



L'OBJECTIF CIBLE ET LA DETERMINATION STATISTIQUE DES TOLERANCES

Maurice Pillet, Daniel Duret, Alain Sergent

► To cite this version:

Maurice Pillet, Daniel Duret, Alain Sergent. L'OBJECTIF CIBLE ET LA DETERMINATION STATISTIQUE DES TOLERANCES. Qualita 2001, Mar 2001, Annecy, France. pp.8 Pages, 2001. <hal-00976928>

HAL Id: hal-00976928

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00976928>

Submitted on 10 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'OBJECTIF CIBLE ET LA DETERMINATION STATISTIQUE DES TOLERANCES

Maurice Pillet, Daniel Duret, Alain Sergent

LLP, LMECA CESALP - Université de Savoie
BP 240 - 74 942 Annecy le Vieux Cedex - France

maurice.pillet@univ-savoie.fr

daniel.duret@univ-savoie.fr

alain.sergent@univ-savoie.fr

Résumé : L'objectif de cette communication est de montrer l'importance de la détermination statistique des tolérances dans le processus de conception des produits et dans les choix sur les actions à apporter aux processus de fabrication dans une démarche "Objectif cible". Après avoir discuté des apports du tolérancement analytique et par plans d'expériences, nous proposons un exemple de tolérancement par régression multilinéaire.

Abstract : This communication shows the importance of statistical tolerancing in the design process. We show that this work permits also to determining the priority of the actions to lead in order to improve the production process. After discuss on the analytical tolerancing and design of experiments contributions, we suggest an example of tolerancing by multi linear regression.

Mots clefs : tolérancement statistique; objectif cible; capacité; aptitude; assemblage mécanique; régression multilinéaire.

1. LA PRISE EN COMPTE DE LA COMBINATOIRE ET L'OBJECTIF CIBLE

Le principe de l'objectif cible [PILLET 99] consiste à se concentrer sur la qualité du produit assemblé, au détriment de la recherche du zéro défaut sur chaque caractéristique élémentaire. L'objectif cible est une nouvelle approche de la qualité. Cette démarche est particulièrement efficace dans le cas des processus d'assemblage où la fonction résultante Y (demandée par le client) dépend de plusieurs caractéristiques élémentaires X.

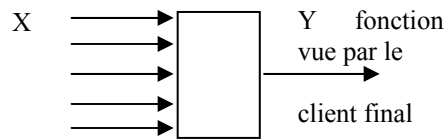
En effet, la vision classique des tolérances conduit à se limiter à placer les pièces

"dans les tolérances" en agissant indépendamment sur la dispersion du procédé ou sur la position. Pourtant lorsqu'on dispose de deux leviers d'action (diminution de la dispersion et centrage du processus), il faut se poser la question de savoir quel est le levier qui donne le résultat le plus intéressant pour un coût le plus faible possible. L'application des principes de l'objectif cible repose sur deux principes que nous proposons de démontrer.

Principe 1 : le centrage sur la cible. Il est souhaitable de centrer toutes les caractéristiques sur leur cible. Cette action est prioritaire sur l'amélioration des dispersions "court terme".

Principe 2 : la recherche du zéro défaut sur chaque caractéristique est un leurre. En effet le nombre de non conformes sur chaque caractéristique X n'étant pas ou peu lié à la qualité de la fonction résultante Y.

1.1. Principe 1 : centrage sur la cible



X : Caractéristiques élémentaires (surveillées ou non en production) ayant une influence sur Y

Figure 1 : Les X et les Y

Dans les cas des processus combinatoires intéressant l'objectif cible, il est très important de connaître la relation liant une caractéristique finale Y aux caractéristiques X. Les variables X varient généralement peu, il est possible de linéariser la caractéristique finale Y au voisinage de la cible. La connaissance d'une relation linéaire du premier ordre du type :

$$Y = \alpha_0 + \sum \alpha_i X_i + \varepsilon \quad [1]$$

suffit en général largement à la description du phénomène au voisinage du point de fonctionnement.

Notation :

E(X) : moyenne de la caractéristique X

C(X) : Cible de la caractéristique X

V(X) : Variance de la caractéristique X

On obtient facilement sous réserve d'indépendance des X l'espérance mathématique et la variance de la fonction finale Y en fonction des espérances et des variances des X.

$$E(Y) = \alpha_0 + \sum \alpha_i E(X_i) \quad [2]$$

$$V(Y) = \sum \alpha_i^2 V(X_i) \quad [3]$$

Cette relation se déduit également d'une relation plus générale ou $Y = f(x)$

$$\sigma_Y^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x=\mu} \right)^2 \sigma_{xi}^2 \quad [4]$$

Cas 1 : action sur le centrage d'une caractéristique

On suppose que $E(X_k)$ n'est pas centrée sur la cible (quel que soit k)

$$E(X_k) = C(X_k) + \delta$$

$$E(X_i) = C(X_i) \text{ pour } i \neq k$$

$$E(Y) = \alpha_0 + \sum \alpha_i E(X_i) \quad [5]$$

$$E(Y) = C(Y) + \alpha_k \delta$$

Quel que soit X, un décentrage sur la moyenne a toujours une conséquence directe (pondéré par α_k) sur la caractéristique finale Y.

Cas 2 : action sur la variance

$$V(Y) = \sum \alpha_i^2 V(X_i) \quad [6]$$

On suppose pour la valeur particulière k une nouvelle variance

$$V'(X_k) = (\lambda + 1)V(X_k)$$

(λ représente le pourcentage de diminution ou d'augmentation de la variance de la caractéristique k)

$$V'(Y) = \sum \alpha_i^2 V(X_i) + \lambda \alpha_k^2 V(X_k)$$

$$V'(Y) = V(Y) + \lambda \alpha_k^2 V(X_k)$$

$$\sigma'(Y) = \sigma(Y) \sqrt{1 + \frac{\lambda \alpha_k^2 V(X_k)}{V(Y)}}$$

Sauf cas particulier, le coefficient α_k n'est pas très grand (égal = ± 1 dans le cas de sommes ou de différences). Par contre λ et $V(X_k)$ sont petits. Leur produit peut être considéré dans une première approche comme un infiniment petit d'ordre 2.

L'action sur la variance n'a pas une influence directe sur la caractéristique du produit. Cette influence dépend :

↳ du nombre de composants (n) dans la relation $Y = f(X)$

↪ de la part relative de la variance de X_k dans la variance de Y

Application : Nous voulons montrer l'importance relative d'un centrage sur la cible et d'une action d'amélioration sur la dispersion d'une caractéristique. Le résultat dépend bien sûr du cas particulier rencontré. Pour illustrer notre propos, considérons le cas particulier suivant :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$$

Considérons également le cas où toutes les variances sont du même ordre de grandeur sauf la variance de X_1 qui est le double des autres variances.

$$V(X_1) = 2V(X_2) = \dots = 2V(X_n) = 2V$$

$$V(Y) = \sum V(X_i) = (n+1)V$$

Supposons qu'une action d'amélioration conduise à la réduction de moitié de la variance de X_k

↪ Si $k = 1$ (Action sur la variance forte)

$$V'(Y) = \frac{n}{n+1} V(Y) \quad [7]$$

↪ Si $k = 2$ à n (action sur une variance faible)

$$V'(Y) = \frac{(n+1/2)}{n+1} V(Y) \quad [8]$$

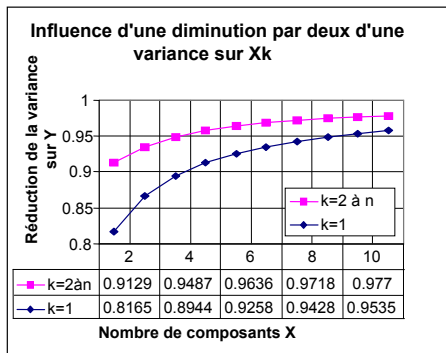


Figure 2 : Influence d'une variance

Dans le cas où la part relative de la variance est faible et n est grand, une

action de réduction significative de la variance par deux n'apporte aucune amélioration à la caractéristique Y . Par contre, l'action sur la moyenne est toujours efficace.

1.2. Principe 2 : la recherche du zéro défaut sur chaque caractéristique est un leurre

Le second principe est directement dépendant du premier principe. En effet, nous avons vu que l'action sur une variance dépend du poids α^2 et du nombre de caractéristiques alors que l'action sur la moyenne ne dépend que de α . Considérons pour alléger les écritures que : $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ T : Tolérance

Hypothèse de situation :

Toutes les caractéristiques sont centrées de telle sorte que $C_p = C_{pk} = 1.33$ soit

$$V(X_i) = T^2/64$$

$$E(Y) = \sum E(X) = C(Y) \quad [9]$$

$$V(Y) = \sum V(X) = (n) \frac{T^2}{64}$$

$$\text{soit } \sigma(Y) = T \frac{\sqrt{n}}{8} \quad [10]$$

Comparons deux situations de dégradation de la caractéristique k correspondant au même pourcentage hors tolérance sur la caractéristique k .

Situation 1 : centrage

La caractéristique k reste centrée, mais subit une augmentation de dispersion conduisant à un pourcentage hors tolérance.

$$C_{p_{Xk}} = C_{pk_{Xk}} < C_{p_{initial}} \text{ soit } \sigma_{Xk} = \frac{T}{6C_{p_{Xk}}}$$

$$E(Y) = \sum E(X) = C(Y) \quad [11]$$

à partir de l'équation 3 on tire :

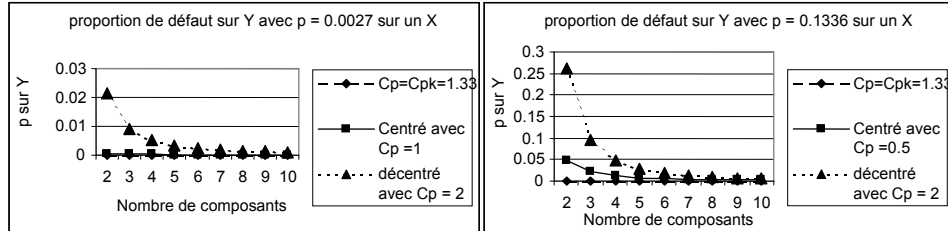


Figure 3 – Effet d'un décentrage et d'une augmentation de dispersion

$$V(Y) = \sum V(X) = (n-1) \frac{T^2}{64} + \frac{T^2}{36Cp_{Xk}^2}$$

$$\sigma(Y) = \frac{T}{2} \left(\sqrt{\frac{n-1}{16} + \frac{1}{9Cp_{Xk}^2}} \right) \quad [12]$$

Situation 2 : décentrage sur X_k

La caractéristique k est centrée, mais conserve un faible dispersion.

$Cp_{Xk}=2$ et le décentrage de $\delta\sigma$ tel que la proportion hors tolérance de la situation 2 soit égale à la situation 1.

$$V(X_k) = T^2/144 \quad E(X_k) = C(X_k) + \delta\sigma_{X_k}$$

$$E(Y) = \sum E(X) = C(Y) + \delta \frac{T}{12} \quad [13]$$

$$V(Y) = \sum V(X) = (n-1) \frac{T^2}{64} + \frac{T^2}{144}$$

$$\text{soit } \sigma(Y) = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{n-1}{4} + \frac{1}{9}} \quad [14]$$

à partir des équations 11 à 14, on peut facilement illustrer par la figure 3 l'influence d'un décentrage et d'une augmentation de la dispersion d'un X sur la caractéristique finale Y en fonction de plusieurs Cpk sous l'hypothèse d'un calcul statistique des tolérances tel que :

| | | | |
|-----------------------------------|--------|--------|--------|
| Cp_{Xk} | 0.5 | 0.75 | 1 |
| δ équivalent avec $Cp = 2$ | 4.89 | 4.03 | 3.22 |
| Proportion hors tolérance | 0.1336 | 0.0244 | 0.0027 |

La figure 3 montre bien que pour un même pourcentage hors tolérance, l'impact d'un décentrage sur la qualité finale est beaucoup plus important que l'impact d'une augmentation de la dispersion.

Conclusion

L'analyse que nous venons de réaliser nécessite de connaître la relation $Y=f(X)$. A partir de cette relation on peut en déduire les relations [2] et [3] dont l'analyse permet :

- de déterminer les tolérances de fabrication sur chaque caractéristiques X en fixant les cibles pour $E(X_i)$ et les intervalles de tolérance à partir des σ_{X_i} en prenant par exemple $T(X_i)=8\sigma_{X_i}$
- de choisir les actions prioritaires à engager en cas de non-conformité en analysant la conséquence d'une action de recentrage ou d'amélioration de la dispersion sur la qualité de Y

2. DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA RELATION Y = F(X)

Dans le processus de détermination des tolérances comme dans les choix des actions correctives en production, la prise en compte de la combinatoire des caractéristiques élémentaires dans la fonctionnalité du produit est fondamentale. Pour bien modéliser ce comportement, nous avons besoin d'une relation linéaire au moins du premier ordre entre les Y et les X.

Cette détermination est aisée si l'on dispose d'un modèle analytique entre la fonction résultante et les caractéristiques

élémentaires. Lorsque la relation n'est pas linéaire, on a alors recours à des approximations permettant de linéariser la fonction. Dans ce cas de figure les calculs sont souvent complexes et nécessitent l'aide d'un calculateur. On trouvera plus de détail sur le tolérancement statistique dans [PILLET 00]

Cependant, dans de nombreux cas, il n'est pas facile ou pas possible de trouver à partir d'un modèle la relation entre ces deux éléments. On doit avoir recours à une étude expérimentale. Deux méthodes peuvent alors être utilisées :

- ↪ les plans d'expériences ;
- ↪ les études en régressions multiples.

2.1. Tolérancement à partir de plans d'expériences

Peu de publications ont été consacrées à cette partie importante de la qualité que représente la détermination statistique des tolérances à partir d'études expérimentales. Une contribution intéressante [BISGAARD 00] porte sur le tolérancement statistique à partir de plan d'expériences dans le cas d'utilisation de CAO (Conception Assistée par Ordinateur). L'auteur se limite à une fonction de premier ordre en utilisant des plans de Plackett-Burman. Les caractéristiques étudiées sont des caractéristiques élémentaires et les essais sont générés par simulation sur CAO. Une autre étude [ALLEN 00] utilise une relation de second ordre en utilisant des plans en surface de réponse. Les essais sont également générés sur CAO en utilisant les calculs en éléments finis.

L'utilisation des plans d'expériences pour déterminer la relation $Y = f(X)$ à partir de la CAO permet de prendre en compte des phénomènes complexes tels que les déformations plastiques grâce à la modélisation. Elle assouplit

considérablement le travail par rapport à la tâche qui serait nécessaire pour réaliser tous les prototypes nécessaires à la matrice d'essai. De plus, compte tenu des dispersions de production, il serait très difficile de réaliser ces prototypes conformes aux plan d'expériences retenu. Il est donc très intéressant de retenir cette solution.

Cependant, cette approche est par nature limitée aux caractéristiques modélisables par la CAO. Il est courant de rencontrer des problèmes difficilement modélisable tels que :

- ↪ Les défauts de rugosité
- ↪ Les défauts de forme
- ↪ Certains défauts de position
- ↪ Les comportements complexes de sous-ensembles flexibles
- ↪ ...

Dans tous ces cas, le concepteur ne sait pas modéliser rapidement le comportement de la fonction résultante, et place les tolérances en fonction de son expérience avec tous les risques d'insatisfactions des clients et de surcoût. L'approche par régression multilinéaire peut apporter une réponse à ce type de problème.

2.2. Tolérancement à partir de régressions multilinéaires

La méthode utilisée nécessite de disposer d'un certain nombre de produits P_i sur lesquels on sait mesurer les caractéristiques X_i et le résultat Y .

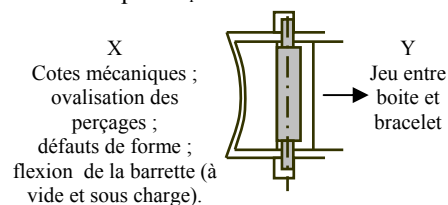


Figure 4 – Montage boîte bracelet

Pour illustrer ce principe prenons l'exemple d'un assemblage d'un bracelet de montre sur une boîte. Le problème a été simplifié pour des considérations de confidentialité et de simplification pédagogique pour ce document.

Nous ne retiendrons parmi tous les X étudiés, que 6 paramètres afin d'illustrer la méthode. On constate facilement en regardant les X qu'il était difficile de prendre en compte certains de ces éléments dans un tolérancement analytique ou même par plan d'expériences. Par contre la partie "cotes mécaniques" peut facilement se modéliser et il est inutile d'intégrer cette partie dans la régression multilinéaire. On a donc :

$$Y = f(X_{\text{mécanique}}) + f(X_{\text{hors mécanique}})$$

On transforme la réponse pour chaque Y par : $Y' = Y - f(X_{\text{mécanique}})$ La réponse peut donc être négative !

| N° | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Y |
|----|------|-------|------|-------|------|-----|---------|
| 1 | 0.00 | 0.627 | 0.22 | 0.001 | 0.03 | 4.7 | 0.0158 |
| 2 | 0.01 | 0.623 | 0.17 | 0.001 | 0.02 | 4.2 | -0.0051 |
| 3 | 0.01 | 0.579 | 0.09 | 0.000 | 0.03 | 4.4 | 0.0074 |
| 4 | 0.01 | 0.366 | 0.16 | 0.006 | 0.02 | 4.3 | 0.0092 |
| 5 | 0.00 | 0.472 | 0.19 | 0.000 | 0.02 | 4.4 | 0.0074 |
| 6 | 0.00 | 0.547 | 0.16 | 0.007 | 0.02 | 4.7 | 0.0134 |
| 7 | 0.01 | 0.516 | 0.20 | 0.002 | 0.03 | 4.9 | 0.0311 |
| 8 | 0.00 | 0.388 | 0.14 | 0.012 | 0.02 | 4.7 | 0.0236 |
| 9 | 0.01 | 0.610 | 0.15 | 0.001 | 0.02 | 4.1 | -0.0126 |
| 10 | 0.01 | 0.587 | 0.14 | 0.003 | 0.03 | 4.8 | 0.0311 |
| 11 | 0.01 | 0.482 | 0.21 | 0.001 | 0.03 | 4.8 | 0.0217 |
| 12 | 0.03 | 0.476 | 0.10 | 0.001 | 0.02 | 4.2 | 0.0008 |
| 13 | 0.00 | 0.439 | 0.14 | 0.001 | 0.03 | 4.9 | 0.0344 |
| 14 | 0.01 | 0.593 | 0.17 | 0.004 | 0.02 | 4.9 | 0.0319 |
| 15 | 0.01 | 0.519 | 0.18 | 0.005 | 0.03 | 5.0 | 0.0319 |
| 16 | 0.00 | 0.383 | 0.14 | 0.001 | 0.03 | 4.3 | 0.0018 |
| 17 | 0.01 | 0.503 | 0.14 | 0.005 | 0.03 | 4.1 | -0.0004 |
| 18 | 0.00 | 0.566 | 0.15 | 0.002 | 0.03 | 4.3 | -0.0051 |
| 19 | 0.00 | 0.683 | 0.14 | 0.006 | 0.02 | 4.9 | 0.0259 |
| 20 | 0.00 | 0.498 | 0.19 | 0.010 | 0.03 | 4.3 | -0.0032 |

Tableau 1 : les données de base

A partir d'une pré-série, il est facile de créer un tableau de données reliant Y avec les X_i . Le travail le plus long est un travail

de métrologie qui consiste à mesurer chaque X sur chaque produit.

On recherche une relation de type [1]. On écrit le tableau 1 sous forme matricielle :

$$Y = XC + e$$

e représente l'erreur expérimentale. C'est la partie de variation des Y non expliquée par les X_i .

La solution des coefficients α qui minimise les moindres carrés est alors :

$$C = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\text{avec } V(C) = (X'X)^{-1}\sigma_Y^2$$

Avec :

C : vecteur des coefficients α

X : matrice de configuration des essais

X' : Matrice transposée de X

X⁻¹ : Inverse de la matrice X

L'étude simple en régression multiple sur l'ensemble des prédicteurs donne le résultat suivant :

$$Y_2 = -0.194 + 0.203 X_1 - 0.0264 X_2 - 0.0403 X_3 - 0.040 X_4 + 0.012 X_5 + 0.0497 X_6$$

| Predicteur | Coef | SE Coef | T | P |
|------------|----------|---------|--------|-------|
| Constant | -0.19399 | 0.01511 | -12.84 | 0.000 |
| X1 | 0.2026 | 0.1412 | 1.43 | 0.175 |
| X2 | -0.02641 | 0.01121 | -2.36 | 0.035 |
| X3 | -0.04027 | 0.03075 | -1.31 | 0.213 |
| X4 | -0.0402 | 0.3148 | -0.13 | 0.900 |
| X5 | 0.0118 | 0.1970 | 0.06 | 0.953 |
| X6 | 0.04967 | 0.00329 | 15.08 | 0.000 |

$$S = 0.004039 \quad R\text{-Sq(adj)} = 92.8\%$$

Seuls les caractéristiques X_2 et X_6 sont significatives dans cette première étape (risque p inférieur = 0,05). Plusieurs solutions sont généralement proposées pour améliorer cette première étape :

↳ La régression étape par étape (stepwise)

↳ La régression par meilleur sous-ensemble (Best Subsets)

L'application de ces deux méthodes permet de conclure sur le modèle le plus adapté.

$$Y_2 = -0.195 + 0.256 X_1 - 0.0267 X_2 + 0.0486 X_6$$

| Predicteurs | Coef | SE Coef | T | P |
|-------------|----------|----------|--------|-------|
| Constant | -0.19536 | 0.01400 | -13.96 | 0.000 |
| X1 | 0.2561 | 0.1225 | 2.09 | 0.053 |
| X2 | -0.02667 | 0.01026 | -2.60 | 0.019 |
| X6 | 0.048556 | 0.002970 | 16.35 | 0.000 |

s = 0.003874 R-Sq (adj) = 93.4%

L'équation précédente explique 93.4% des fluctuations mesurées sur Y'. Nous avons retrouvé par corrélation la relation $Y' = f(X_{\text{autre mécanique}})$ que nous ne savions pas établir par une relation analytique. L'erreur résiduelle a comme écart type $\sigma_e = 0,003874$. Cette erreur provient d'autres éléments non pris en compte dans l'étude, y compris les erreurs de mesure.

Les valeurs cibles sont fixées par la relation :

$$Y' = -0.19 + 0.26 X_1 - 0.027 X_2 + 0.049 X_6$$

On en déduit facilement les tolérances avec la relation suivante :

$$V(Y') = 0.26^2 V(X_1) + 0.027^2 V(X_2) + 0.049^2 V(X_6) + \sigma_e^2$$

Cette relation s'écrit également :

$$\sigma(Y') = \sqrt{0.26^2 \sigma_{X_1}^2 + 0.027^2 \sigma_{X_2}^2 + 0.049^2 \sigma_{X_6}^2 + 0,0039^2}$$

Elle permet de déterminer les tolérances sur les trois caractéristiques élémentaires. Si nous nous étions limités aux études de corrélation simple, nous aurions trouvé les graphes en corrélation simple donnés en figure 5.

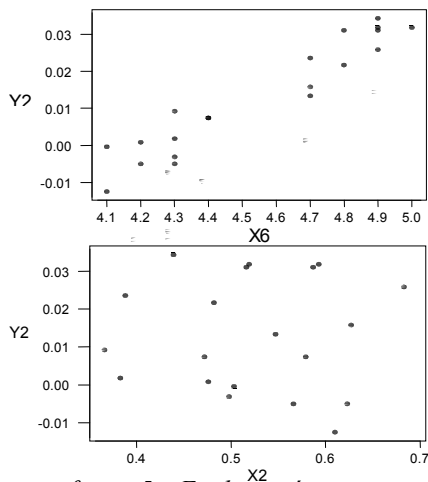


figure 5 – Etude en régression simple

Ces graphes montrent une forte corrélation entre Y et X₆, mais pas de relation entre Y et X₂. La forte corrélation entre X₆ et Y "masque" les relations secondaires avec X₁ et X₂. Il était donc indispensable de traiter le problème globalement plutôt que de faire plusieurs régressions simples.

2.3. Les risques d'une telle étude

L'étude des relations entre les Y et les X à partir de régression linéaire offre de très nombreuses opportunités. Les applications sont multiples, et les possibilités désormais offertes par les logiciels statistiques toujours plus simples à utiliser et plus performant ouvre la voie à une véritable mise en œuvre de ces méthodes. Cependant, cette méthode n'est pas sans risque, et faute de place, nous nous limiterons à les énumérer :

- ↪ Il faut disposer de données dans lesquelles les X soient le plus décorrélés entre eux. Pour cela, un tirage aléatoire des composants avant l'assemblage est nécessaire.
- ↪ Il faut nécessairement disposer de moyens de mesure capables, tant pour mesurer les X que les Y. Dans le cas contraire on risque de conclure à l'absence de relation et à des tolérances inadaptées.
- ↪ Bien que les logiciels offrent désormais des aides puissantes, la relation n'est pas toujours évidente à faire ressortir. Un peu d'habitude est parfois utile.

REFERENCES

- [PILLET 99] Pillet M. - *Qualité des produits et qualité des caractéristiques élémentaires, l'objectif cible de la conception à la fabrication* – Qualita 1999 – Paris
- [PILLET 00] Pillet M. - *Appliquer la Maîtrise statistique des procédés*, Ed d'organisation 2000

[BISGAARD 00] Bisgaard S. Graves S. Shin G.
*Tolerancing Mechanical Assemblies With
CAD and DOE.* Journal of Quality
Technology, Vol 32 No 3, July 2000. p231-
240.

[ALLEN 00] Allen T., Yu L. Bernshteyn M. –
*Low-cost Response surface methods applied
to the design of plastic fasteners* - Quality
Engineering, 12(4), 583-591 (2000) - p583-
591.

[PARLAR 99] Parlar M. , Wesolowsky O.
*Specification Limits, Capability Indices, and
Process centering in Assembly Manufacture* -
Journal of Quality technology Vol 31 n°3 –
317-325 (1999)