atteindre  $P_n^\pi$ , nous partons de :

$$P_0^0(\cos\theta) = 1 \tag{A.27}$$

Nous incrémentons  $n$  et  $m$  en conservant  $n=m$  jusqu'à la bonne valeur de  $m$ , par la formule :

$$P_{m+1}^{m+1}(\cos\theta) = -(2m+1)\sin\theta P_m^m(\cos\theta) \tag{A.28}$$

Rq nous pouvons tout autant utiliser la formule analytique :

$$P_{m+1}^{m+1}(\cos\theta) = (-1)^m (2m+1)!! \sin^m\theta \tag{A.29}$$

Nous incrémentons un coup  $n$  par :

$$P_{m+1}^m(\cos\theta) = (2m+1)\cos\theta P_m^m(\cos\theta) \quad (\text{A.30})$$

Enfin nous incrémentons jusqu'à la bonne valeur de  $n$  avec :

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{n-m} \left( (2n-1)\cos\theta P_{n-1}^m(\cos\theta) - (n+m-1)P_{n-2}^m(\cos\theta) \right) \quad (\text{A.31})$$

### A.2.c- Calcul de $Q_n^m$

Pour  $Q_n^m(\text{ch}\rho)$ , nous devons calculer des valeurs pour  $\text{ch}\rho$ , donc avec les fonctions de Legendre du plan complexe.

Quand  $\rho$  tend vers l'infini,  $\text{ch}\rho$  et  $\text{sh}\rho$  tendent vers la même valeur très grande et  $Q_n^m(\text{ch}\rho)$  s'amortit en  $k/\text{ch}^{n+1}\rho$ . Ce qui a pour conséquence que toutes les formules de récurrence qui permettent d'augmenter le degré  $n$  présentent des instabilités du type  $\infty-\infty$ . Nous ne pouvons donc utiliser des formules de récurrence que pour des petites valeurs de  $\rho$ . Nous n'autorisons le chemin suivant que pour  $\rho < 1,3$ .

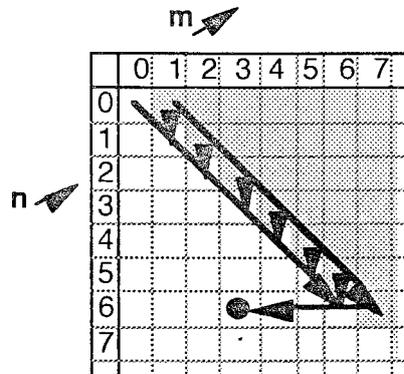


Figure A6 : Chemin utilisée pour le calcul des  $Q_n^m$

Nous partons des deux expressions suivantes :

$$Q_0^0(\text{ch}\rho) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\text{ch}\rho + 1}{\text{ch}\rho - 1} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$Q_0^1(\text{ch}\rho) = \frac{-1}{\text{sh}\rho} \quad (\text{A.33})$$

Nous incrémentons  $n$  et  $m$  et calculons au fur et à mesure les couples  $(n,n)$  et  $(n,n+1)$  jusqu'à atteindre la bonne valeur de  $n$  :

$$\begin{aligned} Q_n^r(\text{ch}\rho) &= \text{ch}\rho Q_{n-1}^r(\text{ch}\rho) + (2n-1)\text{sh}\rho Q_{n-1}^{r-1}(\text{ch}\rho) \\ Q_n^{n+1}(\text{ch}\rho) &= -\frac{2n}{\text{sh}\rho} Q_{n-1}^n(\text{ch}\rho) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

puis nous redescendons à la bonne valeur de  $m$  :

$$Q_n^r(\text{ch}\rho) = \frac{1}{(n-m)(n+m+1)} \left( 2(m+1) \frac{\text{ch}\rho}{\text{sh}\rho} Q_n^{m+1}(\text{ch}\rho) + Q_n^{m+2}(\text{ch}\rho) \right) \quad (\text{A.35})$$

Nous avons les mêmes étapes pour le calcul de  $Q_n^r(\text{ish}\rho)$ .

Nous rappelons que si  $Q_n^r(\text{ish}\rho)$  est imaginaire, nous prenons sa valeur divisée par  $i$ .

$$\begin{aligned} Q_0^0(\text{ish}\rho) &= -\text{argth}\left(\frac{1}{\text{sh}\rho}\right) \\ Q_0^1(\text{ish}\rho) &= \frac{1}{\text{ch}\rho} \\ Q_n^{n+1}(\text{ish}\rho) &= (-1)^n \frac{2n}{\text{ch}\rho} Q_{n-1}^n(\text{ish}\rho) \\ Q_n^n(\text{ish}\rho) &= (-1)^n \text{sh}\rho Q_{n-1}^n(\text{ish}\rho) + (2n-1) \text{ch}\rho Q_{n-1}^{n-1}(\text{ish}\rho) \\ Q_n^r(\text{ish}\rho) &= \frac{1}{(n-m)(n+m+1)} \left( 2(m+1) \frac{\text{sh}\rho}{\text{ch}\rho} Q_n^{m+1}(\text{ish}\rho) + Q_n^{m+2}(\text{ish}\rho) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Pour  $\rho > 1,3$ , nous allons utiliser un développement limité qui en fait converge très rapidement. Nous avons :

$$Q_n^r(\text{ch}\rho) = (-1)^r \frac{(n+m)!}{(2n+1)!!} \frac{\text{sh}^m \rho}{\text{ch}^{n+m+1} \rho} F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, \frac{1}{\text{ch}^2 \rho}\right) \quad (\text{A.37})$$

et

$$Q_n^r(\text{ish}\rho) = (-1)^{E(\frac{n}{2})+1+m} \frac{(n+m)!}{(2n+1)!!} \frac{\text{ch}^r \rho}{\text{sh}^{n+m+1} \rho} F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, \frac{-1}{\text{sh}^2 \rho}\right) \quad (\text{A.38})$$

( $\boxed{\text{Rq}}$  dans la formule précédente  $E(x)$  correspond à la fonction partie entière de  $x$ )  
La fonction  $F(a,b,c,x)$  est la série hypergéométrique de Gauss, sa définition est :

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{a}{1} \frac{b}{c} x + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+p-1) b(b+1)\dots(b+p-1)}{p! c(c+1)\dots(c+p-1)} x^p + \dots \quad (\text{A.39})$$

### A.2.d- Fonctions associées

En prenant les mêmes précautions au niveau de la stabilité de la récurrence, nous utilisons aussi les récurrences suivantes pour évaluer un certain nombre de fonctions associées aux polynômes de Legendre.

division par  $\sin\theta$  si  $m \neq 0$  :

$$\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{-1}{2m} (P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta) + (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)) \quad (\text{A.40})$$

dérivée de  $P_n^m(\cos\theta)$  par rapport à  $\theta$  :

$$\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = m \cos\theta \left( \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right) + P_n^{m+1}(\cos\theta) \quad (\text{A.41})$$

dérivée de  $Q_n^m(\text{ch}\rho)$  par rapport à  $\rho$  :

$$\frac{dQ_n^m(\text{ch}\rho)}{d\rho} = m \frac{\text{ch}\rho}{\text{sh}\rho} Q_n^m(\text{ch}\rho) + Q_n^{m+1}(\text{ch}\rho) \quad (\text{A.42})$$

dérivée de  $Q_n^m(\text{ish}\rho)$  par rapport à  $\rho$  :

$$\frac{dQ_n^m(\text{ish}\rho)}{d\rho} = m \frac{\text{sh}\rho}{\text{ch}\rho} Q_n^m(\text{ish}\rho) + Q_n^{m+1}(\text{ish}\rho) \quad (\text{A.43})$$

### A.2.e- Expression des premières fonctions de Legendre

Exprimons sous forme de tableau, les expressions des premières fonctions de Legendre  $P_n^m(\cos\theta)$  :

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3
0	1			
1	$\cos\theta$	$-\sin\theta$		
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$	$-3 \cos\theta \sin\theta$	$3 \sin^2\theta$	
3	$\frac{\cos\theta}{2}(5\cos^2\theta - 3)$	$-\frac{3}{2} \sin\theta (5 \cos^2\theta - 1)$	$15 \cos\theta \sin^2\theta$	$-15 \sin^3\theta$

### A.3- Expression des premiers harmoniques sphériques

Nous avons calculé les premiers harmoniques dans un repère cartésien (x, y et z) avec la normalisation de Adolf Schmidt.

Pour obtenir les harmoniques orthonormés sur la sphère unité, il suffit de multiplier ces expressions par :

$$\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}$$

	Valeur	Gradient x	Gradient y	Gradient z
$Y_0^0$	1	0	0	0
$Y_1^{-1}$	-y	0	-1	0
$Y_1^0$	z	0	0	1
$Y_1^1$	-x	-1	0	0
$Y_2^{-2}$	$\sqrt{3}xy$	$\sqrt{3}y$	$\sqrt{3}x$	0
$Y_2^{-1}$	$-\sqrt{3}yz$	0	$-\sqrt{3}z$	$-\sqrt{3}y$
$Y_2^0$	$\frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2)$	-x	-y	2z
$Y_2^1$	$-\sqrt{3}xz$	$-\sqrt{3}z$	0	$-\sqrt{3}x$
$Y_2^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - y^2)$	$\sqrt{3}x$	$-\sqrt{3}y$	0
$Y_3^{-3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(-y^3 + 3x^2y + 3z^2y)$	$-3\sqrt{\frac{5}{2}}xy$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(y^2 - x^2 - z^2)$	$-3\sqrt{\frac{5}{2}}zy$
$Y_3^{-2}$	$\sqrt{15}xyz$	$\sqrt{15}yz$	$\sqrt{15}xz$	$\sqrt{15}xy$
$Y_3^{-1}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(-y^3 - x^2y + 4z^2y)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}xy$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(-3y^2 - x^2 + 4z^2)$	$-4\sqrt{\frac{3}{2}}yz$
$Y_3^0$	$\frac{1}{2}(5z^3 - 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3$	$-\frac{9}{2}x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$-\frac{9}{2}y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\frac{3}{2}(5z^2 - 3z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$Y_3^1$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(-x^3 - xy^2 + 4xz^2)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(-3x^2 - y^2 + 4z^2)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}xy$	$-4\sqrt{\frac{3}{2}}xz$
$Y_3^2$	$\sqrt{\frac{15}{2}}(x^2z - y^2z)$	$\sqrt{15}xz$	$-\sqrt{15}yz$	$\frac{\sqrt{15}}{2}(x^2 - y^2)$
$Y_3^3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(x^3 - 3xy^2 - 3xz^2)$	$-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(x^2 - 3y^2 - 3z^2)$	$-3\sqrt{\frac{5}{2}}xy$	$-3\sqrt{\frac{5}{2}}xz$

## A.4- Angle solide et équations de Green

### A.4.a- Angle solide

L'angle solide  $\Omega_{\Sigma}(P)$  est l'angle à partir duquel on voit  $\Omega_i$  depuis le point P. Cela correspond à la surface de la projection de  $\Sigma$  sur une sphère de rayon unité centrée sur P.

Par définition cet angle vaut :

$$\Omega_{\Sigma}(P) = \iint_{\Sigma} d\Omega = \iint_{M \in \Sigma} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} d\Sigma \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{MP} \quad (\text{A.44})$$

Nous pouvons aussi l'exprimer sous la forme :

$$\Omega_{\Sigma}(P) = \iint_{M \in \Sigma} \vec{\nabla}_M \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} d\Sigma = \iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\Sigma \quad (\text{A.45})$$

A partir de cette définition, nous pouvons dire que :

$$\begin{aligned} P \in \Omega_i &\Rightarrow \Omega_{\Sigma}(P) = -4\pi \\ P \in \Omega_e &\Rightarrow \Omega_{\Sigma}(P) = 0 \\ P \in \Sigma &\Rightarrow \Omega_{\Sigma}(P) = -2\pi \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Cette dernière formule n'est valable que si le point P n'est pas un point anguleux.

### A.4.b- Fonctions de Green

Nous pouvons définir les fonctions de Green suivantes :

$$\begin{aligned} G(P, M) &= -\frac{1}{4\pi r} \\ \vec{\nabla}_M G(P, M) &= -\vec{\nabla}_P G(P, M) = -\frac{\overrightarrow{MP}}{4\pi r^3} = -\frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Ces deux fonctions vérifient l'équation de Laplace en tout point sauf à l'origine.

**A.4.c- 1<sup>ère</sup> formule de Green**

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions dérivables de  $\Omega_i$ , nous avons l'égalité suivante :

$$\iint_{M \in \Sigma} \varphi(M) \frac{\partial \psi(M)}{\partial n} d\Sigma = \iiint_{P \in \Omega_i} [\varphi(P) \Delta \psi(P) + \vec{\nabla} \varphi(P) \cdot \vec{\nabla} \psi(P)] d\Omega_i \quad (\text{A.48})$$

**A.4.d- 2<sup>de</sup> formule de Green**

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions dérivables de  $\Omega_i$ , nous avons l'égalité suivante :

$$\iint_{M \in \Sigma} \left[ \varphi(M) \frac{\partial \psi(M)}{\partial n} - \psi(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \right] d\Sigma = \iiint_{P \in \Omega_i} [\varphi(P) \Delta \psi(P) - \psi(P) \Delta \varphi(P)] d\Omega_i \quad (\text{A.49})$$

**A.4.e- 3<sup>ème</sup> formule de Green**

Soit  $\varphi_i$  une fonction harmonique de  $\Omega_i$  :

$$\iint_{M \in \Sigma} \left[ \varphi_i(M) \frac{\partial G(M,P)}{\partial_M n} - G(M,P) \frac{\partial \varphi_i(M)}{\partial n} \right] d\Sigma = v \varphi_i(P) \quad (\text{A.50})$$

$$\text{avec } v = -\frac{\Omega \Sigma(P)}{4\pi}$$

De cette relation, nous pouvons en déduire une autre :

Soit  $\varphi_e$  une fonction harmonique de  $\Omega_e$  qui s'amortit en au moins  $1/r$  quand  $r$  tend vers l'infini.

$$\iint_{M \in \Sigma} \left[ \varphi_e(M) \frac{\partial G(M,P)}{\partial_M n} - G(M,P) \frac{\partial \varphi_e(M)}{\partial n} \right] d\Sigma = (v-1) \varphi_e(P) \quad (\text{A.51})$$

## A.5- Potentiels et champs magnétostatiques

Les formules suivantes sont exprimées et définies en unités MKSA rationalisées.

Dans ces unités, le potentiel scalaire (que nous noterons  $V$ ) est exprimé en Ampère (A), l'induction magnétique (noté  $B$ ) est exprimée en Tesla (T), les distances sont en mètre (m), les aimantations sont en Ampère mètre carré ( $\text{Am}^2$ ) et leur densité volumique en Ampère par mètre ( $\text{Am}^{-1}$ ).

Nous utiliserons aussi la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  (Henry par mètre) (dimensionnellement du Tesla mètre par Ampère)

Soit un dipôle d'aimantation  $\vec{M}$  au point  $M$ , l'induction magnétique au point  $P$  s'exprime :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 3 \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right) \text{ avec } \vec{r} = \vec{MP} \quad (\text{A.52})$$

Dans le vide, nous avons une relation directe entre le champ et le potentiel scalaire :

$$\vec{B}(P) = -\mu_0 \vec{\nabla}_P(V(P)) = \mu_0 \vec{\nabla}_M(V(P)) \quad (\text{A.53})$$

d'où l'expression du potentiel scalaire d'un dipôle magnétique :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \text{ avec } \vec{r} = \vec{MP} \quad (\text{A.54})$$

Soit une distribution surfacique de dipôles normaux  $\tau$  (exprimée en A) sur la surface  $\Sigma$ , nous pouvons calculer le potentiel dû à cette répartition à partir de (A.54), mais aussi en introduisant  $G(M,P)$  la fonction de Green volumique.

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \tau \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} d\Sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \tau \frac{\vec{MP} \cdot \vec{n}}{r^3} d\Sigma = - \iint_{M \in \Sigma} \tau \frac{\partial G(M,P)}{\partial_M n} d\Sigma \quad (\text{A.55})$$

Au lieu d'aimantations et de dipôles magnétiques, nous pouvons utiliser une représentation en masses magnétiques  $m$  (exprimé en Am). Nous avons alors

l'expression :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{m}{r} \quad (\text{A.56})$$

et dans le cas d'une densité surfacique de masses magnétiques (en  $\text{Am}^{-1}$ ), nous obtenons :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \frac{m(M)}{r} d\Sigma = - \iint_{M \in \Sigma} m(M) G(M,P) d\Sigma \quad (\text{A.57})$$

Remarquons que si  $m$  est une densité volumique de masses magnétiques, nous avons la relation :

$$\Delta V(P) = -m(P) \quad (\text{A.58})$$

## A.6- Décomposition en valeurs singulières

### A.6.a- Définition des valeurs singulières

#### Théorème 1 [LAWSON]

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice quelconque  $m, n$  de rang  $k$ ,

il existe une matrice unitaire  $m, m$  (que nous nommerons  $\mathbb{P}$ ) et une matrice unitaire  $n, n$  (que nous nommerons  $\mathbb{Q}$ ) tel que :

$$\mathbb{P}^t \mathbb{A} \mathbb{Q} = \lambda \text{ ou encore } \mathbb{A} = \mathbb{P} \lambda \mathbb{Q}^t \quad (\text{A.59})$$

avec

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $\lambda_{11}$  matrice  $k, k$  non singulière et diagonale

Les éléments de  $\lambda$  situés dans l'axe de la diagonale de  $\lambda_{11}$  sont appelées valeurs singulières de la matrice  $\mathbb{A}$ , et si la matrice  $\mathbb{A}$  est symétrique, les valeurs singulières sont confondues avec les valeurs propres (et  $\mathbb{P}=\mathbb{Q}$ ).

### A.6.b- Résolution d'un système d'équations par les moindres carrés

#### Théorème 2 [LAWSON]

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice quelconque  $m, n$  de rang  $k$  se décomposant selon (A.59), soit  $B$  un vecteur de dimension  $m$ ,

notons le vecteur :

$$P^t B = K = \left( \begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \text{]} k \\ \text{]} m-k \end{array} \right\} \quad (\text{A.60})$$

alors le vecteur

$$X = Q \left( \begin{array}{c} \lambda_{11}^{-1} K_1 \\ Y \end{array} \right) \quad (\text{A.61})$$

avec  $Y$  vecteur quelconque de dimension  $n-k$  est la solution, au sens des moindres carrés de l'équation

$$\mathbb{A} X = B \quad (\text{A.62})$$

$\square$  Si  $k=m$ ,  $X$  est la solution exacte de  $\mathbb{A} X=B$

#### Variante

De manière parallèle, soit l'équation :

$$X^t \mathbb{A} = B^t \quad (\text{A.63})$$

avec  $X$  : vecteur colonne de  $m$  éléments

avec  $B$  : vecteur colonne de  $n$  éléments

avec  $\mathbb{A}$  : matrice de  $m, n$  éléments

soit une décomposition orthogonale de  $\mathbb{A}$  selon (A.59) (voir théorème 1) :

$$\text{si } K^t = B^t Q = (K_1^t, K_2^t) \quad (\text{A.64})$$

( $K_1$  correspond aux  $k$  premières lignes de  $K$ ),

si  $Y$  est une matrice quelconque,

La solution de  $X^t \mathbb{A} = B^t$  qui minimise  $\|B^t - X^t \mathbb{A}\|$  est :

$$X^t = \begin{pmatrix} K_1^t \lambda_{11} & Y^t \end{pmatrix} P^t \quad (\text{A.65})$$

Une forme plus compacte pour écrire cela est :

$$X^t = (B^t Q \lambda^{-1} + Y^t) P^t \quad (\text{A.65b})$$

en notant :

$$\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $Y$  un vecteur quelconque de dimension  $m$  dont les  $k$  premières lignes sont nulles.

## A.7- Réduction d'un vecteur aléatoire

### A.7.a- Théorème

Soit  $A$  un vecteur aléatoire de dimension  $n$ , de matrice de variance/covariance  $\mathbb{V}_A$  et de vecteur espérance  $M_A$ .

Alors, il existe  $\alpha$ , vecteur aléatoire de dimension  $n$  centré, de variance unité et d'éléments linéairement indépendants deux à deux, tel que :

$$A = \mathbb{E}_A \alpha + M_A \quad (\text{A.66})$$

avec  $\mathbb{E}_A$  la matrice triangulaire inférieure, décomposition de Cholesky de  $\mathbb{V}_A$  ( $\mathbb{V}_A = \mathbb{E}_A \mathbb{E}_A^t$ )

△ Linéairement indépendant deux à deux ne veut pas dire indépendant deux à deux mais seulement que la covariance entre chacun des éléments du vecteur  $\alpha$  est nulle.

△ Le développement qui suit n'exige pas que la matrice  $\mathbb{V}_A$  soit régulière, ni que  $A$  soit gaussien.

### A.7.b- Démonstration

Soit l'équation  $\mathbb{E}_A X + M_A = A$ , nous pouvons la transformer en :

$$\mathbb{E}_A X = (A-M_A) \quad (\text{A.67})$$

Nous avons alors une équation de la forme (A.62) avec  $\mathbb{E}_A$  de dimension  $n$ ,  $n$  et d'ordre  $k$ . En décomposant  $\mathbb{E}_A$  en valeurs singulières selon (A.59), par le théorème 2, nous avons :

$$X = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{-1} K_1 \\ Y \end{pmatrix} \quad (\text{A.68})$$

avec  $K_1$  tel que :

$$\mathbb{P}^t (A-M_A) = K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} k \\ n-k \end{matrix} \quad (\text{A.69})$$

et

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous allons choisir pour  $Y$ , un vecteur aléatoire quelconque de variables centrées, réduites et indépendantes de tous les autres éléments.

Calculons les espérances et variances de  $X$  :

#### Espérance de $X$

Nous savons que si  $X$  est un vecteur aléatoire de dimension  $n$  d'espérance  $M$ , et  $\mathbb{A}$  une matrice de dimension  $m,n$ , alors l'espérance du vecteur aléatoire  $\mathbb{A}X$  est  $\mathbb{A}M$  [SAPORTA].

L'espérance de  $A-M_A$  est le vecteur nul  $O_n$  donc l'espérance de  $K$  est  $O_n$  et de  $K_1$  est  $O_k$

Comme l'espérance de  $Y$  est  $O_{n-k}$ , l'espérance de  $X$  est  $O_n$

#### Variance de $X$

Nous savons aussi que si  $X$  est un vecteur aléatoire de dimension  $n$  et de matrice de variance/covariance  $\mathbb{V}$ , si  $\mathbb{A}$  est une matrice de dimension  $m,n$ , alors la variance du vecteur aléatoire  $\mathbb{A}X$  est  $\mathbb{A}\mathbb{V}\mathbb{A}^t$  [SAPORTA].

La variance de  $A-M$  est  $\mathbb{V}_A$  car  $M$  est constant.

La variance de  $K$  est alors  $\mathbb{P}^t \mathbb{V}_A \mathbb{P}$ , d'où, en développant :

$$\mathbb{V}_K = \mathbb{P}^t \mathbb{E}_A \mathbb{E}_A^t \mathbb{P}$$

$$\begin{aligned}
&= P^t P \lambda Q^t Q \lambda P^t P \\
&= \lambda^2 \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.70}$$

L'élément  $ij$  d'une matrice de variance/covariance correspond à l'expression :

$$E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)] \quad (\overline{\text{Rq}}) \quad E(\cdot) \text{ voulant dire espérance de...}$$

Nous pouvons donc en déduire que la variance de  $K_1$  est  $\lambda^2_{11}$ .

Nous en déduisons la variance de  $X$  :

$$Q \begin{pmatrix} V_{X11} & V_{X12} \\ V_{X12}^t & V_{X22} \end{pmatrix} Q^t \tag{A.71}$$

avec :

$$\begin{aligned}
V_{X11} &= \lambda_{11}^{-1} \lambda_{11}^2 \lambda_{11}^{-1} \\
&= I
\end{aligned}$$

$V_{X12} = 0$  et  $V_{X22} = I$  car nous avons choisi pour  $Y$  est un ensemble de variables aléatoires centrées, réduites et indépendantes, donc :

$$V_X = Q I Q^t = I \tag{A.72}$$

La matrice de variance / covariance de  $X$  est l'unité.

Vérification que  $E_A X + M_A = A$

Prouvons que  $K_2$  est nul :

La variance de  $A$  est  $V_A$ , ainsi que la variance de  $A - M_A$ .

La variance de  $K$  est alors  $P^t E_A E_A^t P$ , qui comme nous l'avons vu plus haut vaut :

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que la variance de  $K_2$  (élément en bas à droite) est nulle.

L'espérance de  $K$  vaut  $0_{1r}$ , donc l'espérance de  $K_2$  vaut  $0_{n-k}$ .

Une variable d'espérance nulle et de variance nulle est nulle, donc  $K_2$  est nulle.

Calculons maintenant  $\mathbb{E}_A X+M$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_A X+M &= \mathbb{P} \lambda Q^t X+M_A \\
 &= \mathbb{P} \lambda Q^t Q \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{-1} K_1 \\ Y \end{pmatrix} +M_A \\
 &= \mathbb{P} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^{-1} K_1 \\ Y \end{pmatrix} +M_A \\
 &= \mathbb{P} \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \end{pmatrix} +M_A \\
 &= \mathbb{P} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} +M_A
 \end{aligned} \tag{A.73}$$

(car nous avons vu que  $K_2=0_{n-k}$ )

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{P} \mathbb{P}^t (A-M_A) +M_A \\
 &= A
 \end{aligned}$$

### Conclusion

Nous avons exhibé un  $\alpha$  (le vecteur  $X$ ) tel que :

$$\begin{aligned}
 A &= \mathbb{E}_A \alpha + M_A \\
 \text{et } M_\alpha &= 0 \text{ et } \mathbb{V}_\alpha = \mathbb{I}
 \end{aligned} \tag{A.74}$$

## B.- Justification des formules

### B.1- Harmoniques sphériques

#### B.1.a- Expression du potentiel scalaire en fonction des harmoniques sphériques

Dans une représentation des sources uniquement dipolaires, en reprenant (2.2), nous avons  $\vec{B}$  qui vérifie l'équation :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{M \in \Omega_i} \left( 3 \frac{\langle \vec{m}(M), \vec{n} \rangle \vec{n}}{d^3} - \frac{\vec{m}(M)}{d^3} \right) d\Omega \quad (\text{B.1})$$

$\triangle$  Dans un souci de clarté du développement nous avons changé légèrement les notations. Nous appelons  $d$  la distance entre  $M$  et  $P$  et  $\vec{n}$  le vecteur normé dirigé de  $M$  vers  $P$ .

Comme, en l'absence de sources,

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} V \quad (\text{A.53})$$

nous pouvons intégrer (B.1) par rapport au point  $P$  et nous avons alors :

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M), \frac{\vec{n}}{d^2} \right\rangle d\Omega \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M), \vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{d} \right) \right\rangle d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M), \vec{\nabla}_M \left( \frac{1}{d} \right) \right\rangle d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$\square$  (Nous avons supposé que  $V$  s'annule à l'infini pour déterminer la constante d'intégration).

Soit  $(r, \theta, \varphi)$  les coordonnées de  $P$  et  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  les coordonnées du point  $M$  dans le repère sphérique défini en A.1, nous avons :

$$P \begin{pmatrix} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} x_0 = r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ y_0 = r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \\ z_0 = r_0 \cos \theta_0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$d^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \\ = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \chi$$

$$\text{avec } \cos \chi = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{B.3})$$

Or nous pouvons développer  $1/d$  en fonction des polynômes de Legendre et de l'angle  $\chi$  (voir par exemple [ROBIN]).

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \chi) \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \quad (\text{B.4})$$

$\triangle$  Ce développement n'est convergent que si et seulement si  $r_0 < r$ .

Nous avons une propriété importante des polynômes de Legendre [ROBIN] qui est :

$$P_n(\cos \chi) = \sum_{m=-n}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_0) \begin{cases} 2 \cos(m\varphi) \cos(m\varphi_0) & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ 2 \sin(m\varphi) \sin(m\varphi_0) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Si nous posons :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\varphi) & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} \sin(m\varphi) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nous avons alors :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \quad (\text{B.7})$$

expression que nous rentrons dans l'équation (B.2), que nous réarrangeons pour donner :

$$\begin{aligned}
 V(P) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M) \cdot \vec{\nabla}_M \left( \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \right) \right\rangle d\Omega \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M) \cdot \vec{\nabla}_M \left( \frac{1}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \right) \right\rangle d\Omega \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M) \cdot \vec{\nabla}_M \left( r_0^n Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \right) \right\rangle d\Omega
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Comme  $Y_0^0$  est constant, son gradient est nul, et nous pouvons exprimer  $V$  en commençant à l'indice 1 :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M) \cdot \vec{\nabla}_M \left( r_0^n Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \right) \right\rangle d\Omega \tag{B.9}$$

qui est l'expression recherchée.

### B.1.b- Base des champs magnétiques

Prouvons que l'ensemble des termes du potentiel scalaire créé par les harmoniques sphériques élémentaires sur la surface  $\Sigma$  forme une base orthogonale des champs magnétiques de  $\Omega_e$ .

L'expression du potentiel sur  $\Sigma$  correspondant à l'harmonique  $Y_n^m$  est :

$$V_{nm} = \frac{1}{4\pi r_0^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \tag{B.10}$$

(en notant  $r_0$  le rayon de la sphère  $\Omega_i$ ).

Calculons l'expression :

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} V_{nm} V_{n'm'} d\Sigma &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \iint_{\Sigma} \frac{1}{r_0^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{1}{r_0^{n'+1}} Y_{n'}^{m'}(\theta, \varphi) r_0^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{r_0^{n+n'}} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \sqrt{\frac{(n'-m')!}{(n'+m')!}} \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) P_{n'}^{m'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos m\varphi \\ 1 \\ \sqrt{2}\sin m\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos m'\varphi \\ 1 \\ \sqrt{2}\sin m'\varphi \end{pmatrix} d\varphi
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Premièrement :

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos m\varphi \\ 1 \\ \sqrt{2}\sin m\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos m'\varphi \\ 1 \\ \sqrt{2}\sin m'\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \text{si } m \neq m' \\ 2\pi & \text{si } m = m' \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

et deuxièmement, si  $m=m'$ , nous avons une propriété des fonctions de Legendre qui est (voir [ROBIN]) :

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \delta_{nn'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{B.13}$$

Donc nous avons en définitive :

$$\iint_{\Sigma} V_{nm} V_{n'm'} d\Sigma = \frac{1}{4\pi(2n+1)} \frac{1}{r_0^{2n}} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \tag{B.14}$$

Réciproquement, si  $V$  est un potentiel scalaire généré par une source quelconque de  $\Omega_i$ , nous avons :

$$V \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n a_{nm} V_{nm}(\theta, \varphi) \tag{B.15}$$

et

$$\iint_{\Sigma} V V_{nm} d\Sigma = \frac{a_{nm}}{4\pi(2n+1)r_0^{2n}} \tag{B.16}$$

Si la sphère  $\Sigma$  est la frontière entre  $\Omega_e$  et  $\Omega_i$ , nous pouvons considérer que les fonctions :

$$\frac{1}{r^{n+1}} Y_n^\pi(\theta, \varphi)$$

forment une base orthogonale des potentiels magnétiques  $V$  de  $\Omega_e$  et que l'expression :

$$\iint_{\Sigma} V_1 V_2 d\Sigma$$

est un produit scalaire de l'espace vectoriel des potentiels magnétiques de  $\Omega_e$  et, par extension, de tous les champs magnétiques de  $\Omega_e$  (toujours dans l'hypothèse où toutes les sources sont dans  $\Omega_i$ ) bien que l'intégrale ne se fasse que sur  $\Sigma$ , interface entre  $\Omega_e$  et  $\Omega_i$ .

### B.1.c- Coefficients harmoniques dans le cas d'un dipôle isolé dans une sphère

Reprenons l'expression (2.14) des coefficients  $a_{nm}$  et supposons que nous avons un dipôle unique positionné en  $M$ .

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \iiint_{M \in \Omega_i} \left\langle \vec{m}(M) \cdot \vec{\nabla}_M (r_0^n Y_n^\pi(\theta_0, \varphi_0)) \right\rangle d\Omega \\ &= \vec{M}(M) \cdot \vec{\nabla}_M (r_0^n Y_n^\pi(\theta_0, \varphi_0)) \end{aligned} \quad (B.17)$$

Pour avoir une idée de l'amplitude des coefficients, nous allons calculer

$$\sum_{m=-n}^n a_{nm}^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-n}^n a_{nm}^2 &= \sum_{m=-n}^n \left[ \vec{M} \cdot \vec{\nabla}_M (r_0^n Y_n^\pi(\theta_0, \varphi_0)) \right]^2 \\ &= \sum_{m=-n}^n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_i M_j \left[ \vec{\nabla}_M (r_0^n Y_n^\pi) \right]_i \left[ \vec{\nabla}_M (r_0^n Y_n^\pi) \right]_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_i M_j \sum_{m=-n}^n \left[ \vec{\nabla}_M (r_0^n Y_n^\pi) \right]_i \left[ \vec{\nabla}_M (r_0^n Y_n^\pi) \right]_j \end{aligned} \quad (B.18)$$

En reprenant (B.5) avec des notations légèrement modifiées :

$$\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) = P_n(\cos \chi) \quad (\text{B.5.b})$$

avec

$$\cos \chi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

d'où :

$$\sum_{m=-n}^n r_1^m Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) r_2^m Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) = r_1^m r_2^m P_n(\cos \chi) \quad (\text{B.19})$$

Raisonnons en coordonnées sphériques. Si on définit les trois vecteurs de base  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  comme étant les vecteurs normés colinéaires à  $dr$ ,  $r d\theta$  et  $r \sin \theta d\varphi$ , et si on pose :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_r} &= \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial e_\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial e_\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

En reprenant (A.3) et (A.8), nous avons pour une grandeur  $X$  :

$$\vec{\nabla}_M(X) = \frac{\partial X}{\partial e_r} \vec{e}_r + \frac{\partial X}{\partial e_\theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial X}{\partial e_\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{B.21})$$

En partant des formules de récurrences des polynômes de Legendre, il est facile de montrer que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 \quad P_n(1) &= 1 \\ P'_n(1) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ P''_n(1) &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

dérivons l'égalité (B.19) par rapport au point  $M_1 (r_1, \theta_1, \varphi_1)$  :

$$\sum_{m=-n}^n \left[ \frac{\partial}{\partial e_i} (r_1^m Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)) r_2^m Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) \right] = \frac{\partial}{\partial e_i} (r_1^m r_2^m P_n(\cos \chi)) + r_1^m r_2^m P'_n(\cos \chi) \frac{\partial \cos \chi}{\partial e_i} \quad (\text{B.23})$$

puis par rapport au point  $M_2 (r_2, \theta_2, \varphi_2)$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-n}^n \left[ \frac{\partial}{\partial e_i} (r_1^n Y_n^\pi(\theta_1, \varphi_1)) \frac{\partial}{\partial e_j} (r_2^n Y_n^\pi(\theta_2, \varphi_2)) \right] = \\
\frac{\partial}{\partial e_i} (r_1^n) \frac{\partial}{\partial e_j} (r_2^n) P_n(\cos \chi) \\
+ \frac{\partial}{\partial e_i} (r_1^n) r_2^n P'_n(\cos \chi) \frac{\partial \cos \chi}{\partial e_j} + r_1^n \frac{\partial}{\partial e_j} (r_2^n) P'_n(\cos \chi) \frac{\partial \cos \chi}{\partial e_i} + \\
+ r_1^n r_2^n P''_n(\cos \chi) \frac{\partial \cos \chi}{\partial e_i} \frac{\partial \cos \chi}{\partial e_j} + r_1^n r_2^n P'_n(\cos \chi) \frac{\partial^2 \cos \chi}{\partial e_i \partial e_j}
\end{aligned} \quad (B.24)$$

Si maintenant, nous posons  $M_1 = M_2$ , alors :

$$\left( \begin{array}{l} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right) \text{ et } \cos \chi = 1 \quad (B.25)$$

et nous pouvons calculer les différentes expressions qui interviennent :

$$\frac{\partial}{\partial r} r^n = nr^{n-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\cos \chi) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1} \frac{\partial (\cos \chi)}{\partial \theta_1} &= \frac{1}{r_1} [-\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\
&= 0 \text{ si } \cos \chi = 1
\end{aligned} \quad (B.26)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1 \sin \theta_1} \frac{\partial (\cos \chi)}{\partial \varphi_1} &= \frac{-1}{r_1} \sin \theta_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\
&= 0 \text{ si } \cos \chi = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1 r_2} \frac{\partial^2 (\cos \chi)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= \frac{1}{r_1 r_2} [\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\
&= \frac{1}{r_1^2} \text{ si } \cos \chi = 1 \text{ et } r_1 = r_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2} \frac{\partial^2 (\cos \chi)}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} &= \frac{1}{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
&= \frac{1}{r_1^2} \text{ si } \cos \chi = 1 \text{ et } r_1 = r_2
\end{aligned} \quad (B.27)$$

$$\frac{1}{r_1 r_2 \sin \theta_2} \frac{\partial^2 (\cos \chi)}{\partial \theta_1 \partial \varphi_2} = \frac{1}{r_1 r_2} \cos \theta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$= 0 \text{ si } \cos \chi = 1$$

Posons maintenant pour simplifier :

$$m_{ij} = \sum_{m=-n}^n \left[ \vec{\nabla}_M(r_0^n Y_n^m) \right]_i \left[ \vec{\nabla}_M(r_0^n Y_n^m) \right]_j \quad (\text{B.28})$$

alors nous aurons :

$$m_{11} = m_{rr} = n^2 r_0^{2n-2} = (nr_0^{n-1})^2$$

$$m_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$m_{22} = m_{\theta\theta} = m_{33} = m_{\varphi\varphi} = \left[ \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} r_0^{n-1} \right]^2 \quad (\text{B.29})$$

nous en déduisons :

$$\sum_{m=-n}^n a_{\mathbf{m}}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_i M_j m_{ij}$$

$$= M_r^2 (nr_0^{n-1})^2 + (M_\theta^2 + M_\varphi^2) \left( \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} r_0^{n-1} \right)^2$$

$$= (r_0^{n-1})^2 \left[ n^2 M_r^2 + \frac{n(n+1)}{2} (M_\theta^2 + M_\varphi^2) \right] \quad (\text{B.30})$$

avec :

$$\vec{M} = M_r \vec{e}_r + M_\theta \vec{e}_\theta + M_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{B.31})$$

Si maintenant, on suppose que l'aimantation du dipôle est aléatoire, d'espérance du module  $M$ , et d'orientation indifférente, les composantes  $M_r$ ,  $M_\theta$  et  $M_\varphi$  sont

linéairement indépendantes et auront un même écart-type  $\frac{M}{\sqrt{3}}$ .

Nous pouvons en déduire l'espérance de la somme des carrés des composantes  $a_{\mathbf{m}}$ .

$$\sum_{m=-n}^n a_{\mathbf{m}}^2 = n(2n+1) \left( r_0^{n-1} \frac{M}{\sqrt{3}} \right)^2 \quad (\text{B.32})$$

Par un calcul direct, nous pouvons aussi démontrer que les termes  $a_{\mathbf{m}}$  sont indépendants et ont même variance pour un degré  $n$  donné. Nous en déduisons que l'écart-type des coefficients  $a_{\mathbf{m}}$  est :

$$\sigma_{a_{rm}} = r_0^{n-1} M \sqrt{\frac{n}{3}} \quad (\text{B.33})$$

car il y a  $2n+1$  termes  $a_{rm}$  pour un  $n$  donné.

Cette expression est valable pour un dipôle isolé situé à une distance  $r_0$  de l'origine du développement.

Comme les valeurs des aimantations pour deux positions différentes du dipôle sont indépendantes, nous pouvons généraliser ce résultat à un dipôle isolé disposé aléatoirement dans une sphère de rayon  $r_0$ . Il suffit d'intégrer le résultat précédent sur le volume de la sphère.

Nous avons pour un dipôle isolé :

$$\sigma_{a_{rm}}^2 = \frac{n r_0^{2n-2}}{3} M^2 \quad (\text{B.33b})$$

Nous aurons maintenant :

$$\begin{aligned} \sigma_{a_{rm}}^2 &= \frac{M^2}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{n r^{2n-2}}{3} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{n}{2n+1} r^{2n-2} M^2 \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

## B.2- Intégrales surfaciques

### B.2.a- Précision de l'interpolation

⊕ Nous supposons dans ce paragraphe que la grandeur surfacique utilisée est la répartition de masses magnétiques. Le calcul du potentiel est alors plus simple et la démonstration plus claire.

Nous allons d'abord trouver un développement limité en harmoniques sphériques de l'induction créée par les masses magnétiques sur une facette, laquelle permettra de trouver la relation souhaitée vis à vis de la précision.

Nous finirons en prouvant que la décomposition des masses sur ce développement est équivalente à l'utilisation d'une base polynomiale pour interpoler.

Soit une facette triangulaire, lié à un repère sphérique, avec l'origine au centre de gravité  $O$  du triangle,

soit un point P dans l'espace, repéré par ses coordonnées sphériques  $\{r_0, \varphi_0, \theta_0\}$ ,  
 soit un point M du triangle, repéré par ses coordonnées polaires  $\{r, \varphi\}$ ,

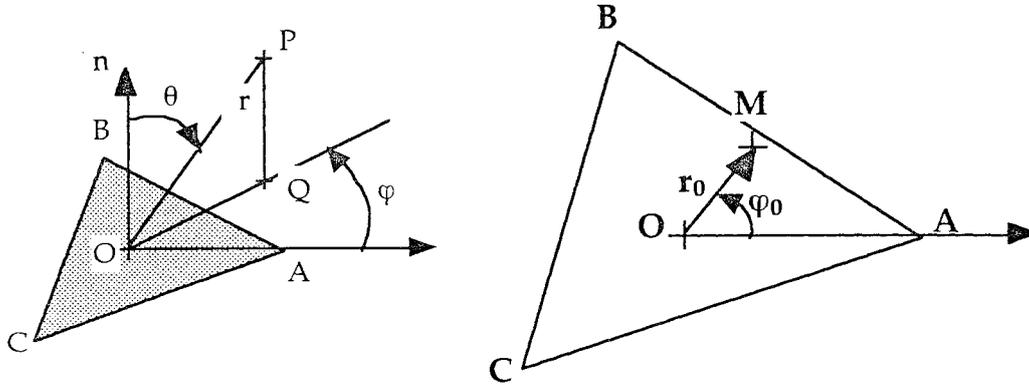


figure B.1 : Description des repères utilisés

soit  $m(M)$ , la répartition de masses magnétiques sur la facette, le potentiel scalaire magnétique s'exprime en P par l'expression :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{M \in \Sigma} \frac{m(M)}{d} d\Sigma \quad (\text{A.57})$$

avec d correspondant à la distance MP.

Si nous exprimons cette équation dans les repères définis ci-dessus, nous avons :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\varphi_0)} \frac{m(r_0, \varphi_0) r_0 dr_0 d\varphi_0}{d(r_0, \varphi_0, r, \varphi, \theta)} \quad (\text{B.35})$$

L'inverse de la distance  $1/d$  peut s'exprimer par la relation (B.7) (avec  $\theta_0 = \pi/2$ ) qui permet, dans le cas où  $r > r_0$  d'exprimer le potentiel V sous la forme :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\varphi_0)} \frac{m(r_0, \varphi_0)}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n Y_n^m\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right) Y_n^m(\theta, \varphi) r_0 dr_0 d\varphi_0 \quad (\text{B.36})$$

En fait

$$P_n^m(0) = 0 \text{ si } (n-m) \text{ impair}$$

$$P_n^m(0) = \frac{(-1)^{\frac{n+m}{2}} (n+m-1)!!}{2^{\frac{n-m}{2}} \left(\frac{n-m}{2}\right)!} \text{ si } (n-m) \text{ pair} \quad (\text{B.37})$$

Après quelques manipulations mathématiques supplémentaires (dont une permutation des signes sommes et intégrales), nous réussissons à factoriser les termes dépendant de M des termes dépendant de P sous forme d'un développement limité :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \left( k_{n,l} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\varphi_0)} m(r_0, \varphi_0) r_0^n \begin{matrix} \cos m\varphi_0 \\ \sin m\varphi_0 \end{matrix} r_0 dr_0 d\varphi_0 \right) \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \quad (\text{B.38})$$

Dans cette expression, si n-l est pair, on prend m=l et l'expression en cosinus. En revanche, si n-l est impair, on prend m=l-1 et l'expression en sinus. Ceci n'est qu'un artifice pour éviter une somme pour m de -n à n avec la moitié des termes nuls.  $k_{n,l}$  est un coefficient multiplicatif dépendant de n et l.

Pour chaque facette, nous avons obtenu un développement limité qui donne son effet à distance par puissance de  $1/r$  croissante. Contrairement aux harmoniques sphériques, nous avons n+1 paramètres non nuls qui s'amortissent en  $1/r^{n+1}$  (et non 2n+1 paramètres). Ce développement correspond à la projection de m(M) sur les fonctions de bases de la facette :

$$r_0^n \begin{matrix} \cos m\varphi_0 \text{ si } n-l \text{ pair} \\ \sin m\varphi_0 \text{ si } n-l \text{ impair} \end{matrix} \quad (\text{B.39})$$

Cherchons le lien entre ce développement et les fonctions de base polynomiales classiquement utilisées en éléments finis. Il serait intéressant d'établir les relations entre ces deux modes de représentation, et en particulier, de vérifier par ce développement, la validité d'une fonction d'interpolation polynomiale en fonction de la distance.

Le problème est :

soit une décomposition de m(M) sur la facette en fonctions polynomiales (orthogonales sur la facette) de degré au plus k (notés  $u_k(m)$ ), démontrons que le champ généré par l'erreur d'interpolation  $\delta u = m - u_k(m)$  décroît en  $1/r^{k+1}$ .

Par définition  $\delta u$  appartient à l'espace complémentaire de  $\{u_k\}$ , ensemble des polynômes orthogonaux de degré au plus k, donc en appelant T la facette :

$$\forall u_p \in \{u_k\} \iint_T \delta u u_p dx dy = 0 \tag{B.40}$$

Si nous démontrons que

$$\forall n \leq k \quad \forall l \quad 0 \leq l \leq n \quad b_{n,l} = r_0^n \begin{cases} \cos m\varphi_0 & \text{si } n-l \text{ pair} \\ \sin m\varphi_0 & \text{si } n-l \text{ impair} \end{cases} \text{ est un polynôme en } x,y \text{ de degré au plus } k$$

nous aurons alors

$$\forall u_p \in \{u_k\} \forall n,l \iint_T \delta u b_{n,l} r_0 dr_0 d\varphi_0 = 0 \tag{B.41}$$

et donc nous aurons démontré que  $\delta u$  s'amortit en au moins  $1/r^{k+1}$ .

Remarquons en préliminaire que les termes que nous utilisons qui sont de la forme  $r_0^n \cos(m\varphi_0)$  ou  $r_0^n \sin(m\varphi_0)$  sont les suivants en fonction de  $n$  et  $m$  ( $n-m$  pair) :

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	●				
1		●			
2	●		●		
3		●		●	
4	●		●		●

Figure B2 : Termes non nuls des harmoniques sphériques sur un triangle

Si  $n=m=0$ ,  $b_{n,m} = 1$  (polynôme en  $x,y$  de degré au plus 0)

Si  $m=0$ ,  $b_{n,m} = r^n$ . Parce que  $n$  est pair,  $r^n$  est un polynôme de degré  $n$ .

Supposons que  $r_0^n \cos(m\varphi_0)$  et  $r_0^n \sin(m\varphi_0)$  sont deux polynômes de degré au plus  $n$ , alors calculons  $r_0^{n+1} \cos((m+1)\varphi_0)$  et  $r_0^{n+1} \sin((m+1)\varphi_0)$  :

$$r_0^{n+1} \cos((m+1)\varphi_0) = r_0 \cos\varphi_0 r_0^n \cos(m\varphi_0) - r_0 \sin\varphi_0 r_0^n \sin(m\varphi_0)$$

$$\begin{aligned}
&= xr_0^n \cos(m\varphi_0) - yr_0^n \sin(m\varphi_0) \\
r_0^{n+1} \sin((m+1)\varphi_0) &= r_0 \sin\varphi_0 r^n \cos(m\varphi_0) + r \cos\varphi_0 r^n \sin(m\varphi_0) \\
&= yr_0^n \cos(m\varphi_0) + xr_0^n \sin(m\varphi_0)
\end{aligned} \tag{B.42}$$

nous avons donc deux polynômes de degré au plus  $n+1$

Nous avons donc réussi à démontrer que si nous interpolons les masses magnétiques sur une base polynomiale complète de degré inférieur ou égal à  $n$ , l'erreur d'interpolation s'amortira au moins comme  $1/r^{n+1}$ .

$\square$  Le même calcul peut être développé dans un repère cartésien plutôt qu'un repère sphérique et donne une représentation du même type, avec le même nombre de paramètres. Il est à remarquer que contrairement au développement multipolaire d'un volume en coordonnées cartésiennes, celui-ci (qui n'est qu'un développement sur une surface plane) n'a pas de termes redondants et liés.

### B.3- Amélioration de la base

#### B.3.a- Démonstration du produit scalaire

Prouvons que nous avons un produit scalaire.

##### Symétrie

Calculons  $\langle v_j, v_i \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle v_j, v_i \rangle &= V \iint_{M \in \Sigma} v_j w_i d\Sigma \\
&= V \iint_{M \in \Sigma} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} d\Sigma = V \iint_{M \in \Sigma} \varphi_j \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{n} d\Sigma \\
&= V \iiint_{P \in \Omega_i} \nabla \cdot (\varphi_j \vec{\nabla} \varphi_i) d\Omega = V \iiint_{P \in \Omega_i} [\vec{\nabla} \varphi_j \cdot \vec{\nabla} \varphi_i + \varphi_j \Delta \varphi_i] d\Omega \\
&= V \iiint_{P \in \Omega_i} \vec{\nabla} \varphi_j \cdot \vec{\nabla} \varphi_i d\Omega
\end{aligned} \tag{B.43}$$

La formule finale est parfaitement symétrique, donc  $\langle v_j, v_i \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$

Linéarité

Calculons  $\langle v_i, \lambda v_j \rangle$  avec  $\lambda$  réel :

$$\begin{aligned} \langle v_i, \lambda v_j \rangle &= V \iint_{M \in \Sigma} v_i \lambda w_j d\Sigma \\ &= \lambda V \iint_{M \in \Sigma} v_i w_j d\Sigma \\ &= \lambda \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Calculons  $\langle v_i, (v_j + v_k) \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle v_i, (v_j + v_k) \rangle &= \langle (v_j + v_k), v_i \rangle \\ &= V \iint_{M \in \Sigma} (v_j + v_k) w_i d\Sigma \\ &= V \iint_{M \in \Sigma} v_j w_i d\Sigma + V \iint_{M \in \Sigma} v_k w_i d\Sigma \\ &= \langle v_j, v_i \rangle + \langle v_k, v_i \rangle \\ &= \langle v_i, v_j \rangle + \langle v_i, v_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Positivité

Prouvons que  $\langle v_i, v_i \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_i \rangle &= V \iint_{M \in \Sigma} v_i w_i d\Sigma \\ &= V \iiint_{P \in \Omega_i} \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_i d\Omega \\ &= V \iiint_{P \in \Omega_i} |\vec{\nabla} \varphi_i|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Nous obtenons l'intégrale sur un volume d'une quantité toujours positive, donc elle est toujours positive.

$$\begin{aligned}
\langle v_i, v_i \rangle &= 0 \\
&\Leftrightarrow V \iiint_{P \in \Omega_i} \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_i \, d\Omega = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall P \in \Omega_i \quad \vec{\nabla} \varphi_i(P) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} / \forall P \in \Omega_i \quad \varphi_i(P) = c
\end{aligned}
\tag{B.47}$$

or seule  $c=0$  est compatible avec la condition

$$\iint_{M \in \Sigma} v_i \, d\Sigma = 0
\tag{4.5}$$

donc

$$\langle v_i, v_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall M \in \Sigma \quad v_i(M) = 0
\tag{B.48}$$

Nous avons donc un produit scalaire de  $v$ .

### B.3.b- Calcul de la réaction du matériau

#### Géométrie du problème

Soit une pièce  $\Omega_i$  homogène et isotrope de perméabilité relative  $\mu_r$  et de frontière  $\Sigma$ . Nous allons calculer les sources magnétiques induites dans cette pièce par une aimantation rigide à l'intérieur du modèle et par un champ extérieur. Nous pourrions alors estimer l'effet de noyau dû à des anomalies de fortes perméabilités sur des sources magnétiques.

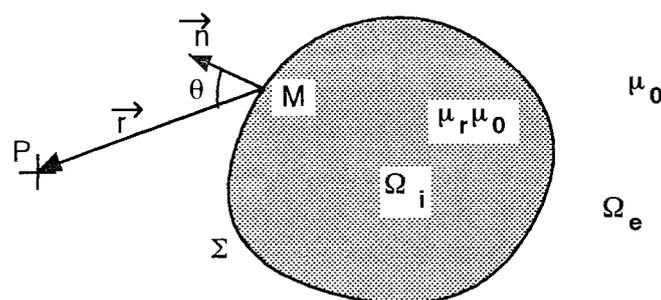


Figure B.3 : Géométrie du problème

#### Calcul de la continuité aux frontières

Soit  $\vec{H}$  le champ magnétique et  $\vec{B}$  l'induction magnétique, nous avons dans tout l'espace les relations suivantes :

$$\left( \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \mu_0 \vec{m} \end{array} \right) \quad (\text{B.49})$$

$\vec{m}$  correspond à l'aimantation permanente ou "rigide" de l'objet.

Nous pouvons utiliser un potentiel réduit et répartir le champ en deux effets : la source qui correspond à l'excitation du système dans le vide et la réaction du corps de forte perméabilité à cette excitation.

On pose :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}' \quad (\text{B.50})$$

avec  $\vec{H}_0$  solution du système (H<sub>0</sub>) des sources dans le vide :

$$\left( \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 + \mu_0 \frac{\vec{m}}{\mu_r} \\ \nabla \wedge \vec{H}_0 = \vec{j} \end{array} \right) \quad (\text{B.51})$$

alors  $\vec{H}'$  obéit au système d'équations suivant (H') correspondant à la réaction du matériau (différence de (B.49) et (B.51)) :

$$\left( \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B}' = 0 \\ \vec{B}' = \mu_0 \mu_r \vec{H}' + (\mu_r - 1) \vec{B}_0 \\ \nabla \wedge \vec{H}' = \vec{0} \end{array} \right) \quad (\text{B.52})$$

On peut poser le potentiel scalaire en fonction du champ magnétique, partout où il n'y a pas de courant (il faut en particulier faire attention pour V et V<sub>0</sub>) :

$$\left( \begin{array}{l} \vec{H}' = -\nabla V' \\ \vec{H}_0 = -\nabla V_0 \\ \vec{H} = -\nabla V \end{array} \right) \quad (\text{B.53})$$

Nous allons supposer le problème des sources résolu (H<sub>0</sub>) et nous concentrer

sur la résolution du système H'.

En fonction des équations ci-dessus nous avons alors le système suivant :

$$\left( \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_i \Delta V'_i = 0 \\ \text{dans } \Omega_e \Delta V'_e = 0 \\ \text{sur } \Sigma \left( \begin{array}{l} V'_i = V'_e \\ \mu_r \frac{\partial V'_i}{\partial n} - \frac{\partial V'_e}{\partial n} = (\mu_r - 1) \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{n}}{\mu_0} \\ = (\mu_r - 1) \left( \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{\mu_r} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (B.54)$$

Cherchons à exprimer le potentiel V'

Appliquons d'abord la troisième formule de Green dans  $\Omega_e$

$$\iint_{M \in \Sigma} \left( V'_e \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial V'_e}{\partial n} G \right) d\Sigma = (v-1)V'_e \quad (A.51)$$

puis dans  $\Omega_i$ .

$$\iint_{M \in \Sigma} \left( V'_i \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial V'_i}{\partial n} G \right) d\Sigma = vV'_i \quad (A.50)$$

Sur la surface, posons  $V'_e(M) = V'_i(M) = V'(M)$

(A.51) moins  $\mu_r$  fois (A.50) donne :

$$(1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V' \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \iint_{M \in \Sigma} \left( \mu_r \frac{\partial V'_i}{\partial n} - \frac{\partial V'_e}{\partial n} \right) G d\Sigma = [v(1-\mu_r) - 1]V' \quad (B.55)$$

où on introduit l'équation de continuité (B.54) :

$$(1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V' \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma - (1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{n}}{\mu_0} G d\Sigma = [v(1-\mu_r) - 1]V' \quad (B.56)$$

Nous avons obtenu une équation qui exprime le potentiel réduit sur la surface en fonction de l'induction magnétique excitatrice. Nous allons maintenant considérer deux cas, suivant que les sources excitatrices sont à l'intérieur ou à l'extérieur de  $\Omega_i$ . Dans chaque cas, nous calculerons les dipôles surfaciques

équivalents à l'anomalie.

Si les sources correspondent à l'aimantation permanente de la pièce

Nous allons supposer que les sources sont une aimantation permanente de la pièce que nous connaissons par la répartition de dipôles équivalents sur  $\Sigma$ .

$\square$  la répartition de dipôles équivalents n'est valable qu'à l'extérieur de  $\Omega_i$  mais pas à l'intérieur. Cependant, en reprenant la troisième équation de Green, nous pouvons exprimer le potentiel sur la surface créé par la répartition de dipôles :

$$V_{0e}(P) = - \iint_{M \in \Sigma} \tau(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \nu \tau(P) \quad (B.57)$$

Nous pouvons aussi calculer  $\vec{B}_0$  en fonction de  $V_0$  en considérant que toutes les sources sont internes à  $\Omega_i$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} (\nu-1)V_0(P) &= \iint_{M \in \Sigma} \left( V_0 \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial V_0}{\partial n} G \right) d\Sigma \\ \text{d'où } \iint_{M \in \Sigma} \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{n}}{\mu_0} G d\Sigma &= - \iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial V_0}{\partial n} G d\Sigma = (\nu-1)V_0(P) - \iint_{M \in \Sigma} V_0 \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma \end{aligned} \quad (B.58)$$

En reprenant l'équation (B.56), nous pouvons remplacer  $\vec{B}_0$  par sa valeur et nous obtenons alors :

$$(1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V' \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + (1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial V_0}{\partial n} G d\Sigma = [\nu(1-\mu_r) - 1]V' \quad (B.59)$$

puis :

$$(1-\mu_r) \left[ \iint_{M \in \Sigma} V' \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \iint_{M \in \Sigma} V_0 \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma \right] = [\nu(1-\mu_r) - 1]V' - (1-\mu_r)(1-\nu)V_0 \quad (B.60)$$

En recombinaison  $V_0$  et  $V'$ , nous obtenons la formule finale (avec  $V=V_0+V'$ , le potentiel total) :

$$(1-\nu(1-\mu_r))V + (1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = \mu_r V_0 \quad (\text{B.61})$$

qui devient, en remplaçant par  $\tau$  :

$$(1-\nu(1-\mu_r))V + (1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = -\mu_r \iint_{M \in \Sigma} \tau(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \nu \mu_r \tau(P) \quad (\text{B.62})$$

Connaissant le potentiel  $V_0$  en tout point de  $\Sigma$ , nous pouvons alors calculer le potentiel en tout point de  $\Omega_e$  en posant  $\nu=0$ .

$$V(P) = (\mu_r - 1) \iint_{M \in \Sigma} V \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma - \mu_r \iint_{M \in \Sigma} \tau(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma$$

$$\text{d'où } V(P) = - \iint_{M \in \Sigma} ((1-\mu_r)V + \mu_r \tau) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma \quad (\text{B.63})$$

Compte tenu des équations, nous avons directement la répartition équivalente de dipôles de l'ensemble source plus anomalie qui est :

$$\tau' = (1-\mu_r)V + \mu_r \tau \quad (\text{B.64})$$

En manipulant les équations, nous pouvons trouver une équation directement satisfaite par  $\tau'$ .

En prenant l'équation (B.62) et en arrangeant en fonction de (B.64), nous obtenons d'abord :

$$V - \nu [(1-\mu_r)V + \mu_r \tau] + \iint_{M \in \Sigma} [(1-\mu_r)V + \mu_r \tau] \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = 0 \quad (\text{B.65})$$

puis :

$$\frac{1}{(1-\mu_r)} [(1-\mu_r)V + \mu_r \tau] - \nu [(1-\mu_r)V + \mu_r \tau] + \iint_{M \in \Sigma} [(1-\mu_r)V + \mu_r \tau] \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = \frac{\mu_r \tau}{(1-\mu_r)} \quad (\text{B.66})$$

nous avons donc l'équation permettant de calculer  $\tau'$  en fonction de  $\tau$  :

$$\left(\frac{1}{1-\mu_r} - \nu\right) \tau'(P) + \iint_{M \in \Sigma} \tau'(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = \frac{\mu_r \tau(P)}{1-\mu_r} \quad (\text{B.67})$$

Si les sources correspondent à un champ inducteur sur la pièce

Dans ce cas, nous ne pouvons plus considérer la répartition équivalente de dipôles sur la surface pour exprimer l'influence du champ exciteur dans  $\Omega_e$ . Nous exprimerons donc celui-ci uniquement à partir du potentiel sur  $\Sigma$ . De même, nous allons calculer la répartition de dipôles équivalents à la pièce sur  $\Sigma$ , mais sans y inclure l'aimantation de la source contrairement au paragraphe précédent.

Soit  $V_0$  le potentiel sur  $\Sigma$ , comme les sources sont extérieures à  $\Omega_i$ , nous pouvons exprimer le champ magnétique sur la surface par la troisième formule de Green.

$$\begin{aligned} \nu V_0(P) &= \iint_{M \in \Sigma} \left( V_0 \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial V_0}{\partial n} G \right) d\Sigma \\ \text{d'où } \iint_{M \in \Sigma} \vec{B}_0 \cdot \vec{n} G d\Sigma &= - \iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial V_0}{\partial n} G d\Sigma = \nu V_0(P) - \iint_{M \in \Sigma} V_0 \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Comme précédemment, remplaçons dans l'équation (B.56) le terme  $\vec{B}_0$  :

$$(1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V' \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + (1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} \frac{\partial V_0}{\partial n} G d\Sigma = [\nu(1-\mu_r) - 1] V' \quad (\text{B.69})$$

puis

$$(1-\mu_r) \left[ \iint_{M \in \Sigma} V' \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \iint_{M \in \Sigma} V_0 \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma \right] = [\nu(1-\mu_r) - 1] V' + \nu(1-\mu_r) V_0 \quad (\text{B.70})$$

puisque le champ total est  $V = V_0 + V'$ , nous avons l'équation sur la surface :

$$[1 - \nu(1-\mu_r)] V(P) + (1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = V_0(P) \quad (\text{B.71})$$

et de même nous pouvons calculer le champ  $V'$  en tout point de  $\Omega_e$  (en posant

$v=0$ ) :

$$V(P) = - (1-\mu_r) \iint_{M \in \Sigma} V(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma \quad (\text{B.72})$$

D'où par identification nous avons directement la valeur de la répartition dipolaire équivalente :

$$\tau(M) = (1-\mu_r) V(M) \quad (\text{B.73})$$

Comme précédemment nous avons une équation pour déterminer directement l'aimantation équivalente :

$$\left( \frac{1}{(1-\mu_r)} - v \right) \tau(P) + \iint_{M \in \Sigma} \tau(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = V_0(P) \quad (\text{B.74})$$

Nous pouvons remarquer que seul le second membre de l'équation change par rapport au premier cas.

## B.4- Problèmes inverses

### B.4.a- Recherche du meilleur estimateur linéaire

#### Calcul de l'erreur d'estimation

Soit  $p(A)$  la probabilité du vecteur  $A$ . Ce vecteur possède une espérance  $M_A$  et une variance  $V_A$ .

Nous avons l'équation linéaire :

$$B = \mathbb{F}A \quad (5.2)$$

ainsi que la réduction de  $A$  (annexe A.7) en un vecteur  $\alpha$  centré, de variance unité et linéairement indépendant deux à deux :

$$A = \mathbb{E}_A \alpha + M_A \quad (\text{A.66})$$

Cherchons le meilleur estimateur linéaire de  $A$ , noté  $\underline{A}$  en fonction de la mesure  $B$ . Nous supposons que c'est celui qui minimise la variance de l'erreur. Posons  $\mathbb{H}_1$  et  $H_2$  tels que  $\underline{A} = \mathbb{H}_1 B + H_2$

L'erreur d'estimation est :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \underline{A} - A = \mathbb{H}_1 B + H_2 - A \\ &= \mathbb{H}_1 \mathbb{F} \mathbb{E}_A \alpha + \mathbb{H}_1 \mathbb{F} M_A + H_2 - \mathbb{E}_A \alpha - M_A \\ &= (\mathbb{H}_1 \mathbb{F} - \mathbb{I}) \mathbb{E}_A \alpha + (\mathbb{H}_1 \mathbb{F} - \mathbb{I}) M_A + H_2\end{aligned}\quad (\text{B.75})$$

Compte tenu des propriétés du vecteur  $A$ , nous pouvons calculer l'espérance et la variance de l'erreur d'estimation :

$$\text{- espérance de l'erreur : } M_\varepsilon = (\mathbb{H}_1 \mathbb{F} - \mathbb{I}) M_A + H_2 \quad (\text{B.76})$$

$$\text{- variance de l'erreur : } V_\varepsilon = (\mathbb{H}_1 \mathbb{F} - \mathbb{I}) \mathbb{E}_A \{ (\mathbb{H}_1 \mathbb{F} - \mathbb{I}) \mathbb{E}_A \}^t \quad (\text{B.77})$$

et chercher les valeurs de  $\mathbb{H}_1$  et  $H_2$  qui minimisent ces termes.

Décomposons par ligne le système matriciel (B.75) et intéressons nous à l'erreur du paramètre  $a_i$ .

L'erreur sur ce paramètre est :

$$\varepsilon_i = (\mathbb{H}_{1i}^t \mathbb{F} \mathbb{E}_A - E_{Ai}^t) \alpha + \mathbb{H}_{1i}^t \mathbb{F} M_A - m_{Ai} + h_{2i} \quad (\text{B.78})$$

avec  $\mathbb{H}_{1i}^t$ , la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\mathbb{H}_1$ .  $E_{Ai}^t$ , la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\mathbb{E}_A$ ,  $m_{Ai}$  et  $h_{2i}$ , les  $i^{\text{ème}}$  valeurs des vecteurs  $M_A$  et  $H_2$ .

La variance de l'erreur est alors un scalaire qui vaudra :

$$v_{\varepsilon i} = \|\| (\mathbb{H}_{1i}^t \mathbb{F} \mathbb{E}_A - E_{Ai}^t) \|\|^2 \quad (\text{B.79})$$

Nous avons vu au paragraphe A.6.b que  $\|\| (\mathbb{H}_{1i}^t \mathbb{F} \mathbb{E}_A - E_{Ai}^t) \|\|^2$  est minimal si  $\mathbb{H}_{1i}^t$  correspond à la solution au sens des moindres carrés du système :

$$(\mathbb{F} \mathbb{E}_A)^t (\mathbb{H}_{1i}^t) = (E_{Ai}^t) \quad (\text{B.80})$$

dont la solution est (A.65b) en notant  $\mathbb{H}_{1i}^t$  par  $X^t$ ,  $(\mathbb{F} \mathbb{E}_A)^t$  par  $\mathbb{A}$  et  $(E_{Ai}^t)$  par  $B^t$ .

En recombinaut les lignes, nous avons alors les solutions pour  $\mathbb{H}_1$  et  $H_2$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_1 &= \mathbb{E}_A \mathbb{Q} \mathbb{A}^{-1} \mathbb{P}^t + \mathbb{H}_3 \mathbb{P}^t \\ H_2 &= (\mathbb{I} - \mathbb{H}_1 \mathbb{F}) M_A\end{aligned}\quad (\text{B.81})$$

avec la notation :

$$\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $\mathbb{H}_3$  une matrice quelconque de dimension  $m,n$  de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & X \end{pmatrix}$  c'est à dire avec les  $k$  premières colonnes nulles ( $k$  étant le rang de la matrice  $\mathbb{F}\mathbb{E}_A$ ),

ou plus simplement dans le cas très général où  $\mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t$  est inversible :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1 &= \mathbb{V}_A\mathbb{F}^t(\mathbb{F}\mathbb{V}_A\mathbb{F}^t)^{-1} \\ \mathbb{H}_2 &= (\mathbb{I}-\mathbb{H}_1\mathbb{F})M_A \end{aligned} \quad (\text{B.81b})$$

#### B.4.b- Algorithme pour les capteurs scalaires

##### Principe de l'algorithme

Un capteur scalaire mesure le module de l'induction en un point.

Si, par exemple, les composantes de l'induction  $\vec{B}$  sont  $b_i$  avec  $i=x, y$  ou  $z$ , il mesure au cours du temps :

$$\beta_t = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \quad (\text{B.82})$$

Si nous supposons qu'entre deux récurrences temporelles, le vecteur induction  $\vec{B}$  sur chaque composante passe de  $b_i$  à  $b_i + \delta b_i$  avec  $\delta b_i \ll b_i$ , la mesure à l'instant  $t + \delta t$  va être :

$$\beta_{t+\delta t} = \sqrt{(b_x + \delta b_x)^2 + (b_y + \delta b_y)^2 + (b_z + \delta b_z)^2} \quad (\text{B.83})$$

En faisant un calcul très simple, nous pouvons obtenir l'expression suivante :

$$\frac{\beta_t^2 + \beta_{t+\delta t}^2}{2} = b_x(b_x + \delta b_x) + b_y(b_y + \delta b_y) + b_z(b_z + \delta b_z) + \frac{\delta b_x^2 + \delta b_y^2 + \delta b_z^2}{2} \quad (\text{B.84})$$

Pour simplifier le raisonnement, supposons un référentiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  orienté en fonction du vecteur  $\vec{B}_t$  avec  $\vec{e}_1$  orienté parallèlement à  $\vec{B}_t$ , nous obtenons alors l'équation suivante (à l'ordre 1) :

$$\frac{\beta_t^2 + \beta_{t+\delta t}^2}{2} \approx b_1(b_1 + \delta b_1) \quad (\text{B.85})$$

Si nous supposons les composantes du champ bien estimées à la récurrence  $t$ , nous aurons une très bonne estimation de la composante du champ parallèle à  $\vec{e}_1$  à la récurrence  $t+\delta t$ . Ainsi nous pouvons considérer nos capteurs scalaires comme des capteurs vectoriels (donc linéaires) avec un axe orienté selon l'axe du champ local.

Bien entendu, sans la présence d'un modèle qui apporte une corrélation entre les différentes composantes du champ, nous n'avons pas suffisamment d'informations pour retrouver toutes les composantes de  $\vec{B}_{t+\delta t}$  à partir de  $b_{1t+\delta t}$ . Mais l'utilisation de plusieurs capteurs et d'un modèle le permet.

Hélas, la linéarisation présentée ici a de fortes chances de ne pas être stable. Un raisonnement simple permet de craindre que si à la récurrence  $t$ , nous avons une erreur sur le vecteur  $\vec{B}$  qui se traduit par une erreur  $\varepsilon$  sur l'axe 1, alors à la récurrence  $t+\delta t$ , nous avons sur ce même axe, une erreur de l'ordre de grandeur  $-\varepsilon$ , de signe opposé mais approximativement de même amplitude.

En effet, supposons que nous calculons  $b_{1t+\delta t}$  par l'expression

$$b_{1t+\delta t} = \frac{\beta_{t+\delta t}^2 + \beta_t^2}{2b_{1t}} \quad (\text{B.86})$$

alors, une erreur de  $\varepsilon$  sur  $b_{1t}$  donne à l'instant  $t+\delta t$  :

$$\begin{aligned} b_{1t+\delta t} &\approx \frac{(b_{1t} + \delta b_1)^2 + b_{1t}^2}{2(b_{1t} + \varepsilon)} \\ &\approx b_{1t} + \delta b_1 - \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

C'est à dire que l'erreur se propage avec oscillations et sans amortissement (seuls les termes d'ordre plus élevé peuvent dire si la propagation s'amortit ou non, mais même si il y a amortissement, il est très lent).

Par analogie avec la célèbre formule de récurrence permettant de calculer  $\sqrt{a}$ , qui est :

$$u_{n+1} = (u_n + a/u_n)/2 \quad (\text{B.88})$$

proposons une autre formule de récurrence :

$$b_{t+\delta t} = \frac{b_t + b_t^{-1} \beta_{t+\delta t}^2}{2} \quad (\text{B.89})$$

Si  $b_{1t}$  est estimé avec une erreur  $\varepsilon$ , alors nous aurons comme solution :

$$\begin{aligned}
b_{1t+\delta t} &\approx \frac{1}{2} \left( b_{1t+\varepsilon} + \frac{(b_{1t+\delta t})^2}{b_{1t+\varepsilon}} \right) \\
&\approx b_{1t} + \delta b_1
\end{aligned} \tag{B.90}$$

Ainsi, au premier ordre, l'erreur a disparu, mais pas l'évolution  $\delta b_1$ .

En trois dimensions, cela revient à linéariser au premier ordre sous la forme :

$$b_{xt}(2b_{xt+\delta t} - b_{xt}) + b_{yt}(2b_{yt+\delta t} - b_{yt}) + b_{zt}(2b_{zt+\delta t} - b_{zt}) = \beta_{t+\delta t}^2 \tag{B.91}$$

Ainsi à chaque récurrence temporelle, nous devons estimer les anomalies  $A_t$ , puis nous devons réestimer les trois composantes du champ magnétique  $\vec{B}$  au niveau de tous les capteurs. Nous utiliserons alors ces estimations pour linéariser la mesure capteur suivante.

$\square$  si jamais le champ varie trop entre chaque récurrence, il suffit de réduire l'intervalle temporel  $\delta t$ .

### Présentation des équations

Soit  $\beta^2$  le vecteur comprenant les carrés des mesures des capteurs scalaires et  $\vec{B}$  le vecteur correspondant aux composantes triaxiales du champ magnétique aux différentes positions des capteurs scalaires,

nous avons alors les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\beta_t^2 &\approx B_{t-1}^t (2B_t - B_{t-1}) + w_t \\
B_t &= \mathbb{F} A_t
\end{aligned} \tag{B.92}$$

En cascade, à partir de  $2B_t - B_{t-1}$ , nous en déduisons  $B_t$  puis  $A_t$ .

L'algorithme, une fois développé autour de  $A_t$  devient :

$$\begin{aligned}
A_t &= M'_{At} + V'_{At} \mathbb{F}' B_{t-1} \left( B_{t-1}^t \mathbb{F}' V'_{At} \mathbb{F}' B_{t-1} + \frac{W}{4} \right)^{-1} \left[ \frac{\beta_t^2 + B_{t-1}^t B_{t-1}}{2} - B_{t-1}^t \mathbb{F}' M'_{At} \right] \\
B_t &= \mathbb{F} A_t
\end{aligned} \tag{B.93}$$

Pour le choix de l'espérance et de la variance des paramètres, nous avons deux possibilités : soit nous privilégions la stabilité face à la précision et nous ne modifions pas l'information sur la statistique de  $A$ , soit au contraire, nous adaptons à chaque récurrence la connaissance a priori de  $A$  en fonction des anciennes mesures.

Si on ne tient pas compte du passé, nous devons prendre pour le vecteur A une espérance et une variance qui ne dépendent que de l'information a priori et de la valeur supposée connue de  $B_{t-1}$

$$\begin{aligned} M'_{At} &= M_A \\ V'_{At} &= V_{0A} \end{aligned} \quad (B.94)$$

Si, par contre, on tient compte du passé, alors les espérances et variances de A dépendent uniquement de l'estimation précédente et d'une variance de l'évolution au cours d'un incrément temporel des paramètres A.

$$\begin{aligned} M'_{At} &= A_{t-1} \\ V'_{At} &= V_{\delta A} \end{aligned} \quad (B.95)$$

## B.5- Etude paramétrique d'un cas simple

### B.5.a- Variance du potentiel scalaire magnétique

Supposons que les coefficients harmoniques des sources  $a_{nm}$  sont des variables aléatoires indépendantes deux à deux et que leur variance notée  $\sigma_{a_n}^2$  ne dépend que de l'indice n.

Calculons d'abord la variance de la contribution des coefficients de degré n sur le potentiel au point M. Nous avons, d'après (2.17) :

$$V_n(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (B.96)$$

La variance de  $V_n$  est alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{V_n}^2 &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sum_{m=-n}^n \sigma_{a_n}^2 \left(\frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi)\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{\sigma_{a_n}^2}{r^{2n+2}} \sum_{m=-n}^n [Y_n^m(\theta, \varphi)]^2 \end{aligned} \quad (B.97)$$

En reprenant les équations (B.5) avec  $\theta=\theta_0$  et  $\varphi=\varphi_0$  et (B.22), nous obtenons

$$\sigma_{V_n}^2 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sigma_{a_n}^2 \frac{1}{r^{2n+2}} \quad (B.98)$$

ou encore, l'expression de l'écart-type de  $V_n$  qui ne dépend que de la distance entre le point de mesure et le centre de l'anomalie et non des angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

$$\sigma_{V_n} = \frac{1}{4\pi} \sigma_{a_n} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (\text{B.98b})$$

△ Autant  $\sigma_{V_n}$  est l'écart type de la contribution de l'ensemble des coefficients de degré  $n$ ,  $\sigma_{a_n}$  n'est l'écart type que d'un coefficient.

### B.5.b- Variance de l'induction magnétique

Un magnétomètre vectoriel selon la direction  $\vec{n}$  va mesurer la grandeur :

$$-\mu_0 \vec{\nabla} V \cdot \vec{n}$$

L'expression de  $\vec{B}$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= -\mu_0 \vec{\nabla} V(M) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

Nous pouvons définir pour  $\vec{B}$  aussi, des composantes  $\vec{B}_{nm}$  triées par influence décroissante à une distance donnée, avec

$$\vec{B}_{nm} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) \right)$$

Si on cherche aussi la matrice de variance/covariance des composantes de  $\vec{B}$  associées au degré  $n$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{B_n}^2 &= \sum_{m=-n}^n \sigma_{a_n}^2 \vec{B}_{nm} \vec{B}_{nm}^t \\ &= \sigma_{a_n}^2 \sum_{m=-n}^n \vec{B}_{nm} \vec{B}_{nm}^t \\ &= \sigma_{a_n}^2 \mathbb{M} \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

Nous allons exprimer les différentes composantes de la matrice  $\mathbb{M}$  dans le repère orthonormé sphérique.

En reprenant le paragraphe B.1.c et en particulier les notations (B.26) et en y ajoutant l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^{n+1}} \right) = \frac{-(n+1)}{r^{n+2}} \quad (\text{B.101})$$

nous obtenons les composantes de la matrice  $\mathbb{M}$  :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 0 \text{ si } i \neq j \\ m_{11} &= \left[ \frac{\mu_0 (n+1)}{4\pi r^{n+2}} \right]^2 \\ m_{22} = m_{33} &= \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{r^{n+2}} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

Nous en tirons les variances des champs magnétiques de degré  $n$  au point  $M$ .

Sur la direction radiale, la variance est :

$$\sigma_{B_{rr}}^2 = \left[ \sigma_{a_n} \frac{\mu_0 (n+1)}{4\pi r^{n+2}} \right]^2 \quad (\text{B.103})$$

et sur les directions normales, la variance est ( $t=\theta$  ou  $t=\varphi$ ) :

$$\sigma_{B_{tt}}^2 = \left[ \sigma_{a_n} \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{r^{n+2}} \right]^2 \quad (\text{B.104})$$

Compte tenu de l'indépendance des champs sur ces directions, nous pouvons aussi calculer la valeur moyenne du module de la contribution de degré  $n$  du champ magnétique.

$$E_B = \sqrt{\sigma_{B_{rr}}^2 + 2\sigma_{B_{tt}}^2} = \sigma_{a_n} \frac{\mu_0}{4\pi r^{n+2}} \sqrt{(n+1)(2n+1)} \quad (\text{B.105})$$

### B.5.c- Variance du gradient de l'induction magnétique

Tout d'abord, calculons la matrice dérivée seconde en coordonnées sphériques.

Soit le point  $M$  de coordonnées :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Nous avons la formule du gradient en coordonnées sphériques :

$$\left( \begin{array}{l} B_r = \frac{\partial V}{\partial r} \\ B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ B_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{array} \right) \quad (B.106)$$

$$V_{ij} = \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial V}{\partial j} \right) \quad (\text{le calcul est long mais il reste simple})$$

et la dérivée seconde en coordonnées sphériques en posant

$$\left( \begin{array}{ccc} G_{rr} & G_{r\theta} & G_{r\varphi} \\ G_{\theta r} & G_{\theta\theta} & G_{\theta\varphi} \\ G_{\varphi r} & G_{\varphi\theta} & G_{\varphi\varphi} \end{array} \right) = \quad (B.107)$$

$V_{rr}$	$\frac{1}{r} V_{r\theta} - \frac{1}{r^2} V_\theta$	$\frac{1}{r \sin \theta} V_{r\varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} V_\varphi$
$\frac{1}{r} V_{\theta r} - \frac{1}{r^2} V_\theta$	$\frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} + \frac{1}{r} V_r$	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} V_{\theta\varphi} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} V_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} V_{\varphi r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} V_\varphi$	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} V_{\varphi\theta} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} V_\varphi$	$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} V_r + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} V_\theta$

Comme nous avons déjà calculé la valeur des dérivées premières et secondes de  $P_n(\cos \chi)$  quand  $\chi=0$  (B.22) , calculons les dérivées de  $\cos \chi$  par rapport à  $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  quand  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  et  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . Par souci de simplification, nous allons présenter les résultats sous forme de tableau. Seule la moitié est représentée car

il est symétrique et la cellule correspondante à la ligne  $\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}$  et à la colonne  $\frac{\partial \cos \chi}{\partial \varphi_2}$

s'interprète comme la dérivée de  $\frac{\partial^3 \cos \chi}{\partial \theta_1^2 \partial \varphi_2}$  pour  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  et  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ .

	$\cos\chi$	$\frac{\partial \cos\chi}{\partial \theta_2}$	$\frac{\partial \cos\chi}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial \theta_2 \partial \varphi_2}$	$\frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial \theta_2^2}$	$\frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial \varphi_2^2}$
1	1	-	-	-	-	-
$\frac{\partial}{\partial \theta_1}$	0	1	-	-	-	-
$\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$	0	0	$\sin^2\theta$	-	-	-
$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \varphi_1}$	0	0	$\sin\theta \cos\theta$	$\cos^2\theta$	-	-
$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}$	-1	0	0	0	1	-
$\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}$	$-\sin^2\theta$	$-\sin\theta \cos\theta$	0	0	$\sin^2\theta$	$\sin^2\theta$

(B.108)

Nous allons aussi calculer de la même façon, les dérivées multiples de  $P_n(\cos\chi)$ . En remarquant que toutes les dérivées simples de  $\cos\chi$  pour  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  et  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$  sont nulles, nous avons, en prenant  $i,j,k,l$  alternativement  $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  :

$$\begin{aligned}
P_n(1) &= 1 \\
\frac{\partial P_n}{\partial i}(1) &= 0 \\
\frac{\partial^2 P_n}{\partial i \partial j}(1) &= P'_n(1) \frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial i \partial j} \\
\frac{\partial^3 P_n}{\partial i \partial j \partial k}(1) &= P''_n(1) \frac{\partial^3 \cos\chi}{\partial i \partial j \partial k} \\
\frac{\partial^4 P_n}{\partial i \partial j \partial k \partial l}(1) &= P'''_n(1) \left( \frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial i \partial j} \frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial k \partial l} + \frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial i \partial k} \frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial j \partial l} + \frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial i \partial l} \frac{\partial^2 \cos\chi}{\partial j \partial k} \right) \\
&\quad + P'_n(1) \frac{\partial^4 \cos\chi}{\partial i \partial j \partial k \partial l}
\end{aligned}$$

(B.109)

Nous pouvons alors présenter un tableau similaire au précédent (pour garder la compacité des formules, nous avons les notations suivantes :

$P'$  pour  $P'_n(1)$   
 $P''$  pour  $P''_n(1)$   
 $V_n$  pour

$$\frac{1}{r_1^{n+1}r_2^{n+1}}P_n(\cos\chi) \left( \begin{array}{l} r_1=r_2 \\ \theta_1=\theta_2 \\ \varphi_1=\varphi_2 \end{array} \right) :$$

	$V_n(1)$	$\frac{\partial V_n}{\partial r_2}$	$\frac{\partial V_n}{\partial \theta_2}$	$\frac{\partial V_n}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r_2^2}$
1	1	-	-	-	-
$\frac{\partial}{\partial r_1}$	-(n+1)	(n+1) <sup>2</sup>	-	-	-
$\frac{\partial}{\partial \theta_1}$	0	0	P'	-	-
$\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$	0	0	0	sin <sup>2</sup> θP'	-
$\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}$	(n+1)(n+2)	-(n+1) <sup>2</sup> (n+2)	0	0	(n+1) <sup>2</sup> (n+2) <sup>2</sup>

(B.110)

	$V_n(1)$	$\frac{\partial V_n}{\partial r_2}$	$\frac{\partial V_n}{\partial \theta_2}$	$\frac{\partial V_n}{\partial \varphi_2}$	$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r_2^2}$
$\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial \theta_1}$	0	0	-(n+1)P'	0	0
$\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial \varphi_1}$	0	0	0	-(n+1)sin <sup>2</sup> θP'	0
$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}$	-P'	(n+1)P'	0	0	-(n+1)(n+2)P'
$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \varphi_1}$	0	0	0	sinθcosθP'	0
$\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}$	-sin <sup>2</sup> θP'	(n+1)sin <sup>2</sup> θP'	-sinθcosθP'	0	-(n+1)(n+2)sin <sup>2</sup> θP'

(B.111)

	$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r_2 \partial \theta_2}$	$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r_2 \partial \varphi_2}$	$\frac{\partial^2 V_n}{\partial \theta_2^2}$	$\frac{\partial^2 V_n}{\partial \theta_2 \partial \varphi_2}$	$\frac{\partial^2 V_n}{\partial \varphi_2^2}$
$\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial \theta_1}$	$(n+1)2P'$	-	-	-	-
$\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial \varphi_1}$	0	$(n+1)^2 \sin^2 \theta P'$	-	-	-
$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}$	0	0	$P' + 3P''$	-	-
$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \varphi_1}$	0	$-(n+1) \sin \theta \cos \theta P'$	0	$\cos^2 \theta P' + \sin^2 \theta P''$	-
$\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}$	$(n+1) \sin \theta \cos \theta P'$	0	$\sin^2 \theta (P' + P'')$	0	$\sin^2 \theta P' + 3 \sin^4 \theta P''$

(B.112)

A partir de ce tableau et de la formule de la matrice dérivée seconde en coordonnées sphériques, nous pouvons calculer la variance/covariance du gradient du champ magnétique. Les résultats sont présentés au chapitre 7.2.

#### B.5.d- Variance de l'erreur d'identification

##### Matrice de sensibilité

Nous allons maintenant reprendre les notations que nous avons utilisé dans le cadre des problèmes inverses.

Supposons  $n_c$  voies de mesures pour identifier le système magnétique, nous supposons en outre que les caractéristiques statistiques des signaux mesurés sont identiques. Cela entraîne notamment l'utilisation de capteurs identiques et placés à même distance de la source.

Le système d'équations peut s'écrire :

$$B = \mathbb{F}A \quad (5.2)$$

Avec B un vecteur de  $n_c$  composantes et A le vecteur rassemblant les paramètres du système.

Le vecteur A comprend tous les harmoniques de la source jusqu'à un ordre n tel que les composantes deviennent négligeables à la distance r où se trouvent les capteurs ainsi que les erreurs des capteurs. Ce vecteur comporte donc  $n_p$  termes avec :

$$n_p = n(n+2) + n_c$$

D'après nos hypothèses, l'espérance du vecteur A est nulle et la variance est une matrice diagonale dont les  $n(n+2)$  premiers éléments ont pour valeur  $\sigma_{an}^2$  et les  $n_c$  derniers, la variance de l'erreur sonde que nous noterons  $w^2$ .

Par ailleurs, des propriétés des harmoniques sphériques que nous avons détaillées tout au long de ce mémoire, nous déduisons que la matrice  $\mathbb{F}$  d'élément générique  $f_{ij}$  aura la propriété suivante :

- quelque soit  $i$ , la somme des carrés des termes  $f_{ij}$  correspondant au même degré  $n$  des harmoniques est constante (car il s'agit de la variance de la composante pour ce degré).

Si nous intégrons dans la matrice  $\mathbb{F}'$  l'écart type des paramètres, nous avons le système suivant :

$$B = \mathbb{F}'\alpha \text{ avec } \mathbb{F}' = \mathbb{F}\mathbb{E}_A \tag{B.113}$$

avec  $\alpha$  vecteur de variables aléatoires centrées, de variance unité et linéairement indépendantes deux à deux et  $\mathbb{F}'$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & \dots & f'_{1n_p} \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} & \dots & f'_{2n_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n_c1} & f'_{n_c2} & f'_{n_c3} & \dots & f'_{n_cn_p} \end{pmatrix}$$

avec , quelque soit  $i$  :

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{j=1}^3 f'_{ij}{}^2 = M_1\sigma_{a_1}^2 \\ \sum_{j=4}^8 f'_{ij}{}^2 = M_2\sigma_{a_2}^2 \\ \dots \\ \sum_{j=k^2}^{k(k+2)} f'_{ij}{}^2 = M_k\sigma_{a_k}^2 \\ \dots \\ \text{si } j > n(n+2) \quad f'_{ij}{}^2 = w^2 \end{array} \right. \tag{B.114}$$

La valeur de  $M_k$  dépend du type de capteur et de sa position.

### Variance de l'erreur sur les différents termes

Calculons l'expression de l'erreur d'identification sur les termes dipolaires.

En reprenant la formule (B.97) avec nos notations, écrivons l'erreur  $\varepsilon$  du vecteur  $\alpha$  :

$$\varepsilon = (\mathbb{F}'^t(\mathbb{F}'\mathbb{F}'^t)^{-1}\mathbb{F}' - \mathbb{I})\alpha \quad (\text{B.115})$$

Si nous développons cette équation en supposant le développement en valeurs singulières de  $\mathbb{F}'$  de la forme :

$$\mathbb{F}' = \mathbb{P}\Lambda\mathbb{Q}^t \quad (\text{B.116})$$

nous avons :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_c} q_{ik}q_{jk} \alpha_j - \alpha_i \quad (\text{B.117})$$

Valeur dont nous pouvons calculer la variance. Après simplifications, nous obtenons :

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = 1 - \sum_{k=1}^{n_c} q_{ik}^2 \quad (\text{B.118})$$

Ainsi la variance de l'erreur relative du paramètre  $i$  correspond à la somme des carrés de la composante  $i$  des vecteurs de la base orthonormée du noyau de  $\mathbb{F}'$ .

Dans le cas général, il est difficile de développer plus loin cette expression. Pour pouvoir continuer le calcul, nous allons faire un certain nombre d'hypothèses supplémentaires dont la justification exacte semble difficile. Les simulations numériques que nous avons faites (paragraphe 7.3.a) semblent cependant les conforter.

⊕ Nous allons supposer que les  $n_c$  capteurs sont situés de telle sorte que les  $n_c$  premières composantes de l'état magnétique sont bien mesurées par les capteurs et que le signal créé par les suivantes est assimilable à de l'erreur capteur. Nous allons supposer en outre que cette erreur (somme des effets de nombreux paramètres d'ordre de grandeur faible) est pour chaque capteur de même ordre de grandeur et indépendants deux à deux.

Ⓜ L'indépendance entre les capteurs des effets des termes de degré élevé est, bien entendu, souvent fautive car la somme sur chaque sonde des carrés des effets pour un degré donné est toujours constante (B.114). Si cette somme est constituée de  $p$  termes et si il y a moins de  $p$  sondes, on peut, peut-être, trouver

des effets indépendants linéairement, mais si il y a plus de  $p$  voies de mesure, c'est impossible. Nous conserverons quand même l'hypothèse d'indépendance qui entraînera un résultat légèrement pessimiste (puisque ne tenant pas compte des corrélations entre les termes).

Pour simplifier, nous supposerons aussi que  $n_c$  correspond à un changement de degré des harmoniques, c'est à dire :

$$\exists m_c / n_c = m_c(m_c+2) \quad (\text{B.119})$$

Ce dernier point permet de réordonner les coefficients d'erreurs capteurs en  $n_c$  termes indépendants ayant pour variance :

$$\sigma_{w_i}^2 = \sum_{k=m_c+1}^n M_k \sigma_{a_k}^2 + w^2 \quad (\text{B.120})$$

(avec  $m_c+1$  le premier degré négligeable).

Nous pouvons alors séparer le vecteur  $\alpha$  en deux sous vecteurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , le premier comprenant les  $n_c$  premières composantes et le second les  $n_p - n_c$  restantes.

Nous avons alors :

$$\mathbb{F}' = (\mathbb{F}_1 \mathbb{F}_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.121})$$

avec  $\mathbb{F}_1$ , une matrice carrée de  $n_c$  éléments inversibles et  $\mathbb{F}_2$  une matrice diagonale ayant aussi  $n_c$  éléments tous identiques, de valeurs :

$$f_{2ii} = \left( \sum_{k=m_c+1}^n M_k \sigma_{a_k}^2 + w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.122})$$

Recalculons l'erreur d'identification sous cette nouvelle forme :

- en supposant la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbb{F}_1$  de la forme suivante :

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{P} \lambda_1 \mathbb{Q}^t \quad (\text{B.123})$$

alors l'erreur d'identification est :

$$\varepsilon = \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \lambda_1 \mathbb{P}^t \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \left( \mathbb{P} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-1} \mathbb{P}^t \right) \left( \mathbb{P} \lambda_1 \mathbb{Q}^t \quad \lambda_2 \right) - \mathbb{I} \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.124})$$

Si nous calculons la variance de l'erreur, nous obtenons, tous calculs faits :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \mathbb{Q}^t & \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \mathbb{P}^t \\ \mathbb{P} \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \mathbb{Q}^t & \mathbb{P} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \mathbb{P}^t \end{pmatrix} \quad (\text{B.125})$$

L'erreur sur les premiers termes magnétiques est donc :

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sum_{k=1}^{n_c} \left( q_{ik}^2 \frac{\sum_{l=m_c}^n M_l \sigma_{a_l}^2 + w^2}{\lambda_k^2 + \sum_{l=m_c}^n M_l \sigma_{a_l}^2 + w^2} \right) \quad (\text{B.126})$$

Là encore, nous devons faire une hypothèse supplémentaire :

⊕ nous supposons qu'une très bonne position pour les capteurs correspond à une matrice  $\mathbb{F}_1$  telle que  $\mathbb{F}_1^t \mathbb{F}_1$  est diagonale. Nous supposons aussi qu'il existe au moins une position capteur qui vérifie cette propriété et qui, de plus, pour un degré donné, ne favorise pas un harmonique par rapport aux autres.

Dans ce cas, la matrice  $\mathbb{Q}$  est la matrice identité, et comme, pour un degré  $k$  donné, nous avons :

$$\sum_{i=k^2}^{k(k+2)} f_{ij}^2 = M_k \sigma_{a_k}^2 \quad (\text{B.127})$$

alors :

$$\sum_{i=k^2}^{k(k+2)} \lambda_i^2 = \sum_{i=k^2}^{k(k+2)} [\mathbb{F}_1^t \mathbb{F}_1]_{ii} = \sum_{i=k^2}^{k(k+2)} \sum_{l=1}^{n_c} f_{li}^2 = n_c \sum_{i=k^2}^{k(k+2)} f_{li}^2 = n_c M_k \sigma_{a_k}^2 \quad (\text{B.128})$$

et

$$\text{pour } m^2 \leq i < (m+1)^2 \quad \lambda_i^2 \approx \frac{n_c M_m \sigma_{a_m}^2}{2m+1}$$

Avec toutes ces hypothèses, nous obtenons l'expression finale de l'erreur d'identification du paramètre  $i$ .

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \frac{\sum_{k=m_c+1}^n M_k \sigma_{a_k}^2 + w^2}{\frac{n_c}{2m+1} M_m \sigma_{a_m}^2 + \sum_{k=m_c+1}^n M_k \sigma_{a_k}^2 + w^2} \quad (\text{B.129})$$



## RESUME

Pour connaître l'état magnétique d'un objet complexe, bien souvent, la seule solution est de mesurer l'induction créée par la pièce en un nombre discret de points. La difficulté est alors de remonter à l'aimantation à partir de ces mesures.

Une modélisation des sources magnétiques est d'abord recherchée. La décomposition en harmoniques sphériques du champ mesurable ainsi que la recherche de dipôles normaux équivalents répartis sur la surface de l'objet sont étudiées. Leurs avantages et inconvénients étant très complémentaires, un nouveau modèle, synthèse des deux précédents, est proposé.

Ensuite, l'utilisation d'un algorithme bayésien permet d'intégrer dans la projection de la mesure sur le modèle, les incertitudes et incohérences créées par l'imperfection de la mesure. En contrepartie, nous n'obtenons plus qu'un intervalle de confiance sur les valeurs recherchées.

Enfin, une étude paramétrique analytique permet de connaître les performances du système. En particulier, le choix du type de capteurs de mesure est abordé.

## SUMMARY

To know the magnetic state of a complex device, very often, the only solution is to measure the induction in a finite number of locations around the item. The difficult point is then to go back to the magnetisation from the measures.

A model of magnetic sources is first searched for. The spheroidal harmonic expansion of measurable field and the search of normal equivalent dipoles spreaded over the object surface are studied. Their advantages and drawbacks are very complementary, so a new model, synthesis of them is proposed.

Then, the use of a Bayesian algorithm allows to include in the projection of the measures on the model, all the uncertainties and inconsistencies created by the imperfection of the measure. In return, only a confidence interval is available.

Lastly, an analytical parametric study allows to know the performance of the algorithms. Particularly, the choice of sensors type is presented.

## MOTS CLEFS

Magnétisme  
Problème inverse  
Harmoniques sphériques  
Champ proche  
Anomalies magnétiques  
Capteurs magnétiques

## KEYWORDS

Magnetism  
Inverse problem  
Spherical harmonics  
Near field  
Magnetic sources  
Magnetic sensors