Des poutres flexibles aux fils extensibles: une hiéerarchie de modèles asymptotiques

Jean-Jacques Marigo, Hamid Ghidouche, Subir Zedkaoui

Projet de Note aux C.R.A.S. Paris, Série II b **Soumise le 7 novembre 1997**
Mécanique des solides et des structures

Des poutres flexibles aux fils extensibles : une hiérarchie de modèles asymptotiques

(*Titre courant* : **Des poutres flexibles aux fils extensibles**)

From flexible beams to extensible strings : a hierarchy of asymptotic models

Jean-Jacques MARIGO[1], Hamid GHIDOUCHE[2] et Zubir SEDKAOUI[2]

[1]LPMTM, [2]LAGA, Institut Galilée, Université Paris-Nord, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse
E-mail : [1] marigo@lpmtm.univ-paris13.fr, [2] ghidouch@math.univ-paris13.fr
Fax : 01 49 40 39 38 Tel : 01 49 40 35 02

Résumé On s'intéresse à des *cylindres* élastiques (homogènes, isotropes) *élancés* soumis à des *charges conservatives* d'intensité *variable.* En se plaçant dans le cadre de l'élastostatique non linéaire (en grands déplacements), on construit, à l'aide de techniques de développements asymptotiques et suivant l'ordre de grandeur des forces appliquées, une hiérarchie de *cinq* modèles asymptotiques unidimensionnels allant de la théorie linéaire des poutres fléchies à celle des fils extensibles.

Mots clés : Élasticité non linéaire, théorie des poutres, développements asymptotiques

Abstract We consider *slender* (homogeneous, isotropic) elastic *cylinders* submitted to *conservative forces* the intensity of which is a *parameter.* In the framework of the nonlinear three dimensional theory of elastostatic, by using asymptotic expansions methods, we obtain a hierarchy — depending on the order of magnitude of the applied forces — of *five* asymptotic unidimensional models, starting from the linear theory of flexible beams to the nonlinear theory of extensible strings.

Keywords : Nonlinear elasticity, beams theory, asymptotic expansions

Abridged English Version

Let $\hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\mathbf{S}} \times (0, L)$ be the natural reference configuration of an elastic isotropic homogeneous body, where $\hat{\mathbf{S}}$ denotes its cross section whose geometric center is $(0,0)$ and whose outer radius is R. This body is slender in the sense that its natural length L can be considered large in comparison to R and then the slenderness parameter $\varepsilon = R/L$ small with respect to 1. Its elastic properties are given by the elastic potential $\hat{W}$ from which derives the relation between Piola-Kirchhoff's first stress tensor $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ and the deformation gradient $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}} = \hat{W}'(\hat{\mathbf{F}})$. The section $\hat{\mathbf{S}} \times \{0\}$ is clamped, while, anywhere else, the body is submitted to a system of body or surface conservative forces the potential of which is $\hat{\mathcal{F}}$. The research of stable equilibrium configuration of this body leads then to the minimization of the potential energy $\hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\hat{\mathbf{\Omega}}} \hat{W}(\mathbf{I} + \hat{\nabla}\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}))\, d\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathbf{v}})$ on the set $\hat{\mathcal{C}}$ of the admissible configurations. This problem is re-written by introducing variables and quantities without physical dimension. Denoting by E the usual Young modulus — which characterizes the elastic material behavior in the small strain range — and by F the norm of the applied forces, we consider the ratio $\eta = F/ER^2$ as the parameter characterizing the relative intensity of the loading. Assuming that this parameter is of the order of ε^n, that is $\eta = \bar{\eta}\varepsilon^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{\eta} > 0$, then the current problem leads to the following one, parameterized by ε, for given n and $\bar{\eta}$:

$$\textit{Find} \quad \mathbf{u}^\varepsilon \quad \textit{minimizing} \quad \mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{\Omega}} W(\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v})(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - \bar{\eta}\varepsilon^n \mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) \quad \textit{on} \quad \mathcal{C}^\varepsilon,$$

with $\mathbf{x} = (\hat{x}_1/R, \hat{x}_2/R, \hat{x}_3/L)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$, $W = \hat{W}/E$, $\mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) = \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathbf{v}})/FL$, while $\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v})$ is given by (1).

The asymptotic analysis of this problem, that is the study of the behavior of $\mathbf{u}^\varepsilon$ when ε tends to 0, is made under the following assumptions on the potential $\mathcal{F}^\varepsilon$:

1. $\mathcal{F}^\varepsilon$ admits the asymptotic expansion $\mathcal{F}^0 + \varepsilon\mathcal{F}^1 + \varepsilon^2\mathcal{F}^2 + \cdots$;

2. Let $\mathcal{C}_{fl} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(x_3), (V_1, V_2) \in H^2(0,1)^2, V_3 = 0, \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}'(0) = \mathbf{0}\}$. The restriction to $\mathcal{C}_{fl}$ of ${\mathcal{F}^0}'(\mathbf{0})$, derivative of $\mathcal{F}^0$ at $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, is not 0.

For a function f^ε that can be expanded as $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i f^i$, we call *order* of f^ε and denote it $\mathcal{O}(f^\varepsilon)$ the $\inf\{i \in \mathbb{Z} : f^i \neq 0\}$. Assuming that $\mathbf{u}^\varepsilon$ admits such an expansion with $\mathcal{O}(\mathbf{u}^\varepsilon) \geq 0$, we successively obtain :

1. The orders of magnitude. Following the value of n, the order of the displacements $\mathbf{u}^\varepsilon$, the strains $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$ (defined in (1)), the potential of the applied forces $\varepsilon^n\mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$, the elastic energy $\mathcal{W}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$ and the potential energy $\mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$ are given by the table 1. We note that the displacements are finite as soon as $n \leq 2$ — in fact, $\mathcal{O}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \max\{0; n-2\}$ — and that the elastic energy is negligible with respect to the potential of the applied forces when $n = 1$.

2. The forms of $\mathbf{u}^\varepsilon$. Then, the first term(s) of $\mathbf{u}^\varepsilon$'s expansion has(have) the simplified form(s) given in the table 2. In particular the fist term (denoted from now by $\mathbf{U}$) depends only on x_3, its third component vanishes when $n \geq 3$ and it is inextensional ($\|\mathbf{e}_3 + \mathbf{U}'\| = 1$) when $n = 1$ or 2.

3. The limit problems. The first term $\mathbf{U}$ is solution of a minimization problem depending on the value of n. In other words we obtain different asymptotic models :

- When $n \geq 3$, the slender elastic cylinder behaves like a linear flexible *beam*, see (3) ;
- When $n = 2$, we obtain the nonlinear model of an inextensible, flexible bar, see (4) ;
- When $n = 1$, the response of the slender elastic cylinder is like that of an inextensible *string*, see (5) ;
- Finally, when $n = 0$, we have to find the stable equilibrium of an extensible string the elastic potential of which is given by (6).

Présentation

Le problème réel. On considère un corps élastique occupant dans une configuration de référence naturelle le *cylindre* $\hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\mathbf{S}}\times(0, L)$, $\hat{\mathbf{S}}$ étant sa section (ouvert connexe) de centre $(0, 0)$ et de rayon extérieur R, L sa longueur. La section $\hat{\mathbf{S}}\times\{0\}$ est fixée à un support rigide fixe tandis que par ailleurs le corps est soumis à un système de forces (volumiques ou surfaciques) conservatives caractérisées par leur potentiel $\hat{\mathcal{F}}$. Le comportement élastique est donné par le potentiel $\hat{W}$ dont dérive la relation entre le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ et le tenseur gradient de la transformation $\hat{\mathbf{F}}$: $\hat{\mathbf{\Sigma}} = \hat{W}'(\hat{\mathbf{F}})$. Le tenseur de déformation de Green-Saint Venant est noté $\hat{\mathbf{E}}$: $2\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{F}}^T\hat{\mathbf{F}} - \mathbf{I}$. Les potentiels $\hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{W}$ possèdent les propriétés (classiques) suivantes :

1. $\hat{W}$ est régulier, non négatif, ne dépend en fait que de $\hat{\mathbf{E}}$, est nul en $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ et admet au voisinage de $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ le développement $2\hat{W}(\hat{\mathbf{F}}) = \lambda Tr(\hat{\mathbf{E}})^2 + 2\mu\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}} + o(\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}})$, avec $\mu > 0$ et $3\lambda + 2\mu > 0$, λ et μ étant les coefficients de Lamé usuels. On note E le module d'Young associé.

2. $\hat{\mathcal{F}}$ est une fonction définie sur l'ensemble $\hat{\mathcal{C}}$ des déplacements admissibles (*i.e.* ceux d'énergie élastique finie, vérifiant la condition d'encastrement en $\hat{\mathbf{S}} \times \{0\}$ et celle de "non-retournement" $\det \hat{\mathbf{F}} > 0$). Elle est régulière, nulle lorsque le corps est dans sa configuration de référence (*i.e.* pour le déplacement nul), sa dérivée en $\mathbf{0}$, notée $\hat{\mathcal{F}}'(\mathbf{0})$, est une forme linéaire continue *non nulle* sur l'ensemble des déplacements de $\mathbf{H}^1(\hat{\mathbf{\Omega}}; \mathbb{R}^3)$ vérifiant la condition d'encastrement. La norme de $\hat{\mathcal{F}}'(\hat{\mathbf{0}})$ est notée F.

3. $\hat{W}$ possède les "bonnes" propriétés de (poly- ou quasi-)convexité et de coercivité , et, $\hat{\mathcal{F}}$ celles de croissance à l'infini de façon à ce que l'existence de position(s) d'équilibre stable soit assurée.

On n'étudie que les configurations d'équilibre correspondant à un minimum *global* de l'énergie potentielle. Autrement dit on a à minimiser $\hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\hat{\mathbf{\Omega}}} \hat{W}(\mathbf{I} + \hat{\nabla}\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}))\, d\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathbf{v}})$ sur $\hat{\mathcal{C}}$.

Le problème paramétré. Afin de préparer l'étude asymptotique qui suit, on réécrit le problème en introduisant des grandeurs sans dimension dont deux, ε et η, caractérisant l'élancement du cylindre et l'intensité du chargement, sont prises comme paramètres :

1. A $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathbf{\Omega}}$ on associe $\mathbf{x} = (\hat{x}_1/R, \hat{x}_2/R, \hat{x}_3/L) \in \mathbf{\Omega} = \mathbf{S} \times (0,1)$, à $\hat{\mathbf{v}} : \hat{\mathbf{\Omega}} \to \mathbb{R}^3$ on associe $\mathbf{v} : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ par $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})/L$ et on introduit le *paramètre d'élancement* $\varepsilon = R/L$. Le gradient de la transformation $\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{v}})$ et le tenseur de déformation $\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{v}})$ associés à $\hat{\mathbf{v}}$ deviennent alors :

$$\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{I} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \quad \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \right), \qquad 2\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v})^T\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) - \mathbf{I}, \tag{1}$$

alors que l'ensemble $\hat{\mathcal{C}}$ des $\hat{\mathbf{v}}$ admissibles devient l'ensemble $\mathcal{C}^\varepsilon$ des $\mathbf{v}$ admissibles dont la dépendance en ε tient à la condition de non retournement $\det \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) \geq 0$.

2. Aux potentiels $\hat{W}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ on associe les potentiels W et $\mathcal{F}^\varepsilon$ (ce dernier dépendant en général de ε) par les relations : $W = \hat{W}/E$, $\mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) = \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathbf{v}})/FL$. En introduisant le *paramètre d'intensité des forces* $\eta = F/ER^2$, l'énergie potentielle $\hat{\mathcal{P}}(\hat{\mathbf{v}})$ peut s'écrire $ER^2L\mathcal{P}^{\varepsilon\eta}(\mathbf{v})$ avec $\mathcal{P}^{\varepsilon\eta}(\mathbf{v}) = \mathcal{W}^\varepsilon(\mathbf{v}) - \eta\mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{v})$ et $\mathcal{W}^\varepsilon(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{\Omega}} W(\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v})(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$. On s'est donc ramené à la recherche de $\mathbf{u}^{\varepsilon\eta} \in \mathcal{C}^\varepsilon$ minimisant $\mathcal{P}^{\varepsilon\eta}$, problème de minimisation paramétré par ε et η.

Analyse asymptotique

La démarche asymptotique. Le paramètre ε est supposé petit devant 1 et choisi comme infiniment petit de référence. Pour toute fonction f^ε développable en puissances entières relatives de ε, on appelle *ordre* de la fonction le plus petit entier relatif $\mathcal{O}(f^\varepsilon)$ dont le coefficient du développement est non nul : $f^\varepsilon = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i f^i$, $\mathcal{O}(f^\varepsilon) = \inf\{i \in \mathbb{Z} : f^i \neq 0\}$. On suppose que le potentiel $\mathcal{F}^\varepsilon$ admet un tel développement, et, quitte à renormaliser F, que $\mathcal{O}(\mathcal{F}^\varepsilon) = 0$. Afin d'éliminer les cas particuliers, on fait de plus une hypothèse supplémentaire sur le premier terme $\mathcal{F}^0$, hypothèse qui revient à supposer que les forces exercées travaillent dans des "petits" déplacements inextensionnels :

Hypothèse. *Soit* $\mathcal{C}_{fl} = \left\{\mathbf{v} : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(x_3), (V_1, V_2) \in H^2(0,1)^2, V_3 = 0, \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}'(0) = \mathbf{0}\right\}$. *On suppose que la restriction à* $\mathcal{C}_{fl}$ *de* ${\mathcal{F}^0}'(\mathbf{0})$*, dérivée de* $\mathcal{F}^0$ *en* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$*, n'est pas nulle.*

Le comportement de $\mathbf{u}^{\varepsilon\eta}$ au voisinage de $\varepsilon = 0$ dépend de manière essentielle de l'ordre de grandeur de η. L'objectif principal de l'étude est d'étudier cette dépendance. Comme on veut faire varier ce paramètre depuis 0 jusqu'à des valeurs arbitrairement grandes, on a à le comparer aux puissances de ε. On le considère donc comme une fonction donnée η^ε de ε. Ici on se limite au cas où η^ε est proportionnel à une puissance *entière* de ε, $\eta^\varepsilon = \bar{\eta}\varepsilon^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{\eta} > 0$, l'entier n et le réel $\bar{\eta}$ devenant les nouveaux *paramètres de chargement.* On notera qu'en n'envisageant que des valeurs positives de n, on renonce à étudier le cas des "grands" chargements. Pour n et $\bar{\eta}$ fixés, il s'agit donc d'étudier le comportement asymptotique, lorsque ε tend vers 0, de $\mathbf{u}^\varepsilon$ minimisant sur $\mathcal{C}^\varepsilon$:

$$\mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{v}) = -\int_{\mathbf{\Omega}} W(\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v})(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - \bar{\eta}\varepsilon^n \mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{v}). \tag{2}$$

On postule un développement de $\mathbf{u}^\varepsilon$ en puissances entières de ε, $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0 + \varepsilon\mathbf{u}^1 + \varepsilon^2\mathbf{u}^2 + \cdots$, et on cherche le(s) premier(s) terme(s) non nul(s) de son développement — c'est cette caractérisation des premiers termes que l'on appelle *modèle asymptotique.* Pour cela, on écrit le problème de minimisation (2) en envisageant des champs admissibles réguliers $\mathbf{v}^\varepsilon$ développables en puissances entières de ε : $\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{v}^0 + \varepsilon\mathbf{v}^1 + \varepsilon^2\mathbf{v}^2 + \cdots$.

Les ordres de grandeur. La première étape consiste à évaluer les ordres des différentes énergies associées à de tels $\mathbf{v}^\varepsilon$. Grâce à l'hypothèse sur $\mathcal{F}^0$, on peut choisir des $\mathbf{v}^\varepsilon$ tels que $\mathcal{O}(\varepsilon^n\mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon)) = \mathcal{O}(\mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon)) = n + \max\{0; n-2\}$ et $\mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) < 0$. Pour l'optimum $\mathbf{u}^\varepsilon$, on en déduit finalement le tableau des ordres de grandeur suivant :

n	$\mathcal{O}(\mathbf{u}^\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon))$	$\mathcal{O}(\varepsilon^n\mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon))$	$\mathcal{O}(\mathcal{W}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon))$	$\mathcal{O}(\mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon))$
$n \geq 2$	$n-2$	$n-1$	$2n-2$	$2n-2$	$2n-2$
1	0	1	1	2	1
0	0	0	0	0	0

Tableau 1. Ordre des grandeurs suivant l'intensité du chargement.
Table 1. Orders of magnitude versus the order of magnitude of the loading.

On note que les déplacements sont d'ordre 0 dès que le chargement est d'ordre inférieur ou égal à 2, et, que l'énergie élastique est toujours du même ordre que l'énergie potentielle *sauf* quand $n = 1$ où elle est négligeable.

La forme des déplacements optimaux. Pour que les déformations soient de l'ordre indiqué, il faut que le(s) premier(s) terme(s) du développement des déplacements soi(en)t d'une forme dont on donne les principales caractéristiques dans le tableau 2 ci-dessous.

n	*Forme de* $\mathbf{u}^p$(*et de* $\mathbf{u}^{p+1}$), $p = \max\{0; n-2\}$
0	$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(x_3)$
1 *ou* 2	$\begin{cases} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(x_3), \quad \mathbf{U}'(x_3) = (\mathbf{R}(x_3) - \mathbf{I})\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{R}(x_3) \textit{ matrice de rotation} \\ \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{U}}(x_3) + (\mathbf{R}(x_3) - \mathbf{I})(\mathbf{x} - x_3\mathbf{e}_3) \end{cases}$
$n \geq 3$	$\begin{cases} \mathbf{u}^{n-2}(\mathbf{x}) = U_1(x_3)\mathbf{e}_1 + U_2(x_3)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{U}}(x_3) + \omega(x_3)\mathbf{e}_3{}_\wedge\mathbf{x} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{U}'(x_3) \end{cases}$

Tableau 2. Propriétés des premiers termes du développement de $\mathbf{u}^\varepsilon$.
Table 2. Properties of the first terms of $\mathbf{u}^\varepsilon$*'s expansion.*

On notera que U_3 est nul dès que $n \geq 3$ et que $\mathbf{U}$ correspond à un déplacement *inextensionnel* quand $n = 1$ *ou* 2.

Les premiers termes du développement. Pour déterminer le premier terme non nul $\mathbf{U}$ du développement de $\mathbf{u}^\varepsilon$ et éventuellement le(s) suivant(s), on envisage des champs $\mathbf{v}^\varepsilon$ de la même forme que $\mathbf{u}^\varepsilon$. Pour un tel champ, les homologues à $\mathbf{U}$, $\bar{\mathbf{U}}$, $\mathbf{R}$ et ω (cf Tableau 2) sont notés respectivement $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$, $\mathbf{Q}$ et ϕ. Son énergie potentielle $\mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon)$ est d'un ordre au moins égal à $r = n + \max\{0; n-2\} = \mathcal{O}\left(\mathcal{P}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)\right)$ et le terme d'ordre r de son développement, noté $\mathcal{P}^r[\mathbf{v}^\varepsilon]$, dépend des deux ou trois premiers termes du développement de $\mathbf{v}^\varepsilon$. En le minimisant, on obtient le(s) premier(s) terme(s) du développement de $\mathbf{u}^\varepsilon$. Les principaux résultats sont présentés ci-dessous, suivant les valeurs de n.

1. $\mathbf{n} \geq \mathbf{4}$. Alors $r = 2n-2$, les déplacements et les déformations sont petits, le potentiel des forces n'intervient que par sa dérivée en $\mathbf{0}$, l'énergie élastique que par son développement au voisinage de $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ et $\mathcal{P}^{2n-2}[\mathbf{v}^\varepsilon]$ dépend de $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$, ϕ et $\mathbf{v}^n$. La minimisation par rapport à $\mathbf{v}^n$ conduit aux (classiques) problèmes de Saint Venant de flexion, extension et torsion, cf [Geymonat *et al.*, 1987]. La minimisation par rapport à $\bar{\mathbf{V}}$ et ϕ fournit $\bar{U}_3 = 0$ et $\omega = 0$, $\bar{U}_1$ et $\bar{U}_2$ restant indéterminés. Enfin, en introduisant la matrice d'inertie géométrique $\mathbf{J}$ de composantes $J_{\alpha\beta} = \int_{\mathbf{S}} x_\alpha x_\beta dx_1 dx_2$, ($\alpha$, $\beta = 1$ ou 2), on montre que $\mathbf{U}$ minimise sur $\mathcal{C}_{fl}$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 J_{\alpha\beta} V_\alpha''(x_3) V_\beta''(x_3) dx_3 - \bar{\eta}\mathcal{F}^{0'}(\mathbf{0})(\mathbf{V}). \tag{3}$$

On reconnaît dans ce problème linéaire les équations régissant la déflexion d'une poutre élastique sous l'hypothèse de Navier-Bernoulli de petits déplacements inextensionnels.

2. $\mathbf{n} = \mathbf{3}$. Les résultats sont identiques si ce n'est qu'ici $\bar{U}_3(x_3) = -\frac{1}{2}\int_0^{x_3} \mathbf{U}'(z)\cdot\mathbf{U}'(z)dz$.

3. $\mathbf{n} = \mathbf{2}$. Alors $r = 2$, les déplacements sont finis, les déformations sont petites et $\mathcal{P}^2[\mathbf{v}^\varepsilon]$ dépend de $\mathbf{Q}$, $\bar{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{v}^2$. La minimisation par rapport à $\mathbf{v}^2$ conduit ici aussi aux problèmes de Saint Venant de flexion, extension et torsion, ce dernier fournissant en particulier le moment d'inertie à la torsion J_3. La minimisation par rapport à $\bar{\mathbf{V}}$ fournit $(\mathbf{R}^T\bar{\mathbf{U}}')_3 = 0$. Enfin $\mathbf{R}$ s'obtient en minimisant sur $\{\mathbf{Q} : \mathbf{Q}(x_3)\ \textit{rotation}, \mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}\}$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{J_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}')_{3\alpha}(x_3)(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}')_{3\beta}(x_3) + \frac{\mu}{E}J_3(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}')_{12}(x_3)^2\right\} dx_3 - \bar{\eta}\mathcal{F}^0(\mathbf{V}), \tag{4}$$

sachant que $\mathbf{V}(x_3) = \int_0^{x_3} \mathbf{Q}(z)\mathbf{e}_3 dz - x_3\mathbf{e}_3$. Le couplage entre la flexion et la torsion n'est effectif que si la section ne possède pas assez de symétrie. Si elle en possède assez de façon à ce que $\mathbf{J} = J\mathbf{I}$, alors $(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}')_{12} = 0$ et l'énergie élastique se réduit à l'énergie de flexion comme dans les cas précédents. Le problème reste toutefois non linéaire à cause de la condition d'inextensibilité $\|\mathbf{e}_3 + \mathbf{U}'\| = 1$.

4. $\mathbf{n} = \mathbf{1}$. Alors $r = 1$, les déplacements sont finis, $\mathbf{U}$ est inextensionnel, les déformations sont petites, l'énergie élastique est négligeable devant le potentiel des forces. Finalement

$$\mathbf{U} \quad \textit{minimise} \quad -\bar{\eta}\mathcal{F}^0(\mathbf{V}) \quad \textit{sur} \quad \{\mathbf{V} : 2V_3' + \mathbf{V}'\cdot\mathbf{V}' = 0, \mathbf{V}(0) = \mathbf{0}\}. \tag{5}$$

On reconnaît là le problème de recherche de position d'équilibre stable d'un fil inextensible.

5. $\mathbf{n} = \mathbf{0}$. Alors $r = 0$, les déplacements et les déformations sont finis, $\mathcal{P}^0[\mathbf{v}^\varepsilon]$ dépend de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{v}^1$. La minimisation par rapport à $\mathbf{v}^1$ fournit le potentiel élastique d'extension du fil $W^{\star\star}$: on

introduit tout d'abord $W^\star(\mathbf{c}) = \inf\{W(\mathbf{F}) : \mathbf{F} = (\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c})\ ,\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}$, fonction qui, pour des raisons d'isotropie, ne dépend que de $\|\mathbf{c}\|$, est positive, nulle quand $\|\mathbf{c}\| = 1$ et vaut $+\infty$ quand $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; elle n'est donc pas convexe, $W^{\star\star}$ est sa convexifiée et est donc nulle quand $\|\mathbf{c}\| \leq 1$, *i.e.* quand le fil est en compression, cf [Acerbi *et al.*, 1991]. $\mathbf{U}$ s'obtient alors en minimisant

$$\int_0^1 \text{aire}(\mathbf{S}) W^{\star\star}(\mathbf{e}_3 + \mathbf{V}'(x_3))dx_3 - \bar{\eta}\mathcal{F}^0(\mathbf{V}) \tag{6}$$

sur $\{\mathbf{V} : \mathbf{V}(0) = \mathbf{0}\}$, ce qui correspond à la recherche de position d'équilibre stable d'un fil élastique.

Remarques finales.

1. On a donc obtenu qu'un cylindre élastique ayant un petit paramètre d'élancement ε se comporte, lorsqu'on lui impose un chargement de l'ordre de ε^n, tout d'abord (quand $n \geq 3$) comme une poutre linéairement élastique en flexion, puis (quand $n = 2$) comme une tige inextensible, élastiquement flexible en grands déplacements, puis (quand $n = 1$) comme un fil (parfaitement flexible) inextensible et enfin (quand $n = 0$) comme un fil élastique. Ces modèles asymptotiques peuvent servir aussi à comparer la réponse de différentes structures dans un environnement donné. Seul le modèle correspondant à $n = 2$ peut rendre compte des phénomènes de flambement — autrement dit le flambement apparaît à cet ordre de force. Les propriétés élastiques du matériau en déformations finies n'interviennent que dans le modèle du fil élastique, *i.e.* quand $n = 0$.

2. L'hypothèse sur la non nullité de ${\mathcal{F}^0}'(\mathbf{0})$ sert à écarter le cas $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. La conséquence est qu'en dehors du cas $n = 0$ l'énergie d'extension est négligeable devant celle de flexion. Lorsqu'elle n'est pas satisfaite, les ordres de grandeur changent et donc les modèles asymptotiques aussi. En particulier, peuvent alors apparaître des couplages entre la flexion et l'extension. Le fait que la configuration naturelle soit cylindrique joue dans les premiers modèles ($n \geq 2$), sans quoi on obtiendrait des modèles d'arcs (courbes).

3. Les présents résultats rejoignent en les complétant les quelques résultats partiels que l'on peut trouver dans la littérature sur les théories asymptotiques des poutres ou des fils, cf [Cimetière *et al.*, 1988] et ceux déjà cités. Ils sont à rapprocher de ceux obtenus par [Fox *et al.*, 1993] dans le cas des plaques, mais dans un cadre moins général que le nôtre puisque le comportement élastique du matériau y est régi par la loi de Saint Venant-Kirchhoff et que les charges y sont mortes.

Références bibliographiques

Acerbi E., Buttazzo G., Percivale D., 1991. A variational definition for the strain energy of an elastic string. *J. Elasticity 25*, p. 137–148.

Cimetière A., Geymonat G., Le Dret H. , Raoult A., Tutek Z., 1988. Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods. *J. Elasticity 19*, p. 111–161.

Fox D. D., Raoult A., Simo J. C., 1993. A justification of nonlinear properly invariant plate theories. *Arch. Rat. Mech. Anal. 124*, p. 157–199.

Geymonat G., Krasucki F., Marigo J.-J., 1987. Stress distribution in anisotropic elastic composite beams. In *Applications of multiple scalings in Mechanics*, **Ciarlet P. G. and Sanchez Palencia E.**, Eds., Masson, p. 118–133.