SUR LA TORSION DE FROBENIUS DE LA CATÉGORIE DES MODULES INSTABLES

The Guong Nguyen

SUR LA TORSION DE FROBENIUS DE LA CATÉGORIE DES MODULES INSTABLES

par Thế Cường NGUYỄN

Résumé. — Un des phénomènes marquants dans la catégorie $\mathcal{P}_d$ des foncteurs polynomiaux stricts est l'injectivité des morphismes induits par la torsion de Frobenius entre groupes d'extensions des foncteurs. Dans [Cuo14a], l'auteur démontre que le foncteur de Hai, allant de la catégorie $\mathcal{P}_d$ vers la catégorie des modules instable $\mathcal{U}$, est pleinement fidèle. Cela fait de la catégorie $\mathcal{P}_d$ une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{U}$. La torsion de Frobenius s'étend à toute la catégorie $\mathcal{U}$, mais n'y est pas aussi bien comprise. Cet article étudie la torsion de Frobenius, soit dans ce cas le foncteur double Φ, et ses effets sur les groupes d'extension des modules instables. On donne des calculs explicites de nombreux groupes d'extensions des modules instables, et permet de confirmer, dans de nombreux cas, l'injectivité des morphismes entre des groupes d'extensions induits par la torsion de Frobenius dans la catégorie $\mathcal{U}$. Ces résultats sont obtenus en étudiant la résolution injective minimale du module instable libre $F(1)$.

0. Thế Cường NGUYỄN, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications - UMR7539 du CNRS, 99 Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France
E-mail : `tdntcuong@gmail.com` ou `nguyentc@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://math.univ-paris13.fr/~nguyentc/Pageweb.html`

0. Classification mathématique par sujets (2000). — 55S10, 18A40.

0. Mots clefs. — Algèbre de Steenrod, foncteurs polynomiaux stricts, modules instables, torsion de Frobenius.

0.
L'auteur est partiellement soutenu par le programme ARCUS Vietnam MAE, Région IDF et par LIAFV - CNRS - Formath Vietnam.

Abstract (*On the Frobenius twist in the category of unstable modules*)

In the category $\mathcal{P}_d$ of strict polynomial functors, the morphisms between extension groups induced by the Frobenius twist are injective. In [Cuo14a], the category $\mathcal{P}_d$ is proved to be a full sub-category of the category $\mathcal{U}$ of unstable modules *via* Hai's functor. The Frobenius twist is extended to the category $\mathcal{U}$ but remains mysterious there. This article aims to study the Frobenius twist Φ of the category $\mathcal{U}$ and its effects on the extension groups of unstable modules. We compute explicitly several extension groups and show that in these cases, the morphisms induced by the Frobenius twist are injective. These results are obtained by constructing the minimal injective resolution of the free unstable module $F(1)$.

Table des matières

1. Introduction

Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$, et soit V un $\Bbbk-$espace vectoriel. On note F pour l'homomorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$. La torsion de Frobenius de V, notée $V^{(1)}$, est le $\Bbbk-$espace vectoriel, qui comme groupe abélien, s'identifie à V mais, dont la multiplication par les scalaires est donnée par

$$\lambda \cdot v = \lambda^p v.$$

Étant donné un $GL_n(\Bbbk)-$module M, sa torsion de Frobenius $M^{(1)}$ est le $GL_n(\Bbbk)-$module induit par l'homomorphisme de Frobenius

$$GL_n(\Bbbk) \xrightarrow{F} GL_n(\Bbbk).$$

Un théorème d'Andersen [And80, Jan87] montre que la torsion de Frobenius induit des monomorphismes entre des groupes d'extensions des $GL_n(\Bbbk)-$modules :

$$\mathrm{Ext}^*_{GL_n(\Bbbk)}(M,N) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^*_{GL_n(\Bbbk)}\left(M^{(1)},N^{(1)}\right).$$

Selon Friedlander et Suslin [FS97, corollaire 3.13], les groupes d'extensions des $GL_n(\mathbb{k})-$modules se calculent comme ceux des foncteurs polynomiaux stricts. On a aussi une torsion de Frobenius

$$\mathcal{P}_d \xrightarrow{(-)^{(1)}} \mathcal{P}_{pd}$$

dans la catégorie $\mathcal{P} := \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{P}_d$ des foncteurs polynomiaux stricts, et celle-ci induit donc des monomorphismes sur les groupes d'extensions. Ce résultat est crucial dans [FFSS99] pour démontrer que les groupes d'extensions des foncteurs polynomiaux stricts se stabilisent par rapport aux itérés de la torsion de Frobenius.

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_p-$espaces vectoriels de dimension finie vers la catégorie des $\mathbb{F}_p-$espaces vectoriels. Il n'y a pas de torsion de Frobenius non-triviale dans $\mathcal{F}$. Le foncteur oubli $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$ se factorise à travers de la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables [Hai10], *via* un foncteur exact :

$$\bar{m} : \mathcal{P} \to \mathcal{U}$$

La restriction $\bar{m}_d$ de ce foncteur sur $\mathcal{P}_d$ est pleinement fidèle [Cuo14a]. Il y a sur $\mathcal{U}$ un avatar de la torsion de Frobenius : le foncteur double Φ. Nguyen D. H. Hai [Hai10] montre que :

$$\Phi\bar{m}_d(F) \cong \bar{m}_d\left(F^{(1)}\right).$$

Il est donc naturel de se poser la question de l'injectivité de la torsion de Frobenius sur les groupes d'extensions des modules instables. Celle-ci ne peut avoir lieu en toute généralité, ne serait ce qu'à cause des modules instables nilpotents. Des contre-exemples seront donnés avec des modules instables $\mathcal{N}il-$fermés aussi.

Cependant des calculs effectués, à l'aide du module instable $F(1) \cong \bar{m}_1(I), I$ désignant le foncteur d'inclusion, sur le système

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n F(1), \Phi^n F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{n+1} F(1), \Phi^{n+1} F(1)\right) \to \cdots$$

montrent qu'il subsiste des propriétés intéressantes :

THÉORÈME 8.5. — *Pour $i \leq 49$ ou $i = 2^n - 2^5 + t$ avec $0 \leq t \leq 2^5 + 2$ et $n > 5$, il y a des monomorphismes*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)\right)$$

pour tout r.

Pour effectuer ces calculs, on a besoin d'étudier la résolution injective (minimale de préférence) de $F(1)$. On la désigne par $(I^r, \partial^r)^{r\geq 0}$. Nous ne la connaissons pas, mais nous pouvons dire beaucoup de choses à ce propos.

Rappelons les objets injectifs de la catégorie $\mathcal{U}$. On désigne par $J(n)$ l'enveloppe injective de la cohomologie réduite $\tilde{\mathrm{H}}^*(S^n; \mathbb{F}_2)$ du sphère S^n. Les $J(n)$ sont injectifs, caractérisés par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n)) \cong \left(M^i\right)^*$. Soit V un $2-$groupe abélien élémentaire, la cohomologie de l'espace classifiant BV, que l'on note H^*V (on note $\tilde{\mathrm{H}}^*V$ pour la cohomologie réduite), est injectif dans la catégorie $\mathcal{U}$ d'après un résultat de Miller dans sa preuve de la conjecture de Sullivan [Mil84]. Les travaux de Franjou, Lannes et Schwartz, [LS89, théorème 3.1],[FLS94, théorème 7.3] permettent de démontrer :

Corollaire 4.6. — *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, le module I^r se décompose en somme directe $R^r \oplus N^r$ où R^r est un facteur direct d'une certaine somme directe $\bigoplus_\alpha \mathrm{H}^*(BV_\alpha; \mathbb{F}_2)$ et N^r est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler.*

Puisque le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(J(n), \mathrm{H}^*V)$ est trivial, la suite $(N^r, \partial^r|_{N^r})^{r\geq 0}$ est un sous-complexe de la résolution injective minimale de $F(1)$. Le calcul de la cohomologie de ce sous-complexe dépend de la cohomologie de MacLane des corps finis [FLS94].

Proposition 3.7. — *Soit $r = 2^k(2l+1)$, alors :*

$$\mathrm{H}^{r+1}(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}) \cong \frac{F(1)}{\Phi^k F(1)}.$$

Soient $k > l \geq 2$. On observe que si t est un entier tel que $t < 2^l$ alors

$$\mathrm{H}^{t+2^l}(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}) \cong \mathrm{H}^{t+2^k-2^l}(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}).$$

Cette périodicité particulière de la cohomologie $\mathrm{H}^*(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet})$ se relève au complexe $(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet})^{r\geq 0}$.

Théorème 5.1 . — *Sous un même hypothèse sur k, l et t, il y a des isomorphismes :*

$$N^{t+2^l} \cong N^{t+2^k-2^l}.$$

Afin d'énoncer le résultat sur le sous-complexe $(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet})$ de la résolution injective minimale de $F(1)$, posons :

$$J(n_1, \ldots, n_k) := \bigoplus_{i=1}^{k} J(n_k),$$

et

$$A_{2^n+3} := \left(\bigoplus_{i=1}^{n-3} J\left(2^{n-1} - 2^i\right)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{1\leq i\leq n-2 \\ 0\leq j\leq i-2}} J\left(2^{n-1} - 2^i - 2^j\right)\right).$$

Théorème 8.4. — *Pour $n \geq 6$, on a :*

k	2^n-32	2^n-31	2^n-30	2^n-29	2^n-28
N^k	0	$J(16)$	$J(15,14,12)$	$J(14,12,11,8)$	$J(13,10,5)$

k	2^n-27	2^n-26	2^n-25	2^n-24	2^n-23
N^k	$J(12,4,3)$	$J(11,6,3)$	$J(10,2)$	$J(9)$	$J(8)$
k	2^n-22	2^n-21	2^n-20	2^n-19	2^n-18
N^k	$J(7,6)$	$J(6,4)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
k	2^n-17	2^n-16	2^n-15	2^n-14	2^n-13
N^k	$J(2)$	0	$J(8)$	$J(7,6)$	$J(6,4)$
k	2^n-12	2^n-11	2^n-10	2^n-9	2^n-8
N^k	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
k	2^n-7	2^n-6	2^n-5	2^n-4	2^n-3
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$
k	2^n-2	2^n-1	2^n	2^n+1	
N^k	0	$J(1)$	0	$J(2^{n-1})$	
k	2^n+2			2^n+3	
N^k	$J(2^{n-1}-1, 2^{n-1}-2, \ldots, 2^{n-1}-2^{n-3})$			$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$	

On observe que dans la zone où on peut expliciter N^k, les modules de Brown-Gitler du type $J(2^n)$ sont répartis de la manière suivante : chaque module N^{2l+1} contient un seul facteur de ce type et les modules N^{2l} n'en contiennent aucun. Cette particularité implique :

Proposition 4.2. — *Soit l un entier. Si il existe un entier n_l tel que*

$$N^{2l+1} = J(2^{n_l}) \oplus \bigoplus_{\alpha} J\left(2^{m_\alpha}(2t_\alpha + 1)\right)$$

et que N^{2l} ne contient aucun facteur direct de type $J(2^n)$ alors on a :

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong \begin{cases} 0 & si\ k \leq n_l, \\ \mathbb{F}_2 & si\ k > n_l. \end{cases}$$

De plus, les morphismes

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{k+1} F(1), F(1)\right)$$

sont injectifs.

Plan de l'article. — Dans la section 2 on rappelle des généralités sur les modules instables injectifs. La section 3 justifie l'étude de la résolution injective minimale de $F(1)$. On y calcule l'homologie de la partie réduite de cette résolution en utilisant la cohomologie de MacLane de $\mathbb{F}_2$. On étudie la partie nilpotente de cette résolution dans la section 4. La proposition 3.7 permet de montrer que chaque terme de cette partie est somme directe finie de modules de Brown-Gitler. On décrit un phénomène de périodicité de la partie nilpotente dans la section 5. Le théorème 5.1 est y démontré. La section 6 est consacrée à une étude des extensions de la partie nilpotente par la partie réduite. Cela est crucial pour démontrer le théorème 8.4. Les cas particuliers de la partie nilpotente sont calculés dans la section 7. La dernière section a pour but de calculer les groupes d'extensions des modules instables et étudier l'effet de la torsion de Frobenius sur eux. Une conjecture à ce propos est donnée à la fin de l'article.

Remerciements. — Ce travail fait partie de ma thèse de doctorat effectuée à l'Université Paris 13 sous la direction de Lionel Schwartz. Je tiens à remercier Professeur Lionel Schwartz pour sa générosité, son soutien constant, ses précieux conseils, sa patience et ses exigences qui m'ont toujours apporté autant humainement que scientifiquement. Mes remerciements vont également à Vincent Franjou. Ses remarques m'ont permis d'envisager ce travail sous un autre angle. J'aimerais profiter de cette occasion pour remercier les membres du VIASM pour leurs hospitalité pendant ma visite à Hanoi où l'article a été baptisé.

2. Modules instables injectifs

La lettre p désigne un nombre premier. Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons au cas $p = 2$.

L'algèbre de Steenrod. — L'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_2$ est une algèbre graduée associative engendrée par les Sq^k de degré $k \geq 0$ soumis aux relations d'Adem et $Sq^0 = 1$. Serre introduit les notions d'admissible et d'excès [Ser53] pour les opérations de Steenrod. Le monôme

$$Sq^{i_1} \dots Sq^{i_m}$$

est admissible si $i_k \geq 2i_{k+1}$ pour $2 \leq k \leq m$ et $i_m \geq 1$. L'excès de cette opération est défini par :

$$e(Sq^{i_1} \dots Sq^{i_m}) := i_1 - i_2 - \cdots - i_m.$$

L'ensemble des monômes admissibles et Sq^0 forment une base additive de l'algèbre de Steenrod. Milnor [Mil58] montre que $\mathcal{A}_2$ a un co-produit naturel qui fait d'elle une algèbre de Hopf et incorpore l'involution de Thom comme la conjugaison.

Les Sq^{2^k} sont indécomposables et on désigne par $\mathcal{A}(n)$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}_2$ engendrée par les $Sq^{2^i}, i \leq 2^n$. Les $\mathcal{A}(n)$ sont finis d'après [Ada58, section 5]. En fait, toute sous-algèbre, engendrée par un ensemble fini d'opérations de Steenrod, est finie. Il existe un ensemble minimal de relations définissant $\mathcal{A}_2$, concernant seuls les Sq^{2^n} [Wal60].

$$Sq^{2^i} Sq^{2^j} \equiv Sq^{2^j} Sq^{2^i} \text{ modulo } \mathcal{A}(i-1), \text{ si } 0 \leq j \leq i-2,$$
$$Sq^{2^i} Sq^{2^i} \equiv Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^i} Sq^{2^{i-1}} + Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^i} \text{ modulo } \mathcal{A}(i-1).$$

Pour $n \geq k$, on désigne par Q_k^n le produit

$$Sq^{2^k} Sq^{2^{k+1}} \dots Sq^{2^n}.$$

L'ensemble des monômes $Q_{k_0}^{n_0} Q_{k_1}^{n_1} \dots Q_{k_i}^{n_i}$ où (n_j, k_j) sont en ordre lexicographique

$$(n_j, k_j) < (n_{j-1}, k_{j-1}) \text{ pour tout } 1 \leq j \leq i,$$

forme la base de Wall de l'algèbre de Steenrod [Wal60].

Modules instables. — Un $\mathcal{A}_2-$module M est dit instable si l'action de Sq^k sur un élément homogène x de degré n est triviale dès que $k > n$. La catégorie des modules instables est désignée par $\mathcal{U}$.

On désigne par $|-|$ le degré d'un élément. Soit Sq_0 l'opération qui, à un élément homogène x d'un module instable, associe l'élément $Sq^{|x|}$. La torsion de Frobenius dans $\mathcal{U}$ est un endofoncteur Φ qui, à un module instable M associe le module ΦM, concentré en degrés pairs et $(\Phi M)^{2n} = M^n$. Posant

$$\begin{aligned} \lambda_M : \Phi M &\to M \\ \Phi x &\mapsto \mathrm{Sq}_0 x \end{aligned}$$

alors un module instable M est dit réduit si λ_M est injectif. Il est dit nilpotent si pour chaque élément $x \in M$, il existe un entier n_x tel que

$$\mathrm{Sq}_0^{n_x} x = 0.$$

On désigne par $\mathcal{N}il$ la sous catégorie des modules nilpotents.

Notons $J(n)$ l'enveloppe injective de la cohomologie réduite $\tilde{\mathrm{H}}^* (S^n; \mathbb{F}_2)$ du sphère S^n. Les $J(n)$ sont injectifs, caractérisés par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}} (M, J(n)) \cong (M^n)^*$. Ces modules sont finis et donc nilpotents. Dualement, il y a des $F(n)$, instablement et librement engendré par $\imath_n$ de degré n. Les $F(n)$ sont projectifs, caractérisés par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}} (F(n), M) \cong M^n$. Le module $F(1)$ s'injecte dans la cohomologie

$$\mathrm{H}^* \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{F}_2[u]$$

donc le générateur de $F(1)$ est souvent désigné par u au lieu de $\imath_1$.

Carlsson et Miller ont observé que la cohomologie modulo p d'un $p-$groupe abélien élémentaire est injective dans $\mathcal{U}$ [Car83, Mil84]. Lannes et Zarati ont démontré que le produit tensoriel d'un tel module avec un module de Brown-Gitler reste injectif [LZ86] et cela donne :

Théorème 2.1 ([LS89, théorème 3.1]). — *Chaque module injectif indécomposable de la catégories $\mathcal{U}$ est un produit tensoriel $L \otimes J(n)$ entre un facteur direct indécomposable de $(\mathrm{H}^* B\mathbb{Z}/p)^{\otimes d}$ et un module de Brown-Gitler. Un module instable injectif est la somme directe des modules de ces types.*

Ce théorème signifie qu'un module instable injectif se décompose en somme directe entre un module réduit et un module nilpotent. Pour chaque n, on désigne par x_n le seul générateur de $(J(2^n))^1$. Les modules de Brown-Gitler ont explicités par Miller :

THÉORÈME 2.2 ([Mil84, théorème 6.1]). — *Pour $p = 2$, il y a un isomorphisme d'algèbres bi-graduées :*

$$\bigoplus_{n\geq 0} J(n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_2[x_n, n \geq 0, ||x_n|| = (1, 2^n)].$$

L'action de l'algèbre de Steenrod est définie par $Sq^1 x_n = x_{n-1}^2$ et par la formule de Cartan :

$$Sq^m(xy) = \sum_{i=0}^{m} Sq^i(x) Sq^{m-i} y.$$

3. La relation avec la cohomologie de MacLane des corps finis

Dans cette section, on justifie l'étude de la résolution injective minimale de $F(1)$. Chaque terme de cette résolution se décompose en somme directe entre un module nilpotent et l'un qui est réduit. La partie nilpotente de la résolution est un sous-complexe. On va se servir de la cohomologie de MacLane de $\mathbb{F}_2$ pour calculer l'homologie du complexe quotient de la résolution par la partie nilpotente.

3.1. La réduction du travail. — Posons :

$$\mathrm{H}_r = \frac{F(1)}{\Phi^r F(1)}.$$

De manière récursive, on définit pour $k \geq 2$:

$$\lambda_M^k := \lambda_M \circ \Phi\left(\lambda_M^{k-1}\right) : \Phi^k M \to M.$$

Un module instable M est dit connexe si il est nul en degré 0.

PROPOSITION 3.1. — *Soient M un module instable connexe et r un nombre entier. Alors le morphisme $\lambda_{F(1)}^r$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Phi^r M, \Phi^r F(1)\right) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Phi^r M, F(1)\right). \tag{1}$$

De plus

$$\left(\lambda_{\Phi^r M}\right)^* \circ \left(\lambda_{F(1)}^r\right)_* = \left(\lambda_{F(1)}^{r+1}\right)_* \circ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Phi, \Phi\right). \tag{2}$$

Démonstration. — L'isomorphisme (1) se résulte des remarques suivantes :

1. les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i\left(\Phi^r M, \mathrm{H}_r\right)$ sont triviaux ;
2. le module H_r s'insère dans la suite exacte

$$0 \to \Phi^r F(1) \to F(1) \to \mathrm{H}_r \to 0.$$

L'identité (2) se découle de ce que le morphisme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\lambda_{\Phi^r M}, \Phi^r F(1)\right)$ se factorise à travers $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1}M, \lambda_{\Phi^r F(1)}\right)$ *via* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi, \Phi)$. □

A l'aide de la proposition 3.1, on se ramène à étudier la résolution injective minimale du module $F(1)$ et les morphismes $\left(\lambda_{\Phi^{n-1}F(1)}\right)^*$.

Corollaire 3.2. — *Soit M un module instable connexe. Il existe un isomorphisme entre les co-limites :*

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n M, F(1)\right) \cong \mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n M, \Phi^n F(1)\right).$$

De plus les $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi, \Phi)$ sont des monomorphismes si et seulement si $\left(\lambda_{\Phi^{n-1}M}\right)^*$ les sont.

On désigne par $(I^\bullet, \partial^\bullet)$ la résolution injective minimale de $F(1)$. Chaque module I^j se scinde en somme directe $R^j \oplus N^j$: R^j est réduit et N^j est nilpotent [LS89, théorème 3.1]. Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(N^i, R^{i+1}\right)$ est nul pour tout $i \geq 0$, les morphismes restreints $\partial^\bullet|_{N^\bullet}$ font de la suite $\left(N^r, \partial^r|_{N^r}\right)^{r\geq 0}$ un sous-complexe de la résolution injective minimale de $F(1)$. Désormais $\partial^l|_{N^l} : N^l \to N^{l+1}$ est noté par ∂^l_n. On peut exprimer les différentielles ∂^l sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \partial^l_n & \omega^l \\ 0 & \partial^l_r \end{pmatrix} : N^l \oplus R^l \to N^{l+1} \oplus R^{l+1}. \tag{3}$$

Désigne par $\tilde{\Phi}$ l'adjoint à droite du foncteur Φ. Comme les R^i sont injectifs réduits, alors $\tilde{\Phi}R^i \cong R^i$ [Sch94, théorème 6.3.4]. On a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n F(1), I^m\right) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n F(1), N^m \oplus R^m\right) \\ &\cong \left(\tilde{\Phi}^n N^m\right)^1 \oplus \left(R^m\right)^1. \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de considérer la partie $(N^\bullet, \partial^\bullet_n)$ et seul le degré 1 de la partie $(R^\bullet, \partial^\bullet_r)$ pour calculer les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n F(1), F(1)\right)$.

3.2. La cohomologie de la partie réduite. — Dans cette sous-section, on relie l'homologie du complexe $(R^\bullet, \partial^\bullet_r)$. D'après [HLS93, I.7] le foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_\omega$ admet un adjoint à droite que l'on note m. En particulier, $f \circ m$ est équivalent au endo-foncteur $id_{\mathcal{F}_\omega}$.

Notation 1. — *On note ℓ le foncteur composé $m \circ f$. Il est appelé foncteur de localisation loin de $\mathcal{N}il$.*

Un module instable M est dit $\mathcal{N}il-$fermé si $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}(N, M)$ est nul pour tout module nilpotent N et pour $i = 0, 1$.

Proposition 3.3 ([HLS93, I.7]). — *Le module $\ell(M)$ est $\mathcal{N}il-$fermé pour tout module instable M. De plus si M est $\mathcal{N}il-$fermé, $M \xrightarrow{\sim} \ell(M)$.*

Puisque les modules injectifs réduits sont $\mathcal{N}il-$fermés, alors

Corollaire 3.4. — *On a une identification des complexes :*

$$\ell(I^\bullet, \partial^\bullet) \cong (R^\bullet, \partial_r^\bullet).$$

L'homologie du complexe $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ *est isomorphe au dérivé* $\ell^*(F(1))$*.*

La description de $\ell^*(F(1))$ que l'on donne dans la suite est une récolte des travaux présentés dans [FLS94] (voir aussi [Sch03]).

Théorème 3.5. — *Étant donnés* M *dans* $\mathcal{U}$ *et* F *dans* $\mathcal{F}_\omega$*, il existe une suite spectrale du premier quadrant*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(M, \ell^j(m(F))\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}}\left(f(M), F\right). \tag{4}$$

Démonstration. — On considère la paire des foncteurs

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\ell} \mathcal{U} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M,-)} \mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}.$$

Le foncteur f est exact. Puisque le foncteur m est exact à gauche, le foncteur ℓ l'est aussi. Dans la mesure où m et f préservent l'injectivité des objets, il en est de même pour ℓ. On déduit de la suite spectrale de Grothendieck associée à la paire $\{\ell, \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M,-)\}$ qu'il y a une suite spectrale du premier quadrant convergeant vers

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^{i+j}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(M, \ell(-)\right)\right) &\cong \mathrm{R}^{i+j}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(f(M), f(-)\right)\right)\\ &\cong \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}}\left(f(M), f(-)\right)\end{aligned}$$

dont la deuxième page est

$$\mathrm{R}^i\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(M,-\right)\right)\left(\mathrm{R}^j\left(\ell\right)\right) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(M, \ell^j(-)\right).$$

En l'appliquant au module $m(F)$ on obtient la suite spectrale

$$E_2^{i,j} \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(M, \ell^j(m(F))\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}}\left(f(M), F\right)$$

d'où le résultat. □

Puisque $F(k)$ est projectif, la suite spectrale (4) pour $(F(k), F) \in \mathcal{U} \times \mathcal{F}_\omega$ s'effondre et donne :

Corollaire 3.6. — *Il y a un isomorphisme :*

$$\ell^i(m(F))^k \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^k, F\right).$$

On note I le foncteur d'inclusion $V \mapsto V$, et Γ^k le foncteur qui, à un espace vectoriel V, associe le groupe des invariants $\left(V^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}$ où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ agit par permutations sur $V^{\otimes k}$. Rappelons que $m(I) \cong F(1)$. La proposition suivant décrit la structure de $\mathcal{A}_2-$module de $\ell^*(F(1))$.

Proposition 3.7. — *Soit $i = 2^n(2k+1)$. Il y a un isomorphisme de modules instable :*

$$\ell^i(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^n F(1)}.$$

Démonstration. — L'action de Sq^i sur M^n se détermine par l'action de Sq^i : $F(n+i) \to F(n)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$. Il suit de [FLS94, théorème 6.6] qu'il y a des isomorphismes

$$\ell^i(m(I))^k \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^k, I\right) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } k = 2^s \text{ et } 2^{s+1}|i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors en tant qu'espaces vectoriels gradués :

$$\ell^i(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^n F(1)} \text{ si } i = 2^n(2k+1).$$

A cause de l'écart de degrés, la seule opération agissant non-trivialement sur $\left(\ell^i(F(1))\right)^{2^k}$ est Sq^{2^k}. A travers la suite spectrale

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(F(k), \ell^i(F(1))\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^k, I\right),$$

cette opération devient

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^{2^k}, I\right) \xrightarrow{f^*\left(Sq^{2^k}\bullet\right)} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^{2^{k+1}}, I\right)$$

et est donc non-triviale suivant [FLS94, proposition 6.2]. Ce morphisme est en fait induit par le Verchiebung $\Gamma^{2^{k+1}} \to \Gamma^{2^k}$, dual au morphisme de Frobenius $S^{2^k} \to S^{2^{k+1}}$ (voir [Hai10]). Il s'ensuit que si $i = 2^n(2k+1)$

$$\ell^i(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^n F(1)}$$

en tant que modules instables. □

En particulier, d'après [FLS94, théorème 7.3] :

Théorème 3.8. — *Le produit de Yoneda fait de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I, I)$ est une $\mathbb{F}_2-$algèbre commutative. Elle est engendrée par les classes $e_n \in \mathrm{Ext}^{2^{n+1}}_{\mathcal{F}}(I, I)$ et admet la présentation suivante*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I, I) \cong \frac{\mathbb{F}_2[e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots]}{\langle e_n^2, n \in \mathbb{N}\rangle},$$

$\langle e_n^2, n \in \mathbb{N}\rangle$ désignant l'idéal engendré par les puissances $2-$ièmes.

Contre-exemples. — On aimerait que le morphisme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi,\Phi)$ soit injectif en général. Cependant :

Contre-exemple 1. — *Il existe un entier i tel que le morphisme* $\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}(\Phi,\Phi)$

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(\Phi^i(F(1)\otimes F(1)),\Phi^i(F(1))\right)\to \mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{i+1}(F(1)\otimes F(1)),\Phi^{i+1}(F(1))\right)$$

n'est pas injectif.

On va maintenant justifier ce contre-exemple. Dans un premier temps, on montre que

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1)\right)=0.$$

Par contre, dans un deuxième temps on vérifie que

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(F(1)\otimes F(1),F(1)\right)\cong \mathbb{F}_2.$$

Alors il existe i tel que $\left(\lambda_{\Phi^i(F(1)\otimes F(1))}\right)^*$ n'est pas injectif. Au cas contraire :

$$\mathbb{F}_2\subset \mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1)\right),$$

ce qui contredit la trivialité de $\mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1)\right)$.

Selon [HLS93, CS15], on sait calculer $\mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n M,F(1)\right)$:

Théorème 3.9. — *Soit n un entier. Le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n M,F(1)\right)\to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(f(M),I\right),$$

naturel en M, induit un isomorphisme

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n M,F(1)\right)\cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(f(M),I\right)$$

naturel en M.

De plus, d'après [FLS94]

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(f(F(1)\otimes F(1)),I\right)=\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}\left(I\otimes I,I\right)=0,$$

alors :

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1)\right)=0.$$

Les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1)\right)$ doivent être nuls si on suppose que $\left(\lambda_{\Phi^{n-1}(F(1)\otimes F(1))}\right)^*$ est injectif. Cependant :

Lemme 3.10. — *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(F(1)\otimes F(1),F(1)\right)\cong \mathbb{F}_2.$$

Démonstration. — On désigne par Λ^2 la $2-$ième puissance extérieure. Il résulte de la résolution injective minimale de $\Lambda^2(F(1))$ [Cuo14b, corollaire 1.1.4.17] qu'on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(\Lambda^2(F(1)),F(1)\right)\cong \mathbb{F}_2.$$

Le lemme découle de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte

$$0\to F(2)\to F(1)\otimes F(1)\to \Lambda^2(F(1))\to 0.$$

□

L'exercice suivant donne un contre-exemple concernant les modules nilpotents.

Contre-exemple 2. — *Le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^3_{\mathcal{U}}\left(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^3_{\mathcal{U}}\left(\Sigma^2\mathbb{F}_2, \Phi F(1)\right)$$

n'est pas injectif.

4. Sur la résolution injective minimale de $F(1)$

D'après la section 2, on désigne par $(I^\bullet, \partial^\bullet) = (N^\bullet \oplus R^\bullet, \partial^\bullet)$ la résolution injective minimale de $F(1)$, $R^\bullet$ et $N^\bullet$ désignant la partie réduite et la partie nilpotente respectivement. Les morphismes ∂^l s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \partial^l_n & \omega^l \\ 0 & \partial^l_r \end{pmatrix} : N^l \oplus R^l \to N^{l+1} \oplus R^{l+1}. \tag{5}$$

La minimalité de la résolution signifie que I^0 est l'enveloppe injective de $F(1)$, I^1 est celle du quotient $I^0/F(1)$ et I^j est l'enveloppe injective du conoyau $\mathrm{Coker}\left(\partial^{j-2}\right)$ pour $j \geq 2$.

4.1. La partie réduite de la résolution. — Ce paragraphe est consacré pour étudier la partie $(R^\bullet, \partial^\bullet_r)$ de la résolution injective minimale de $F(1)$. En particulier, chaque module R^j sera calculé en degré 1.

L'enveloppe injective de $F(1)$ est $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$. Nous allons montrer que R^k contient un seul facteur direct isomorphe à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ si k est pair et n'en contient aucun sinon. Pour ce fait, remarquons que d'une part $f(F(1)) = I$ est simple dans $\mathcal{F}$ et d'autre part, f préserve la minimalité des résolution. Alors le nombre de facteurs isomorphes à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ de R^k, est la dimension sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I, I)$ du groupe $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{F}}(I, I)$. Il découle du théorème 3.8 que :

Proposition 4.1. — *Chaque R^k contient un seul facteur direct isomorphe à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ si k est pair, et n'en contient aucun sinon.*

A part $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ et $\mathbb{F}_2$, les autres modules instables injectifs indécomposables sont $1-$connexes [Sch94, section 4.4]. Alors les R^{2l+1} sont $1-$connexes et

$$\left(R^{2l}\right)^1 \cong \mathbb{F}_2.$$

Par abus de notation on note u le seul générateur de degré 1 de R^{2k}. L'exactitude de la résolution injective de $F(1)$ implique que $\partial^{2l}_r(u)$ est trivial alors que $\omega^{2l}(u)$ ne l'est pas. Il en découle que chaque terme N^{2l+1} contient un facteur direct $J(2^{n_l})$ tel que

$$\omega^{2l}(u) = x_{n_l}.$$

Dans le reste de cet article, on va montrer que dans plusieurs cas intéressants, le terme N^{2l+1} contient un seul facteur direct de type $J(2^{n_l})$ alors que N^{2l} n'en contient aucun et cela est suffisant pour calculer le groupe $\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), F(1))$. En effet, on va montrer que dans ces cas :

Proposition 4.2. — *Soit l un entier. Si il existe un entier n_l tel que*
$$N^{2l+1} = J(2^{n_l}) \oplus \bigoplus_{\alpha} J\left(2^{m_\alpha}(2t_\alpha + 1)\right)$$
et que N^{2l} ne contient aucun facteur direct de type $J(2^n)$ alors on a :
$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong \begin{cases} 0 & si\ k \leq n_l, \\ \mathbb{F}_2 & si\ k > n_l. \end{cases}$$
De plus, les morphismes
$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{k+1} F(1), F(1)\right)$$
sont injectifs.

Démonstration. — Puisque N^{2l+1} contient une seule copie de $J(2^{n_l})$, alors si $k \leq n_l$:
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), N^{2l+1}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), J(2^{n_l})\right) \cong \langle x^{2^k}_{n_l - k}\rangle.$$
Parce que d'une part
$$\ell^{2l}(F(1)) \cong \langle u, u^2, \ldots, u^{2^{[\log_2 l]-1}} \left| u \in I^{2l} \right\rangle$$
et d'autre part, $\partial^{2l}(u^{2^k}) = x^{2^k}_{n_l-k}$ alors le morphisme
$$\mathrm{H}^{2l}\left(R^\bullet\right) \to \mathrm{H}^{2l+1}\left(N^\bullet\right)$$
est un isomorphisme $\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_2$. Il découle de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte des complexes
$$0 \to N^\bullet \to I^\bullet \to R^\bullet \to 0$$
que
$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong 0.$$
Si $k \geq n_l + 1$, il résulte de la trivialité de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), N^{2l+1}\right)$ que
$$\mathrm{Ext}^{2l+1}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong 0$$
et que
$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong \left(\ell^{2l}(F(1))\right)^1 \cong \mathbb{F}_2.$$
De plus, parce que
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\frac{\Phi^k F(1)}{\Phi^{k+1} F(1)}, I^{2l}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\frac{\Phi^k F(1)}{\Phi^{k+1} F(1)}, N^{2l} \oplus R^{2l}\right) \cong 0$$

alors $\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1)/\Phi^{k+1}F(1), F(1)\right)$ est trivial et

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{k+1} F(1), F(1)\right)$$

est injectif. □

4.2. La partie nilpotente de la résolution. — Puisque d'une part, les $\mathrm{H}^k\left(R^\bullet, \partial_r^\bullet\right)$ sont finies et d'autre part

$$\mathrm{H}^k\left(R^\bullet, \partial_r^\bullet\right) \cong \mathrm{H}^{k+1}\left(N^\bullet, \partial_n^\bullet\right),$$

alors les $\mathrm{H}^{k+1}\left(N^\bullet, \partial_n^\bullet\right)$ sont finies. Dans ce paragraphe, on va montrer que les modules N^l sont aussi finis.

Remarquons que si un module instable est nilpotent ou réduit, il en est de même pour son enveloppe injective. Un module instable peut se calculer comme l'extension d'un module réduit par le plus grand sous-module nilpotent. Le lemme suivant explique comment on forme l'enveloppe injective de l'extension à partir de la partie nilpotente et celle qui est réduite. La vérification de ce lemme est simple et est laissée aux lecteurs.

Lemme 4.3. — *Étant donné une suite exacte courte*

$$0 \to N \to M \to R \to 0,$$

N désignant un module nilpotent et R désignant un module réduit, l'enveloppe injective de M est la somme directe de l'enveloppe injective de R et celle de N.

Alors, pour déterminer N^j il faut calculer les sous-modules nilpotents les plus grands des $\mathrm{Coker}\left(\partial^{j-2}\right)$. On se place dans une situation générale des catégories abéliennes. La proposition suivante est classique et est laissée aux lecteurs.

Proposition 4.4. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $\left(I^j, \partial^j\right)^{j\geq 0}$ une suite exacte dans $\mathcal{C}$. On désigne par $\left(N^j, \partial_n^j\right)^{j\geq 0}$ un sous-complexe de cette suite. On note $\left(R^j, \partial_r^j\right)^{j\geq 0}$ le complexe quotient $\left(I^j/N^j\right)^{j\geq 0}$. Alors, le noyau M^j du composé*

$$\mathrm{Coker}\left(\partial^j\right) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_r^j\right) \to \frac{R^{j+1}}{\mathrm{Ker}\left(\partial_r^{j+1}\right)}$$

s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^j\left(R^\bullet, \partial_r^\bullet\right) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_n^j\right) \to M^j \to \mathrm{H}^{j+1}\left(R^\bullet, \partial_r^\bullet\right) \to 0.$$

Cette proposition applique à la résolution injective minimale de $F(1)$.

Proposition 4.5. — *Le noyau $\mathscr{M}^j$ du composé*

$$\mathrm{Coker}\left(\partial^j\right) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_r^j\right) \to \frac{R^{j+1}}{\mathrm{Ker}\left(\partial_r^{j+1}\right)}$$

s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to \ell^j\left(F(1)\right) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_n^j\right) \to \mathscr{M}^j \to \ell^{j+1}\left(F(1)\right) \to 0.$$

De plus, N^{j+2} est l'enveloppe injective de $\mathscr{M}^j$.

Démonstration. — La proposition résulte des trois points suivants :

1. le lemme 4.3 ;
2. les $R^{j+1}/\mathrm{Ker}\left(\partial_r^{j+1}\right)$ sont réduits ;
3. les $\ell^j\left(F(1)\right)$ et $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^j\right)$ sont nilpotents.

□

Comme $F(1)$ est réduit, I^0 l'est aussi et il suit que $N^0 = 0$. Alors, par une récurrence simple on obtient :

Corollaire 4.6. — *Dans la résolution injective minimale de $F(1)$, les N^i sont finis.*

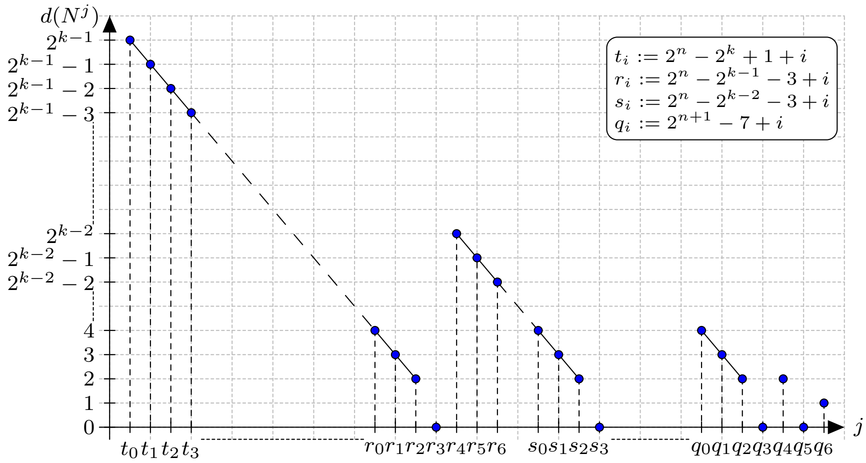
Si M est un module instable fini, on désigne par $\mathrm{d}(M)$ le plus grand degré tel que M^n ne soit pas trivial. Pour exemple, $\mathrm{d}(J(n)) = n$. Le lemme suivant mesure les $\mathrm{d}(N^i)$.

Lemme 4.7. — *Si $n > k+1 \geq 2$ alors :*

m	2^n-2	2^n-1	2^n	2^n+1	2^n-2^k-1	2^n-2^k	2^n-2^k+1
N^m	0	$J(1)$	0	$J\left(2^{n-1}\right)$	$J(2)$	0	$J\left(2^{k-1}\right)$

Si l est un entier tel que $2^{k-1}-1 \geq l \geq 2$, alors :

$$\mathrm{d}\left(N^{2^n-2^k+l}\right) = 2^{k-1}-l+1 \ \textit{et}\ \left(N^{2^n-2^k+l}\right)^{2^{k-1}-l+1} \cong \mathbb{F}_2.$$



Démonstration. — Il résulte des corollaires 3.7 et 4.6 que

m	0	1	2	3	4	5
N^m	0	0	0	$J(1)$	0	$J(2)$

Supposons que le lemme est vrai pour tout $n \leq q-1$. On vérifie le cas $n = q$. Par hypothèse de récurrence,

m	2^q-4	2^q-3	2^q-2	2^q-1	2^q	2^q+1
N^m	0	$J(2)$	0	$J\left(1\right)$	0	$J\left(2^{q-1}\right)$

Parce que, d'une part,

$$\mathrm{d}\left(\mathscr{M}^{2^q}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^q}\right)}{\ell^{2^q}(F(1))}\right),$$

et d'autre part la suite

$$N^{2^q+1} \to N^{2^q+2} \to N^{2^q+3}$$

est exacte en degré $2^q - 1$ alors

$$\mathrm{d}\left(N^{2^q+2}\right) = 2^{q-1} - 1 \text{ et } \left(N^{2^q-1}\right)^{2^{q-1}-1} \cong \mathbb{F}_2.$$

De manière analogue on obtient des égalités pour $2 \leq t \leq 2^{q-1} - 1$:

$$\mathrm{d}\left(N^{2^q+t}\right) = 2^{q-1} - t + 1 \text{ et } \left(N^{2^q+t}\right)^{2^{q-1}-t+1} \cong \mathbb{F}_2.$$

Le noyau $\mathscr{M}^{2^q+2^{q-1}-3}$ s'insère dans la suite exacte courte :

$$0 \to \Sigma^2\mathbb{F}_2 \to \mathscr{M}^{2^q+2^{q-1}-3} \to J(1) \to 0.$$

Il découle (voir [Cuo14b]) de la résolution projective minimale de $\Sigma\mathbb{F}_2$ que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^q+2^{q-1}-1}\left(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1)\right) = 0.$$

Alors $N^{2^q+2^{q-1}-1}$ ne contient aucune copie de $J(1)$ et donc

$$N^{2^q+2^{q-1}-1} \cong J(2).$$

Une récurrence simple sur s tel que $q > s \geq 2$ montre que :

$$N^{2^{q+1}-2^s-1} \cong J(2), \quad N^{2^{q+1}-2^s} \cong 0, \quad N^{2^{q+1}-2^s+1} \cong J(2^{s-1}),$$

$$\mathrm{d}\left(N^{2^{q+1}-2^s+r}\right) = 2^{s-1} - r + 1 \text{ et } \left(N^{2^{q+1}-2^s+r}\right)^{2^{s-1}-r+1} \cong \mathbb{F}_2,$$

pour $2 \leq r \leq 2^{s-1} - 1$. Il en découle que $N^{2^{q+1}-2} \cong 0$ et donc $N^{2^{q+1}-1} \cong J(1)$. Le lemme en résulte. □

Comme une conséquence du lemme 4.7, $\mathscr{M}^{2k+1}$ est une extension triviale de $\mathrm{H}^{2k+2}(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ par $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2k+1}\right)$ si k est de la forme $2^n - 2^m - 1$. On montre en fait qu'elles sont les seules extensions triviales. Avant de détailler cette classification des extensions dans la section 5, on étudie un phénomène de périodicité de la partie nilpotente de la résolution injective de $F(1)$.

5. Un phénomène de périodicité

On rappelle que $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I, I)$ est engendrée par $e_n \in \mathrm{Ext}^{2^{n+1}}_{\mathcal{F}}(I, I)$ en tant qu'algèbre (voir le théorème 3.8).

Notation 2. — *Soient deux entiers $n > k \geq 2$. On désigne :*

$$e(n,k) = e_{n-2}e_{n-3}\dots e_k.$$

Le cup-produit avec $e(n,k)$ induit un isomorphisme [FLS94, proposition 7.2]

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{F}}(I, I) \xrightarrow{\smile e(n,k)} \mathrm{Ext}^{2^n - 2^{k+1}}_{\mathcal{F}}(I, I). \tag{6}$$

On désigne par $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\left(I, f\left(R^0\right)\right)$ le morphisme qui représente l'unité 1 et par $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\left(I, f\left(R^{2^n - 2^{k+1}}\right)\right)$ celui qui représente $e(n,k)$. Puisque $(f(R^*), f(\partial^*))$ est une résolution injective dans $\mathcal{F}$ du foncteur I, l'isomorphisme (6) signifie que δ se factorise à travers γ *via* un morphisme

$$\gamma_0 : f(R^0) \to f(R^{2^n - 2^{k+1}}).$$

Grâce à l'exactitude de la suite

$$I \hookrightarrow f(R^0) \to f(R^1) \to \cdots \to f(R^n) \to \cdots$$

et à l'injectivité des foncteurs $f(R^i)$, on obtient un morphisme de complexes :

$$\gamma_\bullet : f(R^\bullet) \to f\left(R^{2^n - 2^{k+1} + \bullet}\right)$$

tel que les morphismes induits en cohomologie sont les cup-produits avec $e(n,k)$. On rappelle que le foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ admet un adjoint à droite qu'on désigne par m. Puisque les modules R^i sont $\mathcal{N}il$−fermés, alors

$$(m(\gamma_\bullet)) : R^\bullet \to R^{\bullet + 2^n - 2^k}$$

est un morphisme de complexes. Désignons par α^i le morphisme $m(\gamma_i)$. Alors pour $0 \leq t \leq 2^{k-1} - 1$, on a

$$\alpha^{2^k + 2t}(u) = u$$

et donc le morphisme α^{2^k+2t} induit un isomorphisme

$$\ell^{2^k+2t}(F(1)) \xrightarrow{\sim} \ell^{2^n - 2^k + 2t}(F(1)).$$

THÉORÈME 5.1 (Périodicité). — *Étant donné $n > k \geq 2$ on a :*

$$\mathscr{M}^{2^n-2^k+t-2} \cong \mathscr{M}^{2^k+t-2},$$

$$N^{2^n-2^k+t} \cong N^{2^k+t},$$

pour tout $0 \leq t \leq 2^k - 1$.

Démonstration. — Il suit du lemme 4.7 que $N^{2^n-2^k}$ et N^{2^k} sont triviaux. Alors

$$\operatorname{Coker}\left(\partial_r^{2^k}\right) \cong \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^k}\right)$$

$$\operatorname{Coker}\left(\partial_r^{2^n-2^k}\right) \cong \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^n-2^k}\right).$$

Puisque $I^{2^n-2^k+1}$ est injectif, il existe $\beta^{2^k+1} : I^{2^k+1} \to I^{2^n-2^k+1}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
I^{2^k} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{2^k}"] & \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^k-1}\right) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha^{2^k}"] & I^{2^k+1} \arrow[d, dashed, "\exists\beta^{2^k+1}"] \\
I^{2^n-2^k} \arrow[r] & \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^n-2^k-1}\right) \arrow[r, hook] & I^{2^n-2^k+1}
\end{tikzcd} \tag{7}$$

Parce que, d'une part

$$N^{2^k+1} \cong J\left(2^{k-1}\right) \cong N^{2^n-2^k+1}$$

et d'autre part

$$\partial^{2^k}(u) = x_{k-1} = \partial^{2^n-2^k}(u)$$

alors la restriction de β^{2^k+1} sur N^{2^k+1} est un automorphisme de $J\left(2^{k-1}\right)$. Puisque les I^j sont injectifs, le diagramme (7) montre qu'il existe un morphisme de complexes :

$$\beta^{2^k+\bullet} : I^{2^k+\bullet} \to I^{2^n-2^k+\bullet}.$$

Supposons que β^{2^k+t} entraîne

$$\mathscr{M}^{2^n-2^k+t-2} \cong \mathscr{M}^{2^k+t-2},$$

$$N^{2^n-2^k+t} \cong N^{2^k+t},$$

pour tout $1 \leq t < m < 2^{k-1} - 1$. On passe au cas $t = m$. Par hypothèse de récurrence, β^{2^k+m} induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\ell^{2^k+m-2}(F(1)) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \operatorname{Coker}\left(\partial_n^{2^k+m-2}\right) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{M}^{2^k+m-2} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \ell^{2^k+m-1}(F(1)) \arrow[d, equal] \\
\ell^{s-2}(F(1)) \arrow[r, hook] & \operatorname{Coker}\left(\partial_n^{\alpha-2}\right) \arrow[r] & \mathscr{M}^{\alpha-2} \arrow[r, two heads] & \ell^{\alpha-1}(F(1))
\end{tikzcd}$$

où $s = 2^n-2^k+m$. On peut conclure la récurrence et le théorème en découle. $\square$

6. Sur les extensions $\mathscr{M}^{2k+1}$

Le cœur de cette section est le théorème suivant :

Théorème 6.1. — *Les extensions $\mathscr{M}^{2k+1}$ sont triviales si et seulement si k est de la forme $2^n - 2^m - 1$, où $n > m$.*

Afin de démontrer ce théorème, on introduit ci-dessous une interprétation de la non-trivialité de l'extension $\mathscr{M}^k$.

Proposition 6.2. — *Soit $k = 2^r(2m+1) - 1, r \geq 1$. Alors l'extension*

$$\mathscr{M}^k \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{U}}\left(\frac{F(1)}{\Phi^r F(1)}, \mathrm{Coker}\left(\partial^k_n\right)\right)$$

n'est pas triviale si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. *l'élément $\omega^{k+1}\left(u^{2^r}\right)$ n'est pas nul ;*
2. *il existe v dans R^k tel que $\partial^k_r(v) = u^{2^r}$ et que $\partial^k(v) - u^{2^r}$ n'est pas trivial.*

Démonstration. — Le module R^{k+1} est $1-$connexe et

$$\left(R^{k+1}\right)^1 \cong \left(\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2\right)^1 \cong \langle u \rangle.$$

Donc il résulte de l'exactitude de la résolution $\{I^\bullet, \partial^\bullet\}$ de $F(1)$ que N^{k+2} contient un facteur direct $J(2^{m_\alpha})$ tel que

$$\omega^{k+1}(u) = x_{m_\alpha}.$$

Parce que $\ell^{k+1}(F(1)) = \mathrm{H}_r$ alors

$$\omega^{k+1}(u^{2^{r-1}}) = Sq^{2^{r-2}} Sq^{2^{r-3}} \dots Sq^1 x_{m_\alpha}.$$

Il suit que $m_\alpha \geq r-1$ et l'extension $\mathscr{M}^k$ n'est pas triviale si et seulement si cette inégalité est stricte. C'est équivalent à dire que $\omega^{k+1}(u^{2^r})$ n'est pas nul. En d'autres termes, u^{2^r} n'est pas un cobord. Par ailleurs (voir le corollaire 3.7), la suite

$$\left(R^k\right)^{2^r} \to \left(R^{k+1}\right)^{2^r} \to \left(R^{k+2}\right)^{2^r}$$

est exacte donc il existe $v \in \left(R^k\right)^{2^r}$ tel que $\partial^k_r(v) = u^{2^r}$. Il en résulte que $\partial^k(v) \neq u^{2^r}$. Alors, la trivialité de l'extension $\mathscr{M}^k$ est équivalente à la non-trivialité de $\partial^k(v) - u^{2^r}$. $\square$

Définition 6.3. — Soit $k = 2^r(2l+1) - 1$. L'extension $\mathscr{M}^k$ est dite Sq^1-non-triviale si il existe $v \in R^k$ tel que $Sq^1\left(\partial^k(v) - u^{2^r}\right) \neq 0$ et que $\partial^k_r(v) = u^{2^r}$.

On constate que la Sq^1-non-trivialité entraîne la non-trivialité des extensions. Alors le théorème 6.1 se découle du lemme suivant.

LEMME 6.4. — *Si $\mathscr{M}^{2k+1}$ est Sq^1-non-triviale pour tout $k < 2^n$ n'étant pas de la forme $2^m - 2^l - 1$ où $m > l$, alors il en est de même pour $\mathscr{M}^{2k+1}$ où $k < 2^{n+1}$ n'étant pas de la forme $2^m - 2^l - 1$ où $m > l$.*

Démonstration du théorème principal. — Le théorème 6.1 est démontré par récurrence. La preuve sera divisée en deux étapes. D'après le lemme 4.7, le théorème 6.1 est vrai pour $k < 2$. On peut donc établir l'argument de récurrence.

Dans un premier temps, on démontre que si $\mathscr{M}^{2^r+t}, 0 \leq t \leq 2^{r-1} - 2$ n'est pas Sq^1-triviale pour $n \geq r$ alors il en est de même pour $\mathscr{M}^{2^{n+1}-2^r+t}$.

Puisque si t est de la forme $2^r - 2^k - 1, k \leq r - 1$, l'extension $\mathscr{M}^{2^r+t}$ est triviale alors dans un deuxième temps, on montre que $\mathscr{M}^{2^{n+1}+2^n-2^r-1}$ est Sq^1-non triviale pour $1 \leq r < n$.

Première partie de la preuve. — Soit $q = 2^{r-1}(2s+1) - 1 < 2^{n-2} - 1$. On se place dans une situation similaire que celle de la preuve du théorème 5.1. Alors il existe un morphisme de complexes

$$\beta^\bullet : I^{2^n+\bullet} \to I^{2^n+2^{n-1}+\bullet},$$

tel que pour $j \leq 2^{n-2}$

$$\beta^{2j}(u) = u.$$

On va montrer que la Sq^1-non-trivialité de $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$ entraîne la Sq^1-non-trivialité de $\mathscr{M}^{2^n+2q+1}$.

Supposons que $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$ n'est pas Sq^1-triviale. On va montrer que $u^{2^r} \in I^{2^n+2q+2}$ n'est pas un cobord. On suppose par l'absurde qu'il l'est. Alors il existe $x \in R^{2^n+2q+1}$ tel que

$$\partial^{2^n+2q+1}(x) = u^{2^r}.$$

Il en résulte que

$$u^{2^r} = \beta^{2^n+2q+2}\left(u^{2^r}\right) = \partial^{2^n+2^{n-1}+2q+1}\left(\beta^{2^n+2q+1}(x)\right)$$

ce qui contredit la non-trivialité de $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$. Soit $z \in R^{2^n+2q+1}$ tel que

$$\partial_r^{2^n+2q+1}(x) = u^{2^r}.$$

Un tel z existe à cause de l'exactitude de la suite

$$\left(R^{2^n+2q+1}\right)^{2^r} \to \left(R^{2^n+2q+2}\right)^{2^r} \to \left(R^{2^n+2q+3}\right)^{2^r}.$$

Notant $m := 2^n + 2^{n-1}$, il s'ensuit que :

$$\partial_r^{m+2q+1}\left(\beta^{2^n+2q+1}(x)\right) = u^{2^r},$$

$$\beta^{2^n+2q+2}\left(Sq^1\left(\partial^{2^n+2q+1}(x) - u^{2^r}\right)\right) = Sq^1\left(\partial^{m+2q+1}\left(\beta^{2^n+2q+1}(x)\right) - u^{2^r}\right).$$

Il en découle que $\mathscr{M}^{2^n+2q+1}$ est Sq^1-non-triviale.

Par hypothèse de récurrence de la Sq^1-non-trivialité de $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$ pour $q < 2^{n-2} - 1$, les $\mathscr{M}^{2^n+2q+1}$ ne sont pas Sq^1-triviales si $q \leq 2^{n-2} - 1$ n'étant pas de la forme $2^{n-2} - 2^k - 1, k \leq n-2$.

Suite de la preuve. — Soient $q < n-1$ et $u^{2^q} \in R^{2^n+2^{n-1}-2^q}$. Il découle du corollaire A.4 qu'il existe une $\left(u^{2^q} \to u^{2^{n-1}-1}\right)-$suite (voir la définition A.1)

$$\left\{v_i \in R^{2^n+2^{n-1}-2^q-1-i} \,\middle|\, Sq^1 v_i \neq 0, 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 2^q - 2\right\}.$$

Comme

$$\partial^{2^n}\left(u^{2^{n-1}}\right) = x_0^{2^{n-1}},$$

alors

$$\partial^{2^n}(u^{2^{n-1}-1}) = Sq^1 v_{2^{n-1}-2^q-2} + x_0^{2^{n-1}-2} x_1.$$

Il découle de

$$\partial_n^{2^{n-1}+1}\left(x_0^{2^{n-1}-2} x_1\right) = x_0^{n^{n-1}-1}$$

que

$$\partial^{2^n-1}(v_{2^{n-1}-2^q-2}) = Sq^1 v_{2^{n-1}-2^q-3} + x_0^{2^{n-1}-3} x_1.$$

De manière similaire, on obtient :

$$\partial^{2^n+2^{n-1}-2^q-1}(v_0) = u^{2^q} + x_0^{2^q-1} x_1.$$

Il résulte que $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}-2^q-1}$ est Sq^1-non-triviale.

Le lemme 6.4 permet de conclure le théorème 6.1 par récurrence.

7. Les cas particuliers

Le théorème 5.1 permet de concentrer au calcul de N^{2^k+m} pour $m < 2^{k-1}$. Dans le cadre de cet article, on peut effectuer les calculs pour $1 \leq m \leq 4$.

7.1. Les N^{2^k+2}. — Les modules N^{2^k+2} sont calculés à l'aide du lemme suivant dont la preuve est laissée aux lecteurs :

Lemme 7.1. — *La suite*

$$N^{2^k+1} \to N^{2^k+2}$$

fournit les deux premiers termes de la résolution injective minimale de H_k.

On rappelle que la somme directe $\bigoplus_{n\geq 0} J(n)$ est isomorphe à l'algèbre :

$$\mathbb{F}_2[x_i | i \geq 0, x_i \in J(2^i)^1]$$

Un morphisme de modules de Brown-Gitler $J(n) \to J(m)$ est déterminé par une opération de Steenrod θ de degré $n-m$. Ce morphisme est désigné par $\bullet\theta$. La détermination de N^{2^k+2} se réalise dans la proposition suivante :

Proposition 7.2. — *Il y a un isomorphisme :*

$$N^{2^k+2} \cong \bigoplus_{i=0}^{k-3} J(2^{k-1}-2^i).$$

Le morphisme $\partial_n^{2^k+1}$ *se présente sous forme matricielle :*

$$\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t.$$

Démonstration. — On rappelle que la base de Wall de l'algèbre de Steenrod comporte que les produits de Sq^{2^n}. Puisque $J(2^{k-1})$ est cocyclique, alors pour un élément $x \in J(2^{k-1})$ il existe un monôme $Sq^{2^{n_1}}Sq^{2^{n_2}}\ldots Sq^{2^{n_k}}$ tel que

$$Sq^{2^{n_1}}Sq^{2^{n_2}}\ldots Sq^{2^{n_k}}x = x_0^{2^{k-1}}.$$

Par l'instabilité, $n_j \geq k-2$ et les seuls monômes contenant $Sq^{2^{k-2}}$ sont

$$Sq^{2^{k-2}}Sq^{2^{k-3}}\ldots Sq^{2^{k-i}}, 2 \leq i \leq k.$$

Les éléments de $J(2^{k-1})$ correspondant à ces opérations forment un sous module isomorphe à H_k. Alors le composé

$$\mathrm{H}_k \to J(2^{k-1}) \xrightarrow{\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t} \bigoplus_{i=0}^{k-3} J(2^{k-1}-2^i)$$

est trivial. Puisque les $J(m)$ sont co-libres, le quotient $J(2^{k-1})/\mathrm{H}_k$ s'injecte dans $\bigoplus_{i=0}^{k-3} J(2^{k-1}-2^i)$. Le lemme en découle. □

7.2. Les $N^{2^k+3}, k \geq 2$. — Le module N^{2^k+3} est l'enveloppe injective de $\mathscr{M}^{2^k+1}$ qui s'insère dans la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right) \longrightarrow \mathscr{M}^{2^k+1} \longrightarrow \ell^{2^k+2}(F(1)) \longrightarrow 0.$$

Proposition 7.3. — *Soit $k \geq 2$. L'extension*

$$\mathscr{M}^{2^k+1} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{U}}\left(\mathrm{H}_1, \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)\right)$$

est non-triviale et l'enveloppe injective de $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)$ *est celle de* $\mathscr{M}^{2^k+1}$.

Démonstration. — La non-trivialité de $\mathscr{M}^{2^k+1}$ se résulte du théorème 6.1. On note I_0 l'enveloppe injective de $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)$ et I_1 celle de $\mathscr{M}^{2^k+1}$. On constate que $I_0 \subset I_1$. La suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right) \to \mathscr{M}^{2^k+1} \to \mathrm{H}_1 \to 0$$

montre que $I_1 \subset I_0 \oplus \mathrm{H}_1$. Puisque l'extension est non-triviale, cette inclusion n'est pas stricte. On en déduit que $I_0 \cong I_1$. □

Corollaire 7.4. — *La suite*

$$N^{2^n-2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+1}} N^{2^n-2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+2}} N^{2^n-2^k+3}$$

fournit les trois premiers termes de la résolution injective minimale de H_k*.*

7.3. Les $N^{2^k+4}, k \geq 3$. — Rappelons que N^{2^k+4} est l'enveloppe injective de Ker $(_{2^k+2})$ qui se calcule de la suite exacte courte :

$$0 \to J(1) \to \mathrm{Coker}\,(\partial)_n^{2^k+2} \to \mathrm{Ker}\,(_{2^k+2}) \to 0.$$

Comme $J(1)$ est injectif, $N^{2^k+4} \oplus J(1)$ est l'enveloppe injective de Coker $(\partial)_n^{2^k+2}$. Alors :

Proposition 7.5. — *Il existe un morphisme* $N^{2^k+3} \to N^{2^k+4} \oplus J(1)$ *tel que la suite suivante*

$$0 \to \mathrm{H}_k \to N^{2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} N^{2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} N^{2^k+3} \to N^{2^k+4} \oplus J(1)$$

fournit les quatre premiers termes de la résolution injective minimale de H_k*.*

8. Torsion de Frobenius

Dans cette section, on calcule les premiers termes de la résolution injective minimale de H_k afin de compléter le résultat principal sur la partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$. Cette information permet d'étudier l'effet de la torsion de Frobenius sur certains groupes d'extensions de modules instables.

8.1. Résolution injective minimale de $\mathbf{H}_k$. — La proposition 7.2 fournit les deux premiers termes de la résolution injective minimale de H_k :

$$0 \to \mathrm{H}_k \to J\left(2^{k-1}\right) \xrightarrow{\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t} \bigoplus_{i=0}^{k-3} J\left(2^{k-1} - 2^i\right)$$

On désigne par J_2^k le troisième terme de la résolution injective minimale de H_k et par ∂_2^k la deuxième différentielle. Cette sous-section est consacrée à calculer les J_2^k et ∂_2^k.

Selon [Wal60], pour $0 \leq j \leq i-2$ ou $j = i$, il existe les opérations de Steenrod $m_{i,j}^t$ où $1 \leq t \leq i$ telles que

$$Sq^{2^i} Sq^{2^j} = \sum_{t=1}^{i} Sq^{2^{i-t}} m_{i,j}^t.$$

Alors :

LEMME 8.1. — *On a :*

$$J_2^k = \left(\bigoplus_{i=1}^{k-2} J\left(2^{k-1}-2^i\right)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{1\le i\le k-2\\ 0\le j\le i-2}} J\left(2^{k-1}-2^i-2^j\right)\right)$$

et ∂_2^k restreint au $J(2^{k-1}-2^i)$ vers $J(2^{k-1}-2^n-2^m)$ est $\bullet m_{n,m}^{n-i}$.

Démonstration. — Soient deux entiers n, m tels que $0 \le m \le n-2 \le k-5$. On désigne par x l'élément

$$x_0^{2^{k-1}-2^n-2^m} \in J(2^{k-1}).$$

Alors

$$\begin{aligned} Sq^{2^n} Sq^{2^m} x &= Sq^{2^m} Sq^{2^n} x \\ &= x_0^{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t (x) = x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n} + x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n}.$$

Si $y \in \bigoplus_{i=0}^{k-3} J\left(2^{k-1}-2^i\right)$ on désigne par $\bar{y}$ son image dans

$$\operatorname{Coker}\left(\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t\right).$$

Alors

$$\overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n}} = \overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n}}.$$

On montre que $\overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n}}$ est non-trivial. Supposons par l'absurde qu'il est trivial. Alors il existe $z \in J(2^{k-1})$ tel que

$$\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t (z) = x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n} \tag{8}$$

Il suit que

$$\left(Sq^{2^n} Sq^{2^m} + Sq^{2^m} Sq^{2^n}\right)(z) = x_0^{2^{k-1}}.$$

D'après [Wal60]

$$Sq^{2^n} Sq^{2^m} + Sq^{2^m} Sq^{2^n} \in \mathcal{A}(n-1)$$

ce qui contredit l'égalité (8). De même manière,

$$\overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^{n+2}} x_1^{2^n} x_2^{2^n}}, n \le k-3$$

ne sont pas triviaux. Puisque la base de Wall de l'algèbre de Steenrod ne comporte que les produits de Sq^{2^l}, alors pour tout élément v de

$$\operatorname{Coker}\left(\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t\right)$$

il existe une opération de Steenrod θ telle que θv appartient au sous module M engendré par

$$\left\{\overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m}x_1^{2^n}}, \overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^{n+2}}x_1^{2^n}x_2^{2^n}}, 0 \leq m \leq n-2 \leq k-5\right\}.$$

Alors J_2^k est l'enveloppe injective de M et on conclut le lemme. □

8.1.1. Les cas particuliers. — Le lemme suivant détaille les N^i pour $i \leq 24$.

Proposition 8.2. — *On a*

k	1	2	3	4
N^k	0	0	$J(1)$	0
k	5	6	7	8
N^k	$J(2)$	0	$J(1)$	0
k	9	10	11	12
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
k	13	14	15	16
N^k	$J(2)$	0	$J(1)$	0
k	17	18	19	20
N^k	$J(8)$	$J(7)\oplus J(6)$	$J(6)\oplus J(4)$	$J(5)$
∂_n^k	$\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2\right)^t$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet Sq^2Sq^1 & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}$	$\left(\bullet Sq^1, 0\right)$	$\bullet Sq^1$
k	21	22	23	24
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
∂_n^k	$\bullet Sq^1$	$\bullet Sq^1$	0	0

Démonstration. — Les N^k et ∂_n^k pour $k < 20$ sont calculés grâces à la sous section 8.1 et au lemme 4.7. Puisque $\mathscr{M}^{18} \cong \operatorname{Coker}(\delta)$ où

$$\delta := \ell^{18}(F(1)) \hookrightarrow \operatorname{Coker}\left(J(7)\oplus J(6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet\left(Sq^2Sq^1\right) & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}} J(6)\oplus J(4)\right)$$

donc $\mathscr{M}^{18} \cong \Sigma^5\mathbb{F}_2$ alors $N^{20} \cong J(5)$.

Parce que, d'une part, $\operatorname{Coker}\left(\partial_n^{19}\right) \cong \Sigma^4\mathbb{F}_2$ et d'autre part $\mathscr{M}^{19}$ est une extension non-triviale dans $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{U}}\left(\ell^{20}(F(1)), \operatorname{Coker}\left(\partial_n^{19}\right)\right)$ alors $\mathscr{M}^{19} \cong \mathrm{H}_3$. Il en découle que N^{21} est isomorphe à $J(4)$.

De manière similaire on obtient $N^{22} = J(3), N^{23} = J(2)$ et $N^{24} = 0$. □

Fixons :

$$J(n_1, \ldots, n_k) := \bigoplus_{i=1}^{k} J(n_k).$$

De manière analogue, on obtient

Proposition 8.3. — *On a*

k	33	34	35
N^k	$J(16)$	$J(15,14,12)$	$J(14,12,11,8)$
∂_n^k	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 \\ \bullet Sq^2 \\ \bullet Sq^4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^2 Sq^1 & \bullet Sq^2 & 0 \\ \bullet Sq^4 & \bullet Sq^3 & \bullet Sq^1 \\ \bullet Sq^{6,1} & \bullet Sq^{4,2} + Sq^{5,1} & \bullet Sq^4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^4 & \bullet Sq^2 & \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet Sq^{6,3} & \bullet Sq^{4,2,1} & \bullet Sq^{4,2} & \bullet Sq^3 \end{pmatrix}$
k	36		37
N^k	$J(13,10,5)$		$J(12,4,3)$
∂_n^k	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^{6,2,1} & \bullet Sq^{5,1} & 0 \\ \bullet Sq^{6,2,1} & \bullet Sq^{4,2,1} & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^6 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet Sq^1 & 0 \end{pmatrix}$
k	38	39	40
N^k	$J(11,6,3)$	$J(10,2)$	$J(9)$
∂_n^k	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet Sq^1 \end{pmatrix}$	$\left(\bullet Sq^1, 0\right)$	$\bullet Sq^1$
k	41	42	43
N^k	$J(8)$	$J(7,6)$	$J(6,4)$
∂_n^k	$\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2\right)^t$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet Sq^2 Sq^1 & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}$	$\left(\bullet Sq^1, 0\right)$
k	44	45	46
N^k	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
∂_n^k	$\bullet Sq^1$	$\bullet Sq^1$	$\bullet Sq^1$
k	47	48	49
N^k	$J(2)$	0	$J(8)$
∂_n^k	0	0	0

On peut donc formuler le résultat principal sur la résolution injective minimale de $F(1)$.

Théorème 8.4. — *Pour $n \geq 6$ on a :*

k	2^n-32	2^n-31	2^n-30	2^n-29	2^n-28
N^k	0	$J(16)$	$J(15,14,12)$	$J(14,12,11,8)$	$J(13,10,5)$
k	2^n-27	2^n-26	2^n-25	2^n-24	2^n-23
N^k	$J(12,4,3)$	$J(11,6,3)$	$J(10,2)$	$J(9)$	$J(8)$
k	2^n-22	2^n-21	2^n-20	2^n-19	2^n-18
N^k	$J(7,6)$	$J(6,4)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
k	2^n-17	2^n-16	2^n-15	2^n-14	2^n-13
N^k	$J(2)$	0	$J(8)$	$J(7,6)$	$J(6,4)$
k	2^n-12	2^n-11	2^n-10	2^n-9	2^n-8
N^k	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
k	2^n-7	2^n-6	2^n-5	2^n-4	2^n-3
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$
k	2^n-2	2^n-1	2^n	2^n+1	

N^k	0	$J(1)$	0	$J(2^{n-1})$
k	2^n+2			2^n+3
N^k	$J(2^{n-1}-1, 2^{n-1}-2, \ldots, 2^{n-1}-2^{n-3})$			$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$

A_{2^n+3} *désignant*

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n-3} J\left(2^{n-1}-2^i\right)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{1\leq i\leq n-2\\ 0\leq j\leq i-2}} J\left(2^{n-1}-2^i-2^j\right)\right).$$

La proposition 4.2 permet de conclure :

Théorème 8.5. — *Pour $i \leq 49$ ou $i = 2^n - 2^5 + t$ avec $0 \leq t \leq 2^5+2$ et $n > 5$, il y a des monomorphismes*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)\right)$$

pour tout r.

Notation 3. — *Soient d un entier pair et $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$ son expression $2-$adique. On note :*

$$\upsilon(d) = 1 + n_k - k.$$

Le théorème suivant est un corollaire du théorème 8.5.

Théorème 8.6. — *Pour $d \leq 49$ ou $D = 2^n - 2^5 + t$ avec $0 \leq t \leq 2^5+2$ et $n > 5$, on a :*

$$\mathrm{Ext}^d_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) = \begin{cases} 0 & si\ 2 \not| \, d, \\ 0 & si\ 2 \mid d \ et\ r < \upsilon(d), \\ \mathbb{F}_2 & sinon. \end{cases}$$

Théorème 8.7. — *Soit d un entier pair, on a :*

$$\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \ \ si\ r \geq \upsilon(d).$$

De plus si $r \geq \upsilon(d)$ le morphisme

$$\mathrm{Ext}^d_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{F}}(I, I)$$

est non-trivial.

Démonstration. — Le cas de $d = 2^n$ a été calculé à l'aide du lemme 4.2. En effet $\mathrm{Ext}^{2^n}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \cong \mathbb{F}_2$ pour tout r tel que $r \geq n$. On raisonne par récurrence sur la longueur $2-$adique de d. On suppose que le théorème est vérifié pour d dont $\alpha(d) < k$. On passe au cas de $\alpha(d) = k$. On note $d = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}$ où $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. On désigne par

d_1 la somme $2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}$. Pour $r \geq \upsilon(d)$ le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), F(1)\right) \arrow[r, "\smile\delta_{n_1}"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r-1} F(1), F(1)\right) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{F}}(I, I) \arrow[r, "\smile e_{n_1}"] & \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{F}}(I, I)
\end{tikzcd}$$

δ_{n_1} désignant le générateur du groupe $\mathrm{Ext}^{2^{n_1}}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r-1}F(1), \Phi^r F(1)\right)$. Par hypothèse de récurrence, le composé

$$\mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{F}}(I, I) \xrightarrow{\smile e_{n_1}} \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{F}}(I, I)$$

est non-trivial. On en déduit que $\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r-1}F(1), F(1)\right)$ et que le morphisme

$$\mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{F}}(I, I)$$

est non-trivial. □

On peut donc conjecturer :

Conjecture 8.8. — *Soit d un entier, on a :*

$$\mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) = \begin{cases} 0 & si\ 2 \nmid d, \\ 0 & si\ 2 \mid d\ et\ r < \upsilon(d), \\ \mathbb{F}_2 & sinon. \end{cases}$$

De plus, il y a des monomorphismes

$$\mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)\right)$$

pour tout r.

Appendice A
Sur l'acyclicité des modules instables injectifs réduits

Rappelons que le carré de l'opération de Bockstein Sq^1 est trivial. Soit M un module instable, alors $\left(M^\bullet, Sq^1\right)$ est un complexe. Le module M est dit Sq^1-acyclique si $\left(M^\bullet, Sq^1\right)$ est acyclique. D'après [LZ86], les modules injectifs réduits connexes sont Sq^1-acycliques.

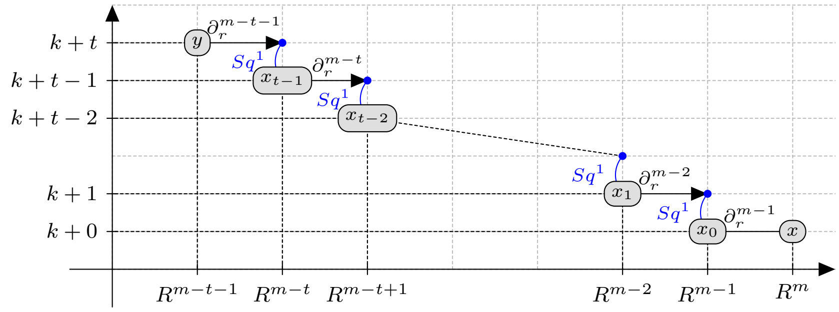
Définition A.1. — Soient x un élément de $(R^m)^k$ et $t \geq 1$ un nombre entier. On dit que x admet une $t-$ième Sq^1-pré-image $y \in \left(R^{m-t-1}\right)^{k+t}$ si il existe des éléments

$$\left\{x_i \in R^{m-i-1} \,\middle|\, 0 \leq i \leq t-1, Sq^1 x_i \neq 0\right\}$$

tels que

$$\partial_r^{m-1}(x_0) = x,$$
$$\partial_r^{m-t-1}(y) = Sq^1 x_{t-1},$$
$$\partial_r^{m-t+i}(x_{t-i-1}) = Sq^1 x_{t-i-2}, 0 \le i \le t-2.$$

Une telle suite $(x_0, x_1, \ldots, x_{t-1})$ est appelée une $(x \to y)$−suite.



On note :

$$\rho_{0,m}(x) = \left(\partial_r^{m-1}\right)^{-1}(x),$$
$$\rho_{t,m}(x) = \left\{ y \,\middle|\, y \text{ est une } t - \text{ième } Sq^1 - \text{pré-image de } x \right\}, t \ge 1.$$

Lemme A.2. — *Soit n un entier et notant $u^2 \in \tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2 \subset R^{2^n-2}$. Si il existe une $(u^2 \to x)$ −suite $(x_0, x_1, \ldots, x_{t-1})$, alors il existe y tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}, x)$ est une $(u^2 \to y)$ −suite.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $Sq^1 x$ n'est pas trivial. On suppose par l'absurde qu'il est trivial. Alors il existe $y_0 \in R^{2^n-t-3}$ tel que

$$Sq^1 y_0 = x.$$

Il suit que

$$Sq^1\left(\partial_r^{2^n-t-3}(y_0) - x_{t-1}\right) = 0.$$

Une simple récurrence montre qu'il existe :

$$\left\{ y_0, y_1, \ldots, y_{t-1} \,\middle|\, y_i \in R^{2^{n-t-3}+i} \right\}$$

tels que

$$Sq^1\left(\partial_r^{2^n-t-3+i}(y_i) - x_{t-1-i}\right) = 0.$$

En particulier

$$Sq^1\left(\partial_r^{2^n-4}(y_{t-1}) - x_0\right) = 0.$$

donc $\left(R^{2^n-3}\right)^1$ n'est pas trivial d'où la contradiction. Le lemme s'en résulte. □

Le lemme A.2 permet de construire une chaîne précise connectant les éléments $u^2 \in R^{2^n-2}$ et $u^{2^n-1} \in R^0$.

LEMME A.3. — *Il existe une* $\left(u^2 \to u^{2^n-1}\right)$ *−suite*

$$\left\{x_i \in R^{2^n-i-3}, 0 \leq i \leq 2^n-4, Sq^1 x_i \neq 0\right\}$$

telle que pour $2 \leq t \leq n-1$,

$$Sq^1 x_{2^t-3} = u^{2^t}.$$

Démonstration. — On résout par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que le lemme est vrai pour $n \leq q$, on montre qu'il est vrai pour $n = q+1$. Le produit de Yoneda [FLS94, proposition 7.2]

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{F}}(I, I) \xrightarrow{\smile e^{q-1}} \mathrm{Ext}^{2^q}_{\mathcal{F}}(I, I)$$

induit un morphisme de complexes :

$$\gamma_\bullet : f(R^\bullet) \to f(R^{\bullet+2^q}).$$

Soit m l'adjoint à droite de f [HLS93]. Il y a un morphisme de complexes :

$$m(\gamma_\bullet) : R^\bullet \to R^{\bullet+2^q}.$$

Par la propriété du produit de Yoneda [FLS94], pour tout $l \leq 2^q - 1$,

$$m(\gamma_{2l})(u) = u.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une $\left(u^2 \to u^{2^q-1}\right)$ −suite

$$\left\{x_i \in R^{2^q-3-i} \middle| 1 \leq i \leq 2^q-3, Sq^1 x_i \neq 0\right\}$$

telle que :

$$Sq^1 x_{2^t-3} = u^{2^t-1}, 2 \leq t \leq q.$$

Grâce au lemme A.2, il suffit de démontrer que pour $1 \leq i \leq 2^q - 3$,

$$Sq^1 m(\gamma_i)\left(x_{2^q-3-i}\right) \neq 0.$$

On raisonne par récurrence sur i. Parce que $\left(R^{2^{q+1}-3}\right)^1$ est trivial, la Sq^1−acyclicité de $R^{2^{q+1}-3}$ montre que $Sq^1 m(\gamma_{2^q-3})(x_0)$ n'est pas trivial. Supposons que pour $1 \leq t < i \leq 2^q - 3$,

$$Sq^1 m(\gamma_i)\left(x_{2^q-3-i}\right) \neq 0.$$

On passe au cas $i = t$. Si $Sq^1 m(\gamma_t)\left(x_{2^q-3-t}\right)$ est trivial alors il existe

$$\left\{z_j \in R^{2^q+j}, t \leq j \leq 2^q-4\right\}$$

tels que

$$Sq^1 z_{j+1} = m(\gamma_{j+1})\left(x_{2^q-3-j-1}\right) - \partial_r^{2^q+j}(z_j).$$

En particulier, on a

$$Sq^1 z_{2^q-3} = m(\gamma_{2^q-3})\,(x_0) - \partial_r^{2^{q+1}-4}\,(z_{2^{q+1}-4})\,.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} u^2 &= \partial_r^{2^{q+1}-3}\,(m(\gamma_{2^q-3})\,(x_0)) \\ &= \partial_r^{2^{q+1}-3}\left(\partial_r^{2^{q+1}-4}\,(z_{2^q-4})\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où la contradiction. □

Corollaire A.4. — *Il existe une* $\left(u^{2^t} \to u^{2^n-1}\right)$*–suite*

$$\left\{x_i \in R^{2^{n+1}+2^n-2^t-1-i}, 0 \leq i \leq 2^n - 2^t, Sq^1 x_i \neq 0\right\}$$

telle que

$$Sq^1 x_{2^k-2^t-1} = u^{2^k}, t \leq k \leq n-1.$$

BIBLIOGRAPHIE

[Ada58] J. F. Adams – « On the structure and applications of the Steenrod algebra », *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), p. 180–214.

[And80] H. H. Andersen – « The Frobenius morphism on the cohomology of homogeneous vector bundles on G/B », *Ann. of Math. (2)* **112** (1980), no. 1, p. 113–121.

[Car83] G. Carlsson – « G. B. Segal's Burnside ring conjecture for $(\mathbf{Z}/2)^k$ », *Topology* **22** (1983), no. 1, p. 83–103.

[CS15] N. T. Cuong & L. Schwartz – « Some finiteness results in the category $\mathcal{U}$ », *Vietnam J. Math.* **43** (2015), no. 1, p. 181–192.

[Cuo14a] N. T. Cuong – « Homogeneous strict polynomial functors as unstable modules », *ArXiv e-prints* (2014).

[Cuo14b] N. T. Cuong – « Some homological algebra computations in the category of unstable modules », Theses, Université Paris 13, Juillet 2014, p. 1–206.

[FFSS99] V. Franjou, E. M. Friedlander, A. Scorichenko & A. Suslin – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.

[FLS94] V. Franjou, J. Lannes & L. Schwartz – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.

[FS97] E. M. Friedlander & A. Suslin – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.

[Hai10] N. D. H. Hai – « Foncteurs polynomiaux stricts et modules instables sur l'algèbre de Steenrod », *J. Algebra* **324** (2010), no. 4, p. 860–874.

[HLS93] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.

[Jan87] J. C. Jantzen – *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

[LS89] J. Lannes & L. Schwartz – « Sur la structure des A-modules instables injectifs », *Topology* **28** (1989), no. 2, p. 153–169.

[LZ86] J. Lannes & S. Zarati – « Sur les $\mathcal{U}$-injectifs », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no. 2, p. 303–333.

[Mil58] J. Milnor – « The Steenrod algebra and its dual », *Ann. of Math. (2)* **67** (1958), p. 150–171.

[Mil84] H. Miller – « The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces », *Ann. of Math. (2)* **120** (1984), no. 1, p. 39–87.

[Sch94] L. Schwartz – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

[Sch03] ———, « Algèbre de Steenrod, modules instables et foncteurs polynomiaux », in *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panor. Synthèses, vol. 16, Soc. Math. France, Paris, 2003, p. 55–100.

[Ser53] J.-P. Serre – « Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane », *Comment. Math. Helv.* **27** (1953), p. 198–232.

[Wal60] C. T. C. Wall – « Generators and relations for the Steenrod algebra », *Ann. of Math. (2)* **72** (1960), p. 429–444.