



# Modélisation dynamique des réseaux d'énergie électrique tenant compte des propriétés d'invariance d'échelle

Thi Tinh Minh Le

► **To cite this version:**

Thi Tinh Minh Le. Modélisation dynamique des réseaux d'énergie électrique tenant compte des propriétés d'invariance d'échelle. Energie électrique. Université de Grenoble, 2014. Français. <tel-01076247>

**HAL Id: tel-01076247**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01076247>**

Submitted on 21 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Génie Électrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Thi-Tinh-Minh LE**

Thèse dirigée par **Nicolas RETIERE**

préparée au sein du **Laboratoire de Génie Électrique de Grenoble (G2ELAB)**  
dans l'**École Doctorale d'Électronique, Électrotechnique, Automatique et Traitement de Signal (EEATS)**

# Modélisation dynamique des réseaux d'énergie électrique tenant compte des propriétés d'invariance d'échelle

Thèse soutenue publiquement le **07/05/2014**,  
devant le jury composé de :

**Monsieur Nouredine HADJ-SAID**

Professeur à l'INP Grenoble, Président

**Monsieur Jean-Guy CAPUTO**

Maître de conférence à l'INSA de Rouen, Rapporteur

**Monsieur Georges KARINIOTAKIS**

Maître de recherche de Mines ParisTech, Rapporteur

**Monsieur Frédéric SUARD**

Ingénieur de Recherche de CEA Saclay, Examineur

**Monsieur Jean-christian ANGLES-DAURIAC**

Directeur de Recherche de l'Institut NEEL (CNRS), Examineur

**Monsieur Nicolas RETIERE**

Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble, Directeur de thèse





## Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du laboratoire de Génie Electrique de Grenoble, dans l'équipe «Systèmes et réseaux électriques».

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour le temps et l'intérêt porté à ces travaux :

M. Nouredine HADJ-SAID (Professeur à l'INP Grenoble), qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

M. Jean-Guy CAPUTO (Maître de conférence à l'INSA de Rouen) et M. Georges KARINIOTAKIS (Maitre de recherche de Mines ParisTech), d'avoir été rapporteurs de cette thèse et pour m'avoir donné plusieurs suggestions a fin d'améliorer ces travaux.

M. Frédéric SUARD (Ingénieur de Recherche de CEA Saclay) et M. S Jean-Christian ANGLES-DAURIAC (Directeur de Recherche de l'Institut NEEL (CNRS)) d'avoir accepté de participer à ce jury.

J'adresse mes remerciements tout particuliers à Nicolas RETIERE (Professeur à l'Université Joseph Fourier) pour m'avoir dirigé et soutenu tout au long de ma thèse. Avec ses aides, sa disponibilité, son esprit critique et sa rigueur, j'ai surmonté de pas en pas les difficultés de la recherche et de la rédaction de cette thèse.

Je remercie chaleureusement mes amis étrangers au G2Elab : Mariam AHMED, SANCHEZ TORRES José, Raha VAF AEI, Julian Fernandez, Nathalie SETTE,...pour ses encouragements, ses aides et ses appuis particulièrement pendant la dernière année et les bons moments passés ensemble.

Un très grand merci à tous mes amis vietnamiens au G2Elab, pour vos sentiments comme une grande famille vietnamienne en France, parmi eux : Trung Sơn, Hoàng Anh, Phú, Thành còi, Hòa xín, Hải tặc, Hải Vân Idol...

Enfin, je remercie toute ma famille surtout ma mère pour leur support et leur encouragement tout au long de ma thèse.



# TABLES DES MATIERES

<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>1</b>
<b>PARTIE I : CONTEXTE ET PROBLEMATIQUES.....</b>	<b>3</b>
<b>CHAPITRE 1 : LA MODELISATION DYNAMIQUE DES RESEAUX ELECTRIQUES .....</b>	<b>6</b>
1. UN RESEAU ELECTRIQUE DE PLUS EN PLUS COMPLEXE .....	6
2. LA MODELISATION DYNAMIQUE DES RESEAUX ELECTRIQUES.....	9
2.1. <i>Les deux grandes classes de modèles</i> .....	9
2.2. <i>Les modèles dynamiques équivalents</i> .....	11
2.3. <i>Modèle équivalent hautes fréquences</i> .....	12
2.3.1. Approche FDNE (Frequency-Dependent Network Equivalent).....	12
2.3.2. Approche TLNE (Two-Layer Network Equivalent).....	13
2.4. <i>Modèle équivalent basses fréquences</i> .....	14
2.4.1. La méthode modale.....	15
2.4.2. La méthode d'agrégation par analyse de cohérence.....	16
2.4.3. La méthode d'identification.....	17
2.5. <i>Modèle équivalent large bande</i> .....	17
3. CONCLUSION .....	17
<b>CHAPITRE 2 : DES NOUVEAUX OUTILS POUR ANALYSER LA COMPLEXITE DES RESEAUX ELECTRIQUES.....</b>	<b>20</b>
1. LA THEORIE DES GRAPHES COMPLEXES .....	20
2. L'INVARIANCE D'ECHELLE .....	21
2.1. <i>Définition</i> .....	21
2.2. <i>Mesures de l'invariance d'échelle dans un réseau</i> .....	23
2.2.1. La dimension fractale .....	23
2.2.2. La dimension spectrale .....	25
2.2.3. La dimension de marche aléatoire .....	26
2.3. <i>Relations entre la dimension fractale, la dimension spectrale et la dimension de marche aléatoire</i> .....	26
2.4. <i>Méthodes de calcul des mesures d'invariance d'échelle</i> .....	27
2.4.1. Méthodes de calcul de la dimension fractale .....	27
2.4.2. La méthode des boîtes .....	28
2.4.3. La méthode de croissance d'une boule .....	29
2.4.4. Méthodes de calcul pour la dimension spectrale .....	30
2.5. <i>La renormalisation</i> .....	31
3. CONCLUSION .....	31
<b>PARTIE II : CONTEXTE ET PROBLEMATIQUES .....</b>	<b>35</b>
<b>CHAPITRE 3 : MESURES FRACTALES DE RESEAUX-MODELES .....</b>	<b>36</b>
1. LE RESEAU ELECTRIQUE DE CANTOR.....	36
1.1. <i>Structure du réseau de Cantor</i> .....	36
1.2. <i>Calcul de la dimension fractale du réseau</i> .....	37
1.3. <i>Application de la transformation de renormalisation</i> .....	38
1.4. <i>Calcul de la dimension spectrale du réseau de Cantor</i> .....	41
2. LE RESEAU ELECTRIQUE DE SIERPINSKI.....	42
2.1. <i>Construction et structure du réseau</i> .....	42
2.2. <i>Calcul de la dimension fractale</i> .....	43

2.3.	<i>Renormalisation du réseau de Sierpinski</i> .....	46
2.4.	<i>Calcul de la dimension spectrale</i> .....	49
3.	CONCLUSION .....	51
<b>CHAPITRE 4 : MESURES FRACTALES DE RESEAUX REALISTES</b> .....		<b>52</b>
1.	LE RESEAU IEEE 37 NŒUDS .....	52
1.1.	<i>Présentation du réseau</i> .....	52
1.2.	<i>Découpage en niveaux du réseau</i> .....	53
1.3.	<i>Calcul de la dimension fractale</i> .....	53
1.4.	<i>Calcul de la dimension spectrale</i> .....	56
2.	LE RESEAU IEEE 118 NŒUDS .....	58
2.1.	<i>Présentation du réseau</i> .....	58
2.2.	<i>Dimension fractale</i> .....	59
2.3.	<i>Calcul de la dimension spectrale</i> .....	60
3.	CONCLUSION .....	62
<b>PARTIE III : CONTEXTE ET PROBLEMATIQUES</b> .....		<b>67</b>
<b>CHAPITRE 5 : COMPORTEMENT FREQUENTIEL ASYMPTOTIQUE D'UN RESEAU DE SIERPINSKI.</b> .....		<b>66</b>
1.	REPONSE FREQUENTIELLE D'UN RESEAU DE SIERPINSKI .....	66
2.	MODELISATION ASYMPTOTIQUE AUX HAUTES FREQUENCES .....	68
3.	MODELISATION ASYMPTOTIQUE AUX BASSES FREQUENCES .....	68
4.	MODELISATION ASYMPTOTIQUE INTERMEDIAIRE .....	69
4.1.	<i>Transformation de renormalisation et admittance d'entrée</i> .....	69
4.2.	<i>Point fixe de la relation de récurrence portant sur les coefficients de <math>Y_{bus}</math></i> .....	72
4.3.	<i>Point fixe de la relation de récurrence portant sur l'admittance du réseau</i> .....	73
4.4.	<i>Modèle asymptotique de l'impédance d'entrée</i> .....	75
5.	MODELISATION ASYMPTOTIQUE LARGE BANDE .....	76
6.	CONCLUSION .....	78
<b>CHAPITRE 6 : MODELE DYNAMIQUE D'UN RESEAU REALISTE</b> .....		<b>80</b>
1.	APPROCHE « BOITE NOIRE » .....	80
1.1.	<i>La méthode d'identification dite de « Vector Fitting »</i> .....	80
1.1.1.	Cas de la première itération .....	81
1.1.2.	Résolution des itérations suivantes .....	82
1.2.	<i>Résultats d'identification pour des réseaux réalistes</i> .....	83
1.2.1.	Identification du réseau IEEE 37 nœuds .....	83
1.2.2.	Identification du réseau IEEE 118 nœuds .....	84
2.	VERS UN MODELE DE CONNAISSANCE .....	87
2.1.	<i>Modèle asymptotique</i> .....	87
2.1.1.	Application au réseau IEEE 37 nœuds .....	88
2.1.2.	Application au réseau IEEE 118 nœuds .....	88
2.2.	<i>Modèle des résonances</i> .....	89
2.2.1.	Invariance d'échelle et initialisation du « Vector Fitting » .....	90
2.2.2.	Application aux réseaux réalistes .....	92
2.3.	<i>Le modèle fréquentiel complet</i> .....	94
2.3.1.	Modèle du réseau IEEE 37 nœuds .....	94
2.3.2.	Modèle du réseau IEEE 118 nœuds .....	95
3.	CONCLUSION .....	96

<b>CONCLUSIONS GENERALES ET PERPESTIVE .....</b>	<b>98</b>
<b>BIBLIOGRPHAPHIE .....</b>	<b>102</b>
<b>ANNEXE.....</b>	<b>112</b>
<b>ANNEXE A .....</b>	<b>114</b>
<b>ANNEXE B .....</b>	<b>118</b>
<b>ANNEXE C .....</b>	<b>119</b>
<b>ANNEXE D.....</b>	<b>122</b>
<b>TABLES DES ILLUSTRATIONS .....</b>	<b>128</b>
<b>TABLES DES TABLEAUX.....</b>	<b>132</b>
<b>PUBLICATIONS .....</b>	<b>134</b>





# Introduction générale

---



Les réseaux électriques de transport et de distribution sont conçus et exploités pour acheminer l'électricité depuis les producteurs jusqu'aux usagers, en garantissant un niveau de qualité et des conditions de sécurité optimales, au meilleur coût et avec la plus grande efficacité énergétique possible. L'arrivée massive de la production décentralisée, surtout des sources d'énergie renouvelables, a provoqué des transformations importantes de l'exploitation et de la planification des réseaux. Ceci s'est accompagné d'un développement des marchés de l'énergie et du développement de nouveaux usages tels que les véhicules électriques.

Dans ce contexte, la notion de « Smart Grid » qui désigne le réseau électrique intelligent intégrant de plus en plus de technologies d'information et de communication a pris une grande importance lors de la décennie passée. En effet, afin d'optimiser toute la chaîne énergétique, de la production, à la consommation d'électricité, le réseau électrique doit mettre en œuvre des nouvelles fonctions d'analyse, de contrôle et de protection. Ceci doit permettre au réseau électrique de devenir plus flexible, plus accessible, plus fiable et économique.

Mais cela rend en même temps plus difficile la modélisation et l'analyse du réseau. On est en effet passé d'un réseau compliqué à modéliser du fait de sa grande taille à un réseau complexe qui pose de nouveaux problèmes aux ingénieurs et aux chercheurs qui s'y intéressent. Non seulement, la taille des réseaux va toujours croissante mais aussi les interactions en son sein sont de plus en plus nombreuses et surtout, il est de plus en plus difficile de prévoir le fonctionnement du réseau, par exemple les conséquences d'une faute ou tout simplement comment vont évoluer ses caractéristiques si son architecture ou son mode d'exploitation sont modifiés (LAPIERRE, LE MOIGNE, & S.).

En conséquence, les modèles habituels ne permettent plus d'analyser simplement les propriétés d'un réseau. Et les démarches d'optimisation deviennent de plus en plus lourdes, le concepteur de réseau n'ayant à priori que peu d'informations sur la manière de mener la recherche du point optimal.

Pour illustrer la problématique associée à la complexité des réseaux électriques intelligents, prenons le cas de sa structure topologique. Cette structure a des conséquences déterminantes pour les pertes, les chutes de tension, la stabilité dynamique, la résistance aux pannes et aux fautes intentionnelles, etc. Dans les approches classiques de modélisation dynamique, les relations avec la topologie ne sont pas explicites. Pour les mettre en évidence, il faut faire appel à des modèles numériques qui sont en général lourds à manipuler, difficiles à identifier et à exploiter. Pourtant, c'est à ce prix qu'on pourra trouver des liens entre, par exemple, le degré de maillage d'un réseau et sa capacité de résister à des pannes. Des approches de connaissance, plus parcimonieuses, plus analytiques pour comprendre

les liens entre les caractéristiques topologiques d'un réseau électrique intelligent et ses propriétés constitueraient donc une alternative particulièrement intéressante

Les travaux de thèse d'O. ENACHEANU (2008) et d'A. AMRANE (2010), et le master 2 de T.T.M LE (2010) ont pu montrer que certaines caractéristiques d'un réseau électrique présentent un caractère invariant à différentes échelles d'observation. Cette propriété est bien connue pour les fractales et permet de mettre en œuvre une modélisation simple et compacte qui fait un lien étroit, quasi analytique, entre un phénomène et sa représentation mathématique. Les objectifs principaux mon travail de thèse sont donc de confirmer l'invariance d'échelle et d'étudier la possibilité d'une modélisation des réseaux d'énergie électrique tenant compte de ces propriétés d'invariance. On se focalisera essentiellement sur les aspects dynamiques. Il est en effet crucial de comprendre comment la topologie d'un réseau peut impacter son comportement dynamique pour anticiper des fonctionnements problématiques du fait d'interactions dynamiques non désirées.

Dans la *première partie* de ce manuscrit, nous commencerons par introduire la problématique générale des réseaux électriques aujourd'hui. Nous balaierons rapidement les techniques classiques de réduction d'ordre et d'agrégation pour les modèles dynamiques. Ces approches ont surtout été développées pour traiter les effets de la grande taille des réseaux électriques. Dans le deuxième chapitre, nous présenterons des outils et des méthodes pour analyser des réseaux complexes en se basant sur leurs propriétés topologiques. La notion de fractalité sera au cœur de ce deuxième chapitre car elle se prête aisément à l'étude des invariances d'échelles, une fractale étant par construction autosimilaire. Cette première partie se conclura par une présentation de la démarche adoptée pour le reste du mémoire.

La *deuxième partie* s'intéressera à l'exploration de l'invariance d'échelle des réseaux électriques. Pour cela, on tâchera de déterminer les grandeurs fractales qui permettent de définir l'autosimilarité des réseaux électriques. Les résultats seront obtenus tout d'abord dans le cas de réseaux-modèles fractals et ensuite pour deux types différents de réseaux électriques réalistes. Il faut souligner que, pour ces premiers travaux, nous ne nous focaliserons que sur le réseau de puissance et non pas sur son infrastructure d'infrastructure et de communication.

Dans la *troisième partie* nous essaierons d'exploiter le lien entre la topologie autosimilaire d'un réseau électrique et son comportement dynamique en construisant un modèle dynamique basé sur l'invariance d'échelle. On montrera comment il est possible d'approcher le modèle d'un réseau fractal à partir des dimensions caractéristiques de son autosimilarité. Nous transposerons cette modélisation à des réseaux réalistes. Pour compléter cette première modélisation sur les aspects ignorés par l'invariance d'échelle, il sera nécessaire d'avoir recours à une technique d'identification connue pour ses performances, le « vector fitting ». On proposera

d'ailleurs une évolution de cette technique basée une fois encore sur l'invariance d'échelle.

En résumé, nous tâcherons tout au long du mémoire de montrer comment un réseau électrique peut recéler des propriétés topologiques, le plus souvent ignorées, et pourtant essentielles car pouvant guider de nouvelles approches de modélisation.



# Partie I

## Contexte et problématiques

---



# Sommaire

<b>CHAPITRE 1</b> .....	<b>6</b>
1. UN RESEAU ELECTRIQUE DE PLUS EN PLUS COMPLEXE .....	6
2. LA MODELISATION DYNAMIQUE DES RESEAUX ELECTRIQUES.....	9
2.1. <i>Les deux grandes classes de modèles</i> .....	9
2.2. <i>Les modèles dynamiques équivalents</i> .....	11
2.3. <i>Modèle équivalent hautes fréquences</i> .....	12
2.4. <i>Modèle équivalent basses fréquences</i> .....	14
2.5. <i>Modèle équivalent large bande</i> .....	17
3. CONCLUSION .....	17
<b>CHAPITRE 2</b> .....	<b>20</b>
1. LA THEORIE DES GRAPHES COMPLEXES .....	20
2. L'INVARIANCE D'ECHELLE .....	21
2.1. <i>Définition</i> .....	21
2.2. <i>Mesures de l'invariance d'échelle dans un réseau</i> .....	23
2.3. <i>Relations entre la dimension fractale, la dimension spectrale et la dimension de marche aléatoire</i> .....	26
2.4. <i>Méthodes de calcul des mesures d'invariance d'échelle</i> .....	27
2.5. <i>La renormalisation</i> .....	31
3. CONCLUSION .....	31

## Chapitre 1

# La modélisation dynamique des réseaux électriques

*Les réseaux électriques ont toujours été compliqués. Aujourd'hui ils deviennent de plus en plus complexes par la difficulté à prédire leur comportement. La modélisation dynamique a souvent eu recours à des méthodes spécifiques pour simplifier la représentation mathématique des réseaux. Si ces méthodes ne sont peut-être plus adaptées à la modélisation des réseaux électriques intelligents, elles constituent toutefois la base des travaux qui concernent la prise en compte de leur complexité. Ces méthodes font l'objet de ce premier chapitre.*

## 1. Un réseau électrique de plus en plus complexe

Traditionnellement, un réseau électrique comprend toujours quatre grandes parties: la production, le transport, la distribution et enfin la consommation (cf. Figure 1-1).

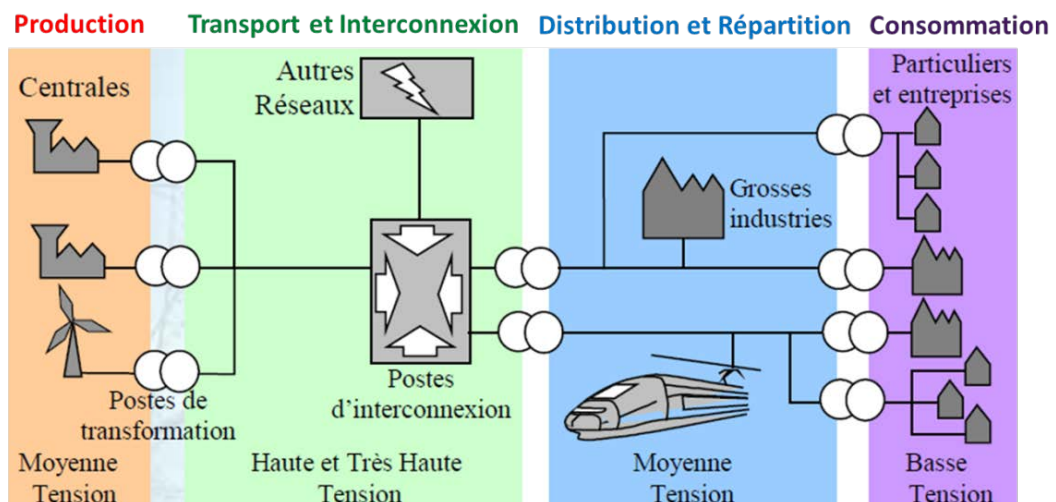


Figure 1-1. Les parties essentielles d'un réseau électrique.

(Source : [www.creea.u-bordeaux1.fr](http://www.creea.u-bordeaux1.fr) (2008))

La production est la transformation de l'ensemble des énergies convertibles en énergie électrique. En France, en 2010, par exemple, 74,3% de l'énergie électrique est produite à partir de sources nucléaires, 12,2% est d'origine hydraulique, 11,0% est d'origine thermique fossile, le reste 2,5% provient des énergies renouvelables comme les éoliennes, l'énergie solaire, etc.

Les réseaux de transport et de distribution transportent l'énergie électrique sous une forme triphasée et sinusoïdale dont les caractéristiques sont la fréquence, les niveaux de tension et les couplages des terminaisons.

En France, le réseau de transport HTB est actuellement maillé et fonctionne en « interconnexion généralisée » avec le reste de l'Europe. Avec 46 lignes d'interconnexion aux 6 frontières françaises, les réseaux de transport français participent au maillage de la plaque continentale. Ceci permet de fluidifier les échanges entre les pays, d'assurer une meilleure intégration du marché européen de l'électricité, et d'assurer en permanence la sûreté du fonctionnement du réseau (RTE, 2013). Par contre, les réseaux de distribution HTA et BT sont de structure radiale afin d'utiliser de plans de protection simples et robustes.

Aujourd'hui, les économies d'énergie et l'efficacité énergétique sont au premier rang des préoccupations. Les économies d'énergie consistent à adapter la demande aux pénuries d'énergie. Divers obstacles institutionnels, économiques et sociaux peuvent cependant retarder ou entraver la réalisation des économies d'énergie. L'efficacité énergétique maintient une demande normale tend à accroître l'efficacité de l'utilisation de l'énergie, de sorte qu'elle aide à réduire la consommation énergétique tout en maintenant le même niveau d'activité (par exemple, un éclairage plus efficace). Les raisons qui motivent la recherche d'économies d'énergie ou une plus grande efficacité énergétique sont la hausse et l'instabilité des prix, les contraintes qui s'exercent sur les nouveaux moyens de production, l'impossibilité de construire de nouvelles infrastructures de transport de l'énergie et enfin la maîtrise des impacts environnementaux de la production d'énergie électrique (Canadienne, 2007).

Pour répondre à ces enjeux énergétiques, on assiste depuis plus d'une décennie à une croissance rapide de la production décentralisée, surtout sous la forme de sources d'énergie renouvelable. Cela permet d'obtenir des producteurs ayant de faibles émissions de gaz à effet et de réduire le recours aux énergies fossiles aux stocks qui ne sont pas infinis.

Avec le développement des producteurs décentralisés, le réseau de distribution devient un point de raccordement des sources d'énergie électrique (Institut Montaigne, 2012). D'un point de vue positif, cela permet aux clients, aux fournisseurs, aux institutions d'être tous impliqués dans l'avenir de la fourniture d'électricité (European Commission, 2006). Par contre, cette insertion massive au niveau du réseau de distribution conduit à un changement de paradigme. Les flux d'énergie ne sont plus distribués essentiellement « verticalement » (c'est-à-dire de la haute tension à la basse tension), mais aussi « horizontalement » (c'est-à-dire entre les mêmes niveaux de tension) voire ils s'inversent et remontent le cours normal des réseaux traditionnels. On trouve là un premier élément de complexité.

Au même moment, on a assisté à une libéralisation des marchés de l'énergie qui a entraîné de nouveaux modes de fonctionnement des réseaux électriques pour assurer la flexibilité du fonctionnement du système d'énergie électrique, la qualité et la sécurité de sa fourniture d'énergie, le développement d'un marché de l'énergie concurrentiel, des prix contrôlés avec des tarifs prévisibles. Ces nouveaux modes de fonctionnements loin des monopoles connus auparavant, la multiplication d'acteurs de plus en plus décentralisés dans le système d'énergie électrique est un deuxième élément de complexité.

De plus, de nombreuses technologies de l'information et de la communication (TIC) ont été intégrées dans les réseaux électriques afin de mesurer, de contrôler, de stocker, de transmettre les nombreuses grandeurs utiles à leur bon fonctionnement. Bien sûr tout cela doit se faire avec des durées compatibles avec le respect des contraintes dynamiques des réseaux (Amin & Wollenberg, 2005). Le réseau électrique traditionnel a donc été remplacé par le Smart Grid, le réseau électrique intelligent qui couple étroitement l'infrastructure électrique et TIC dans un même système global. Le Smart Grid recouvre une réalité multiforme qui concerne l'émergence des sources d'énergies dispersées et intermittente, les innovations technologiques en relation avec les TIC, la libéralisation des marchés de l'énergie électrique. La notion de microgrids qui définit des sous-réseaux isolés mais conservant une capacité minimale de production et de maintien de l'équilibre production-consommation afin d'assurer la continuité de service de certaines zones en cas d'incidents peut être incluse dans l'ensemble « Smart Grid » (Katiraei & Iravani, 2006). Le recours massif aux sources d'énergie renouvelables dans les infrastructures ferroviaires relève aussi de problématiques « Smart Grid » (Pankovits, et al., 2013). La demande sociale en relation avec l'énergie dans nos quotidiens est aussi un thème qui peut être abordé dans les Smart Grids (Sonnnino, 2012). Mais plus encore, c'est l'interaction entre tous ces éléments qui définit le mieux le Smart Grid. On parle ainsi d'un « réseau de réseaux » et c'est certainement l'élément le plus déterminant de la nouvelle complexité des réseaux électriques (Monti & Ponci, 2012), (European Commission, 2014). En considérant le Smart Grid comme un système complexe, ses caractéristiques peuvent être classées en trois catégories (Kuznetsova, Culver, & Zio, 2011). La première catégorie concerne les caractéristiques intrinsèques au Smart Grid : son hétérogénéité, sa décomposition possible en sous-systèmes et en composants élémentaires, son absence d'échelle caractéristique du fait de l'empilement de couches inter agissantes entre elles. La deuxième catégorie concerne des caractéristiques plus dynamiques : son processus de croissance fait par agrégation de nouveaux composants et sous-systèmes, la difficulté de prédire son comportement dynamique qui peut même apparaître dans certaines circonstances comme chaotiques (cas des cascades de défaut (Hadjsaid, 2012)). Enfin, il existe une troisième catégorie concernant les facultés d'auto-organisation, d'auto-apprentissage,

d'auto-cicatrisation du Smart Grid, ses facultés à intégrer des objets issus de plusieurs disciplines.

Il existe des liens forts entre ces différentes caractéristiques. Pour faire simple, il semble bien que les caractères intrinsèques du Smart Grid rendent difficilement compréhensibles ces traits de caractères dynamiques. C'est pourtant une condition importante pour bénéficier au mieux des avantages des Smart Grids à répondre à des sollicitations les plus diverses.

Pragmatiquement, pour l'ingénieur, cela pose des problèmes de modélisation, d'analyse des phénomènes, de dimensionnement de nouvelles solutions. Si des travaux ont pu être menés sur d'autres systèmes complexes, informatiques ou biologiques par exemple, l'étude de la complexité dans le système électrique en est encore à ses débuts (Rozel, 2009), (Sanchez Torres, 2013). Cette thèse se veut une contribution à cette étude en nous focalisant non pas sur la modélisation du Smart Grid dans son ensemble mais raisonnablement en nous focalisant sur la modélisation dynamique du réseau électrique qui est en son cœur. Par contre, nous allons privilégier des approches qui prennent en compte dès leur définition la complexité des systèmes à modéliser.

## 2. La modélisation dynamique des réseaux électriques

### 2.1. Les deux grandes classes de modèles

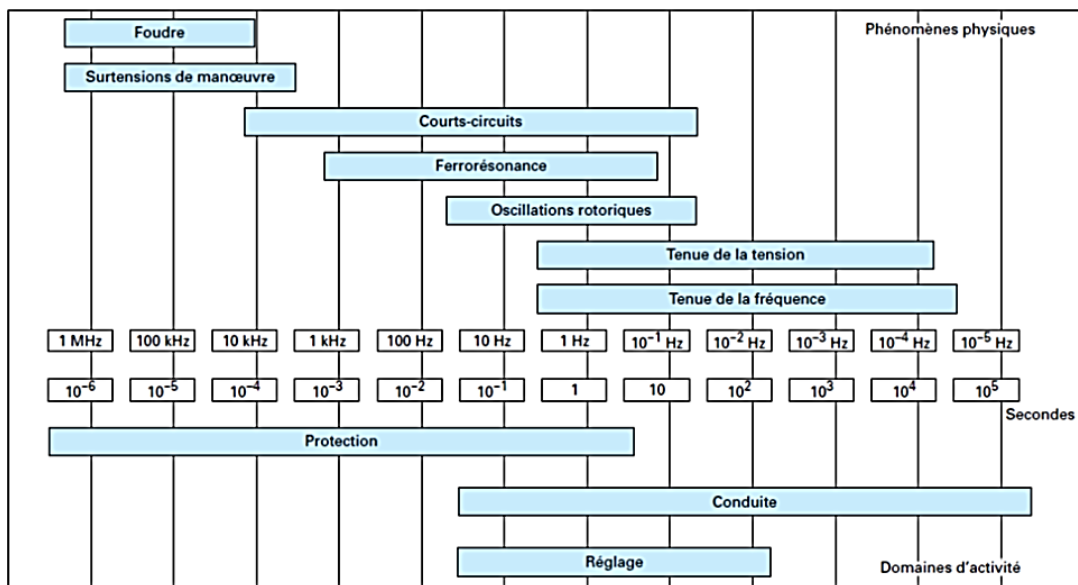


Figure 1-2. Echelles temporelles des différents phénomènes physiques dans un réseau  
(Source : (Meyer & al., 1998))

Les phénomènes se produisant dans un réseau électrique ont des durées très variables. Elles peuvent aller de la microseconde, aux heures, ou même aux jours en

fonction de ce qui est observé. La Figure 1-2 résume sur une double échelle temps/fréquence les grandes catégories de phénomènes qui se produisent dans un réseau électrique (Meyer & al., 1998).

Pour leur simulation, il existe deux grandes classes de modèles (Mahseredjian, 2009):

- 1) Le modèle électromagnétique (EMT pour « électromagnétique transient »): adapté pour la modélisation des phénomènes transitoires en hautes fréquences, comme les chocs de foudre, les surtensions de manœuvre ou les effets HF des dispositifs d'électronique de puissance sur le comportement du réseau. Le pas de temps de simulation est choisi très petit en fonction du phénomène étudié, typiquement de l'ordre de la centaine de microsecondes. Généralement, les réseaux considérés sont de taille plutôt réduite car à fréquence élevée, les lignes du réseau limitent la propagation des phénomènes considérés (Semlyen & Gustavsen, 2009).
- 2) Le modèle de type phaseur: adapté pour analyser la répartition de puissance, les problèmes de stabilité associés à la tenue de fréquence ou de tension, et plus généralement les transitoires de nature électromécanique qui ont des fréquences caractéristiques autour du Hz. Ce modèle à base d'équations algèbro-différentielles est adapté pour des comportements aux basses fréquences avec un pas de temps de calcul grand et peut s'appliquer à des réseaux de plus de 50.000 nœuds.

Une différence importante entre les deux classes de modèle réside dans la modélisation du réseau proprement dit. Dans le cas du transitoire électromagnétique, la propagation dans les lignes électriques peut être déterminante et il est nécessaire de les représenter par les équations aux dérivées partielles qui lient la dérivée spatiale des grandeurs électriques du réseau à leur dérivée temporelle (Mahseredjian & al., 2007).

Dans le cas des régimes dynamiques aux basses fréquences, la dynamique du réseau n'est plus déterminante. C'est bien plus souvent la dynamique des éléments actifs du réseau (producteurs, charges actives, FACTS, boucles de régulation) qui déterminent la réponse du système électrique. Elle est représentée par un ensemble d'équations différentielles et de fonctions de transfert. Les lignes électriques sont donc représentées en régime harmonique par une simple impédance et le réseau proprement dit est simulé par un calcul de répartition de charge.

Une telle dichotomie ne va pas sans poser quelques problèmes. En effet, les réseaux électriques sont maintenant fortement interconnectés à l'échelle de plusieurs pays et de nombreux éléments actifs sont présents à toutes les échelles du réseau.

Cela a deux conséquences importantes. D'une part, même pour les études en basses fréquences, il n'est plus raisonnable de simuler le système complet. On s'oriente donc vers des modèles dynamiques équivalents pour réduire l'ordre de la représentation mathématique du modèle d'étude. D'autre part, les interactions dynamiques peuvent se faire sur de grandes distances et l'effet de la propagation dans les lignes peut jouer, même à basses fréquences. L'approche basée sur un simple calcul de répartition de charge n'est donc plus totalement valide et il est parfois nécessaire d'avoir un couplage des deux grandes classes de modèles pour représenter correctement le comportement dynamique du réseau (Kundur, et al., 2004). Cela rajoute encore de la lourdeur aux modèles et rechercher des équivalents dynamiques permettant de réduire la taille des modèles est encore plus nécessaire.

## **2.2. Les modèles dynamiques équivalents**

Les équivalents dynamique sont été développés dans les années 1970 pour construire des modèles de simulation suffisamment simplifiés pour pouvoir être traité avec la puissance de calcul de l'époque.

En général, un réseau peut être divisé en deux parties. La première partie est le réseau d'étude qui est modélisé avec le plus de détails possibles pour bien représenter le phénomène dynamique qui intéresse l'étude. Le reste du réseau est appelé réseau externe et est représenté par un modèle équivalent d'ordre réduit. Cette approche permet de réduire la taille du modèle mathématique tout en ne négligeant pas certaines interactions dynamiques aux frontières du réseau d'étude.

Selon (Annakkage, Gole, Dinavahi, Noda, Hassan, & G Monti, 2012), le modèle dynamique équivalent dépend du phénomène étudié. Les membres du comité ont proposé trois classes de modèles équivalents correspondant à trois types d'étude :

- 1) Le modèle Equivalent Hautes fréquences (HFE pour « High-Frequency Equivalent ») pour l'étude des phénomènes transitoires en hautes fréquences.
- 2) Le modèle Equivalent Basses fréquences (LFE pour « Low-Frequency Equivalent ») pour l'étude des oscillations électromécaniques dans le réseau.
- 3) Le modèle Equivalent Large bande (« Wide-band Equivalent ») pour l'étude de phénomènes s'étalant sur une large bande de fréquences. Cette classe de modèles peut par exemple être utilisée dans des simulateurs temps réel pour représenter le comportement des

réseaux externes auxquels sont raccordés des équipements en test ou des portions de réseau simulées en temps réel de manière détaillée (Cha, Wu, & Ostergaard, 2012).

### 2.3. Modèle équivalent hautes fréquences

L'objectif est d'obtenir une représentation mathématique réduite des réseaux d'étude qui traduise l'effet des hautes fréquences sur leur comportement. On utilise pour cela deux approches: l'approche FDNE pour « Frequency-Dependent Network Equivalent » et l'approche TLNE pour « Two-Layer Network Equivalent ». Avec ces deux approches, le réseau externe est modélisé par une admittance équivalente ( $Y$ ) construite par la relation entre la tension ( $V$ ) et le courant ( $I$ ) aux nœuds frontières du réseau externe :

$$YV = I \quad (1)$$

Le modèle de l'admittance équivalente se présente sous une forme de fonction rationnelle dépendant de la fréquence ou d'un circuit électrique à paramètres localisés.

#### 2.3.1. Approche FDNE (Frequency-Dependent Network Equivalent)

Cette méthode utilise une technique d'identification en approchant l'admittance équivalente du réseau externe par la fonction rationnelle :

$$Y(s) = \frac{p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_Ns^N}{q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_Ns^N} \quad (2)$$

Ou bien :

$$Y(s) = c_0 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - a_k} \quad (3)$$

$s$  est l'opérateur de Laplace. Les paramètres  $p_k$ ,  $q_k$ , ou  $c_0$ ,  $c_k$  et  $a_k$  ( $k=1\dots N$ ) des équations (2) ou (3) sont calculés par l'identification de l'admittance équivalente  $Y(s)$  à sa valeur mesurée ou simulée. Cette identification doit résoudre un problème non-linéaire. Une première méthode est donnée par (Soysal & Semlyen, 1993) en identifiant les paramètres de la fonction rationnelle (2). Cette approche a été améliorée pour surmonter des problèmes liée aux contraintes du calcul identifiant par parties la réponse fréquentielle (Noda, 2005) et (Noda T., 2007). Dans le domaine temporel, les paramètres peuvent être calculés par une analyse de Prony qui est une extension de l'analyse de Fourier pour calculer directement la fréquence, le module et la phase des modes d'un système dynamique (Hong & Park, 1995). L'approche temporelle est encore utilisée pour identifier le réseau externe à partir de relevés



temporels effectués à tous les nœuds d'inter connexion du système externe avec le réseau d'étude (Singh & Abur, 1995).

Au début des années 2000, une nouvelle méthode très puissante dite de « Vector Fitting » (Gustavsen & Semlyen, 1999) a été proposée et permet de transformer le problème non linéaire en un problème linéaire. Cette méthode permet donc de résoudre le problème d'identification plus facilement. Nous allons revenir sur cette méthode dans la section 1.1 du chapitre 6 de la partie 3.

### 2.3.2. Approche TLNE (Two-Layer Network Equivalent)

Pour modéliser des réseaux externes de grande taille, l'identification par une fraction rationnelle conduit à un modèle d'ordre élevé, ce qui peut s'avérer pénalisant tant pour la simulation temps réel qu'offline. Afin de surmonter cet obstacle, une nouvelle méthode appelée TLNE (Two-Layer Network Equivalent) a été proposée (Abdel-Rahman, Semlyen, & Iravani, 2003). Dans cette méthode, le réseau externe est décomposé en 2 couches: la couche de surface et la couche profonde, comme cela est montré sur la Figure 1-3.

Comme la profondeur de « pénétration » des phénomènes transitoires est inversement proportionnelle à leur fréquence caractéristique, le modèle de la couche superficielle doit être adapté à une représentation fine des phénomènes HF alors que la représentation de la couche profonde est dédiée aux régimes dynamiques BF. Globalement, l'ordre du modèle est diminué car il n'est pas nécessaire d'avoir une représentation fine de tout le réseau externe sur toute la plage de fréquences.

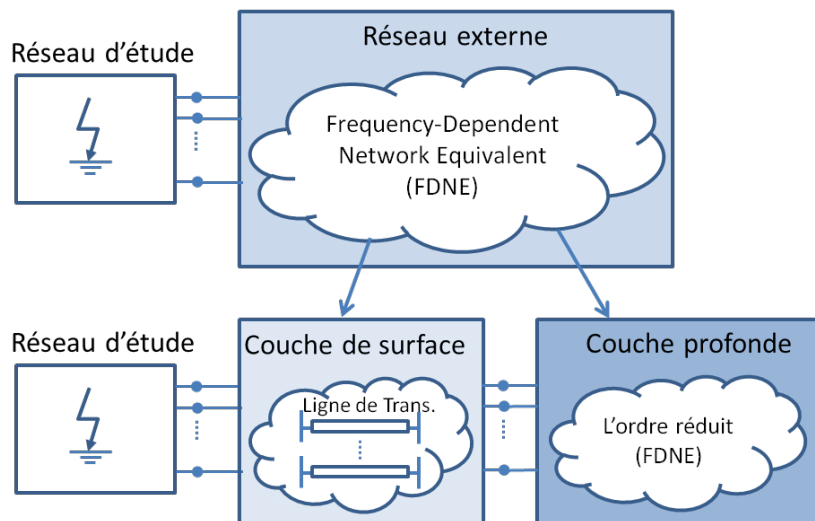


Figure 1-3. Modélisation du réseau externe par la méthode TLNE  
(Source : (Nie, Chen, & Dinavahi, 2007))

La couche de surface modélise les lignes d'interconnexion entre le réseau d'étude et le réseau externe. Chaque ligne est représentée par un modèle de ligne de transmission défini par la constante de propagation et l'impédance caractéristique  $Z_c$ .

Cette dernière est approchée par une décomposition en éléments simples (Abdel-Rahman, Semlyen, & Iravani, 2003), (Marti, 1982). L'admittance équivalente à la couche de surface  $Y_{surface}(\omega)$  est finalement donnée par la combinaison des modèles de chaque ligne d'interconnexion.

La couche profonde est représentée par un équivalent issu de l'approche FDNE décrite précédemment. Par contre, cette couche n'incluant pas la partie superficielle hautes fréquences, son admittance équivalente  $Y_{profonde}(\omega)$  est d'ordre plus réduit que ce qui aurait été obtenu dans l'approche FDNE classique où les deux couches sont confondues.

Au final, l'admittance d'entrée du réseau externe  $Y_{entrée}(\omega)$  est déduite de la combinaison de  $Y_{surface}(\omega)$  et  $Y_{profonde}(\omega)$  comme cela est montré sur la Figure 1-4. Tous les éléments du  $Y_{entrée}(\omega)$  sont obtenus par de méthode d'identification « VectorFitting » (Annakkage, Gole, Dinavahi, Noda, Hassan, & G Monti, 2012).

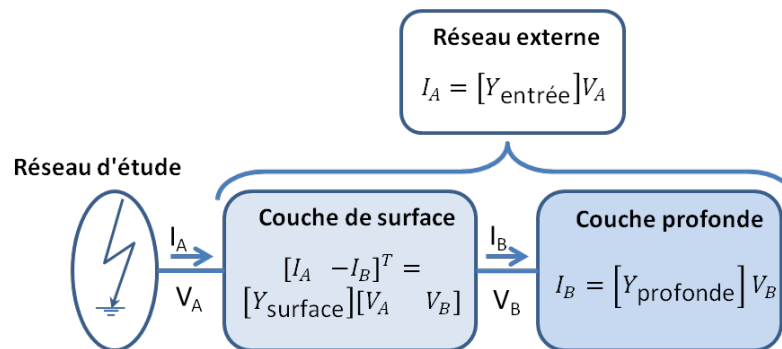


Figure 1-4. Admittance entrée du réseau externe  
(Source : (Nie, Chen, & Dinavahi, 2007))

Afin d'assurer la stabilité et la passivité du modèle  $Y_{entrée}(\omega)$  et d'obtenir des résultats plus précis, un modèle TLNE robuste a été proposé dans (Nie, Chen, & Dinavahi, 2007). L'identification des paramètres du modèle est effectuée par une méthode d'optimisation sous contraintes. L'algorithme d'optimisation est un algorithme génétique et les contraintes traduisent les conditions de stabilité et de passivité.

## 2.4. Modèle équivalent basses fréquences

Ce modèle est utilisé pour la simulation des régimes dynamiques dont les fréquences caractéristiques sont situées dans une bande de zéro à quelques Hertz. Dans ce cas, les éléments actifs du réseau, les générateurs et leurs boucles de contrôle, les charges actives, les convertisseurs d'électronique de puissance sont modélisés par des équations différentielles qui peuvent être non-linéaires. Les relations entre la tension et le courant en chaque nœud du réseau sont données sous la forme de relations algébriques.

Pour un réseau externe, cette représentation peut être réduite en utilisant trois approches :

- 1) La méthode modale approche le réseau externe par un modèle linéaire réduit.
- 2) La méthode d'agrégation par l'analyse de la cohérence des générateurs du réseau externe permet de regrouper des générateurs cohérents et de les remplacer par un générateur équivalent.
- 3) La méthode d'identification permet de déterminer un modèle réduit du réseau à partir d'une identification de la réponse du réseau externe.

### 2.4.1. La méthode modale

Partant des équations différentielles non-linéaires et des équations algébriques qui décrivent le réseau, il est possible d'obtenir un modèle linéarisé sous la forme d'une représentation d'état (Kundur, 1994):

$$\dot{X} = [A]X + [B]u \quad (4)$$

Où :

$X$  est un vecteur qui représente les  $n$  variables d'état du réseau

$U$  est un vecteur qui représente les  $m$  entrées du réseau.

$A$  est la matrice d'état.

$B$  est la matrice d'entrée.

La méthode modale se concentre sur les modes d'oscillation, c'est-à-dire sur les valeurs propres complexes conjuguées de la matrice  $A$ . Cette méthode est basée sur l'élimination des modes à forts amortissement pour ne garder que les modes plus faiblement amortis qui conditionnent la dynamique lente des systèmes (Undrill & Turner, 1971), (Chow, 1982), (De Oliveira & Massaud, 1988), (Massaud & De Oliveira, 1988).

Sur le même principe, une approche dite « Analyse modale sélective » (SMA, pour « Selective modal analysis ») a été proposée par (Pérez-Arriaga, Verghese, & Schweppe, 1982), (Verghese, Perez-Arriaga, & Schweppe, 1982). A partir des valeurs et vecteurs propres de la matrice  $A$ , cette approche calcule les facteurs de participation qui permettent d'associer variables d'états et modes propres. On sélectionne ensuite les modes les plus pertinents par rapport aux dynamiques que l'on souhaite étudier. Le modèle est réduit en ne représentant que ces modes et en éliminant les autres.

*Remarque : La méthode modale peut être utilisée en complément de la méthode d'agrégation par analyse de cohérence. Dans ce cas les groupes cohérents sont identifiés par la méthode modale (Troullinos, Dorsey, Wong, Myers, & Goodwin, 1985).*

#### **2.4.2. La méthode d'agrégation par analyse de cohérence**

L'analyse de cohérence permet d'obtenir les groupes des machines cohérentes en analysant la réponse d'un réseau à une perturbation. Le modèle du réseau externe est déterminé en remplaçant chaque groupe de générateurs cohérents par un générateur équivalent. Au contraire de la méthode modale, cette approche permet de conserver un certain degré de connaissance par la forme du modèle qui est encore celle d'un générateur, même si équivalent.

La méthode d'agrégation par analyse de cohérence consiste en 4 étapes (Annakkage, Gole, Dinavahi, Noda, Hassan, & G Monti, 2012) :

- 1) Identification des groupes de générateurs cohérents. Plusieurs méthodes sont utilisées pour cela. Nous retenons ici les 3 méthodes les plus couramment utilisées (Craciun, 2010):
  - La méthode de couplage faible (« Weak Links »):cette méthode distingue des groupes de générateurs en analysant le couplage des générateurs dans la matrice d'état  $A$  du réseau. Un groupe de générateurs cohérents est déterminé si les coefficients de couplage entre eux sont élevés (Nath, 1985).
  - La méthode des deux échelles de temps (« Two-time scale ») qui distingue la dynamique lente de la dynamique rapide. Les machines sont regroupées ensemble selon les modes lents qu'elles partagent. Les dynamiques rapides qu'elles partagent sont ensuite réduites en supposant qu'elles s'éteignent dans un temps très court par rapport aux modes lents. Il en résulte une décomposition en autant de groupes que de modes lents retenus pour l'étude du système considéré (Winkelman, Chow, Bowler, Avramovic, & Kokotovic, 1981).
  - La méthode dite de simulation en temps linéaire (Linear Time Simulation). La réponse dans le domaine temporel du système est analysée en comparant les angles rotoriques des générateurs pour un certain type de défaut provoqué dans le réseau électrique. Les générateurs avec des angles rotoriques qui tournent ensemble sont considérés comme cohérents (Podmore, 1978).
- 2) Agrégation des nœuds des générateurs cohérents par une méthode d'élimination nodale de Kron.

- 3) Agrégation des modèles des générateurs cohérents (Wang & Klein, 1997) et de leurs dispositifs de contrôle (Germond & Podmore, 1978).
- 4) Réduction des charges du réseau tenant compte de l'agrégation des générateurs.

Cette méthode est utilisée dans le programme DYNRED («DYNamic REDuction») développé par EPRI («Electric Power Research Institute») pour la réduction dynamique des grands réseaux (Annakkage, Gole, Dinavahi, Noda, Hassan, & G Monti, 2012).

### 2.4.3. La méthode d'identification

On suppose un modèle équivalent du réseau externe, par exemple une fonction rationnelle d'un ordre quelconque. Les paramètres du modèle sont ensuite identifiés par une méthode des moindres carrés. La condition d'optimalité à minimiser est une fonction de l'erreur entre le modèle et la référence (mesure ou simulation) (Yu & El-Sharkawi, 1981). (Stankovic & Saric, 2004) utilise une méthode basée sur l'intelligence artificielle (réseaux neuronaux) pour identifier le modèle équivalent.

## 2.5. Modèle équivalent large bande

Les deux modèles équivalents hautes fréquences et basses fréquences sont valides dans une bande de fréquences spécifique. On peut souhaiter avoir un équivalent sur une large bande couvrant les aspects basses et hautes fréquences. Le modèle équivalent large bande doit donc pouvoir reproduire le comportement de phénomènes dynamiques allant de quelques fractions d'Hertz à quelques dizaines ou centaines de kilohertz.

Une approche a été proposée dans (Lin, Gole, & Yu, 2009) et (Liang, Lin, Gole, & Yu, 2011) pour une mise en œuvre temps réel. Cette méthode utilise le modèle *FDNE* pour représenter des comportements en hautes fréquences et un modèle de type phaseur pour les régimes transitoires électromécaniques.

Une autre approche de modèle équivalent large bande a été décrite pour la modélisation d'un câble (Liu, Cui, Qi, Liang, & Yan, 2011). Cette approche est basée sur la dérivée d'ordre fractionnaire. Elle conduit à des modèles fréquentiels compacts avec un faible nombre de paramètres. La même approche a été utilisée pour la modélisation d'alternateurs en vue d'études de stabilité (Racewicz, Riu, Retier, & Chrzan, 2014).

## 3. Conclusion

L'émergence des nouvelles sources de production d'énergie, des nouveaux usages (le véhicule électrique notamment), les interconnexions avec des réseaux

d'information, la libéralisation des marchés de l'énergie contraignent de plus en plus les réseaux d'énergie électrique. Pour parvenir à de nouvelles solutions qui permettent ces développements en toute sécurité tout en renforçant l'efficacité énergétique, une très bonne connaissance de la dynamique des réseaux électriques est nécessaire. Une modélisation dynamique des réseaux d'énergie devient pour cela indispensable. Elle doit répondre à deux impératifs : représentativité des phénomènes dynamiques et parcimonie de la représentation mathématique.

Les méthodes traditionnelles de modélisation dynamique traitent surtout de la complication posée par la taille croissante des réseaux électriques. Leur première intention n'est pas de traiter la complexité et notamment les effets multiéchelles. Ainsi, ce sont principalement des méthodes qui cherchent à réduire l'ordre de la représentation mathématique sans garder un lien fort entre la physique du réseau (sa topologie, les propriétés fondamentales des phénomènes dynamiques qui y ont lieu) et la représentation mathématique. Ces méthodes sont puissantes lorsqu'il est possible de séparer le réseau en plusieurs parties distinctes qui interagissent de manière simple entre elles. Elles deviennent moins pertinentes lorsque le réseau doit être étudié comme un tout. C'est le cas quand des interactions dynamiques couplent plusieurs échelles du réseau sans qu'il soit facilement possible de découper ces échelles du fait de leur trop grande imbrication.

Les approches traditionnelles d'équivalent dynamique vont donc être limitées pour accéder à une meilleure compréhension par le chercheur ou l'ingénieur des comportements dynamiques des réseaux. Cela peut s'avérer être une limite pour les approches de dimensionnement car le concepteur de réseau n'a alors que peu d'informations sur la manière de mener son dimensionnement du fait d'une perte des liens de connaissance avec la physique du réseau. Il doit donc avoir recours à de nombreuses simulations utilisant son modèle dynamique ou à des approches d'optimisation lourdes à mettre à œuvre.

Nous proposons maintenant une nouvelle démarche qui va prendre en compte dès le départ la complexité du réseau et qui va tâcher de conserver le plus possible les liens de connaissance entre la topologie et les caractéristiques dynamiques. Nous espérons ainsi apporter une contribution majeure à l'analyse et au dimensionnement des nouveaux réseaux d'énergie électrique par l'utilisation d'outils et méthodes plus connus jusqu'à maintenant pour leur application à des systèmes complexes comme les réseaux informatiques, les polymères, les systèmes biologiques.



## Chapitre 2

# Des nouveaux outils pour analyser la complexité des réseaux électriques

*Dans ce chapitre, nous allons présenter deux classes d'outils proposés dans la littérature au cours des dernières années pour analyser la complexité des réseaux électriques. Ce sont la théorie des graphes et l'invariance d'échelle. Ces deux approches se concentrent sur la topologie des réseaux et tentent de dénouer les liens profonds entre une propriété topologique et une performance du réseau. En fin de chapitre, la démarche de la thèse sera précisée. Elle se basera sur la notion d'invariance d'échelle et son application aux réseaux électriques.*

### 1. La théorie des graphes complexes

Depuis les années 90, les caractéristiques des réseaux complexes sont étudiées par des nouvelles approches issues de la théorie de graphe. On peut mentionner les méthodes probabilistes d'études des réseaux aléatoires Paul Erdős et Alfréd Rényi (Erdős & Rényi, 1960), le concept de réseau « small world » défini par une grande proximité topologique entre les nœuds (Watts & Strogatz, 1998), ou « scale-free » défini par l'absence d'échelle privilégiée pour l'observation (Barabási & Albert, 1999). La théorie des graphes complexes est utilisée dans des domaines très divers comme la biologie (Jeong, Tombor, Albert, Oltvai, & Barabási, 2000), la chimie (Doye, 2002), les sciences sociales (Travers & Milgram, 1969), (Colizza, Barrat, Barthélemy, & Vespignani, 2007), les réseaux informatiques (Faloutsos, Faloutsos, & Faloutsos, 1999) ou d'interconnexion des banques (Boss, Elsinger, Summer, & Thurner, 2004). Et ce ne sont que quelques exemples parmi les multiples champs concernés par la théorie des graphes.

D'un point de vue formel, un réseau complexe est composé de sites et de liens entre les sites. Les sites représentent les éléments du réseau comme des nœuds d'interconnexion, des routeurs, des aéroports ou bien encore des gens. Les liens représentent la connexion, la dépendance ou la relation entre les sites. Ces connexions peuvent être physiques, logiques ou fonctionnelles comme par exemple des lignes électriques, des fibres optiques, des itinéraires de vol, ou des liens d'amitié (Barrat, 2010).

Le graphe  $\mathcal{G}$  est un ensemble  $(\mathcal{V}, E)$  où  $\mathcal{V} \equiv \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  est l'ensemble des sites avec  $n$  le nombre de sites et  $E \equiv \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$  est l'ensemble des liens entre des sites avec  $m$  le nombre de liens. Il y a deux types de graphe, orienté ou pas, selon



que les liens ont une direction associée ou non. La topologie d'un graphe est décrite par sa matrice d'adjacence  $Ad$  (Sabonnadière & Hadjsaid, 2007).

En se basant sur cette définition du graphe, plusieurs grandeurs peuvent être calculées pour évaluer entre autres le degré des nœuds, la distance entre les nœuds, le coefficient de connectivité des nœuds, le coefficient de maillage d'un graphe. Le calcul de ces paramètres peut s'effectuer à l'aide d'algorithmes, pour beaucoup disponibles sur internet comme par exemple la « Network Routines Toolbox » développée pour MATLAB (MIT Strategic Engineering, 2011).

Dans le cas de réseaux électriques de plus en plus complexes, la théorie des graphes est une méthode prometteuse pour leur planification, leur exploitation et leur analyse (Pagani & Aiello, 2013), (Kröger & Zio, 2011). Des études ont ainsi caractérisé la topologie d'un réseau électrique complexe en calculant les degrés des nœuds, le coefficient de maillage ou de connectivité (Sun, 2005), (Sanchez, Caire, & Hadjsaid, 2013). (Bilis, Kroger, & Nan, 2013) a proposé un processus heuristique pour trouver les nœuds les plus importants d'un graphe à partir de ses paramètres topologiques. Grâce à ces mêmes paramètres, plusieurs études identifient les faiblesses des infrastructures critiques qui peuvent causer des défauts en cascade (ou black-out) (Chen, Dong, Hill, Zhang, & Hua, 2010), (Kong & Yeh, 2010), (Buldyrev, Parshani, Paul, Stanley, & Havlin, 2010), (Crucitti, Latora, & Marchiori, 2004).

Dans cette thèse, nous ne privilégierons pas ces méthodes même si elles peuvent servir d'outils à l'exploration de l'invariance d'échelle dans les réseaux électriques, ce qui constitue le cœur de notre problématique.

## 2. L'invariance d'échelle

### 2.1. Définition

La notion d'invariance d'échelle a été introduite pour analyser des phénomènes critiques sans échelle caractéristique, i.e. *des phénomènes qui se produisent à toutes échelles*. On parle d'ailleurs pour ces phénomènes de longueur de corrélation infinie, tout point du système étant corrélé à un autre point quelconque. C'est d'ailleurs une raison pour laquelle le comportement à l'échelle macroscopique du système peut prendre la forme critique d'un changement brutal à toutes les échelles qui le caractérisent (cas d'un blackout).

Une invariance d'échelle typique d'un système est l'invariance par translations spatiales. On parle d'autosimilarité, au sens où un détail grossi est impossible à distinguer de l'objet vu dans son intégralité. Citons les flocons de neige, les éclairs, les neurones, les réseaux vasculaire,... (Laguës & Lense, 2008). Les **fractales** sont par définition des **structures autosimilaires** (Mandelbrot B. B., 1977).

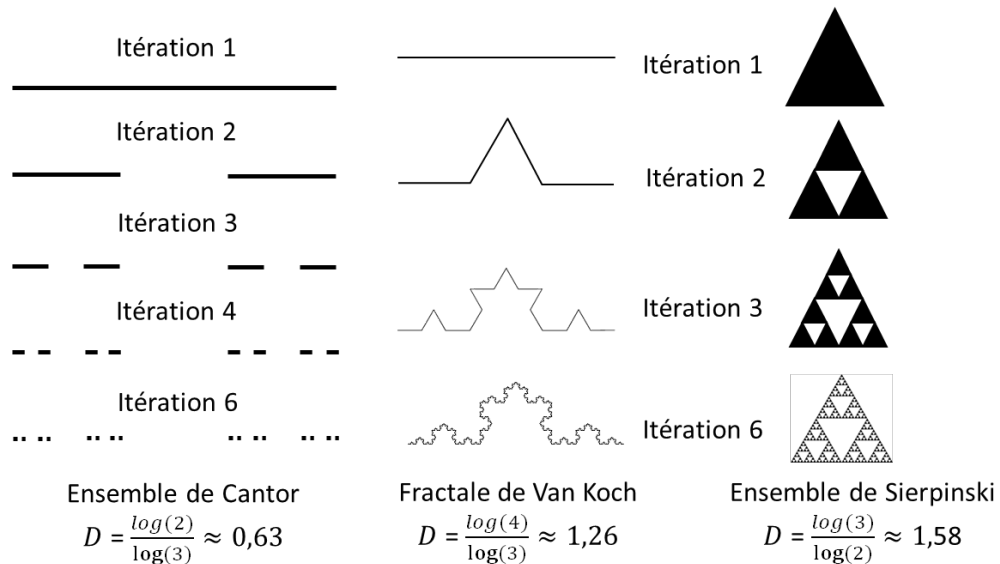


Figure 2-1. Exemples de structures fractales à différentes itérations*i*

De manière simple, on peut assimiler une itération à une échelle d'observation. Aux itérations basses, l'échelle d'observation est grossière et on observe les grandes lignes de l'objet fractal. Quand l'itération croît, l'observation s'affine et des détails ne plus en plus nombreux se révèlent. Le passage d'une itération à l'autre se fait par un processus récursif caractéristique de l'autosimilarité et en théorie, ce processus se répète à l'infini. Les structures autosimilaires sont connues depuis longtemps par les mathématiciens que cela soit des courbes continues (courbe de Koch) ou des ensembles non dénombrables (ensemble de Cantor, tamis de Sierpinski). A cette époque, ce n'était pas l'autosimilarité de ces structures mais ses conséquences mathématiques, par exemple leur non dérivabilité, qui était soulignée. Avec l'apparition du concept de fractales, de nombreux travaux ont tâché d'expliquer des résultats expérimentaux par la notion d'invariance d'échelle. Ce fût par exemple le cas du mouvement Brownien depuis longtemps décrit par (Perrin, 1910) ou des processus biologiques décrits à la même époque par (Thompson & Bonner, 1917). Aujourd'hui, la fractalité est une notion utilisée dans des domaines, très divers comme la biologie pour expliquer la structure des réseaux sanguins, neuronaux ou des poumons, l'astrophysique pour décrire les galaxies les cratères lunaires, en physique des aérosols, des polymères.

En génie électrique pris au sens très large, la fractalité a aussi trouvé des applications. On peut par exemple citer:

- Pour la modélisation de réponses fréquentielles de systèmes fractals, (Charef, Sun, Tsao, & Onaral, 1992) a proposé une méthode basée sur l'utilisation de dérivées d'ordre fractionnaire qui sont approchées par des circuits RC en cascade et dont les paramètres sont calculés à partir d'une simple approximation asymptotique de la réponse fractale.

- (Clerc, Giraud, Luck, & Robin, 1996) a investigué les liens entre la structure fractale de certains objets diélectriques fractals et les résonances qui peuvent y apparaître.
- (De Arcangelis, Redner, & Coniglio, 1986) a étudié les propriétés fractales de circuits résistifs ou supraconducteurs aléatoires, notamment les lois d'échelle qui peuvent caractériser la distribution des tensions tout au long du réseau.
- Le domaine des réseaux électriques a aussi été concerné par l'utilisation de la fractalité. Par exemple, (Thorp & Naqavi, 1997) a étudié le domaine d'attraction des algorithmes de Newton utilisés pour les calculs de répartition de charge. L'objectif était de comprendre comment évoluer le calcul itératif si le point de départ était choisi loin du point de fonctionnement final. Un autre exemple concerne la classification des perturbations en régime transitoire à partir d'une analyse fractale adaptée à des motifs temporels non stationnaires (Safavian, Kinsner, & Turanli, 2004). Ceci est proche des méthodes d'analyse en régime transitoire basées sur les ondelettes. On sait en effet que les ondelettes peuvent être un outil puissant pour observer à des différentes échelles des motifs fractals. L'analyse fractale menée sur les résultats donnés par la transformée en ondelettes permet alors d'identifier si le motif présente des autosimilarités ou non (Ning & Gao, 2009).

## **2.2. Mesures de l'invariance d'échelle dans un réseau**

Nous allons maintenant présenter des grandeurs permettant de décrire les caractéristiques d'invariance d'échelle d'un réseau fractal. Nous divisons ces grandeurs en deux types. Il y a tout d'abord les grandeurs statiques qui caractérisent la géométrie de l'objet. La dimension fractale en fait typiquement partie. Le deuxième type concerne l'aspect dynamique et comprend des grandeurs comme la dimension spectrale ou la dimension de marche aléatoire. Ces grandeurs permettent de lier les évolutions temporelles ou fréquentielles aux caractéristiques topologiques.

### **2.2.1. La dimension fractale**

En géométrie euclidienne, la dimension d'un objet se confond avec la dimension topologique de l'espace dans lequel il est plongé. Cette dimension est liée au nombre de paramètres nécessaires pour mesurer un objet. La dimension d'une droite, par exemple, est égale à 1, alors que la dimension d'un objet dans le plan est égale à 2. La droite est mesurée par un seul paramètre (sa longueur), alors qu'il faut deux paramètres pour mesurer un objet dans le plan (par exemple, les longueurs des petits et grands côtés d'un rectangle).

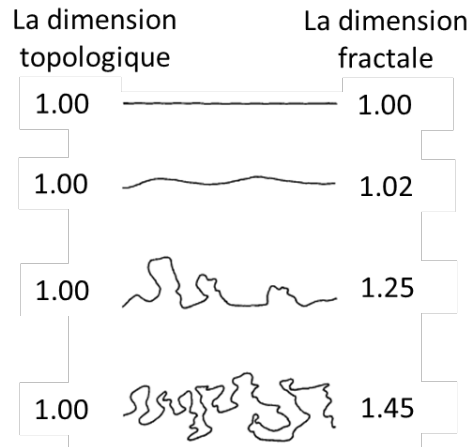


Figure 2-2. Comparaison entre dimension topologique et dimension fractale (Kaye, 1994).

Pour les objets fractals présentant une structure autosimilaire, leur très forte irrégularité rend inadaptée une description par la géométrie euclidienne. La dimension fractale est introduite pour traduire la façon avec laquelle ces objets remplissent l'espace à toutes les échelles de mesure. La valeur de la dimension fractale est généralement non entière et supérieure à la dimension topologique (voir la Figure 2-2). La Figure 2-1 montre la dimension fractale de structures fractales couramment citées.

Le terme de dimension fractale est un terme générique recouvrant plusieurs définitions. Les définitions les plus importantes sont la dimension de Hausdorff et la dimension de Minkowski-Bouligand.

La **dimension de Hausdorff** est introduite en 1918 par le mathématicien Felix Hausdorff. On couvre un objet  $F$  par un ensemble d'éléments de taille  $d_i \leq \varepsilon$  de manière que tous les points de l'objet appartiennent à au moins un élément. Le nombre d'élément  $c_i$  pour effectuer le recouvrement doit être le plus petit possible. On définit la mesure par :

$$H_s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^N (d_i)^x \quad (5)$$

Cette mesure de l'objet est appelée  $H_s(F)$  (Mandelbrot B. , 1982). Elle tend vers une valeur finie unique quand  $x = D_f$ . La valeur  $D_f$  est appelée dimension de Hausdorff (Falconer, 2003). Quand la valeur de la puissance  $x$  n'est pas égale à la valeur de la dimension de Hausdorff, la mesure de l'objet  $H_s(F)$  tend vers 0 ou l'infini. Par exemple dans la Figure 2-3, quand  $x < D_f$  la mesure  $H_s(F)$  est située dans la zone A et prend une valeur infinie. Quand  $x > D_f$  la mesure  $H_s(F)$  est dans la zone B et prend une valeur nulle.

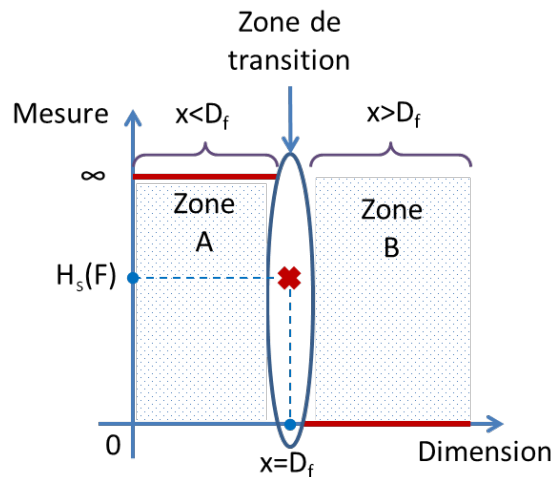


Figure 2-3. Mesure d'un objet en fonction de la dimension

La dimension de Hausdorff caractérise la transition et est la seule à donner une mesure finie.

Dans la pratique, il est souvent difficile d'obtenir la couverture optimale d'un objet. La dimension Hausdorff est donc approchée par la dimension de Minkowski-Bouligand (la dimension de boîte) (Theiler, 1990). La dimension de boîte  $D_b$  est déduit en calculant des boîtes  $N(d)$  de taille constante  $d$  pour recouvrir l'objet :

$$D_b = \lim_{d \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(d))}{\log(1/d)} \quad (6)$$

La dimension de Hausdorff et la dimension de boîte peuvent donner des résultats différents selon l'ensemble d'éléments considéré. La dimension de boîte peut-être supérieure à la dimension de Hausdorff. Le recouvrement de la dimension de boîte n'est pas en effet le plus économique en termes de nombre d'éléments, mais il est bien plus facilement réalisable que le recouvrement de Hausdorff.

### 2.2.2. La dimension spectrale

Le comportement dynamique d'un objet est lié à ses modes. On peut notamment s'intéresser à la variation de la densité des modes  $\rho$  en fonction de leur pulsation propre  $\omega$ . En déterminant la densité des modes à basse fréquence, i.e. aux temps longs, on peut caractériser des problèmes dynamiques de relaxation, de transport et d'absorption (Gouyet, 2007).

Plutôt que d'étudier la densité des modes, on peut considérer la distribution des modes  $N_M(\omega)$ , c'est-à-dire le nombre de modes dont la pulsation propre est inférieure à  $\omega$ . Pour un réseau fractal, (Shender, 1976) et (Dhar, 1977) ont proposé qu'elle soit représentée par une loi de puissance qui traduirait l'invariance d'échelle:

$$N_M(\omega) = \int_0^\omega \rho(\omega') d\omega' \propto_{\omega \rightarrow 0} \omega^{ds} \quad (7)$$

L'exposant de la loi de puissance est appelé **dimension spectrale ( $ds$ )**. Cette valeur est étroitement liée au comportement dynamique aux temps longs du réseau.

### 2.2.3. La dimension de marche aléatoire

Un modèle de marche aléatoire consiste à représenter le déplacement d'une particule sur le réseau isotrope  $Z^2$ . Une particule est initialement située sur un point du réseau. A chaque pas de temps, elle se déplace sur un site voisin avec une équiprobabilité de déplacement dans les quatre directions du réseau. Chaque déplacement est indépendant des déplacements précédents.

La distance quadratique moyenne parcourue par une particule à l'instant  $t$  est donnée par une loi de puissance comme montré dans l'équation (8) (Stauffer & Aharony, 1992)

$$\langle R^2(t) \rangle \propto t^{2/dw} \quad (8)$$

$R(t)$  : distance moyenne parcourue pendant le temps  $t$

$dw$  : dimension de marche aléatoire.

La dimension de marche aléatoire est égale à 2 pour une marche sur un réseau uniforme (Alexander & Orbach, 1982). Pour un réseau fractal, la marche de la particule se fait plus difficilement du fait des ramifications nombreuses du réseau. La distance parcourue sera donc moindre et  $dw$  devient supérieur à 2.

### 2.3. Relations entre la dimension fractale, la dimension spectrale et la dimension de marche aléatoire

Il est montré qu'on peut déterminer la relation entre la dimension spectrale  $ds$  et la dimension fractale  $D$  d'un réseau de masses ponctuelles reliées entre elles par des ressorts (Gouyet, 2007). En posant  $M(\ell)$  le nombre de liens élastiques contenus dans une boîte de côté  $\ell$ , il est possible de montrer qu'il suit la loi d'échelle suivante du fait de l'invariance d'échelle du motif du réseau :

$$M(b\ell) = b^D M(\ell) \quad (9)$$

$b$  : facteur du changement d'échelle.

$D$  : dimension fractale.

Le nombre de modes dépend directement du nombre de liens élastiques du réseau. Du fait de la structure invariante d'échelle, on suppose que la densité des modes  $\rho(\omega)$  suit la même loi de puissance que le nombre de modes, c'est-à-dire :

$$\rho_{b\ell}(\omega) = b^D \rho_\ell(\omega) \quad (10)$$

D'autre part, les pulsations  $\omega$  des modes suivent également un comportement d'échelle, c'est-à-dire :

$$\omega(b\ell) = b^{-\xi} \omega(\ell) \quad (11)$$

$\xi$  traduit le glissement de la fréquence des modes lors du changement d'échelle.

En combinant les équations (10) et (11), on obtient :

$$\rho_{b\ell}(\omega) \propto b^{-D+\xi} \rho_\ell(b^\xi \omega) \quad (12)$$

Une solution de cette équation est :

$$\rho(\omega) \propto (\omega)^{ds-1} \quad \text{avec} \quad ds = \frac{D}{\xi} \quad (13)$$

L'équation (13) montre une relation entre la dimension fractale ( $D$ ) et la dimension spectrale ( $ds$ ),  $D$  traduit une caractéristique topologique du réseau tandis que  $ds$  est un paramètre de son comportement dynamique. Cette relation entre  $ds$  et  $D$  permet de montrer qu'il existe un couplage étroit entre la dynamique du réseau et sa topologie.

Enfin, il est à noter que pour une fractale (Rammal & Toulouse, 1983) :

$$\xi = \frac{dw}{2} \quad (14)$$

Il existe donc un couplage fort entre les trois dimensions fractale, spectrale et de marche aléatoire. Ce couplage explique de nombreux phénomènes dynamiques dans les réseaux fractals.

## 2.4. Méthodes de calcul des mesures d'invariance d'échelle

### 2.4.1. Méthodes de calcul de la dimension fractale

Pratiquement, il existe plusieurs méthodes pour déterminer une valeur approchée de la dimension de Hausdorff. Les deux méthodes les plus populaires sont la *méthode de boîtes* (Theiler, 1990) et la *méthode de croissance d'une boule* (Song, Havlin, & Makse, 2005).

### 2.4.2. La méthode des boîtes

Basée sur la notion de dimension de boîte présentée précédemment, la méthode des boîtes estime la dimension fractale en procédant aux étapes suivantes :

Etape 1 : On maille l'espace dans lequel l'objet à mesurer est plongé à l'aide d'une grille régulière de pas  $\varepsilon$ . Chaque cellule de la grille constitue une boîte.

Etape 2 : On compte le nombre de boîtes  $N(\varepsilon)$  contenant une portion de l'objet.

Etape 3 : On refait les étapes 1 et 2 pour plusieurs valeurs de jauge  $\varepsilon$ .

Etape 4 : On calcule la dimension fractale de l'objet :

- Soit en utilisant directement l'équation (6).
- Soit en traçant le nombre de boîtes pour recouvrir l'objet  $N(\varepsilon)$  en fonction de  $\varepsilon$ . En échelle log-log, cette courbe est une droite dont la pente est la dimension de boîte de l'objet.

La Figure 2-4 illustre trois cas d'application simple.

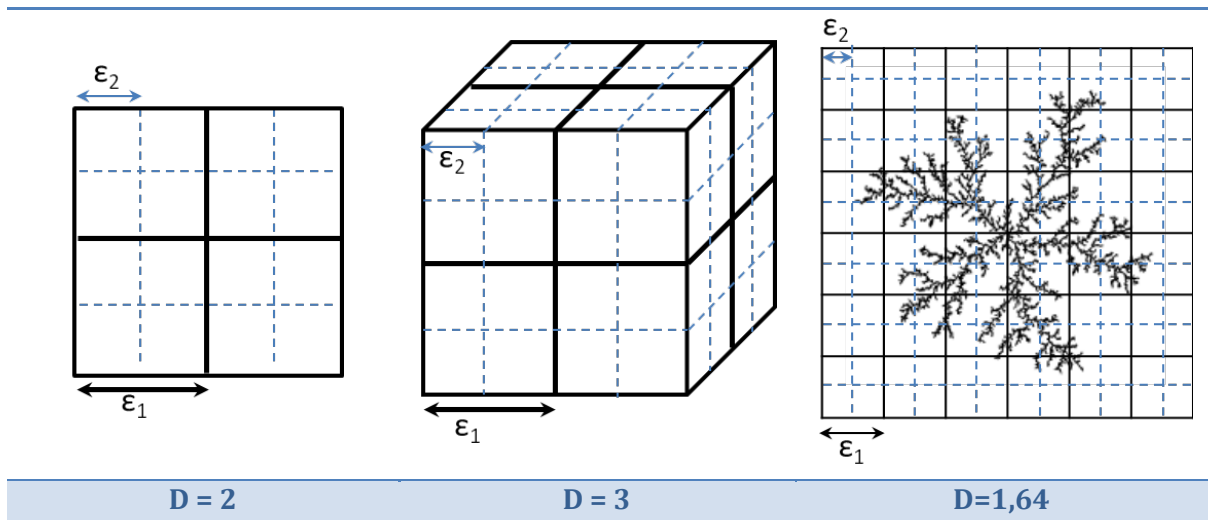


Figure 2-4. Exemple de différentes formes géométriques et valeurs de leur dimension fractale déduite par la méthode de boîte (Landini, Murray, & Misson, 1995).

Un autre exemple de l'utilisation de la méthode des boîtes est le calcul de la dimension fractale de l'ensemble de Cantor donné Figure 2-5.



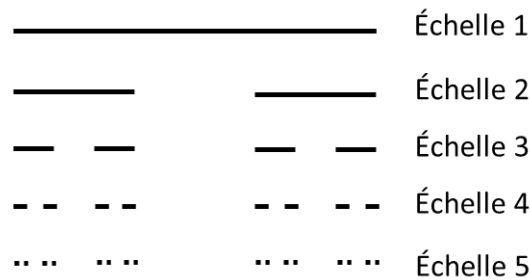


Figure 2-5. Ensemble de Cantor

A une échelle  $i+1$  donnée, il faut  $2^i$  boîtes de taille  $1/3^i$  pour couvrir l'ensemble. La dimension fractale est alors donnée d'après l'équation (6) par :

$$D = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(2^i)}{\log(3^i)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,63 \quad (15)$$

On peut procéder de même pour le triangle de Sierpinski ci-dessous.

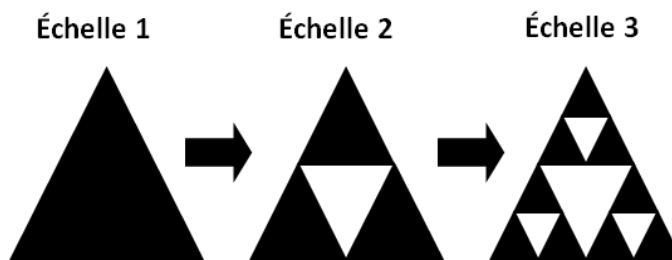


Figure 2-6. Triangle de Sierpinski

Il faut  $3^i$  boîtes de taille  $1/2^i$  pour couvrir le triangle à l'échelle  $i+1$  d'où :

$$D = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 0,58 \quad (16)$$

### 2.4.3. La méthode de croissance d'une boule

La méthode de croissance d'une boule est basée sur une notion intuitive de la dimension exprimée par la relation entre le nombre des nœuds d'un objet et son rayon. La méthode consiste alors à mesurer l'augmentation du nombre de nœuds  $M(r)$  à l'intérieur des boules de rayon  $r$  croissant. La méthode de croissance d'une boule se décompose plus précisément selon les étapes suivantes :

- 1) Choix d'un point de l'objet fractal comme centre de la boule
- 2) Tracé d'une boule de rayon de  $r$  autour de ce point
- 3) Dénombrement du nombre de points de l'objet appartenant à la boule de rayon  $r$ .
- 4) Répétition des étapes précédentes pour d'autres points de départ de l'objet fractal.

- 5) Calcul de la valeur moyenne  $\langle M(r) \rangle$  correspondant à chaque  $r$ .
- 6) Reprise des étapes pour une nouvelle valeur de  $r$  jusqu'à ce que l'objet soit couvert par l'ensemble des boules de rayon de  $r$ .
- 7) La dimension fractale est estimée égale à la pente de la courbe entre  $\langle M(r) \rangle$  et  $r$  dans un diagramme log-log ou par l'équation suivante :

$$D = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\langle M(r) \rangle)}{\log(r)} \quad (17)$$



Figure 2-7. Illustration de la méthode de croissance d'une boule sur un objet (Landini, Murray, & Misson, 1995).

#### 2.4.4. Méthodes de calcul pour la dimension spectrale

Différentes méthodes de calcul pour la dimension spectrale sont montrées dans (Durhuus, Jonsson, & Wheeler, 2006) et (Clerc, Tremblay, Albinet, & Mitescu, 1984). On va présenter ici deux méthodes parmi les plus couramment utilisées.

##### 1. Méthode de calcul basée sur l'analyse modale :

Cette méthode est basée sur la distribution de modes d'oscillation comme indiquée par l'équation (3). Les modes d'oscillation du réseau sont déterminés par une analyse modale c'est-à-dire grâce aux valeurs propres de la matrice d'état  $A$  qui décrit le comportement dynamique du réseau (Kundur, 1994). Cette analyse modale (cf. quelques notions dans l'annexe A) et est réalisée sous MATLAB par la fonction « power\_statespace » (cf. annexe B). Une fois que tous les modes sont calculés, la relation entre le nombre de modes et leurs pulsations fréquentielles est tracé dans un diagramme log-log. La courbe obtenue doit être linéaire si une invariance d'échelle est présente et sa pente a alors pour valeur la dimension spectrale.

##### 2. Méthode de calcul basée sur les relations entre dimensions :

Au lieu de calculer numériquement la distribution des modes d'oscillation, il est possible de calculer  $ds$  à partir de la dimension fractale  $D$

$$ds = \frac{D}{\xi} \quad (18)$$

La dimension fractale  $D$  est calculée par une des méthodes montrées dans la section 2.4.1.  $\xi$  est calculé par une technique de renormalisation du réseau (Hilfer & A., 1984). La renormalisation est un outil essentiel qui permet d'analyser la caractéristique d'invariance d'échelle par une analyse des similarités entre les différentes échelles caractéristiques d'un réseau fractal.

## 2.5. La renormalisation

Les méthodes de renormalisation sont utilisées dans de nombreux domaines de la physique pour analyser les propriétés asymptotiques de systèmes dont le comportement dynamique existe à toutes les échelles spatiales et/ou temporelles. La renormalisation donne accès à des propriétés intrinsèques, universelles, indépendantes des détails microscopiques du système. Basés sur l'invariance d'échelle, les résultats de la méthode de renormalisation ne dépendent pas des nombreuses simplifications et lacunes d'un modèle particulier. Avec la méthode de renormalisation, au lieu d'analyser des caractéristiques à une échelle donnée, on étudie les relations de similarité entre les différentes échelles. Celles-ci prennent la forme d'une loi de puissance (Laguës & Lense, 2008) et c'est l'exposant de cette loi de puissance qui est recherché par la renormalisation.

La renormalisation est constituée de 2 étapes : l'étape de décimation (« coarse-graining », en anglais) suivie par l'étape de renormalisation des grandeurs caractéristiques du système étudié (Laguës & Lense, 2008). Pour la première étape, le terme « décimation » désigne un changement de l'échelle, c'est-à-dire une détermination d'agrégats regroupant un certain nombre de composants plus élémentaires. La deuxième étape est caractérisée par *l'opérateur de renormalisation* qui présente la relation entre les paramètres initiaux du système non décimé et les paramètres renormalisés du système après décimation. Cette relation est basée sur une exigence d'identité des caractéristiques entre les deux états du système. C'est la traduction de l'invariance d'échelle.

Cette technique est très générale et sera plusieurs fois employée dans le reste du mémoire.

## 3. Conclusion

Les résultats de (Barabási & Albert, 1999) ont pour la première fois montré l'existence d'une loi d'échelle dans les réseaux électriques. L'invariance d'échelle a également été au cœur de la construction d'un modèle dynamique d'un réseau électrique fractal (Enacheanu, Riu, Retiere, & Enciu, 2006) et d'un réseau électrique plus réaliste de 13 nœuds (Amrane, Retiere, & Riu, 2010). Ces quelques dates

marquent un tournant dans la compréhension d'un réseau à partir des propriétés de sa topologie.

D'une part, on espère maintenant retrouver des liens de connaissance forts entre la modélisation d'un réseau et ses propriétés topologiques. D'autre part, on s'attend par l'utilisation des lois fractales à une représentation parcimonieuse. En effet, la géométrie fractale est un outil puissant pour représenter simplement par quelques paramètres des systèmes complexes infinis.

L'objectif du travail rapporté dans ce mémoire est donc essentiellement d'analyser l'impact de l'invariance d'échelle sur le comportement dynamique d'un réseau électrique. Nous allons nous concentrer sur deux points :

- 1) La mise en évidence de l'invariance d'échelle dans un réseau électrique et sa caractérisation (partie 2). Pour cette caractérisation, nous utiliserons aussi une notion importante de la théorie des graphes complexes qu'est le diamètre du réseau.
- 2) La construction d'un modèle dynamique en se basant sur les propriétés d'invariance d'échelle préalablement caractérisées. On proposera tout d'abord un modèle qui traduit l'invariance d'échelle. Puis on développera une méthode d'identification particulièrement adaptée à cette modélisation (partie 3).



Partie II

Explorer l'invariance d'échelle des  
réseaux électriques

---

# Sommaire

<b>CHAPITRE 3</b> .....	<b>36</b>
1. LE RESEAU ELECTRIQUE DE CANTOR.....	36
1.1. <i>Structure du réseau de Cantor</i> .....	36
1.2. <i>Calcul de la dimension fractale du réseau</i> .....	37
1.3. <i>Application de la transformation de renormalisation</i> .....	38
1.4. <i>Calcul de la dimension spectrale du réseau de Cantor</i> .....	41
2. LE RESEAU ELECTRIQUE DE SIERPINSKI.....	42
2.1. <i>Construction et structure du réseau</i> .....	42
2.2. <i>Calcul de la dimension fractale</i> .....	43
2.3. <i>Renormalisation du réseau de Sierpinski</i> .....	46
2.4. <i>Calcul de la dimension spectrale</i> .....	49
CONCLUSION.....	51
<b>CHAPITRE 4</b> .....	<b>52</b>
1. LE RESEAU IEEE 37 NŒUDS .....	52
1.1. <i>Présentation du réseau</i> .....	52
1.2. <i>Découpage en niveaux du réseau</i> .....	53
1.3. <i>Calcul de la dimension fractale</i> .....	53
1.4. <i>Calcul de la dimension spectrale</i> .....	56
2. LE RESEAU IEEE 118 NŒUDS .....	58
2.1. <i>Présentation du réseau</i> .....	58
2.2. <i>Dimension fractale</i> .....	59
2.3. <i>Calcul de la dimension spectrale</i> .....	60
CONCLUSION.....	62

## Chapitre 3

### Mesures fractales de réseaux-modèles

*Nous allons maintenant évaluer l'applicabilité des mesures fractales aux réseaux électriques. Nous nous intéresserons dans ce chapitre à deux réseaux-modèles basés sur deux ensembles fractals: le motif de Cantor et le triangle de Sierpinski. Leur autosimilarité va nous permettre de plus facilement mettre en œuvre des méthodes pour mesurer leurs dimensions caractéristiques. Les liens entre les résultats et l'invariance d'échelle seront aussi plus évidents à faire. Enfin, nous avons retenu ces deux fractales car elles présentent soit un caractère radial proche de celui des réseaux de distribution, soit un caractère maillé plus proche des grands réseaux de transport.*

#### 1. Le réseau électrique de Cantors

##### 1.1. Structure du réseau de Cantor

La fractale de Cantor est présentée Figure 3-6. Elle se construit par une succession de subdivisions de motifs segmentaires. On note  $1/b$  le facteur de réduction des segments entre chaque itération de la construction du motif. Dans ce cas, on a  $b = 3$ .  $b$  est appelé facteur d'échelle. A la première étape de la construction (échelle 1), le motif de Cantor est constitué par un seul segment. Quand on multiplie l'échelle par  $b$  puis  $b^2$  et ainsi de suite, on observe des détails de plus en plus petits.

Cette fractale a une dimension égale à  $\log(2)/\log(3)$  (Mandelbrot, 1977)

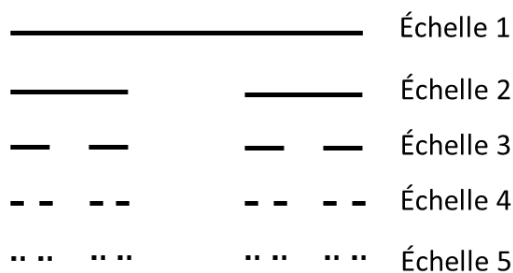


Figure 3-1. Ensemble de Cantor

De la même façon, le réseau électrique de Cantor est formé par d'une succession d'étages, chacun correspondant à une étape de la construction du motif de Cantor. A chaque segment est associée une portion de ligne électrique qui est modélisée par une cellule constituée d'une impédance série  $RL$  associée à une capacité ( $C$ ) en parallèle. La longueur du segment traduit la section de la ligne. Comme la longueur des segments diminue à chaque itération de la construction de la fractale, les paramètres des cellules doivent aussi évoluer.



On choisit que les résistances ( $R$ ) et les inductances ( $L$ ) vont suivre une suite géométrique dont les raisons sont respectivement  $b$  et  $b^2$ . La résistance suit ainsi une évolution qui est conforme à celle attendue quand la section diminue d'un facteur  $b$ . En revanche, le choix pour l'inductance n'a pas vraiment de sens physique car pour les lignes, la valeur d'une inductance ne varie pas comme le carré de la section. Ce choix va par contre permettre de simplifier les calculs de renormalisation effectués sur le réseau comme nous le verrons ci-après.

Enfin, les capacités sont maintenues constantes pour toutes les lignes du réseau. Cela traduit une certaine réalité des réseaux électriques pour lesquels il est courant de supposer que le capacitif ne dépend pas de la section mais de la disposition dans l'espace des conducteurs de la ligne. On suppose donc ici que cette disposition reste identique tout au long du réseau.

En résumé, la structure du réseau dit de Cantor est donnée sur la Figure 3-2. Elle présente bien une structure autosimilaire par la répétition des motifs au fur et à mesure que l'on pénètre plus profondément dans le réseau.

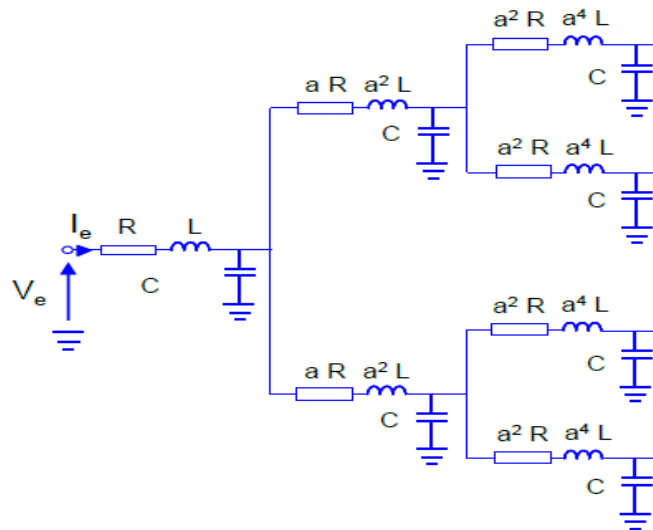


Figure 3-2. Réseau électrique de Cantor

*Remarque : Du fait du modèle retenu, l'effet de propagation est négligé. Pour le prendre en compte, il faudrait augmenter le nombre de cellules de chaque ligne. Dans notre cas d'étude, on considère que les lignes du réseau sont suffisamment courtes pour que le modèle avec une seule cellule reste valide.*

## 1.2. Calcul de la dimension fractale du réseau

On peut s'attendre à ce que la dimension fractale du réseau soit celle du motif géométrique qui l'a inspiré. Pour le vérifier, appliquons une méthode de croissance d'une boule (cf. Figure 3-2). Considérons comme origine, le nœud source du réseau. La boule a un rayon proportionnel à la valeur de la résistance série. Par convention, si la boule a un rayon  $R$  alors elle inclut la première ligne du réseau. Si elle a un rayon

égal à  $(R+bR)$  alors elle inclut les deux premiers niveaux du réseau. On compte ensuite le nombre de nœuds du réseau inclus dans la boule (en comptant le nœud origine). Les résultats figurent ci-dessous.

Rayon $r$ de la boule	$R$	$(1+b)R$	$(1+b+b^2)R$	...
Nombre de nœuds $M(r)$	2	2+2	2+2+2 <sup>2</sup>	...

Tableau 3-1. Résultats de la croissance d'une boule pour le réseau de Cantor

La dimension fractale est obtenue par l'application de la formule donnée par (17). Au bout de  $n$  croissances de la boule, on a :

$$M = 1 + \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n \qquad r = \frac{1 - b^n}{1 - b} \qquad (19)$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(M)}{\log(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log\left(\frac{1 - b^n}{1 - b}\right)} \propto \frac{n \log(2)}{n \log(b) - \log(b - 1)} \propto \frac{\log(2)}{\log(b)} \qquad (20)$$

On retrouve bien la valeur de la dimension de la fractale de Cantor avec  $b = 3$ .

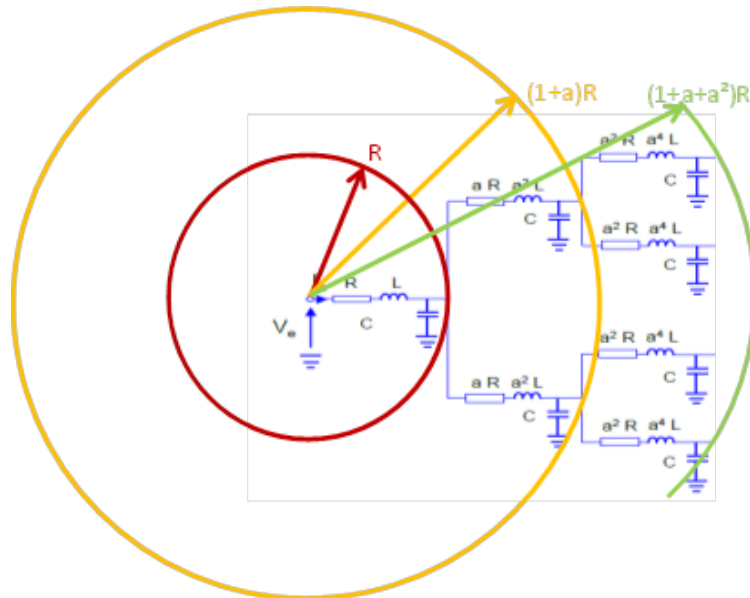


Figure 3-3. Méthode de croissance d'une boule appliquée au réseau de Cantor.

### 1.3. Application de la transformation de renormalisation

La renormalisation est une transformation utilisée pour trouver la solution à l'équation qui lie deux échelles caractéristiques du réseau. Elle se décompose en deux étapes. On procède d'une part à une décimation du réseau pour rassembler en un ensemble plus grossier des éléments plus fins du réseau. Cette première étape revient à un changement de l'échelle d'observation du réseau. Puis, on effectue un

changement de valeur des paramètres du réseau de façon à ce que le réseau décimé conserve les mêmes propriétés statiques et dynamiques que le réseau initial malgré le changement d'échelle (notion d'invariance d'échelle).

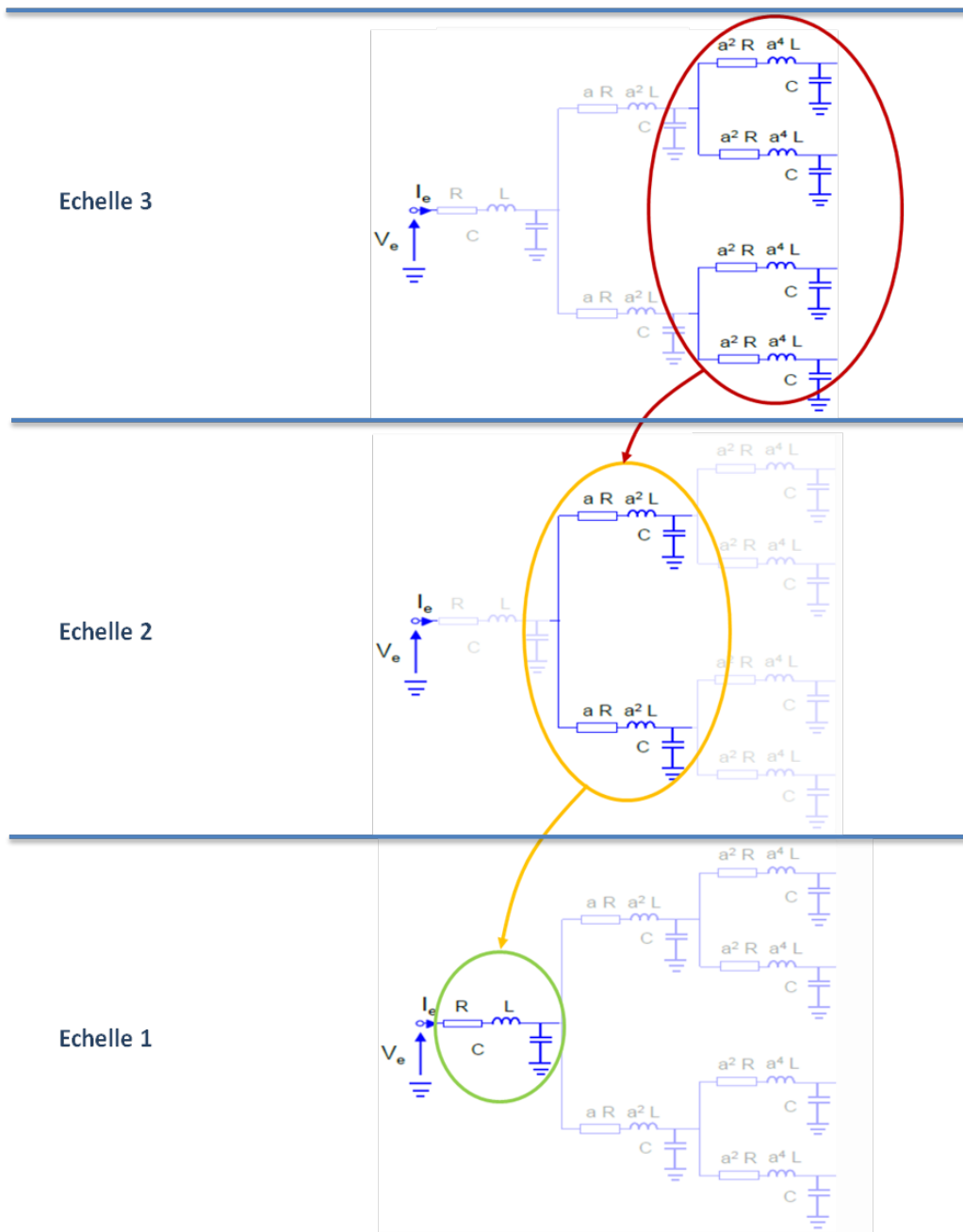


Figure 3-4. Renormalisation du réseau électrique de Cantor

Pour le réseau de Cantor, la transformation de renormalisation peut être décrite par la Figure 3-4. Elle revient à passer d'un étage du réseau à l'autre.

On effectue un zoom sur la décimation d'une des branches du réseau quand on passe des échelles 3 à 2. On s'intéresse à la valeur de la tension du nœud B, avant et après décimation. La tension au nœud A est supposée constante.

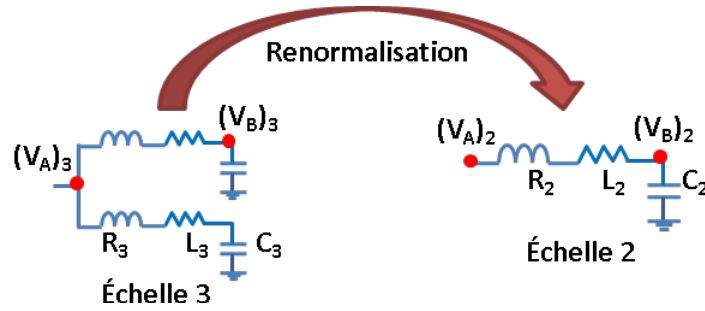


Figure 3-5. Zoom sur la décimation du réseau de Cantor

Avant décimation, l'équation de la tension au nœud  $B$  est :

$$(\bar{V}_B)_3 = \frac{1}{1 - L_3 C \omega_3^2 + j R_3 C \omega_3} (\bar{V}_A)_3 \quad (21)$$

Après décimation, l'équation de la tension au nœud  $A$  est :

$$(\bar{V}_B)_2 = \frac{1}{1 - L_2 C \omega_2^2 + j R_2 C \omega_2} (\bar{V}_A)_2 \quad (22)$$

Afin de conserver les mêmes propriétés du réseau avant et après la décimation, il faut que la tension au nœud  $B$  reste identique ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} L_3 C \omega_3^2 = L_2 C \omega_2^2 \\ R_3 C \omega_3 = R_2 C \omega_2 \end{cases} \quad (23)$$

Ces deux relations conduisent au même résultat :

$$\omega_3 = \frac{1}{b} \omega_2 \quad (24)$$

Cette dernière équation peut s'écrire :

$$\omega_3 = b^{-\xi} \omega_2 \quad (25)$$

Avec :

$$\xi = 1 \quad (26)$$

La transformation de renormalisation se traduit donc par un glissement fréquentiel qui permet de retrouver le même comportement dynamique avant et après la décimation.

La confirmation de ce glissement fréquentiel nous est donnée sur la Figure 3-6 qui présente la réponse fréquentielle du réseau de Cantor pour différentes échelles d'observation. Cette réponse correspond au gain de l'impédance d'entrée du réseau. L'impédance d'entrée est calculée à l'aide d'une simulation circuit du réseau

électrique. Plusieurs configurations du réseau sont simulées selon l'échelle considérée.

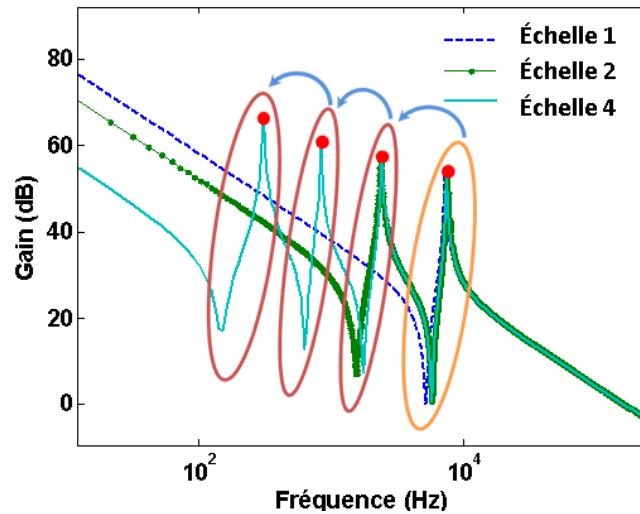


Figure 3-6. Réponse fréquentielle du réseau électrique de Cantor

$$(R = 1\Omega; L = 10^{-3} \text{ H et } C = 10^{-6} \text{ F, } b = 3)$$

Si on ne considère le réseau qu'à l'échelle 1, un pic de résonance est obtenu aux hautes fréquences. Si on observe le réseau à l'échelle 2, la réponse présente deux pics, correspondant chacun à un étage du réseau. Le premier pic qui correspond à l'étage le plus éloigné de nœud source est obtenu à plus basse fréquence que pour le pic de l'échelle 1 et le rapport des fréquences entre ces deux pics est donné par le glissement fréquentiel de la renormalisation. Autrement dit, le réseau présente la même réponse fréquentielle aux échelles 1 et 2 à condition de considérer un changement de fréquences. C'est la traduction dans le domaine fréquentiel de l'invariance d'échelle spatiale du réseau. Bien sûr, l'échelle 2 offrant plus de détails, elle a une réponse fréquentielle plus riche que l'échelle 1 d'observation du réseau. Mais les deux ont une partie semblable du fait de la structure autosimilaire du réseau.

#### 1.4. Calcul de la dimension spectrale du réseau de Cantor

La dimension spectrale du réseau de Cantor est calculée à partir de l'équation (18) qui lie dimension fractale et coefficient  $\xi$  donné par l'équation (26). On en déduit :

$$ds = \frac{D}{\xi} = D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63 \quad (27)$$

Dans (Burioni, 1995), la même conclusion d'égalité entre dimensions fractale et spectrale est faite pour les réseaux fractals de la classe *NTD* (i.e. «nice trees of dimension  $D$ »). Ce sont des réseaux radiaux qui se divisent en  $k_b$  branches à chaque nœud et dont la longueur de chaque division est le double de la longueur de la branche qui précède. Leurs dimensions spectrale et fractale sont données par :

$$ds = D = 1 + \frac{\ln k_b}{\ln 2} \quad (28)$$

## 2. Le réseau électrique de Sierpinski

### 2.1. Construction et structure du réseau

Le réseau électrique est construit de même façon qu'un tamis fractal de Sierpinski. La figure ci-dessous présente des tamis pour des facteurs d'homothétie  $1/b$  différents. Le cas standard est  $b=2$ . Tout comme pour Cantor,  $b$  sera appelé par la suite facteur d'échelle.

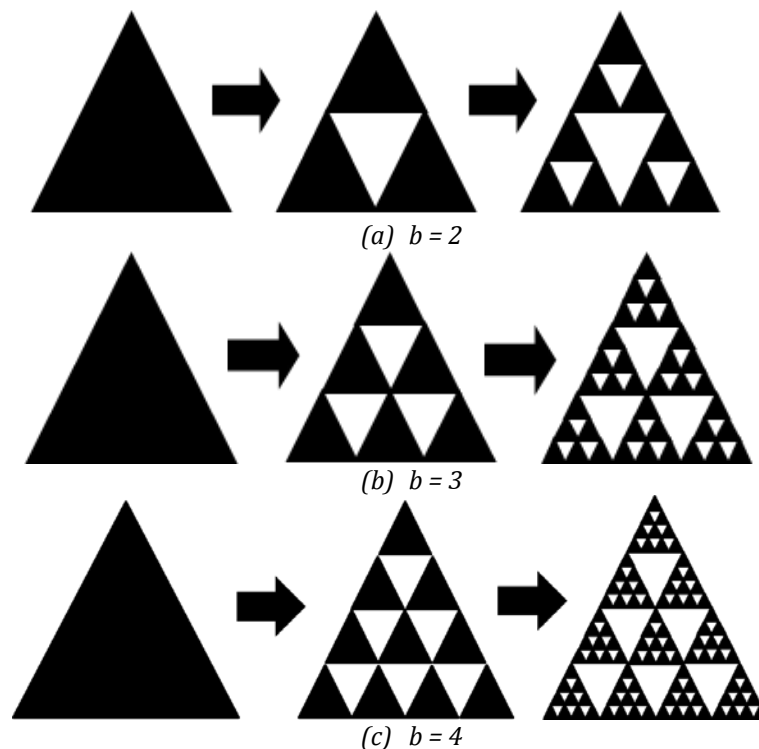


Figure 3-7. Tamis de Sierpinski pour différents facteurs d'échelle  $b$ .  
(Chaque figure présente de gauche à droite le motif initiateur, le motif générateur puis la combinaison des deux à l'itération suivante)

Le motif initiateur du réseau électrique de Sierpinski est constitué par trois lignes connectées en triangle comme indiqué sur la Figure 3-8. Chaque ligne est supposée représentée selon l'hypothèse des lignes courtes par une seule cellule en  $\pi$  d'impédance série  $z_h$  et d'admittance parallèle  $y_v$ . La propagation est donc toujours négligée même si cette hypothèse devient énormément simplificatrice lorsque l'on monte en fréquence. Par rapport au cas du réseau de Cantor, on néglige la résistance de ligne, l'impédance série ne comprenant donc qu'une inductance. Cette hypothèse est justifiée par le fait que le réseau-modèle de Sierpinski est censé représenter des réseaux de transport maillés pour lesquels le comportement de la ligne est plutôt inductif.

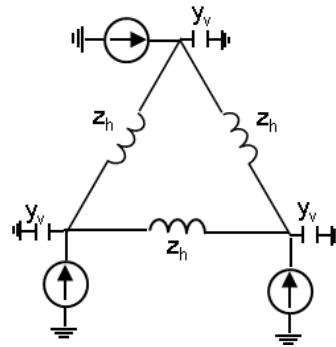


Figure 3-8. Motif initiateur du réseau de Sierpinski

Le motif initiateur est ensuite subdivisé en trois triangles équilatéraux formés des mêmes lignes (Figure 3-9). Ce nouveau motif est appelé motif générateur. Il est à noter que, par construction, la capacité aux nœuds  $A$ ,  $D$  et  $F$  vaut la moitié de la capacité aux nœuds  $B$ ,  $C$  et  $E$ . La construction du réseau fractal se poursuit ensuite en substituant un motif générateur à chaque nouveau motif initiateur apparaissant dans le réseau. La structure finale du réseau est autosimilaire et une étape de la construction du réseau peut être considérée comme une observation du réseau à une échelle donnée. Le facteur entre deux échelles successives est bien sûr le même que celui de la fractale, c'est-à-dire  $b$ .

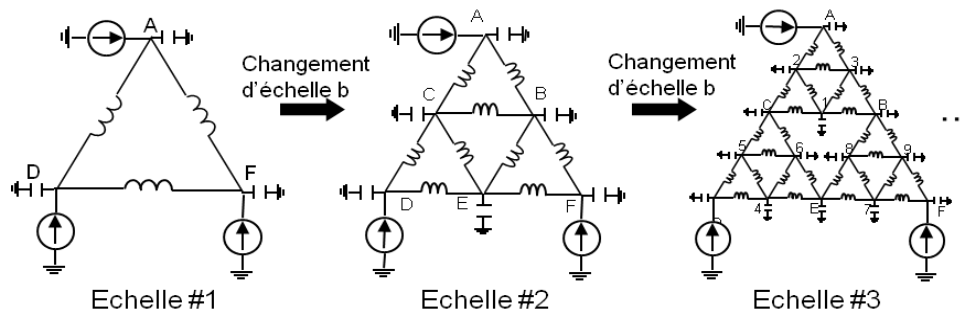


Figure 3-9. Etapes de la construction du réseau de Sierpinski

## 2.2. Calcul de la dimension fractale

On utilise une méthode de croissance de boule. On prend pour origine de la boule le nœud  $A$ . Le rayon de la boule est proportionnel à la valeur de l'inductance série comme illustré sur la Figure 3-10.

On dénombre tout d'abord le nombre de nœuds ( $N_N$ ) inclus dans une boule de rayon  $r$ . Il est donné à partir du nombre des triangles ( $N_T$ ) inclus dans la boule. C'est le nombre total de nœuds des triangles sans compter plusieurs fois les nœuds qui sont communs à plusieurs triangles.

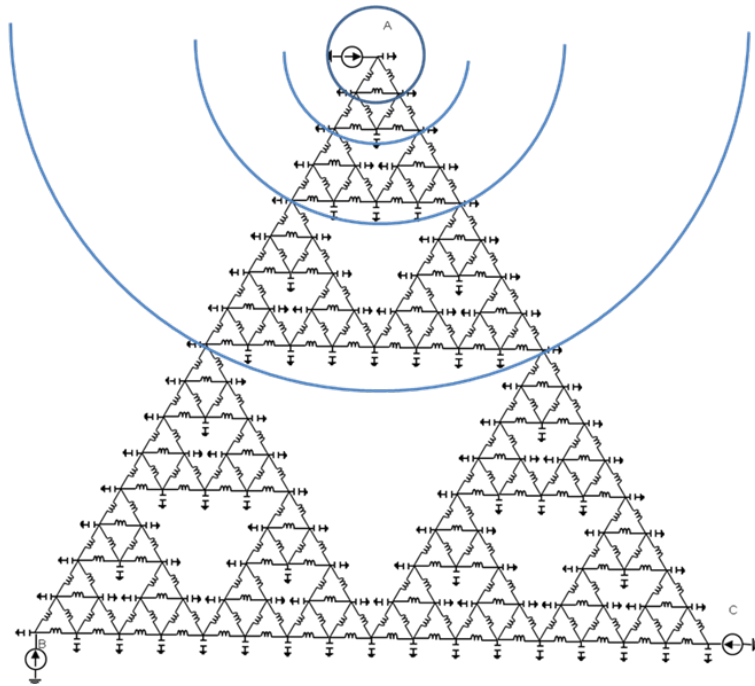


Figure 3-10. Méthode de croissance d'une boule appliquée au réseau de Sierpinski

Les valeurs des  $N_N$  et  $N_T$  dépendent du facteur d'homothétie adopté pour la construction du réseau de Sierpinski. Le Tableau 3-2 présente les résultats pour les facteurs d'échelle  $b = 2$ ,  $b = 3$  et  $b = 4$ .

Il est possible d'en déduire des relations génériques à l'échelle #k :

Le rayon r est donné par :

$$(b)^{k-1} \tag{29}$$

Le nombre de triangles inclus ( $N_T$ ) est :

$$\left(\frac{b(b+1)}{2}\right)^{k-1} \tag{30}$$

Le nombre de nœuds ( $N_N$ ) est donc :

$$3 + K\left(\frac{b(b+1)^0}{2} + \frac{b(b+1)^1}{2} + \dots + \frac{b(b+1)^{k-2}}{2}\right) \tag{31}$$

avec  $K = 3$  quand  $b = 2$   
 $K = 6$  quand  $b = 3$   
 $K = 12$  quand  $b = 4$



Facteur $b$	$b = 2$			$b = 3$			$b = 4$		
Echelle	$r$	$N_T$	$N_N$	$r$	$N_T$	$N_N$	$r$	$N_T$	$N_N$
1	$2^0$	$3^0$	3	$3^0$	$6^0$	3	$4^0$	$10^0$	3
2	$2^1$	$3^1$	$6 = 3 + 3 \times 3^0$	$3^1$	$6^1$	$10 = 3 + 7 \times 6^0$	$4^1$	$10^1$	$15 = 3 + 12 \times 10^0$
3	$2^2$	$3^2$	$15 = 3 + 3 \times (3^0 + 3^1)$	$3^2$	$6^2$	$52 = 3 + 7 \times (6^0 + 6^1)$	$4^2$	$10^2$	$135 = 3 + 12 \times (10^0 + 10^1)$
4	$2^3$	$3^3$	$42 = 3 + 3 \times (3^0 + 3^1 + 3^2)$	$3^3$	$6^3$	$304 = 3 + 7 \times (6^0 + 6^1 + 6^2)$	$4^3$	$10^3$	$1335 = 3 + 12 \times (10^0 + 10^1 + 10^2)$
5	$2^4$	$3^4$	$123 = 3 + 3 \times (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$	$3^4$	$6^4$	$1816 = 3 + 7 \times (6^0 + 6^1 + 6^2 + 6^3)$	...	...	...

Tableau 3-2. Résultats de la méthode de croissance d'une boule pour le réseau de Sierpinski.

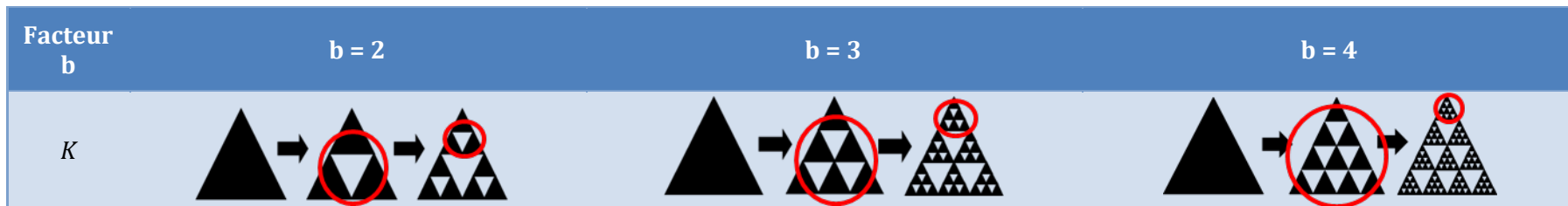


Tableau 3-3. Coefficient  $K$  du réseau de Sierpinski

Le coefficient  $K$  donne le nombre de nœuds des triangles du motif générateur en excluant les trois nœuds au sommet (cf. Tableau 3-3). Sa variation avec  $b$  peut être résumée par la formule suivante :

$$K = \frac{(b+1)(b+2)}{2} - 3 \quad (32)$$

Finalement,  $N_N$  et  $r$  sont donnés en fonction de  $b$  à l'itération  $\#k$  par :

$$r = b^{k-1}$$

$$N_N = 3 + \left[ \frac{(b+1)(b+2)}{2} - 3 \right] \left[ \frac{\left( \frac{b(b+1)}{2} \right)^{k-1} - 1}{\frac{b(b+1)}{2} - 1} \right] = 3 + \frac{b+4}{b+2} \left[ \left( \frac{b(b+1)}{2} \right)^{k-1} - 1 \right] \quad (33)$$

La dimension fractale est donnée par le passage à la limite infinie du rapport du nombre de nœuds et du rayon des boules, soit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(N_N)}{\log(r)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log\left(3 + \frac{b+4}{b+2} \left[ \left( \frac{b(b+1)}{2} \right)^k - 1 \right]\right)}{\log(b^k)} \propto \frac{\log\left(\frac{b(b+1)}{2}\right)}{\log(b)} \quad (34)$$

En appliquant cette formule pour le réseau de Sierpinski avec  $b=2$ , on trouve :

$$D = \frac{\log(3)}{\log(2)} \quad (35)$$

Elle correspond à la valeur de la dimension fractale du tamis de Sierpinski ayant servi de support à la construction du réseau (Mandelbrot, 1977).

### 2.3. Renormalisation du réseau de Sierpinski

Nous ne nous intéressons maintenant qu'au réseau de Sierpinski classique obtenu avec un facteur d'échelle  $b=2$ . L'étude pour un autre facteur d'échelle n'a pas vraiment d'importance pour nous. Nous recherchons en effet seulement un réseau-modèle maillé qui puisse être utilisé pour comprendre les liens entre topologie et caractéristiques statiques ou dynamiques du réseau. Le réseau de Sierpinski pour  $b=2$  nous semble donc largement suffisant.

Comme dans le cas de la fractale de Cantor, la renormalisation va nous permettre de calculer le paramètre d'échelle  $\xi$ . La Figure 3-11 présente un exemple de transformation de renormalisation entre deux échelles du réseau de Sierpinski.

Avant et après décimation, le réseau est alimenté par trois sources de tension situées aux sommets notés  $A$ ,  $D$  et  $F$ . Le choix de trois sources est motivé par des

raisons de symétrie. Nous allons maintenant calculer les tensions aux nœuds  $B$ ,  $C$  et  $E$  communs aux deux réseaux avant et après décimation. La transformation de renormalisation impose de retrouver les mêmes valeurs de tension. Du fait des symétries du réseau, on ne s'intéressera qu'à la tension du nœud  $E$ .

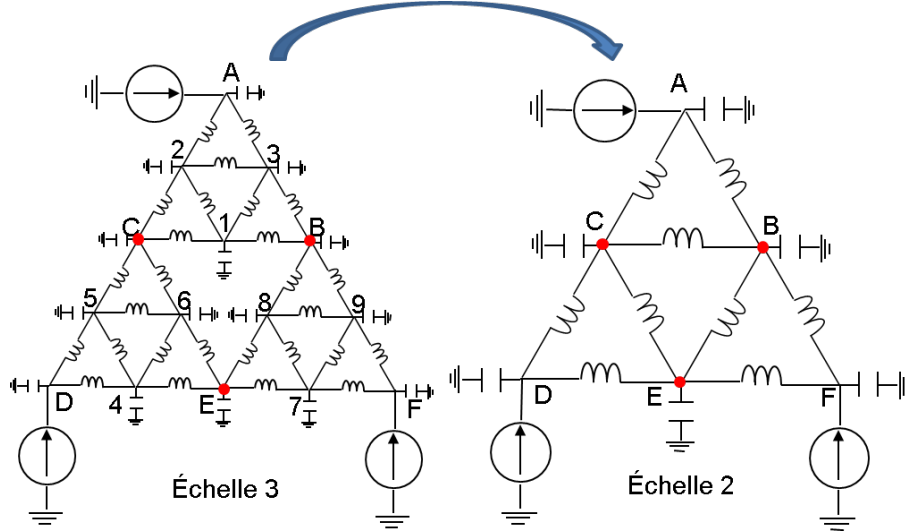


Figure 3-11. Renormalisation du réseau de Sierpinski

➤ Avant décimation, la tension au nœud  $E$  est donnée par :

$$(4 - L_3 C_3 \omega_3^2) \bar{V}_E = \bar{V}_6 + \bar{V}_8 + \bar{V}_4 + \bar{V}_7 \quad (36)$$

Les tensions aux nœuds 4, 6, 7 et 8 peuvent s'exprimer en fonction des tensions aux nœuds  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $F$ .

Par exemple, pour la tension au nœud 6 :

$$\bar{V}_6 = \frac{1}{(L_3 C_3 \omega_3^2 - 2)(L_3 C_3 \omega_3^2 - 5)} [(4 - L_3 C_3 \omega_3^2)(\bar{V}_C + \bar{V}_E) + 2\bar{V}_D] \quad (37)$$

En remplaçant les tensions  $\bar{V}_6, \bar{V}_8, \bar{V}_4$  et  $\bar{V}_7$  par  $\bar{V}_B, \bar{V}_C, \bar{V}_D$  et  $\bar{V}_E$  dans l'équation (36), on trouve :

$$(4 - L_3 C_3 \omega_3^2) \bar{V}_E = \frac{(6 - L_3 C_3 \omega_3^2)}{(L_3 C_3 \omega_3^2 - 2)(2L_3 C_3 \omega_3^2 - 5)} [\bar{V}_B + \bar{V}_C + \bar{V}_D + \bar{V}_F] + \frac{4(4 - L_3 C_3 \omega_3^2)}{(L_3 C_3 \omega_3^2 - 2)(2L_3 C_3 \omega_3^2 - 5)} \bar{V}_E \quad (38)$$

➤ Après décimation, la tension au nœud  $E$  s'écrit :

$$(4 - L_2 C_2 \omega_2^2) \bar{V}_E = \bar{V}_B + \bar{V}_C + \bar{V}_D + \bar{V}_F \quad (39)$$

Les deux tensions sont identiques si la fréquence est modifiée selon l'équation :

$$L_2 C_2 \omega_2^2 = L_3 C_3 \omega_3^2 (5 - 2L_3 C_3 \omega_3^2) \quad (40)$$

Si on prend  $L_2=L_3=L$  et  $C_2=C_3=C$ , le changement de fréquence s'écrit :

$$LC\omega_2^2 = LC\omega_3^2(5 - 2LC\omega_3^2) \quad (41)$$

Si  $\omega$  est petit, c'est-à-dire :

$$\omega_3^2 < \frac{5}{2LC} \quad (42)$$

L'équation (41) devient :

$$\omega_2^2 = 5\omega_3^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{5}\omega_3 \quad (43)$$

Introduisant le facteur d'échelle  $b$ , cette condition s'écrit :

$$\omega_3 = b^{-\xi} \omega_2 \quad (44)$$

On en déduit alors la valeur de  $\xi$  correspondant au glissement de fréquence associé à la transformation de renormalisation :

$$\xi = \frac{1}{2} \times \frac{\ln 5}{\ln 2} \quad (45)$$

Cette valeur est confirmée par l'analyse du gain de la réponse fréquentielle de l'impédance d'entrée du réseau vue du nœud  $E$  (Figure 3-12).

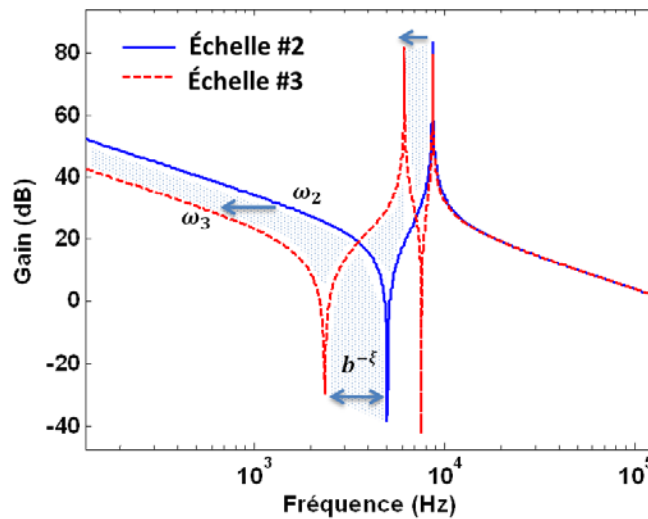


Figure 3-12. Réponse fréquentielle du réseau de Sierpinski avant et après décimation

D'après cette figure, il y a bien une translation fréquentielle (de  $\omega_2$  à  $\omega_3$ ) de la réponse fréquentielle lors de la transformation de renormalisation. Cette translation est donnée par la valeur de  $b^{-\xi}$ , avec  $b=2$  et  $\xi$  déterminé par l'équation (45).

Pour vérifier le glissement, l'analyse des comportements fréquents du réseau de Sierpinski à plusieurs échelles d'observation est faite sur la Figure 3-13. On

retrouve bien un déplacement sur les premiers pics comme indiqué par l'équation (43). La partie basses fréquence des réponses se conserve identique lors du passage d'une échelle à l'autre à condition d'effectuer aussi un glissement en fréquence.

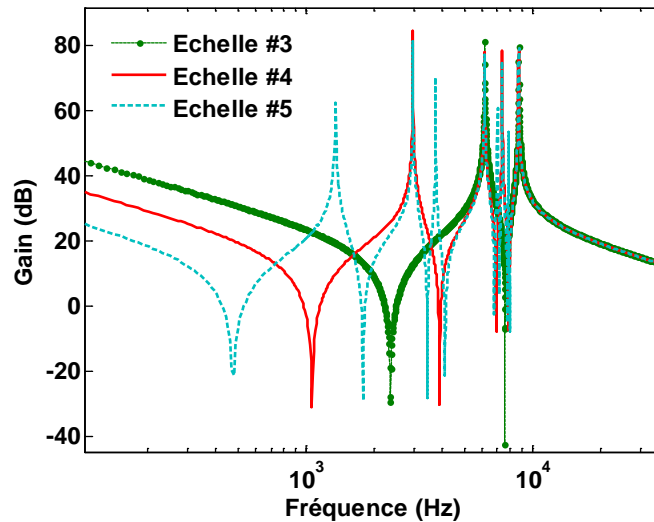


Figure 3-13. Comportements dynamiques du réseau Sierpinski de l'échelle #3 à l'échelle #5.

Bien sûr, tout comme pour le réseau de Cantor, plus l'observation est fine, plus la réponse est riche à hautes fréquences du fait des détails du motif fractal du réseau qui se révèlent.

Ces résultats confirment aussi qu'il est possible de calculer  $\xi$  à partir de la réponse fréquentielle. Cela pourrait constituer une alternative aux calculs analytiques, difficilement possibles quand la structure du réseau devient trop complexe.

## 2.4. Calcul de la dimension spectrale

Tout comme pour le réseau de Cantor, la dimension spectrale  $ds$  peut être déduite de l'équation (18), soit :

$$ds = \frac{D}{\xi} = 2 \times \frac{\ln 3}{\ln 5} = 1,36 \quad (46)$$

Cette valeur vérifie la conjecture d'Orbach-Alexander pour laquelle la dimension spectrale des réseaux fractals est proche de  $4/3$  lorsque le réseau est plongé dans un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2 (Nakayama, Yakubo, & Orbach, 1994).

Comme mentionné dans la section 2.4.4 du Chapitre 2, la valeur de la dimension spectrale peut être retrouvée par le tracé de la distribution des modes. En

effet, pour un réseau invariant d'échelle, la distribution modale doit suivre une loi de puissance d'exposant  $ds$ .

Les modes du réseau de Sierpinski sont calculés par la fonction `power_statespace` de MATLAB (cf. annexe B pour plus de détails sur cette fonction). Leur distribution fréquentielle est tracée sur la Figure 3-14. On retrouve une loi de puissance caractéristique de l'invariance d'échelle du réseau. Sa pente en échelle log-log est bien égale à  $ds$ . La dispersion des points obtenue est certainement due à l'imprécision du calcul numérique des modes par la fonction utilisée dans MATLAB.

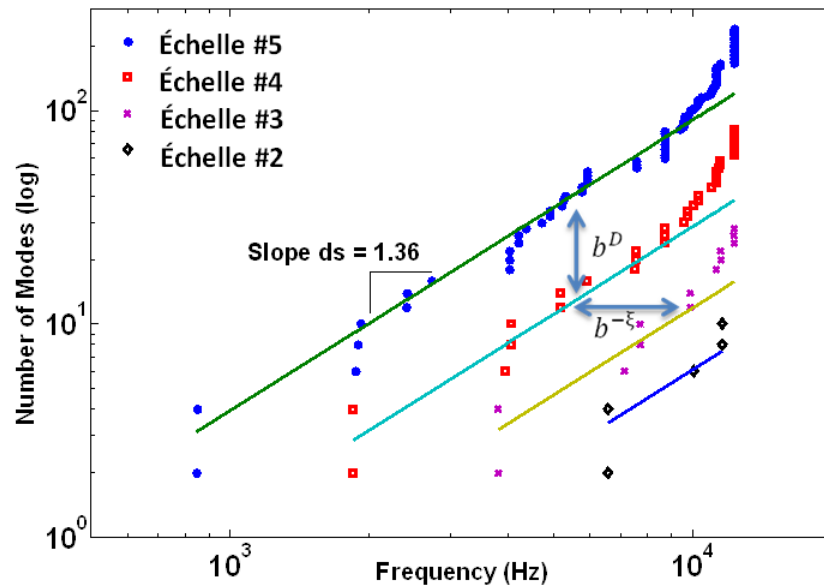


Figure 3-14. Distribution des modes du réseau de Sierpinski.

Deux remarques peuvent être ajoutées sur cette distribution modale.

D'une part, on retrouve la même distribution modale entre deux échelles d'observation si la fréquence est modifiée du facteur  $b^{-\xi}$ . Ceci est prédit par la transformation de renormalisation et par le glissement fréquentiel qu'elle introduit (l'équation(44)).

D'autre part, pour la même fréquence, la distribution des modes entre deux échelles varie du facteur  $b^D$ . Ceci est bien sûr une conséquence de la fractalité du réseau. On rappelle en effet que le nombre de modes du réseau doit être égal à la somme du nombre de variables d'état. En conséquence, il est donné par la somme des nombres de liens et de nœuds du réseau. Ces deux nombres évoluant selon une loi d'échelle en  $b^D$  (LE & RETIERE, 2014), il en est de même pour le nombre total de modes du réseau.

### 3. Conclusion

Une méthode de croissance de boules et une transformation de renormalisation nous ont permis de retrouver les dimensions fractale et spectrale de réseaux-modèles inspirés des fractales de Cantor et de Sierpinski.

La valeur obtenue pour la dimension spectrale du réseau de Sierpinski est une expression de son universalité. On entend par universalité le fait que ce réseau appartienne à la même classe que d'autres objets fractals, par exemple des amas percolant. Autrement dit, malgré des physiques sous-jacentes différentes, un amas percolant a une dimension spectrale proche de celle du réseau électrique de Sierpinski. Ceci est une prédiction de la théorie de la renormalisation pour laquelle le comportement de systèmes invariants d'échelle ne s'explique pas par le comportement local, microscopique, des composants élémentaires d'un système mais par l'arrangement topologique, hiérarchique des éléments du système pris dans son ensemble. C'est pour cela que de nombreux systèmes complexes se comportent dans certaines conditions « de la même manière » (Stanley, Amaral, Gopikrishnan, Ivanov, Keitt, & Plerou, 2000).

Plus pragmatiquement, les réseaux fractals étudiés précédemment peuvent être considérés comme deux archétypes de réseaux maillés et radiaux. Malgré leur finitude, leur structure invariante se manifeste par certaines propriétés, par exemple la dimension spectrale, dont on trouve des effets sur la réponse fréquentielle. Nous allons maintenant voir si les mêmes approches peuvent être appliquées à des réseaux plus réalistes et si ceux-ci manifestent une invariance d'échelle, au moins dans une certaine échelle d'observation.





Enfin, l'effet de propagation n'est pas pris en compte. Chaque ligne sera donc représentée par une simple cellule en pi. Le détail des paramètres est donné dans l'annexe C.

## 1.2. Découpage en niveaux du réseau

Le découpage en niveaux va permettre de retrouver la notion d'échelle du réseau de Cantor (Figure 3-4). Grosso modo, l'idée est que le réseau radial est constitué d'une succession d'étages ordonnés de la source jusqu'au point le plus éloigné du réseau. Tout comme pour le réseau de Cantor, à chaque niveau correspond une échelle d'observation. Aux échelles grossières, on observe que les premiers niveaux du réseau et il faut affiner l'échelle pour observer des niveaux plus fins.

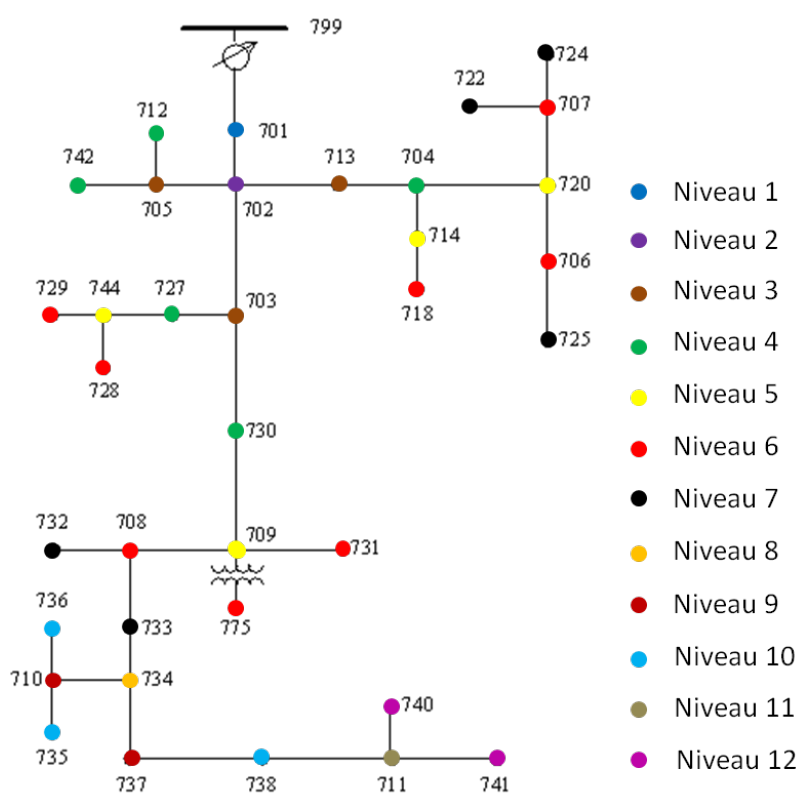


Figure 4-2. Découpage en niveaux du réseau IEEE 37 nœuds

Le découpage adopté est présenté sur la Figure 4-2. La source est supposée de niveau 0. Le niveau 1 est constitué du premier nœud rencontré à partir du nœud source. Le niveau 2 rassemble les nœuds voisins du niveau 1 qui sont rencontrés lorsqu'on continue de s'éloigner du nœud source. Ce découpage en niveaux va maintenant être utilisé pour déterminer la dimension fractale du réseau.

## 1.3. Calcul de la dimension fractale

Le calcul de la dimension fractale utilise la méthode de croissance d'une boule. Nous avons utilisé pour le réseau de Cantor un rayon de boule proportionnel à la

résistance série. Pour le réseau 37 nœuds, le rayon peut aussi être choisi proportionnel à la résistance série des lignes comme le réseau Cantor. Il est à noter que si le rayon était pris proportionnellement à l'inductance série, il suivrait une évolution comparable. C'est ce que nous montre la Figure 4-3 où nous mesurons à quelle distance du nœud source se trouve un nœud quelconque du réseau. Que la définition de la distance soit prise proportionnelle à la résistance ou à l'inductance, le résultat est identique dans ses variations.

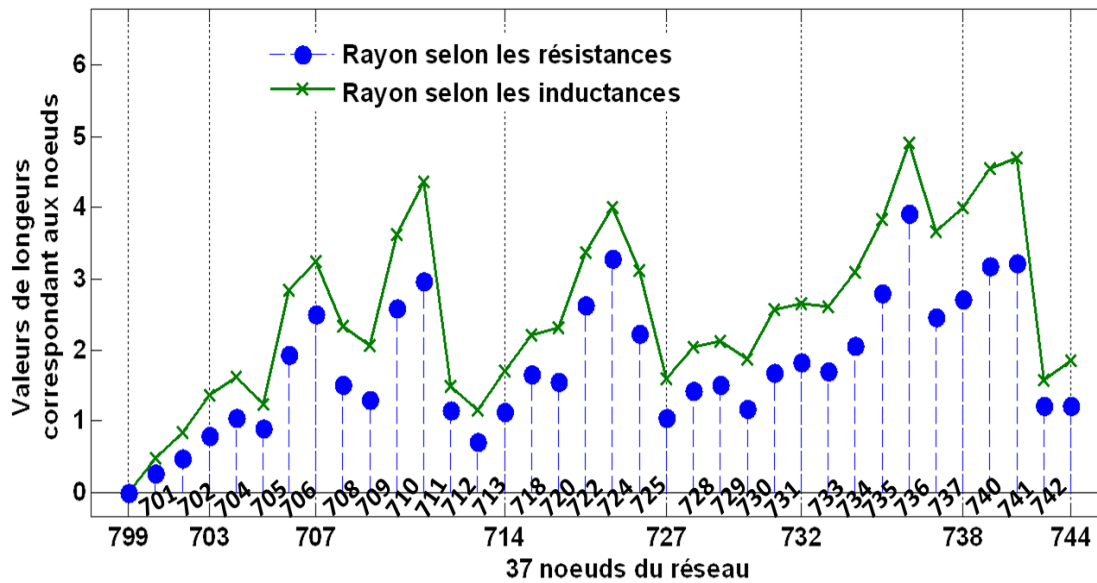


Figure 4-3. Distribution nodale des rayons

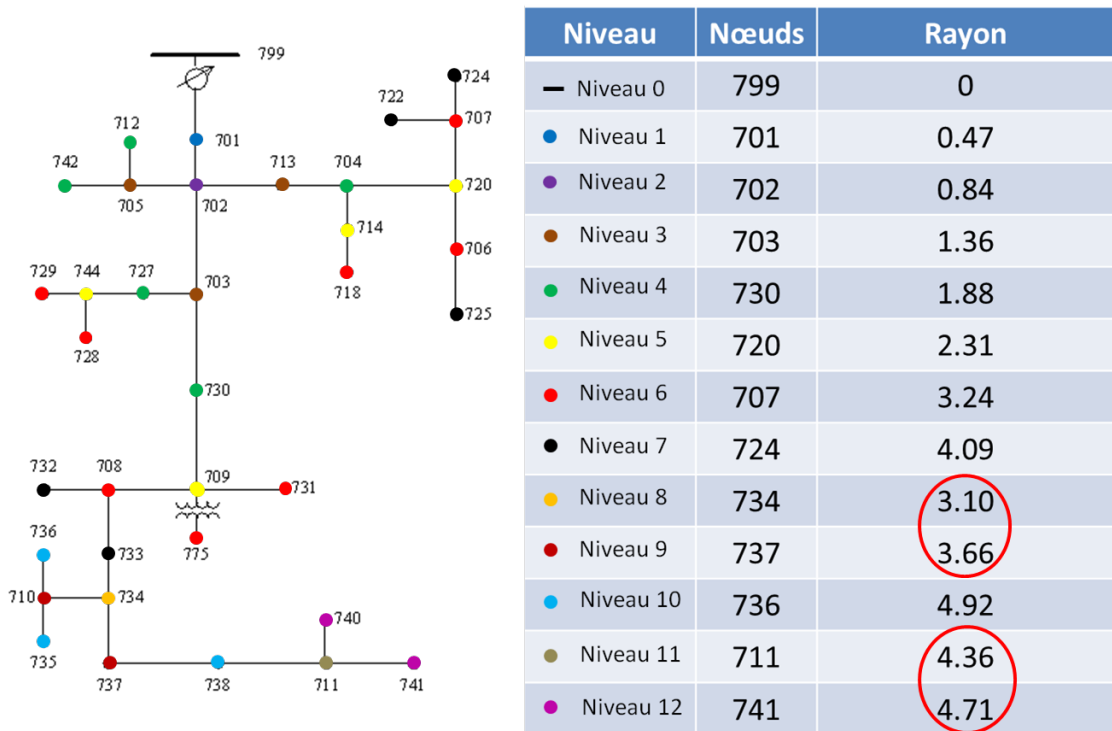


Figure 4-4. Rayon calculé pour chaque niveau du réseau IEEE 37 nœuds

La Figure 4-4 donne le rayon mesuré par l'inductance série pour chaque niveau de découpage du réseau 37 nœuds. Les rayons des niveaux 8 et 9 sont inférieurs à ceux du niveau 7. Il en est de même pour les niveaux 11 et 12 par rapport au niveau 10. En effet, les nœuds qui définissent les niveaux n'appartiennent pas tous aux mêmes branches du réseau et ces branches ne croissent pas de la même manière par rapport au nœud source. Cela explique les disparités. Pour appliquer la méthode de croissance d'une boule, on choisit donc de réorganiser les niveaux de façon à bien considérer des boules croissantes.

Pour calculer la dimension fractale, on compte ensuite le nombre de nœuds  $M$  compris dans la boule de rayon  $r$ . Les résultats sont résumés dans le Tableau 4-1 :

Niveau du réseau	1	2	3	4	5	6	7	10
$r$	0,47	0,84	1,36	1,88	2,31	3,24	4,09	4,92
$M(r)$	1	2	5	10	14	22	27	35

Tableau 4-1. Application de la méthode de croissance d'une boule au réseau 37 nœuds

On trace enfin l'évolution de  $M(r)$  en fonction de  $r$  en échelle log-log. L'ensemble de points doit pouvoir être approché par une droite grâce à une régression linéaire. La pente de la droite ainsi obtenue doit donner la dimension fractale.

La qualité de la régression et donc du calcul de la dimension fractale est estimée à partir d'un coefficient de détermination, noté  $rd^2$ . Il permet de juger la qualité de l'approximation des points par la droite de régression. Si aucun point est correctement approché par la droite, le coefficient de détermination est nul. Si tous les points de la distribution sont correctement déterminés par la droite de régression, le coefficient vaut 1. Il est calculé par la formule suivante :

$$rd^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \quad (47)$$

Avec :  $SS_{res} = \sum_i (y_i - h_i)^2$  : variabilité de la régression

$SS_{tot} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$  : variabilité totale

Où  $y_i$  et  $h_i$  sont les valeurs correspondant aux données de départ et au modèle identifié par régression linéaire et  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  est la moyenne des données.

La dimension fractale vaut entre  $D_{min}=1,4$  et  $D_{max} = 1,6$  pour obtenir un coefficient de détermination supérieur à 0,97 (Figure 4-5). La dimension fractale est

donc supérieure à 1 et inférieure à 2, ce qui était attendu pour un tel réseau planaire. La valeur de dimension fractale  $D_{opt}$  est 1,58 pour un coefficient de détermination égal à 0,99.

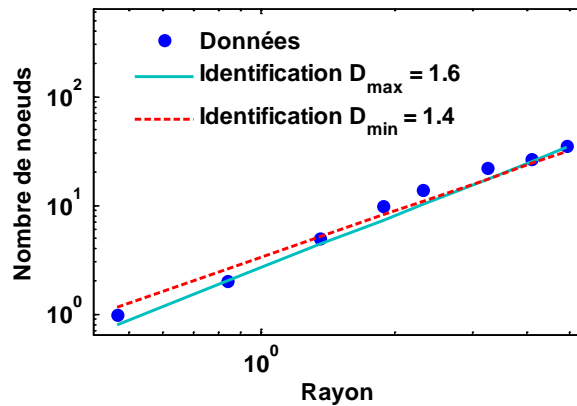


Figure 4-5. Dimension fractale du réseau IEEE 37 nœuds avec un coefficient de détermination supérieur à 0,97.

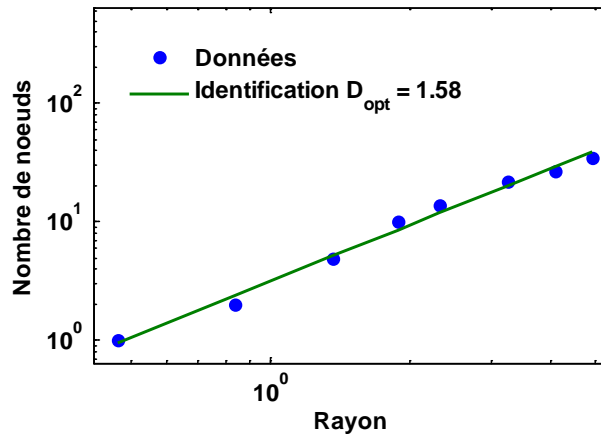


Figure 4-6. Dimension fractale du réseau IEEE 37 nœuds pour un coefficient de détermination égal à 0,99.

Les résultats obtenus semblent donc indiquer une invariance d'échelle du réseau avec le découpage en niveaux qui a été adopté. Ce résultat est d'autant plus remarquable que le réseau est de petite taille. Cette invariance est caractérisée par une dimension fractale qui a pu être approchée avec une bonne précision.

*Remarque : Attention ce résultat a été obtenu en appliquant la méthode de croissance d'une boule à un seul nœud. Pour une approche plus rigoureuse, il faudrait refaire le calcul pour les autres nœuds et ensuite effectuer une moyenne.*

#### 1.4. Calcul de la dimension spectrale

La dimension spectrale peut être déduite de la distribution modale comme montré dans la section 2.4.4 du Chapitre 2.

Les modes sont calculés par la fonction *power\_statespace* de MATLAB. A partir, d'une description des sources, des sorties, de la géométrie du réseau, des paramètres linéiques, cette fonction génère la matrice d'état associée aux variables d'état du réseau (pour plus de détails, cf. annexe B). Le calcul des modes peut ensuite être facilement fait à partir des valeurs propres de la matrice d'état.

La distribution fréquentielle des modes d'oscillation est tracée dans un diagramme log-log. Si une invariance d'échelle est présente, elle doit comporter une partie linéaire de pente égale à la dimension spectrale. Les résultats sont présentés Figure 4-7 et Figure 4-8.

D'une part, on trouve bien une partie linéaire caractéristique de l'autosimilarité de la structure du réseau 37 nœuds. Cette partie est limitée à une décade du fait de la finitude et de la petitesse du réseau étudié mais elle a le mérite d'exister sur les deux tiers de la distribution modale. La valeur de la coupure aux fréquences supérieures doit certainement dépendre des paramètres du réseau mais nous ne sommes pas actuellement en mesure de la préciser. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'elle correspond à une fréquence de transition entre une zone de fréquences intermédiaires où l'invariance d'échelle impacte fortement le comportement dynamique du réseau et une zone de fréquences hautes où le comportement dynamique est influé par la seule distribution des capacités des lignes (cf. la section 5 du Chapitre 5).

Tout comme pour la dimension fractale, une méthode de régression linéaire est utilisée pour calculer la pente. Pour un coefficient de détermination  $rd^2 > 0,95$ , la valeur de la dimension spectrale  $ds$  est entre 1,2 et 1,4 (Figure 4-7). La valeur  $ds$  est plus exactement de 1,26 pour  $rd^2 = 0,996$  (Figure 4-8). Cette valeur est raisonnablement proche de  $4/3$  comme cela est attendu pour une fractale plongée dans un espace de dimension supérieure ou égale à 2 (conjecture d'Alexander-Orbach (Nakayama, Yakubo, & Orbach, 1994)).

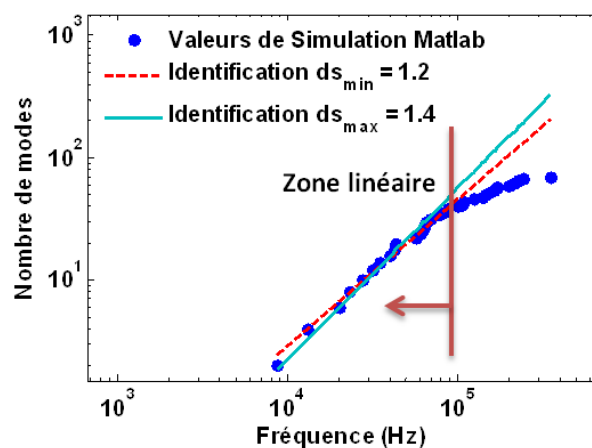


Figure 4-7. Distribution des modes du réseau IEEE 37 nœuds.

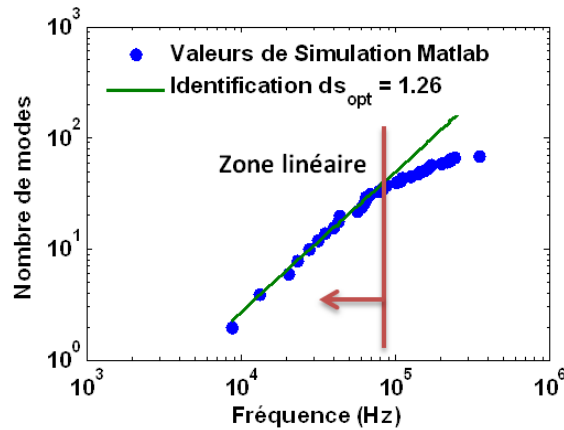


Figure 4-8. Identification la dimension spectrale du réseau IEEE 37 nœuds.

*Remarque: Nous n'obtenons plus une dimension spectrale égale à la dimension fractale comme pour le réseau de Cantor. Mais cela n'a rien d'étonnant car cette propriété relevait certainement plus d'un caractère remarquable de certaines topologies de réseaux radiaux que de leur caractère radial proprement dit.*

## 2. Le Réseau IEEE 118 nœuds

Nous allons maintenant montrer que le réseau maillé IEEE-118 nœuds présente également des caractéristiques d'invariance d'échelle.

### 2.1. Présentation du réseau

La topologie du réseau IEEE-118 nœuds est présentée Figure 4-9. Le réseau de transmission est alimenté par le nœud bilan qui est noté par un point rouge sur la figure. On suppose que :

- Le réseau est équilibré et sa représentation est donc monophasée.
- Les lignes sont suffisamment courtes pour négliger la propagation et elles peuvent donc être modélisées par une simple cellule en pi.
- Toutes les charges ne sont pas modélisées pour des raisons de simplicité et mettre en évidence l'invariance d'échelle de la topologie du réseau seul.

Le détail des paramètres du réseau est donné annexe D.

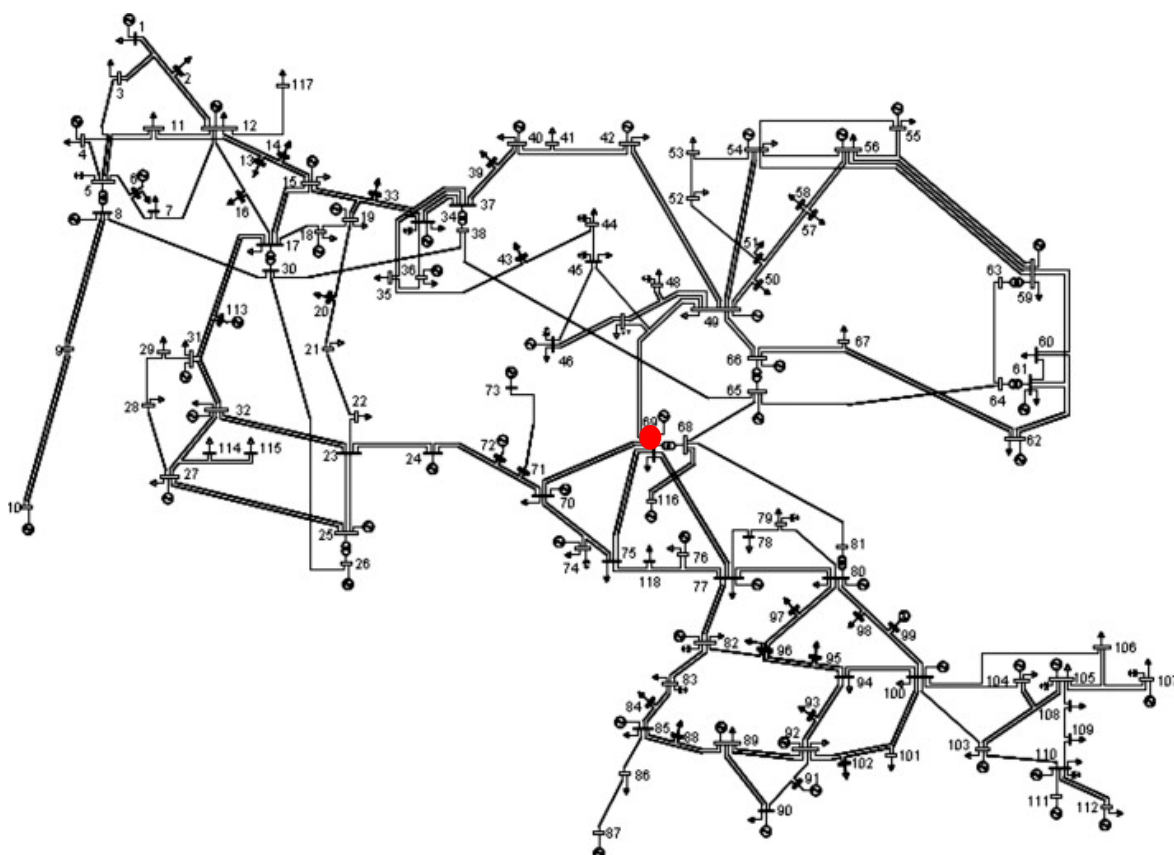


Figure 4-9. Topologie du réseau IEEE 118 nœuds.

## 2.2. Dimension fractale

La dimension fractale du réseau est calculée par la méthode de croissance d'une boule comme montrée section 2.4.2 du Chapitre 2. Son application ne peut pas être aussi simple que pour le réseau 37 nœuds du fait de la structure maillée. Nous proposons une méthode basée sur le calcul du diamètre du réseau au sens de la théorie des graphes. Cette grandeur est étroitement liée à la notion de distance entre deux sites d'un graphe. La distance  $lij$  entre deux nœuds  $i$  et  $j$  est définie comme le nombre de liens qui constituent le plus court chemin les reliant. Le diamètre d'un réseau est la distance maximum entre n'importe quelle paire de nœuds donc  $L_{max} = \max(lij)$  avec  $i$  et  $j \in N$ .

En s'appuyant sur cette définition, le calcul de la dimension fractale peut être résumé ainsi. On choisit une discrétisation spatiale du réseau en  $n_b$  boules de rayon croissant. On part d'un nœud  $N_0$  quelconque du réseau. On calcule à partir de ce nœud le diamètre du réseau. On choisit alors une première boule de centre  $N_0$  et de rayon égal à  $L_{max}/n_b$ . On compte le nombre de nœuds inclus dans cette boule. On recommence l'opération en augmentant le rayon jusqu'à couvrir totalement le réseau. On recommence avec tous les autres nœuds du réseau. On effectue finalement la moyenne des mesures ainsi réalisées. Cette moyenne est tracée en fonction du rayon des boules dans un diagramme log-log.

Le résultat est donné Figure 4-10 pour un coefficient de détermination supérieur à 0,99.

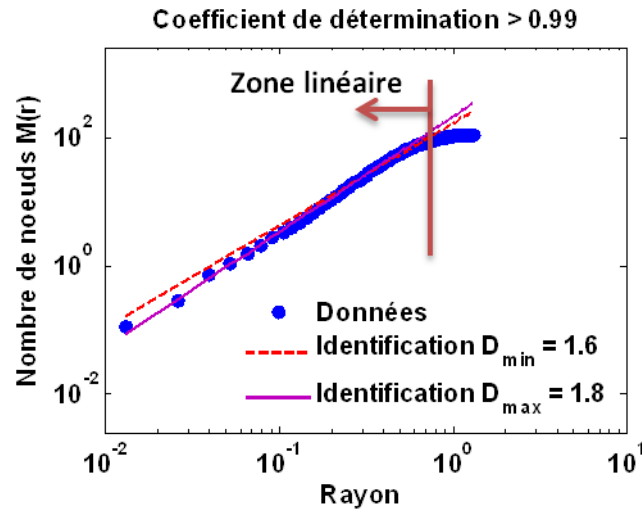


Figure 4-10. Dimension fractale du réseau IEEE 118 nœuds.

Si on augmente la valeur du coefficient de détermination à 0,998, on obtient une valeur égale à 1,76.

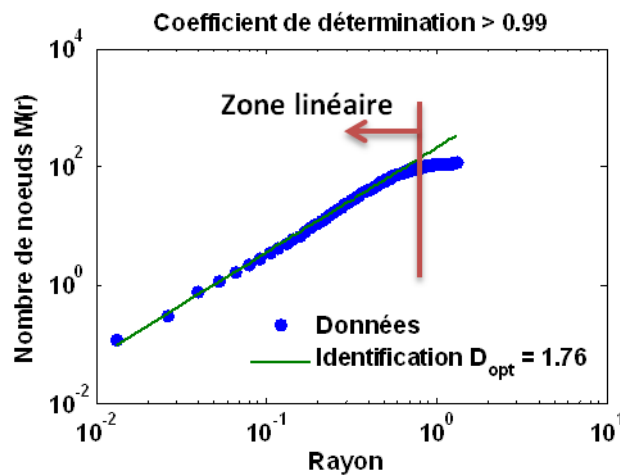


Figure 4-11. Dimension fractale du réseau IEEE 118 nœuds.

### 2.3. Calcul de la dimension spectrale

La dimension spectrale est donnée par la loi de puissance décrivant la distribution modale. Cette distribution est comme précédemment estimée numérique à l'aide de MATLAB. Elle se présente sur la Figure 4-12 comme une courbe présentant dans un diagramme log-log une partie linéaire puis une incurvation vers les hautes fréquences.

Tout comme le réseau IEEE 37 nœuds, à basses fréquences, le réseau IEEE 118 nœuds exhibe une invariance d'échelle.



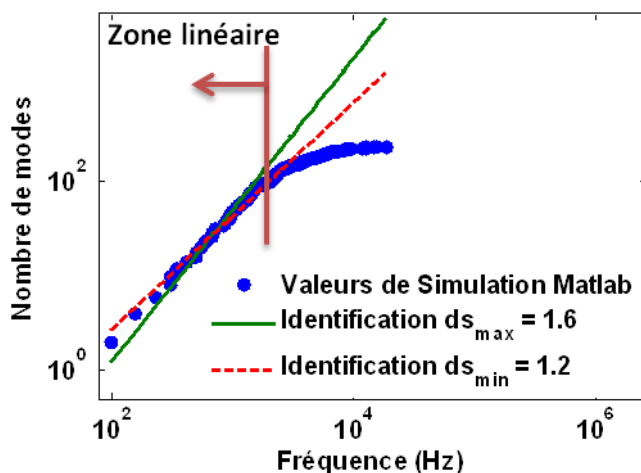


Figure 4-12. Distribution modale du réseau IEEE 118 nœuds.

A partir de la pente dans la partie linéaire, il est possible d'identifier la valeur de la dimension spectrale. Par contre, du fait de la détermination numérique des modes, des valeurs très proches de leur fréquence, l'estimation de cette pente est sujette à une grande imprécision puisque l'on peut considérer une valeur de  $ds$  comprise entre 1,2 et 1,6 pour un coefficient de détermination supérieur à 0,96.

On obtient une valeur plus précise de cette valeur en augmentant le coefficient de détermination tel que  $rd^2 > 0.995$ . La valeur de la dimension spectrale  $ds$  est alors 1,3. On retrouve une valeur proche de  $4/3$  ce qui vérifie une nouvelle fois la conjecture d'Alexander-Orbach. D'autre part, cette valeur est inférieure à la dimension fractale. C'est un résultat classique pour les fractales (Rammal & Toulouse, 1983).

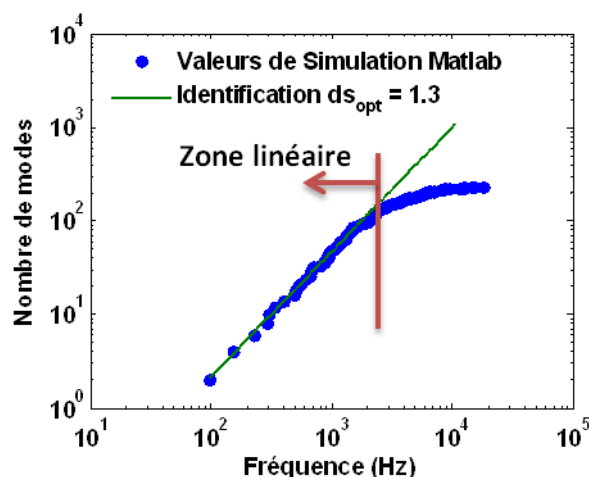


Figure 4-13. Dimension spectrale du réseau IEEE 118 nœuds.

D'après l'équation (18), la dimension spectrale et la dimension fractale sont liés par le paramètre  $\xi$ . Pour le réseau IEEE 118 nœuds, la valeur de ce coefficient est égale à 1,35. Cela conduit à une dimension de marche aléatoire égale à 2,7. On retrouve le fait que la marche au hasard sur un tel réseau planaire fortement ramifié

sera plus difficile que sur un réseau planaire uniforme. La dimension de marche aléatoire qui donne directement le temps de parcours sur le réseau devient donc supérieur à 2 (cf. la section 2.2.3 du Chapitre 2).

On peut finalement noter que pour un amas percolant en dimension 2, la dimension spectrale est aussi proche  $4/3$  et sa dimension de marche aléatoire est environ 2.8 (Nakayama, Yakubo, & Orbach, 1994). Le réseau 118 nœuds présente donc des valeurs très proches et peut être considéré comme appartenant à la même classe d'universalité.

### **3. Conclusion**

Nous avons mis en évidence l'applicabilité du concept d'invariance d'échelle à des réseaux électriques réalistes. Nous avons pour cela étudié deux types de réseau, radial et maillé.

D'une part, les résultats obtenus permettent de conclure à l'invariance d'échelle de ces réseaux électriques malgré leur finitude et leur relative petite taille. Cette invariance d'échelle se caractérise par des paramètres dimensionnels qui peuvent être calculés par des considérations topologiques. Elle tend aussi à prouver qu'un réseau électrique se comporte comme un amas percolant en dimension 2. Ceci ouvre des perspectives intéressantes quant à l'application de la théorie de la percolation à l'étude des réseaux électriques, notamment pour tout ce qui touche aux cascades de défauts comme les blackouts (Xiao & Yeh, 2010). Une telle approche aurait le mérite de pouvoir faire des liens forts entre le comportement du blackout et les caractéristiques topologiques du réseau. On pourrait donc s'attendre à obtenir des indications sur quelle architecture de réseau est la plus résistante aux cascades de défauts. C'est un enjeu de première importance actuellement avec la montée en complexité des réseaux électriques.

D'autre part, des liens très forts ont été établis entre l'invariance d'échelle de la structure et la réponse dynamique du réseau à travers la distribution fréquentielle des modes. Ceci ouvre des perspectives intéressantes concernant la modélisation dynamique des réseaux sur une très large bande passante. C'est que nous allons voir maintenant dans l'ultime partie.



Partie III  
De l'autosimilarité à un modèle  
fréquentiel large bande

---

# Sommaire

<b>CHAPITRE 5</b> .....	<b>66</b>
1. REPONSE FREQUENTIELLE D'UN RESEAU DE SIERPINSKI .....	66
2. MODELISATION ASYMPTOTIQUE AUX HAUTES FREQUENCES .....	68
3. MODELISATION ASYMPTOTIQUE AUX BASSES FREQUENCES .....	68
4. MODELISATION ASYMPTOTIQUE INTERMEDIAIRE .....	69
4.1. Transformation de renormalisation et admittance d'entrée .....	69
4.2. Point fixe de la relation de récurrence portant sur les coefficients de $Y_{bus}$ .....	72
4.3. Point fixe de la relation de récurrence portant sur l'admittance du réseau .....	73
4.4. Modèle asymptotique de l'impédance d'entrée .....	75
5. MODELISATION ASYMPTOTIQUE LARGE BANDE .....	76
6. CONCLUSION .....	78
<b>CHAPITRE 6</b> .....	<b>80</b>
1. APPROCHE « BOITE NOIRE » .....	80
1.1. La méthode d'identification dite de « Vector Fitting » .....	80
1.1.1. Cas de la première itération .....	81
1.1.2. Résolution des itérations suivantes .....	82
1.2. Résultats d'identification pour des réseaux réalistes .....	83
1.2.1. Identification du réseau IEEE 37 nœuds .....	83
1.2.2. Identification du réseau IEEE 118 nœuds .....	84
2. VERS UN MODELE DE CONNAISSANCE .....	87
2.1. Modèle asymptotique .....	87
2.1.1. Application au réseau IEEE 37 nœuds .....	88
2.1.2. Application au réseau IEEE 118 nœuds .....	88
2.2. Modèle des résonances .....	89
2.2.1. Invariance d'échelle et initialisation du « Vector Fitting » .....	90
2.2.2. Application aux réseaux réalistes .....	92
2.3. Le modèle fréquentiel complet .....	94
2.3.1. Modèle du réseau IEEE 37 nœuds .....	94
2.3.2. Modèle du réseau IEEE 118 nœuds .....	95
3. CONCLUSION .....	96

## Chapitre 5

# Comportement fréquentiel asymptotique d'un réseau de Sierpinski

*L'objectif de ce chapitre consiste à exposer les liens entre la structure invariante d'échelle et la modélisation fréquentielle du comportement dynamique d'un réseau électrique. Une nouvelle méthode de modélisation basée sur l'utilisation des paramètres dimensionnels caractérisant l'invariance d'échelle est proposée. Le réseau de Sierpinski est pris comme exemple.*

### 1. Réponse fréquentielle d'un réseau de Sierpinski

La topologie du réseau de Sierpinski est montrée Figure 5-1. On suppose que le réseau est alimenté par une source de courant sinusoïdal aux trois sommets  $A$ ,  $D$  et  $F$ .

Le modèle dynamique du réseau est pris sous la forme de la réponse fréquentielle donnée par la variation de l'impédance d'entrée du réseau  $Z(\omega)$  en fonction de la fréquence de la source. L'impédance est définie par le rapport entre la tension de source  $V_e(\omega)$  et le courant de source  $I_e(\omega)$  :

$$Z(\omega) = \frac{V_e(\omega)}{I_e(\omega)} \quad (48)$$

Le diagramme de Bode de l'impédance est obtenu par simulation numérique. Il est donné dans la Figure 5-2. Il en ressort que cette réponse peut être divisée en trois zones : basses fréquences, hautes fréquences et la zone de fréquences intermédiaires. Les réponses à basses et hautes fréquences témoignent de comportements capacitifs. Par contre, dans la zone intermédiaire, la réponse dynamique montre des résonances qui correspondent aux modes d'oscillation du réseau.

La distribution fréquentielle des modes est tracée Figure 5-3. Sa partie linéaire caractéristique de l'invariance d'échelle du réseau de Sierpinski coïncide avec la zone des fréquences intermédiaires. On s'attend donc à ce que la dimension spectrale soit un paramètre important pour le modèle dynamique du réseau dans cette bande de fréquences.

C'est ce que nous allons mettre en évidence dans les sections suivantes à travers la proposition d'une modélisation asymptotique des réponses fréquentielles dans les trois zones identifiées.

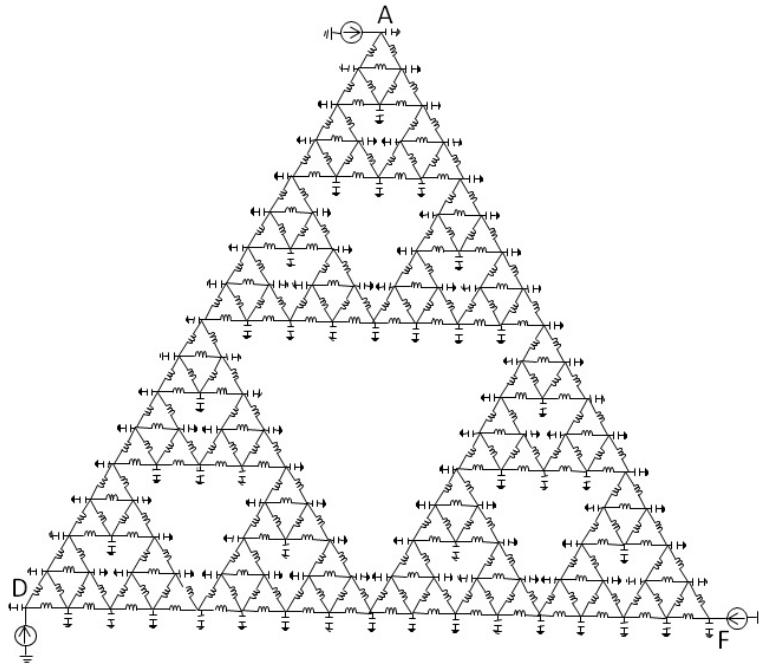


Figure 5-1. Topologie du réseau de Sierpinski d'étude

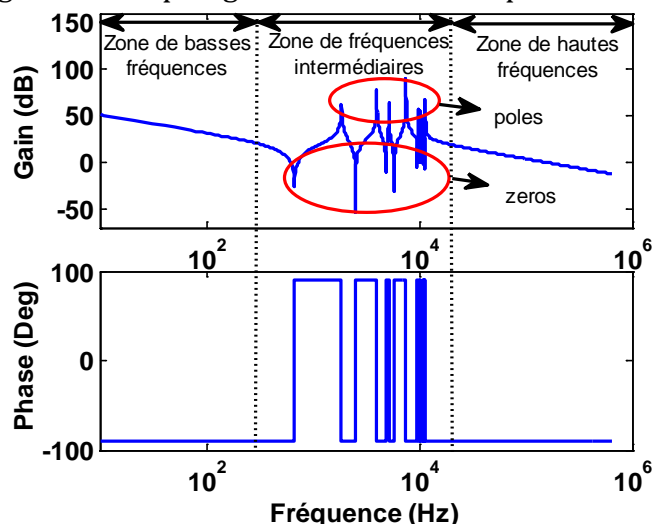


Figure 5-2. Impédance d'entrée du réseau de Sierpinski.

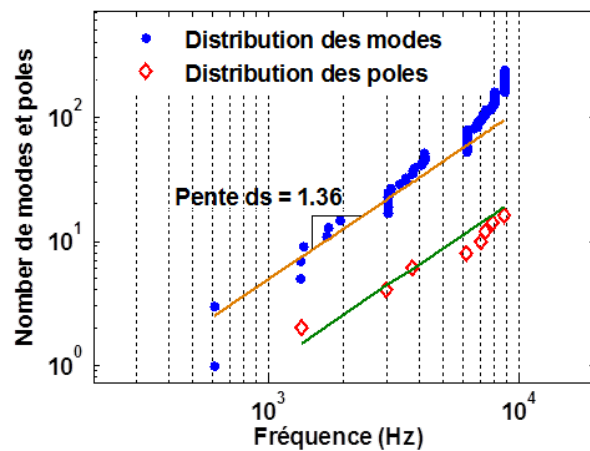


Figure 5-3. Distribution des modes et des pôles du réseau de Sierpinski.

## 2. Modélisation asymptotique aux hautes fréquences

Quand la fréquence de la source tend vers une valeur très grande, les réactances série du réseau tendent vers l'infini. Elles constituent donc des circuits ouverts. Par conséquent, vu d'un sommet, le réseau se comporte comme la première capacité rencontrée, soit la somme des capacités de tête des deux lignes qui y sont raccordées.

Du fait des symétries du réseau, l'impédance d'entrée est la même quel que soit le sommet considéré. Son modèle asymptotique à hautes fréquences est donné par :

$$\hat{Z}_{HF}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{HF}} \quad (49)$$

$C_{HF}$  est la valeur de la capacité de tête. La Figure 5-4 montre la validité de ce modèle dans la zone des hautes fréquences.

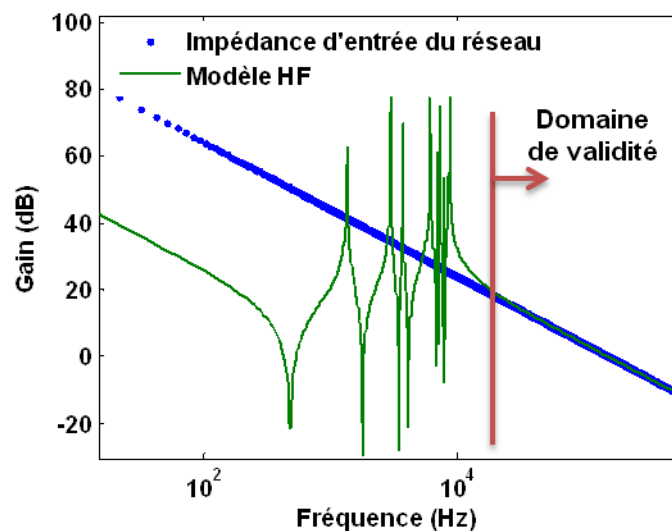


Figure 5-4. Modèle asymptotique aux hautes fréquences.

## 3. Modélisation asymptotique aux basses fréquences

Aux basses fréquences, les inductances deviennent de simples fils. L'impédance du réseau devient donc dominée par les capacités des lignes et à la limite le réseau tend vers un tapis de capacités en parallèle (cf. Figure 5-5).



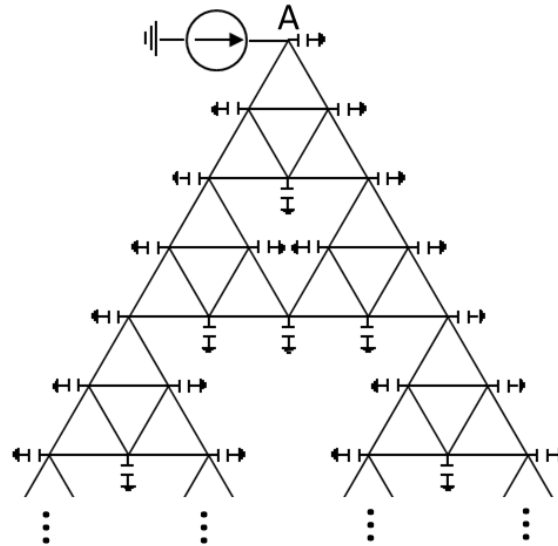


Figure 5-5. Réseau équivalent aux basses fréquences.

Le modèle asymptotique basses fréquences du réseau est :

$$\hat{Z}_{LF}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{BF}} \quad (50)$$

Où  $C_{BF}$  est la somme de toutes les capacités parallèles des lignes qui composent le réseau. Une comparaison avec l'impédance d'entrée est donnée Figure 5-6.

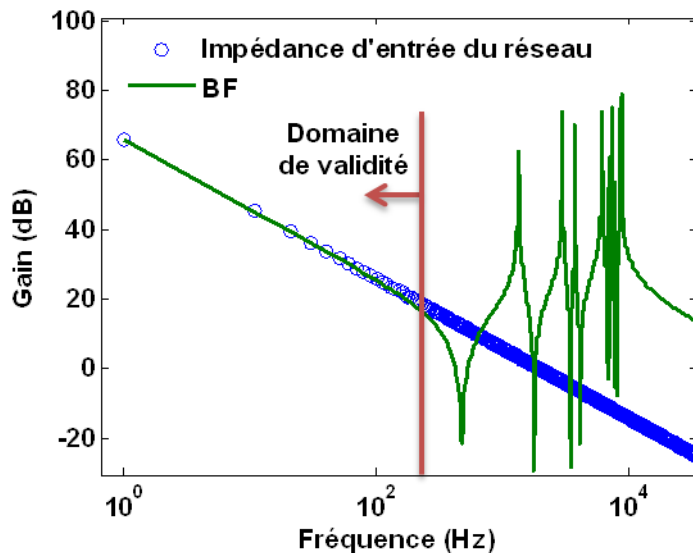


Figure 5-6. Modèle asymptotique aux basses fréquences.

## 4. Modélisation asymptotique intermédiaire

### 4.1. Transformation de renormalisation et admittance d'entrée

La zone des fréquences intermédiaires joue un rôle de transition entre les hautes et les basses fréquences. Aux hautes fréquences, correspondant à l'échelle

d'observation la moins détaillée, le réseau se présente comme une seule capacité ; tandis qu'aux basses fréquences, correspondant à l'échelle d'observation la plus fine, le réseau se présente comme un tapis uniforme de capacités. Les réponses dynamiques dans ces deux zones ne sont donc pas influencées par la topologie du réseau.

Ce n'est plus le cas dans la zone de transition, fortement résonante. La topologie autosimilaire y joue un rôle important se traduisant par des interactions multiples entre les inductances et les capacités qui sont la source des nombreuses résonances. Nous allons maintenant étudier ce lien d'un point de vue analytique par une transformation de renormalisation.

Nous rappelons que la renormalisation se passe en deux étapes. D'une part, le réseau est décimé. Cela revient à un changement d'échelle, en passant d'un niveau d'observation très détaillé à un niveau plus grossier. Du fait de l'invariance d'échelle, le réseau doit avoir le même comportement avant et après décimation. Pour cela, il est toutefois nécessaire de renormaliser la valeur des paramètres du réseau décimé. C'est la deuxième étape de la transformation de renormalisation.

Le processus de décimation est rappelé ci-dessous.

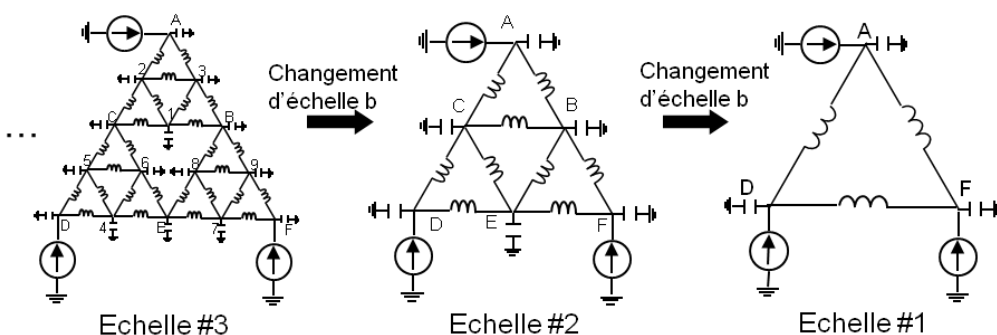


Figure 5-7. Décimation du réseau de Sierpinski

Le nœud 0 est pris comme masse. Les équations nodales du réseau issues des équations de Kirchhoff sont données par :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{10} + y_{12} + \dots + y_{1n} & -y_{12} & \dots & -y_{1n} \\ -y_{21} & y_{20} + y_{21} + \dots + y_{2n} & \dots & -y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \dots & y_{n0} + y_{n1} + y_{n2} + \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (51)$$

Qui s'écrit aussi :

$$I = Y_{bus} V \quad (52)$$

Les éléments de la matrice  $Y_{bus}$  sont définis par :

$$Y_{ii} = y_{i0} + \sum_{j \neq i, j=1}^n y_{ij} \quad (53)$$

$$Y_{ij} = -y_{ij} \quad (j \neq i)$$

En de nombreux nœuds du réseau, le courant nodal est nul (pas d'éléments raccordés autres que les lignes). Le vecteur courant est donc creux. Il est partitionné entre un sous vecteur  $I_A$  correspondant aux courants nodaux non nuls et un vecteur nul  $I_x$  pour les courants nodaux qui sont nuls. Cela nous permet de reformuler l'équation (51) :

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ L^T & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_x \end{bmatrix} \quad (54)$$

Le vecteur courant nul est ensuite éliminé par la technique de Kron (Kron, 1939). D'où :

$$\bar{I}_A = (K - LM^{-1}L^T)V_A \quad (55)$$

La matrice réduite  $Y_{bus}^{reduced}$  s'écrit :

$$Y_{bus}^{reduced} = K - LM^{-1}L^T \quad (56)$$

Pour le réseau de Sierpinski, la matrice réduite  $Y_{bus}^{reduced}$  a la forme générale suivante quelle que soit l'échelle d'observation  $i$  :

$$\begin{vmatrix} n_i(j\omega) & -m_i(j\omega) & -m_i(j\omega) \\ -m_i(j\omega) & n_i(j\omega) & -m_i(j\omega) \\ -m_i(j\omega) & -m_i(j\omega) & n_i(j\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{V}_{A,i}(\omega) \\ \bar{V}_{D,i}(\omega) \\ \bar{V}_{F,i}(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{I}_{A,i}(\omega) \\ \bar{I}_{D,i}(\omega) \\ \bar{I}_{F,i}(\omega) \end{vmatrix} \quad (57)$$

L'impédance d'entrée du réseau prise au nœud  $A$  est alors donnée par :

$$\bar{Y}_{A,i}(j\omega) = \frac{\bar{I}_{A,i}(\omega)}{\bar{V}_{A,i}(\omega)} = (n_i(j\omega) - 2m_i(j\omega)) \quad (58)$$

On pourrait tout aussi bien prendre un des autres nœuds sommets du réseau, cela ne changerait rien du fait des symétries.

$n_i(j\omega)$  et  $m_i(j\omega)$  sont des fonctions de l'admittance série  $y_h$  et parallèle  $y_v$  des lignes. Leurs expressions pour les échelles #1, #2 et #3 sont données dans le Tableau 5-1.

Du fait de la construction itérative du réseau de Sierpinski, il existe des relations de récurrence portant sur  $n_i(j\omega)$  et  $m_i(j\omega)$ . Ces relations vont-elles-mêmes se traduire par une récurrence sur l'expression de l'admittance d'entrée. Trouver la

solution de la relation de récurrence (son point fixe) est l'objectif de la renormalisation. En effet, si cette solution existe, cela signifie que le réseau se comporte de manière invariante quelle que soit l'échelle d'observation.

Echelle #1	$n_1(j\omega) = (2y_h(j\omega) + y_v(j\omega)) \quad m_1(j\omega) = y_h(j\omega)$
Echelle #2	$n_2(j\omega) = \frac{(3y_h(j\omega) + y_v(j\omega))(2y_h(j\omega) + y_v(j\omega))(y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))}{(5y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))(y_h(j\omega) + y_v(j\omega))}$ $m_2(j\omega) = \frac{y_h^2(j\omega)(3y_h(j\omega) + y_v(j\omega))}{(5y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))(y_h(j\omega) + y_v(j\omega))}$
Echelle #3	$n_3(j\omega) = \frac{(y_h^2(j\omega) + 10y_h(j\omega)y_v(j\omega) + 4y_v^2(j\omega))(3y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))(2y_h(j\omega) + y_v(j\omega))(3y_h(j\omega) + y_v(j\omega))(y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))}{(5y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))(y_h^2(j\omega) + 5y_h(j\omega)y_v(j\omega) + 2y_v^2(j\omega))(5y_h^2(j\omega) + 10y_h(j\omega)y_v(j\omega) + 4y_v^2(j\omega))}$ $m_3(j\omega) = \frac{y_h^4(j\omega)(3y_h(j\omega) + y_v(j\omega))(3y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))}{(5y_h(j\omega) + 2y_v(j\omega))(y_h^2(j\omega) + 5y_h(j\omega)y_v(j\omega) + 2y_v^2(j\omega))(5y_h^2(j\omega) + 10y_h(j\omega)y_v(j\omega) + 4y_v^2(j\omega))}$

Tableau 5-1. Expressions analytiques des termes de la matrice  $Y_{bus}$  avec  $(y_h(j\omega) = 1/j\omega L ; y_v(j\omega) = j\omega C)$

## 4.2. Point fixe de la relation de récurrence portant sur les coefficients de $Y_{bus}$

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la récurrence des paramètres  $n_i$  et  $m_i$ . Partant des relations du Tableau 5-1, on peut montrer qu'il est possible d'écrire une relation de récurrence générale entre les échelles  $i$  et  $(i+1)$  :

$$n_{i+1}(j\omega) = n_i(j\omega) \frac{(2n_i(j\omega) - 3m_i(j\omega))(n_i(j\omega) + m_i(j\omega))}{(2n_i(j\omega) + m_i(j\omega))(n_i(j\omega) - m_i(j\omega))} \quad (59)$$

$$m_{i+1}(j\omega) = m_i^2(j\omega) \frac{(n_i(j\omega) + m_i(j\omega))}{(2n_i(j\omega) + m_i(j\omega))(n_i(j\omega) - m_i(j\omega))}$$

En posant :

$$Coef_i(j\omega) = \frac{n_i(j\omega)}{m_i(j\omega)} - 2 \quad (60)$$

La relation de récurrence s'écrit :

$$Coef_{i+1}(j\omega) = Coef_i(j\omega)(2Coef_i(j\omega) + 5) \quad (61)$$

Si à l'échelle #1 le coefficient  $Coef_1$  prend la valeur :

$$Coef_1(j\omega) = -\omega^2 LC \quad (62)$$

Alors, la valeur des coefficients  $Coef_i$  aux échelles suivantes peuvent s'écrire :

$$Coef_i(j\omega) \propto -5^{i-1} LC \omega^2 \quad (63)$$

A la condition que  $\omega$  vérifie la condition à l'itération  $i$  suivante:

$$\omega \ll \sqrt{\frac{5^{3-i}}{2LC}} \quad (64)$$

### 4.3. Point fixe de la relation de récurrence portant sur l'admittance du réseau

On cherche maintenant la relation de récurrence qui porte sur l'admittance du réseau ainsi que son point fixe.

La solution à la relation de récurrence sur l'admittance doit vérifier l'égalité suivante quand on passe de l'échelle  $(i+1)$  à l'échelle  $i$  :

$$\bar{Y}_{k,i+1}(j\omega_{i+1}) \propto \bar{Y}_{k,i}(j\omega_i) \quad k \cup \{A, D, F\} \quad (65)$$

L'équation (65) est vraie si et seulement si :

$$\begin{cases} \left( \frac{n_{i+1}(j\omega_{i+1})}{m_{i+1}(j\omega_{i+1})} - 2 \right) \bar{V}_{k,i+1} = \left( \frac{n_i(j\omega_i)}{m_i(j\omega_i)} - 2 \right) \bar{V}_{k,i} & (a) \\ \frac{\bar{I}_{k,i+1}}{m_{i+1}(j\omega_{i+1})} = \frac{\bar{I}_{k,i}}{m_i(j\omega_i)} \quad k \cup \{A, D, F\} & (b) \end{cases} \quad (66)$$

On note que les deux équations (66) dépendent de trois grandeurs : la fréquence, le courant et la tension. Pour réduire les degrés de liberté, on fixe la tension à une valeur constante quelle que soit l'échelle. Ceci permet de déduire la première condition d'existence du point fixe :

$$\frac{n_{i+1}(j\omega_{i+1})}{m_{i+1}(j\omega_{i+1})} = \frac{n_i(j\omega_i)}{m_i(j\omega_i)} \quad (67)$$

En combinant les équations (61), (63) et (67), on obtient :

$$\omega_i^2 \propto \omega_{i+1}^2 (-2.5^{i-1} \omega_{i+1}^2 LC + 5) \quad (68)$$

Si  $\omega$  vérifie la condition (64) à l'itération  $(i+1)$ , c'est-à-dire :

$$\omega_{i+1} \ll \sqrt{\frac{5^{2-i}}{2LC}} \quad (69)$$

Une approximation de l'équation (68) est :

$$\frac{\omega_i^2}{\omega_{i+1}^2} \propto 5 \quad (70)$$

En conséquence, les réseaux pris aux échelles  $i+1$  et  $i$  présentent une invariance d'échelle si la fréquence des sources est dans un rapport  $\sqrt{5}$ . Ce décalage fréquentiel avait déjà été noté lors de la renormalisation du réseau de Sierpinski pour le calcul du paramètre  $\xi$  dans la section 2.3 du Chapitre 3.

On considère maintenant la deuxième condition d'existence du point fixe. La partie en courant de l'équation (66) peut se réécrire pour le nœud  $A$  :

$$\frac{\bar{I}_{A,i}}{\bar{I}_{A,i+1}} = \frac{m_i(j\omega_i)}{m_{i+1}(j\omega_{i+1})} \quad (71)$$

D'après les équations (59) et (60) :

$$\frac{m_i(j\omega)}{m_{i+1}(j\omega)} = \frac{(2Coef_i(j\omega) + 5)(Coef_i(j\omega) + 1)}{(Coef_i(j\omega) + 3)} \quad (72)$$

Quand  $\omega$  satisfait à la condition (64), on obtient :

$$\frac{m_i(j\omega)}{m_{i+1}(j\omega)} = \frac{(-2.5^{i-1}\omega^2 LC + 5)(-5^{i-1}\omega^2 LC + 1)}{(-5^{i-1}\omega^2 LC + 3)} \propto \frac{5}{3} \quad (73)$$

D'autre part, à l'échelle 1,  $m_1(j\omega)$  prend la valeur :

$$m_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} \quad (74)$$

On peut donc écrire :

$$m_i(\omega) \approx \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} m_1(\omega) = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \frac{1}{j\omega L} \quad (75)$$

D'où :

$$\frac{\bar{I}_{A,i}}{\bar{I}_{A,i+1}} \propto \frac{5}{3} \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} \propto \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (76)$$

En conclusion, les réseaux pris aux échelles  $i$  et  $(i+1)$  sont identiques si les conditions (70) et (76) sont vérifiées (sans oublier l'hypothèse de tensions identiques aux nœuds sources). Ces conditions peuvent s'écrire en fonction du facteur d'échelle  $b$ :

$$\begin{cases} \omega_{i+1} = b^{-\xi} \omega_i \\ \bar{I}_{A,i+1}(\omega_{i+1}) = b^{D-\xi} \bar{I}_{A,i}(\omega_{i+1} b^\xi) \end{cases} \quad (77)$$

$$\text{avec } \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 5}{\ln 2} \quad \text{et} \quad D = \frac{\ln 3}{\ln b}$$

On retrouve bien sûr les paramètres dimensionnels du réseau de Sierpinski qui caractérisent son invariance d'échelle (dimension fractale et paramètre lié à la dimension de marche aléatoire). Ceci est bien sûr vrai pour tous les nœuds sources du réseau :

$$\begin{cases} \bar{I}_{k,i+1}(\omega_{i+1}) = b^{D-\xi} \bar{I}_{k,i}(\omega_{i+1} b^\xi) \\ \bar{V}_{k,i+1}(\omega_{i+1}) = \bar{V}_{k,i}(\omega_{i+1} b^\xi) \quad k \cup \{A, D, F\} \end{cases} \quad (78)$$

Et la relation d'échelle portant sur l'admittance d'entrée peut s'écrire :

$$\bar{Y}_{k,i+1}(j\omega_{i+1}) = \frac{\bar{I}_{k,i+1}(\omega_{i+1})}{\bar{V}_{k,i+1}(\omega_{i+1})} = b^{D-\xi} \frac{\bar{I}_{k,i}(\omega_{i+1} b^\xi)}{\bar{V}_{k,i}(\omega_{i+1} b^\xi)} = b^{D-\xi} \bar{Y}_{k,i}(j\omega_{i+1} b^\xi) \quad (79)$$

Le point fixe de cette équation de récurrence est une loi de puissance donnée par :

$$\bar{Y}_k(j\omega) \propto (\omega)^{(1-d_s)} \quad \text{avec } d_s = \frac{D}{\xi} \quad (80)$$

$d_s$  est la dimension spectrale.

#### 4.4. Modèle asymptotique de l'impédance d'entrée

L'impédance d'entrée s'exprime par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_k(j\omega) &= \frac{1}{\bar{Y}_k(j\omega)} \\ \bar{Z}_k(j\omega) &\propto (\omega)^{-(1-d_s)} \quad k \cup \{A, D, F\} \end{aligned} \quad (81)$$

Cela signifie qu'il est possible d'approximer l'impédance dans la bande des fréquences intermédiaires par une loi de puissance dont l'exposant est directement lié à la dimension spectrale  $d_s$ . Ce constat n'est pas le fruit du hasard mais traduit l'influence de la topologie autosimilaire sur le comportement dynamique du réseau dans cet intervalle fréquentiel.

La représentation de Bode du gain de l'impédance s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left| \bar{Z}_k(j\omega) \right|_{dB} &= 20 \times \log \left| \bar{Z}_k(j\omega) \right| \\ &\propto -20 \times (1 - ds) \times \log(\omega) \end{aligned} \quad (82)$$

C'est donc une droite de pente  $-20 \times (1 - ds)$ . La Figure 5-8 superpose cette droite à la réponse fréquentielle mesurée. Même si toute conclusion serait hâtive, on retrouve tout de même une évolution de la réponse fréquentielle du réseau autour de cette droite.

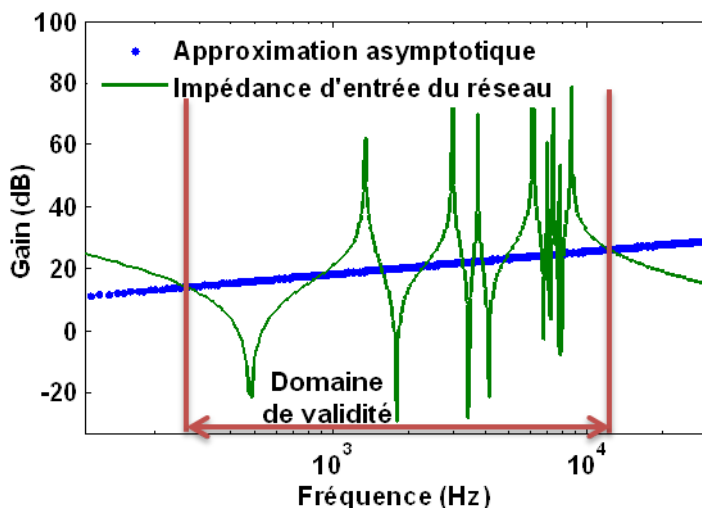


Figure 5-8. Modèle asymptotique aux fréquences intermédiaires (courbe bleu).

## 5. Modélisation asymptotique large bande

Il est maintenant possible de modéliser le comportement asymptotique du réseau sur toute la bande de fréquences par une combinaison des comportements asymptotiques des 3 zones identifiées ci-dessus. Le modèle s'écrit :

$$\hat{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{HF} + \frac{1}{Z_{IF}(j\omega) + \frac{1}{j\omega(C_{BF} - C_{HF})}}} \quad (83)$$

$\hat{Z}(j\omega)$  : Modèle asymptotique de l'impédance d'entrée du réseau.

$C_{HF}$  : valeur de la capacité équivalente du réseau aux hautes fréquences.

$C_{BF}$  : valeur de la capacité équivalente du réseau aux basses fréquences.

$Z_{IF}(j\omega)$  : impédance d'entrée équivalente du réseau aux fréquences intermédiaires.

Ce modèle est comparé au réseau de Sierpinski pris à différentes échelles sur la Figure 5-9. Le modèle proposé semble être une bonne approximation du comportement asymptotique de la réponse fréquentielle du réseau. Il resterait maintenant à ajouter les résonances pour obtenir un modèle plus fidèle.



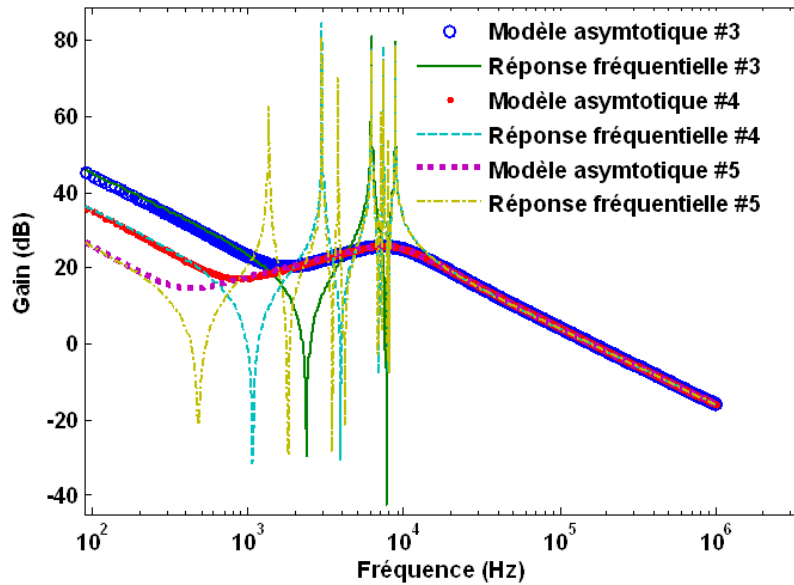


Figure 5-9. Modèle asymptotique du réseau de Sierpinski pour 3 échelles différentes.

Si on regarde plus attentivement les réponses fréquentielles à différentes échelles, on constate des tendances similaires qui sont décalées en fréquence. C'est la traduction fréquentielle de l'invariance d'échelle.

D'autre part, plus le réseau a un détail important, plus sa bande de fréquences intermédiaires s'étend vers les basses fréquences. Enfin, à toutes les échelles, la borne de fréquence supérieure semble la même. Une interprétation schématique de tout cela est fournie Figure 6-10 par la comparaison des évolutions de la distribution modale (section 2.4 du Chapitre 3) et de l'admittance à différentes échelles :

- D'après le calcul de renormalisation, l'admittance se comporte comme une loi de puissance si la fréquence est inférieure à une valeur donnée par l'équation (69). Cette borne en fréquence est la même pour la distribution modale.
- Quand on change d'échelle d'observation, la fréquence de coupure change dans un rapport qui est lié au glissement fréquentiel  $b^{-\xi}$  constaté lors de la renormalisation. Ce glissement avait déjà été montré pour la distribution modale. On le retrouve ici sur l'admittance.
- Enfin, du fait de la fractalité, le nombre de modes à une fréquence donnée augmente d'un facteur  $b^D$ . C'est ce qui donne la plage de variation linéaire totale constatée sur l'admittance.

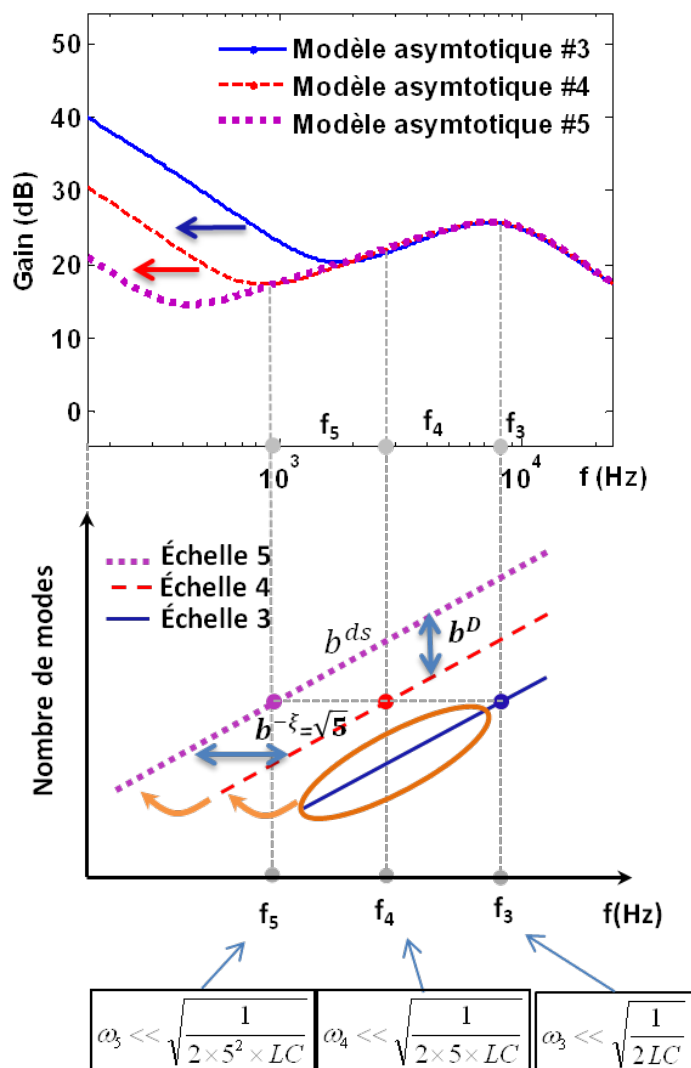


Figure 5-10. Relation entre réponses asymptotiques et distributions des modes.

## 6. Conclusion

Par une méthode de renormalisation appliquée à l'admittance, nous avons mis en évidence une relation forte entre la topologie invariante du réseau de Sierpinski et la représentation asymptotique de son comportement fréquentiel.

Ainsi, d'un point de vue asymptotique, le réseau comporte trois zones de fréquences bien distinctes. Aux extrêmes, le comportement est capacitif, et la dynamique du transfert d'énergie n'est en rien affectée par la topologie du réseau. Par contre, dans la zone intermédiaire, l'impédance d'entrée exhibe une caractéristique d'invariance d'échelle sous la forme d'un comportement en loi de puissance dont l'exposant est lié à la dimension spectrale du réseau.

Le même résultat avait été obtenu dans l'étude (Amrane, Retiere, & Riu, 2010) pour le réseau radial de Cantor. Par contre, dans ce cas, la dimension fractale était identique à la dimension spectrale.

Dans le chapitre qui suit, nous allons maintenant nous appuyer sur cette première représentation pour obtenir un modèle dynamique du réseau sur une large bande de fréquences.

## Chapitre 6

### Modèle dynamique d'un réseau réaliste

*Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord une approche « boîte noire » classique afin d'identifier le comportement dynamique d'un réseau réaliste sous la forme d'un modèle fréquentiel de son impédance d'entrée. On modifiera ensuite cette approche pour y inclure une connaissance plus grande issue de l'invariance d'échelle et du modèle asymptotique. L'approche proposée sera appliquée aux réseaux tests IEEE 37 nœuds et 118 nœuds.*

#### 1. Approche « boîte noire »

L'impédance d'entrée d'un réseau peut être identifiée par un modèle « boîte noire » permettant de reproduire son comportement fréquentiel sur une gamme de fréquences prédéterminée. En général, le modèle « boîte noire » consiste en une fraction de deux polynômes :

$$f(s) \approx \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ns^N}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_Ms^M} \quad (84)$$

$f(s)$  est la réponse mesurée ou simulée du réseau qui sert de référence pour l'identification de la fonction rationnelle du membre de droite.  $s$  est l'opérateur du Laplace.

L'équation (84) est non-linéaire de paramètres inconnus  $a_i$  et  $b_i$ . (Gustavsen & Semlyen, 1999) a proposé la méthode « VectorFitting » (VF) qui permet de transformer ce problème non-linéaire en un autre, linéaire.

##### 1.1. La méthode d'identification dite de « vector fitting »

Le «vector fitting» est une technique numérique pour l'identification de la réponse dynamique d'un système. Cette méthode permet d'identifier une réponse dynamique  $f(s)$  mesurée ou calculée d'un système ayant une ou plusieurs entrées-sorties. Le modèle mathématique  $N(s)/D(s)$  utilisé pour l'identification est une fonction rationnelle proposée dans (Gustavsen & Semlyen, 1999) :

$$f(s) \approx \frac{N(s)}{D(s)} = \left( \sum_{n=1}^N \frac{t_n}{s - p_n} \right) + d \quad (85)$$

Les résidus  $t_n$  et les pôles  $p_n$  de la décomposition en éléments simples sont complexes tandis que  $d$  est réel.

L'objectif de l'identification est de minimiser l'erreur entre  $f(s)$  et  $N(s)/D(s)$ . Le problème précédent est transformé par l'utilisation d'une fonction de pondération  $\sigma(s)$  ayant la forme :

$$\sigma(s) = \left( \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{t}_n}{s - \bar{p}_n} \right) + 1 \quad (86)$$

On définit alors la fonction objectif de cette méthode sous la forme :

$$\frac{N(s)}{D(s)} - f(s)\sigma(s) \approx 0 \quad (87)$$

Cette méthode converge quand la fonction de pondération  $\sigma(s)$  tend vers 1 (les résidus  $\tilde{t}_n$  sont nuls). Les pôles  $\{p_n\}$  du modèle  $N(s)/D(s)$  doivent alors être égaux aux pôles  $\{\bar{p}_n\}$  de la fonction de pondération. L'avantage de cette méthode est de transformer le problème non-linéaire en un problème linéaire. La méthode est itérative et chaque itération comprend deux étapes:

Étape 1 : Choix des pôles initiaux  $\{\bar{p}_n\}$ .

Étape 2 : Annulation de la fonction objectif.

### 1.1.1. Cas de la première itération

Pour la première itération, les deux étapes sont les suivantes :

Étape 1 : Afin d'assurer un résultat relativement stable et précis, (Gustavsen & Semlyen, 1999) préconise un vecteur de pôles initiaux constitué essentiellement de pôles complexes conjugués:

$$\bar{p}_n = -\alpha \pm j\beta \quad (88)$$

La condition  $\alpha = \beta/100$  doit être vérifiée et les fréquences des pôles initiaux (liées à  $\beta$ ) sont distribuées linéairement sur la bande fréquentielle  $[f_{min}, f_{max}]$  utilisée pour l'identification. Le nombre total de pôles initiaux est choisi égal au double du nombre de pics de résonance qui sont constatés sur la bande fréquentielle.

Étape 2 : En utilisant essentiellement le vecteur de pôles initiaux  $\{\bar{p}_n\}$ , l'équation(87) peut-être réécrite sous la forme :

$$\left( \sum_{n=1}^N \frac{t_n}{s - \bar{p}_n} \right) + d \approx f(s) \left( \left( \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{t}_n}{s - \bar{p}_n} \right) + 1 \right) \quad (89)$$

Soit :

$$\left[ \left( \sum_{n=1}^N \frac{t_n}{s - \bar{p}_n} \right) + d \right] - \left[ f(s) \left( \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{t}_n}{s - \bar{p}_n} \right) \right] \approx f(s) \quad (90)$$



Étape 2 : La vérification de la fonction objectif est faite comme pour la première itération. Si la condition de convergence est vérifiée, le modèle de  $f(s)$  est déterminé par les paramètres  $(\bar{p}_n, t_n, d)$ .

## 1.2. Résultats d'identification pour des réseaux réalistes

Nous allons utiliser la méthode « vector fitting » pour identifier le modèle de l'impédance d'entrée de réseaux réalistes. Le vecteur  $f(s)$  est donné par une simulation dynamique MATLAB utilisant la fonction « *power\_statespace* ». Le vecteur de pôles initiaux est généré comme préconisé précédemment.

Le résultat obtenu après  $n$  itérations par la méthode « vector fitting » est noté  $ffit(s)$  et l'erreur  $RMS$  (root-mean-square error) entre le modèle identifié et la réponse de référence est définie comme :

$$errRMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [f(s_i) - ffit(s_i)]^2}{N}} \quad (95)$$

$N$  est le nombre d'échantillons utilisés pour l'identification. Dans notre cas d'étude, cette valeur est constante et égale à 3000.

### 1.2.1. Identification du réseau IEEE 37 nœuds

La bande fréquentielle simulée va de  $2 \times 10^2 \text{ Hz}$  à  $3 \times 10^5 \text{ Hz}$ .

Les fréquences des pôles initiaux sont linéairement réparties sur la gamme fréquentielle. Leur nombre est choisi égal à 26. La distribution des pôles initiaux (points bleus) est montrée Figure 6-1.

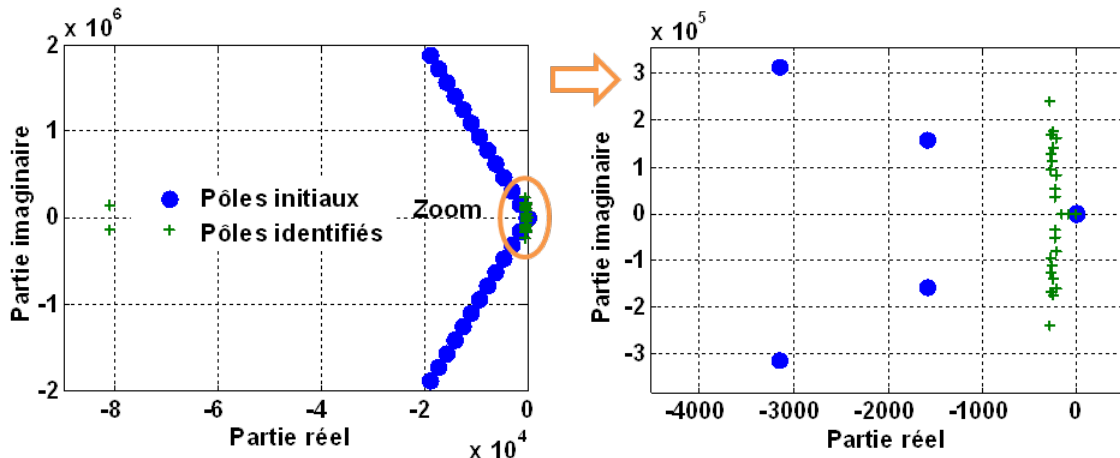


Figure 6-1. Distributions des pôles initiaux et identifiés du réseau IEEE 37 nœuds.

Avec cette distribution, le programme identifie le modèle après 5 itérations (voir le Tableau 6-1). Les pôles identifiés sont les points verts de la Figure 6-1.

Itération	Erreur RMS (dB)
1	211,0038
2	69,2325
3	16,3741
4	0,0621
5	0,0141

Tableau 6-1. Convergence de l'identification pour le réseau IEEE 37 nœuds.

On constate que le choix initial des pôles pour l'identification était approximatif par rapport aux pôles finalement identifiés. On a pu toutefois converger.

Le résultat de l'identification en module et phase est donné sur la Figure 6-2. Il n'y a pas d'écart manifeste entre le modèle identifié et la simulation de référence. L'erreur absolue (écart entre la simulation de référence et le modèle identifié) est inférieure à 1dB pour le gain (courbe verte). Sa faible valeur confirme la qualité de l'identification.

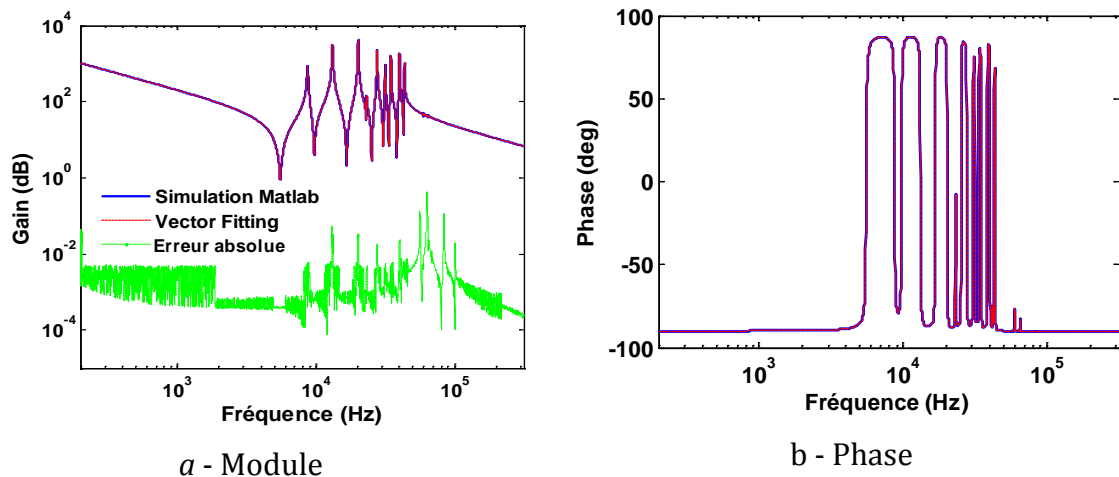


Figure 6-2. Réponse fréquentielle identifiée du réseau IEEE 37 nœuds.

### 1.2.2. Identification du réseau IEEE 118 nœuds

La même approche est utilisée pour le réseau IEEE 118 nœuds. La gamme fréquentielle va de  $10^1$  Hz à  $6 \times 10^4$  Hz. Le nombre de pôles initiaux est égal au double du nombre de pics de résonance, soit 50. Après 14 itérations, l'erreur RMS est de 0,02 dB.



Itération	Erreur RMS (dB)
1	1,2818
4	1,2349
7	1,1026
9	0,8657
11	0,2385
13	0,1555
14	0,0194

Tableau 6-2. Convergence de l'identification avec 50 pôles initiaux pour le réseau IEEE 118 nœuds

La distribution des pôles initiaux et des pôles identifiés est montrée Figure 6-3. De même que pour le réseau 37 nœuds, la distribution des pôles initiaux est très approximative vis-à-vis des pôles finalement identifiés. On reviendra sur ce point dans la suite du chapitre mais il est clair que la distribution linéaire des fréquences des pôles initiaux n'est pas adaptée. Cette distribution doit plutôt tendre à suivre une loi de puissance du fait de l'invariance d'échelle. Malgré tout, l'identification converge et donne des résultats satisfaisants.

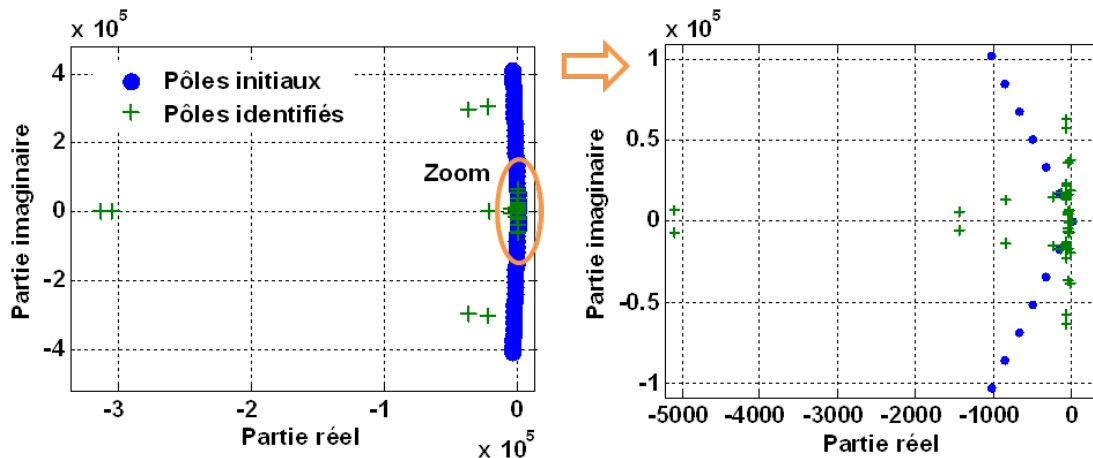


Figure 6-3. Distribution des 50 pôles initiaux et des pôles identifiés du réseau IEEE 118 nœuds.

D'après la Figure 6-4, le modèle fréquentiel identifié manque quelques résonances. Cela s'explique par le fait que le nombre de pôles initiaux n'a pas été correctement choisi et est inférieur au nombre de pôles réels du réseau. Si on augmente ce nombre jusqu'à 70 points, le modèle identifié représente mieux toutes les résonances comme montré Figure 6-5. Par contre, la convergence est plus lente et se fait maintenant en 16 itérations.

Dans les deux cas, l'erreur absolue sur le gain est inférieure à 1dB.

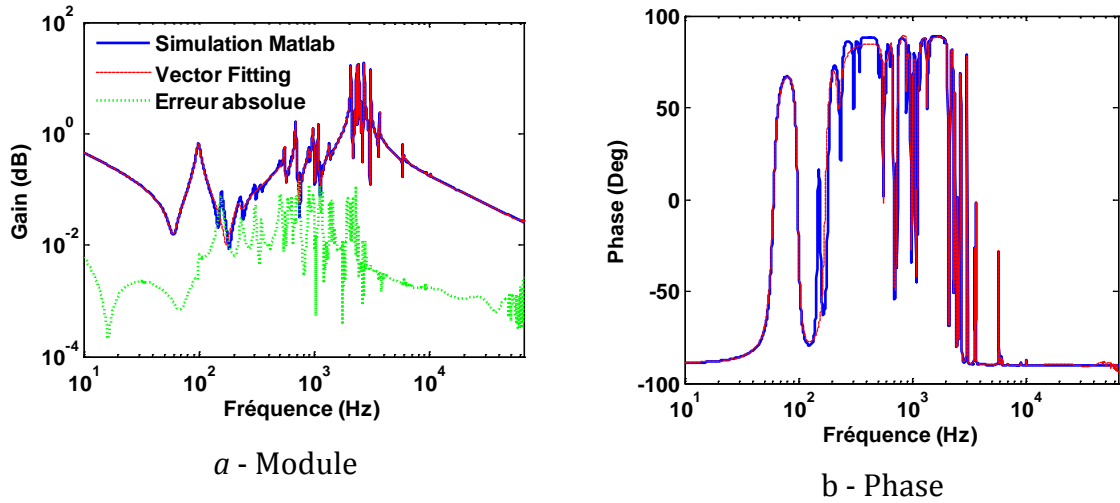


Figure 6-4. Réponse fréquentielle identifiée avec 50 pôles initiaux du réseau IEEE 118 nœuds.

Itération	Erreur RMS (dB)
1	1,2120
5	1,0727
7	0,9421
11	0,7062
13	0,5043
15	0,0233
16	0,0081

Tableau 6-3. Convergence de l'identification avec 70 pôles initiaux pour le réseau IEEE 118 nœuds.

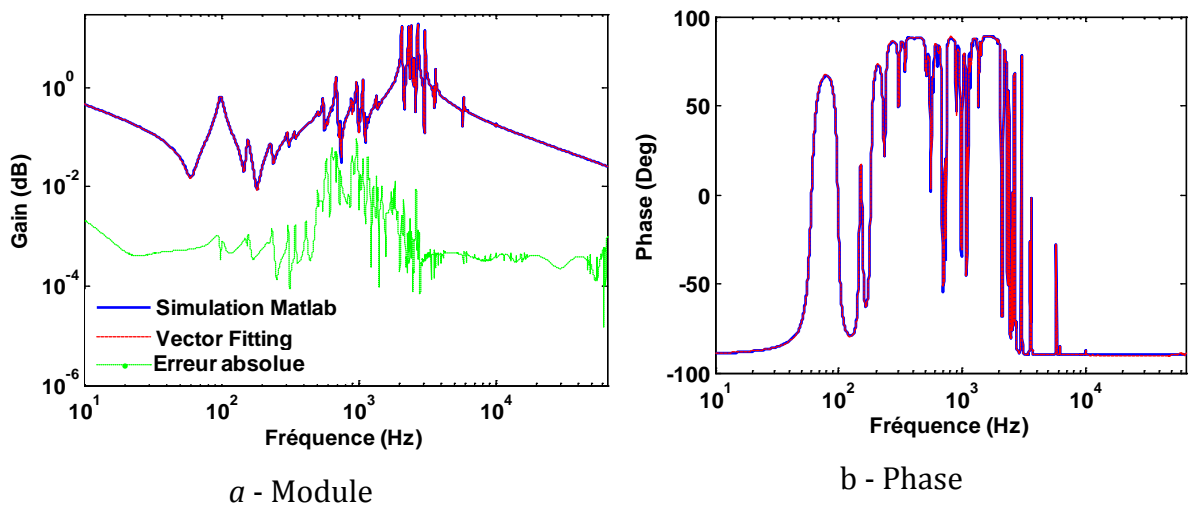


Figure 6-5. Réponse fréquentielle identifiée avec 70 pôles initiaux du réseau IEEE 118 nœuds.

## 2. Vers un modèle de connaissance

L'idée est maintenant d'inclure plus de connaissance dans le modèle de façon à faciliter la convergence de la méthode « vector fitting » et d'améliorer la qualité des résultats. Pour cela, le modèle va combiner deux parties. La première partie sera le modèle asymptotique du comportement de l'impédance d'entrée. Ce modèle sera estimé à partir des paramètres caractéristiques de l'invariance d'échelle de la structure du réseau. La deuxième partie modélisera les variations de la réponse fréquentielle autour du modèle asymptotique. Cette deuxième partie représentera donc les résonances de la réponse fréquentielle du réseau. Elle sera identifiée par « vector fitting ».

### 2.1. Modèle asymptotique

Le modèle asymptotique reprend celui du réseau de Sierpinski. Il combine trois éléments qui sont représentatifs des comportements en hautes fréquences, en basses fréquences et aux fréquences intermédiaires. Les parties hautes et basses fréquences sont considérées comme capacitatives du fait de la représentation en  $\pi$  adoptée pour les lignes. A basses fréquences, les réactances séries sont en effet négligeables et le réseau se comporte comme un tapis de capacités connectées à la masse. A l'autre extrême, les réactances série s'opposent au passage du courant et le comportement du réseau est déterminé par la capacité du nœud où est mesurée la réponse fréquentielle. Tout comme pour le réseau de Sierpinski, dans la région intermédiaire, le comportement est supposé fortement influencé par l'invariance d'échelle de la structure du réseau. On adopte donc un modèle non entier sous la forme d'une loi de puissance dont l'exposant est directement donné par la dimension spectrale.

Au final, le modèle asymptotique a la forme suivante :

$$\hat{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{HF} + \frac{1}{Z_{IF}(j\omega) + \frac{1}{j\omega(C_{BF} - C_{HF})}}} \quad (96)$$

$C_{HF}$  est la capacité haute fréquence du réseau,  $C_{BF}$  est la capacité basse fréquence et  $Z_{IF}$  est le modèle en loi de puissance aux fréquences intermédiaires. Son expression est donnée par :

$$Z_{IF}(j\omega) \sim \omega^{-(1-ds)} \quad (97)$$

$ds$  est la dimension spectrale dont la valeur a été calculée dans les section 1.4 et 2.3 du Chapitre 4.

### 2.1.1. Application au réseau IEEE 37 nœuds

Les valeurs obtenues d'après la réponse fréquentielle et l'analyse de l'invariance d'échelle du réseau (en choisissant la valeur de dimension fractale égale à  $ds_{opt}$ ) sont :

$$C_{HF} = 0,074 \times 10^{-6} F \quad (98)$$

$$C_{BF} = 7,663 \times 10^{-7} F \quad (99)$$

$$\hat{Z}(j\omega) \sim 1,413 \times \omega^{-(1-ds)} \text{ avec } ds_{opt} = 1,26 \quad (100)$$

La Figure 6-6 montre le résultat de la comparaison entre la réponse simulée du réseau IEEE37 nœuds et son modèle asymptotique.

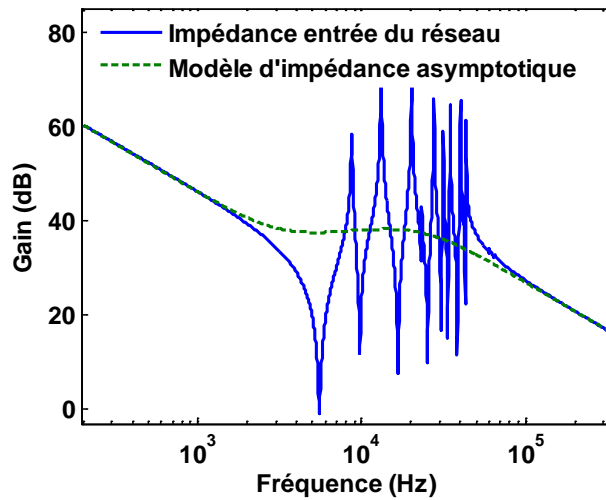


Figure 6-6. Modèle asymptotique du réseau IEEE 37 nœuds.

### 2.1.2. Application au réseau IEEE 118 nœuds

De la même façon, le modèle asymptotique du réseau IEEE 118 nœuds est déterminé en choisissant la valeur de dimension fractale égale à  $ds_{opt}$  :

$$\hat{Z}(j\omega) \sim 0,015 \times \omega^{-(1-ds)} \text{ avec } ds_{opt} = 1,3 \quad (101)$$

$$C_{HF} = 1,1 \times 10^{-4} F \quad (102)$$

$$C_{BF} = 34,5 \times 10^{-3} F \quad (103)$$

Le résultat de cette identification est montré Figure 6-7.

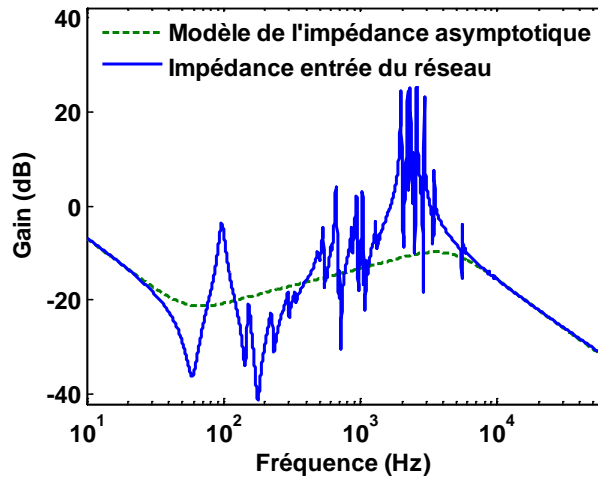


Figure 6-7. Modèle asymptotique du réseau IEEE 118 nœuds.

## 2.2. Modèle des résonances

La partie résonante  $Z_{res}(\omega)$  de la réponse dynamique du réseau est obtenue par la « soustraction » de la réponse fréquentielle asymptotique  $\hat{Z}(\omega)$  à la réponse complète du réseau  $Z(\omega)$ , c'est-à-dire par :

$$Z_{res}(\omega) = \frac{Z(\omega)}{\hat{Z}(\omega)} \quad (104)$$

Ce qui se traduit en module et en phase par :

$$\begin{cases} 20\log_{10}(|Z_{res}(\omega)|) = 20\log_{10}(|Z(\omega)|) - 20\log_{10}(|\hat{Z}(\omega)|) \\ \arg(Z_{res}(\omega)) = \arg(Z(\omega)) - \arg(\hat{Z}(\omega)) \end{cases} \quad (105)$$

Le résultat de cette « soustraction » est donné sur les figures suivantes pour les réseaux 37 nœuds et 118 nœuds. L'efficacité de la « soustraction » se voit nettement aux fréquences extrêmes. La réponse tend en effet vers 0 dB ce qui traduit bien l'élimination de la partie asymptotique.

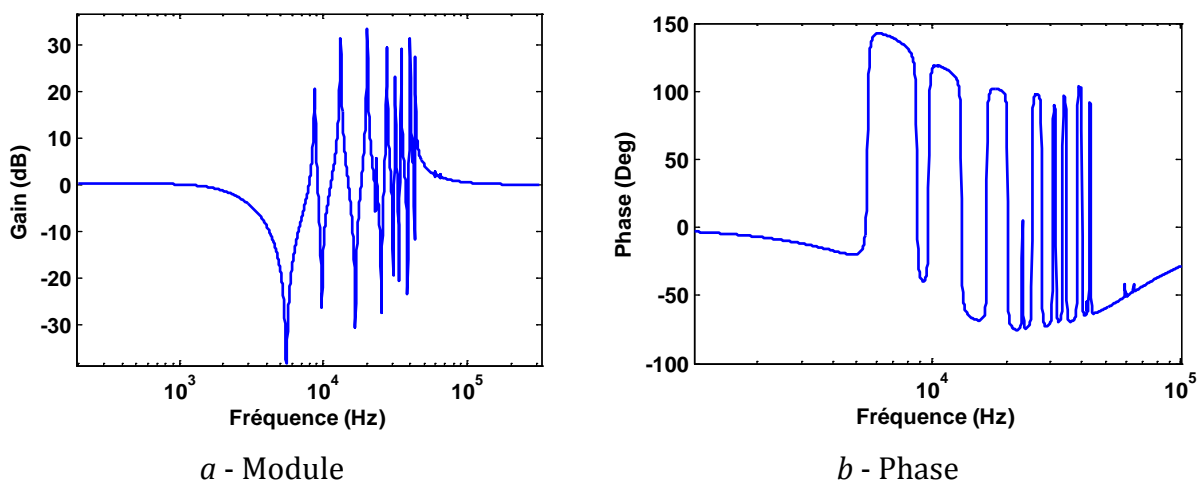


Figure 6-8. Partie résonante de la réponse fréquentielle du réseau IEEE 37 nœuds.

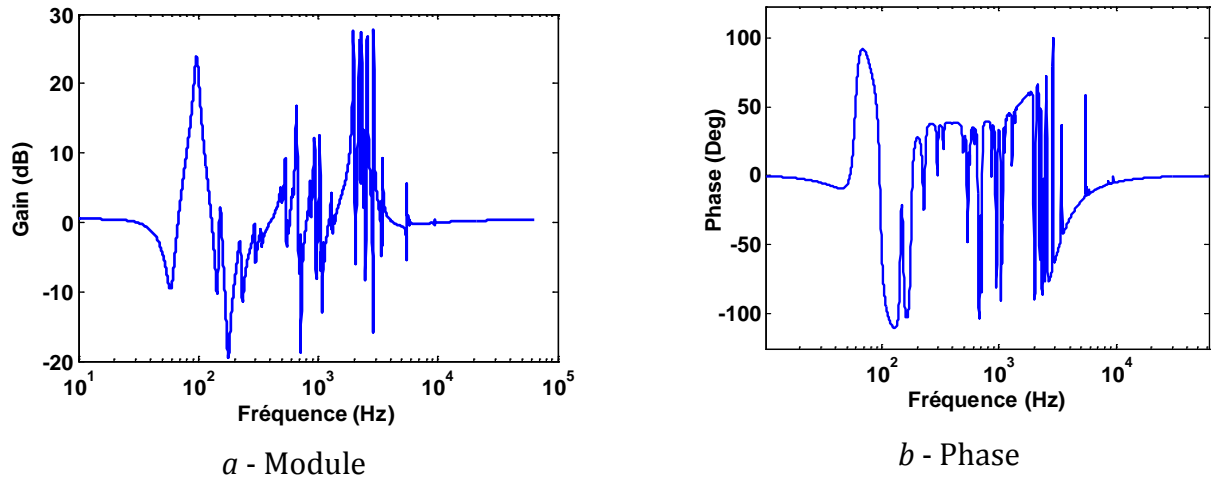


Figure 6-9. Partie résonante de la réponse fréquentielle du réseau IEEE 118 nœuds.

Le modèle utilisé pour représenter ces parties résonantes va être identifié par une technique de « vector fitting ». L'intérêt d'avoir soustrait la partie asymptotique permet tout d'abord de réduire la bande de fréquences utilisable pour l'identification.

D'autre part, pour le choix des pôles initiaux, nous allons utiliser notre connaissance de la caractéristique d'invariance d'échelle et de son impact sur la distribution modale d'un réseau.

### 2.2.1. Invariance d'échelle et initialisation du « Vector Fitting »

Rappelons que la méthode « vector fitting » demande un vecteur des pôles initiaux desquels la qualité du résultat dépend fortement.

La partie réelle des pôles a des répercussions sur l'amortissement des systèmes dynamiques (Kundur, 1994). Elle est fortement liée à la valeur des éléments dissipatifs que sont les résistances. Pour nos réseaux d'étude, nous allons supposer que la valeur des parties réelles des pôles initiaux est nulle. Ceci est justifié pour les réseaux de transport du type IEEE 118 nœuds qui ont des lignes au comportement surtout inductif. C'est moins vrai pour un réseau de distribution du type IEEE 37 nœuds mais cela ne doit pas handicaper la convergence de la méthode d'identification d'après ce qu'en rapporte la littérature (Gustavsen & Semlyen, 1999).

La partie imaginaire des pôles initiaux va être choisie en s'appuyant sur la caractéristique d'invariance d'échelle du réseau. En effet, si l'on compare la distribution fréquentielle des pôles des réseaux 37 et 118 nœuds à leur distribution modale, on observe une forte coïncidence (cf. Figure 6-10). La distribution des pôles a été obtenue sous MATLAB. Elle est définie comme pour la distribution modale par le nombre d'éléments dont la fréquence est inférieure à une certaine valeur.

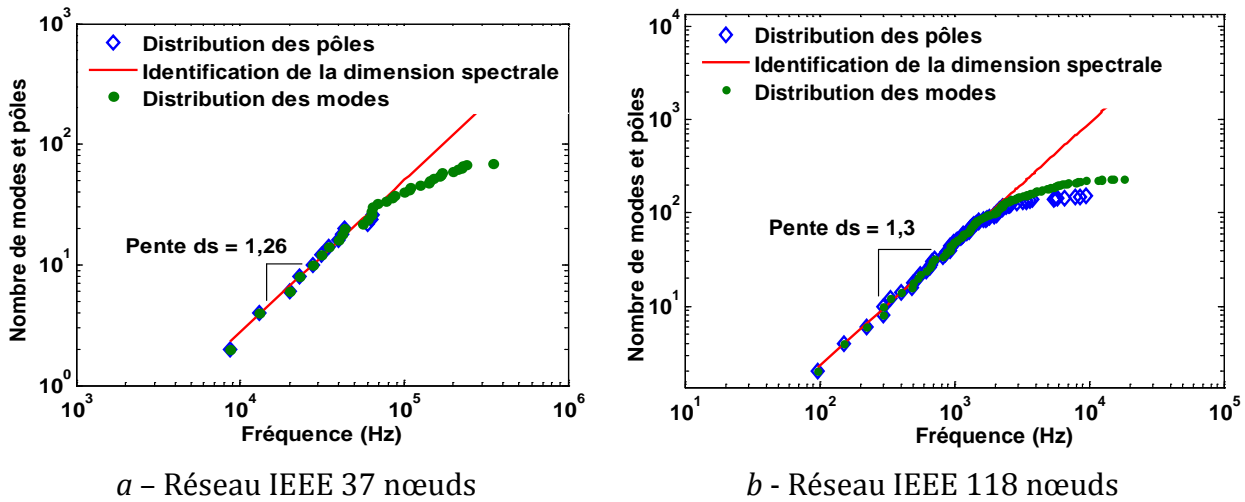


Figure 6-10. Comparaison entre la distribution des modes et des pôles.

La coïncidence s'explique relativement facilement. Les pôles dans la réponse fréquentielle sont en effet les modes d'oscillation observables et commandables d'un système. Autrement dit, quand on construit une fonction de transfert à partir d'une représentation d'état, il se peut que certains modes n'apparaissent pas comme pôles de la fonction de transfert car ils sont compensés par des zéros du système (pour plus de détails, se reporter à l'annexe A). Il se trouve que cette compensation n'arrive pas souvent dans les réseaux réalistes et que les modes conduisent tous à des pôles de la réponse fréquentielle.

L'invariance d'échelle des réseaux a donc aussi des conséquences directes sur la distribution des pôles et nous allons utiliser cette caractéristique pour obtenir les valeurs des fréquences des pôles initiaux.

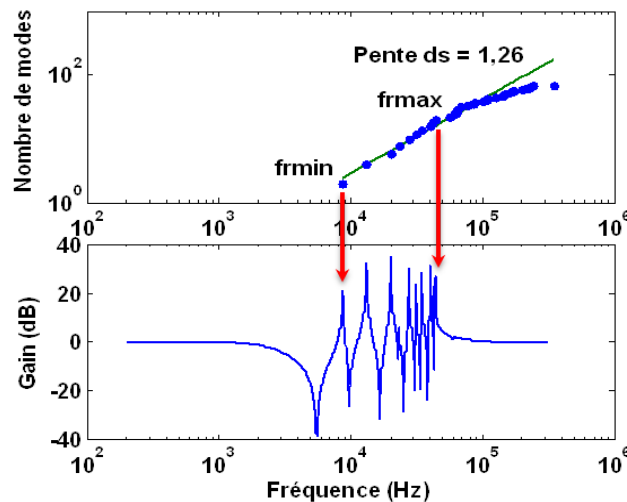


Figure 6-11. Distribution des pôles et réponse fréquentielle résonante du réseau IEEE 37 nœuds.

Comme indiqué sur la Figure 6-11, la distribution des pôles est déterminée par trois paramètres :  $frmin$ ,  $frmax$ , et  $ds$ . Le paramètre  $frmin$  est choisi égal à la valeur de

la première fréquence rencontrée sur la réponse fréquentielle.  $fr_{max}$  est choisi égale à la fréquence de la dernière résonance de la réponse fréquentielle.  $ds$  est la dimension spectrale liée à la caractéristique d'invariance d'échelle du réseau.

Avec ces trois paramètres initiaux, le vecteur des fréquences des pôles initiaux est généré par une loi de puissance d'exposant  $ds$ . On suppose qu'il y a donc une paire de pôles complexes conjugués de fréquence égale à  $fr_{min}$ . Ensuite, la fréquence des paires de pôles complexes conjugués augmente comme la loi de puissance d'exposant  $ds$ . Le vecteur des fréquences est bouclé quand on atteint la valeur  $fr_{max}$ .

Cette méthode a un double intérêt par rapport à la démarche classique. D'une part, on maîtrise le nombre de pôles initiaux à considérer. D'autre part, leur valeur est par construction certainement plus proche de la valeur des pôles exacts que par la démarche classique qui les distribue linéairement sur la bande de fréquences.

### 2.2.2. Application aux réseaux réalistes

La partie résonante du modèle du réseau 37 nœuds est identifiée par « vector fitting » avec une initialisation menée comme ci-dessus.

Les valeurs des trois paramètres  $fr_{min}$ ,  $fr_{max}$ , et  $ds_{opt}$  sont respectivement de  $8,7 \times 10^3$  Hz;  $6,6 \times 10^4$  Hz et 1,26. Le nombre de pôles initiaux est égal à 30. Le Tableau 6-4 montre la convergence de l'identification. Elle est très rapide pour une erreur dès le départ très petite. Pour mémoire, la convergence était effectuée en 5 itérations avec l'approche classique et l'erreur RMS valait 0,01dB.

Itération	Erreur RMS (dB)
1	0,0848
2	0,0144
3	0,0032

Tableau 6-4. Résultat de l'identification du réseau IEEE 37 nœuds

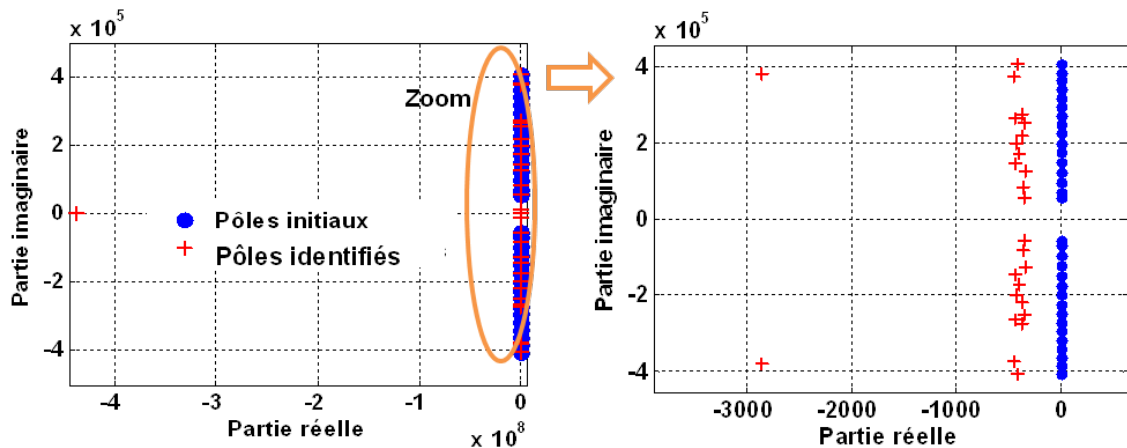


Figure 6-12. Distributions des pôles initiaux et identifiés avec la méthode « vector fitting » du réseau IEEE 37 nœuds.



La distribution des pôles initiaux et des pôles identifiés est donnée sur la Figure 6-12. On constate une très grande proximité qui explique la bonne convergence.

Le résultat de l'identification est montré sur la Figure 6-13. L'erreur absolue est inférieure à 1dB.

On procède de même pour le réseau IEEE 118 nœuds dans la gamme de fréquences  $frmin = 95$  Hz à  $frmax = 5,5 \times 10^3$  Hz, et  $dsopt = 1,3$ . Le nombre de pôles initiaux est d'environ 140 points. La convergence est très bonne avec seulement 3 itérations nécessaires (voir le Tableau 6-5).

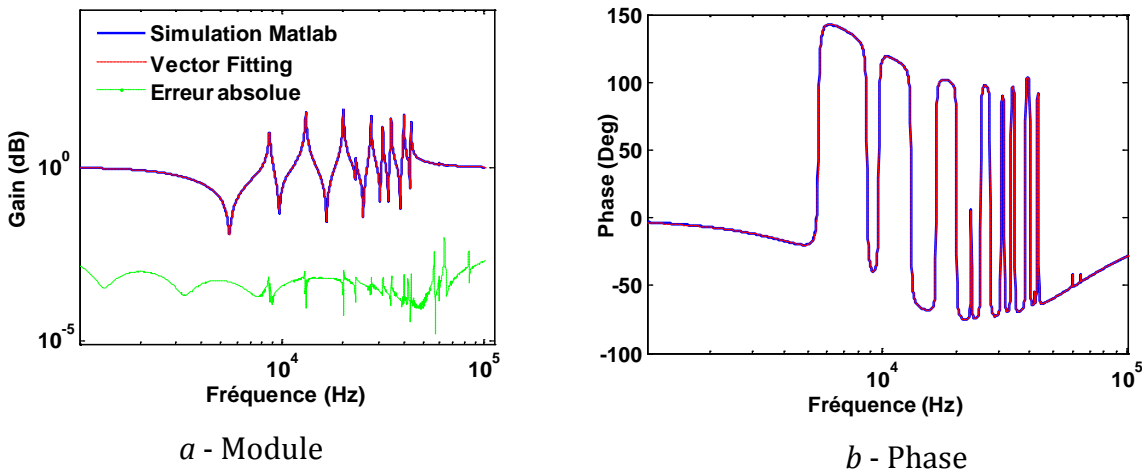


Figure 6-13. Modélisation des résonances par « vector fitting » pour le réseau IEEE 37 nœuds.

Itération	Erreur RMS
1	4,3278
2	0,1959
3	0,0002

Tableau 6-5. Résultat de l'identification du réseau IEEE 118 nœuds.

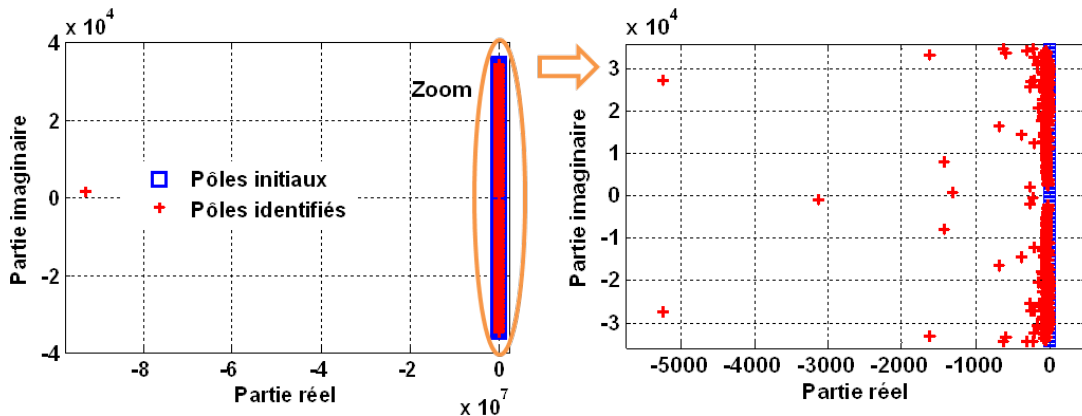


Figure 6-14. Distribution des pôles initiaux et identifiés par « vector fitting » du réseau IEEE 118 nœuds.

La Figure 6-15 montre le bon résultat obtenu pour le réseau IEEE 118 nœuds avec des erreurs absolues inférieures à 1 dB.

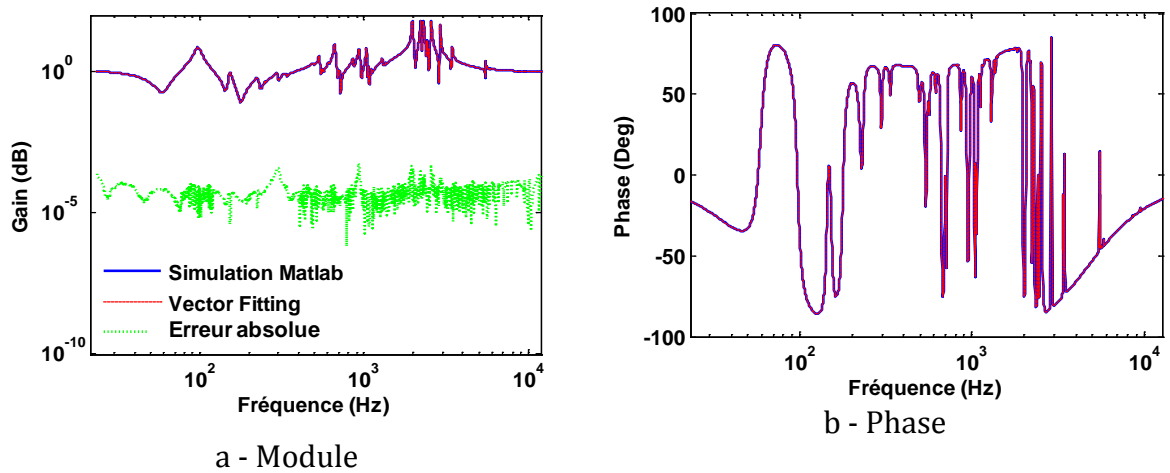


Figure 6-15. Modélisation des résonances par la méthode « vector fitting » pour le réseau IEEE 118 nœuds.

### 2.3. Le modèle fréquentiel complet

La combinaison du modèle asymptotique et du modèle des résonances permet de construire un nouveau modèle fréquentiel  $\tilde{Z}(\omega)$  :

$$\tilde{Z}(\omega) = Z_{res}(\omega)\hat{Z}(\omega) \quad (106)$$

Ce qui se traduit en module et phase par :

$$\begin{cases} 20\log_{10}(|\tilde{Z}(\omega)|) = 20\log_{10}(|Z_{res}(\omega)|) + 20\log_{10}(|\hat{Z}(\omega)|) \\ \arg(\tilde{Z}(\omega)) = \arg(Z_{res}(\omega)) + \arg(\hat{Z}(\omega)) \end{cases} \quad (107)$$

#### 2.3.1. Modèle du réseau IEEE 37 nœuds

Le résultat pour le réseau IEEE 37 nœuds est montré Figure 6-16.

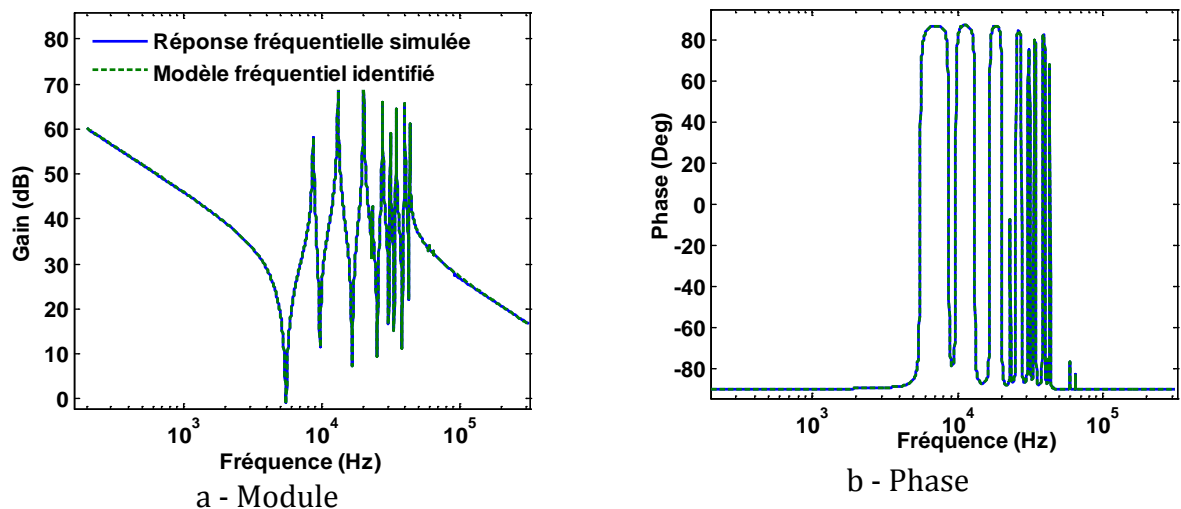


Figure 6-16. Modèle dynamique complet du réseau IEEE 37 nœuds.

La Figure 6-17 montre que l'erreur absolue entre le modèle et la réponse fréquentielle simulée est tout à fait acceptable. Au global, la valeur des erreurs RMS du gain et de la phase sont négligeables, respectivement égales à  $2 \times 10^{-7}$  dB et  $8 \times 10^{-6}$  deg.

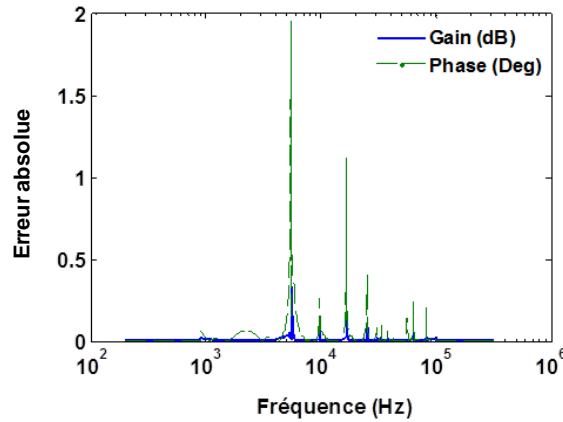


Figure 6-17. Erreur absolue entre le modèle et la réponse simulée du réseau IEEE 37 nœuds.

### 2.3.2. Modèle du réseau IEEE 118 nœuds

De la même façon, on obtient le résultat de la Figure 6-18 pour le réseau 118 nœuds.

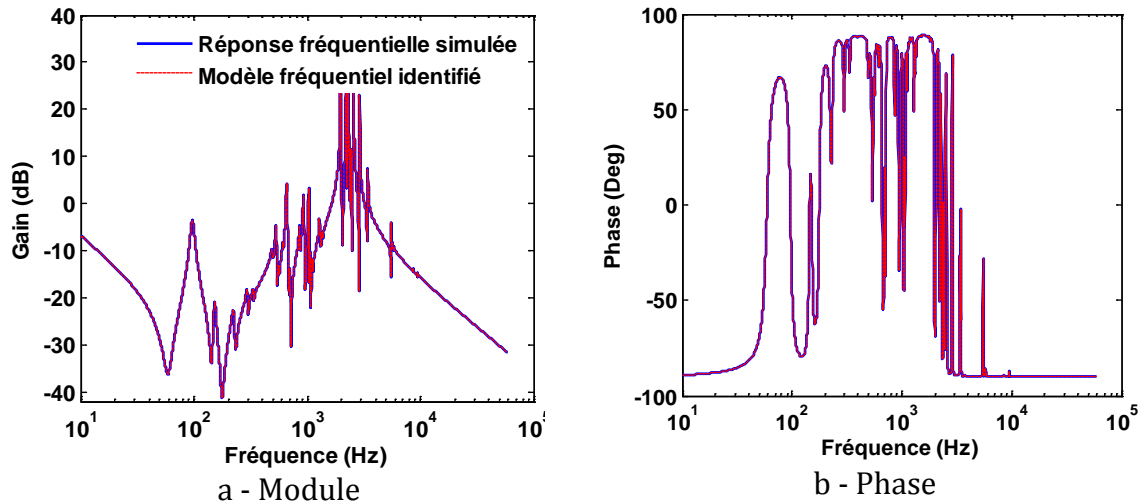


Figure 6-18. Modèle dynamique complet du réseau IEEE 118 nœuds.

Les erreurs absolues sont tout à fait raisonnables et restent avec des valeurs inférieures à 0,1 dB et 0,4 deg (voir la Figure 6-19). Les erreurs RMS valent pour le gain  $2,5 \times 10^{-8}$  dB et pour la phase  $1,2 \times 10^{-6}$  deg.

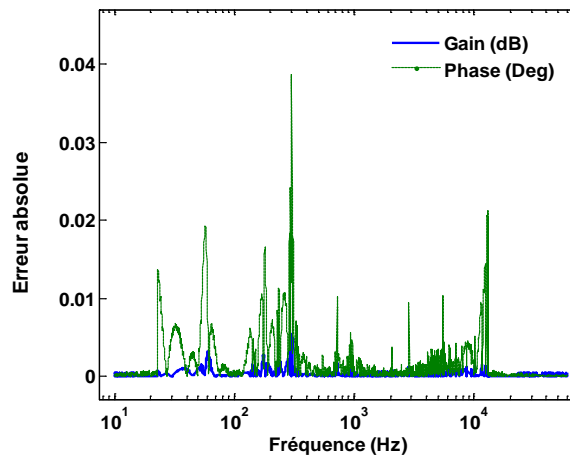


Figure 6-19. Erreur absolue entre le modèle et la réponse simulée du réseau IEEE 118 nœuds.

### 3. Conclusion

La technique dite de « vector fitting » a été largement utilisée dans ce chapitre pour identifier un modèle fréquentiel des réseaux réalistes. Deux modèles sensiblement différents ont été considérés. D'un côté, un modèle « boîte noire » permet d'accéder assez simplement à la réponse fréquentielle du réseau. Par contre, il ne recèle pas d'information quant aux caractéristiques topologiques du réseau. De l'autre, un modèle incluant une plus forte connaissance a été construit.

La partie dite de connaissance est présente sous la forme d'un modèle asymptotique qui s'identifie simplement à partir des caractéristiques d'invariance d'échelle. Il reste une partie « boîte noire » sous la forme d'un modèle des résonances. Toutefois, l'identification de cette partie inclut encore un peu de la connaissance de la topologie autosimilaire pour l'initialisation du « vector fitting ».

Les caractéristiques des deux approches sont résumées dans le Tableau 6-6.

Critère		Modèle « boîte noire »	Modèle issu de l'invariance d'échelle
Méthode		100% identification	50 % analytique 50 % identification
Identification avec méthode « VectorFitting »	Paramètres initiaux	Fréquence basse de la réponse fréquentielle $f_{min}$ , fréquence haute de la réponse $f_{max}$ , Nombre de pôles = double du nombre de pics de résonance	Fréquence basse des résonances $f_{rmin}$ , Fréquence haute des résonances $f_{rmax}$ , $ds$
	Convergence et erreur	Dépend de la proximité des pôles initiaux avec les pôles réels.  Aucune certitude.	La convergence est plus facile du fait d'une plus grande proximité des pôles initiaux avec les pôles réels.
Relation topologie – comportement fréquentiel		Non	Oui

Tableau 6-6. Tableau de synthèse des caractéristiques des modèles

# Conclusion générale et perspectives

---



Malgré une construction historiquement motivée par des raisons géographiques, techniques et économiques, les réseaux électriques présentent une invariance d'échelle sur une certaine plage d'observation. C'est une nouvelle illustration de leur caractère complexe. Un réseau électrique n'est pas la simple somme de ses composants individuels. Son comportement émerge de leur arrangement topologique et plus particulièrement du caractère récursif des relations qui lient entre elles des échelles différentes du réseau.

Grâce à des outils déjà largement employés dans d'autres domaines scientifiques qui s'intéressent à la complexité des systèmes, nous avons pu explorer cette invariance d'échelle. Elle a été caractérisée par différentes dimensions (dimension fractale, dimension spectrale et dans une moindre mesure, dimension de marche aléatoire) qui ont été calculées grâce aux lois d'échelle qui gouvernent le réseau électrique.

Ces dimensions jouent un rôle central dans la relation entre la topologie et le comportement dynamique des réseaux étudiés. Elles ont donc été introduites dans un nouveau modèle dynamique, plus parcimonieux et possédant des liens de connaissance forts avec la topologie. Ce modèle a été complété par identification pour tenir compte de phénomènes que nous n'avons pas pu pour l'instant décrire à l'aide de l'invariance d'échelle. Par contre, l'identification elle-même a été basée sur les propriétés d'autosimilarité des réseaux modélisés.

Les résultats obtenus pendant ce travail de thèse posent autant de questions qu'ils n'en résolvent :

- Il faut tout d'abord poursuivre l'effort de représentation des résonances pour s'affranchir complètement des méthodes d'identification « boîte noire ». Pour cela, il existe des travaux intéressants qui ont déjà été publiés sur la représentation des résonances dans un réseau fractal (Clerc, Giraud, Luck, & Robin, 1996). Nous proposons de nous en inspirer pour approcher au mieux les résonances dans un réseau électrique à partir de ses propriétés d'autosimilarité.
- Les réseaux considérés sont extrêmement simplifiés. Il faudrait y inclure les charges passives et actives, les sources, les bancs de capacité, les transformateurs et leur régulateur en charge. On peut s'attendre toutefois à retrouver un effet de l'invariance d'échelle malgré ces nouveaux composants. En effet, leur insertion se fait en respectant une certaine logique qui reprend la hiérarchie de la structure topologique du réseau. On n'insère pas un petit consommateur à n'importe quel niveau du réseau. On espère donc que l'invariance d'échelle ne sera pas complètement masquée par les composants connectés au réseau. Dans



tous les cas, elle devrait rester une composante sous-jacente à la modélisation des réseaux.

- Il faudrait aussi modéliser de la même manière l'infrastructure d'information et de communication. On pourra s'inspirer pour cela des travaux menés sur le réseau internet (Faloutsos, Faloutsos, & Faloutsos, 1999).
- Un calcul des dimensions basé sur les seules propriétés topologiques du réseau pourrait être réalisé. Ainsi, la dimension fractale peut être facilement calculée par une méthode de croissance d'une boule comme cela a déjà été montré dans ce mémoire. En outre, en calculant la dimension de marche aléatoire par des algorithmes dédiés, on pourrait estimer la valeur de la dimension spectrale. Cela éviterait d'avoir recours à une analyse modale qui est basée sur une résolution des équations de circuit. C'est un travail relativement aisé à mener à court-terme qui conduirait à une lecture essentiellement géométrique des propriétés dynamiques d'un réseau.
- Il est possible d'utiliser ces approches pour traiter d'autres problèmes que la modélisation dynamique. Une piste pleine d'espoir et potentiellement riche d'enseignements est l'étude des blackouts. En effet, ces cascades de défaut pourraient être étudiées comme des phénomènes critiques qui se caractériseraient au point critique par des caractéristiques d'invariance d'échelle (Carreras, Lynch, Dobson, & Newman, 2002), (Buldyrev, Parshani, Paul, Stanley, & Havlin, 2010). On exploiterait cette invariance pour mieux comprendre ce qui se passe au voisinage d'un blackout. L'idée serait ici de montrer comment certaines propriétés topologiques d'un réseau électrique sont favorables ou non à la résistance du réseau aux blackouts (faut-il mailler plus ou non, quel doit être le degré moyen d'un nœud, etc. ?)
- Au-delà, l'idée est bien de fournir un cadre théorique unique qui permette de lire un réseau essentiellement à travers des grandeurs géométriques. Depuis plus d'un siècle et l'établissement des relations de Kirchhoff, la relation entre la distribution spatiale des tensions et courants dans un réseau et leur évolution temporelle a été traduite par des représentations de type « circuit à paramètres localisés ». Avec la mise en évidence de l'invariance d'échelle, on ouvre le champ à de nouvelles représentations, essentiellement géométriques. C'est un résultat à lui tout seul très novateur pour le génie électrique.

# Bibliographie

---



Abdel-Rahman, M., Semlyen, A., & Iravani, M. R. (2003). Two-layer network equivalent for electromagnetic transients. *IEEE Trans. Power Del.*, 18(4), pp. 1328–1335.

Alexander, S., & Orbach, R. (1982). Density of states on fractals: Fractons. *Le journal de Physique - Letters*, 43(17), L625-L631.

Amin, S., & Wollenberg, B. (2005, Sept.-Oct.). Toward a Smart Grid: power delivery for the 21st century. *IEEE Power and Energy Magazine*, 3(5), pp. 34 - 41.

Amrane, A., Retiere, N., & Riu, D. (2010). New modeling of electrical power networks using fractal geometry. In *Harmonics and Quality of Power (ICHQP), 2010 14th International Conference on* (pp. 1-5).

Annakkage, U. D., Gole, N. K., Dinavahi, A. M., Noda, V., Hassan, T., & G Monti, A. (2012). Dynamic System Equivalents: A Survey of Available Techniques. *IEEE Trans. Power Del.*, 27(1), pp. 411-420.

Barabási, A. L., & Albert, R. (1999). Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286(5439), 509-512.

Barabási, A., & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439), p. 509–512.

Barrat, A. (2010). *Réseaux complexes et physique statistique*. Retrieved from <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~barrat/>: <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~barrat/idp.pdf>

Bilis, E. I., Kroger, W., & Nan, C. (2013). Performance of Electric Power Systems under Physical Malicious Attacks. *IEEE Systems Journal*, 7(4), pp. 854-865.

Blanchet, G. M. (2011). *Eléments sur les représentations d'état*. Telecom ParisTech.

Boss, M., Elsinger, H., Summer, M., & Thurner, S. (2004). The network topology of the interbank market. *Quantitative Finance*, 4(6), pp. 677–684.

Bourlès, H. (2010). *Linear Systems*. John Wiley & Sons.

Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *NATURE*, 464(7291), pp. 1025-1028.

Burioni, R. C. (1995). Spectral dimension of fractal trees. *Phys. Rev. E*, 51(4), 2865.

Canadienne, A. n. (2007). *L'énergie dans le monde: le passé et les avenir possibles*. Canadian Energy Research Institute.

Carreras, B. A., Lynch, V. E., Dobson, I., & Newman, D. E. (2002). Critical points and transitions in an electric power transmission model for cascading failure blackouts. *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*, 12(4), 985-994.

- Cha, S. T., Wu, Q., & Ostergaard, J. (2012). A Generic Danish Distribution Grid Model for Smart Grid Technology Testing. *3rd Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT Europe)* (pp. pp. 1-6). Berlin: IEEE PES.
- Charef, A., Sun, H. H., Tsao, Y. Y., & Onaral, B. (1992). Fractal System as Represented by Singularity Function. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, *39(9)* , pp. 1465-1470.
- Chen, G., Dong, Z. Y., Hill, D. J., Zhang, G. H., & Hua, K. Q. (2010). Attack structural vulnerability of power grids: A hybrid approach based on complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *389(3)* , pp. 595-603.
- Chow, J. H. (1982). *Time Scale Modelling of Dynamic Networks with Applications to Power Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Clerc, J. P., Giraud, G., Luck, J. M., & Robin, T. (1996). Dielectric resonances of lattice animals and other fractal clusters. *J. Phys. A: Math. Gen.*, *29(16)* , 4781.
- Clerc, J., Tremblay, A. M., Albinet, G., & Mitescu, C. D. (1984). A.C reponse of fractal network. *Le Journal de Physique - Lettres* , *45(19)*, L913-L924.
- Colizza, V., Barrat, A., Barthélemy, M., & Vespignani, A. (2007). Predictability and epidemic pathways in global outbreaks of infectious diseases: the sars case study. *BMC medicine*, *5(1)* , 34.
- Craciun, D. (2010). *MODELISATION DES EQUIVALENTS DYNAMIQUES DES RESEAUX ELECTRIQUES*. Grenoble: UNIVERSITE DE GRENOBLE.
- Crucitti, P., Latora, V., & Marchiori, M. (2004). Model for cascading failures in complex networks. *PHYSICAL REVIEW E*, *69(4)* , 045104.
- De Arcangelis, L., Redner, S., & Coniglio, A. (1986). Multiscaling approach in random resistor and random superconducting networks. *Physical Review B*, *34(7)* , 4656.
- De Oliveira, S., & Massaud, A. G. (1988). Modal dynamic equivalent for electric power systems I: Theory. *IEEE Trans. Power Syst.*, *3(4)* , pp. 1731-1737.
- Dhar, D. (1977). Lattices of effectively nonintegral dimensionality. *J.Math.Phys*, *18(4)* , pp.577-585.
- Doye, J. (2002). Network topology of a potential energy landscape: a static scale-free network. *Physical Review Letters*, *88(23)* , p. 1-4.
- Durhuus, B., Jonsson, T., & Wheeler, J. (2006). On the spectrale dimension of random trees. *DMTCS Proceedings* , (1).

Enacheanu, O., Riu, D., Retiere, N., & Enciu, P. (2006). Identification of fractional order models for electrical networks. *In Proceedings of IEEE Industrial Electronics IECON 2006–32nd Annual Conference on.* , pp. pp. 5392-5396.

Erdős, P., & Rényi, A. (1960). On the Evolution of Random Graphs. *the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, vol. 2* , pp.17-61.

European Commission, C. r. (2006). *European SmartGrids Technology Platform: Vision and Strategy for Europe's Electricity Networks of the Future*. European Communities.

European Commission. (2014, June 18). *European Commission, Joint Research Centre, Institute for Energy and Transport*. Retrieved from Complex System Science for Smart Grids: <http://ses.jrc.ec.europa.eu/complex-system-science-smart-grids>

Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry : Mathematical foundation and Application*. John Wiley & Sons.

Faloutsos, M., Faloutsos, P., & Faloutsos, C. (1999). On power-law relationships of the internet topology. *Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication* (pp. pp. 251-262). In ACM SIGCOMM Computer Communication Review.

Germond, A. J., & Podmore, R. (1978). Dynamic Aggregation of Generating Unit Models. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, (4)* , pp. 1060- 1069.

Gouyet, J. F. (2007, Novembre 27). *PHYSIQUE ET STRUCTURES FRACTALES\_chapitre 5*. Retrieved from <http://www.jfgouyet.fr/>: <http://www.jfgouyet.fr/>

Gustavsen, B., & Semlyen, A. (1999). Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Trans. Power Del.* , 14(3), 1052-1061.

Hadjsaid, N. (2012, June 25). Smart Energy Grids and Complexity Science. *JRC Scientific and Policy Reports: Smart energy grids and complexity science* , p. 35.

Hilfer, R., & A., B. (1984). Renormalization of Sierpinsky-type fractals. *The Journal of Physics, 17(10)* , L537-L545.

Hong, J. H., & Park, J. K. (1995). A time-domain approach to transmission network equivalents via Prony analysis for electromagnetic transients analysis. *IEEE Trans. Power Syst, 10(4)* , pp. 1789–1797.

Institut Montaigne. (2012). *Pour des réseaux électriques intelligents*. Institut Montaigne.

Jeong, H., Tombor, B., Albert, R., Oltvai, Z. N., & Barabási, A. L. (2000). The large-scale organization of metabolic networks. *Nature, 407(6804)* , p. 651–654.

- Katiraei, F., & Iravani, M. R. (2006). Power management strategies for a microgrid with multiple distributed generation units. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(4) , pp. 1821 - 1831.
- Kaye, B. H. (1994). *A random walk though fractal dimension*. John Wiley & Sons.
- Kong, Z., & Yeh, E. M. (2010). Resilience to Degree-Dependent and Cascading Node Failures in Random Geometric Networks. *IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY*, 56(11) , pp. 5533-5546.
- Kröger, W., & Zio, E. (2011). *Vulnerable Systems*. New York: Springer.
- Kron, G. (1939). *Tension Analysis of Networks*. Wiley.
- Kundur, P. (1994). *Power System Stability and Control*. New York: McGraw-Hill.
- Kundur, P., Paserba, J., Ajarapu, V., Andersson, G., Bose, A., Canizares, C., et al. (2004). Definition and Classification of Power System Stability. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 19(3) , pp. 1387-1401.
- Kuznetsova, E., Culver, K., & Zio, E. (2011). Complexity and vulnerability of Smartgrid system. In *Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL)*, (pp. pp. 2474-2482).
- Laguës, M., & Lense, A. (2008). *Invariances d'échelle. Des changements d'états à la turbulence*. Berlin.
- Landini, G., Murray, P. I., & Misson, G. P. (1995). Local connected fractal dimensions and lacunarity analyses of 60 degrees fluorescein angiograms. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 36(13) , 2749–2755.
- LAPIERRE, J., LE MOIGNE, J., & S., D. (n.d.). *Le petit lexique des termes de la complexité*. Retrieved from <http://www.intelligence-complexite.org/fr/ouverture/accueil.html>: <http://www.intelligence-complexite.org/fr/documents/lexique-de-termes-de-la-complexite.html>
- LE, T., & RETIERE, N. (2014). DYNAMIC EQUIVALENT OF POWER SYSTEMS BASED ON SCALE INVARIANCE FOR SMART GRID SIMULATION. *submitted on Electrimacs*.
- Liang, Y., Lin, X., Gole, A. M., & Yu, M. (2011). Improved coherency-based wide-band equivalents for real time digital simulators. *IEEE Trans. Power Syst*, 26(3) , pp. 1410–1417.
- Lin, X., Gole, A. M., & Yu, M. (2009). A wide-band multi-port system equivalent for real time digital power system simulators. *IEEE Trans. Power Syst*, 24(1) , pp. 237–249.

Liu, X., Cui, X., Qi, L., Liang, G., & Yan, L. (2011). Wide-band Modeling of Cables Based on the Fractional Order Differential Theory. *Asia-Pacific International Conference on Lightning* (pp. pp. 604-608). IEEE.

Mahseredjian, J. D. (2009). Simulation Tools for Electromagnetic Transients in Power Systems: Overview and Challenges. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, 24(3) , pp. 1657-1669.

Mahseredjian, J., & al., e. (2007). *Régimes transitoires dans les réseaux électriques*. Techniques de l'ingénieur.

Mandelbrot, B. B. (1977). *Fractals: Form, Chance and Dimension*. W.H.Freeman & Company.

Mandelbrot, B. B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*. Mountain Man Graphics, Australia.

Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman.

Marti, J. R. (1982). Accurate modeling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations. *IEEE Trans. Power App. Syst.*, (1) , pp. 147–155.

Massaud, A. G., & De Oliveira, S. (1988). Modal dynamic equivalent for electric power systems. II: Stability simulation tests. *IEEE Trans. Power Syst.*, 3(4) , pp. 1731–1737.

Meyer, B., & al., e. (1998). *Outils de simulation dynamique des réseaux électriques*. Techniques de l'ingénieur.

MIT Strategic Engineering. (2011). *MIT Strategic Engineering*. Retrieved from <http://strategic.mit.edu/>: <http://strategic.mit.edu/>

Monti, A., & Ponci, F. (2012, May). *IEEE Smart Grid*. Retrieved from The Complexity of Smart Grids: <http://smartgrid.ieee.org/may-2012/579-the-complexity-of-smart-grids>

Nakayama, T., Yakubo, K., & Orbach, R. L. (1994). DYNAMICAL PROPERTIES OF FRACTAL NETWORKS : SCALING, NUMERICAL SIMULATIONS, AND PHYSICAL REALIZATIONS. *Reviews of modern physics*, 66(2) , pp. 381-443.

Nath, R. L. (1985). Coherency Based System Decomposition into Study and External Areas Using Weak Coupling. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, PAS-104(6) , pp. 1443-1449.

Nie, X., Chen, Y., & Dinavahi, V. (2007). Real-time transient simulation based on a robust two-layer network equivalent. *IEEE Trans. Power Syst.*, 22(4) , pp. 1771–1781.



Ning, J., & Gao, W. (2009). A Wavelet-based Method to Extract Frequency Feature for Power System Fault/Event Analysis. In *Power & Energy Society General Meeting* (pp. 1-5). IEEE.

Noda, T. (2007). A binary frequency-region partitioning algorithm for the identification of a multiphase network equivalent for EMT studies. *IEEE Trans. Power Del*, 22(2) , pp. 1257–1258.

Noda, T. (2005). Identification of a multiphase network equivalent for electroelectromagnetic transient calculations using partitioned frequency response. *IEEE Trans. Power Del*, 20(2) , pp. 1134–1142.

Pagani, G. A., & Aiello, M. (2013). The Power Grid as a complex network: A survey. *Physica A*, source arXiv:1105.3338 , pp. 2688–2700.

Pankovits, P., Bossi, O., Brisset, S., Saudemont, C., Gerbaud, L., Retiere, N., et al. (2013). CONIFER Project : Innovative concept and tools for Future Electrical Infrastructure railway will integrate delocalized renewable production sources and storages systems. *soumis à WCRR 2013* .

Pérez-Arriaga, I. J., Verghese, G. C., & Schweppe, F. C. (1982). Selective modal analysis with application to electric power systems, Part I:Heuristic Introduction. *IEEE Trans. Power App. Syst., PAS-101(9)* , pp. 3117–3125.

Perrin, J. (1910). Mouvement brownien et réalité moléculaire. *J. Phys. Theor. Appl.*, 9(1) , pp. 5-39.

Podmore, R. (1978). Identification of Coherent Generators for Dynamic Equivalents. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, (4) , pp. 1344-1354.

Racewicz, S., Riu, D., Retier, e. N., & Chrzan, P. (2014). Half-Order Modelling of Saturated Synchronous Machine. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(10) , pp. 607-612.

Rammal, R., & Toulouse, G. (1983). Random walks on fractal structures and percolation clusters. *Physique-Lettres*, 44(1) , L-13 - L-22.

Rozel, B. (2009). *La sécurisation des infrastructures critiques : recherche d'une méthodologie d'identification des vulnérabilités*. GRENOBLE: INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE.

RTE. (2013). *Reseau de transport d'electricite*., Retrieved from <http://www.rte-france.com>: <http://www.rte-france.com>

Sabonnadière, J., & Hadjsaid, N. (2007). *Lignes et réseaux électriques 2 : méthodes d'analyse des réseaux électriques*. Hermes Science Publications.

- Safavian, L. S., Kinsner, W., & Turanli, H. (2004). Classification of transients in power systems using multifractal analysis. *CCECE* (pp. pp. 1445 - 1448). Niagara Falls: IEEE.
- Sanchez Torrres, J. (2013). *Vulnérabilité, Interdépendance et Analyse des Risques des Postes Sources et des Modes d'Exploitation décentralisés des Réseaux Electriques*. GRENOBLE: L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE.
- Sanchez, J., Caire, R., & Hadjsaid, N. (2013). ICT and power distribution modeling using complex networks. *IEEE PowerTech* (pp. pp. 1-6). Grenoble: IEEE.
- Semlyen, A., & Gustavsen, B. (2009). On Passivity Tests for Unsymmetrical Models. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, 24(3) , pp. 1739-1741.
- Shender, E. F. (1976). Thermodynamics of dilute Heisenberg ferromagnets near the percolation threshold. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 9(12) , L309.
- Singh, H., & Abur, A. (1995). Multiport equivalencing of external systems for simulation of switching transients. *IEEE Trans. Power Del.*, 10(1) , pp. 374–382.
- Song, C., Havlin, S., & Makse, H. A. (2005). Self-similarity of complex networks. *NATURE* , 433(7024), pp. 392-395.
- Sonnino, G. (2012, June 25). Can Smart Energy Grids be Analysed by Statistical Thermodynamics? *JRC Scientific and Policy Reports: Smart energy grids ans complexity science* , p. 67.
- Soysal, A. O., & Semlyen, A. (1993). Practical transfer function estimation and its application to wide frequency range representation of transformers. *IEEE Trans. Power Del*, 8(3) , pp. 1627–1637.
- Stankovic, A. M., & Saric, A. T. (2004). Transient power system analysis with measurement-based gray box and hybrid dynamic equivalents. *IEEE Trans. Power Syst.*, 19(1) , pp. 455–462.
- Stanley, H. E., Amaral, L. A., Gopikrishnan, P., Ivanov, P. C., Keitt, T. H., & Plerou, V. (2000). Scale invariance and universality:organizing principles in complex systems. *Physical Review A: Statistical Mechanics and its Applications*, 281(1) , pp 60-68.
- Stauffer, D., & Aharony, A. (1992). *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis.
- Sun, K. (2005). Complex Networks Theory: A New Method of Research in Power Grid. *Transmission and Distribution Conference & Exhibition* (pp. pp. 1-6). IEEE/PES.
- Theiler, J. (1990). Estimating Fractal Dimension. *Journal of Optical Society of America*, 7(6) , 1055-1073.

Thompson, A. W., & Bonner, J. T. (1917). *On Growth and Form*. Cambridge University press.

Thorp, J. S., & Naqavi, S. A. (1997). Load-Flow Fractals Draw Clues to Erratic Behavior. *IEEE Computer Applications in Power*, 10(1) , pp. 59-62.

Travers, J., & Milgram, S. (1969). An experimental study of the small world problem. *Sociometry* , pp. 425–443.

Troullinos, G., Dorsey, J. F., Wong, H., Myers, J., & Goodwin, S. (1985). Estimating order reduction for dynamic equivalents. *IEEE Trans. Power App. Syst., PAS-104(12)* , pp. 3475–3481.

Undrill, J., & Turner, A. (1971). Construction of power system electro-mechanical equivalents by modal analysis. *IEEE Trans. Power App.Syst., PAS-90(5)* , pp. 2049–2059.

Verghese, G. C., Perez-Arriaga, I. J., & Schweppe, F. C. (1982). Selective modal analysis with application to electric power systems, Part II : The Dynamic Stability Problem. *IEEE Trans. Power App. Syst., PAS-101(9)* , pp. 3126–3134.

Wang, L., & Klein, M. (1997). Dynamic Reduction of Large Power Systems for Stability Studies. *Power Systems IEEE Transactions*, 12(2) , pp. 889-895.

Watts, D., & Strogatz, S. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684) , pp. 440-442.

Winkelman, J. R., Chow, J. H., Bowler, B. C., Avramovic, B., & Kokotovic, P. V. (1981). An Analysis of Interarea Dynamics of Multi-Machine Systems. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, (2) , pp. 754-763.

Xiao, H., & Yeh, E. M. (2010). *Cascading Link Failure in the Power Grid: A Percolation-Based Analysis*. Retrieved from Cornell University, Computer Science, Networking and Internet Architecture: <http://arxiv.org/pdf/1011.4535.pdf>

Yu, Y. N., & El-Sharkawi, M. A. (1981). Estimation of external dynamic equivalents of a thirteen-machine system. *IEEE Trans. Power App. Syst., (3)* , pp. 1324–1332.

# Annexes

---



## Analyse d'un système électrique dynamique

### 1. Liens entre les différentes descriptions d'un système électrique dynamique

La description d'un système électrique dynamique peut être faite sous la forme d'équations différentielles, d'une réponse impulsionnelle, d'une fonction de transfert, d'une représentation d'état. Les relations entre ces descriptions sont montrées sur la Figure 6-20.

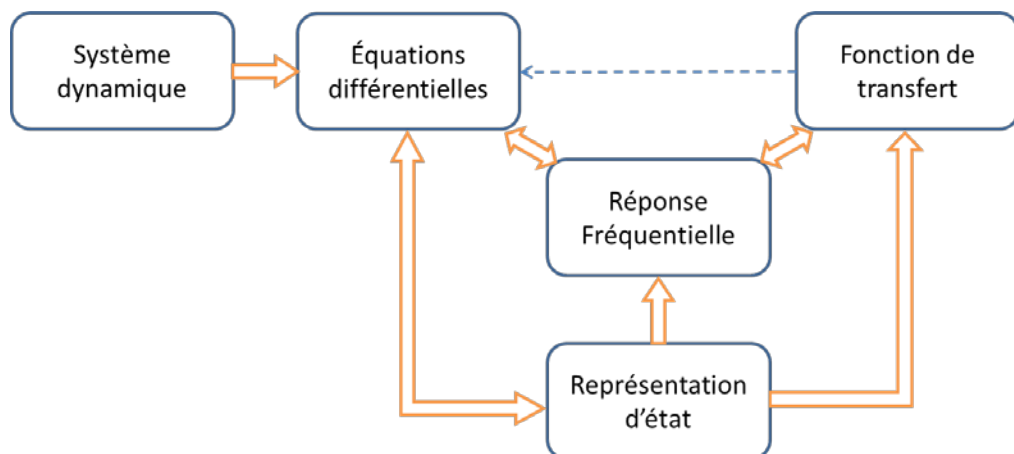


Figure 6-20. Liens entre les descriptions d'un système dynamique. La représentation d'état des équations différentielles d'un système dynamique est:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \quad (108)$$

Où :

$A \in R^{n \times n}$  : matrice d'état.

$B \in R^{n \times m}$  : matrice de commande.

$C \in R^{p \times n}$  : matrice d'observation.

$D \in R^{p \times m}$  : matrice d'action directe.

$X(t)$  : vecteur qui représente les  $n$  variables d'état.

$U(t)$  : vecteur qui représente les  $m$  commandes.

$Y(t)$  : vecteur qui représente les  $p$  sorties.

Avec l'hypothèse de conditions initiales nulles, soit  $X(0)=0$ , l'équation (4) s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (109)$$

Il est possible d'en déduire la fonction de transfert  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  avec :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (110)$$

$I$  : Matrice d'identité.

$s$  : opérateur de Laplace.

$N(s)$  : polynôme dont les solutions sont les zéros du système.

$D(s)$  : polynôme dont les solutions sont les pôles du système.

On considère que le système ne possède qu'une entrée et qu'une sortie et que  $D=0$ . La partie droite de l'équation (110) peut alors s'écrire (Blanchet, 2011):

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1}B + 1 &= \det(1 + C(sI - A)^{-1}B) \\ &= \det(I + BC(sI - A)^{-1}) \\ &= \det((sI - A)^{-1}) \det((sI - A) + BC) \end{aligned} \quad (111)$$

La fonction de transfert est alors donnée par :

$$H(s) = \frac{\det(sI - (A - BC))}{\det(sI - A)} - 1 = G(s) - 1 \quad (112)$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont les solutions de l'équation  $\det(\lambda I - A) = 0$ . Chaque valeur propre  $\lambda$  peut être réelle ou complexe conjuguée soit :  $\lambda = \sigma \pm j\omega$  avec  $\omega$  la fréquence propre et  $\sigma$  l'amortissement. Une valeur propre correspond à un mode.

En comparant les équations (110) et (112), les pôles du système sont les modes si  $G(s)$  est une fraction irréductible. Le système dynamique est alors dit commandable et observable. Si des pôles sont éliminés dans la fonction de transfert par des zéros, on parle de modes non commandables ou non observables selon comment se fait l'élimination (Bourlès, 2010).

Si un système dynamique a une paire de pôles complexes conjugués à proximité de l'axe imaginaire, son diagramme de Bode en amplitude présente une résonance dont la fréquence est proche de celle du pôle. Si la paire de pôles se trouve directement sur l'axe imaginaire, le système présente un gain infini à cette fréquence.

Si un système dynamique a une paire de zéros complexes conjugués proches de l'axe imaginaire, le diagramme de Bode présente une anti résonance dont la fréquence est voisine de celle des zéros. Si la paire de zéros se trouvent directement sur l'axe imaginaire, la réponse en amplitude du système est nulle à la fréquence du zéro, c'est-à-dire que le système ne répond pas du tout à une excitation sinusoïdale à cette fréquence.

## 2. Application au cas d'un réseau électrique

Pour illustrer cela dans le cas d'un réseau électrique, nous analysons le comportement dynamique d'une ligne alimentée par une source de courant sinusoïdal  $I(t)$ . Cette ligne est modélisée par un modèle en  $\pi$  comme présenté Figure 6-21 :

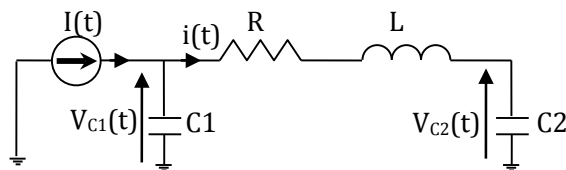


Figure 6-21. Exemple d'une ligne électrique.

Ce circuit est décrit par un ensemble d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}V_{c1}(t) - \frac{1}{L}V_{c2}(t) - \frac{R}{L}i(t) \\ \frac{dV_{c1}(t)}{dt} = \frac{1}{C1}I(t) - \frac{1}{C1}i(t) \\ \frac{dV_{c2}(t)}{dt} = \frac{1}{C2}i(t) \\ V(t) = V_{c1}(t) \end{cases} \quad (113)$$

Par transformation de Laplace, la fonction de transfert peut être calculée :

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = C(sI_M - A)^{-1}B \quad (114)$$

Avec :

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{C1} \end{vmatrix} \quad C = |0 \ 1 \ 0|$$



En considérant que les valeurs de  $C1$  et  $C2$  sont identiques, la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(LC1s^2 + RC1s + 1)}{C1s(LC1s^2 + RC1s + 2)} \quad (115)$$

D'après la matrice  $A$ , ce système dynamique comprend 3 modes correspondant à 3 variables d'état. Ce sont les solutions de l'équation suivante :

$$s(LC1s^2 + RC1s + 2) = 0 \quad (116)$$

D'après l'équation (116), les pôles coïncident avec les modes et sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

Pour des valeurs de  $R$ ,  $L$  et  $C1$  égales à  $1\Omega$ ,  $1\text{mH}$ , et  $1\mu\text{F}$  le diagramme de Bode de la Figure 6-22 est obtenu. On trouve une antirésonance et une résonance liée aux pôles et aux zéros du système.

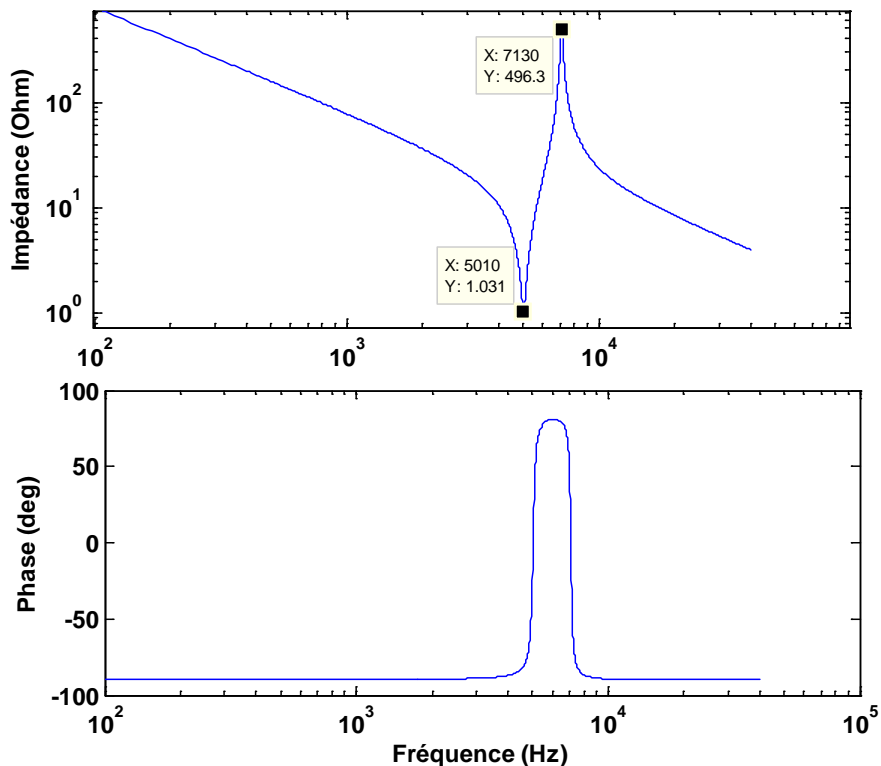


Figure 6-22. Impédance d'entrée d'une ligne électrique en  $\pi$

$R = 1\Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$ , et  $C = 1\mu\text{F}$

---

## Annexe B

# Modélisation d'un réseau électrique avec la fonction *power\_statespace* de MATLAB®

La fonction « *power\_statespace* » comprend 7 entrées obligatoires. Dans notre cas d'étude, pour des réseaux équilibrés et en ignorant les transformateurs et la propagation, les entrées sont :

- Matrice des sources (*Source*) : nous utilisons une source de courant.
- Matrice des sorties (*yout*) : la tension au nœud source.
- Types des sorties (*y\_type*) : égale à 0 pour une sortie en tension.
- Unité utilisée dans le réseau (*Unit*) : il y a 2 types d'unité :
  - 1) « *OHM* » : on donne directement les valeurs des impédances avec une fréquence fondamentale égale à 60Hz
  - 2) « *OMU* » : on donne les valeurs des résistances, inductances et capacités en ohm ( $\Omega$ ), millihenry (*mH*), et microfarad ( $\mu F$ ).
- Matrice des interrupteurs (*Switches*) : définie à 0 car pas d'interrupteur dans notre cas
- Matrice des lignes de paramètre distribué (*line\_dist*) : définie à 0 car pas de propagation
- Matrice des branches (*r/c*) : cette matrice spécifie la topologie du réseau, la résistance *R*, l'inductance *L*, la capacité *C* entre les nœuds dans le réseau. Les branches sont définies par une valeur représentant le type de branche : négative pour une ligne de transmission, 0 pour un élément RLC série, 1 pour un élément de RLC parallèle.

## Annexe C

### Descriptions du réseau IEEE 37 nœuds

#### ❖ Données des branches

Node A	Node B	Length(ft.)	Config.
701	702	960	722
702	705	400	724
702	713	360	723
702	703	1320	722
703	727	240	724
703	730	600	723
704	714	80	724
704	720	800	723
705	742	320	724
705	712	240	724
706	725	280	724
707	724	760	724
707	722	120	724
708	733	320	723
708	732	320	724
709	731	600	723
709	708	320	723
710	735	200	724
710	736	1280	724
711	741	400	723
711	740	200	724
713	704	520	723
714	718	520	724
720	707	920	724
720	706	600	723
727	744	280	723
730	709	200	723
733	734	560	723
734	737	640	723
734	710	520	724
737	738	400	723
738	711	400	723
744	728	200	724
744	729	280	724
775	709	0	XFM-1
799	701	1850	721

#### ❖ Données des transformateurs

	kVA	kV-high	kV-low	R - %	X - %
Substation:	2,500	230 D	4.8 D	2	8
XFM -1	500	4.8 D	480 D	0.09	1.81

#### ❖ Données des charges

Node	Load Model	Ph-1 kW	Ph-1 kVAr	Ph-2 kW	Ph-2 kVAr	Ph-3 kW	Ph-4 kVAr
701	D-PQ	140	70	140	70	350	175
712	D-PQ	0	0	0	0	85	40
713	D-PQ	0	0	0	0	85	40
714	D-I	17	8	21	10	0	0
718	D-Z	85	40	0	0	0	0
720	D-PQ	0	0	0	0	85	40
722	D-I	0	0	140	70	21	10
724	D-Z	0	0	42	21	0	0
725	D-PQ	0	0	42	21	0	0
727	D-PQ	0	0	0	0	42	21
728	D-PQ	42	21	42	21	42	21
729	D-I	42	21	0	0	0	0
730	D-Z	0	0	0	0	85	40
731	D-Z	0	0	85	40	0	0
732	D-PQ	0	0	0	0	42	21
733	D-I	85	40	0	0	0	0
734	D-PQ	0	0	0	0	42	21
735	D-PQ	0	0	0	0	85	40
736	D-Z	0	0	42	21	0	0
737	D-I	140	70	0	0	0	0
738	D-PQ	126	62	0	0	0	0
740	D-PQ	0	0	0	0	85	40
741	D-I	0	0	0	0	42	21
742	D-Z	8	4	85	40	0	0
744	D-PQ	42	21	0	0	0	0
Total		727	357	639	314	1091	530

#### ❖ Régulateur du transformateur du poste source

Regulator ID:	1	
Line Segment:	799 -701	
Location:	799	
Phases:	A - B -C	
Connection:	AB - CB	
Monitoring Phase:	AB & CB	
Bandwidth:	2.0 volts	
PT Ratio:	40	
Primary CT Rating:	350	
Compensator Settings:	Ph-AB	Ph-CB
R - Setting:	1.5	1.5
X - Setting:	3	3
Voltage Level:	122	122

❖ **Matrice d'impédance et d'admittance****Configuration 721**

Z (R +jX) in ohms per mile  
 0.2926 0.1973 0.0673 -0.0368 0.0337 -0.0417  
 0.2646 0.1900 0.0673 -0.0368  
 0.2926 0.1973

B in micro Siemens per mile  
 159.7919 0.0000 0.0000  
 159.7919 0.0000  
 159.7919

**Configuration 722**

Z (R +jX) in ohms per mile  
 0.4751 0.2973 0.1629 -0.0326 0.1234 -0.0607  
 0.4488 0.2678 0.1629 -0.0326  
 0.4751 0.2973

B in micro Siemens per mile  
 127.8306 0.0000 0.0000  
 127.8306 0.0000  
 127.8306

**Configuration 723**

Z (R +jX) in ohms per mile  
 1.2936 0.6713 0.4871 0.2111 0.4585 0.1521  
 1.3022 0.6326 0.4871 0.2111  
 1.2936 0.6713

B in micro Siemens per mile  
 74.8405 0.0000 0.0000  
 74.8405 0.0000  
 74.8405

**Configuration 724**

Z (R +jX) in ohms per mile  
 2.0952 0.7758 0.5204 0.2738 0.4926 0.2123  
 2.1068 0.7398 0.5204 0.2738  
 2.0952 0.7758

B in micro Siemens per mile  
 60.2483 0.0000 0.0000  
 60.2483 0.0000  
 60.2483

❖ Matrice des branches (*rlc*) dans la fonction « *power\_statespace* » de MATLAB

N_départ	N_arrivé	type	R(Ohm)	L(mH)	C(uF)
701	702	0	0,22	0,37	0,00
702	705	0	0,41	0,40	0,00
702	713	0	0,23	0,31	0,00
702	703	0	0,31	0,51	0,00
703	727	0	0,25	0,24	0,00
703	730	0	0,38	0,52	0,00
704	714	0	0,08	0,08	0,00
704	720	0	0,51	0,70	0,00
705	742	0	0,33	0,32	0,00
705	712	0	0,25	0,24	0,00
706	725	0	0,29	0,28	0,00
707	724	0	0,78	0,77	0,00
707	722	0	0,12	0,12	0,00
708	733	0	0,20	0,28	0,00
708	732	0	0,33	0,32	0,00
709	731	0	0,38	0,52	0,00
709	708	0	0,20	0,28	0,00
710	735	0	0,21	0,20	0,00
710	736	0	1,32	1,29	0,00
711	741	0	0,25	0,35	0,00
711	740	0	0,21	0,20	0,00
713	704	0	0,33	0,45	0,00
714	718	0	0,53	0,52	0,00
720	707	0	0,95	0,93	0,00
720	706	0	0,38	0,52	0,00
727	744	0	0,18	0,24	0,00
730	709	0	0,13	0,17	0,00
733	734	0	0,36	0,49	0,00
734	737	0	0,41	0,56	0,00
734	710	0	0,53	0,52	0,00
737	738	0	0,25	0,35	0,00
738	711	0	0,25	0,35	0,00
744	728	0	0,21	0,20	0,00
744	729	0	0,29	0,28	0,00
799	701	0	0,27	0,47	0,00
701	0	1	0,00	0,00	0,11

702	0	1	0,00	0,00	0,09
703	0	1	0,00	0,00	0,06
704	0	1	0,00	0,00	0,03
705	0	1	0,00	0,00	0,01
706	0	1	0,00	0,00	0,02
707	0	1	0,00	0,00	0,03
708	0	1	0,00	0,00	0,02
709	0	1	0,00	0,00	0,02
710	0	1	0,00	0,00	0,03
711	0	1	0,00	0,00	0,02
712	0	1	0,00	0,00	0,00
713	0	1	0,00	0,00	0,02
714	0	1	0,00	0,00	0,01
718	0	1	0,00	0,00	0,01
720	0	1	0,00	0,00	0,04
722	0	1	0,00	0,00	0,00
724	0	1	0,00	0,00	0,01
725	0	1	0,00	0,00	0,00
727	0	1	0,00	0,00	0,01
728	0	1	0,00	0,00	0,00
729	0	1	0,00	0,00	0,00
730	0	1	0,00	0,00	0,02
731	0	1	0,00	0,00	0,01
732	0	1	0,00	0,00	0,00
733	0	1	0,00	0,00	0,02
734	0	1	0,00	0,00	0,03
735	0	1	0,00	0,00	0,00
736	0	1	0,00	0,00	0,02
737	0	1	0,00	0,00	0,02
738	0	1	0,00	0,00	0,02
740	0	1	0,00	0,00	0,00
741	0	1	0,00	0,00	0,01
742	0	1	0,00	0,00	0,00
744	0	1	0,00	0,00	0,01
799	0	1	0,00	0,00	0,07

## Annexe D

## Descriptions du réseau IEEE 118 nœuds

## ❖ Données des lignes de transmission en p.u.

Line No.	From Bus	To Bus	Circuit ID	R (pu)	X (pu)	B (pu)	Flow Limit (MW)
1	1	2	1	0.0303	0.0999	0.0254	175
2	1	3	1	0.0129	0.0424	0.01082	175
3	4	5	1	0.00176	0.00798	0.0021	500
4	3	5	1	0.0241	0.108	0.0284	175
5	5	6	1	0.0119	0.054	0.01426	175
6	6	7	1	0.00459	0.0208	0.0055	175
7	8	9	1	0.00244	0.0305	1.162	500
8	8	5	1	0	0.0267	0	500
9	9	10	1	0.00258	0.0322	1.23	500
10	4	11	1	0.0209	0.0688	0.01748	175
11	5	11	1	0.0203	0.0682	0.01738	175
12	11	12	1	0.00595	0.0196	0.00502	175
13	2	12	1	0.0187	0.0616	0.01572	175
14	3	12	1	0.0484	0.16	0.0406	175
15	7	12	1	0.00862	0.034	0.00874	175
16	11	13	1	0.02225	0.0731	0.01876	175
17	12	14	1	0.0215	0.0707	0.01816	175
18	13	15	1	0.0744	0.2444	0.06268	175
19	14	15	1	0.0595	0.195	0.0502	175
20	12	16	1	0.0212	0.0834	0.0214	175
21	15	17	1	0.0132	0.0437	0.0444	500
22	16	17	1	0.0454	0.1801	0.0466	175
23	17	18	1	0.0123	0.0505	0.01298	175
24	18	19	1	0.01119	0.0493	0.01142	175
25	19	20	1	0.0252	0.117	0.0298	175
26	15	19	1	0.012	0.0394	0.0101	175
27	20	21	1	0.0183	0.0849	0.0216	175
28	21	22	1	0.0209	0.097	0.0246	175
29	22	23	1	0.0342	0.159	0.0404	175
30	23	24	1	0.0135	0.0492	0.0498	175
31	23	25	1	0.0156	0.08	0.0864	500
32	26	25	1	0	0.0382	0	500
33	25	27	1	0.0318	0.163	0.1764	500
34	27	28	1	0.01913	0.0855	0.0216	175
35	28	29	1	0.0237	0.0943	0.0238	175
36	30	17	1	0	0.0388	0	500
37	8	30	1	0.00431	0.0504	0.514	175
38	26	30	1	0.00799	0.086	0.908	500
39	17	31	1	0.0474	0.1563	0.0399	175
40	29	31	1	0.0108	0.0331	0.0083	175
41	23	32	1	0.0317	0.1153	0.1173	140
42	31	32	1	0.0298	0.0985	0.0251	175
43	27	32	1	0.0229	0.0755	0.01926	175
44	15	33	1	0.038	0.1244	0.03194	175
45	19	34	1	0.0752	0.247	0.0632	175
46	35	36	1	0.00224	0.0102	0.00268	175
47	35	37	1	0.011	0.0497	0.01318	175
48	33	37	1	0.0415	0.142	0.0366	175
49	34	36	1	0.00871	0.0268	0.00568	175
50	34	37	1	0.00256	0.0094	0.00984	500
51	38	37	1	0	0.0375	0	500
52	37	39	1	0.0321	0.106	0.027	175
53	37	40	1	0.0593	0.168	0.042	175

54	30	38	1	0.00464	0.054	0.422	175
55	39	40	1	0.0184	0.0605	0.01552	175
56	40	41	1	0.0145	0.0487	0.01222	175
57	40	42	1	0.0555	0.183	0.0466	175
58	41	42	1	0.041	0.135	0.0344	175
59	43	44	1	0.0608	0.2454	0.06068	175
60	34	43	1	0.0413	0.1681	0.04226	175
61	44	45	1	0.0224	0.0901	0.0224	175
62	45	46	1	0.04	0.1356	0.0332	175
63	46	47	1	0.038	0.127	0.0316	175
64	46	48	1	0.0601	0.189	0.0472	175
65	47	49	1	0.0191	0.0625	0.01604	175
66	42	49	1	0.0715	0.323	0.086	175
67	42	49	2	0.0715	0.323	0.086	175
68	45	49	1	0.0684	0.186	0.0444	175
69	48	49	1	0.0179	0.0505	0.01258	175
70	49	50	1	0.0267	0.0752	0.01874	175
71	49	51	1	0.0486	0.137	0.0342	175
72	51	52	1	0.0203	0.0588	0.01396	175
73	52	53	1	0.0405	0.1635	0.04058	175
74	53	54	1	0.0263	0.122	0.031	175
75	49	54	1	0.073	0.289	0.0738	175
76	49	54	2	0.0869	0.291	0.073	175
77	54	55	1	0.0169	0.0707	0.0202	175
78	54	56	1	0.00275	0.00955	0.00732	175
79	55	56	1	0.00488	0.0151	0.00374	175
80	56	57	1	0.0343	0.0966	0.0242	175
81	50	57	1	0.0474	0.134	0.0332	175
82	56	58	1	0.0343	0.0966	0.0242	175
83	51	58	1	0.0255	0.0719	0.01788	175
84	54	59	1	0.0503	0.2293	0.0598	175
85	56	59	1	0.0825	0.251	0.0569	175
86	56	59	2	0.0803	0.239	0.0536	175
87	55	59	1	0.04739	0.2158	0.05646	175
88	59	60	1	0.0317	0.145	0.0376	175
89	59	61	1	0.0328	0.15	0.0388	175
90	60	61	1	0.00264	0.0135	0.01456	500
91	60	62	1	0.0123	0.0561	0.01468	175
92	61	62	1	0.00824	0.0376	0.0098	175
93	63	59	1	0	0.0386	0	500
94	63	64	1	0.00172	0.02	0.216	500
95	64	61	1	0	0.0268	0	500
96	38	65	1	0.00901	0.0986	1.046	500
97	64	65	1	0.00269	0.0302	0.38	500
98	49	66	1	0.018	0.0919	0.0248	500
99	49	66	2	0.018	0.0919	0.0248	500
100	62	66	1	0.0482	0.218	0.0578	175
101	62	67	1	0.0258	0.117	0.031	175
102	65	66	1	0	0.037	0	500
103	66	67	1	0.0224	0.1015	0.02682	175
104	65	68	1	0.00138	0.016	0.638	500
105	47	69	1	0.0844	0.2778	0.07092	175
106	49	69	1	0.0985	0.324	0.0828	175
107	68	69	1	0	0.037	0	500
108	69	70	1	0.03	0.127	0.122	500
109	24	70	1	0.00221	0.4115	0.10198	175
110	70	71	1	0.00882	0.0355	0.00878	175
111	24	72	1	0.0488	0.196	0.0488	175
112	71	72	1	0.0446	0.18	0.04444	175
113	71	73	1	0.00866	0.0454	0.01178	175
114	70	74	1	0.0401	0.1323	0.03368	175
115	70	75	1	0.0428	0.141	0.036	175
116	69	75	1	0.0405	0.122	0.124	500
117	74	75	1	0.0123	0.0406	0.01034	175
118	76	77	1	0.0444	0.148	0.0368	175
119	69	77	1	0.0309	0.101	0.1038	175
120	75	77	1	0.0601	0.1999	0.04978	175
121	77	78	1	0.00376	0.0124	0.01264	175

122	78	79	1	0.00546	0.0244	0.00648	175
123	77	80	1	0.017	0.0485	0.0472	500
124	77	80	2	0.0294	0.105	0.0228	500
125	79	80	1	0.0156	0.0704	0.0187	175
126	68	81	1	0.00175	0.0202	0.808	500
127	81	80	1	0	0.037	0	500
128	77	82	1	0.0298	0.0853	0.08174	200
129	82	83	1	0.0112	0.03665	0.03796	200
130	83	84	1	0.0625	0.132	0.0258	175
131	83	85	1	0.043	0.148	0.0348	175
132	84	85	1	0.0302	0.0641	0.01234	175
133	85	86	1	0.035	0.123	0.0276	500
134	86	87	1	0.02828	0.2074	0.0445	500
135	85	88	1	0.02	0.102	0.0276	175
136	85	89	1	0.0239	0.173	0.047	175
137	88	89	1	0.0139	0.0712	0.01934	500
138	89	90	1	0.0518	0.188	0.0528	500
139	89	90	2	0.0238	0.0997	0.106	500
140	90	91	1	0.0254	0.0836	0.0214	175
141	89	92	1	0.0099	0.0505	0.0548	500
142	89	92	2	0.0393	0.1581	0.0414	500
143	91	92	1	0.0387	0.1272	0.03268	175
144	92	93	1	0.0258	0.0848	0.0218	175
145	92	94	1	0.0481	0.158	0.0406	175
146	93	94	1	0.0223	0.0732	0.01876	175
147	94	95	1	0.0132	0.0434	0.0111	175
148	80	96	1	0.0356	0.182	0.0494	175
149	82	96	1	0.0162	0.053	0.0544	175
150	94	96	1	0.0269	0.0869	0.023	175
151	80	97	1	0.0183	0.0934	0.0254	175
152	80	98	1	0.0238	0.108	0.0286	175
153	80	99	1	0.0454	0.206	0.0546	200
154	92	100	1	0.0648	0.295	0.0472	175
155	94	100	1	0.0178	0.058	0.0604	175
156	95	96	1	0.0171	0.0547	0.01474	175
157	96	97	1	0.0173	0.0885	0.024	175
158	98	100	1	0.0397	0.179	0.0476	175
159	99	100	1	0.018	0.0813	0.0216	175
160	100	101	1	0.0277	0.1262	0.0328	175
161	92	102	1	0.0123	0.0559	0.01464	175
162	101	102	1	0.0246	0.112	0.0294	175
163	100	103	1	0.016	0.0525	0.0536	500
164	100	104	1	0.0451	0.204	0.0541	175
165	103	104	1	0.0466	0.1584	0.0407	175
166	103	105	1	0.0535	0.1625	0.0408	175
167	100	106	1	0.0605	0.229	0.062	175
168	104	105	1	0.00994	0.0378	0.00986	175
169	105	106	1	0.014	0.0547	0.01434	175
170	105	107	1	0.053	0.183	0.0472	175
171	105	108	1	0.0261	0.0703	0.01844	175
172	106	107	1	0.053	0.183	0.0472	175
173	108	109	1	0.0105	0.0288	0.0076	175
174	103	110	1	0.03906	0.1813	0.0461	175
175	109	110	1	0.0278	0.0762	0.0202	175
176	110	111	1	0.022	0.0755	0.02	175
177	110	112	1	0.0247	0.064	0.062	175
178	17	113	1	0.00913	0.0301	0.00768	175
179	32	113	1	0.0615	0.203	0.0518	500
180	32	114	1	0.0135	0.0612	0.01628	175
181	27	115	1	0.0164	0.0741	0.01972	175
182	114	115	1	0.0023	0.0104	0.00276	175
183	68	116	1	0.00034	0.00405	0.164	500
184	12	117	1	0.0329	0.14	0.0358	175
185	75	118	1	0.0145	0.0481	0.01198	175
186	76	118	1	0.0164	0.0544	0.01356	175



❖ **Matrice des branches (rlc) dans la fonction « power\_statespace » de MATLAB**

Donnés de base : S = 1MVA, V = 1KV.

Hypothèses : tous les transformateurs ont un rapport de transformation de 1. Pas de charge. Pas de générateur.

1	2	0	0.0303	0.0999	0
1	3	0	0.0129	0.0424	0
4	5	0	0.00176	0.00798	0
3	5	0	0.0241	0.108	0
5	6	0	0.0119	0.054	0
6	7	0	0.00459	0.0208	0
8	9	0	0.00244	0.0305	0
8	5	0	0.00001	0.0267	0
9	10	0	0.00258	0.0322	0
4	11	0	0.0209	0.0688	0
5	11	0	0.0203	0.0682	0
11	12	0	0.00595	0.0196	0
2	12	0	0.0187	0.0616	0
3	12	0	0.0484	0.16	0
7	12	0	0.00862	0.034	0
11	13	0	0.02225	0.0731	0
12	14	0	0.0215	0.0707	0
13	15	0	0.0744	0.2444	0
14	15	0	0.0595	0.195	0
12	16	0	0.0212	0.0834	0
15	17	0	0.0132	0.0437	0
16	17	0	0.0454	0.11601	0
17	18	0	0.0123	0.0505	0
18	19	0	0.01119	0.0493	0
19	20	0	0.0252	0.117	0
15	19	0	0.012	0.0394	0
20	21	0	0.0183	0.0849	0
21	22	0	0.0209	0.097	0
22	23	0	0.0342	0.159	0
23	24	0	0.0135	0.0492	0
23	25	0	0.0156	0.08	0
26	25	0	0.00001	0.0382	0
25	27	0	0.0318	0.163	0
27	28	0	0.01913	0.0855	0
28	29	0	0.0237	0.0943	0
30	17	0	0.00001	0.0388	0
8	30	0	0.00431	0.0504	0
26	30	0	0.00799	0.086	0
17	31	0	0.0474	0.1563	0
29	31	0	0.0108	0.0331	0
23	32	0	0.0317	0.1153	0
31	32	0	0.0298	0.0985	0
27	32	0	0.0229	0.0755	0
15	33	0	0.038	0.1244	0
19	34	0	0.0752	0.247	0
35	36	0	0.00224	0.0102	0
35	37	0	0.011	0.0497	0
33	37	0	0.0415	0.142	0
34	36	0	0.00871	0.0268	0
34	37	0	0.00256	0.0094	0
38	37	0	0.00001	0.0375	0
37	39	0	0.0321	0.106	0
37	40	0	0.0593	0.168	0
30	38	0	0.00464	0.054	0
39	40	0	0.0184	0.0605	0
40	41	0	0.0145	0.0487	0
40	42	0	0.0555	0.183	0

41	42	0	0.041	0.135	0
43	44	0	0.0608	0.2454	0
34	43	0	0.0413	0.1681	0
44	45	0	0.0224	0.0901	0
45	46	0	0.04	0.1356	0
46	47	0	0.038	0.127	0
46	48	0	0.0601	0.189	0
47	49	0	0.0191	0.0625	0
42	49	0	0.0715	0.323	0
42	49	0	0.0715	0.323	0
45	49	0	0.0684	0.186	0
48	49	0	0.0179	0.0505	0
49	50	0	0.0267	0.0752	0
49	51	0	0.0486	0.137	0
51	52	0	0.0203	0.0588	0
52	53	0	0.0405	0.1635	0
53	54	0	0.0263	0.122	0
49	54	0	0.073	0.289	0
49	54	0	0.0869	0.291	0
54	55	0	0.0169	0.0707	0
54	56	0	0.00275	0.00955	0
55	56	0	0.00488	0.0151	0
56	57	0	0.0343	0.0966	0
50	57	0	0.0474	0.134	0
56	58	0	0.0343	0.0966	0
51	58	0	0.0255	0.0719	0
54	59	0	0.0503	0.2293	0
56	59	0	0.0825	0.251	0
56	59	0	0.01603	0.239	0
55	59	0	0.04739	0.2158	0
59	60	0	0.0317	0.145	0
59	61	0	0.0328	0.15	0
60	61	0	0.00264	0.0135	0
60	62	0	0.0123	0.0561	0
61	62	0	0.00824	0.0376	0
63	59	0	0.00001	0.0386	0
63	64	0	0.00172	0.02	0
64	61	0	0.00001	0.0268	0
38	65	0	0.00901	0.0986	0
64	65	0	0.00269	0.0302	0
49	66	0	0.018	0.0919	0
49	66	0	0.018	0.0919	0
62	66	0	0.0482	0.218	0
62	67	0	0.0258	0.117	0
65	66	0	0.00001	0.037	0
66	67	0	0.0224	0.1015	0
65	68	0	0.00138	0.016	0
47	69	0	0.0844	0.2778	0
49	69	0	0.0985	0.324	0
68	69	0	0.00001	0.037	0
69	70	0	0.03	0.127	0
24	70	0	0.00221	0.4115	0
70	71	0	0.00882	0.0355	0
24	72	0	0.0488	0.196	0
71	72	0	0.0446	0.18	0
71	73	0	0.00866	0.0454	0
70	74	0	0.0401	0.1323	0

70	75	0	0.0428	0.141	0
69	75	0	0.0405	0.122	0
74	75	0	0.0123	0.0406	0
76	77	0	0.0444	0.148	0
69	77	0	0.0309	0.101	0
75	77	0	0.0601	0.1999	0
77	78	0	0.00376	0.0124	0
78	79	0	0.00546	0.0244	0
77	80	0	0.017	0.0485	0
77	80	0	0.0294	0.105	0
79	80	0	0.0156	0.0704	0
68	81	0	0.00175	0.0202	0
81	80	0	0.00001	0.037	0
77	82	0	0.0298	0.0853	0
82	83	0	0.0112	0.03665	0
83	84	0	0.0625	0.132	0
83	85	0	0.043	0.148	0
84	85	0	0.0302	0.0641	0
85	86	0	0.035	0.123	0
86	87	0	0.02828	0.2074	0
85	88	0	0.02	0.102	0
85	89	0	0.0239	0.173	0
88	89	0	0.0139	0.0712	0
89	90	0	0.0518	0.188	0
89	90	0	0.0238	0.0997	0
90	91	0	0.0254	0.0836	0
89	92	0	0.0099	0.0505	0
89	92	0	0.0393	0.1581	0
91	92	0	0.0387	0.1272	0
92	93	0	0.0258	0.0848	0
92	94	0	0.0481	0.158	0
93	94	0	0.0223	0.0732	0
94	95	0	0.0132	0.0434	0
80	96	0	0.0356	0.182	0
82	96	0	0.0162	0.053	0
94	96	0	0.0269	0.0869	0
80	97	0	0.0183	0.0934	0
80	98	0	0.0238	0.108	0
80	99	0	0.0454	0.206	0
92	100	0	0.0648	0.295	0
94	100	0	0.0178	0.058	0
95	96	0	0.0171	0.0547	0
96	97	0	0.0173	0.0885	0
98	100	0	0.0397	0.179	0
99	100	0	0.018	0.0813	0
100	101	0	0.0277	0.1262	0
92	102	0	0.0123	0.0559	0
101	102	0	0.0246	0.112	0
100	103	0	0.016	0.0525	0
100	104	0	0.0451	0.204	0
103	104	0	0.0466	0.1584	0
103	105	0	0.0535	0.1625	0
100	106	0	0.0605	0.229	0
104	105	0	0.00994	0.0378	0
105	106	0	0.014	0.0547	0
105	107	0	0.053	0.183	0
105	108	0	0.0261	0.0703	0
106	107	0	0.053	0.183	0
108	109	0	0.0105	0.0288	0
103	110	0	0.03906	0.1813	0
109	110	0	0.0278	0.0762	0
110	111	0	0.022	0.0755	0
110	112	0	0.0247	0.064	0
17	113	0	0.00913	0.0301	0
32	113	0	0.0615	0.203	0
32	114	0	0.0135	0.0612	0
27	115	0	0.0164	0.0741	0
114	115	0	0.0023	0.0104	0

68	116	0	0.00034	0.00405	0
12	117	0	0.0329	0.14	0
75	118	0	0.0145	0.0481	0
76	118	0	0.0164	0.0544	0
1	0	1	0	0	65.89576026
2	0	1	0	0	51.49165515
3	0	1	0	0	76.13162564
4	0	1	0	0	266.6993571
5	0	1	0	0	319.53269018
6	0	1	0	0	125.97220451
7	0	1	0	0	148.1173289
8	0	1	0	0	1.403060245
9	0	1	0	0	0.836796664
10	0	1	0	0	0.406504065
11	0	1	0	0	183.62686434
12	0	1	0	0	265.79572445
13	0	1	0	0	34.629478195
14	0	1	0	0	37.493199015
15	0	1	0	0	94.3577492
16	0	1	0	0	34.09409972
17	0	1	0	0	138.14717621
18	0	1	0	0	82.30363837
19	0	1	0	0	117.977703525
20	0	1	0	0	39.92667164
21	0	1	0	0	43.4733514
22	0	1	0	0	32.70144088
23	0	1	0	0	32.46600991
24	0	1	0	0	25.188984432
25	0	1	0	0	8.621509155
26	0	1	0	0	0.550665793
27	0	1	0	0	77.29812483
28	0	1	0	0	44.15655151
29	0	1	0	0	81.24936721
30	0	1	0	0	2.708262562
31	0	1	0	0	92.6926109
32	0	1	0	0	90.50847368
33	0	1	0	0	29.3155541
34	0	1	0	0	158.584088725
35	0	1	0	0	224.50343127
36	0	1	0	0	274.5953332
37	0	1	0	0	132.83376284
38	0	1	0	0	1.662850596
39	0	1	0	0	50.73501337
40	0	1	0	0	95.76740078
41	0	1	0	0	55.451414
42	0	1	0	0	36.89240444
43	0	1	0	0	20.071466435
44	0	1	0	0	30.561375835
45	0	1	0	0	48.6429308
46	0	1	0	0	41.47624612
47	0	1	0	0	54.045052045
48	0	1	0	0	50.33884832
49	0	1	0	0	195.093256395
50	0	1	0	0	41.74113745
51	0	1	0	0	78.40070777
52	0	1	0	0	48.13795947
53	0	1	0	0	28.45037282
54	0	1	0	0	131.173105295
55	0	1	0	0	167.298141985
56	0	1	0	0	261.43386904
57	0	1	0	0	35.721398
58	0	1	0	0	48.62536285
59	0	1	0	0	61.51721086
60	0	1	0	0	81.69847719
61	0	1	0	0	98.24767043
62	0	1	0	0	109.85990495
63	0	1	0	0	2.314819815
64	0	1	0	0	3.630609289

65	0	1	0	0	2.577505007
66	0	1	0	0	67.61590857
67	0	1	0	0	34.77183614
68	0	1	0	0	4.451296429
69	0	1	0	0	26.036424155
70	0	1	0	0	94.683385588
71	0	1	0	0	110.64355505
72	0	1	0	0	21.49702676
73	0	1	0	0	42.44482173
74	0	1	0	0	63.20150512
75	0	1	0	0	118.057467885
76	0	1	0	0	50.46011286
77	0	1	0	0	106.645069799
78	0	1	0	0	116.71745588
79	0	1	0	0	103.89846177
80	0	1	0	0	115.70754133
81	0	1	0	0	0.618816881
82	0	1	0	0	28.479892425
83	0	1	0	0	46.9194208
84	0	1	0	0	59.89848354
85	0	1	0	0	101.7566366
86	0	1	0	0	29.35189709
87	0	1	0	0	11.23595506
88	0	1	0	0	43.96909612
89	0	1	0	0	71.879512342
90	0	1	0	0	37.551164082
91	0	1	0	0	38.66436358
92	0	1	0	0	116.49853645
93	0	1	0	0	49.58823185
94	0	1	0	0	114.030044155
95	0	1	0	0	78.96634763
96	0	1	0	0	95.80640032
97	0	1	0	0	40.51837271
98	0	1	0	0	27.98671917
99	0	1	0	0	32.30565731
100	0	1	0	0	94.40263682
101	0	1	0	0	32.25070516
102	0	1	0	0	51.15980819
103	0	1	0	0	44.71425945
104	0	1	0	0	72.237095615
105	0	1	0	0	135.5405324
106	0	1	0	0	53.52523996
107	0	1	0	0	21.18644068
108	0	1	0	0	92.90444116
109	0	1	0	0	90.54194895
110	0	1	0	0	68.66297837
111	0	1	0	0	25
112	0	1	0	0	8.06451613
113	0	1	0	0	74.756676305
114	0	1	0	0	211.87195102
115	0	1	0	0	206.51438988
116	0	1	0	0	3.048780488
117	0	1	0	0	13.96648045
118	0	1	0	0	78.60938339

## TABLES DES ILLUSTRATIONS

Figure 1-1. Les parties essentielles d'un réseau électrique.....	6
Figure 1-2. Echelles temporelles des différents phénomènes physiques dans un réseau .....	9
Figure 1-3. Modélisation du réseau externe par la méthode TLNE .....	13
Figure 1-4. Admittance entrée du réseau externe.....	14
Figure 2-1. Exemples de structures fractales à différentes itérations $i$ .....	22
Figure 2-2. Comparaison entre dimension topologique et dimension fractale (Kaye, 1994). .....	24
Figure 2-3. Mesure d'un objet en fonction de la dimension.....	25
Figure 2-4. Exemple de différentes formes géométriques et valeurs de leur dimension fractale déduite par la méthode de boîte (Landini, Murray, & Misson, 1995).....	28
Figure 2-5. Ensemble de Cantor .....	29
Figure 2-6. Triangle de Sierpinski .....	29
Figure 2-7. Illustration de la méthode de croissance d'une boule sur un objet (Landini, Murray, & Misson, 1995).....	30
Figure 3-1. Ensemble de Cantor .....	36
Figure 3-2. Réseau électrique de Cantor.....	37
Figure 3-3. Méthode de croissance d'une boule appliquée au réseau de Cantor. ....	38
Figure 3-4. Renormalisation du réseau électrique de Cantor .....	39
Figure 3-5. Zoom sur la décimation du réseau de Cantor .....	40
Figure 3-6. Réponse fréquentielle du réseau électrique de Cantor .....	41
Figure 3-7. Tamis de Sierpinski pour différents facteurs d'échelle $b$ . (Chaque figure présente de gauche à droite le motif initiateur, le motif générateur puis la combinaison des deux à l'itération suivante) .....	42
Figure 3-8. Motif initiateur du réseau de Sierpinski.....	43
Figure 3-9. Etapes de la construction du réseau de Sierpinski.....	43
Figure 3-10. Méthode de croissance d'une boule appliquée au réseau de Sierpinski .....	44
Figure 3-11. Renormalisation du réseau de Sierpinski.....	47
Figure 3-12. Réponse fréquentielle du réseau de Sierpinski avant et après décimation.....	48
Figure 3-13. Comportements dynamiques du réseau Sierpinski de .....	49

---

Figure 3-14. Distribution des modes du réseau de Sierpinski. ....	50
Figure 4-1. Topologie du réseau IEEE 37 nœuds. ....	52
Figure 4-2. Découpage en niveaux du réseau IEEE 37 nœuds ....	53
Figure 4-3. Distribution nodale des rayons ....	54
Figure 4-4. Rayon calculé pour chaque niveau du réseau IEEE 37 nœuds .....	54
Figure 4-5. Dimension fractale du réseau IEEE 37 nœuds avec un coefficient de détermination supérieur à 0.97 .....	56
Figure 4-6. Dimension fractale du réseau IEEE 37 nœuds pour un coefficient de détermination égal à 0.99 .....	56
Figure 4-7. Distribution des modes du réseau IEEE 37 nœuds .....	57
Figure 4-8. Identification la dimension spectrale du réseau IEEE 37 nœuds.....	58
Figure 4-9. Topologie du réseau IEEE 118 nœuds. ....	59
Figure 4-10. Dimension fractale du réseau IEEE 118 nœuds .....	60
Figure 4-11. Dimension fractale du réseau IEEE 118 nœuds .....	60
Figure 4-12. Distribution modale du réseau IEEE 118 nœuds.....	61
Figure 4-13. Dimension spectrale du réseau IEEE 118 nœuds.....	61
Figure 5-1. Topologie du réseau de Sierpinski d'étude .....	67
Figure 5-2. Impédance d'entrée du réseau de Sierpinski. ....	67
Figure 5-3. Distribution des modes et des pôles du réseau de Sierpinski.....	67
Figure 5-4. Modèle asymptotique aux hautes fréquences.....	68
Figure 5-5. Réseau équivalent aux basses fréquences.....	69
Figure 5-6. Modèle asymptotique aux basses fréquences.....	69
Figure 5-7. Décimation du réseau de Sierpinski.....	70
Figure 5-8. Modèle asymptotique aux fréquences intermédiaires (courbe bleu). .....	76
Figure 5-9. Modèle asymptotique du réseau de Sierpinski pour 3 échelles différentes.....	77
Figure 5-10. Relation entre réponses asymptotiques et distributions des modes. .....	78
Figure 6-1. Distributions des pôles initiaux et identifiés du réseau IEEE 37 nœuds.....	83
Figure 6-2. Réponse fréquentielle identifiée du réseau IEEE 37 nœuds. ....	84
Figure 6-3. Distribution des 50 pôles initiaux et des pôles identifiés du réseau IEEE 118 nœuds.....	85
Figure 6-4. Réponse fréquentielle identifiée avec 50 pôles initiaux du réseau IEEE 118 nœuds.....	86
Figure 6-5. Réponse fréquentielle identifiée avec 70 pôles initiaux du réseau IEEE 118 nœuds.....	86
Figure 6-6. Modèle asymptotique du réseau IEEE 37 nœuds.....	88
Figure 6-7. Modèle asymptotique du réseau IEEE 118 nœuds.....	89

---

---

Figure 6-8. Partie résonante de la réponse fréquentielle du réseau IEEE 37 nœuds.....	89
Figure 6-9. Partie résonante de la réponse fréquentielle du réseau IEEE 118 nœuds.....	90
Figure 6-10. Comparaison entre la distribution des modes et des pôles.....	91
Figure 6-11. Distribution des pôles et réponse fréquentielle résonante du réseau IEEE 37 nœuds. ....	91
Figure 6-12. Distributions des pôles initiaux et identifiés avec la méthode « vector fitting » du réseau IEEE 37 nœuds.....	92
Figure 6-13. Modélisation des résonances par « vector fitting » pour le réseau IEEE 37 nœuds. ....	93
Figure 6-14. Distribution des pôles initiaux et identifiés par « vector fitting » du réseau IEEE 118 nœuds.....	93
Figure 6-15. Modélisation des résonances par la méthode « vector fitting » pour le réseau IEEE 118 nœuds.....	94
Figure 6-16. Modèle dynamique complet du réseau IEEE 37 nœuds .....	94
Figure 6-17. Erreur absolue entre le modèle et la réponse simulée du réseau IEEE 37 nœuds. ....	95
Figure 6-18. Modèle dynamique complet du réseau IEEE 118 nœuds .....	95
Figure 6-19. Erreur absolue entre le modèle et la réponse simulée du réseau IEEE 118 nœuds.....	96
Figure 6-20. Liens entre les descriptions d'un système dynamique. ....	114
Figure 6-21. Exemple d'une ligne électrique. ....	116
Figure 6-22. Impédance d'entrée d'une ligne électrique en $\pi$ .....	117

---



---

## TABLES DES TABLEAUX

Tableau 3-1. Résultats de la croissance d'une boule pour le réseau de Cantor...	38
Tableau 3-2. Résultats de la méthode de croissance d'une boule pour le réseau de Sierpinski.....	45
Tableau 3-3. Coefficient $K$ du réseau de Sierpinski.....	45
Tableau 4-1. Application de la méthode de croissance d'une boule au réseau 37 nœuds.....	55
Tableau 5-1. Expressions analytiques des termes de la matrice $Y_{bus}$ avec $(y_h(j\omega) = 1/j\omega L ; y_v(j\omega) = j\omega C)$ .....	72
Tableau 6-1. Convergence de l'identification pour le réseau IEEE 37 nœuds.....	84
Tableau 6-2. Convergence de l'identification avec 50 pôles initiaux pour le réseau IEEE 118 nœuds.....	85
Tableau 6-3. Convergence de l'identification avec 70 pôles initiaux pour le réseau IEEE 118 nœuds.....	86
Tableau 6-4. Résultat de l'identification du réseau IEEE 37 nœuds.....	92
Tableau 6-5. Résultat de l'identification du réseau IEEE 118 nœuds.....	93
Tableau 6-6. Tableau de synthèse des caractéristiques des modèles.....	97





# Publications

---

- ✚ Thi-Tinh-Minh LE, Nicolas RETIERE, *Using Scale Invariance for Wide-Band Frequency Modeling of Power Systems*, IEEE PES Grenoble, 2013.

**Abstract**

This paper presents a new wide-band frequency model based on scale invariance. Self-similarities observed in power systems are mathematically translated by power laws whose exponents are linked to spectral dimension. This parameter is an expression of the topological properties of the network. Power laws are used for obtaining a wide-band frequency dependent network equivalent. Application to an IEEE test distribution feeder is shown.

- ✚ Thi-Tinh-Minh LE, Nicolas RETIERE, *Exploring the Scale-Invariant Structure of Smart Grids*, IEEE Transaction System, submitted.

**Abstract**

Smart grids are new complex systems used for an optimal delivery of electricity. Their study and design require a better understanding of the interactions between their topological structure and their performances. It is proved that structure of power systems are self-similar and can be characterized by spectral dimension. Effects of scale invariance on the dynamic response are shown at intermediate frequencies. Two IEEE test cases are used for numerical verifications of the results.

- ✚ Thi-Tinh-Minh LE, Nicolas RETIERE, *DYNAMIC EQUIVALENT OF POWER SYSTEMS BASED ON SCALE INVARIANCE FOR SMART GRID SIMULATION*, Electrimacs 2014, accepted.

**Abstract**

Smart Grid is a complex multilevel network resulting from the interconnection of power systems and information and communication networks. In order to improve Smart Grid simulation, a new modelling approach for obtaining dynamic network equivalent is presented. It is based on scale invariance. A strong link between scale invariant topology of power networks and their dynamic performances is shown through a parameter called "spectral dimension". Using this parameter, it is possible to build and identify an improved dynamic equivalent of the grid. Application to an IEEE test feeder is finally shown.