

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et informatique

COMMANDE OPTIMALE D'UN SATELLITE À PROPULSION ÉLECTRIQUE UTILISANT LES PERTURBATIONS POUR L'ÉLIMINATION DES DÉBRIS ORBITAUX EN BASSE ALTITUDE

Mémoire de maîtrise
Spécialité : génie électrique

Marie-Kiki LANGELIER

Jury : Jean DE LAFONTAINE (directeur)
Yves BÉRUBÉ-LAUZIÈRE (rapporteur)
Jean-Baptiste MICHAUD (évaluateur)

RÉSUMÉ

Depuis le lancement du premier satellite Spoutnik 1 en 1957, l'environnement spatial est de plus en plus utilisé et le nombre de débris orbitaux se multiplie naturellement, soit par des explosions, des collisions ou tout simplement par les opérations normales des satellites. Au-delà d'un certain seuil, la densité des débris orbitaux risque de créer une réaction en chaîne incontrôlée : l'effet Kessler. L'élimination des débris orbitaux en basse altitude permettrait de limiter cette réaction et ainsi de préserver l'environnement spatial afin de pouvoir l'utiliser de façon sécuritaire. L'élimination des débris orbitaux est une opération complexe et coûteuse. Elle consiste à déplacer des objets spatiaux inactifs vers une orbite basse pour mener à leur désintégration dans la basse atmosphère terrestre. En utilisant les perturbations orbitales, il est possible de réduire le coût du carburant requis pour effectuer les manœuvres orbitales nécessaires à l'élimination de ces débris. L'objectif principal de cette étude consiste à développer une procédure et une stratégie de commande autonome afin de modifier l'orbite des satellites non opérationnels (débris) pour mener à leur désintégration naturelle tout en optimisant les facteurs carburant et temps. Pour ce faire, un modèle d'atmosphère basé sur le modèle de Jacchia (1977) est développé. Un modèle de la dynamique du satellite inclut aussi les perturbations principales, soit : traînée atmosphérique, non sphéricité et distribution non uniforme de la masse de la Terre. Ces modèles ainsi qu'un algorithme de commande optimale pour un propulseur électrique sont développés et le tout est validé par simulations numériques sur Matlab/Simulink. Au terme de cette étude, les conditions optimales dans lesquelles il faut laisser un débris afin qu'il se désintègre dans la basse atmosphère de la Terre en quelques semaines seront données (type d'orbite : altitude, inclinaison, etc.) ainsi que le coût en carburant pour une telle mission. Cette étude permettra de prouver qu'il est possible de réaliser des missions d'élimination des débris orbitaux tout en réduisant les coûts associés aux manœuvres orbitales par l'utilisation des perturbations naturelles de l'environnement.

Mots-clés : débris orbitaux, effet Kessler, commande optimale, perturbations orbitales, dynamique orbitale, basse orbite (LEO), propulsion électrique

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont offert du support lors de la réalisation de mes travaux de recherche.

Premièrement, un grand merci à mon directeur de recherche, Jean de Lafontaine, pour les nombreux conseils et éclaircissements fournis. Mes connaissances ainsi que mes travaux de recherche ont été grandement améliorés par sa sagesse.

Merci au CRSNG pour leur soutien financier.

Merci à toute ma famille pour leurs encouragements et leur soutien moral tout au long de ma maîtrise. Merci particulièrement à mes parents, qui m'ont toujours soutenue lors de mes études et qui m'ont permis d'entreprendre des études supérieures.

Finalement, un merci tout spécial à mon époux, qui m'a toujours soutenue à travers les épreuves apportées par la maîtrise. Nous nous sommes motivés mutuellement à continuer dans l'aventure.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....	i
REMERCIEMENTS	iii
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 2 NOTIONS DE BASE.....	7
2.1 Définition des repères de référence	7
2.1.1 Position et vitesse.....	7
2.1.2 Éléments orbitaux classiques	10
2.1.3 Éléments équinoctiaux	12
2.1.4 Manœuvres orbitales.....	16
2.2 Dynamique du satellite (éléments équinoctiaux).....	18
2.3 Théorie de la commande optimale.....	21
2.4 Résolution d'un problème aux deux limites	28
2.4.1 Méthode du gradient	28
2.4.2 Méthode de tir simple	29
2.5 Perturbations orbitales	31
CHAPITRE 3 ÉTAT DE L'ART.....	37
3.1 Techniques d'élimination des débris orbitaux.....	37
3.2 Perturbations orbitales	40
3.3 Modèle d'atmosphère	41
3.4 Propulseurs	44
3.5 Trajectoire optimale (guidage)	46
CHAPITRE 4 SIMULATEUR.....	53
4.1.1 Dynamique du satellite	54
4.1.2 Non-sphéricité de la Terre	56
4.1.3 Modèle d'atmosphère	58
4.1.4 Force de traînée atmosphérique	60
CHAPITRE 5 TRAJECTOIRE OPTIMALE (GUIDAGE)	63
5.1.1 Algorithme	63
5.1.2 Choix de la méthode du tir (tests et résultats).....	66
5.1.3 Résultats.....	69
CHAPITRE 6 TESTS ET RÉSULTATS	79
6.1 Présentation des scénarios de tests	79
6.2 Étape 1 – Détermination d'une orbite de largage	80
6.2.1 Orbites équivalentes.....	80
6.2.2 Commande optimale	82
6.3 Étape 2 – Utilisation du renflement diurne.....	89
CHAPITRE 7 CONCLUSION	103
ANNEXE A – MODÈLE D'ATMOSPHÈRE	105
A.1 Modèles d'atmosphère statique	105
A.2 Version analytique du modèle J77.....	106
LISTE DES RÉFÉRENCES.....	107

LISTE DES FIGURES

Figure 2-1. Repère ECI.....	8
Figure 2-2. Repère ECEF	9
Figure 2-3. Éléments orbitaux (figure de la NASA)	12
Figure 2-4. Repère équinoctial (FGW).....	14
Figure 2-5. Transfert de Hohmann	17
Figure 4-1. Simulateur.....	53
Figure 4-2. Simulateur - Dynamique éléments équinoctiaux.....	54
Figure 4-3. Évolution des éléments orbitaux classiques pour une orbite circulaire d'altitude 800 km sans perturbations	55
Figure 4-4. Évolution des éléments orbitaux classiques pour une orbite circulaire d'altitude 800 km avec J_2	57
Figure 4-5. Différence entre densité statique (tableau J77) et modèle numérique en fonction de l'altitude	59
Figure 4-6. Densité atmosphérique en fonction de l'argument de latitude	60
Figure 4-7. Simulateur - Calcul de la traînée atmosphérique.....	61
Figure 5-1. Trajectoire de guidage - axe semi-majeur.....	70
Figure 5-2. Trajectoire de guidage - excentricité	70
Figure 5-3. Trajectoire de guidage - inclinaison.....	71
Figure 5-4. Trajectoire de guidage - argument du périégée	71
Figure 5-5. Trajectoire de guidage - ascension droite du noeud ascendant.....	72
Figure 5-6. Trajectoire de guidage - anomalie moyenne.....	72
Figure 5-7. Trajectoire de guidage 3D - vue plan XZ, repère ECI.....	73
Figure 5-8. Trajectoire de guidage 3D - vue plan YZ, repère ECI.....	73
Figure 5-9. Force commandée sur les trois axes	74
Figure 5-10. Magnitude contrôle trajectoire.....	74
Figure 5-11. Masse trajectoire guidage	75
Figure 6-1. Temps de désintégration d'un débris en fonction de l'altitude	81
Figure 6-2. Différence en altitude des orbites équivalentes	82
Figure 6-3. Temps de désorbitation en fonction de l'altitude	86
Figure 6-4. Masse de carburant utilisée en fonction de l'altitude	86
Figure 6-5. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 1.....	87
Figure 6-6. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 2.....	88
Figure 6-7. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 3.....	88
Figure 6-8. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 4.....	89
Figure 6-9. Rapport ΔE /orbite circulaire/excentrique pour temps de vie équivalent.....	91
Figure 6-10. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (300x300 km et 800x180 km)	92
Figure 6-11. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (350x350 km et 800x230 km)	93
Figure 6-12. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (400x400 km et 800x280 km)	93
Figure 6-13. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (450x450 km et 800x330 km)	94

Figure 6-14. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (500x500 km et 800x380 km)	94
Figure 6-15. Argument du périégée optimal en fonction de MLTAN.....	95
Figure 6-16. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (300x300 km et 800x180 km)	96
- Juin.....	96
Figure 6-17. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (350x350 km et 800x230 km)	96
- Juin.....	96
Figure 6-18. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (400x400 km et 800x280 km)	97
- Juin.....	97
Figure 6-19. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (450x450 km et 800x330 km)	97
- Juin.....	97
Figure 6-20. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (500x500 km et 800x380 km)	98
- Juin.....	98
Figure 6-21. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 1.....	99
Figure 6-22. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 2.....	99
Figure 6-23. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 3.....	100
Figure 6-24. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 4.....	100
Figure 6-25. Rapport de la différence temps de vie sur le temps de vie maximal en fonction de l'altitude de l'orbite circulaire	101

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5-1. Paramètres guidage	69
Tableau 5-2. Paramètres transfert de Hohmann	75
Tableau 5-3. Transfert de Hohmann.....	77
Tableau 6-1. Description des différents scénarios de tests.....	80
Tableau 6-2. Orbites équivalentes	82
Tableau 6-3. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 1	84
Tableau 6-4. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 2.....	84
Tableau 6-5. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 3.....	85
Tableau 6-6. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 4.....	85

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Alors que les changements climatiques et la dégradation de l'environnement terrestre nous préoccupent de plus en plus, une autre menace environnementale, moins évidente mais tout aussi présente, nous guette : les débris artificiels qui orbitent au-dessus de nos têtes. Depuis le lancement du premier satellite Spoutnik 1 en 1957, l'environnement spatial est de plus en plus utilisé. Même s'il n'y avait plus aucun lancement de satellite aujourd'hui, le nombre de débris orbitaux se multiplie naturellement, soit par des explosions, des collisions ou tout simplement par les opérations normales des satellites. Au-delà d'un certain seuil, la densité des débris risque de créer une réaction en chaîne incontrôlée : l'effet Kessler [*Chen, 2011*]. À certaines altitudes, les collisions deviennent le générateur de débris le plus important et les débris créés retournent à l'environnement pour produire encore plus de collisions. Une collision entre un satellite et un débris pourrait avoir des effets dévastateurs : par exemple, un arrêt du fonctionnement des satellites pourrait perturber les services d'intervention d'urgence, affecter les systèmes bancaires au niveau mondial et même causer une interruption des réseaux électriques [*Ansdell, 2010*].

Des débris orbitaux sont présents de 100 à 36 000 km au-dessus de la surface de la Terre. Les radars de NORAD (North American Aerospace Defense Command) permettent de détecter et de suivre les débris afin de maintenir un catalogue d'environ 16 000 objets [*Chen, 2011*]. En orbite basse ('low-Earth orbit' ou LEO), soit à moins de 2000 km d'altitude, les objets de plus de 5 à 10 cm de diamètre peuvent être détectés alors qu'en orbite géostationnaire, à 36 000 km, les objets de plus de 1 m de diamètre sont assez gros pour être suivis par l'US Space Surveillance Network (SSN). Par ces méthodes de suivi, des collisions potentielles peuvent être prédites et évitées. L'impact d'un objet de 10 cm avec une cible telle qu'un vaisseau spatial ou un étage de fusée entraînerait probablement une désintégration catastrophique de la cible. En effet, en basse orbite, on parle de vitesses relatives d'environ 10 km/s.

Des 16 000 objets catalogués, seulement environ 6% sont des satellites actifs, le reste étant classé comme débris (satellites inactifs, étages de fusées, équipements rejetés et fragments de

rupture de satellites) [*Castronuovo, 2011*]. En termes de masse, environ 5900 tonnes de matériaux sont en orbite autour de la Terre (en excluant la station spatiale). Environ la moitié de cette masse se situe en orbite basse. La station spatiale, la navette et plusieurs satellites (dont le satellite canadien RadarSat) doivent fréquemment effectuer des manœuvres orbitales pour éviter des collisions avec des débris. Par exemple, en 2009, la NASA a dû effectuer 9 manœuvres pour éviter des collisions entre des satellites et des débris dangereux [*Ansdell, 2010*]. Les débris ne sont pas dangereux que pour les structures spatiales : ils sont aussi une préoccupation pour les astronautes effectuant des activités extravéhiculaires protégés seulement par leur combinaison spatiale.

Certains événements survenus au cours des dernières années sont responsables de la création d'une grande partie des débris orbitaux, notamment, l'explosion de l'antisatellite chinois Fengyun-1C en 2007 ainsi que la collision entre Cosmos 2251 et Iridium 33 en 2009. De plus, en 1996, le satellite français Cerise a vu son bras de stabilisation coupé par une partie d'une fusée Ariane. Certains satellites inactifs ont aussi été frappés : en 1991, le satellite russe Cosmos 1934 a été frappé par un débris du satellite Cosmos 926 et en janvier 2005, un débris d'une fusée chinoise qui avait explosé en mars 2000 a frappé une partie de fusée américaine vieille de 31 ans. Tous ces événements causent la création d'une quantité considérable de débris.

La région de basse orbite est la plus dense en termes de débris. Les collisions sont plus probables et plus destructrices en basse altitude qu'en haute altitude (orbites géostationnaires) puisque les satellites en basse altitude suivent des orbites qui se croisent et les vitesses orbitales relatives sont beaucoup plus élevées (50 fois plus grandes), tandis que les satellites géostationnaires voyagent tous dans la même direction et à des vitesses relatives beaucoup plus basses (environ 200 m/s). Les plus fortes densités spatiales de débris orbitaux se situent en orbites quasi-circulaires et quasi-polaires, à des altitudes de 800 à 1000 km [*Ansdell, 2010*]. Ces orbites sont "critiques" puisqu'elles sont plus susceptibles d'atteindre le point où le taux de production de nouveaux débris en raison des collisions est supérieur à celui des éliminations naturelles grâce à la traînée atmosphérique. Plusieurs fragmentations se sont produites dans ces zones critiques, telles que l'explosion de Fengyyn-1C et la collision Cosmos-Iridium. De plus, les débris peuvent rester plusieurs décennies à ces altitudes. Dans la bande d'altitude

grandement utilisée de 800-900 km, le risque qu'un satellite se fasse frapper par des débris de plus de 1 cm approche 1% pour une vie de 5-10 ans [*Chen, 2011*].

Plusieurs agences spatiales nationales (dont le Canada) et internationales se penchent actuellement sur le problème que posent les débris orbitaux. Au milieu des années 1990, les États-Unis ont développé et publié des lignes directrices pour des mesures d'atténuation; suivait en 2002 le Inter-Agency Space Debris Coordination Committee (IADC) et en 2007 le United Nations Committee on the Peaceful Uses of Outer Space (UNCOPUOS). La première conférence internationale sur l'élimination des débris orbitaux a eu lieu en décembre 2009 (organisée par NASA et DARPA) et a été suivie de plusieurs autres. Les organismes et agences spatiales font part de mesures d'atténuation. Par contre, il n'y a aucune loi qui régit les débris orbitaux. Les agences spatiales peuvent donc lancer des satellites sans penser à les ramener sur la Terre ou à limiter le nombre de débris qu'ils risquent de créer. Bien que les mesures d'atténuation soient importantes, des études démontrent qu'elles sont insuffisantes pour stabiliser l'environnement spatial à long terme.

Des simulations numériques récentes sur l'évolution de la population de débris orbitaux dans l'orbite terrestre basse indiquent que la population a atteint un point où l'environnement est instable et la croissance de population est inévitable. Même si tous les lancements orbitaux avaient été interrompus en 2004, la population d'objets spatiaux de plus de 10 cm ne demeurerait stable que jusqu'en 2055. Les objets qui ont le plus grand potentiel de contribuer à des collisions se situent en basse altitude et ont les caractéristiques suivantes : masse de 1000 à 1500 kg ou de 2500 à 3000 kg, inclinaison orbitale de 70-75, 80-85 ou 95-100 degrés et altitudes de 800-850, 950-1000 et 1450-1500 km. Selon Liou [*Liou et al., 2009*], enlever au moins 5 de ces objets par an permettrait de stabiliser la population de débris orbitaux au niveau de 2010.

Ce qui empêche la réalisation de telles opérations aujourd'hui est principalement le coût. En effet, lancer un objet en orbite basse coûte environ 10 000 \$/kg. De plus, les missions à la NASA prennent environ de 5 à 10 ans à planifier, développer et lancer [*Ansdell, 2010*]. Bref, on peut imaginer que le coût d'une mission d'élimination de débris est assez élevé. Par contre, si aucune action n'est prise bientôt, l'effet Kessler sera inévitable, ce qui rendra les activités

d'exploitation de l'espace impossibles. Il faut agir dès maintenant pour freiner la dégradation de l'environnement spatial en étudiant des techniques d'élimination des débris orbitaux.

On ne peut plus nier aujourd'hui que les débris orbitaux sont une menace à l'utilisation de l'environnement spatial. La raison principale pour laquelle aucune mission d'élimination des débris orbitaux n'a été réalisée est le coût prohibitif d'une telle mission. Ainsi, dans une optique d'optimalité de la consommation de carburant, le présent projet de recherche vise à répondre à la question suivante :

« Comment modifier l'orbite d'un satellite non opérationnel (débris) de façon optimale en utilisant les perturbations environnementales pour l'éliminer par désintégration dans la basse atmosphère terrestre? ».

Pour répondre à la question posée ci-dessus, une procédure et une stratégie de commande autonome doivent être développées. La stratégie de commande autonome implique un « satellite nettoyeur » qui s'agrippe au débris pour modifier l'orbite des satellites non opérationnels afin de mener à leur désintégration naturelle en basse atmosphère tout en optimisant les facteurs carburant et temps.

Plus spécifiquement, on désire atteindre les objectifs suivants :

- Réaliser des modèles numériques (simulations) du système d'élimination des débris orbitaux.
- Réaliser une stratégie d'élimination des débris avec commande autonome, optimisant les facteurs carburant et temps.
- Utiliser les perturbations de façon avantageuse afin d'économiser le carburant requis pour les manœuvres orbitales.
- Trouver dans quelles conditions il faut laisser un débris (orbite de largage) pour qu'il se désintègre en au moins 20 ans dans l'atmosphère terrestre (orbite circulaire ou orbite excentrique (elliptique)).

Selon l'analyse de l'état de l'art, certaines hypothèses et contraintes peuvent être formulées quant à la réalisation des objectifs. Premièrement, on vise la population de débris la plus dense, soit les débris en orbites quasi-circulaires en basse altitude à des inclinaisons quasi-

polaires. On cible donc des débris de 1000 à 3000 kg qui sont situés à des altitudes de 800 à 1500 km.

La technique d'élimination de débris préconisée dans le cadre de cette recherche est un satellite nettoyeur muni d'un dispositif d'augmentation de la traînée tel qu'un ballon gonflable (le but étant d'augmenter la surface de l'objet à désorbiter sans augmenter sa masse). En combinant deux techniques d'élimination des débris, on peut prendre avantage de divers phénomènes, principalement des perturbations causées par la traînée atmosphérique et la pression de radiation solaire. De plus, des poussées seront fournies par le carburant du satellite nettoyeur. Le but étant de minimiser le carburant utilisé afin de limiter le coût de la mission, un propulseur électrique fournissant des poussées de longue durée est considéré. La stratégie de commande autonome sera basée sur la commande optimale, qui utilise le principe du maximum de Pontryagin pour optimiser certains critères [Bryson et Ho, 1975]. Dans ce cas-ci, on désire minimiser la consommation de carburant et le temps nécessaire pour compléter la mission.

Dans un contexte de longue durée et de consommation minimum, une des innovations à étudier consiste à moduler l'effet des perturbations orbitales pour assister à la modification des paramètres orbitaux : par exemple, la modulation de l'orientation du satellite par rapport à l'atmosphère ambiante tel qu'exécuté sur Skylab en 1979 et l'augmentation de l'excentricité orbitale par résonance pour accélérer la rentrée atmosphérique tel qu'observé avec Echo I. D'autres perturbations orbitales peuvent être utilisées lors des manœuvres orbitales effectuées lors de la mission, tel que prendre avantage de la précession de l'ascension droite du nœud ascendant (paramètre orbital) causée par la non sphéricité de la Terre. Ainsi, on peut éviter d'effectuer des manœuvres de changement de plan qui sont très coûteuses au niveau du carburant.

Le document suivant présentera les travaux de recherche en débutant par énoncer les notions fondamentales nécessaires à la compréhension du projet, puis en analysant l'état de l'art et ensuite en présentant le simulateur et l'algorithme de guidage. Finalement, les résultats obtenus seront présentés.

CHAPITRE 2

NOTIONS DE BASE

Cette section présente les notions théoriques de base nécessaires pour comprendre la suite du document. Ces notions sont tirées des livres de référence du domaine [*Bate et al., 1971*], [*Chobotov, 2002*], [*Vallado, 2007*].

2.1 Définition des repères de référence

Cette section permet de définir les repères de référence qui seront utilisés dans ce document.

2.1.1 Position et vitesse

On peut représenter l'état d'un satellite en orbite autour d'un corps par ses vecteurs de position et de vitesse. Ces vecteurs peuvent être exprimés dans plusieurs repères. Dans les travaux présentés ici, on utilise pour ce faire deux repères principaux : le « Earth-Centered Inertial » (ECI) et le « Earth-Centered Equatorial Frame » (ECEF).

Le repère ECI, illustré à la Figure 2-1, est défini par les vecteurs unitaires \hat{x}_{ECI} , \hat{y}_{ECI} et \hat{z}_{ECI} de la façon suivante :

- \hat{x}_{ECI} et \hat{y}_{ECI} sont dans le plan équatorial
- \hat{z}_{ECI} est normal au plan équatorial et pointe en direction du Pôle Nord géographique
- \hat{x}_{ECI} pointe en direction de l'équinoxe vernal γ

Le repère ECI est utilisé pour représenter la position d'un corps dans un repère inertiel (fixe par rapport aux étoiles).

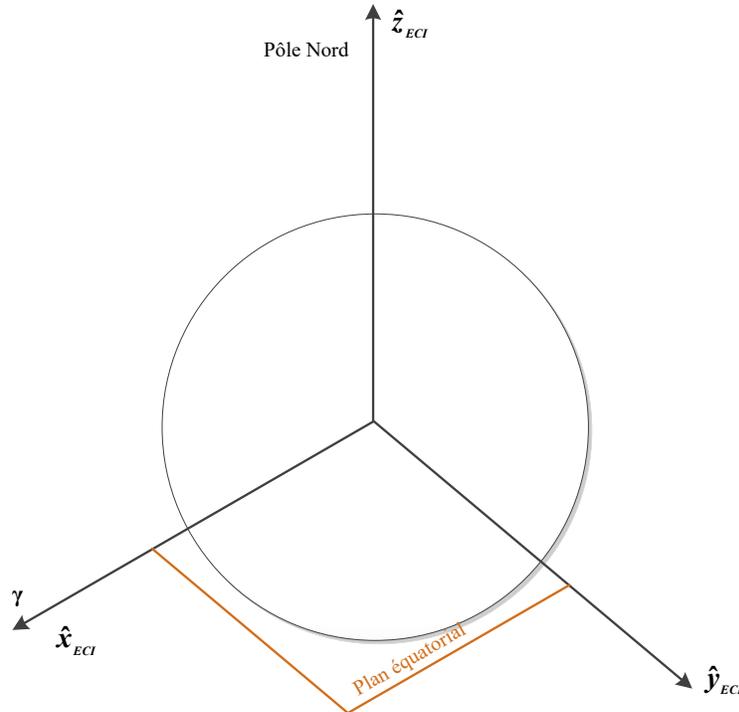


Figure 2-1. Repère ECI

On obtient donc la position et la vitesse du satellite par :

$$\begin{aligned}\vec{r}_{ECI} &= r_x \hat{x}_{ECI} + r_y \hat{y}_{ECI} + r_z \hat{z}_{ECI} \\ \vec{v}_{ECI} = \dot{\vec{r}}_{ECI} &= \dot{r}_x \hat{x}_{ECI} + \dot{r}_y \hat{y}_{ECI} + \dot{r}_z \hat{z}_{ECI} = v_x \hat{x}_{ECI} + v_y \hat{y}_{ECI} + v_z \hat{z}_{ECI}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Alors que le repère ECI est fixe dans l'espace (repère inertiel), le repère ECEF, quant à lui, tourne avec la Terre. Il est illustré à la Figure 2-2 et est défini par les vecteurs unitaires \hat{x}_{ECEF} , \hat{y}_{ECEF} et \hat{z}_{ECEF} de la façon suivante :

- \hat{x}_{ECEF} et \hat{y}_{ECEF} sont dans le plan équatorial
- \hat{z}_{ECEF} est normal au plan équatorial et pointe en direction du Pôle Nord géographique
- \hat{x}_{ECEF} pointe en direction du méridien primaire (méridien de référence de l'IERS)

Le repère ECEF est utilisé pour représenter la position d'un corps par rapport à la Terre (ce repère tourne avec la Terre).

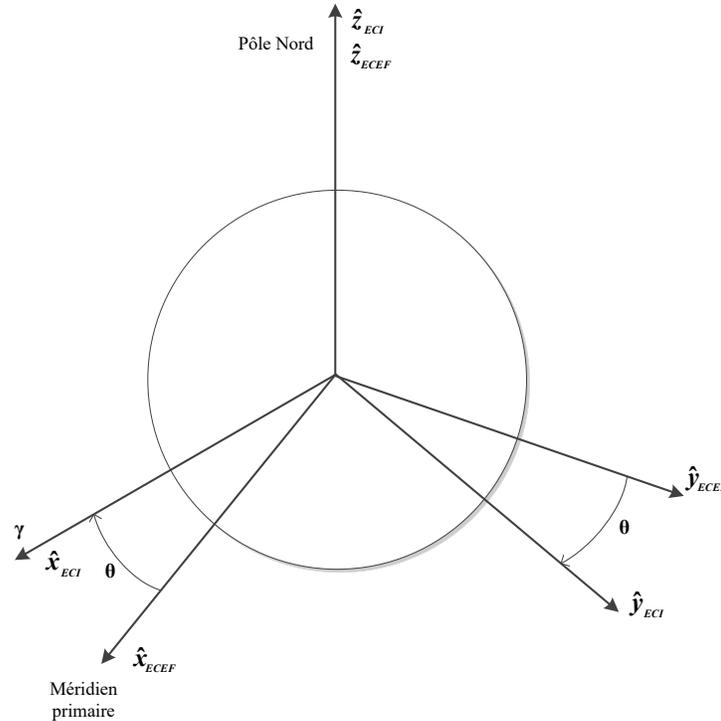


Figure 2-2. Repère ECEF

L'angle allant du méridien primaire vers l'équinoxe vernal est l'angle horaire de Greenwich (« Greenwich Hour Angle ») θ . Comme l'équinoxe vernal est fixe dans l'espace et que la Terre tourne, cet angle varie avec le temps et a une période d'environ 24 h. On obtient ainsi la transformation du repère ECI vers le repère ECEF en effectuant une rotation de θ autour de l'axe z :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ECEF} &= R_z(\theta) \mathbf{r}_{ECI} \\ R_z(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Lorsque l'on désire calculer l'effet de la traînée sur le satellite, un autre repère est nécessaire pour exprimer sa position, le repère LLA (latitude, longitude, altitude).

On peut effectuer la transformation du repère ECEF au repère LLA. Pour ce faire, il faut utiliser les paramètres du système géodésique standard mondial WGS84, qui définit un ellipsoïde de référence pour exprimer la forme de la Terre :

- Axe semi-majeur $a_E = 6378137$ m
- Axe semi-mineur $b_E = a_E(1 - f_E) = 6356752,314$ m

- Aplatissement $f_E = 1/298,257$
- Excentricité première $e_E = \sqrt{(a_E^2 - b_E^2)/a_E^2}$
- Excentricité seconde $e_E' = \sqrt{(a_E^2 - b_E^2)/b_E^2}$

On peut ainsi obtenir, à partir du vecteur de position dans le repère ECEF, la latitude φ , la longitude λ et l'altitude d :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{z_{ECEF} + e_E'^2 b_E \sin^3 \theta}{p - e_E^2 a_E \cos^3 \theta}\right) \quad (2.3)$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y_{ECEF}}{x_{ECEF}}\right) \quad (2.4)$$

$$d = \frac{p}{\cos \varphi} - N \quad (2.5)$$

à l'aide des variables auxiliaires :

$$p = \sqrt{x_{ECEF}^2 + y_{ECEF}^2} \quad (2.6)$$

$$\theta = \arctan\frac{z_{ECEF} a_E}{p b_E} \quad (2.7)$$

$$N = \frac{a_E}{\sqrt{1 - e_E^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.8)$$

2.1.2 Éléments orbitaux classiques

Six variables indépendantes appelées éléments orbitaux sont suffisantes pour décrire complètement une orbite. Cinq variables servent à décrire les dimensions, la forme et l'orientation d'une orbite. Une sixième variable est utilisée pour représenter la position du satellite dans son orbite. Les éléments présentés ci-dessous sont les éléments orbitaux classiques ou Képlériens (voir Figure 2-3) :

1. a , axe semi-majeur : une constante définissant la dimension de l'orbite;
2. e , excentricité : une constante définissant la forme de l'orbite;
3. i , inclinaison : l'angle entre le vecteur unitaire \hat{z}_{ECI} et un vecteur normal au plan orbital (vecteur du moment angulaire \vec{h});

4. Ω , ascension droite du nœud ascendant : l'angle dans le plan équatorial entre le vecteur unitaire \hat{x}_{ECI} et le point où le satellite croise le plan équatorial en direction du nord (nœud ascendant), mesuré dans le sens anti horaire lorsqu'observé du côté nord du plan équatorial;
5. ω , argument du périégée (le périégée est le point de l'orbite qui est le plus près de la Terre) : l'angle, dans le plan de l'orbite du satellite, entre le nœud ascendant et le périégée, mesuré dans la direction du mouvement du satellite;
6. ν_0 , anomalie vraie : l'angle, dans le plan orbital, entre le périégée et la position du satellite à un temps précis t_0 appelé *epoch*.

Dans le cadre des présents travaux, l'anomalie vraie est remplacée par l'anomalie moyenne, qui correspond à la fraction de la période orbitale qui s'est écoulée depuis le dernier passage au périégée, exprimée sous la forme d'un angle :

$$M = nt \quad (2.9)$$

où :

- $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ est la vitesse angulaire orbitale moyenne, $\mu = 398600 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$ est le paramètre gravitationnel standard de la Terre et a est l'axe semi-majeur de l'orbite
- t est le temps écoulé depuis le dernier passage au périégée

On peut aussi remplacer l'anomalie vraie par la longitude excentrique :

$$F = E + \omega + \Omega \quad (2.10)$$

où E est l'anomalie excentrique et est reliée à l'anomalie moyenne par l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E \quad (2.11)$$

L'inclinaison, i , correspond à l'angle du plan orbital. Cet angle se situe entre 0° et 180° . Des inclinaisons de 0° et 180° correspondent à des orbites équatoriales, alors que les autres sont des orbites inclinées. Un objet sur une orbite d'inclinaison de 0° à 90° tourne dans le même sens que la Terre (orbite directe ou prograde), alors qu'un objet sur une orbite d'inclinaison de 90° à 180° tourne en direction opposée à la rotation de la Terre (orbite rétrograde). Les orbites avec une inclinaison d'exactly 90° sont situées directement au-dessus des pôles, d'où leur nom d'orbites polaires.

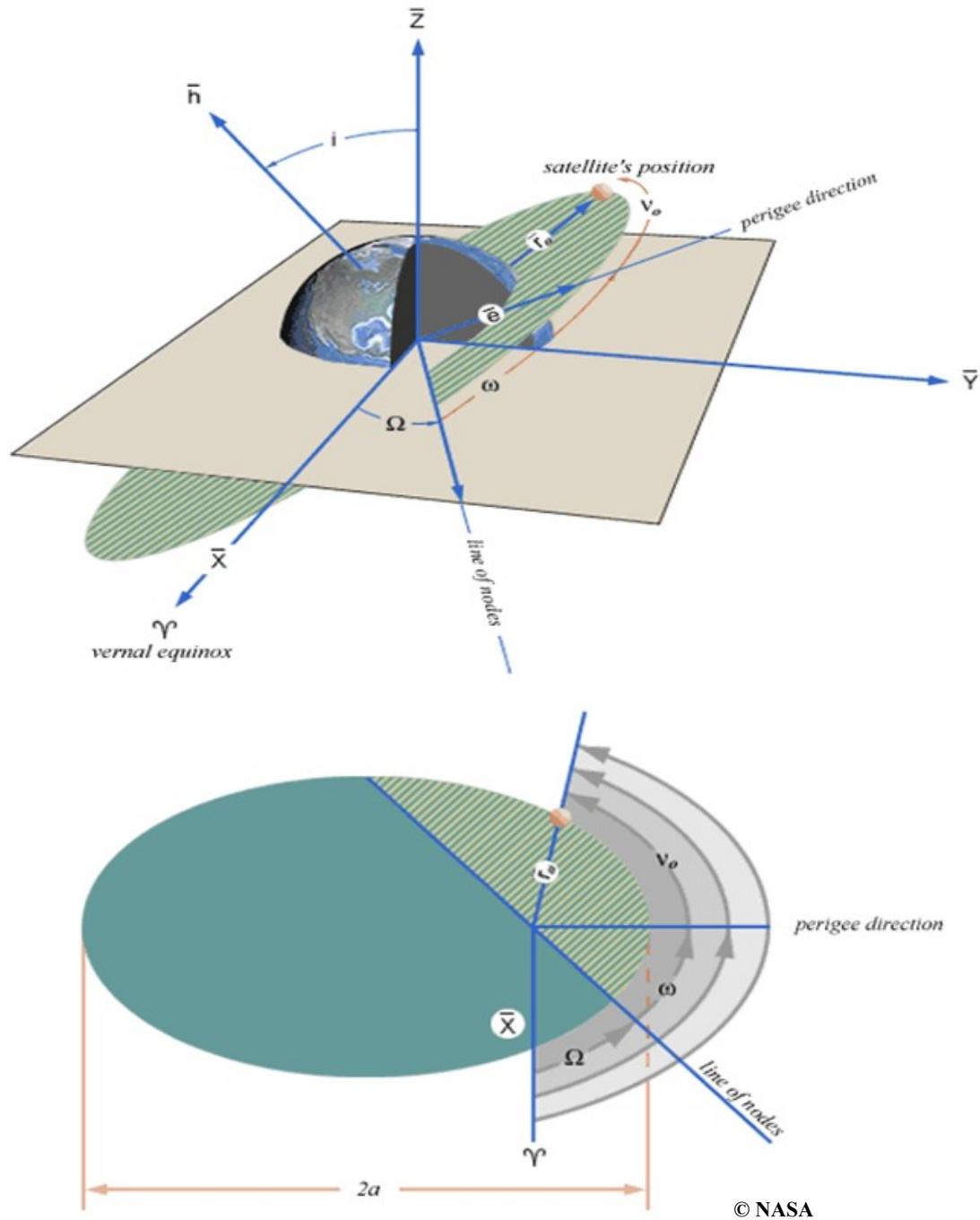


Figure 2-3. Éléments orbitaux (figure de la NASA)

2.1.3 Éléments équinoxiaux

Dans le cas particulier où $e = 0$ et $i = 0$, les éléments orbitaux classiques présentent des singularités. Si l'on s'intéresse à des orbites quasi-circulaires et/ou quasi-équatoriales, il peut s'avérer plus avantageux d'utiliser plutôt les éléments équinoxiaux, qui permettent d'effectuer

des transferts orbitaux pour tous types d'orbites sans singularité. Les éléments équinoctiaux sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 a &= a \\
 h &= e \sin(\omega + \Omega) \\
 k &= e \cos(\omega + \Omega) \\
 p &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin \Omega \\
 q &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos \Omega \\
 \lambda &= M + \omega + \Omega
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $a, e, i, \omega, \Omega, M$ sont les éléments orbitaux classiques.

On peut aussi obtenir les éléments orbitaux classiques à partir des éléments équinoctiaux :

$$\begin{aligned}
 a &= a \\
 e &= \sqrt{h^2 + k^2} \\
 i &= 2 \operatorname{atan} \sqrt{p^2 + q^2} \\
 \Omega &= \operatorname{atan}\left(\frac{p}{q}\right) \\
 \omega &= \operatorname{atan}\left(\frac{h}{k}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{p}{q}\right) \\
 M &= \lambda - \operatorname{atan}\left(\frac{h}{k}\right)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Le repère équinoctial (repère FGW), illustré à la Figure 2-4, est décrit par les vecteurs unitaires \hat{f} , \hat{g} et \hat{w} :

- \hat{f} et \hat{g} sont dans le plan de l'orbite
- La direction de \hat{f} est obtenue par une rotation d'un angle $-\Omega$ autour du vecteur normal au plan orbital effectuée à partir de la direction du nœud ascendant
- \hat{w} est normal au plan orbital (et donc aligné avec le vecteur du moment angulaire \vec{h})
- \hat{g} complète le repère direct

Le repère FGW est utilisé pour représenter la position d'un corps en fonction des éléments équinoctiaux. C'est un repère situé dans le plan de l'orbite.

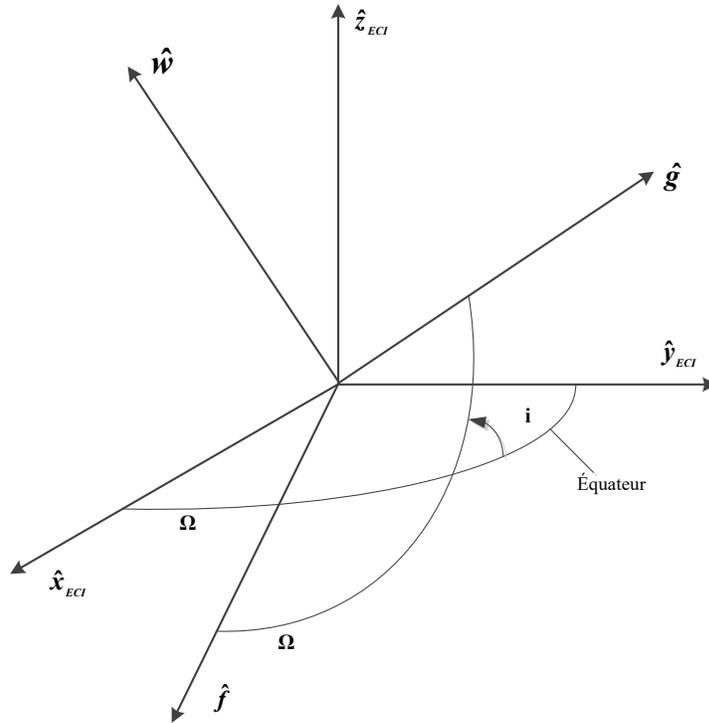


Figure 2-4. Repère équinoctial (FGW)

Il est à noter que les équations présentées ci-dessous supposent une orbite non perturbée, c'est-à-dire que seulement la force gravitationnelle de la Terre agit sur un corps en orbite. Dans ce repère, on définit les vecteurs de position et de vitesse ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= X_1 \hat{f} + Y_1 \hat{g} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{X}_1 \hat{f} + \dot{Y}_1 \hat{g}\end{aligned}\tag{2.14}$$

où

$$\begin{aligned}
X_1 &= a((1 - h^2\beta) \cos F + hk\beta \sin F - k) \\
Y_1 &= a(hk\beta \cos F + (1 - k^2\beta) \sin F - h) \\
\dot{X}_1 &= a^2nr^{-1}(hk\beta \cos F - (1 - h^2\beta) \sin F) \\
\dot{Y}_1 &= a^2nr^{-1}((1 - k^2\beta) \cos F - hk\beta \sin F)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\beta = \frac{1}{(1 + G)}$$

$$G = (1 - h^2 - k^2)^{1/2}$$

$$r = a(1 - k \cos F - h \sin F)$$

On peut transformer la position du repère FGW au repère ECI de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\underline{r}_{FGW} &= [\underline{f} \quad \underline{g} \quad \underline{w}]^T \underline{r}_{ECI} \\
\underline{r}_{ECI} &= [\underline{f} \quad \underline{g} \quad \underline{w}] \underline{r}_{FGW}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

où \underline{f} , \underline{g} et \underline{w} sont les composantes de \hat{f} , \hat{g} et \hat{w} exprimées dans le repère ECI :

$$\begin{aligned}
K &= 1 + p^2 + q^2 \\
\underline{f} &= \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1 - p^2 + q^2 \\ 2pq \\ -2p \end{bmatrix} \\
\underline{g} &= \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 2pq \\ 1 + p^2 - q^2 \\ 2q \end{bmatrix} \\
\underline{w} &= \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 2p \\ -2q \\ 1 - p^2 + q^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Une autre transformation utile est celle entre le repère FGW et le repère radial/transverse/normal centré sur le satellite (repère RTN). On définit le repère RTN par les vecteurs unitaires \hat{r} , \hat{t} et \hat{n} :

- \hat{r} et \hat{t} sont dans le plan orbital, où \hat{r} correspond à la direction radiale (vers le satellite) et \hat{t} correspond à la direction transverse
- \hat{n} est normal au plan orbital et est aligné avec le vecteur du moment angulaire ($\hat{n} = \hat{w}$)

Le repère RTN est utilisé pour représenter l'orientation de forces agissant sur le corps (il est centré sur le satellite).

La matrice de rotation nécessaire pour transformer du repère FGW vers le repère RTN est donnée par :

$$R_{RTN/FGW} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 0 \\ -Y_1 & X_1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$r = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$$

Pour la transformation inverse, on utilise la transposée de $R_{RTN/FGW}$, soit $R_{FGW/RTN}$.

Pour convertir du repère ECI au repère RTN, on utilise la matrice de rotation suivante :

$$R_{RTN/ECI} = \begin{bmatrix} \cos(u) \cos(\Omega) - \sin(u) \sin(\Omega) \cos(i) & \cos(u) \sin(\Omega) + \sin(u) \cos(\Omega) \cos(i) & \sin(u) \sin(i) \\ -\sin(u) \cos(\Omega) - \cos(u) \sin(\Omega) \cos(i) & -\sin(u) \sin(\Omega) + \cos(u) \cos(\Omega) \cos(i) & \cos(u) \sin(i) \\ \sin(\Omega) \sin(i) & -\cos(\Omega) \sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

où $u = \nu_0 + \omega$, est l'argument de latitude, correspondant à la somme de l'anomalie vraie et de l'argument du périhélie.

2.1.4 Manœuvres orbitales

Des manœuvres orbitales permettent de modifier les paramètres d'une orbite. Une force appliquée dans le plan orbital peut modifier l'excentricité e , l'axe semi-majeur a et l'argument du périhélie ω . Une force appliquée normalement au plan orbital peut modifier l'inclinaison i et l'ascension droite du nœud ascendant Ω . On considère premièrement que toutes les poussées sont instantanées (manœuvres impulsives). Le cas des manœuvres non impulsives (engins à faible poussée) est discuté dans l'état de l'art.

Dans le cas d'une manœuvre dans le plan orbital, pour une efficacité maximale de la poussée, l'angle de vol (angle allant de l'horizontale locale (perpendiculaire au vecteur de position)

jusqu'au vecteur de vitesse) doit être de zéro. Alors, les poussées tangentielles ne se produisent qu'au périégée ou à l'apogée. On définit la variable Δv (changement de vitesse) comme étant :

$$\Delta v = v_{final} - v_{initial} \quad (2.20)$$

Il est à noter qu'en général, l'équation (2.20) est une équation vectorielle. Par contre, dans ce cas-ci la poussée est colinéaire avec la vitesse et donc les modules se soustraient directement. Ainsi, une augmentation de la vitesse permet d'augmenter l'axe semi-majeur alors qu'une diminution de la vitesse permet de le diminuer (l'orbite se rapproche de la Terre).

Le transfert de Hohmann (Figure 2-5) est la manœuvre la plus efficace (en énergie) pour effectuer le transfert entre deux orbites circulaires coplanaires partageant un même centre [Vallado, 2007]. L'orbite de transfert est une orbite elliptique tangente aux deux cercles sur la ligne des apsides, i.e. la ligne qui relie le périégée et l'apogée de l'orbite. Le périégée et l'apogée de l'ellipse de transfert correspondent respectivement aux rayons du cercle interne et du cercle externe. Selon Walter Hohmann, la variation minimale de vitesse de transfert est obtenue entre deux orbites en utilisant deux poussées tangentielles.

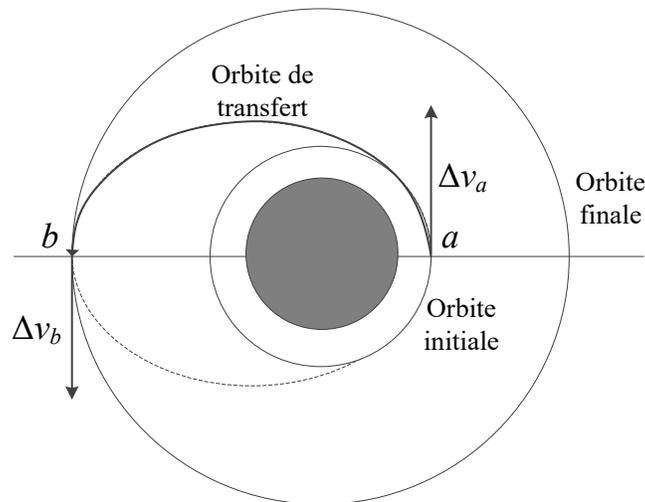


Figure 2-5. Transfert de Hohmann

Un transfert d'une orbite circulaire vers une autre orbite circulaire est illustré à la Figure 2-5. Il est à noter que la méthode s'applique aussi pour des orbites elliptiques.

On considère maintenant le cas des manœuvres coplanaires générales, avec pour exemple le transfert entre deux orbites circulaires. Pour pouvoir utiliser une orbite elliptique de transfert,

cette dernière doit avoir un rayon de périégée plus petit ou égal au rayon de l'orbite circulaire interne et un rayon d'apogée plus grand ou égal au rayon de l'orbite circulaire externe. La variation de vitesse requise (Δv) est alors :

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta\phi} \quad (2.21)$$

$$\Delta\varepsilon \approx v_1 \Delta v \cos \Delta\phi \quad (2.22)$$

où

- v_1 est la vitesse de l'orbite initiale
- v_2 est la vitesse de l'orbite finale
- $\Delta\phi$ est la différence en angle de vol entre l'orbite initiale et l'orbite finale (l'angle entre les vecteurs de vitesse \vec{v}_1 et \vec{v}_2)
- $\Delta\varepsilon$ est la différence d'énergie entre les 2 orbites

On remarque ici que si $\Delta\phi = 0$, soit \vec{v}_1 et \vec{v}_2 parallèles, on obtient l'équation pour un transfert de Hohmann (équation 2.20).

Dans le cas général des manœuvres non coplanaires, on obtient :

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2[\cos \Delta\phi - \cos \phi_2 \cos \phi_1(1 - \cos \delta)]} \quad (2.23)$$

où

- ϕ_1 est l'angle de vol de l'orbite initiale
- ϕ_2 est l'angle de vol de l'orbite finale
- $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$
- δ est l'angle entre les deux plans orbitaux

2.2 Dynamique du satellite (éléments équinoctiaux)

Puisque l'on s'intéresse à des orbites initiales quasi-circulaires, les éléments orbitaux classiques ne peuvent être utilisés car ils présentent des singularités pour ce type d'orbite. Les éléments équinoctiaux, qui permettent de décrire la dynamique de tous les types d'orbites sans singularité, sont donc adaptés au problème. Les équations décrivant la dynamique orbitale avec les éléments équinoctiaux sont développées dans [Kechichian, 1996] et sont répétées ci-dessous :

$$\dot{\underline{z}} = \left(\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{\dot{r}}^T} \right) \underline{u} f_t \quad (2.24)$$

où

- $f_t = f/m$ est le module de l'accélération instantanée du propulseur électrique (perturbation)
- $\underline{u} = [u_f \quad u_g \quad u_w]^T$ est la matrice colonne des composantes du vecteur d'accélération dans le repère FGW (vecteur unitaire)
- $\underline{z} = [a \quad h \quad k \quad p \quad q \quad \lambda]^T$ est la matrice colonne contenant les éléments équinoctiaux (vecteur d'état)
- $\underline{\dot{r}}$ est la matrice colonne des composantes du vecteur de vitesse du satellite, dans le repère FGW

Les équations des dérivées des différentes composantes du vecteur d'état sont données par les équations suivantes. Il est à noter que ces équations utilisent les variables X_1 , Y_1 , \dot{X}_1 et \dot{Y}_1 , définies à la section 2.1.3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \underline{\dot{r}}^T} &= 2a^{-1}n^{-2}[\dot{X}_1 \quad \dot{Y}_1 \quad 0] \\ &= [M_{11} \quad M_{12} \quad M_{13}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \underline{\dot{r}}^T} &= \left[Gn^{-1}a^{-2} \left(\frac{\partial X_1}{\partial k} - h\beta \frac{\dot{X}_1}{n} \right) \quad Gn^{-1}a^{-2} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial k} - h\beta \frac{\dot{Y}_1}{n} \right) \quad k(qY_1 - pX_1)n^{-1}a^{-2}G^{-1} \right] \\ &= [M_{21} \quad M_{22} \quad M_{23}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \underline{\dot{r}}^T} &= \left[-Gn^{-1}a^{-2} \left(\frac{\partial X_1}{\partial h} + k\beta \frac{\dot{X}_1}{n} \right) \quad -Gn^{-1}a^{-2} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial h} + k\beta \frac{\dot{Y}_1}{n} \right) \quad h(qY_1 - pX_1)n^{-1}a^{-2}G^{-1} \right] \\ &= [M_{31} \quad M_{32} \quad M_{33}] \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \underline{\dot{r}}^T} &= \left[0 \quad 0 \quad KY_1 \frac{n^{-1}a^{-2}G^{-1}}{2} \right] \\ &= [M_{41} \quad M_{42} \quad M_{43}] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \underline{r}^T} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & KX_1 \frac{n^{-1}a^{-2}G^{-1}}{2} \end{bmatrix} \\ &= [M_{51} \quad M_{52} \quad M_{53}] \\ &\quad \frac{\partial \lambda}{\partial \underline{r}^T} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} n^{-1}a^{-2} \left(-2X_1 + G \left(h\beta \frac{\partial X_1}{\partial h} + k\beta \frac{\partial X_1}{\partial k} \right) \right) & n^{-1}a^{-2} \left(-2Y_1 + G \left(h\beta \frac{\partial Y_1}{\partial h} + k\beta \frac{\partial Y_1}{\partial k} \right) \right) & n^{-1}a \end{bmatrix} \\ &= [M_{61} \quad M_{62} \quad M_{63}] \end{aligned} \quad (2.30)$$

où

$$K = 1 + p^2 + q^2 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial h} = a \left(-(h \cos F - k \sin F) \left(\beta + \frac{h^2 \beta^3}{(1 - \beta)} \right) - \frac{a}{r} \cos F (h\beta - \sin F) \right) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial k} = -a \left((h \cos F - k \sin F) \frac{hk\beta^3}{(1 - \beta)} + 1 + \frac{a}{r} \sin F (\sin F - h\beta) \right) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial h} = a \left((h \cos F - k \sin F) \frac{hk\beta^3}{(1 - \beta)} - 1 + \frac{a}{r} \cos F (k\beta - \cos F) \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial k} = a \left((h \cos F - k \sin F) \left(\beta + \frac{k^2 \beta^3}{(1 - \beta)} \right) + \frac{a}{r} \sin F (\cos F - k\beta) \right) \quad (2.35)$$

On obtient donc le système d'équations différentielles suivant pour les variables d'état :

$$\dot{a} = \left(\frac{\partial a}{\partial \underline{r}^T} \right) \underline{u} f_t \quad (2.36)$$

$$\dot{h} = \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{r}^T} \right) \underline{u} f_t \quad (2.37)$$

$$\dot{k} = \left(\frac{\partial k}{\partial \underline{r}^T} \right) \underline{u} f_t \quad (2.38)$$

$$\dot{p} = \left(\frac{\partial p}{\partial \underline{r}^T} \right) \underline{u} f_t \quad (2.39)$$

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial q}{\partial \underline{r}^T} \right) \underline{u} f_t \quad (2.40)$$

$$\dot{\lambda} = n + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \underline{r}^T} \right) \underline{u} f_t \quad (2.41)$$

Puisque l'on exprime les dérivées partielles en fonction de la longitude excentrique F , il est nécessaire de résoudre l'équation de Kepler à chaque pas d'intégration :

$$\lambda = F - k \sin F + h \cos F \quad (2.42)$$

Cette équation peut se résoudre à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode permet d'approximer un zéro de la fonction d'une variable réelle $f(x)$ en se basant sur son développement de Taylor au premier ordre.

$$f(F) = F - k \sin F + h \cos F - \lambda \quad (2.43)$$

$$f'(F) = 1 - k \cos F - h \sin F \quad (2.44)$$

$$F_{i+1} = F_i - \frac{f(F_i)}{f'(F_i)} \quad (2.45)$$

Il est à noter qu'un nombre d'itérations maximal doit être imposé afin d'éviter une boucle infinie.

2.3 Théorie de la commande optimale

L'objectif principal de la commande optimale est de déterminer les signaux de commande qui amènent un processus à satisfaire certaines contraintes physiques et extrémiser (maximiser ou minimiser) un critère de performance. Pour formuler un tel problème, un modèle du processus à contrôler est requis, ainsi qu'une spécification de l'indice de performance, des conditions limites et des contraintes physiques sur les états ou les commandes. On s'intéresse ici à un problème de minimisation du carburant, ainsi on désire minimiser l'indice de performance suivant :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |\vec{u}(t)| dt \quad (2.46)$$

où $|\vec{u}(t)|$ correspond à la magnitude du vecteur de commandes (accélération).

De façon plus générale, l'indice de performance s'écrit :

$$J = \underline{x}^T(t_f)F\underline{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\underline{x}^T(t)Q\underline{x}(t) + \underline{u}^T(t)R\underline{u}(t)] dt \quad (2.47)$$

$$J = S(\underline{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt$$

Les matrices F , Q et R permettent de mettre des poids sur les différents paramètres afin d'obtenir un indice de performance adapté au problème à résoudre. Ainsi, la matrice F correspond aux contraintes sur l'état final ($\underline{x}(t_f)$), la matrice Q sur l'intégrale des erreurs et la matrice R sur l'effort de commande.

Pour résoudre le problème de la commande optimale, on utilise la branche des mathématiques qui permet de trouver une fonction correspondant à un extrémum d'une fonctionnelle : le calcul des variations. On doit aussi se baser sur le principe du minimum de Pontryagin.

Supposons un processus :

$$\dot{\vec{x}}(t) = f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (2.48)$$

dont l'indice de performance général est :

$$J = S(\underline{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt \quad (2.49)$$

et les conditions limites sont :

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \text{ et } t_f \text{ et } \underline{x}(t_f) = \underline{x}_f \text{ sont libres.}$$

Dans cette équation, S sert à mettre un poids sur les valeurs finales et V correspond à l'équation à optimiser. Dans les développements subséquents, S est considéré nul (on ne met pas de poids sur les valeurs finales). On cherche seulement à minimiser l'indice de performance (magnitude de l'accélération).

Pour solutionner ce problème, on forme premièrement le hamiltonien en ajoutant à l'indice de performance la multiplication des états adjoints (dérivées des variables d'état, $\underline{\lambda}$) par les fonctions des variables d'état :

$$\mathcal{H}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{\lambda}(t), t) = V(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) + \underline{\lambda}^T(t) f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \quad (2.50)$$

Il est à noter que $\underline{\lambda}$ présenté ici ne correspond pas à la variable de l'équation (2.41).

Par le principe du minimum de Pontryagin, on désire minimiser \mathcal{H} par rapport à $u(t)$ ($\leq U$), de sorte que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \underline{u}} \right)_* &= \underline{0} \\ \underline{u}^*(t) &= h(\underline{x}^*(t), \underline{\lambda}^*(t), t) \\ \mathcal{H}(\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t), \underline{\lambda}^*(t), t) &\leq \mathcal{H}(\underline{x}^*(t), \underline{u}(t), \underline{\lambda}^*(t), t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

où l'étoile (*) représente la solution optimale et h représente la solution optimale de la commande, dépendant des états optimaux, des états adjoints optimaux et du temps.

Finalement, on résout les équations d'états et d'états adjoints, obtenues à partir du hamiltonien présenté ci-haut :

$$\dot{\underline{x}}^*(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{\lambda}} \right)_* \text{ et } \dot{\underline{\lambda}}^*(t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}} \right)_* \quad (2.52)$$

ayant les conditions initiales \underline{x}_0 et les conditions finales :

$$[\mathcal{H}^*]_{t_f} \delta t_f + [-\underline{\lambda}^*(t)]_{t_f}^T \delta \underline{x}_f = 0. \quad (2.53)$$

où δt_f et $\delta \underline{x}_f$ représentent de petites variations autour de la valeur finale du temps et des états, respectivement.

Ceci mène à un problème aux deux limites, qui doit être résolu numériquement. Différentes méthodes sont présentées plus loin dans le présent chapitre ainsi que dans l'état de l'art. L'une des difficultés de résoudre ce type de problème vient du fait que l'on ne connaît pas les valeurs initiales des états adjoints. Ainsi, il faut trouver une méthode qui permet de les estimer pour ensuite s'approcher de la solution désirée.

Pour effectuer un transfert orbital à l'aide de la commande optimale, les équations d'Euler-Lagrange, ou équations des états adjoints, doivent être développées. Selon la théorie de la commande optimale, à partir du hamiltonien du système, on peut obtenir les équations des états adjoints et la valeur optimale des commandes. Si $\dot{\underline{z}}$ représente la dynamique du système ($\dot{\underline{z}} = f(\underline{z}(t), \underline{u}(t), t)$), où $\underline{z} = [a \quad h \quad k \quad p \quad q \quad \lambda]^T$ correspond aux états du système, alors le hamiltonien est :

$$H = V(\underline{z}(t), \underline{u}(t), t) + \underline{\lambda}_z^T \dot{\underline{z}} \quad (2.54)$$

où $\underline{\lambda}_z = [\lambda_a \ \lambda_h \ \lambda_k \ \lambda_p \ \lambda_q \ \lambda_\lambda]^T$ correspond aux états adjoints du système et où dans le cas présent $V(\underline{u})$ correspond à l'expression à l'intérieur de la fonction coût à minimiser.

On obtient les équations des états adjoints de la manière suivante :

$$\dot{\underline{\lambda}}_z = - \frac{\partial H}{\partial \underline{z}} \quad (2.55)$$

Il est à noter que l'on ne connaît pas la valeur initiale des états adjoints. Par contre, leur valeur finale doit satisfaire l'équation 2.53.

Toujours à partir du hamiltonien du système, on peut trouver les commandes optimales telles que :

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{0} \quad (2.56)$$

C'est ce qui est fait dans [Kechichian, 1996] et [Tarzi et al., 2013] et qui permet d'obtenir les équations nécessaires pour résoudre le problème de commande optimale à l'aide d'une méthode numérique. Ainsi, on obtient le hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} H = V(\underline{u}) &+ [\lambda_a(M_{11}u_f + M_{12}u_g + M_{13}u_w) + \lambda_h(M_{21}u_f + M_{22}u_g + M_{23}u_w) \\ &+ \lambda_k(M_{31}u_f + M_{32}u_g + M_{33}u_w) + \lambda_p(M_{41}u_f + M_{42}u_g + M_{43}u_w) \\ &+ \lambda_q(M_{51}u_f + M_{52}u_g + M_{53}u_w) + \lambda_\lambda(M_{61}u_f + M_{62}u_g + M_{63}u_w)] \\ &+ \lambda_\lambda n \end{aligned} \quad (2.57)$$

où u_f , u_g et u_w sont les composantes de \vec{u} (la commande) dans le repère équinoctial.

Les équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_a = -\frac{\partial H}{\partial a} = & \left[-\lambda_a \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial a} u_f + \frac{\partial M_{12}}{\partial a} u_g + \frac{\partial M_{13}}{\partial a} u_w \right) \right. \\
& - \lambda_h \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial a} u_f + \frac{\partial M_{22}}{\partial a} u_g + \frac{\partial M_{23}}{\partial a} u_w \right) \\
& - \lambda_k \left(\frac{\partial M_{31}}{\partial a} u_f + \frac{\partial M_{32}}{\partial a} u_g + \frac{\partial M_{33}}{\partial a} u_w \right) \\
& - \lambda_p \left(\frac{\partial M_{41}}{\partial a} u_f + \frac{\partial M_{42}}{\partial a} u_g + \frac{\partial M_{43}}{\partial a} u_w \right) \\
& - \lambda_q \left(\frac{\partial M_{51}}{\partial a} u_f + \frac{\partial M_{52}}{\partial a} u_g + \frac{\partial M_{53}}{\partial a} u_w \right) \\
& \left. - \lambda_\lambda \left(\frac{\partial M_{61}}{\partial a} u_f + \frac{\partial M_{62}}{\partial a} u_g + \frac{\partial M_{63}}{\partial a} u_w \right) \right] - \lambda_\lambda \frac{\partial n}{\partial a}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

où

$$\frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{3n}{2a} = -\frac{3}{2} \mu^{1/2} a^{-5/2} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_h = -\frac{\partial H}{\partial h} = & \left[-\lambda_a \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial h} u_f + \frac{\partial M_{12}}{\partial h} u_g + \frac{\partial M_{13}}{\partial h} u_w \right) \right. \\
& - \lambda_h \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial h} u_f + \frac{\partial M_{22}}{\partial h} u_g + \frac{\partial M_{23}}{\partial h} u_w \right) \\
& - \lambda_k \left(\frac{\partial M_{31}}{\partial h} u_f + \frac{\partial M_{32}}{\partial h} u_g + \frac{\partial M_{33}}{\partial h} u_w \right) \\
& - \lambda_p \left(\frac{\partial M_{41}}{\partial h} u_f + \frac{\partial M_{42}}{\partial h} u_g + \frac{\partial M_{43}}{\partial h} u_w \right) \\
& - \lambda_q \left(\frac{\partial M_{51}}{\partial h} u_f + \frac{\partial M_{52}}{\partial h} u_g + \frac{\partial M_{53}}{\partial h} u_w \right) \\
& \left. - \lambda_\lambda \left(\frac{\partial M_{61}}{\partial h} u_f + \frac{\partial M_{62}}{\partial h} u_g + \frac{\partial M_{63}}{\partial h} u_w \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_k = -\frac{\partial H}{\partial k} = & \left[-\lambda_a \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial k} u_f + \frac{\partial M_{12}}{\partial k} u_g + \frac{\partial M_{13}}{\partial k} u_w \right) \right. \\
& - \lambda_h \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial k} u_f + \frac{\partial M_{22}}{\partial k} u_g + \frac{\partial M_{23}}{\partial k} u_w \right) \\
& - \lambda_k \left(\frac{\partial M_{31}}{\partial k} u_f + \frac{\partial M_{32}}{\partial k} u_g + \frac{\partial M_{33}}{\partial k} u_w \right) \\
& - \lambda_p \left(\frac{\partial M_{41}}{\partial k} u_f + \frac{\partial M_{42}}{\partial k} u_g + \frac{\partial M_{43}}{\partial k} u_w \right) \\
& - \lambda_q \left(\frac{\partial M_{51}}{\partial k} u_f + \frac{\partial M_{52}}{\partial k} u_g + \frac{\partial M_{53}}{\partial k} u_w \right) \\
& \left. - \lambda_\lambda \left(\frac{\partial M_{61}}{\partial k} u_f + \frac{\partial M_{62}}{\partial k} u_g + \frac{\partial M_{63}}{\partial k} u_w \right) \right] \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_p = -\frac{\partial H}{\partial p} = & \left[-\lambda_a \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial p} u_f + \frac{\partial M_{12}}{\partial p} u_g + \frac{\partial M_{13}}{\partial p} u_w \right) \right. \\
& - \lambda_h \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial p} u_f + \frac{\partial M_{22}}{\partial p} u_g + \frac{\partial M_{23}}{\partial p} u_w \right) \\
& - \lambda_k \left(\frac{\partial M_{31}}{\partial p} u_f + \frac{\partial M_{32}}{\partial p} u_g + \frac{\partial M_{33}}{\partial p} u_w \right) \\
& - \lambda_p \left(\frac{\partial M_{41}}{\partial p} u_f + \frac{\partial M_{42}}{\partial p} u_g + \frac{\partial M_{43}}{\partial p} u_w \right) - \lambda_q \left(\begin{array}{l} \frac{\partial M_{51}}{\partial p} u_f + \frac{\partial M_{52}}{\partial p} u_g \\ + \frac{\partial M_{53}}{\partial p} u_w \end{array} \right) \\
& \left. - \lambda_\lambda \left(\frac{\partial M_{61}}{\partial p} u_f + \frac{\partial M_{62}}{\partial p} u_g + \frac{\partial M_{63}}{\partial p} u_w \right) \right] \tag{2.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_q = -\frac{\partial H}{\partial q} = & \left[-\lambda_a \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial q} u_f + \frac{\partial M_{12}}{\partial q} u_g + \frac{\partial M_{13}}{\partial q} u_w \right) \right. \\
& - \lambda_h \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial q} u_f + \frac{\partial M_{22}}{\partial q} u_g + \frac{\partial M_{23}}{\partial q} u_w \right) \\
& - \lambda_k \left(\frac{\partial M_{31}}{\partial q} u_f + \frac{\partial M_{32}}{\partial q} u_g + \frac{\partial M_{33}}{\partial q} u_w \right) \\
& - \lambda_p \left(\frac{\partial M_{41}}{\partial q} u_f + \frac{\partial M_{42}}{\partial q} u_g + \frac{\partial M_{43}}{\partial q} u_w \right) \\
& - \lambda_q \left(\frac{\partial M_{51}}{\partial q} u_f + \frac{\partial M_{52}}{\partial q} u_g + \frac{\partial M_{53}}{\partial q} u_w \right) \\
& \left. - \lambda_\lambda \left(\frac{\partial M_{61}}{\partial q} u_f + \frac{\partial M_{62}}{\partial q} u_g + \frac{\partial M_{63}}{\partial q} u_w \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = & \left[-\lambda_a \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial \lambda} u_f + \frac{\partial M_{12}}{\partial \lambda} u_g + \frac{\partial M_{13}}{\partial \lambda} u_w \right) \right. \\
& - \lambda_h \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial \lambda} u_f + \frac{\partial M_{22}}{\partial \lambda} u_g + \frac{\partial M_{23}}{\partial \lambda} u_w \right) \\
& - \lambda_k \left(\frac{\partial M_{31}}{\partial \lambda} u_f + \frac{\partial M_{32}}{\partial \lambda} u_g + \frac{\partial M_{33}}{\partial \lambda} u_w \right) \\
& - \lambda_p \left(\frac{\partial M_{41}}{\partial \lambda} u_f + \frac{\partial M_{42}}{\partial \lambda} u_g + \frac{\partial M_{43}}{\partial \lambda} u_w \right) \\
& - \lambda_q \left(\frac{\partial M_{51}}{\partial \lambda} u_f + \frac{\partial M_{52}}{\partial \lambda} u_g + \frac{\partial M_{53}}{\partial \lambda} u_w \right) \\
& \left. - \lambda_\lambda \left(\frac{\partial M_{61}}{\partial \lambda} u_f + \frac{\partial M_{62}}{\partial \lambda} u_g + \frac{\partial M_{63}}{\partial \lambda} u_w \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Ceci mène à un problème aux deux limites, qui peut être résolu par une méthode numérique, présentée à la section suivante. Le problème de contrôle dans le cas présent se résume à

trouver la commande \underline{u} qui amène les états \underline{z} de $\underline{z}(t_0) = \underline{z}_0$ à $\underline{z}(t_f) = \underline{z}_f$, où t_f est fixé de manière à ce que les commandes d'accélération ne dépassent pas une certaine valeur et ce, tout en minimisant l'indice de performance donné à l'équation 2.46. Ainsi, il faut solutionner les équations différentielles des états adjoints $\underline{\lambda}$, qui dépendent de \underline{u} , mais donc on ne connaît pas les valeurs initiales. Seulement leur valeur finale est « connue », car elle doit obéir à l'équation 2.53.

2.4 Résolution d'un problème aux deux limites

Un problème aux deux limites est défini par une ou plusieurs équations différentielles sujettes à deux contraintes sur la solution de ces équations, appelées les conditions limites, spécifiées à des moments différents. La solution à ce problème est une solution de l'équation différentielle qui satisfait aussi les conditions limites. Un problème aux deux limites est défini symboliquement comme suit, par exemple pour un système d'ordre 2 :

Résoudre

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)), t \in [a, b] \quad (2.65)$$

avec les conditions limites :

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

où a est la borne temporelle inférieure et b est la borne temporelle supérieure.

Deux méthodes numériques ont été identifiées pour la résolution d'un problème aux deux limites : la méthode du gradient et la méthode du tir simple. Il est à noter qu'il existe aussi la fonction MATLAB « bvp4c » qui utilise une méthode de collocation, mais cette solution n'a pas été retenue étant donné que l'utilisation d'une fonction MATLAB offre peu de contrôle sur l'algorithme. De plus, les méthodes « neighboring extremal » existent aussi mais doivent être combinées avec la méthode du gradient pour être efficaces.

2.4.1 Méthode du gradient

Parmi les différentes méthodes basées sur le gradient, c'est l'algorithme de « steepest descent » qui a été choisi. Cet algorithme est défini dans [Kirk, 1998] et est répété ci-dessous :

1. Sélectionner une approximation de la commande nominale $\underline{u}^{(0)}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$.
L'indice d'itération i prend la valeur de zéro.

2. En utilisant la commande $\underline{u}^{(i)}$, intégrer les équations dynamiques ($\dot{\underline{x}}$) de t_0 à t_f avec les conditions initiales \underline{x}_0 pour obtenir $\underline{x}(t_f)$.
3. Calculer $\underline{\lambda}^{(i)}(t_f) = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^{(i)}(t_f))$, où $\underline{x}^{(i)}(t_f)$ correspond aux états finaux désirés et \underline{h} correspond aux équations d'état. En utilisant la valeur de $\underline{\lambda}^{(i)}(t_f)$ en tant que « condition initiale », intégrer les équations adjointes de t_f à t_0 .
4. Calculer numériquement $\frac{\partial H^{(i)}}{\partial \underline{u}}$.
5. Vérifier la condition d'arrêt de l'algorithme : si $\left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \underline{u}} \right\| \leq \gamma$, où γ est une constante correspondant à la tolérance de l'algorithme, arrêter les itérations et sauvegarder les états finaux et commandes. Sinon, générer une nouvelle commande selon :

$$\underline{u}^{(i+1)}(t_k) = \underline{u}^{(i)}(t_k) - \tau \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \underline{u}}(t_k) \quad (2.66)$$

où τ est une constante représentant le pas de simulation et k est l'indice de discrétisation du temps.

6. Remplacer $\underline{u}^{(i)}(t)$ par $\underline{u}^{(i)}(t_k)$, incrémenter l'indice d'itération i et retourner à l'étape 2.

L'algorithme de « steepest-descent » a les caractéristiques suivantes :

- L'estimation initiale de la commande $\underline{u}^{(0)}(t)$ est nécessaire et est basée sur ce que l'on connaît du problème.
- L'algorithme converge pratiquement toujours, peu importe l'estimation initiale de la commande.
- L'algorithme nécessite une grande charge de calcul.

2.4.2 Méthode de tir simple

Parmi les différentes méthodes de tir (« shooting methods »), la méthode du tir simple utilisant la méthode de Newton a été choisie. Pour un problème aux deux limites général d'un système d'équations différentielles d'ordre deux, la méthode de tir simple est définie comme suit. Le problème aux limites est :

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)), \quad t \in [a, b] \quad (2.67)$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

où a est la borne temporelle inférieure et b est la borne temporelle supérieure.

On définit $x(t, s)$ la solution du problème à valeur initiale (IVP) :

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)), & t \in [a, b] \\ x(a) &= \alpha, & \dot{x}(a) = s \end{aligned} \quad (2.68)$$

où s (états adjoints) est un paramètre qui varie (scalaire).

Pour utiliser la méthode de tir pour résoudre ce problème, il faut transformer le problème de manière à ce que la commande u soit exprimée en fonction des états et des états adjoints. Pour ce faire, on utilise le principe du minimum de Pontryagin, qui spécifie que pour que le résultat soit optimal, la dérivée du hamiltonien du système par rapport aux commandes doit être nulle (équation 2.51). Ainsi, il est possible de trouver une expression pour la commande u en fonction des états et des états adjoints. C'est ce qui est fait pour le problème du transfert orbital au Chapitre 5.

Le problème à valeur initiale ci-dessus est résolu avec différentes valeurs de s jusqu'à ce que la condition $x(b) = \beta$ soit satisfaite. On définit une fonction :

$$F(s) := x(b, s) - \beta \quad (2.69)$$

Si le problème aux deux limites a une solution, alors $F(s)$ a une racine qui correspond à $\dot{x}(a)$, donnant la solution $x(t)$ du problème aux deux limites. Les racines de $F(s)$ sont trouvées à l'aide de la méthode de Newton :

$$s_{n+1} = s_n - \frac{F(s_n)}{F'(s_n)} \quad (2.70)$$

où la dérivée $F'(s_n)$ est calculée par la formule de la différence avant :

$$F'(s_n) = \frac{F(s_n + \delta s) - F(s_n)}{\delta s} \quad (2.71)$$

où δs est très petit.

L'algorithme itère jusqu'à ce que les conditions finales désirées soient satisfaites. Pour un problème d'ordre supérieur, la démarche est la même, par contre $F'(s_n)$ devient le Jacobien de $F(s)$.

L'algorithme de tir simple a les caractéristiques suivantes :

- L'estimation initiale des états adjoints est cruciale et permet à l'algorithme ou non de converger vers une solution (pas nécessairement la solution désirée). Par contre, aucune méthode ne permet d'obtenir ces estimations initiales de façon intuitive.
- À partir d'une bonne estimation initiale, l'algorithme converge et nécessite une charge de calcul moyenne.

L'application de la méthode du tir au problème orbital défini à la section 2.3 est présentée au Chapitre 5.

2.5 Perturbations orbitales

Plusieurs perturbations viennent influencer la trajectoire d'un objet dans l'espace. Par contre, lorsque l'on connaît la source de ces perturbations, il est possible de prédire leur effet dans le temps. Deux perturbations principales sont présentes en basse altitude, soient l'effet du champ gravitationnel de la Terre non parfaitement sphérique et la traînée atmosphérique.

Puisque la masse de la Terre n'est pas distribuée uniformément, son champ de potentiel n'est pas de la forme $1/r$. On peut l'exprimer en termes des polynômes de Legendre $P_n^{(m)}$:

$$\phi = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^{(m)}(\sin \delta) \right] \quad (2.72)$$

où n est un indice sur les harmoniques sphériques du champ gravitationnel de la Terre et m varie de 0 à n . Les coordonnées sphériques (r, δ, λ) (rayon, latitude, longitude) sont utilisées et r_e représente le rayon de la Terre moyen à l'équateur.

On néglige la dépendance du potentiel de la Terre sur la longitude, étant donné que l'ordre de cette influence est plus petit que la dépendance sur la latitude. Ainsi, on obtient le potentiel suivant :

$$\phi(r) = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_e}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) \right] \quad (2.73)$$

On peut négliger les termes à partir de J_3 et les suivants puisque l'influence du terme J_2 est beaucoup plus grande (J_2 est environ 1000 fois plus grand que J_n , où $n > 2$). Le terme J_2 correspond à la forme non parfaitement sphérique (aplatie) de la Terre.

$$\phi(r) = \frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^2}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta \right) \right] \quad (2.74)$$

$$J_2 = (1082,64 \pm 0,03) * 10^{-6}$$

On obtient alors les accélérations suivantes :

$$\vec{a} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (2.75)$$

$$\ddot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx -\frac{\mu x}{r^3} \left[1 - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \right] \quad (2.76)$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \approx \frac{y}{x} \ddot{x} \quad (2.77)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx -\frac{\mu z}{r^3} \left[1 + J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \left(3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right] \quad (2.78)$$

La Terre n'est pas parfaitement sphérique (effet de J_2). Pour des orbites basses les effets sont non négligeables. Deux effets principaux découlent de cela : la régression de la ligne des nœuds et la rotation de la ligne des apsides (axe majeur). La régression des nœuds correspond à une rotation du plan orbital autour de l'axe de rotation de la Terre à une vitesse qui dépend de l'inclinaison de l'orbite et de son altitude. Ainsi, les traces au sol successives du satellite suivant une orbite directe sont déplacées (à l'est ou à l'ouest, dépendamment de l'inclinaison), par rapport à une orbite qui ne considère pas cet effet. Pour une orbite rétrograde, ce déplacement s'effectue vers l'est, alors que pour une orbite prograde, ce déplacement s'effectue vers l'ouest. Plus l'inclinaison de l'orbite est basse et plus son altitude est basse, plus cet effet est important. Pour des orbites polaires, cet effet est nul.

La rotation de la ligne des apsides ne s'applique qu'aux orbites excentriques. L'axe majeur d'une trajectoire elliptique va tourner dans la direction du mouvement du satellite si

l'inclinaison de l'orbite est de moins de $63,4^\circ$ ou plus de $116,6^\circ$, et en direction opposée au mouvement du satellite pour des inclinaisons entre $63,4^\circ$ et $116,6^\circ$ [Vallado, 2007]. La vitesse à laquelle l'axe majeur tourne dépend de l'altitude de l'orbite et de l'angle d'inclinaison. Ces effets sont plus importants pour des orbites de faible inclinaison, où l'orbite est près du renflement équatorial pour de plus grandes portions de chaque révolution. Aussi, l'effet diminue alors que l'axe semi-majeur augmente puisque le satellite s'éloigne du renflement et de son influence gravitationnelle.

Grâce à la théorie des variations, on peut trouver la variation de chaque élément orbital selon les composantes de la force perturbatrice. On définit, par rapport au repère RTN :

- F_r la composante de la force perturbatrice (par unité de masse) le long du vecteur de rayon \hat{r} ,
- F_t la composante de la force perturbatrice le long du vecteur \hat{t} ,
- F_n la composante de la force perturbatrice le long du vecteur \hat{n} .

La force perturbatrice et les variations des paramètres deviennent les équations des variations de Gauss :

$$F = F_r \hat{r} + F_t \hat{t} + F_n \hat{n} \quad (2.79)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ e \sin \nu F_r + \frac{p}{r} F_t \right\} \quad (2.80)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ \sin \nu F_r + \left(\cos \nu + \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right) F_t \right\} \quad (2.81)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} F_n \quad (2.82)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} F_n \quad (2.83)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -\cos \nu F_r + \left(\sin \nu \left(1 + \frac{r}{p} \right) F_t \right) - \frac{r \cot i \sin u}{h} F_n \right\} \quad (2.84)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \{ (p \cos \nu - 2er) F_r - (p + r) \sin \nu F_t \} \quad (2.85)$$

Avec les éléments équinoctiaux, on obtient les expressions suivantes pour la force causée par J_2 dans le repère RTN :

$$f_{pr} = -\frac{3}{2}\mu J_2 R^2 r^{-4} + 18\mu J_2 R^2 r^{-6}(1 + p^2 + q^2)^{-2}(qY_1 - pX_1)^2 \quad (2.86)$$

$$f_{pt} = -12\mu J_2 R^2 r^{-6}(1 + p^2 + q^2)^{-2}(qY_1 - pX_1)(qX_1 + pY_1) \quad (2.87)$$

$$f_{pn} = -6\mu J_2 R^2 r^{-5}(1 + p^2 + q^2)^{-2}(1 - p^2 - q^2)(qY_1 - pX_1) \quad (2.88)$$

On obtient ainsi les équations d'état incluant la perturbation J_2 :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\frac{\partial a}{\partial \underline{\dot{r}}^T} \right) (\underline{f}_t + \underline{f}_p) \\ \dot{h} &= \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{\dot{r}}^T} \right) (\underline{f}_t + \underline{f}_p) \\ \dot{k} &= \left(\frac{\partial k}{\partial \underline{\dot{r}}^T} \right) (\underline{f}_t + \underline{f}_p) \\ \dot{p} &= \left(\frac{\partial p}{\partial \underline{\dot{r}}^T} \right) (\underline{f}_t + \underline{f}_p) \\ \dot{q} &= \left(\frac{\partial q}{\partial \underline{\dot{r}}^T} \right) (\underline{f}_t + \underline{f}_p) \\ \dot{\lambda} &= n + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \underline{\dot{r}}^T} \right) (\underline{f}_t + \underline{f}_p) \end{aligned} \quad (2.89)$$

où \underline{f}_t correspond aux composantes de l'accélération du propulseur dans le repère FGW et \underline{f}_p correspond aux composantes de l'accélération due à J_2 . De même, les équations des états adjoints sont augmentées des composantes du vecteur d'accélération \underline{f}_p .

À basse altitude, l'effet de la traînée atmosphérique est la deuxième perturbation la plus importante, après les effets du champ gravitationnel non sphérique de la Terre (J_2). Plus l'altitude d'un objet est basse, plus la densité de particules dans l'atmosphère est grande et donc plus la traînée atmosphérique est importante. Ces conditions mènent à un phénomène que l'on nomme le « paradoxe de la traînée ». Un transfert d'énergie est effectué lorsque la force de traînée est appliquée sur l'objet. La traînée enlève de l'énergie à l'orbite, ce qui diminue son rayon et augmente l'énergie cinétique, donc augmente la vitesse de l'objet sur l'orbite, comparativement aux orbites précédentes. La traînée correspond donc à une force qui absorbe l'énergie du satellite, diminue son orbite et augmente sa vitesse. Pour une orbite excentrique, cette perturbation est normalement plus élevée au périégée. La force causée par la traînée

atmosphérique dépend du rapport surface/masse de l'objet. L'accélération causée par cette force correspond à :

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_a \dot{r}_a \quad (2.90)$$

où C_D est le coefficient de traînée, A est l'aire de la section du véhicule perpendiculaire à la direction du mouvement, m est la masse du véhicule, ρ est la densité atmosphérique à l'altitude du véhicule et $v_a = |\dot{r}_a|$ est la vitesse du véhicule relative à l'atmosphère tournante.

$$\dot{r}_a = \begin{bmatrix} \dot{x}_{ECI} + \dot{\theta} y_{ECI} \\ \dot{y}_{ECI} - \dot{\theta} x_{ECI} \\ \dot{z}_{ECI} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

où $\dot{\theta}$ est la vitesse de rotation de l'atmosphère terrestre.

Pour bien modéliser l'effet de la traînée atmosphérique, un modèle d'atmosphère (densité atmosphérique) est requis. Différents modèles sont présentés dans l'état de l'art qui fait l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE 3

ÉTAT DE L'ART

La revue de l'état de l'art qui suit se base sur plusieurs concepts liés à la dynamique orbitale et à la commande optimale dont les détails sont présentés au chapitre 2. La maîtrise de ces concepts sera utile à la bonne appréciation et compréhension de la revue de l'art.

3.1 Techniques d'élimination des débris orbitaux

Plusieurs techniques d'élimination des débris sont présentées dans la littérature. On retrouve entre autres les lasers, les satellites nettoyeurs, les amarres électrodynamiques ("tethers"), les voiles solaires et les dispositifs d'augmentation de la traînée. L'article de Quinlan [Quinlan, 2011] présente rapidement ces techniques ainsi qu'une analyse du succès d'une mission théorique d'élimination de débris avec les différents dispositifs. Les différentes techniques issues de l'article de Quinlan seront présentées, avec d'autres références qui les décrivent plus en détails, dans les paragraphes qui suivent.

La mission de base d'élimination des débris consiste à éliminer de gros débris en basse altitude (LEO) afin de limiter les effets des collisions en cascade (effet Kessler). Selon des études de Liou et Johnson [Liou et al., 2009], éliminer 5 débris par an permettrait de stabiliser l'environnement des débris orbitaux. Selon [Quinlan, 2011], les débris à éliminer prioritairement résident dans des orbites quasi-circulaires avec une altitude autour de 850 km, une inclinaison autour de 98 degrés et leur masse varie de 1500 à 3000 kg. Dans l'article de Quinlan, on considère qu'afin de désorbiter les débris, il est nécessaire d'appliquer un Δv (voir section 2.1.4) au débris afin d'abaisser l'altitude de son périégée à 80 km, altitude à laquelle le débris se désintègre en entrant dans la basse atmosphère. Avec une poussée impulsive qui transforme une orbite circulaire d'altitude de 850 km à une orbite elliptique avec altitude de périégée de 80 km, le Δv total requis pour désorbiter 5 débris est d'environ 1,06 km/s [Quinlan, 2011]. Bien entendu, on pourrait abaisser l'orbite d'un débris à une altitude plus haute que 80 km, afin d'économiser du carburant, avec pour impact un temps d'élimination plus long.

Pour obtenir le Δv nécessaire pour désorbiter les débris, plusieurs méthodes sont analysées. Un laser situé sur la Terre ou dans l'espace pourrait fournir de l'énergie concentrée afin de produire une impulsion se transformant en Δv sur le débris. En 1995, l'étude ORION de la NASA et de l'US Air Force visait les débris de 1 à 10 cm à des altitudes d'environ 1000 km. L'étude concluait que pour environ 80 millions de dollars, pratiquement tous les débris de 1 à 10 cm sous 800 km pourraient être éliminés en 2 à 3 ans d'opération [Campbell, 1996]. On pourrait aussi désorbiter des débris plus gros, de l'ordre de 1000 kg, avec plusieurs impulsions de laser, appliquées pendant plusieurs mois. Par contre, cette technique est fortement critiquée étant donné les réticences aux niveaux politique et militaire qu'elle entraîne (possibilité de destruction de satellites opérationnels), malgré les niveaux d'énergie très faibles de ces lasers.

Une amarre électrodynamique permettrait de transformer les effets du champ magnétique en impulsions (Δv) sur le débris. Une amarre est constituée d'un long fil conducteur (ou de plusieurs torsadés) d'une longueur allant jusqu'à des dizaines de kilomètres et d'un diamètre très petit. Une force électromotrice apparaît dans une amarre conductrice déployée d'un système spatial lorsque ce dernier se déplace au travers du champ géomagnétique dans son orbite autour de la Terre. Si une paire de contacteurs plasma à chaque bout de l'amarre émettent et collectent des électrons, un courant électrique circule dans l'amarre en fermant le circuit via le plasma ambiant. L'amarre génère alors une force de Lorentz par l'interaction entre le courant et le champ géomagnétique [Kawamoto et al., 2006]. En contrôlant la direction du courant circulant dans l'amarre, on contrôle un Δv positif ou négatif sur le débris. Cette technique permet d'appliquer des Δv sans utiliser de carburant, ainsi elle permet une plus petite masse du système complet. De plus, une efficacité maximale est possible pour des orbites équatoriales. À de plus grandes inclinaisons orbitales (environ 75 degrés et plus), la géométrie relative du mouvement orbital et du champ géomagnétique est beaucoup moins favorable, la densité d'ions ionosphériques est faible et la traînée électrodynamique est beaucoup moins efficace [Pardini et al., 2009]. Ainsi, comme on s'intéresse surtout aux débris situés à de grandes inclinaisons (orbites quasi-polaires), cette technique est moins pertinente. De plus, la modélisation d'un tel dispositif est très complexe et un contrôle actif est nécessaire pour prévenir les impacts avec les gros objets. Aussi, étant donné la longueur de l'amarre, les chances de créer d'autres débris sont grandes : l'amarre pourrait être sectionnée par des impacts avec de petits météores et/ou débris orbitaux.

Tel que mentionné dans [Quinlan, 2011], on peut utiliser les effets bénéfiques du vent solaire afin d'appliquer des Δv sur les débris par le biais de voiles solaires. Par contre, ces effets ne peuvent pas être utilisés en orbite basse étant donné que les effets du vent solaire sont faibles dans cette région comparativement à d'autres perturbations telles que la traînée atmosphérique et les harmoniques géopotentielles de la Terre. De plus, le déploiement d'une grande voile peut augmenter la probabilité de collisions et ainsi empirer le problème.

L'un des plus grands défis lorsqu'on parle d'élimination de débris orbitaux est le problème du rendez-vous entre le système d'élimination tel qu'un satellite et le débris. En effet, les débris sont des objets non-coopératifs qui ont une attitude qui ne peut être contrôlée. Ainsi, une solution sans contact a été développée, le « Ion Beam Shepherd Spacecraft » (IBS). Ce satellite contient un système de propulsion principal qui émet un rayon de plasma accéléré vers le débris pour lui appliquer une force par les ions de plasma. Le satellite a aussi besoin d'un deuxième système de propulsion pour produire une force d'équilibre permettant de contrer la première force afin de maintenir le satellite et le débris à une distance constante. Des tests effectués montrent qu'il serait possible de contrôler l'orbite d'un satellite (débris) à une distance d'environ 6 à 14 fois sa taille [Bombardelli et Peláez, 2010]. Cette technique implique donc un contrôle de la distance relative entre le IBS et le débris volant à proximité pour une longue période. Cette technique semble très prometteuse, par contre elle est encore relativement nouvelle et la technologie n'est pas encore complètement développée ni testée.

La technique d'élimination de débris la plus simple consiste à effectuer une manœuvre de rendez-vous entre un satellite nettoyeur et le débris afin que le satellite nettoyeur s'arrime au débris. Ainsi, le satellite nettoyeur peut ramener le débris à une orbite plus basse à l'aide de son système de propulsion (propulsion chimique ou électrique) par des manœuvres orbitales. Selon l'analyse de [Quinlan, 2011], cette technique est prometteuse et n'implique pas les réticences de la part des gouvernements au niveau politique et militaire que la technique du laser apporte. De plus, on connaît déjà bien la dynamique d'un satellite alors il n'est pas nécessaire de développer un nouveau modèle dynamique du système d'élimination de débris, contrairement à l'amarre électrodynamique ou le IBS par exemple, ce qui est très pratique.

L'utilisation de dispositifs d'augmentation de la traînée atmosphérique tels que des ballons permet d'utiliser efficacement la force causée par la traînée atmosphérique pour abaisser l'orbite d'un débris. Le but est d'augmenter la surface de l'objet afin d'augmenter son rapport surface/masse pour diminuer son coefficient balistique. De cette façon, on augmente la force appliquée par la pression de radiation solaire en plus de celle appliquée par la traînée atmosphérique, permettant d'abaisser l'orbite d'un objet plus rapidement (et avec moins de carburant) [Lücking et al., 2011]. Si le satellite est frappé par des débris, il y a une grande chance que ce soit la structure gonflable qui soit frappée, formant un trou dans la membrane et donc ne créant pas de nouveaux débris [Maessen et al., 2007].

La combinaison de deux types de systèmes d'élimination permet d'en tirer un plus grand avantage. Par exemple, le jumelage de la simplicité d'un « satellite nettoyeur » avec un dispositif d'augmentation de la traînée tel qu'un ballon permettrait d'obtenir une technique d'élimination simple et efficace.

[Martin et al., 2011] présente une analyse de plusieurs techniques d'élimination des débris orbitaux. En particulier, pour un système abaissant l'orbite du débris menant à sa désintégration naturelle en un certain temps, on évalue différentes stratégies, telles que : propulsion chimique, propulsion électrique (vers une orbite circulaire ou excentrique), augmentation du rapport aire sur masse et amarre électrodynamique. On évalue aussi la possibilité d'utiliser la perturbation orbitale causée par J_2 (voir prochaine section) afin d'éviter des changements d'ascension droite du nœud ascendant, manœuvres très coûteuses en carburant.

3.2 Perturbations orbitales

Comme on a déterminé que les débris orbitaux à éliminer se situent dans des orbites polaires à basse altitude, on peut négliger les effets des perturbations du troisième corps (effets de la Lune et du Soleil). De plus, puisque les débris visés se situent au maximum à 800 km d'altitude, la pression de radiation solaire peut aussi être négligée. Les effets perturbateurs qui seront normalement considérés pour ces orbites sont donc la non sphéricité du champ gravitationnel de la Terre ainsi que la traînée atmosphérique.

Les perturbations orbitales, effets parfois nuisibles, peuvent être utilisées avantageusement pour une mission d'élimination des débris orbitaux afin de minimiser la consommation de carburant et, de ce fait, le coût. Par exemple, en 1979, la trajectoire et le point de rentrée du laboratoire Skylab ont été habilement commandés en modulant l'orientation du laboratoire par rapport à l'atmosphère ambiante créant ainsi une modulation de la traînée aérodynamique et donnant un certain contrôle de la trajectoire [Dreher et al., 1980]. Une autre technique consiste en l'augmentation de l'excentricité orbitale par résonance qui permettrait de placer, à faible coût de carburant, le périhélie d'une orbite en plus basse altitude accélérant ainsi sa rentrée atmosphérique. Ce phénomène a déjà été observé de façon naturelle (sans action propulsive) dans le cas du satellite Echo I [Buckingham et al., 1965] [Jones et Shapiro, 1960]. Cette résonance pourrait être induite par des actions propulsives ou par la modulation synchronisée des perturbations orbitales, comme ce fut le cas pour Skylab.

Pour éviter d'effectuer des manœuvres de changement de plan orbital (changement d'ascension droite du nœud ascendant), qui sont très coûteuses en carburant, on peut prendre avantage de la précession de l'ascension droite du nœud ascendant causée par la non sphéricité de la Terre. Par contre, les manœuvres effectuées de cette façon nécessiteront beaucoup plus de temps qu'une manœuvre de changement de plan.

Les effets de J_2 (voir section 2.5) peuvent être utilisés de façon avantageuse pour des orbites héliosynchrones. En effet, lorsque l'altitude et l'inclinaison de l'orbite sont choisies de façon appropriée, il est possible de faire tourner le plan de l'orbite à la vitesse apparente du Soleil autour de la Terre qui correspond à 360 degrés en 365,2422 jours. L'orbite du satellite devient ainsi héliosynchrone et croise toujours le plan équatorial de la Terre à la même heure locale.

3.3 Modèle d'atmosphère

Comme on a déterminé qu'à basse altitude, la traînée atmosphérique est une perturbation dominante, un modèle d'atmosphère est nécessaire afin d'obtenir la densité atmosphérique pour chaque endroit sur l'orbite. Il existe deux types fondamentaux de modèles d'atmosphère, le modèle statique qui ne prend en compte que la variation de la densité avec l'altitude pour une température exosphérique (température dans l'exosphère, dernière couche de l'atmosphère terrestre) donnée, et le modèle dynamique qui prend en compte les variations temporelles de la

densité et de la température exosphérique. Il est à noter que pour le reste du document, lorsqu'une température sera mentionnée, ce sera toujours cette température exosphérique.

Un modèle d'atmosphère dynamique (variant dans le temps), plus précis qu'un modèle statique, permet d'approximer la densité atmosphérique. Plusieurs facteurs affectent un tel modèle, dont :

- Variations diurnes : À tous les jours, un renflement de l'atmosphère (un maximum de densité) se retrouve en direction du Soleil, là où l'atmosphère est la plus chaude. En effet, le Soleil chauffe l'atmosphère, cela transporte des molécules de basse à haute altitude, faisant augmenter la densité aux altitudes orbitales. Cette augmentation est à son maximum après 2 à 2,5 heures. Ainsi, étant donné la rotation de la Terre, ce renflement est centré sur les méridiens où l'heure locale est 2:00-2:30 PM. Une valeur minimale survient aussi à l'opposé du renflement, soit vers 4:00 AM chaque jour. La densité atmosphérique dépend ainsi de la latitude, de l'heure locale et du jour de l'année.
- Cycle de rotation du Soleil de 27 jours : La période de rotation du Soleil cause une fluctuation corrélée avec le flux radio solaire de longueur d'onde décimétrique. Des modifications du flux solaire sont reliées aux changements de taille des régions solaires actives.
- Cycle des taches solaires de 11 ans : Le cycle des taches solaires affecte la quantité de radiation solaire qui atteint la Terre. Au plus fort du cycle, cet effet peut créer une perturbation plus grande causée par la pression de radiation solaire que par la traînée atmosphérique, dépendant de l'altitude du satellite.
- Variations semi-annuelles/saisonnnières : Ces variations faibles ont une période de six mois et sont reliées à la distance variante entre le Soleil et la Terre et à la déclinaison du Soleil durant l'année.
- Variations cycliques : Un cycle de 11 ans parallèle mais en retard sur le cycle des taches solaires est présent et affecte la densité. L'amplitude de ces variations varie de cycle en cycle. La cause exacte est inconnue mais est probablement reliée aux variations des taches solaires.

- Rotation de l'atmosphère : D'autres changements dans la force aérodynamique causée par la densité viennent du fait que l'atmosphère tourne avec la Terre, notamment sur la vitesse relative du satellite par rapport à l'atmosphère.

Le modèle le plus simple de l'atmosphère, un modèle statique, suppose une distribution à symétrie sphérique des molécules et une densité qui varie de façon exponentielle. Bien que ce modèle approxime la variation la plus importante de la densité de l'atmosphère (la variation avec l'altitude), sa précision et qualité ne sont pas suffisantes pour des études très précises. En effet, ce modèle n'inclut pas les variations causées par les phénomènes décrits ci-haut. Le modèle exponentiel peut donc être utilisé pour obtenir des approximations préliminaires et lorsqu'une faible charge de calculs est désirée. Ce modèle peut être appliqué pour des altitudes variant de 0 à 1000 km.

Le « Committee on Space Research (COSPAR) of the International Council of Scientific Unions » détermine périodiquement un modèle atmosphérique (CIRA, « COSPAR International Reference Atmosphere ») [CIRA-2012, 2012]. Le modèle résulte de l'application de techniques empiriques. Les données proviennent principalement de mesures de la traînée de satellites et de mesures effectuées au sol. Ce modèle s'applique aux altitudes de 25 à 2500 km. Aucune version analytique de ce modèle n'est disponible, il est plutôt présenté sous forme de tables de données.

Le modèle de Jacchia-Roberts [Jacchia, 1977] contient des expressions analytiques permettant de déterminer la température exosphérique en fonction de la position, du temps, de l'activité solaire et de l'activité géomagnétique. Le profil de température de ce modèle est obtenu de façon empirique. Avec une température exosphérique donnée, on obtient une densité atmosphérique par les équations hydrostatiques (de 90 à 125 km d'altitude) ou par l'équation de diffusion (à plus de 125 km d'altitude). Ce modèle s'applique aux altitudes de 90 à 2500 km. Roberts [Roberts, 1971] a développé des équations analytiques permettant de décrire le modèle tabulaire de Jacchia (1970) [Jacchia, 1971]. Ce modèle est précis et simule bien la réalité de la densité atmosphérique. Ce modèle a été mis à jour en 1977, ce qui en fait la version la plus à jour (J77). De plus, une version analytique de ce modèle a été développée dans [de Lafontaine et al., 1983]. Ce dernier est décrit plus en détail à l'Annexe A.

Le modèle russe GOST [Volkov, 1984] est un modèle analytique qui permet d'obtenir la densité atmosphérique à partir d'observations des satellites russes Cosmos. Dans ce modèle, des facteurs k sont associés aux différents facteurs influençant la densité atmosphérique. L'utilité de ce modèle vient du fait qu'il est facile d'éliminer certaines variations en omettant seulement des facteurs k , par exemple, si on ne désire pas considérer les variations diurnes, on pose k_2 à 1. On a observé que le modèle GOST diffère de seulement 5-10% du modèle de Jacchia 1971. Ce modèle s'applique aux altitudes de 120 à 1500 km.

3.4 Propulseurs

Il existe aujourd'hui plusieurs types de propulseurs, notamment la propulsion nucléaire, la propulsion électrique (ions) et la propulsion chimique. Les caractéristiques particulières de ces différents systèmes sont expliquées plus loin. L'impulsion spécifique est un indicateur de performance d'un système de propulsion. Ce paramètre permet de caractériser tous les propulseurs, peu importe leur type. Elle mesure la force exercée par le propulseur en fonction de la quantité de carburant consommé par unité de temps, le tout normalisé par l'accélération terrestre. Elle est exprimée en unités de temps (secondes). Plus l'impulsion spécifique d'un système de propulsion est grande, plus le système est efficace. L'impulsion spécifique s'exprime ainsi:

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}_p g_0} \quad (3.1)$$

où F est la force de poussée, I_{sp} est l'impulsion spécifique, \dot{m}_p est le débit massique de carburant et g_0 est l'accélération moyenne à la surface de la Terre (constante gravitationnelle).

On peut faire un lien entre l'impulsion spécifique, la masse d'une fusée et le Δv , c'est l'équation de la fusée de Tsiolkowski :

$$\Delta v = g_0 I_{sp} \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right) \quad (3.2)$$

$$m_p = m_i \left[1 - \exp \left(- \frac{\Delta v}{g_0 I_{sp}} \right) \right] \quad (3.3)$$

$$m_p = m_f \left[\exp \left(\frac{\Delta v}{g_0 I_{sp}} \right) - 1 \right] \quad (3.4)$$

où m_i est la masse initiale du véhicule, m_f est la masse finale du véhicule, m_p est la masse de carburant requise pour le Δv donné; Δv est la variation de vitesse du véhicule et g_0 est la constante gravitationnelle.

On remarque par cette équation que lorsque l'impulsion spécifique est élevée, la consommation de carburant est moindre pour un même Δv .

On retrouve quatre grandes catégories de systèmes de propulsion chimique : la propulsion à gaz froid, le monergol, le diergol et la propulsion à propergol solide. Un propergol est un produit de propulsion constitué d'un mélange de comburant et de combustible, les ergols. La réaction chimique entre l'oxydant et le réducteur fournit l'énergie au moteur-fusée. Les éléments chimiques peuvent se présenter sous l'état de gaz, de liquide, de solide ou de plasma. Une fusée à propulsion chimique génère une poussée en accélérant un gaz à haute pression à une vitesse supersonique, qui est éjecté par une embouchure. Le gaz sous pression est généré par la décomposition de propergol à haute température.

Parmi les systèmes chimiques, le système de propulsion à gaz froid (qui utilise un gaz inerte stocké sous haute pression) est le choix le plus simple et le moins coûteux. Par contre, il ne permet que de faibles poussées (typiquement moins de 4,5 N) et une impulsion spécifique faible (50-170 s). Ce type de propulsion était beaucoup utilisé dans les années 1960 et est encore utilisé aujourd'hui pour des missions où on veut éviter la contamination causée par les propergols. Le monergol, quant à lui, peut fournir une impulsion spécifique d'environ 225 s et une poussée pouvant aller de 0,5 N à quelques milliers de Newton. Ce type de propulsion est typiquement utilisé pour des contrôles d'attitude de satellites. Le diergol est plus complexe et plus coûteux que le monergol, par contre il permet une impulsion spécifique d'environ 310 s et une poussée beaucoup plus grande que le monergol (de quelques Newton à plusieurs milliers). La propulsion à propergol solide peut fournir une impulsion spécifique d'environ 290 s. Par contre, il faut calculer l'impulsion nécessaire d'avance puisqu'une fois que le solide est allumé, on ne peut pas arrêter la combustion (mise à feu simple). Ce type de propulsion s'applique donc bien pour des transferts orbitaux prévus d'avance. Le coût d'un tel système est comparable à celui d'un système à monergol.

Un propulseur ionique constitue une forme de propulsion électrique qui crée une poussée en accélérant des ions. Les propulseurs ioniques sont classés par la manière dont ils accélèrent les ions, soit en utilisant la force électrostatique (force de Coulomb), soit la force électromagnétique (force de Lorentz). Les propulseurs ioniques fournissent de très faibles poussées par rapport aux systèmes chimiques (maximum d'environ 0,5 N), par contre ils présentent de très grandes impulsions spécifiques et ont donc une efficacité massique supérieure. En effet, la vitesse maximale d'expulsion des gaz peut atteindre 90 km/s (donc I_{sp} d'environ 9000 s). Puisque ces systèmes ne peuvent fournir une grande poussée, ils sont difficilement utilisables pour lancer un engin en orbite, mais ils sont idéaux pour des applications de changements d'orbite sur de longues durées. De plus, comme leur carburant consiste en un gaz inerte, les risques d'explosions associés aux systèmes à propulsion chimique sont éliminés. Dans un contexte d'optimalité de carburant, le choix d'un propulseur électrique est évident.

3.5 Trajectoire optimale (guidage)

Techniques de commande optimale

Dans un contexte de mission spatiale, on désire minimiser le coût de lancement et le coût d'utilisation des satellites. Dans le cas d'un transfert orbital avec un engin électrique, cela se traduit en minimisation du carburant utilisé, de façon à ce qu'on puisse utiliser le satellite le plus longtemps possible. En d'autres termes, on désire optimiser l'utilisation du carburant. Ainsi, la commande optimale est toute indiquée pour résoudre un problème de ce genre. Dans les paragraphes qui suivent, différentes méthodes appliquant les principes de la commande optimale seront présentées, toutes ayant pour objectif de minimiser le carburant lors du transfert d'une orbite à une autre.

Notons qu'il existe deux types de propulsion : la propulsion impulsive et celle étendue dans le temps. Pour effectuer une manœuvre orbitale dans le plan, des transferts optimaux sont possibles. Il est bien connu que le transfert de Hohmann correspond au transfert impulsif (propulseur chimique) optimal en carburant. Dans ce cas, le calcul optimal est relativement simple puisqu'il n'y a aucune dynamique à considérer, seulement des variations instantanées de vitesse. Dans le cas non impulsif (étendu dans le temps), le calcul optimal est plus complexe parce qu'on doit considérer les équations dynamiques. Un propulseur électrique est

de nature non impulsive, c'est-à-dire qu'il exerce une petite poussée sur une longue durée. Pour un transfert à temps minimum, le propulseur électrique sera toujours en fonction (poussée continue), donc la forme du transfert s'approchera de celle d'une spirale (pour un transfert dans le plan orbital). Par contre, si on veut minimiser la masse du carburant, on peut utiliser des arcs de poussée près du périégée et de l'apogée, ce qui permet de minimiser les efforts du système de propulsion aux endroits où la poussée est moins efficace. Notons que pour un transfert planaire impulsif, cette conclusion est aussi atteinte par Hohmann. Le problème d'un transfert orbital utilisant un propulseur électrique, que l'on considère le temps minimum ou la masse de carburant minimum, est normalement exprimé par le principe du maximum de Pontryagin et implique la résolution d'un problème aux deux limites, qui doit être résolu par des méthodes numériques. Les concepts de la commande optimale et du principe du maximum de Pontryagin sont présentés à la section 2.3. La compréhension de ces concepts sera utile à la compréhension de la suite de l'état de l'art.

Quand vient le temps de résoudre un problème aux deux limites, la difficulté vient principalement du fait qu'on ne sait pas quelles sont les valeurs initiales des états adjoints. Il faut donc tenter d'approximer ces valeurs ou utiliser une méthode qui permet de les estimer. Présentée à la section 2.4.2, l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre un problème aux deux limites est la méthode du tir (« shooting method »). Avec plusieurs solutions qui sont proches de la solution optimale, on peut interpoler la solution désirée et ainsi trouver les valeurs initiales des états adjoints et finalement résoudre le problème. Bien qu'assez simple, ce processus peut être très ardu, car il est difficile de trouver des valeurs initiales pour les états adjoints qui permettront d'obtenir une solution près de la solution optimale.

D'autres méthodes permettant un meilleur estimé des valeurs initiales des états adjoints sont utilisées. Les algorithmes de « neighboring extremal » sont des méthodes itératives permettant d'améliorer les estimés des conditions initiales (ou terminales) non spécifiées de manière à satisfaire les conditions terminales (ou initiales) spécifiées. La difficulté avec ces méthodes est de trouver un estimé des conditions pour la première itération qui permettra d'obtenir une solution suffisamment proche de la solution optimale. À cause de cette difficulté à débiter la méthode, on l'utilise plutôt lorsqu'une solution extrémale est obtenue par une autre méthode, telle qu'une méthode basée sur le gradient.

Les méthodes basées sur le gradient ont été développées dans le but de diminuer la difficulté de trouver une valeur initiale qui est requise par d'autres méthodes. Ces méthodes correspondent à des algorithmes itératifs qui permettent d'améliorer les estimés des valeurs de la commande, $u(t)$, de manière à se rapprocher des conditions optimales et des conditions limites. Les méthodes basées sur le gradient d'ordre 1 donnent normalement de bonnes améliorations pour les premières itérations mais offrent une faible rapidité de convergence alors que la solution optimale est approchée. Les méthodes basées sur le gradient d'ordre 2, par contre, ont d'excellentes caractéristiques de convergence alors que la solution optimale est approchée mais nécessitent que la solution optimale soit convexe ($(\partial^2 H / \partial u^2) > 0$ pour une minimisation et $(\partial^2 H / \partial u^2) < 0$ pour une maximisation où H est le hamiltonien du système). Ainsi, dépendamment du problème, on peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes. De plus, la combinaison d'un algorithme basé sur le gradient et d'un algorithme de « neighboring extremal » permet d'obtenir un meilleur résultat.

Application des principes à une situation de minimisation de carburant

En 1961, Edelbaum a développé des équations analytiques permettant de définir le transfert entre deux orbites circulaires inclinées avec un engin à faible poussée continue (pas d'arcs de poussée, par exemple près du périégée ou de l'apogée seulement). Grâce à ces équations, il est possible de trouver le temps de vol et le Δv requis pour un transfert optimisant la consommation de carburant, puis d'obtenir les éléments orbitaux en fonction du temps lors du transfert. Dans [Stansbury, 2009], on utilise les équations d'Edelbaum pour comparer un transfert de basse orbite (LEO) vers une orbite géostationnaire (GEO) utilisant un propulseur électrique (faible poussée) à celui d'un propulseur chimique appliquant des poussées impulsives (e.g. le transfert de Hohmann). À partir de l'équation de la fusée (équation 3.2), on peut estimer la masse de propergol requise pour les deux types de transfert. Ainsi, on conclut que le transfert de Hohmann nécessite le plus petit Δv , alors que la manœuvre à faible poussée nécessite le Δv le plus grand. Par contre, puisque la propulsion électrique permet de fournir une impulsion spécifique considérablement plus élevée que les propulseurs chimiques, la masse de propergol requise est amplement moindre avec un propulseur électrique. En estimant à environ 30 000 \$ le coût pour envoyer 1 kg en orbite géostationnaire, on en conclut qu'il est possible de sauver entre 19,5 et 27 millions de dollars en coûts de lancement avec un système

électrique comparativement à un système de propulsion chimique pour un transfert de LEO vers GEO.

Dans [Alfano et Thorne, 1994], on utilise des outils analytiques et graphiques pour effectuer une étude préliminaire permettant de déterminer le temps de transfert et les requis en propergol pour un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires à l'aide d'un propulseur à faible poussée constante. On utilise l'équation de la fusée pour modéliser les effets d'une poussée continue et pour modifier la solution en termes de variation de vitesse accumulée. Les outils présentés dans cet article sont utiles pour une étude préliminaire effectuée, par exemple, lors de la planification d'une mission. Pour obtenir une solution plus précise, il faut utiliser une autre méthode telle que celle du principe du maximum de Pontryagin. Le but étant de minimiser le carburant utilisé entre deux orbites circulaires coplanaires, cela revient à minimiser le temps de transfert puisqu'on considère la variation de masse de propergol fixe (poussée constante). On remarque qu'un transfert de Hohmann sera toujours plus efficace en termes de consommation de carburant (en Δv) qu'un transfert à poussée continue. Pour rendre un tel transfert plus efficace, il faudrait utiliser une série de segments de poussée quasi-impulsifs au périégée, suivis d'une séquence similaire à l'apogée. Par contre, deux avantages de la poussée continue sont des temps de transferts plus courts par rapport aux segments de poussée quasi-impulsifs et moins de changement ouvert/fermé (« ON/OFF ») du système de propulsion.

Plusieurs articles utilisent le principe du maximum de Pontryagin pour résoudre le problème d'un transfert orbital avec un propulseur électrique. La formulation d'un tel problème mène à un problème aux deux limites, qui doit être résolu par des méthodes numériques. Dans [Yue et al., 2009], on investigate ce problème pour un propulseur électrique à poussée continue, ce qui correspond donc à un problème à temps minimum.

Dans [da Silva Fernandes et al., 2012], on formule un problème de minimisation de carburant pour un transfert simple entre deux orbites circulaires coplanaires. Deux méthodes numériques sont utilisées pour résoudre le problème aux deux limites : une méthode directe basée sur le gradient (premier et deuxième ordre) et une méthode indirecte de « neighboring extremals » solutionnée par la matrice de transition d'état ou par la transformation généralisée de Riccati.

On compare les résultats numériques obtenus avec les deux méthodes à ceux obtenus par une théorie analytique linéaire. Cette dernière n'est applicable que pour des orbites séparées par de petites distances radiales. On en conclut que la théorie linéaire donne une bonne approximation de la consommation de carburant pour des transferts entre des orbites proches. De plus, les résultats obtenus par les deux algorithmes numériques sont similaires, peu importe le temps requis pour la manœuvre.

Dans la thèse de [Smith, 1974], plutôt que d'utiliser les méthodes directes et indirectes séparément, on utilise une combinaison d'un algorithme basé sur le gradient et d'un algorithme « neighboring extremal » pour résoudre le problème aux deux limites obtenu de la formulation du problème de transfert orbital. En effet, comme l'algorithme « neighboring extremal » est très sensible aux conditions initiales, l'utilisation d'un algorithme basé sur le gradient pour trouver les valeurs initiales permet d'améliorer son efficacité.

[Petropoulos, 2004] a développé une méthode qui permet de donner des approximations simples et de bonnes hypothèses sur les conditions initiales pour des transferts optimaux en carburant utilisant une faible poussée qui impliquent des changements spécifiés dans tous les éléments orbitaux, excepté l'anomalie vraie. On introduit le quotient de proximité Q qui sert de fonction candidate de Lyapunov et qui permet de quantifier la proximité de l'orbite osculatrice à l'orbite cible. L'orbite osculatrice correspond, pour un point donné (à un moment donné), à l'orbite képlérienne qu'un objet aurait eu en l'absence de perturbations. Ainsi, à un point donné, les deux orbites (l'orbite perturbée et l'orbite osculatrice) se touchent. Pour tout point sur l'orbite perturbée, on choisit les angles de poussée de manière à rendre la dérivée de Q la plus négative possible, afin de faire tendre Q vers zéro (pour que l'orbite osculatrice corresponde à l'orbite cible). Les transferts orbitaux sont calculés en intégrant numériquement les équations des variations de Gauss (équations 2.79 à 2.85) et l'équation de la fusée, où les angles de poussée sont déterminés par la « Q -law » et où la décision d'appliquer ou non la poussée est basée sur un calcul d'efficacité. Des comparaisons à des solutions optimales montrent que la méthode, bien que sous-optimale, se compare favorablement aux transferts optimaux.

[*Haberkorn et al., 2004*] utilise une méthode directe de tir pour résoudre le problème aux deux limites. Dans cet article, on résout premièrement le problème pour un propulseur chimique et ensuite on utilise la solution comme première approximation pour le problème à faible poussée. Cette méthode a été utilisée avec succès pour le problème du transfert à temps minimum. Pour un problème à carburant minimum, la méthode peut ne pas donner de bons résultats. On utilise donc une approche homotopique qui permet de résoudre un problème difficile en partant de la solution connue d'un problème relié mais plus simple. La fonction à minimiser est modifiée pour la minimisation de l'énergie, ce qui permet d'obtenir un problème plus régulier avec une commande continue. Les manœuvres sont réalisées près de l'apogée puisque c'est le meilleur endroit pour une manœuvre d'augmentation de l'axe semi-majeur de l'orbite.

Une autre méthode est celle de [*Wei et Changhou, 2011*], qui utilise une technique de moyenne basée sur l'expansion en série de Fourier pour décrire la dynamique de la trajectoire. Le profil de trajectoire à faible poussée est transformé dans le domaine de Fourier et les équations de la dynamique séculaire sont représentées en fonction des coefficients de Fourier. On réussit à convertir le problème de transfert optimal en temps minimum en un problème d'optimisation de paramètres et on obtient ainsi les solutions de commande optimale sans avoir à résoudre un problème aux deux limites. Cette technique permet de déterminer les solutions de commande optimale tout en réduisant la charge de calcul de manière significative.

Dans [*Cho et al., 2006*], on étudie un problème de transfert optimal à temps minimum. On considère dans cet article que lors du transfert, le satellite passe dans l'ombre de la Terre (éclipse). Durant cette période, les panneaux solaires ne peuvent générer assez d'électricité pour le satellite. On ajoute donc la possibilité d'arrêter la propulsion lorsque le satellite se situe dans l'ombre de la Terre.

En résumé, pour une première analyse du Δv et du temps de transfert requis, les équations d'Edelbaum sont une bonne première approximation du problème de transfert orbital à temps minimum avec faible poussée continue. En second lieu, le principe du maximum de Pontryagin peut être utilisé avec un engin à faible poussée constante, ce qui se traduit en un problème à temps minimum. Un indice de performance plus complexe combinant le temps de

transfert et le carburant peut aussi être utilisé pour trouver le meilleur compromis entre la masse de carburant et le temps de vol. Dans ce cas, on remarquera que la commande optimale consiste en des arcs de poussée situés au périégée et à l'apogée (semblable au transfert de Hohmann).

CHAPITRE 4

SIMULATEUR

Le simulateur, développé sur MATLAB/Simulink, permet de calculer la position du satellite (exprimée en éléments équinoctiaux) tout au long de sa trajectoire de l'orbite initiale vers la basse atmosphère terrestre (orbite de largage). Les forces appliquées au satellite sont : la propulsion, les forces de gravité incluant J_2 et les forces dues à la traînée atmosphérique. Le simulateur comprend différents blocs, soient la dynamique du satellite, le modèle d'atmosphère et les effets des perturbations (J_2 et traînée). La trajectoire optimale (guidage) est calculée dans un script MATLAB indépendant. Pour simplifier les calculs à l'ordinateur, les variables sont normalisées (distance, temps, vitesse, force) de sorte à ce que la constante gravitationnelle ait une valeur unitaire. Les différents modules du simulateur sont présentés à la Figure 4-1.

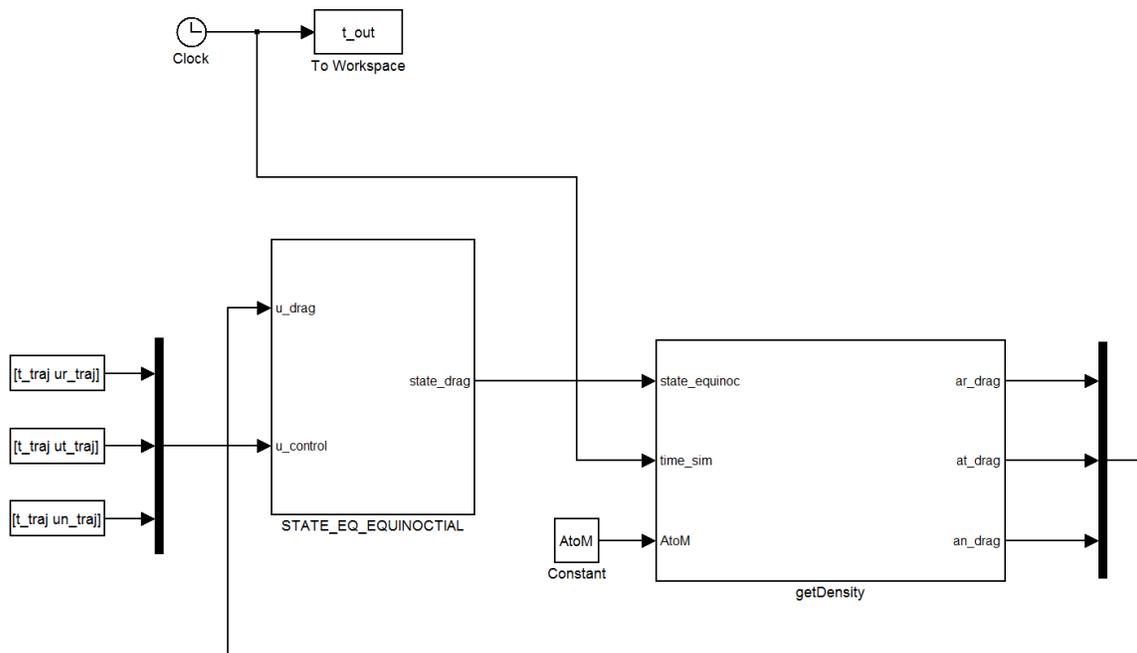


Figure 4-1. Simulateur

4.1.1 Dynamique du satellite

Les équations de la dynamique du satellite exprimées à l'aide des éléments équinoctiaux ont été présentées à la section 2.3. Ces équations sont implémentées dans MATLAB/Simulink (Figure 4-2) afin d'obtenir la position du satellite pour tout point sur la trajectoire. Les forces de propulsion sont exprimées dans le repère RTN et sont transformées dans le repère FGW à l'intérieur du simulateur. Un intégrateur à pas fixe de type ode4 (Runge-Kutta) est utilisé pour résoudre les équations d'état.

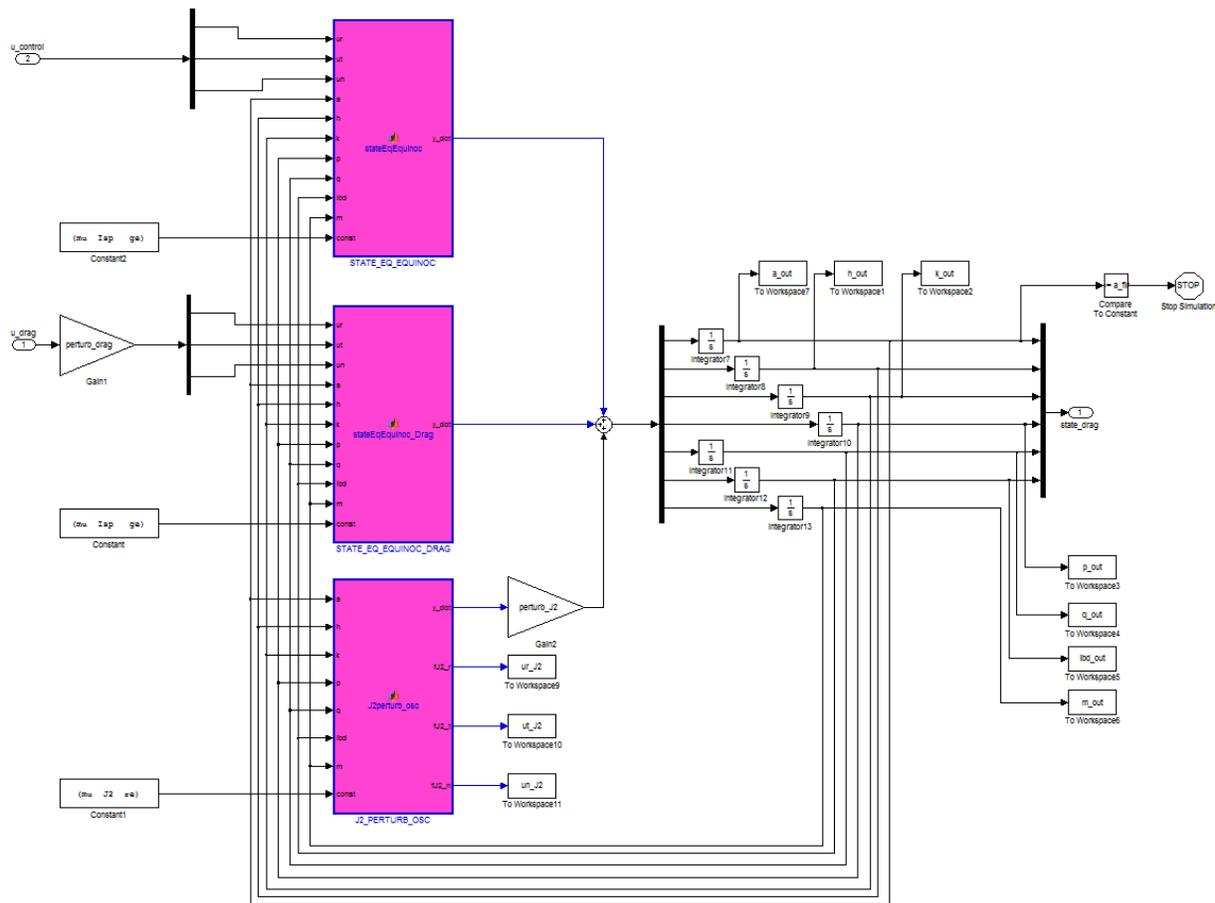


Figure 4-2. Simulateur - Dynamique éléments équinoctiaux

Pour une orbite circulaire de 800 km d'altitude sans perturbations, on obtient grâce aux équations de la dynamique exprimée avec les éléments équinoctiaux l'évolution des éléments classiques présentés à la Figure 4-3. Ces résultats, obtenus à l'aide des équations exprimées en termes des éléments équinoctiaux, ont été validés à l'aide des équations orbitales exprimées en termes des éléments orbitaux classiques ainsi qu'en termes des vecteurs position

et vitesse. Comme aucune perturbation n'est présente, on s'attend à ce que les éléments orbitaux demeurent constants.

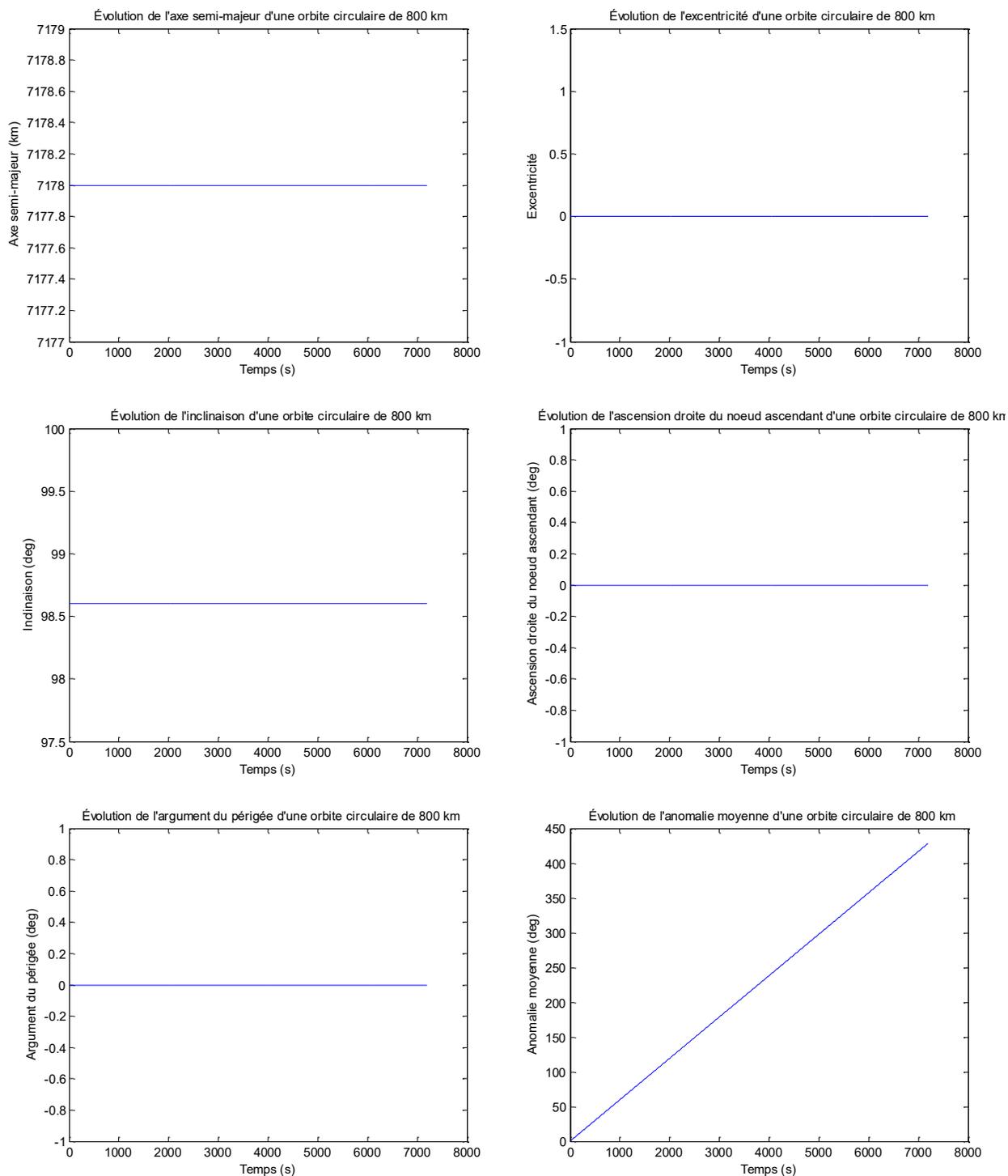


Figure 4-3. Évolution des éléments orbitaux classiques pour une orbite circulaire d'altitude 800 km sans perturbations

4.1.2 Non-sphéricité de la Terre

Les équations de la dynamique du satellite affectée par la perturbation J_2 exprimées à l'aide des éléments équinoctiaux ont été présentées à la section 2.5. Ces équations sont implémentées dans MATLAB/Simulink. Il est possible d'intégrer l'effet de J_2 à l'aide des équations présentées à la section 2.5 (dérivées) ou plutôt d'utiliser les équations moyennées de l'effet de J_2 (présentées ci-dessous). Les équations moyennées définissent la variation moyenne des éléments orbitaux due à J_2 . Ainsi, dans ces équations, la variation de tous les éléments orbitaux est nulle excepté pour l'ascension droite du nœud ascendant et l'argument du périégée. Lors du calcul de la commande optimale (loi de guidage), on utilise les équations moyennées pour éviter que la commande ne doive toujours compenser des effets ayant une moyenne nulle. Par contre, dans le simulateur qui applique cette loi de guidage, on utilise les éléments oscillants pour obtenir les vrais états représentant la position du satellite. On obtient les forces dues à la perturbation J_2 dans le repère RTN et elles sont transformées dans le repère FGW à l'interne du simulateur. Il est possible d'activer ou non la perturbation dans le simulateur.

À titre de comparaison, la même simulation qu'à la section précédente est présentée à la Figure 4-4 avec la perturbation due à J_2 . On y voit clairement l'effet oscillant qu'a la perturbation J_2 sur les éléments orbitaux ainsi que l'effet de dérive de l'ascension droite du nœud ascendant (Ω), qui peuvent être validés avec les équations analytiques suivantes, représentant l'effet moyenné de J_2 :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= -\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2r_e^2}{(1-e^2)^2a^{\frac{7}{2}}}\cos i\right) \\ \dot{\omega} &= \left(\frac{3}{4}\frac{\sqrt{\mu}J_2r_e^2}{(1-e^2)^2a^{\frac{7}{2}}}(5\cos^2 i - 1)\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

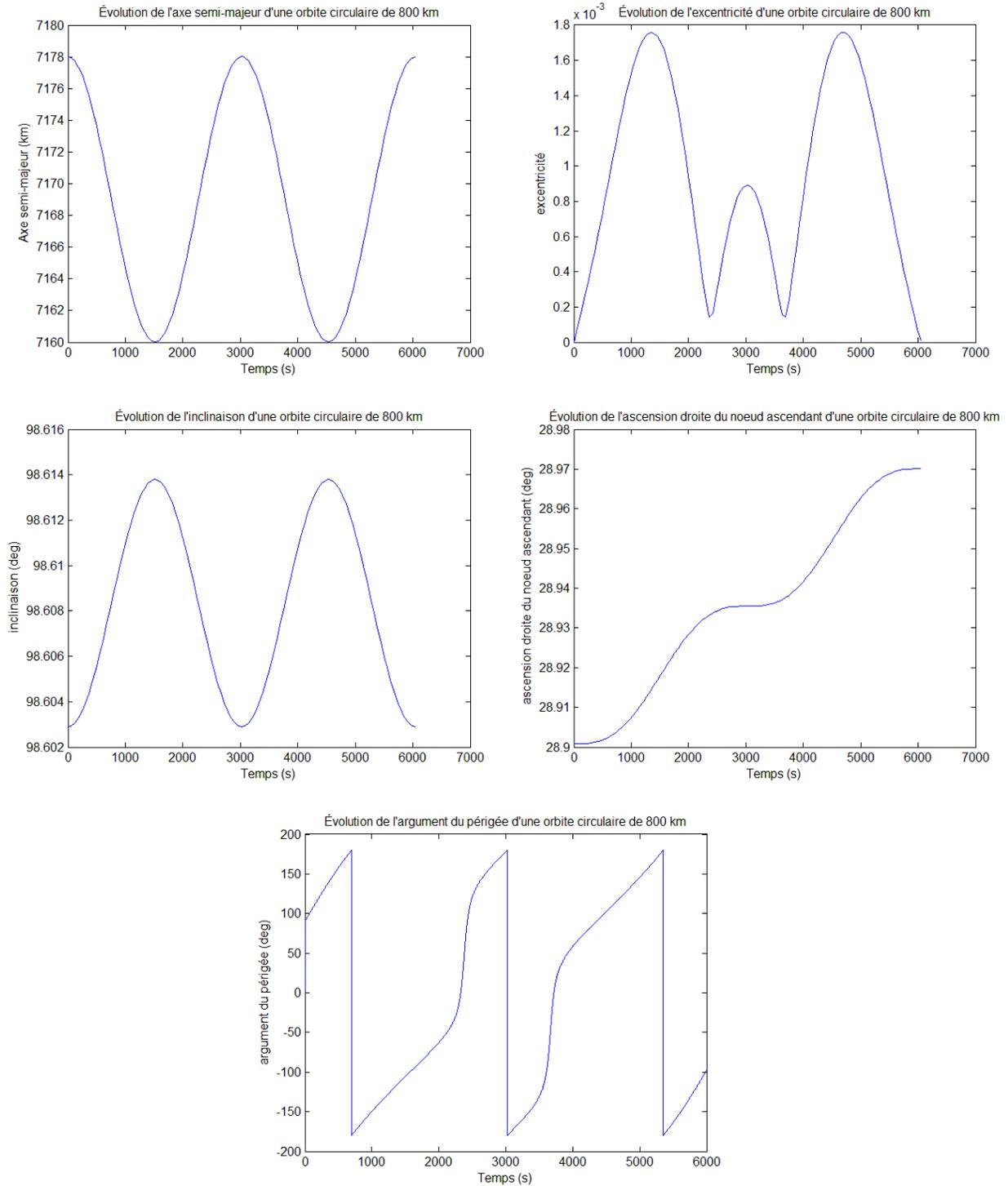


Figure 4-4. Évolution des éléments orbitaux classiques pour une orbite circulaire d'altitude 800 km avec J_2

4.1.3 Modèle d'atmosphère

Le modèle d'atmosphère utilisé est le modèle analytique développé dans [de Lafontaine et al., 1983] et basé sur le modèle numérique Jacchia 1977 (J77). À partir de données des satellites et des mesures de température et de composition de l'atmosphère, le modèle J77 donne la densité, température, pression, masse moléculaire moyenne et composition de l'atmosphère en fonction des paramètres tels que le temps, la position spatiale (altitude, latitude, heure locale solaire) et les phénomènes physiques tels que l'activité solaire, la rotation du soleil, le « sunspot number », le vent solaire, les perturbations géomagnétiques et la succession des saisons. Le modèle d'atmosphère est décrit plus en détail à l'annexe A.

Le modèle d'atmosphère est validé en comparant ses résultats aux résultats du modèle statique présenté sous forme de tableaux dans J77. Ainsi, pour différentes valeurs de température exosphérique et d'altitude, on obtient les écarts illustrés à la Figure 4-5 entre les deux modèles. Pour les altitudes qui nous intéressent, c'est-à-dire en-deçà de 1000 km et en sachant que par la nature même de l'atmosphère qui est difficile à modéliser, un modèle d'atmosphère ne peut être précis qu'à environ 10%, on en conclut que le modèle est valide. Seulement à une température exosphérique très basse le modèle d'atmosphère diffère plus pour des altitudes élevées. Pour des températures exosphériques basses, la densité est moindre et s'approche de la précision numérique de MATLAB ($\sim 10^{-16}$). Ainsi, puisque la densité est si faible, l'erreur relative entre les deux modèles devient plus grande.

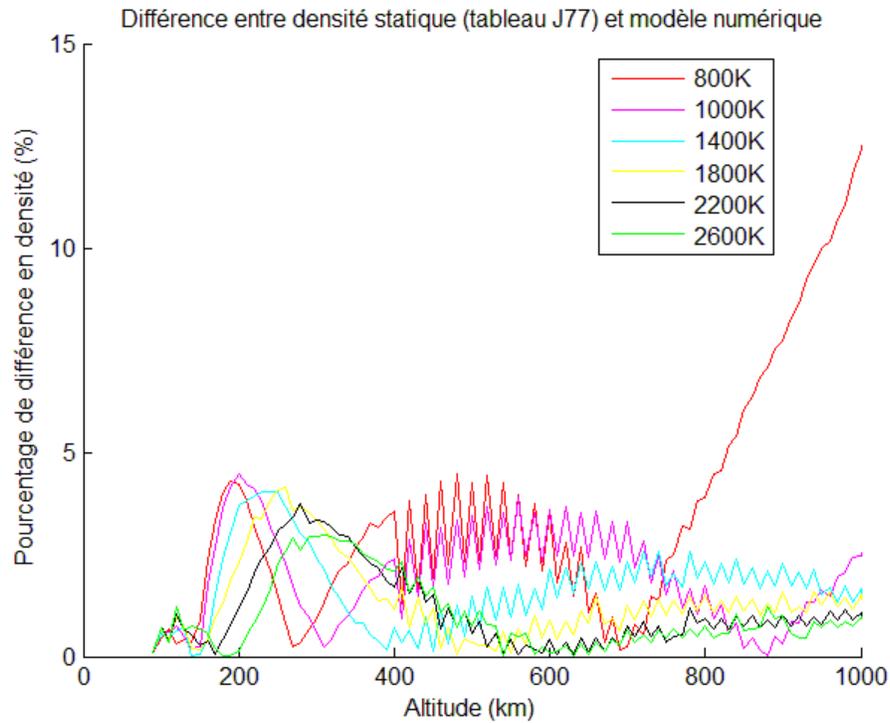


Figure 4-5. Différence entre densité statique (tableau J77) et modèle numérique en fonction de l'altitude

Un effet important de l'atmosphère n'est cependant pas inclus dans le modèle statique, soit l'effet du renflement diurne de l'atmosphère. Cet effet peut être observé pour une orbite circulaire de 800 km d'altitude sur la Figure 4-6.

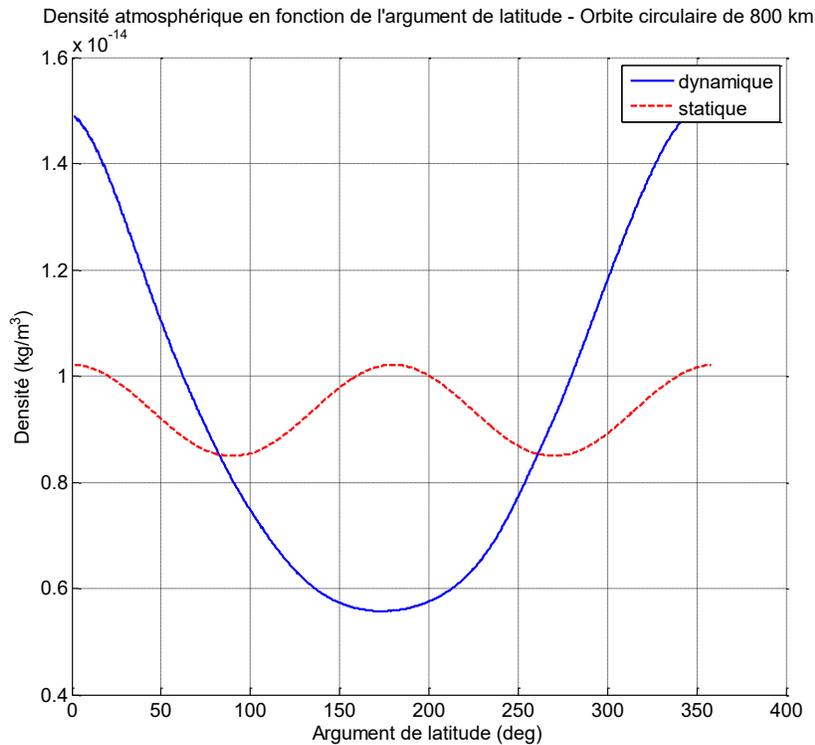


Figure 4-6. Densité atmosphérique en fonction de l'argument de latitude

On voit sur le graphique de la Figure 4-6 les densités pour une atmosphère statique et pour une atmosphère dynamique qui inclut le renflement diurne. La densité est présentée en fonction de l'argument de latitude de l'orbite polaire dont le nœud ascendant est placé dans le renflement diurne de l'atmosphère. Ainsi, à certains endroits sur l'orbite on observe jusqu'à deux fois la densité. Ces effets peuvent être utilisés de façon avantageuse lorsque vient le temps de désorbiter plus rapidement un débris dans l'atmosphère terrestre. Il est à noter qu'il y a une variation de la densité pour une orbite circulaire et un modèle statique. Ceci est expliqué par le fait que la Terre n'est pas parfaitement sphérique. Ainsi, aux pôles le rayon de la Terre est plus petit qu'à l'équateur. Ces variations d'altitude causent des variations dans la densité du modèle statique.

4.1.4 Force de traînée atmosphérique

Le calcul de la force due à la traînée atmosphérique s'effectue grâce aux équations présentées à la section 2.5. Les satellites de référence représentant des satellites visés par la mission sont Envisat (gros satellite) et Proba-1 (petit satellite). On utilise un rapport aire sur masse (aire de la surface extérieure du satellite en direction du vecteur vitesse divisée par sa masse) qui varie

entre 0,04 et 0,40 m^2/kg pour correspondre aux satellites visés. Le rapport aire sur masse d'Envisat est environ de 0,04 m^2/kg alors que celui de Proba-1 est environ de 0,004 m^2/kg . Par contre, si on considère un dispositif d'augmentation de la traînée tel qu'un ballon gonflable, on peut augmenter d'un facteur 10 ces rapports. En effet, un rapport aire sur masse de 0,4 m^2/kg équivaut à un ballon d'environ 11 m de rayon. On utilise un coefficient balistique C_D de 2,2 tel que généralement utilisé dans la littérature [Vallado, 2007]. À l'aide de ces paramètres et des équations dynamiques, on obtient les accélérations dues à la traînée atmosphérique dans le repère ECI, qui sont ensuite transformées vers le repère RTN pour s'ajouter aux accélérations dues au propulseur et à J_2 . Il est possible d'activer ou non la perturbation dans le simulateur.

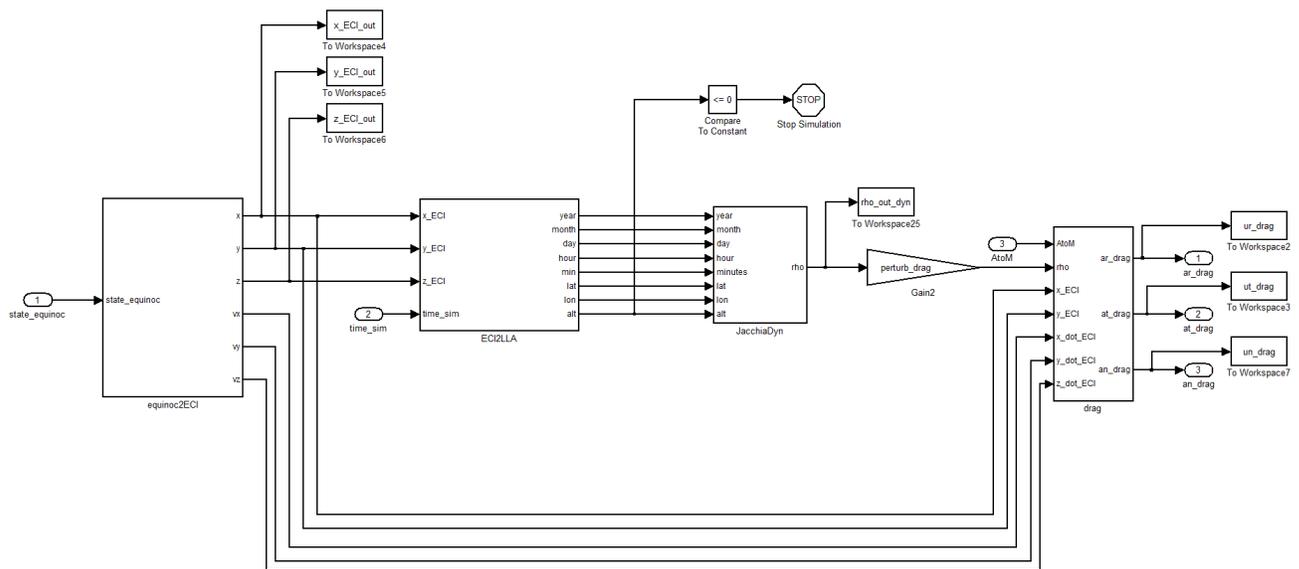


Figure 4-7. Simulateur - Calcul de la traînée atmosphérique

La Figure 4-7 illustre la partie du simulateur qui calcule les forces agissant sur le satellite dues à la traînée atmosphérique. La chaîne d'opérations est la suivante :

1. Transformer les éléments équinoctiaux en position/vitesse dans le repère ECI.
2. Transformer du repère ECI au repère LLA (latitude, longitude, altitude).
3. Trouver la densité avec le modèle d'atmosphère basé sur J77.
4. Calculer la force due à la traînée atmosphérique à partir de la densité calculée.

Il est à noter que la force appliquée sur le satellite par la traînée atmosphérique est réduite à l'axe transverse seulement. La commande optimale calculée par l'algorithme présente des

commandes oscillant autour de zéro pour les axes radial et normal. Ainsi, en réduisant ces commandes à zéro, on évite les manœuvres inutiles de changement de plan et la consommation de carburant s'en trouve minimisée. Par la suite, cette force est appliquée à la dynamique des éléments équinoctiaux présentée à la section 4.1.1.

CHAPITRE 5

TRAJECTOIRE OPTIMALE (GUIDAGE)

L'algorithme de guidage doit déterminer la trajectoire optimale qui permet de partir d'une orbite donnée (orbite du satellite à éliminer) pour arriver à une autre orbite (orbite de largage) tout en minimisant le coût du carburant utilisé. Cette phase est la phase de désorbitation du débris. On utilise donc un algorithme de résolution du problème aux deux limites pour trouver les commandes optimales à appliquer sur les trois axes du satellite, dans le repère RTN (radial, transverse, normal).

5.1.1 Algorithme

L'algorithme utilisé pour effectuer un transfert orbital optimal est grandement basé sur [Kechichian, 1996] et [Tarzi et al., 2013]. Dans ces articles, on effectue des manœuvres de rendez-vous optimal en utilisant les éléments équinoctiaux. Les équations d'états et des états adjoints sont intégrées numériquement en appliquant le vecteur de commande dans une direction qui maximise le hamiltonien à chaque instant de la manœuvre. Les équations d'état et des états adjoints utilisant les éléments équinoctiaux sont présentées aux sections 2.2 et 2.3. Il est à noter qu'aucune contribution nouvelle n'a été apportée à l'algorithme de détermination de la trajectoire optimale, autre que son application à un problème d'élimination de débris orbitaux. [Tarzi et al., 2013] mentionnent qu'ils peuvent fournir leur code MATLAB aux utilisateurs intéressés, par contre cette option a été rejetée afin de permettre une bonne compréhension des algorithmes utilisés, notamment la méthode du tir, et d'avoir le plein contrôle sur tous les paramètres. En effet, [Tarzi et al., 2013] mentionne l'utilisation d'une méthode du tir pour résoudre le problème aux deux limites, mais aucun détail n'est présenté sur l'application de cette méthode.

Le vecteur d'accélération \vec{u} peut être exprimé dans le repère équinoctial ou dans le repère RTN tel que :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_f \hat{f} + u_g \hat{g} + u_w \hat{w} = u_r \hat{r} + u_t \hat{t} + u_n \hat{n} \\ u = |\vec{u}| &= (u_f^2 + u_g^2 + u_w^2)^{1/2} = (u_r^2 + u_t^2 + u_n^2)^{1/2}\end{aligned}\tag{5.1}$$

On rappelle ici les équations d'états :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= da/dt = M_{11}u_f + M_{12}u_g \\
 \dot{x}_2 &= dh/dt = M_{21}u_f + M_{22}u_g + M_{23}u_w \\
 \dot{x}_3 &= dk/dt = M_{31}u_f + M_{32}u_g + M_{33}u_w \\
 \dot{x}_4 &= dp/dt = M_{43}u_w \\
 \dot{x}_5 &= dq/dt = M_{53}u_w \\
 \dot{x}_6 &= dL/dt = n + M_{61}u_f + M_{62}u_g + M_{63}u_w \\
 \dot{x}_7 &= dm/dt = -T/v_e
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

où T correspond à la magnitude du vecteur de force et v_e correspond à la vitesse d'éjection des gaz :

$$T = mu \tag{5.3}$$

$$v_e = I_{SP}g_0 \tag{5.4}$$

où I_{SP} est l'impulsion spécifique et g_0 est l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre.

On désire minimiser la quantité de carburant utilisée. On peut obtenir la masse finale du satellite nettoyeur en intégrant \dot{x}_7 pour le temps total du transfert.

$$m_f = m_0 - \int_0^{t_f} (T/v_e)dt \tag{5.5}$$

Ainsi, pour un temps de transfert fixe, t_f , maximiser la masse finale revient à minimiser la poussée instantanée lors du transfert (si on suppose une poussée totale constante dont les composantes peuvent varier). Par contre, on obtient une meilleure convergence du problème ainsi que des résultats similaires en minimisant le carré de la poussée, ce qui place une plus grande pénalité sur des grandes valeurs de poussée. Le problème est alors moins sensible aux valeurs initiales et a une meilleure convergence. On peut utiliser un facteur α afin de mettre un poids entre les deux méthodes :

$$J = \alpha m_f + (1 - \alpha) \int_{t_0}^{t_f} -\frac{T^2}{2} dt \tag{5.6}$$

On résout premièrement le problème en posant $\alpha = 0$. On obtient alors le hamiltonien :

$$H = -\frac{T^2}{2} + \sum_{i=1}^7 \lambda_i \frac{dx_i}{dt} \quad (5.7)$$

Comme on n'effectue pas de rendez-vous mais plutôt seulement un transfert d'orbite, on ne se soucie pas de la longitude moyenne, donc $\lambda_6 = 0$. Le hamiltonien devient donc :

$$H = T_f[M_{11}\lambda_1 + M_{21}\lambda_2 + M_{31}\lambda_3]/m + T_g[M_{12}\lambda_1 + M_{22}\lambda_2 + M_{32}\lambda_3]/m \\ + T_w[M_{23}\lambda_2 + M_{33}\lambda_3 + M_{43}\lambda_4 + M_{53}\lambda_5]/m - \lambda_7 T/v_e - T^2/2 \quad (5.8)$$

On peut réécrire le problème en divisant la poussée en trois composantes dans le repère équinoctial (T_f, T_g, T_w) . On remplace ici la composante T_w par $T_w = \sqrt{T^2 - T_f^2 - T_g^2}$, où T est la magnitude :

$$H = T_f[M_{11}\lambda_1 + M_{21}\lambda_2 + M_{31}\lambda_3]/m + T_g[M_{12}\lambda_1 + M_{22}\lambda_2 + M_{32}\lambda_3]/m \\ + (T^2 - T_f^2 - T_g^2)^{1/2}[M_{23}\lambda_2 + M_{33}\lambda_3 + M_{43}\lambda_4 + M_{53}\lambda_5]/m - \lambda_7 T/v_e \\ - T^2/2 \quad (5.9)$$

En appliquant l'équation (2.51) à ce hamiltonien, on obtient ainsi, tel que dans [Tarzi et al., 2013], les conditions d'optimalité :

$$\partial H/\partial T_f = 0 \Rightarrow T_f = T[M_{11}\lambda_1 + M_{21}\lambda_2 + M_{31}\lambda_3]/\tau \quad (5.10)$$

$$\partial H/\partial T_g = 0 \Rightarrow T_g = T[M_{12}\lambda_1 + M_{22}\lambda_2 + M_{32}\lambda_3]/\tau \quad (5.11)$$

On obtient le dernier composant de la poussée ainsi :

$$T^2 = T_f^2 + T_g^2 + T_w^2 \quad (5.12)$$

$$T_w = T[M_{23}\lambda_2 + M_{33}\lambda_3 + M_{43}\lambda_4 + M_{53}\lambda_5]/\tau \quad (5.13)$$

où

$$\tau = ([M_{11}\lambda_1 + M_{21}\lambda_2 + M_{31}\lambda_3]^2 + [M_{12}\lambda_1 + M_{22}\lambda_2 + M_{32}\lambda_3]^2 \\ + [M_{23}\lambda_2 + M_{33}\lambda_3 + M_{43}\lambda_4 + M_{53}\lambda_5]^2)^{1/2} \quad (5.14)$$

On obtient la magnitude de la poussée :

$$\partial H/\partial T = \tau/m - \lambda_7/v_e - T = 0 \Rightarrow T = \tau/m - \lambda_7/v_e \quad (5.15)$$

5.1.2 Choix de la méthode du tir (tests et résultats)

On utilise la méthode du tir pour résoudre le problème aux deux limites qui correspond au transfert orbital avec un engin à faible poussée. Cette méthode a été choisie car elle converge rapidement si les estimations des états adjoints initiaux sont bonnes et permet une charge de calcul moyenne. Le problème aux deux limites est défini par les conditions initiales et finales de l'orbite, soient les éléments équinoctiaux désirés des deux orbites. On définit l'orbite grâce aux éléments suivants : axe semi-majeur, excentricité, inclinaison, argument du périégée et ascension droite du nœud ascendant, que l'on convertit par la suite en éléments équinoctiaux tel qu'à la section 2.1.3. Le dernier élément qui spécifie la position sur l'orbite (anomalie moyenne) n'est pas important dans notre problème car contrairement aux problèmes de rendez-vous, on ne cherche pas ici à atteindre une position orbitale spécifique à la fin de la manœuvre, ainsi l'anomalie finale est libre. Dans ce cas-ci, la position angulaire sur l'orbite finale n'est pas importante, il suffit d'atteindre l'orbite pour remplir les objectifs.

En appliquant le principe du maximum de Pontryagin, tel que vu à la section 2.3, le problème présenté à la section 5.1.1 devient un problème aux deux limites.

On définit ainsi les états aux bornes temporelles supérieures et les bornes temporelles inférieures $\underline{x}(t_0)$ et $\underline{x}(t_f)$ comme étant les deux orbites désirées (éléments équinoctiaux des orbites initiales et finales) :

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ h_0 \\ k_0 \\ p_0 \\ q_0 \\ L_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t_0) \\ h(t_0) \\ k(t_0) \\ p(t_0) \\ q(t_0) \\ L(t_0) \\ m(t_0) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\underline{x}_f = \begin{bmatrix} a_f \\ h_f \\ k_f \\ p_f \\ q_f \\ L_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t_f) \\ h(t_f) \\ k(t_f) \\ p(t_f) \\ q(t_f) \\ L(t_f) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

De plus, on détermine le temps final tel que la poussée maximale des moteurs sur le trajet complet ne dépassera pas une limite fixée à 70 mN, basée sur l'engin SMART-1. Pour résoudre le problème ci-dessus, on doit définir le problème à valeur initiale :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= f(t, \underline{x}(t), \underline{\lambda}(t), u(t)), & t \in [t_0, t_f] \\ \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_0, \quad \underline{\lambda}(t_0) = \underline{\lambda}_0\end{aligned}\quad (5.18)$$

où $\underline{\lambda}_0$ est un paramètre qui varie lors des itérations de la méthode du tir, mais devient constant une fois les itérations terminées et la solution optimale obtenue.

En effet, on ne connaît pas les valeurs des conditions initiales de $\underline{\lambda}_0$, qui correspondent dans notre cas aux valeurs initiales des états adjoints. Le problème à valeur initiale ci-dessus est résolu avec différentes valeurs de $\underline{\lambda}_0$ jusqu'à ce que la condition $\underline{x}(t_f) = \underline{x}_f$ soit satisfaite.

$$\underline{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1(t_0) \\ \lambda_2(t_0) \\ \lambda_3(t_0) \\ \lambda_4(t_0) \\ \lambda_5(t_0) \\ \lambda_6(t_0) \\ \lambda_7(t_0) \end{bmatrix}\quad (5.19)$$

Comme on ne se soucie pas de la longitude moyenne, $\lambda_6 = 0$ et on ne varie donc que les autres états adjoints.

On définit une fonction :

$$\underline{F}(\underline{\lambda}_0) := \underline{x}(t_f, \lambda_0) - \underline{x}_f\quad (5.20)$$

Tel que discuté de façon générale au chapitre 2 et qu'on utilise pour une application particulière ici, si le problème aux deux limites a une solution, alors $\underline{F}(\underline{\lambda}_0)$ a une racine, qui correspond à la pente $\dot{\underline{x}}(t_0)$ donnant la solution $\underline{x}(t)$ du problème aux deux limites. Les racines de $\underline{F}(\underline{\lambda}_0)$ sont trouvées à l'aide de la méthode de Newton :

$$\underline{\lambda}_{n+1} = \underline{\lambda}_n - \frac{\underline{F}(\underline{\lambda}_n)}{\underline{F}'(\underline{\lambda}_n)}\quad (5.21)$$

où la dérivée $\underline{F}'(\underline{\lambda}_n)$ est calculée par la formule de la différence avant :

$$\underline{F}'(\underline{\lambda}_n) = \frac{\underline{F}(\underline{\lambda}_n + \delta\underline{\lambda}) - \underline{F}(\underline{\lambda}_n)}{\delta\underline{\lambda}} \quad (5.22)$$

avec $\delta\underline{\lambda}$ très petit.

L'algorithme itère jusqu'à ce que les conditions finales désirées soient satisfaites. Pour un problème d'ordre supérieur, la démarche est la même, par contre $\underline{F}'(\underline{\lambda}_n)$ devient le Jacobien de $\underline{F}(\underline{\lambda}_n)$. La valeur de départ $\underline{\lambda}_0$ est choisie par essais-erreurs jusqu'à ce que l'algorithme converge aux valeurs finales.

Ainsi, on obtient le Jacobien :

$$\underline{F}'(\underline{\lambda}_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_4} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_5} & \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_7} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_4} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_5} & \frac{\partial F_2}{\partial \lambda_7} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_4} & \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_5} & \frac{\partial F_3}{\partial \lambda_7} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_4} & \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_5} & \frac{\partial F_4}{\partial \lambda_7} \\ \frac{\partial F_5}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_5}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial F_5}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial F_5}{\partial \lambda_4} & \frac{\partial F_5}{\partial \lambda_5} & \frac{\partial F_5}{\partial \lambda_7} \\ \frac{\partial F_7}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F_7}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial F_7}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial F_7}{\partial \lambda_4} & \frac{\partial F_7}{\partial \lambda_5} & \frac{\partial F_7}{\partial \lambda_7} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

où

$$\frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} = \frac{(F_{nm} - F_n)}{\delta \lambda_m} \quad (5.24)$$

$$F_{nm} = x_n(t_f, \lambda_m + \delta \lambda_m) - x_{f_n} \quad (5.25)$$

$$F_n = x_n(t_f, \lambda_m) - x_{f_n} \quad (5.26)$$

Lorsque le résultat converge dans la tolérance précisée, on peut par la suite calculer le coût de la manœuvre (poussée des moteurs) obtenue :

$$J = -t_f \frac{\left(\frac{1}{2} m^2 (u_f^T u_f + u_g^T u_g + u_w^T u_w) \right)}{N} \quad (5.27)$$

où t_f est le temps final de la manœuvre, m est la masse, u_f , u_g et u_w sont les composantes du vecteur de commande dans le repère équinoctial et N est le nombre de points de la simulation.

5.1.3 Résultats

L'orbite initiale ciblée a été décrite au chapitre 1. Elle correspond à une orbite héliosynchrone à une altitude d'environ 800 km et quasi-circulaire. On peut déterminer l'inclinaison d'une orbite héliosynchrone dépendamment de son altitude. En effet, on a :

$$\cos(i) = \dot{\Omega} / (-3/2 \cdot n \cdot J_2 \cdot (r_E/p)^2) \quad (5.28)$$

où $\dot{\Omega} = 2\pi / (86400 \cdot 365,2422)$, r_E est le rayon de la Terre (6378 km), J_2 le paramètre de la non sphéricité de la Terre, n le mouvement moyen de l'orbite et p le paramètre de l'orbite (équivalent à l'axe semi-majeur pour une orbite circulaire).

En ne considérant aucune perturbation, on effectue donc le transfert détaillé au Tableau 5-1.

Tableau 5-1. Paramètres guidage

Éléments orbitaux	Conditions initiales	Conditions finales
a (km)	800	350
e	0,0014	0,0014
i (deg)	98,6029	98,6029
ω (deg)	0	0
Ω (deg)	0	0

Les figures 5-1 à 5-11 montrent l'évolution des éléments orbitaux en fonction du temps pour la manœuvre de commande optimale. Sur la Figure 5-9 et la Figure 5-10, les lignes rouges avec astérisques représentent la commande maximale pouvant être appliquée par le propulseur électrique. La durée du transfert, qui est fixe, est déterminée selon la poussée maximale pouvant être fournie par le propulseur électrique (maximum de 70 mN). Ainsi, dans ce cas particulier, la manœuvre dure environ 50 jours.

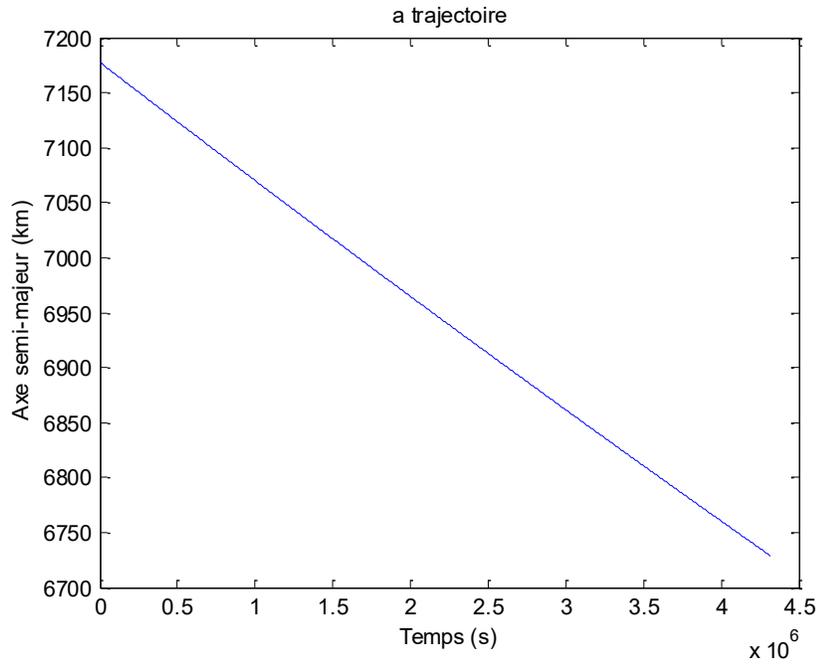


Figure 5-1. Trajectoire de guidage - axe semi-majeur

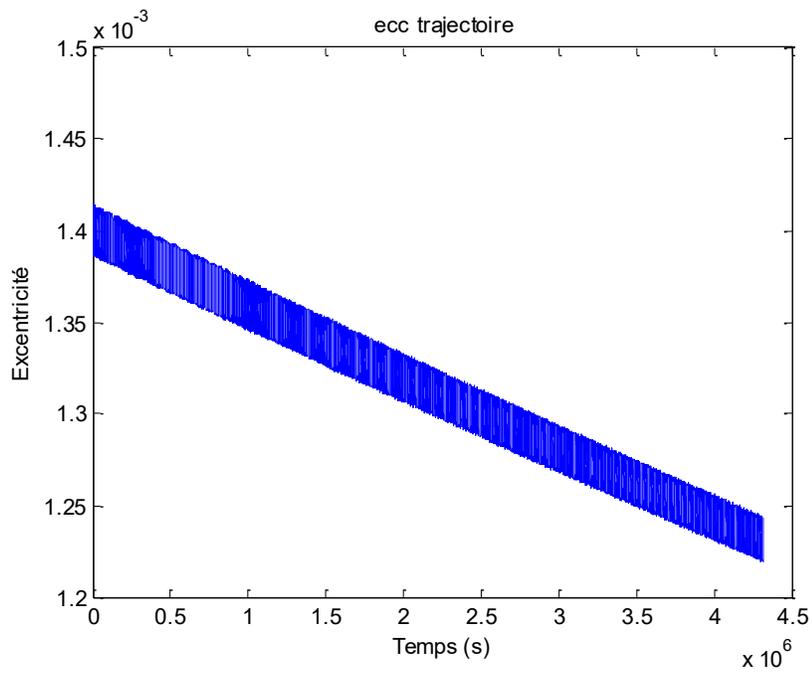


Figure 5-2. Trajectoire de guidage - excentricité

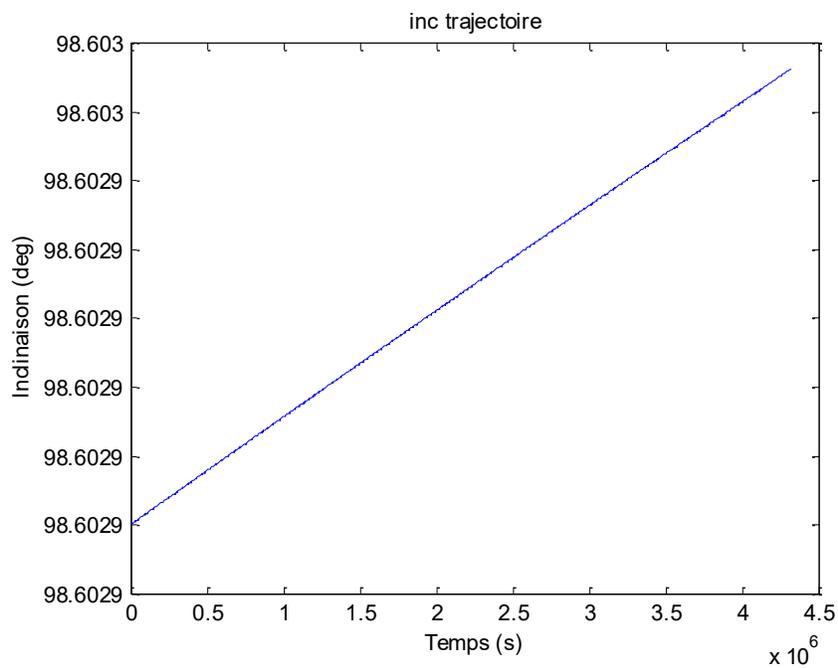


Figure 5-3. Trajectoire de guidage - inclinaison

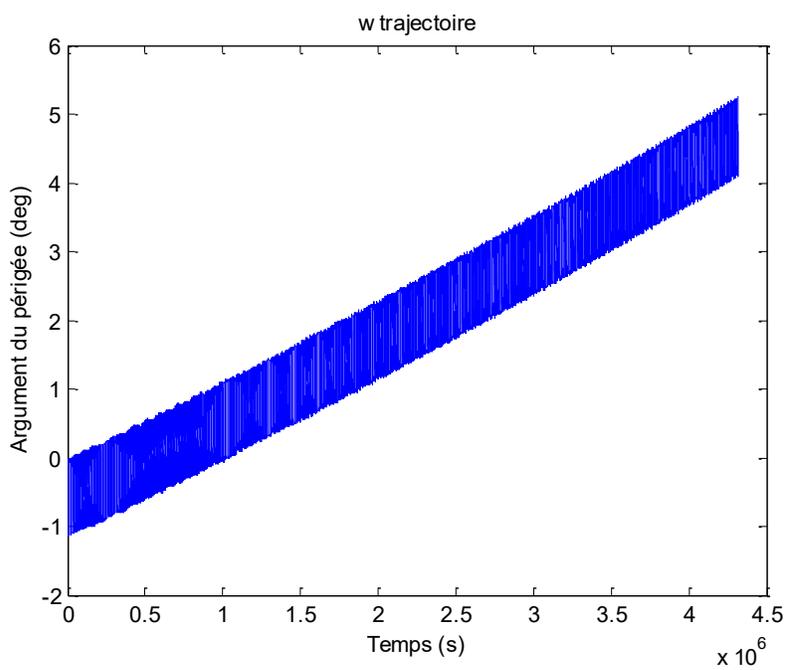


Figure 5-4. Trajectoire de guidage - argument du périée

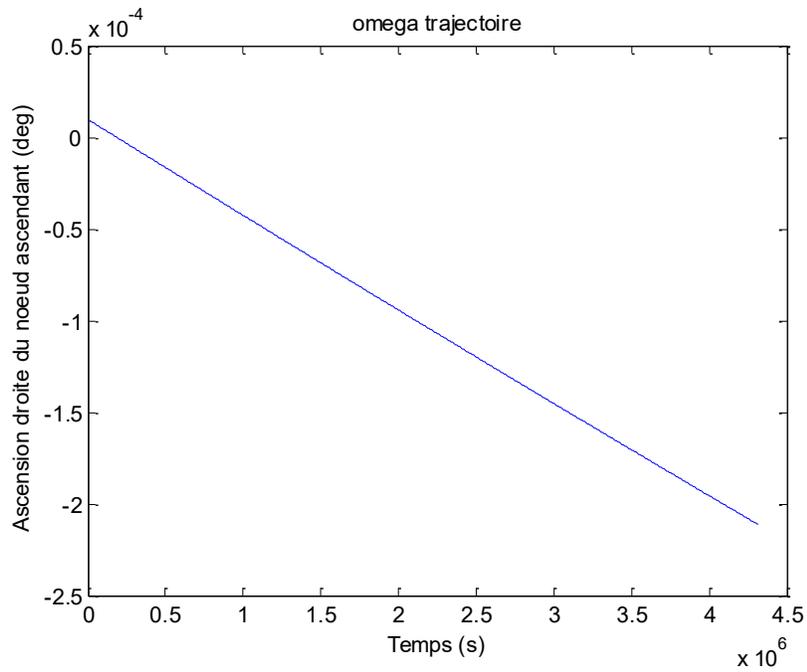


Figure 5-5. Trajectoire de guidage - ascension droite du noeud ascendant

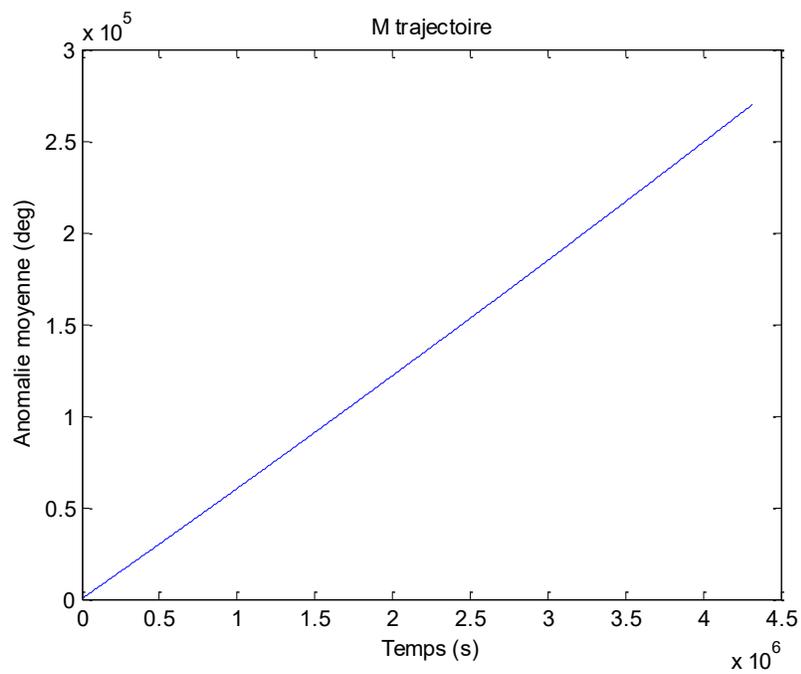


Figure 5-6. Trajectoire de guidage - anomalie moyenne

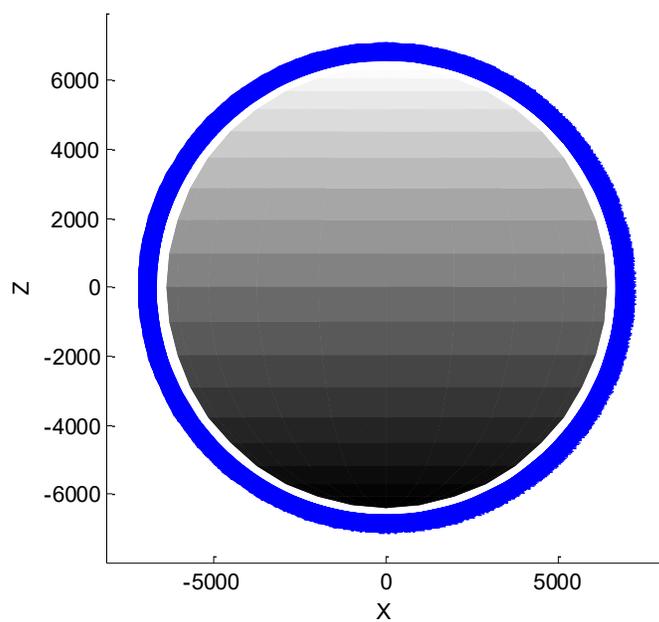


Figure 5-7. Trajectoire de guidage 3D - vue plan XZ, repère ECI

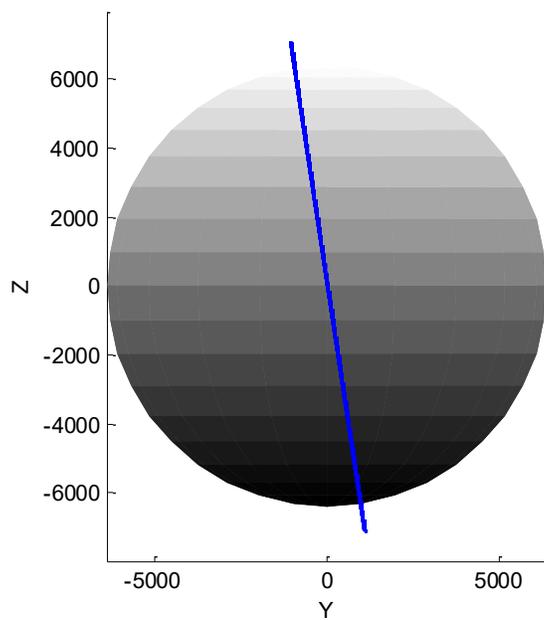


Figure 5-8. Trajectoire de guidage 3D - vue plan YZ, repère ECI

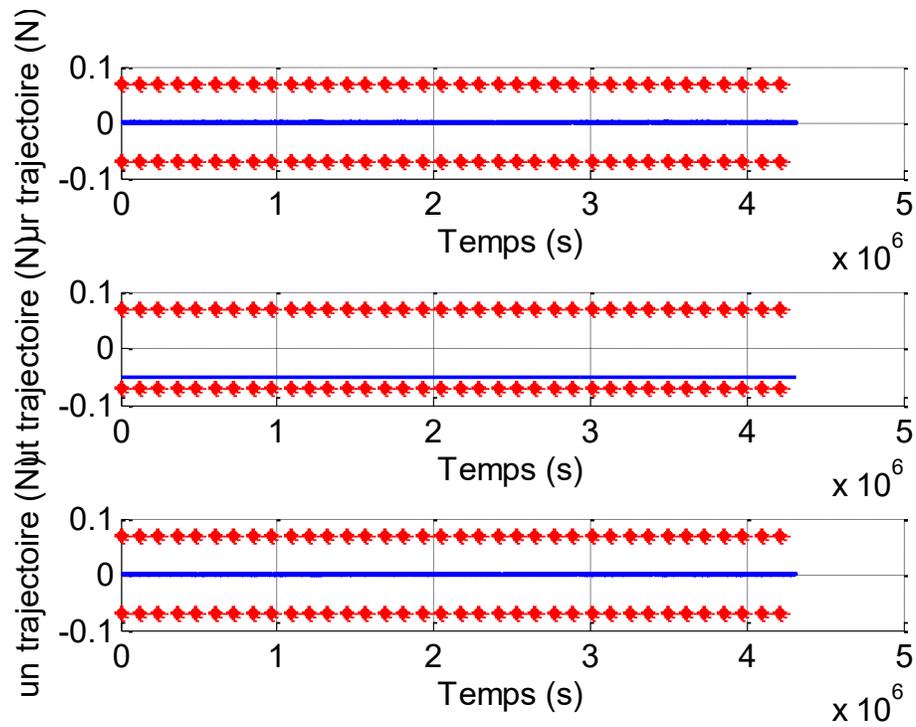


Figure 5-9. Force commandée sur les trois axes

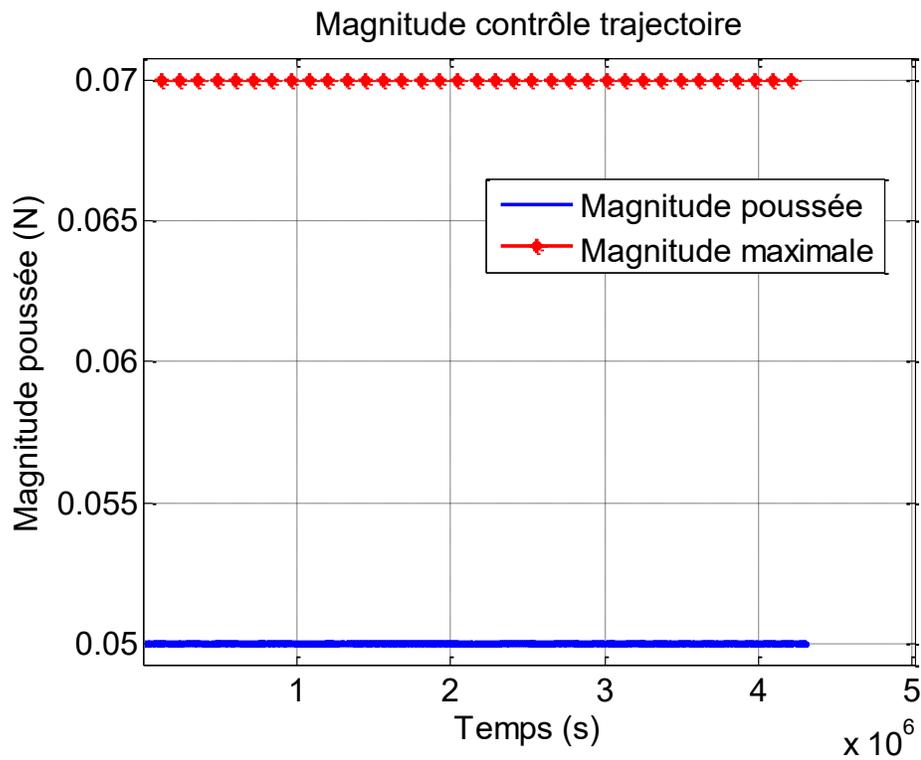


Figure 5-10. Magnitude contrôle trajectoire

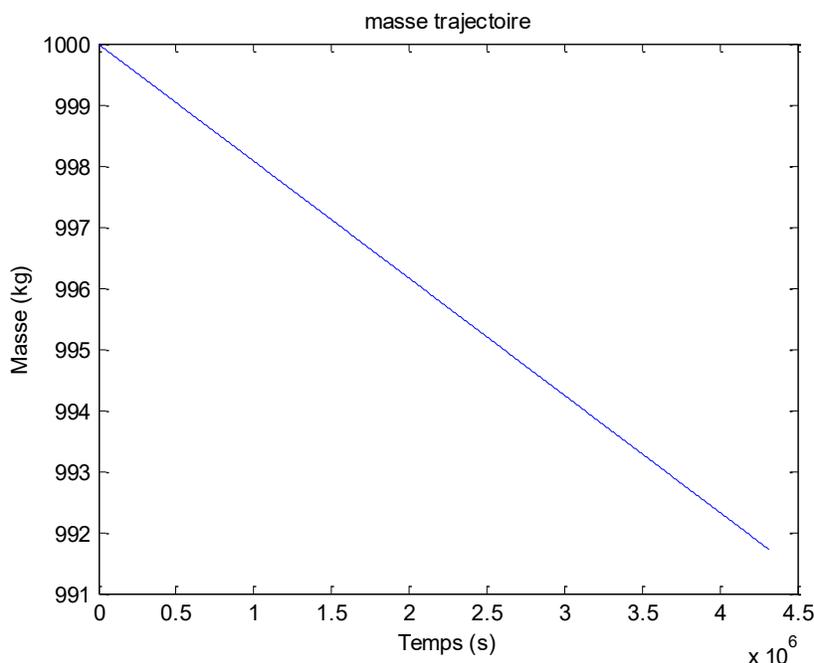


Figure 5-11. Masse trajectoire guidage

Par les résultats présentés ci-dessus, on remarque que le transfert s'est bel et bien effectué de l'orbite initiale vers l'orbite finale désirée. Il est à noter que certains éléments orbitaux ont varié légèrement de la commande, ceci est dû au poids accordé à ces éléments, par exemple, on accorde plus d'importance à l'axe semi-majeur qu'à l'argument du périégée. Aussi, l'argument du périégée est plus ou moins pertinent dans ce cas-ci puisque l'orbite est circulaire. On remarque aussi que la magnitude du contrôle des actionneurs n'a pas dépassé la limite fixée à 70 mN (basée sur l'engin SMART-1). On obtient un coût total en masse de 8,2778 kg pour effectuer ce transfert. On peut traduire ce coût en ΔV en intégrant les amplitudes des accélérations fournies par le propulseur, on obtient ainsi $\Delta V = 0,2452$ km/s.

Pour vérifier l'optimalité de ce transfert, on le compare à un transfert de Hohmann (transfert optimal pour un engin chimique). On définit premièrement les paramètres du transfert donnés au Tableau 5-2.

Tableau 5-2. Paramètres transfert de Hohmann

Paramètres	Orbite initiale	Orbite de transfert	Orbite finale
r_a (km)	$800 + r_E$	$800 + r_E$	$350 + r_E$
r_p (km)	$800 + r_E$	$350 + r_E$	$350 + r_E$

On définit aussi une masse initiale de 1000 kg. Pour calculer le ΔV nécessaire pour réaliser ce transfert de Hohmann, on calcule premièrement le moment angulaire sur les trois orbites :

$$h_1 = \sqrt{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r_{a1} \cdot r_{p1}}{(r_{a1} + r_{p1})}} \quad (5.29)$$

$$h_2 = \sqrt{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r_{a2} \cdot r_{p2}}{(r_{a2} + r_{p2})}} \quad (5.30)$$

$$h_3 = \sqrt{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r_{a3} \cdot r_{p3}}{(r_{a3} + r_{p3})}} \quad (5.31)$$

où les indices 1 réfèrent à l'orbite initiale, 2 réfèrent à l'orbite de transfert et 3 réfèrent à l'orbite finale. Ainsi, $r_{a1} = r_{p1} = r_{a2}$ et $r_{p2} = r_{a3} = r_{p3}$. Cela signifie que l'apogée de l'orbite initiale, le périégée de l'orbite initiale et l'apogée de l'orbite de transfert sont égaux. De même, le périégée de l'orbite de transfert, l'apogée de l'orbite finale et le périégée de l'orbite finale sont égaux. Il est à noter quand dans ce cas précis, l'orbite initiale et l'orbite finale sont circulaires (apogée = périégée).

Ensuite, on calcule les vitesses sur l'orbite initiale et sur l'orbite de transfert au point A (point de la première poussée du transfert de Hohmann) :

$$v_{A1} = \frac{h_1}{r_{a1}} \quad (5.32)$$

$$v_{A2} = \frac{h_2}{r_{a1}} \quad (5.33)$$

$$\Delta V_A = v_{A2} - v_{A1} \quad (5.34)$$

Puis, on calcule les vitesses sur l'orbite de transfert et sur l'orbite finale au point B (point de la deuxième poussée du transfert de Hohmann) :

$$v_{B2} = \frac{h_2}{r_{p3}} \quad (5.35)$$

$$v_{B3} = \frac{h_3}{r_{p3}} \quad (5.36)$$

$$\Delta V_B = v_{B3} - v_{B2} \quad (5.37)$$

On additionne les ΔV pour obtenir :

$$\Delta V = |\Delta V_A| + |\Delta V_B| \quad (5.38)$$

On obtient donc les résultats présentés au Tableau 5-3.

Tableau 5-3. Transfert de Hohmann

Paramètres	Valeurs
ΔV (km/s)	0,2451

On remarque que le ΔV requis pour le transfert de Hohmann et celui pour le transfert optimal avec un engin à faible poussée (électrique) sont semblables. On peut donc en conclure que l'algorithme calcule bel et bien un transfert optimal.

CHAPITRE 6

TESTS ET RÉSULTATS

6.1 Présentation des scénarios de tests

Cette section présente les différents tests effectués, les résultats obtenus ainsi que leur interprétation. Premièrement, la démarche pour obtenir des orbites équivalentes (circulaire versus excentrique) en termes de temps nécessaire pour désorbiter un débris est présentée. Puis, il est prouvé que se rendre à une orbite de largage excentrique coûte moins cher en carburant que se rendre à une orbite de largage circulaire. De plus, l'orbite excentrique permet de retirer un plus grand avantage du renflement diurne de l'atmosphère en plaçant le périégée de l'orbite directement dans ce renflement. On définit donc deux étapes principales :

1. Détermination d'une orbite de largage
 - a. Orbites équivalentes (circulaire/excentrique)
 - b. Coût des manœuvres vers les orbites de largage (commande optimale, phase de désorbitation)
2. Utilisation du renflement diurne

Dans les sections suivantes, plusieurs scénarios de tests sont utilisés, dans lesquels les paramètres qui varient sont la température exosphérique de l'atmosphère et le rapport aire sur masse du satellite. La température exosphérique dépend du cycle de 11 ans de l'activité solaire et donc de la journée (moment dans ce cycle) à laquelle on effectue la manœuvre. Dans le cadre des travaux présentés ici, on considère une température exosphérique fixe tout au long de la manœuvre. Deux températures exosphériques seront utilisées, une représentant une activité solaire moyenne (1000 K) et une représentant une activité solaire plus élevée (1500 K). Le rapport aire sur masse du satellite peut être modifié en utilisant un dispositif d'augmentation de la traînée, par exemple un ballon gonflable. L'intérêt d'un tel dispositif est que l'augmentation du rapport aire sur masse entraîne une plus grande force sur le satellite qui permet d'abaisser son orbite plus rapidement, accélérant sa dégradation dans l'atmosphère terrestre. Deux rapports aire sur masse seront utilisés, un représentant un satellite typique (0,04 m²/kg) et un représentant un satellite ayant un dispositif d'augmentation de la traînée (0,40

m^2/kg). Il est à noter que ce dispositif est attaché au satellite nettoyeur et non au débris. Les différents tests sont présentés au Tableau 6.1.

Tableau 6-1. Description des différents scénarios de tests

Cas de test	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4
Température exosphérique - T_{∞} (K)	1000	1500	1000	1500
Rapport aire sur masse (m^2/kg)	0,04	0,04	0,4	0,4

L'orbite initiale est une orbite de 800 km d'altitude, quasi-circulaire ($e = 0,0014$) et quasi-polaire héliosynchrone ($i = 98,6029^\circ$). Étant donné que l'ascension droite du nœud ascendant est un paramètre coûteux en carburant à modifier, ce paramètre évoluera de sa valeur initiale de façon naturelle au cours d'une manœuvre orbitale. Cependant, des orbites ayant différentes valeurs initiales de l'ascension droite du nœud ascendant sont présentées à des fins de comparaison. On considère un propulseur électrique ayant une impulsion spécifique de 3000 s et une masse initiale totale du « satellite nettoyeur » et du débris de 1000 kg.

6.2 Étape 1 – Détermination d'une orbite de largage

6.2.1 Orbites équivalentes

À l'aide du logiciel « Debris Assessment Software » (DAS) de la NASA, il est possible d'analyser le temps nécessaire pour qu'un débris situé dans une orbite de largage donnée se désintègre naturellement dans l'atmosphère terrestre (le temps de désintégration du débris). À l'aide de ce logiciel, on peut trouver des orbites équivalentes en termes de temps nécessaire pour désintégrer un objet. En partant d'une orbite circulaire à 800 km, deux choix sont offerts : (1) désorbiter vers une orbite de largage circulaire ou (2) désorbiter en descendant seulement le périégée vers une orbite de largage excentrique. Pour un même temps de désintégration, un lien peut être établi entre le rayon de l'orbite circulaire en (1) et le rayon du périégée en (2), son rayon d'apogée étant toujours à 800 km. À l'aide du logiciel DAS, la règle suivante est établie : chaque orbite de largage circulaire a une orbite excentrique équivalente en termes de durée de vie orbitale pour laquelle l'altitude du périégée est située à environ 120 km en-dessous de l'altitude de l'orbite circulaire. Cette relation s'observe par le graphique de la Figure 6-1, sur lequel on peut voir le temps nécessaire pour désintégrer un débris en fonction de l'altitude. Sur ce graphique, les orbites équivalentes sont de même couleur. Les orbites en bleu

représentent un rapport aire sur masse normal, alors que les orbites en rouge représentent un rapport aire sur masse correspondant à l'utilisation d'un dispositif d'augmentation de la traînée. On observe qu'il y a une différence d'environ 120 km entre l'altitude du périégée de l'orbite circulaire et de l'orbite excentrique. Il est à noter que cette « règle du 120 km » ne s'applique que pour des orbites excentriques ayant leur apogée à 800 km d'altitude. Pour une altitude d'apogée différente, une nouvelle règle devra être développée, c'est-à-dire que la différence ne sera plus de 120 km entre les orbites circulaires et excentriques.

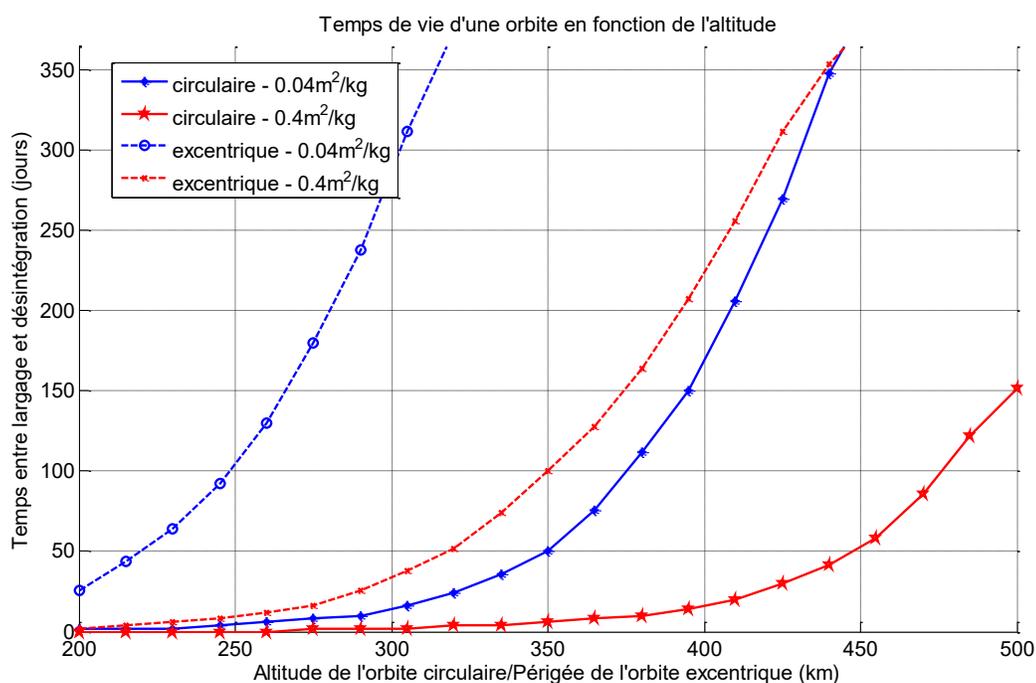


Figure 6-1. Temps de désintégration d'un débris en fonction de l'altitude

La différence entre l'altitude de l'orbite circulaire et le périégée de l'orbite excentrique en fonction du temps de vie (la règle de 120 km) est affichée sur la Figure 6-2.

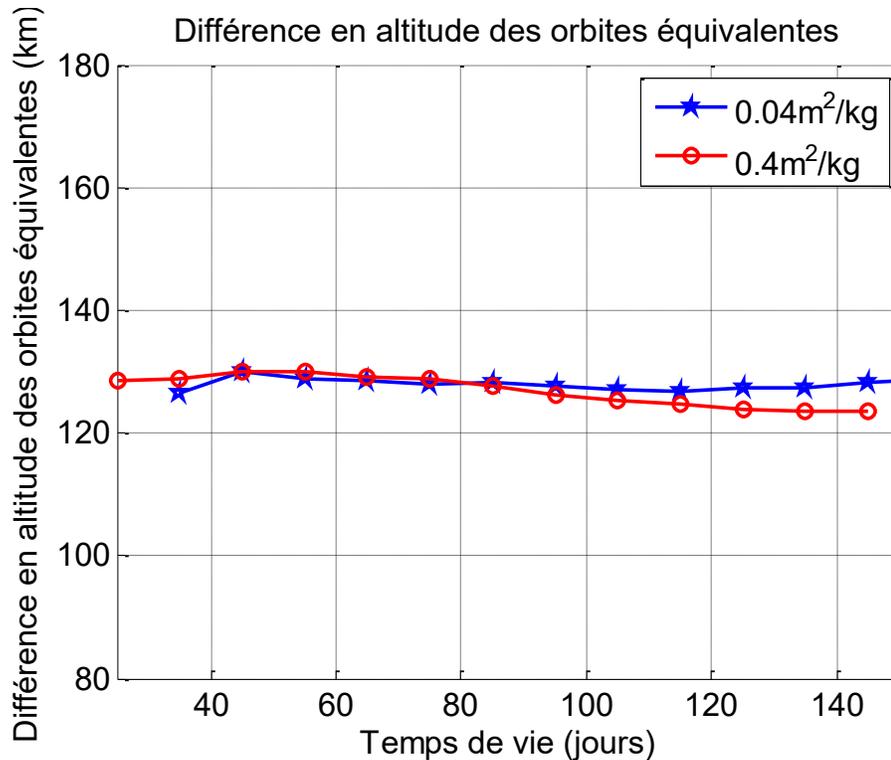


Figure 6-2. Différence en altitude des orbites équivalentes

Ainsi, dans les tests qui suivent on s'intéresse aux orbites équivalentes données au Tableau 6-2. Ces orbites seront considérées pour les orbites de largage.

Tableau 6-2. Orbites équivalentes

Orbite circulaire	Orbite excentrique
300x300 km	800x180 km
350x350 km	800x230 km
400x400 km	800x280 km
450x450 km	800x320 km
500x500 km	800x380 km

6.2.2 Commande optimale

On calcule les trajectoires optimales pour se rendre aux orbites équivalentes grâce à la commande optimale incluant la perturbation due à J_2 , présentée au chapitre 5. Il est à noter que pour éviter de forcer inutilement contre les effets de J_2 sur l'ascension droite du nœud ascendant et sur l'argument du périégée, les valeurs finales de ces éléments orbitaux sont prédites selon la durée fixe de la manœuvre (déterminée pour que la commande ne dépasse pas une amplitude de 70 mN, tel que basé sur l'engin SMART-1). La durée de la manœuvre dépend donc de l'orbite finale. Ainsi, dans tous les tests, t_0 est nul et t_f correspond à la durée

totale de la manœuvre. En propageant les équations dynamiques avec J_2 , sans commande optimale, pour la durée désirée de la manœuvre, les éléments orbitaux finaux sont obtenus. Ainsi, la commande optimale ne force que vers les éléments essentiels à modifier (axe semi-majeur et excentricité). Dans le cas d'une orbite équivalente excentrique, l'excentricité finale est calculée selon l'apogée et le périhélie final et c'est cette valeur que l'on tente d'atteindre comme condition finale dans le calcul optimal. La trajectoire optimale est ensuite insérée dans le simulateur incluant les perturbations dues à J_2 et à l'atmosphère (traînée incluant le renflement diurne). Les commandes des axes radial et normal, calculées à l'aide de la loi de guidage, oscillent autour de zéro. On force ici ces commandes à être nulles, gardant simplement la force transverse qui permet de modifier l'axe semi-majeur et l'excentricité de l'orbite. Ainsi, on évite de gaspiller du carburant pour corriger des effets qui sont nuls lorsqu'on en fait la moyenne sur l'orbite totale. On suppose aussi que l'on débute toujours la manœuvre avec le périhélie situé dans le renflement diurne. On utilise le « Mean Local Time of the Ascending Node » (MLTAN) pour identifier la position de l'orbite par rapport au Soleil. Ainsi, lorsque $MLTAN = 12h$, l'ascension droite du nœud ascendant de l'orbite est directement vers le Soleil. Le renflement diurne se produit environ 2h plus tard, soit pour $MLTAN = 14h$. Le périhélie se situe dans le renflement diurne lorsqu'il est situé au nœud ascendant ($\omega = 0$) et que le nœud ascendant est dans le renflement ($MLTAN = 14h$). Les tableaux 6-3 à 6-6 présentent les résultats obtenus. Dans ces tableaux, les colonnes « Temps de manœuvre perdu » et « Carburant économisé » présentent la comparaison de l'orbite de largage excentrique par rapport à son orbite de largage circulaire équivalente.

Tableau 6-3. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 1

Orbite finale ($h_a \times h_p$)	Test 1			
	Temps de désorbitation (jours)	Masse de carburant utilisée (kg)	Temps de manoeuvre perdu (%)	Carburant économisé (%)
500 x 500 km	28,9564	5,2583	55	19
800 x 380 km	44,9986	4,2594		
450 x 450 km	33,8109	6,1710	47	22
800 x 330 km	49,7855	4,8108		
400 x 400 km	38,4822	7,0589	42	24
800 x 280 km	54,4951	5,3614		
350 x 350 km	47,7952	7,8897	28	25
800 x 230 km	61,0009	5,9087		
300 x 300 km	46,3465	8,5880	45	25
800 x 180 km	67,4215	6,4522		

Tableau 6-4. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 2

Orbite finale ($h_a \times h_p$)	Test 2			
	Temps de désorbitation (jours)	Masse de carburant utilisée (kg)	Temps de manoeuvre perdu (%)	Carburant économisé (%)
500 x 500 km	28,0851	5,1001	55	19
800 x 380 km	43,4311	4,1098		
450 x 450 km	32,3678	5,9077	48	22
800 x 330 km	47,7837	4,6171		
400 x 400 km	36,2134	6,6427	44	23
800 x 280 km	51,9784	5,1139		
350 x 350 km	39,3595	7,2563	47	23
800 x 230 km	57,6713	5,5849		
300 x 300 km	41,5340	7,7168	51	22
800 x 180 km	63,0688	6,0335		

Tableau 6-5. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 3

Orbite finale ($h_a \times h_p$)	Test 3			
	Temps de désorbitation (jours)	Masse de carburant utilisée (kg)	Temps de manoeuvre perdu (%)	Carburant économisé (%)
500 x 500 km	27,9216	5,0704	56	19
800 x 380 km	43,6378	4,1299		
450 x 450 km	31,795	5,8031	51	20
800 x 330 km	47,9231	4,6311		
400 x 400 km	34,8158	6,3864	49	20
800 x 280 km	51,9184	5,1085		
350 x 350 km	36,745	6,7743	56	18
800 x 230 km	57,3303	5,5509		
300 x 300 km	37,6853	6,9831	65	15
800 x 180 km	62,2343	5,9520		

Tableau 6-6. Résultats temps de désorbitation et masse de carburant utilisée - Test 4

Orbite finale ($h_a \times h_p$)	Test 4			
	Temps de désorbitation (jours)	Masse de carburant utilisée (kg)	Temps de manoeuvre perdu (%)	Carburant économisé (%)
500 x 500 km	22,2742	4,0448	48	23
800 x 380 km	32,9556	3,1162		
450 x 450 km	24,1853	4,4142	46	23
800 x 330 km	35,2556	3,4032		
400 x 400 km	25,4270	4,6641	46	22
800 x 280 km	37,2261	3,6585		
350 x 350 km	26,1263	4,8167	52	20
800 x 230 km	39,7455	3,8426		
300 x 300 km	26,4670	4,9043	58	19
800 x 180 km	41,8219	3,9928		

En moyenne, la durée de la manoeuvre vers une orbite de largage excentrique est environ 49% plus longue et permet d'économiser environ 21% de carburant. Les résultats sont indépendants du scénario de test et de l'altitude du périégée. Les résultats sont aussi présentés sous forme de graphiques aux figures 6-3 et 6-4. Dans ces graphiques, les couleurs identiques correspondent aux paires d'orbites équivalentes et les lignes continues correspondent aux orbites de largage circulaires alors que les lignes pointillées correspondent aux orbites de largage excentriques.

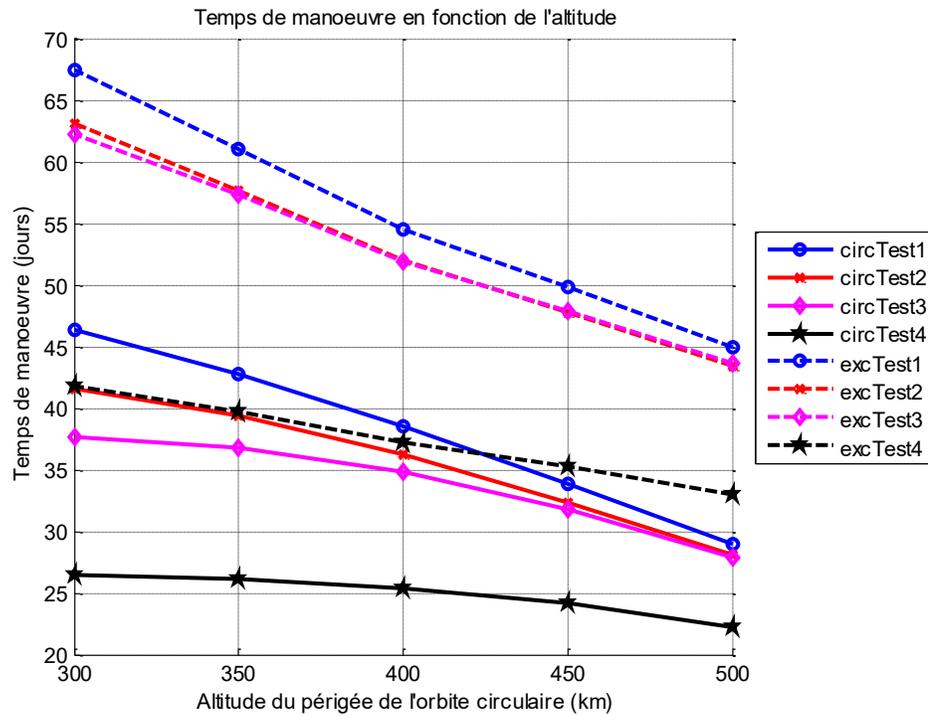


Figure 6-3. Temps de désorbitation en fonction de l'altitude

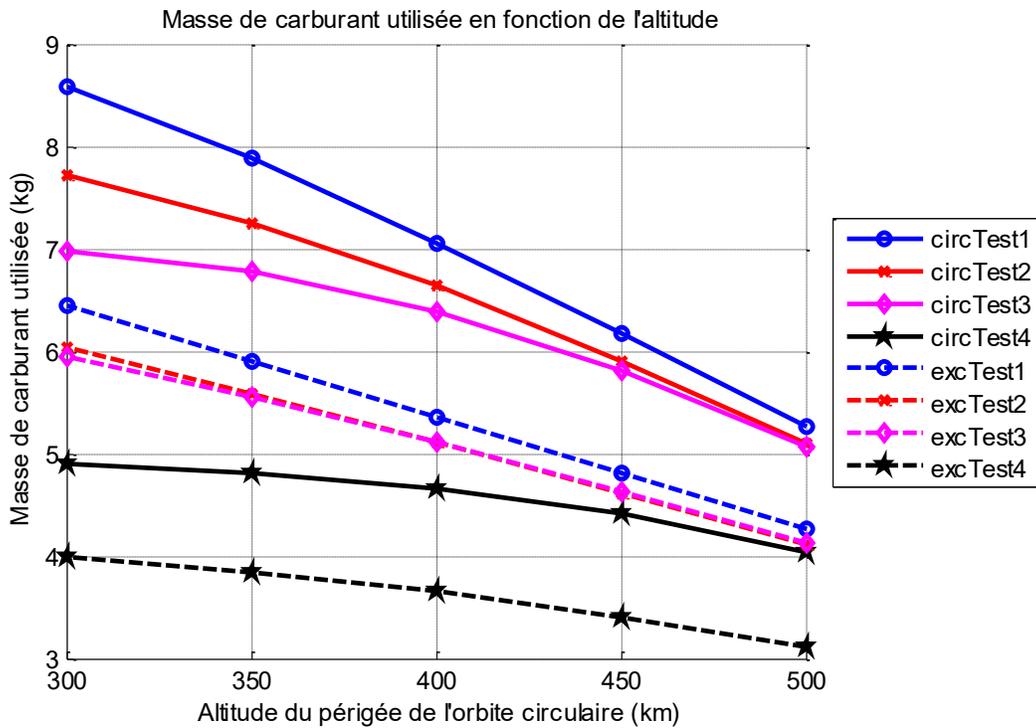


Figure 6-4. Masse de carburant utilisée en fonction de l'altitude

L'effet de la variation du MLTAN initial est maintenant analysé. On remarque que l'on peut tirer avantage du renflement diurne lors de la manœuvre pour se rendre à l'orbite de largage. En effet, on observe une variation de la masse de carburant consommée pour la manœuvre orbitale en fonction du MLTAN initial. On peut observer cet effet sur les figures 6-5 à 6-8.

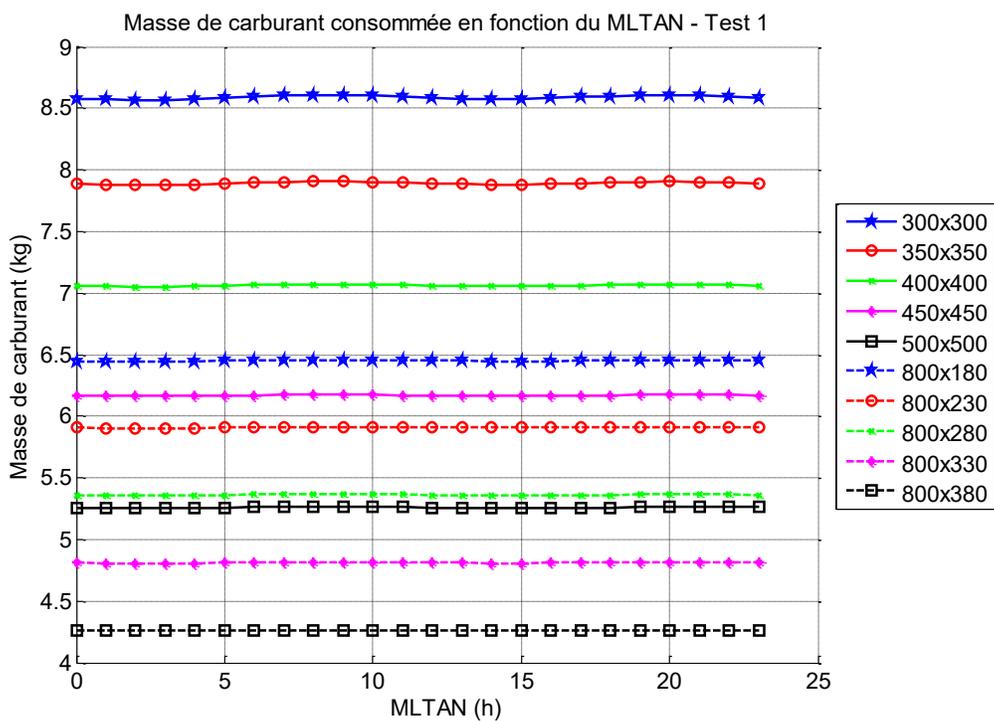


Figure 6-5. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 1

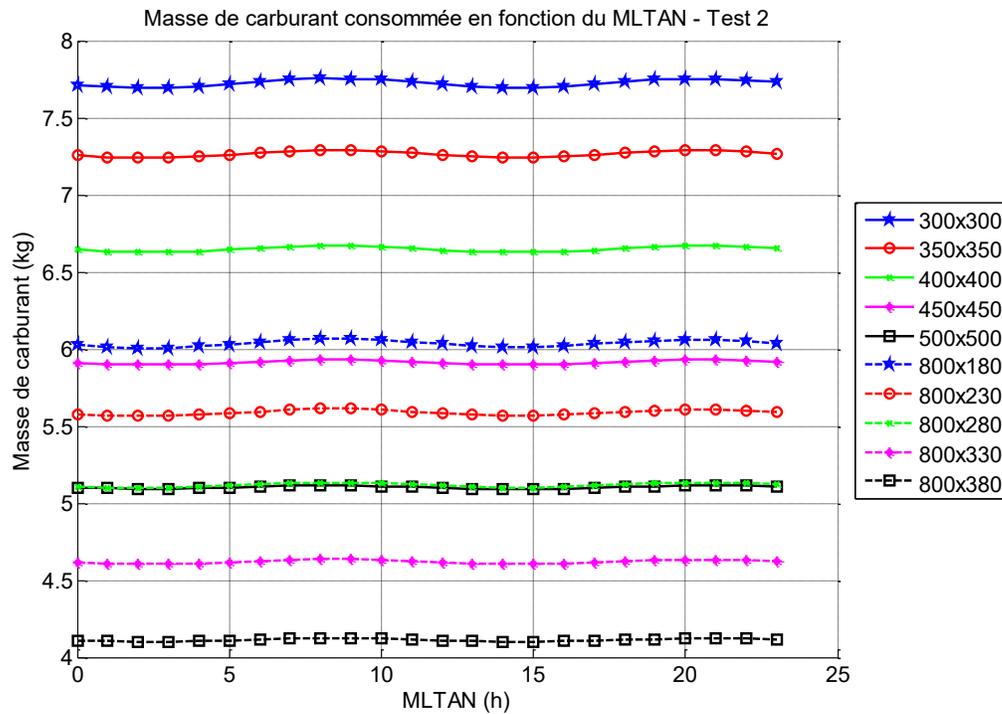


Figure 6-6. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 2

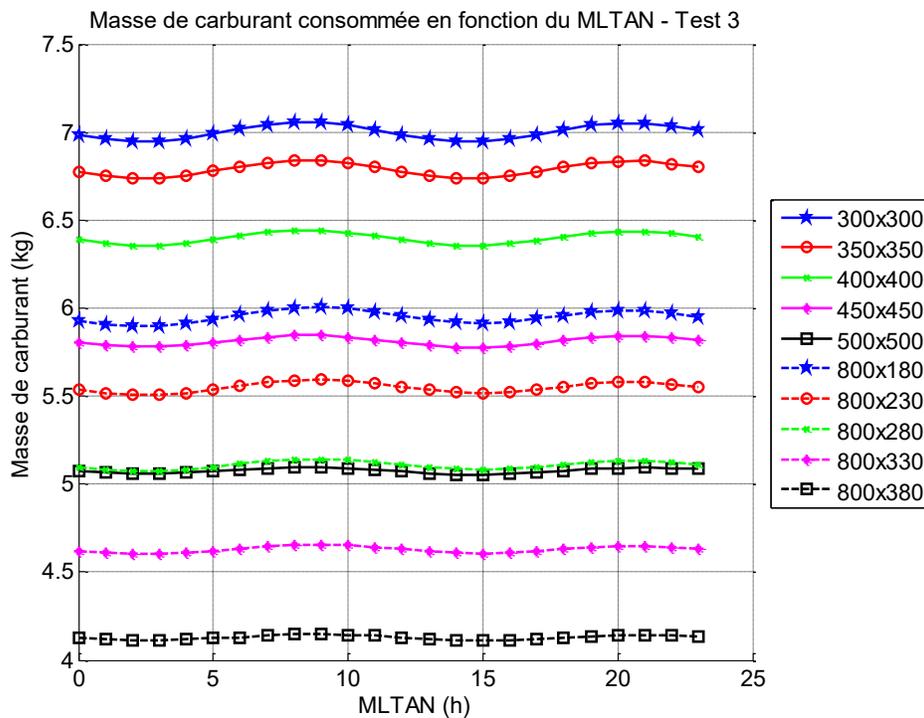


Figure 6-7. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 3

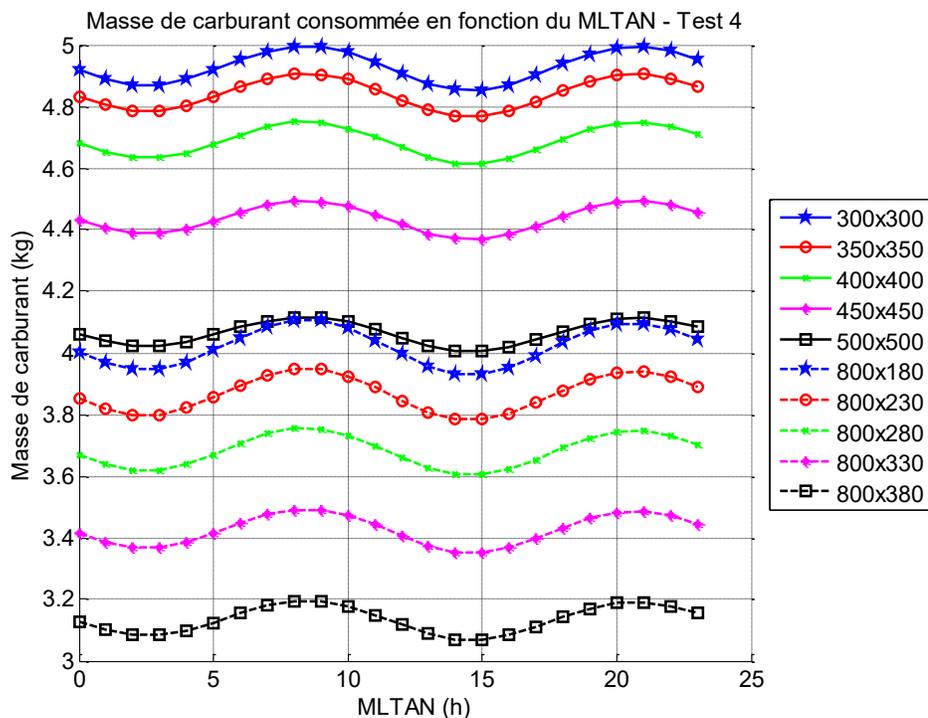


Figure 6-8. Masse de carburant consommée en fonction du MLTAN - Test 4

Ces tests démontrent que l'ajout d'un dispositif d'augmentation de la traînée, tel qu'utilisé dans les tests 3 et 4, est bénéfique pour bien tirer profit du renflement diurne et que cet effet bénéfique est encore plus grand quand la manœuvre est exécutée dans une période de haute activité solaire (test 4). Ainsi, ce scénario de test est plus affecté par les variations du renflement diurne et le MLTAN de départ de l'orbite peut affecter la masse de carburant utilisée pour se rendre à l'orbite de largage lors de la phase de désorbitation.

6.3 Étape 2 – Utilisation du renflement diurne

Suite aux résultats de la section précédente qui pointent vers le fait que placer l'orbite dans le renflement diurne (MLTAN initial dans le renflement diurne) permettrait une économie de carburant lors de la manœuvre vers l'orbite de largage, des tests plus poussés ont été réalisés pour analyser les effets du renflement diurne sur le temps de désintégration (temps de vie) de l'orbite de largage (orbite finale).

La perte d'énergie spécifique par orbite (appelée « DeltaE/orbite » à la Figure 6-9) peut nous renseigner sur l'efficacité du renflement diurne à diminuer l'énergie d'une orbite. Pour que la « règle du 120 km » s'applique aussi à la perte d'énergie par orbite, on trouve une équivalence

entre le temps de vie des orbites et leur perte d'énergie spécifique. Cette relation dépend de l'altitude de l'orbite circulaire (pour une orbite excentrique, on considère l'altitude de l'orbite circulaire équivalente) ainsi que de la température exosphérique. Cette perte d'énergie spécifique par orbite sera par la suite reliée à la durée de vie restante.

La Figure 6-9 présente, pour les différents cas de tests, le rapport entre les pertes d'énergie par orbite des orbites de largage équivalentes excentriques et circulaires en fonction de l'altitude de l'orbite circulaire (l'altitude du périégée de l'orbite excentrique équivalente se situant 120 km plus bas). On remarque que la perte d'énergie de l'orbite excentrique doit toujours être plus élevée que celle de l'orbite circulaire. En effet, l'énergie d'une orbite est proportionnelle à son axe semi-majeur. Dans le cas présent, l'orbite excentrique a un axe semi-majeur plus élevé que celui de l'orbite circulaire, d'où la plus grande quantité d'énergie à perdre pour abaisser son périégée. Aussi, plus l'altitude de l'orbite circulaire est élevée, moins ce rapport entre l'orbite excentrique équivalente et l'orbite circulaire est grand. Il y a donc un plus grand avantage à utiliser une orbite excentrique lorsque l'altitude de son périégée est très basse.

L'augmentation de la température exosphérique fait aussi diminuer ce rapport. Ainsi, pour une orbite circulaire de 300 x 300 km, les tests 1 et 3 ($T_{\infty} = 1000 K$) nécessitent une orbite excentrique ayant une perte d'énergie par orbite environ 3,9 fois plus grande que l'orbite circulaire, alors que les tests 2 et 4 ($T_{\infty} = 1500 K$) nécessitent une orbite excentrique ayant une perte d'énergie par orbite environ 2,25 fois plus grande que l'orbite circulaire. En augmentant la température exosphérique de 500 K, on a donc réduit ce rapport d'un facteur 1,73. On observe aussi que la variation des rapports aire sur masse A/m (test 1 versus test 3 et test 2 versus test 4) n'a pas d'effet sur le rapport de perte d'énergie par orbite. En effet, les courbes des tests 1 et 3 sont confondues, tout comme celles des tests 2 et 4. Cela s'explique par le fait que les graphiques donnent un rapport de perte d'énergie entre orbites équivalentes. La perte d'énergie par orbite est proportionnelle au rapport A/m . Ainsi, les orbites équivalentes avec un rapport A/m plus élevé perdent plus d'énergie par orbite que les orbites équivalentes ayant un rapport A/m moins élevé. Cependant, en faisant le rapport de perte d'énergie entre les orbites équivalentes, ces facteurs d'augmentation ou de diminution s'annulent.

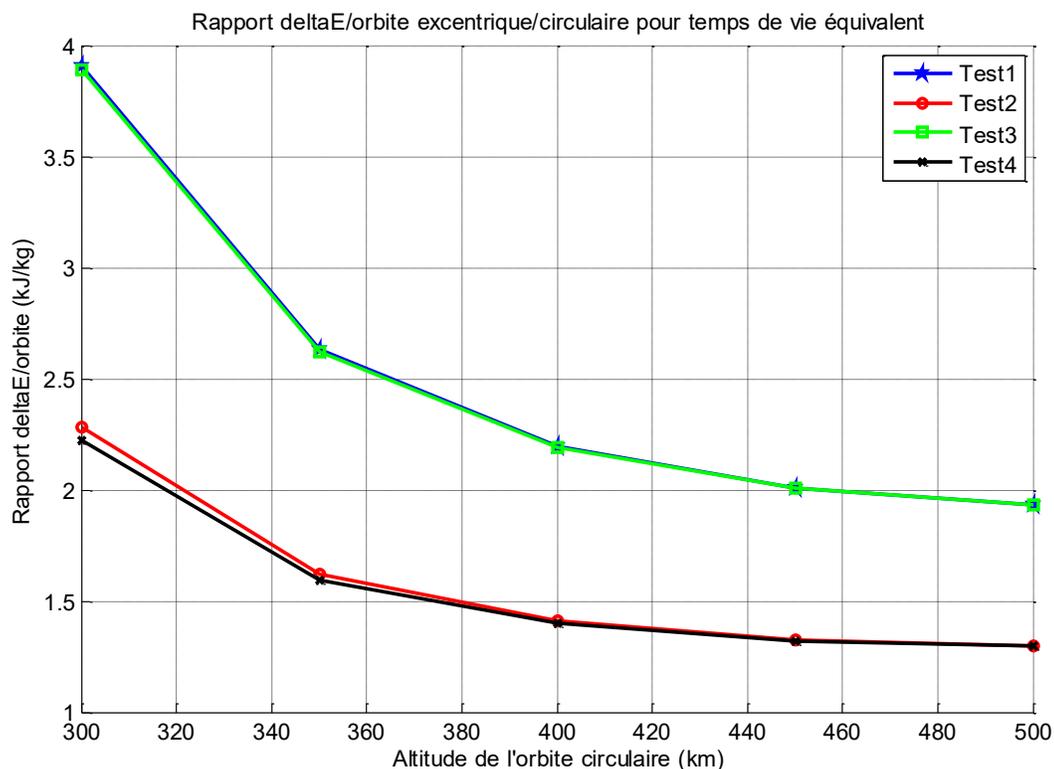


Figure 6-9. Rapport deltaE/orbite circulaire/excentrique pour temps de vie équivalent

On trace maintenant la perte d'énergie par orbite en fonction de sa position par rapport au soleil (MLTAN). On remarque qu'une orbite excentrique ayant son périégée à environ 120 km plus bas que le rayon de l'orbite circulaire perd toujours plus d'énergie par orbite, peu importe sa position par rapport au soleil. En effet, une orbite excentrique a un axe semi-majeur plus grand que l'orbite circulaire et donc plus d'énergie orbitale à dissiper pour une même durée de vie, ainsi le taux de perte d'énergie par orbite requis est plus grand.

Le renflement diurne de l'atmosphère vient aussi augmenter la perte d'énergie par orbite, particulièrement pour une orbite excentrique. En plus d'avoir observé dans la section précédente que le coût en carburant est moindre pour atteindre une orbite excentrique équivalente à une orbite circulaire de même durée de vie, le concept d'utiliser une orbite de largage excentrique exploite le fait que la vitesse est plus élevée au périégée qu'une orbite circulaire équivalente. Placer le périégée de l'orbite excentrique dans le renflement permet de maximiser la perturbation atmosphérique, proportionnelle à ρv^2 . Ainsi, l'orbite finale optimale correspond à une orbite excentrique ayant son périégée dans le renflement diurne de l'atmosphère. Cette orbite permettra au débris de se dégrader dans l'atmosphère le plus

rapidement possible. Les graphiques des figures 6-10 à 6-15 montrent ces résultats, pour différentes orbites équivalentes, en fonction de la position de l'objet par rapport au soleil (MLTAN). Ces graphiques ont été tracés en supposant que l'on se trouve à l'équinoxe du printemps (21 mars). Encore une fois, les lignes de même couleur (même symbole) représentent des orbites équivalentes et les lignes continues sont les orbites circulaires alors que les lignes pointillées sont les orbites excentriques. Ces dernières sont plus affectées par le renflement diurne.

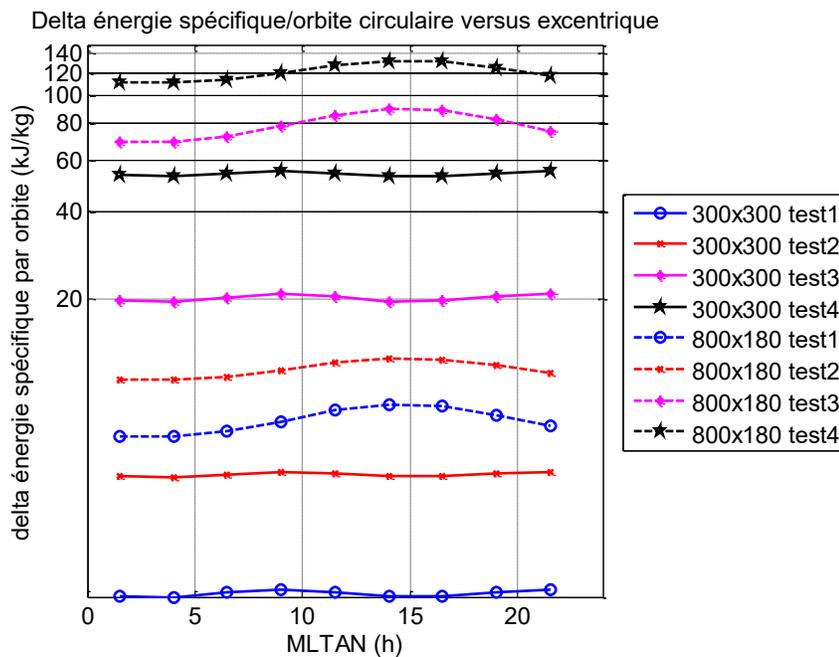


Figure 6-10. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (300x300 km et 800x180 km)

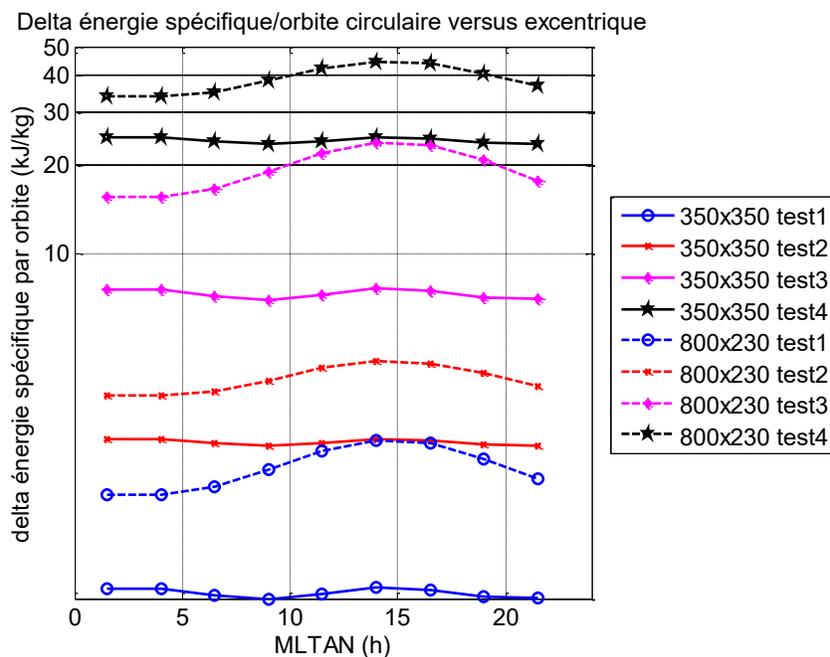


Figure 6-11. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (350x350 km et 800x230 km)

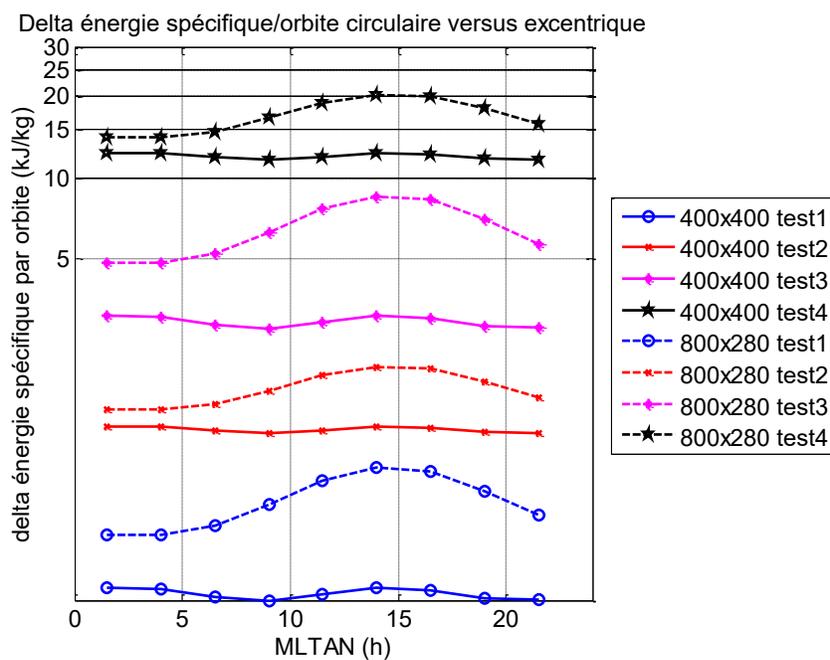


Figure 6-12. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (400x400 km et 800x280 km)

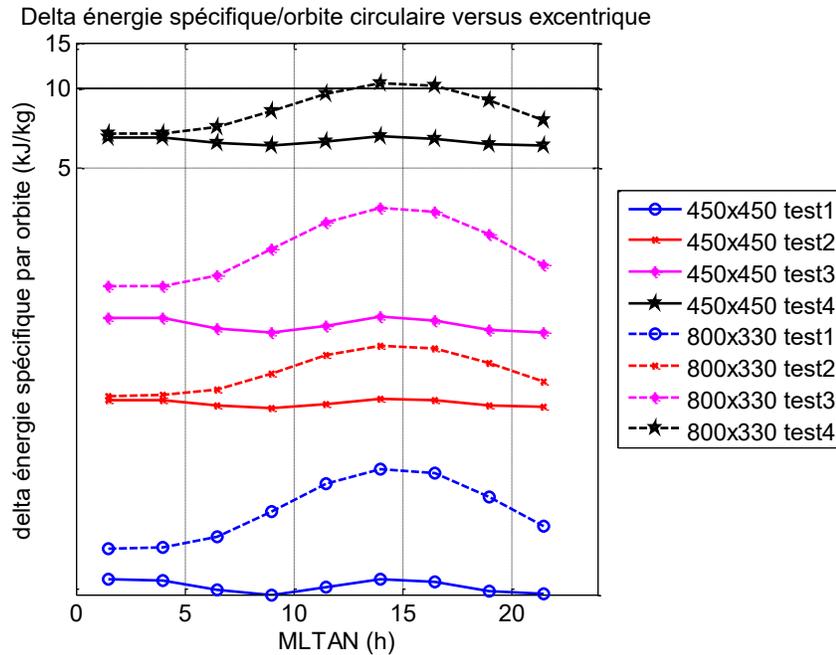


Figure 6-13. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (450x450 km et 800x330 km)

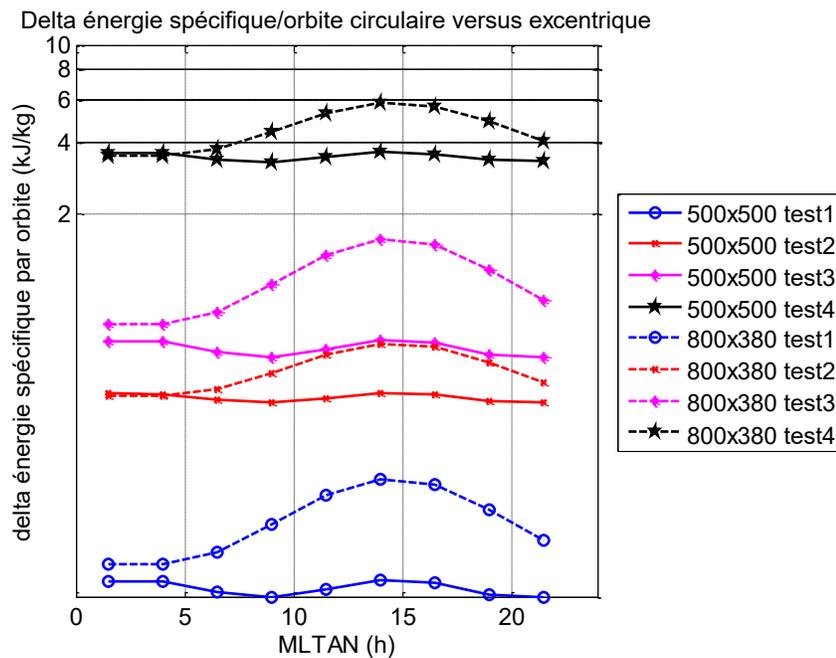


Figure 6-14. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (500x500 km et 800x380 km)

Pour une orbite excentrique, on remarque sur les graphiques que lorsque l'objet se situe directement dans le renflement diurne de l'atmosphère, c'est-à-dire lorsque $MLTAN = 14$ h, on obtient une perte d'énergie maximale. À l'inverse, on obtient un minimum d'énergie

lorsque l'objet se retrouve à l'opposé du renflement diurne. Par contre, dans cette situation, on peut contrôler l'argument du périégée pour le placer à 180° plutôt qu'à 0° et ainsi profiter pleinement du renflement diurne de l'atmosphère. Pour une orbite circulaire, on observe déjà cet effet puisque l'objet passe par le renflement diurne sur la moitié de son orbite, que l'argument du périégée soit à 0° ou 180° . Le graphique ci-dessous montre la valeur optimale de l'argument du périégée en fonction du MLTAN.

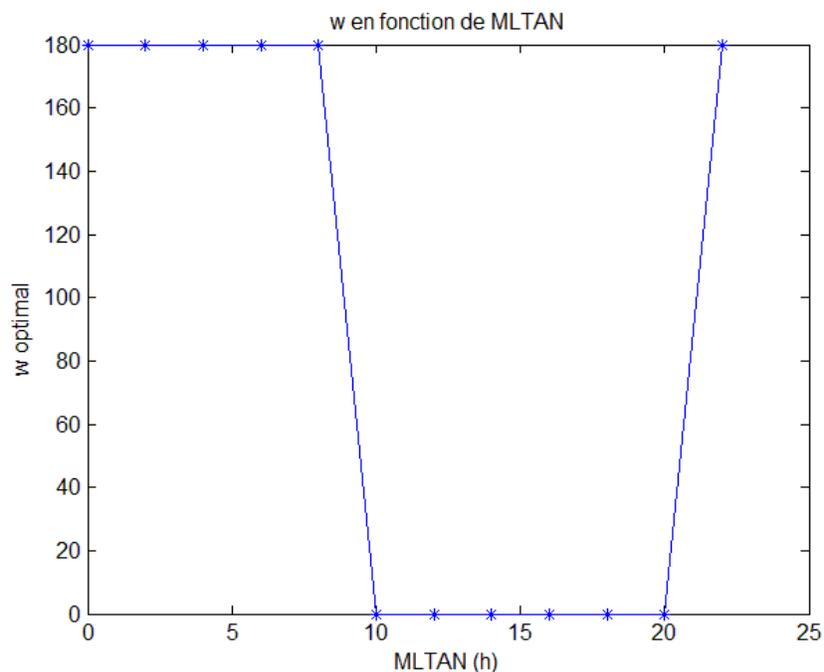


Figure 6-15. Argument du périégée optimal en fonction de MLTAN

Les résultats ci-dessus pour l'équinoxe du printemps sont ici refaits dans le cas du solstice d'été. Les graphiques des figures 6-16 à 6-20 présentent la perte d'énergie spécifique par orbite en fonction du MLTAN lorsqu'on se trouve au solstice d'été (21 juin).

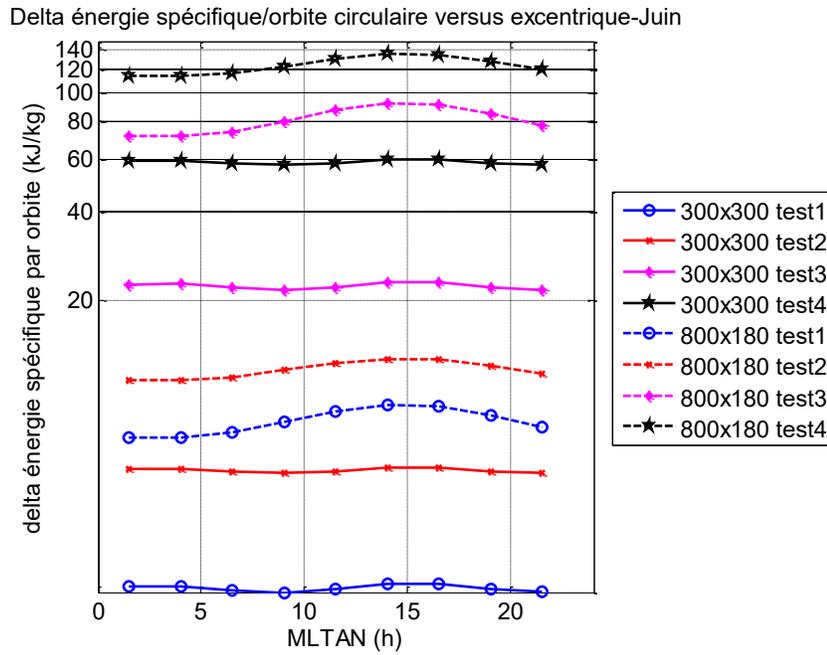


Figure 6-16. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (300x300 km et 800x180 km) - Juin

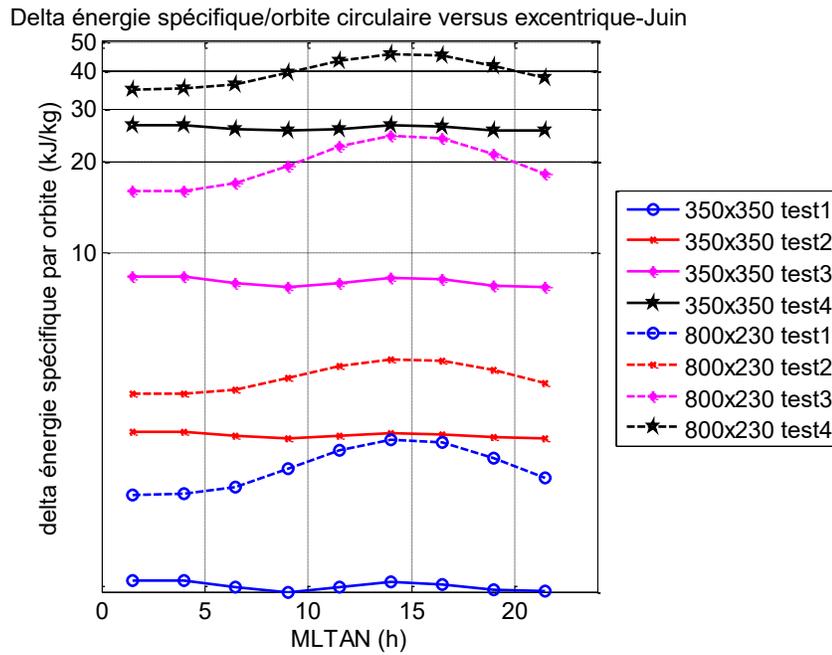


Figure 6-17. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (350x350 km et 800x230 km) - Juin

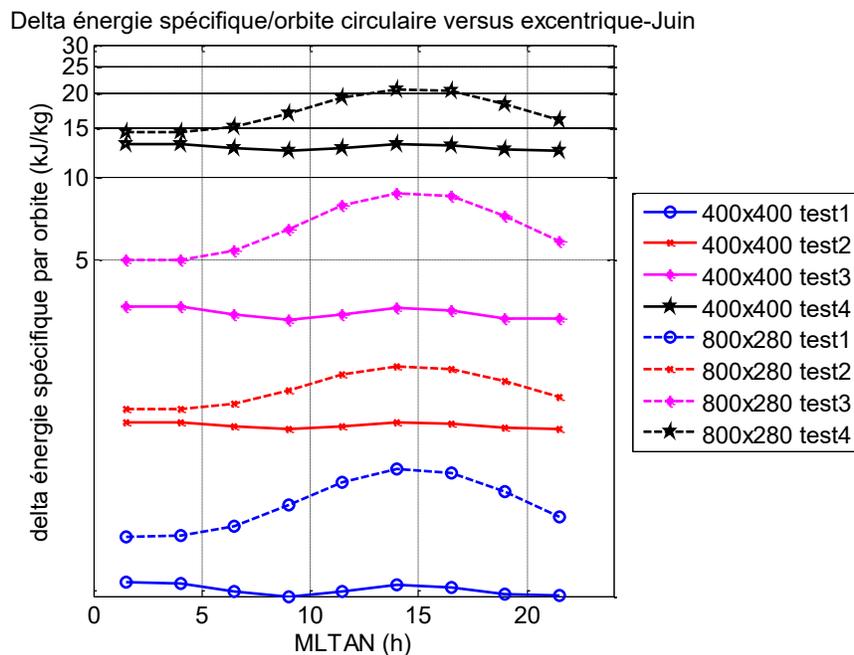


Figure 6-18. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (400x400 km et 800x280 km) - Juin

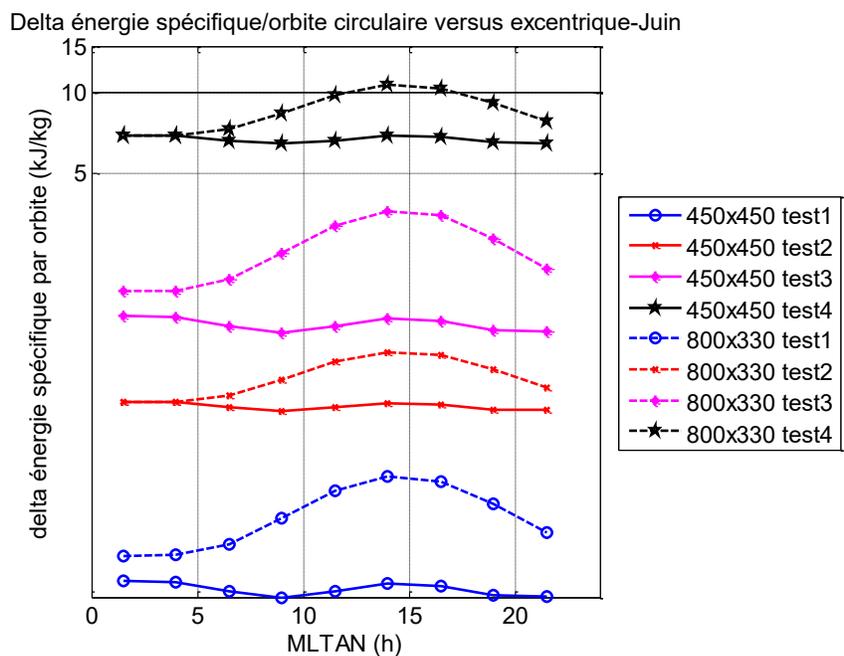


Figure 6-19. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (450x450 km et 800x330 km) - Juin

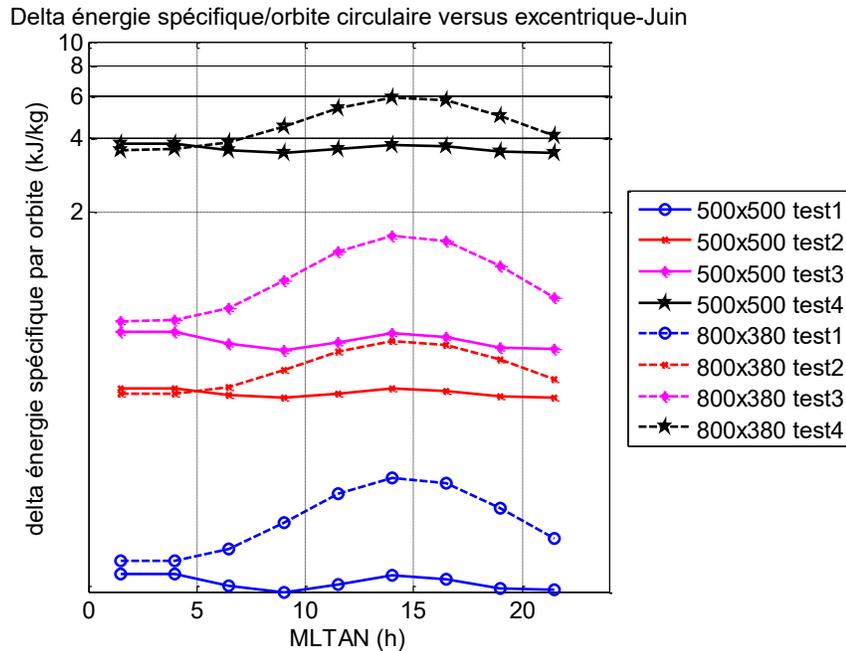


Figure 6-20. Perte d'énergie spécifique en fonction du MLTAN (500x500 km et 800x380 km) - Juin

En comparant les figures obtenues au solstice d'été à celles obtenues à l'équinoxe du printemps, on observe que le maximum de perte d'énergie spécifique par orbite dû au renflement diurne de l'atmosphère se produit toujours lorsque $MLTAN = 14$ h. En effet, étant donné que $MLTAN$ est calculé par rapport au Soleil, même si le Soleil s'est déplacé de 90° entre l'équinoxe de printemps et le solstice d'été, cela ne change pas la valeur du $MLTAN$. Par contre, la valeur de l'ascension droite du nœud ascendant qui place l'orbite dans le renflement diurne varie de 90° entre les deux cas.

Finalement, on désire relier la perte d'énergie au temps de vie pour savoir si l'on peut diminuer le temps de vie de l'orbite finale en la plaçant dans le renflement diurne, là où la perte d'énergie est maximale. Pour ce faire, on trace le temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite aux figures 6-21 à 6-24. Le temps de vie a été calculé grâce au logiciel DAS de la NASA.

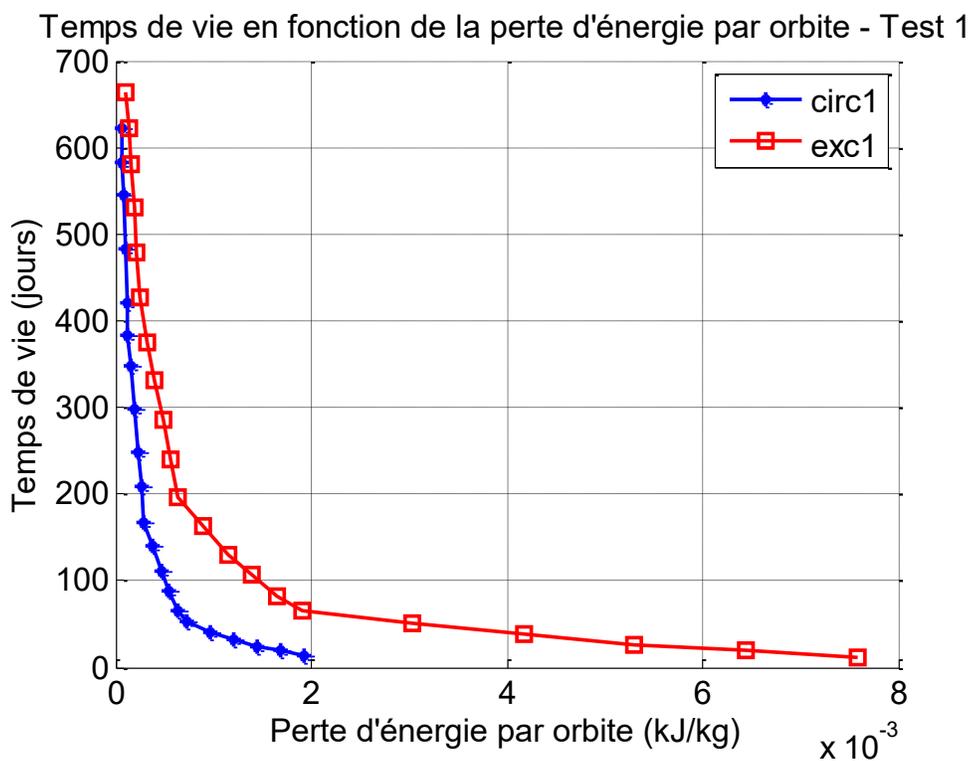


Figure 6-21. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 1

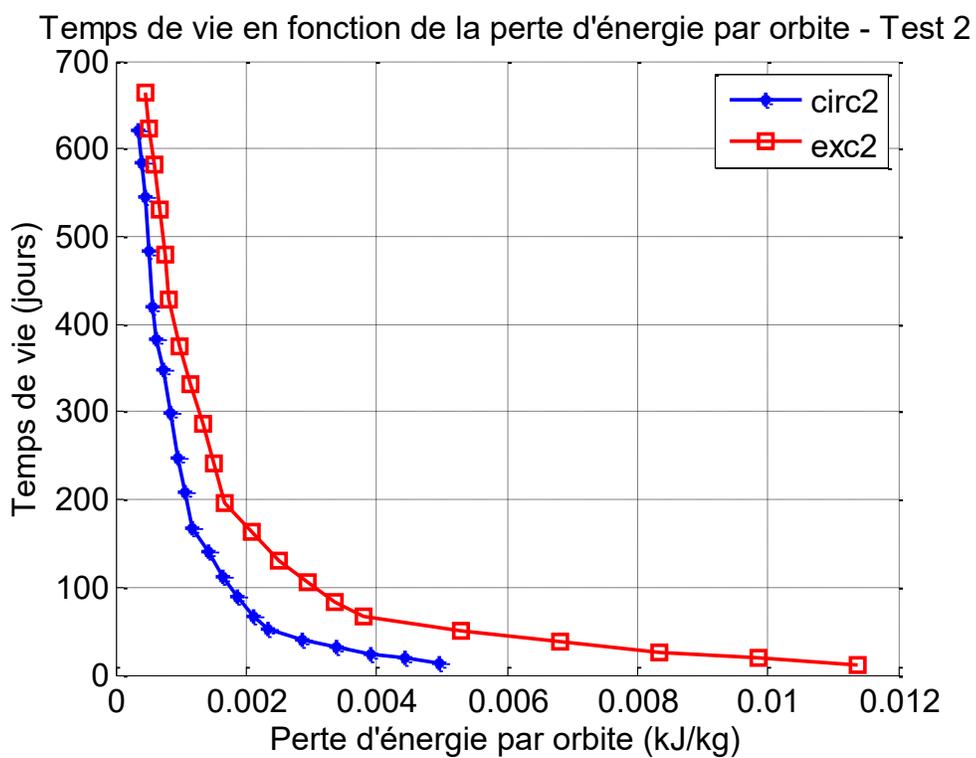


Figure 6-22. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 2

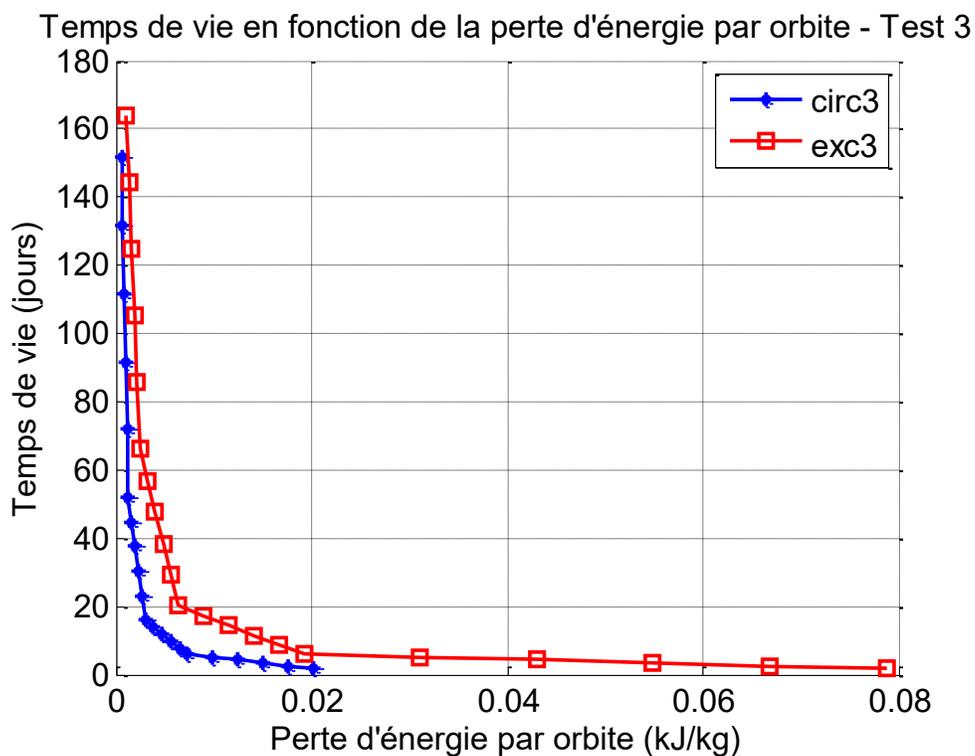


Figure 6-23. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 3

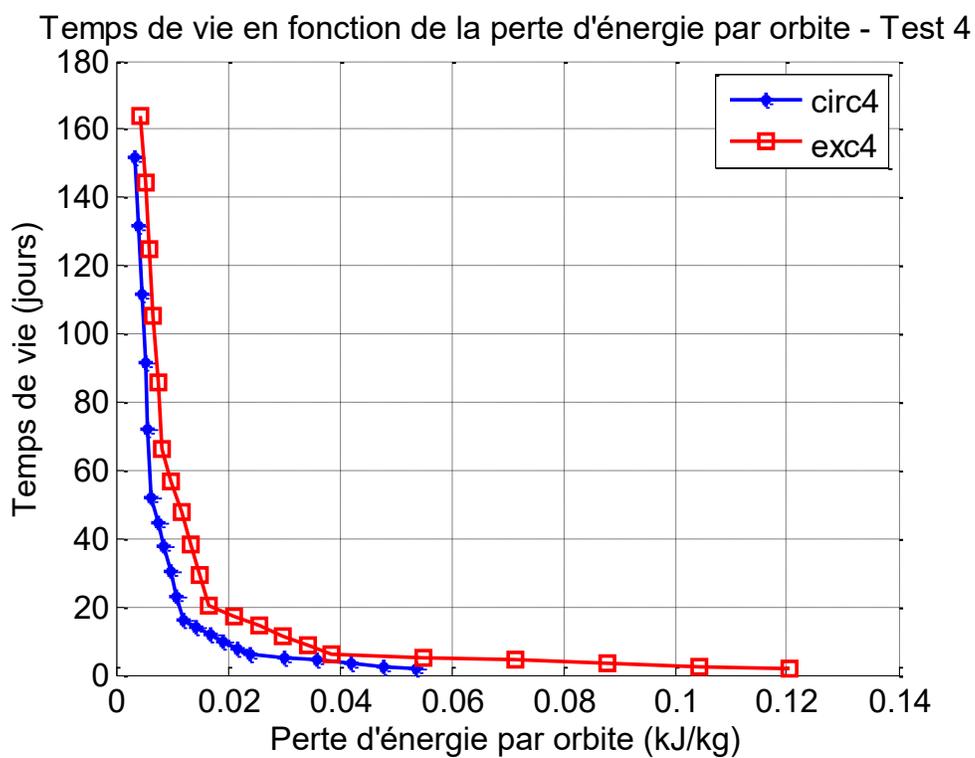


Figure 6-24. Temps de vie en fonction de la perte d'énergie par orbite - Test 4

Ces graphiques nous permettent de déterminer le temps de vie que l'on peut réduire en utilisant des orbites situées dans le renflement diurne. En effet, en comparant le temps de vie pour une orbite située dans le renflement (perte d'énergie par orbite maximale) au temps de vie de l'orbite située à l'opposé du renflement (perte d'énergie par orbite minimale), on obtient une différence en termes de temps de vie. La Figure 6-25 montre le rapport de la différence de temps de vie (entre une orbite dans le renflement et une orbite hors du renflement) sur le temps de vie maximal (orbite hors du renflement) en fonction de l'altitude de l'orbite circulaire (l'altitude du périégée de l'orbite excentrique équivalente se trouvant 120 km plus bas).

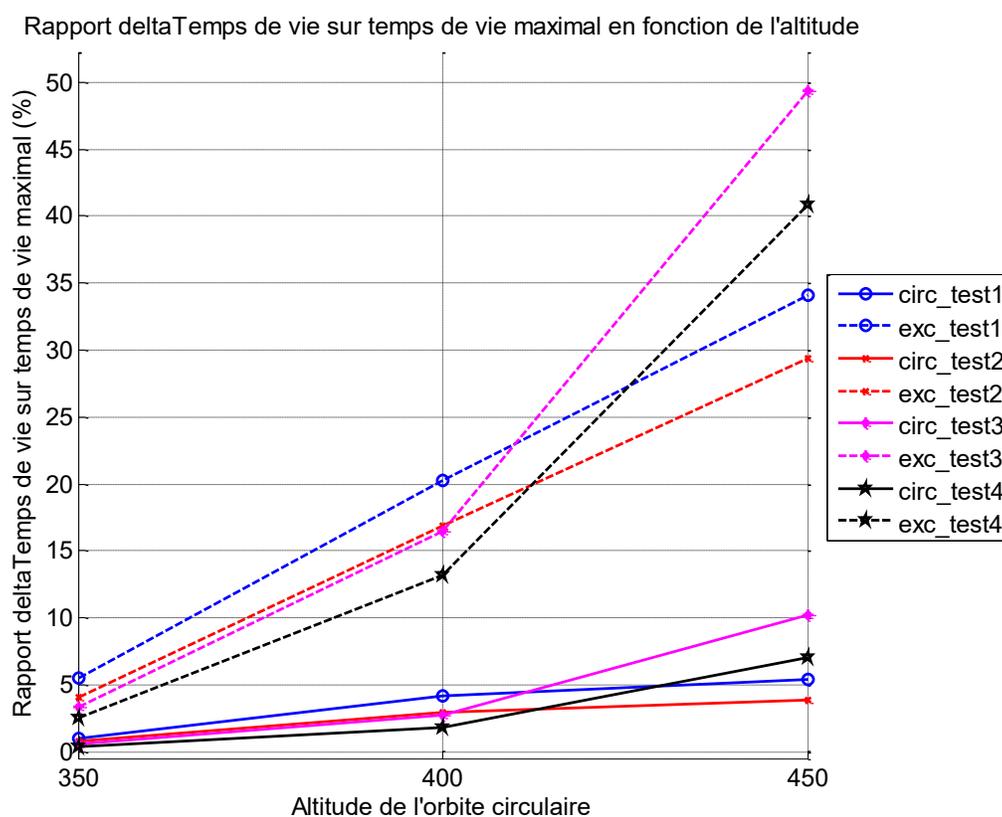


Figure 6-25. Rapport de la différence temps de vie sur le temps de vie maximal en fonction de l'altitude de l'orbite circulaire

On observe sur la Figure 6-25 que le gain en temps de vie le plus avantageux se retrouve pour les orbites excentriques des tests 3 et 4 (avec ballon gonflé pour augmenter la traînée). En effet, on peut diminuer le temps de vie jusqu'à 40-50% pour ces orbites. Le graphique démontre que les orbites excentriques (courbes pointillées) offrent toujours une meilleure

option que les orbites circulaires (courbes pleines) pour prendre avantage du renflement diurne (différence en temps de vie plus grande).

CHAPITRE 7

CONCLUSION

Dans le cadre des travaux décrits dans ce mémoire, une stratégie de commande autonome permettant de modifier l'orbite des satellites non opérationnels (débris) pour mener à leur désintégration naturelle a été développée. Cette stratégie utilise les perturbations orbitales de façon avantageuse et permet d'optimiser les facteurs carburant et temps. La stratégie choisie consiste en un satellite nettoyeur à propulsion électrique muni d'un dispositif d'augmentation de la traînée atmosphérique (ballon gonflable). Une loi de guidage basée sur la commande optimale, qui utilise le principe du maximum de Pontryagin pour minimiser les critères désirés (carburant et temps) a été développée. Les effets des perturbations dues à J_2 ainsi qu'à la traînée atmosphérique ont été inclus dans les analyses et une stratégie permettant de positionner l'orbite dans le renflement diurne de l'atmosphère a été présentée.

Les résultats ont montré que la loi de guidage utilisée, incluant la perturbation due à J_2 , est une loi de commande optimale. En effet, des comparaisons à un transfert orbital optimal (sans J_2) avec un engin chimique impulsif (transfert de Hohmann) ont pu démontrer que la loi de guidage utilisée nécessite un Δv similaire au transfert de Hohmann. De plus, le positionnement de l'orbite par rapport au soleil, notamment le renflement diurne de l'atmosphère, permet de minimiser le coût en carburant d'une manœuvre orbitale d'élimination de débris.

Parmi les objectifs du projet de recherche, on désirait déterminer dans quelles conditions il faut laisser un débris (orbite de largage) et utiliser les perturbations de façon avantageuse afin d'économiser le carburant requis pour les manœuvres orbitales permettant d'amener le débris à son orbite de largage. Le projet de recherche a permis de démontrer l'avantage des orbites de largage excentriques et de démontrer l'avantage d'utiliser le renflement diurne pour une telle orbite de largage. La « règle du 120 km » a été démontrée : une orbite de largage circulaire a la même durée de vie orbitale restante qu'une orbite excentrique dont l'apogée demeure à 800 km et dont le périégée est 120 km plus bas que l'orbite circulaire équivalente. L'avantage d'une telle orbite de largage excentrique est qu'elle permet d'économiser environ 21% de carburant, en échange contre un temps de transfert plus long. Par contre, en plaçant l'orbite dans le

renflement diurne de l'atmosphère, on peut sauver jusqu'à 50% du temps de vie (temps de désintégration) de l'orbite finale. De plus, il a été démontré que l'utilisation d'un système d'augmentation de la traînée atmosphérique (un ballon gonflable) permet une plus grande réduction de la consommation en carburant.

Pour le futur, il serait intéressant d'investiguer les effets des éclipses solaires sur le satellite nettoyeur. En effet, le satellite pourrait avoir à effectuer ses manœuvres orbitales seulement sur une partie limitée de son orbite. Un autre sujet d'analyse pourrait être de calculer le temps de dérive nécessaire pour que les perturbations dues à J_2 amènent l'ascension droite du nœud ascendant de l'orbite directement dans le renflement diurne, puis contrôler l'orbite pour qu'elle reste toujours dans le renflement jusqu'à sa désintégration dans l'atmosphère terrestre. De plus, il serait intéressant d'obtenir, pour l'utilisation du renflement diurne, l'équivalent du temps de vie sauvé en termes de masse de carburant sauvé.

Pour amener le projet de recherche plus loin, l'optimalité de la trajectoire complète du satellite nettoyeur pourrait être étudiée. Le présent projet de recherche se limitait à considérer le satellite nettoyeur déjà attaché au débris à larguer et à trouver la trajectoire optimale pour un seul débris. En fait, dans sa vie utile, le satellite nettoyeur devrait larguer plusieurs débris. Ainsi, il faudrait étudier le problème de trouver par exemple quel débris on nettoie, dans quel ordre, comment effectuer le rendez-vous et tous les défis techniques rattachés à ce genre de mission. Il faudrait aussi complexifier le problème de commande optimale en y ajoutant des contraintes pour éviter les collisions avec d'autres satellites et avec la station spatiale.

ANNEXE A – MODÈLE D’ATMOSPÈRE

Le modèle d’atmosphère implémenté est basé sur le modèle de Jacchia 1977 (J77). Une implémentation numérique est réalisée sur MATLAB de la version analytique du modèle d’atmosphère J77 présenté dans [de Lafontaine et Hughes, 1983]. Les informations principales pour comprendre le fonctionnement de ce modèle sont présentées ici.

A.1 Modèles d’atmosphère statique

Les modèles d’atmosphère statique développés par Jacchia (J64, J70, J71 et J77) sont environ tous construits de la même manière. Dans l’homosphère, il y a mélange des différents gaz constituant l’atmosphère, on utilise alors l’équation barométrique :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{T}{\bar{M}} d\left(\frac{\bar{M}}{T}\right) - \frac{\bar{M}g}{RT} dz \quad (\text{A.1})$$

où ρ est la densité, T la température, \bar{M} la masse moléculaire moyenne, R la constante universelle des gaz et z l’altitude géométrique. La force spécifique due à la gravité, g , est donnée par :

$$g = g_a R_a^2 / (R_a + z)^2 \quad (\text{A.2})$$

où $g_a = 9,80665 \text{ m/s}^2$ pour $R_a = 6356,776 \text{ km}$.

Dans l’hétérosphère, chaque gaz constituant l’atmosphère agit indépendamment selon l’équation de diffusion :

$$\frac{dn_i}{n_i} = -(1 + \alpha_i) \frac{dT}{T} - \frac{M_i g}{RT} dz \quad (\text{A.3})$$

où n_i , M_i et α_i représentent respectivement la « number density », masse moléculaire et le coefficient de diffusion thermique de l’espèce i . La masse moléculaire moyenne et la densité sont obtenues par :

$$\bar{M} = \sum_i n_i M_i / N \quad (\text{A.4})$$

$$\rho = \bar{M} N / A \quad (\text{A.5})$$

où $N = \sum n_i$ est la « total number density » et A est le nombre d’Avogadro.

Les profils de température typiques augmentent de T_0 à z_0 jusqu'à un point d'inflexion T_x à z_x et deviennent asymptotiques à la température exosphérique, notée T_∞ . Des profils empiriques pour $\bar{M}(z)$ complètent la série d'équations nécessaires pour permettre l'intégration numérique des équations présentées ci-dessus, résultant en des tableaux des propriétés atmosphériques en fonction de z et T_∞ .

A.2 Version analytique du modèle J77

Les équations suivantes décrivent les profils de température du modèle J77 :

$$\begin{aligned} z_0 &= 90 \text{ km}; z_x = 125 \text{ km} \\ T_0 &= T(z_0) = 188 \text{ K} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$T_x = T(z_x) = T_0 + 110,5 \sinh^{-1}[0,0045(T_\infty - T_0)]$$

$$T(z) = T_x + A_1 \tan^{-1} \left\{ \frac{G_x}{A_1} (z - z_x) \left[1 + 1,7 \left(\frac{z - z_x}{z - z_0} \right)^2 \right] \right\} \text{ pour } z_0 \leq z \leq z_x \quad (\text{A.7})$$

$$T(z) = T_x + A_2 \tan^{-1} \left\{ \frac{G_x}{A_2} (z - z_x) [1 + B(z - z_x)^m] \right\} \text{ pour } z \geq z_x \quad (\text{A.8})$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} (T_x - T_0); A_2 = \frac{2}{\pi} (T_\infty - T_x) \\ B &= 5,5 \times 10^{-5} \text{ km}^{-2}; m = 2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

La version analytique du modèle J77 présentée dans [*de Lafontaine et Hughes, 1983*] (J77A), présente aussi deux équations séparées pour le profil de température ainsi que les équations permettant de calculer la densité des différents composants de l'atmosphère, dépendamment de l'altitude. On calcule ainsi la densité atmosphérique à l'altitude désirée, puis on doit effectuer une correction pour les densités d'oxygène atomique (O) et du dioxygène (O₂). Ensuite, si on considère le renflement diurne de l'atmosphère, on doit calculer les pseudo-températures de chacun des composants (N₂, O₂, O, Ar et He) et finalement calculer les densités séparées de chacun des composants selon leur pseudo-température.

En comparant le modèle J77A au modèle J77, on remarque une différence d'environ 4,58%. Considérant que les incertitudes sur les modèles d'atmosphère en général sont de l'ordre du 10%, on considère cette différence acceptable. Les équations du modèle J77A sont implémentées sur MATLAB/Simulink afin d'obtenir la densité atmosphérique pour tout point sur l'orbite d'un satellite.

LISTE DES RÉFÉRENCES

- Alfano, S. et Thorne, J. D. (1994). Circle-to-circle constant-thrust orbit raising. *Journal of the Astronautical Sciences*, volume 42, numéro 1, p. 35-45.
- Ansdell, M. (2010). Active space debris removal: Needs, implications, and recommendations for today's geopolitical environment. *Journal of Public and International Affairs*, volume 21, p. 7-22.
- Bate, R. R., Mueller, D. D. et White, J. E. (1971). *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, USA, 455 p.
- Blitzer, L. (1970). *Handbook of Orbital Perturbations*.
- Bombardelli, C. et Pelaez, J. (2011). Ion Beam Shepherd for Contactless Space Debris Removal. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, volume 34, numéro 3, p. 916-20.
- Brown, C. D. (1996). *Spacecraft Propulsion*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, USA, 224 p.
- Bryson, A. E. et Ho, Y. (1975). *Applied Optimal Control - Optimization, Estimation, and Control*. Hemisphere Publishing Corporation, USA, 481 p.
- Buckingham, A.G., Lim, Y.C. et Miller, J.A. (1965). *Orbit position control using solar pressure*. *Journal of Spacecraft and Rockets*, volume 2 numéro 6, p. 863-867.
- Campbell, J.W. (1996). *Project ORION: Orbital Debris Removal Using Ground-Based Sensors and Lasers*. NASA Technical Memorandum 108522.
- Castronuovo, M. M. (2011). Active space debris removal - A preliminary mission analysis and design. *Acta Astronautica*.
- Chen, S. (2011). The space Debris problem. *Asian Perspective*, volume 35, numéro 4, p. 537-558.
- CIRA-2012 (COSPAR International Reference Atmosphere – 2012) (2012). Models of the Earth's Upper Atmosphere, version 1.0, July 31, 2012. 37 p.
- Chobotov, V. A. (2002). *Orbital Mechanics*, Third Edition. American Institute of Aeronautics and Astronautics, USA, 455 p.
- Sandro da Silva Fernandes, Carlos Roberto Silveira Filho, et Wander Almodovar Golfetto (2012). "A numerical study of low-thrust limited power trajectories between coplanar circular orbits in an inverse-square force field". *Mathematical Problems in Engineering*, volume 2012, Article ID 168632, 24 p.

- De Lafontaine, J. (1986). *Orbital dynamics in a stochastic atmosphere and a nonspherical gravity field*. University of Toronto Doctoral Thesis.
- De Lafontaine, J. et Garg, S. C. (1982). REVIEW OF SATELLITE LIFETIME AND ORBIT DECAY PREDICTION. *Proceedings - Indian Academy of Sciences, (Series): Engineering Sciences*, volume 5, p. 197-258.
- De Lafontaine, J. et Hugues, P. (1983). An Analytic Version of Jacchia's 1977 Model Atmosphere. *Celestial Mechanics*, volume 3, numéro 26.
- Dong-Hyun Cho, Dong-hun Lee et Min-Jae Tahk (2006). Orbit Transfer Trajectory Optimization With Electric Engine. Dans *SICE-ICASE, 2006. International Joint Conference*. 4093-4098.
- Dreher, P.E., Little, R.P. et Wittenstein, G. (1980). Skylab Orbital Lifetime Prediction and Decay Analysis. *NASA Technical Memorandum 78308*.
- Haberkorn, T., Martinon, P. et Gergaud, J. (2004). Low-thrust minimum-fuel orbital transfer: A homotopic approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, volume 27, numéro 6, p. 1046-1060.
- Jacchia, L.G. (1971). *Revised Static Models of the Thermosphere and Exosphere with Empirical Temperature Profiles*, Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 332.
- Jacchia, L.G. (1977). *Thermospheric temperature, density, and composition: new models*. Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 375.
- Johnson, N. L. et McKnight, D. S. (1991). *Artificial Space Debris*. Krieger Publishing, 128 p.
- Jones, H.M. et Shapiro, I.I. (1960). *Effects of solar radiation pressure on earth satellite orbits*. *Science*, volume 131, numéro 3404, p. 920-921.
- Kechichian, J.A. (1996). *Optimal low-thrust rendezvous using equinoctial orbit elements*. *Acta Astronautica*, volume 38, no. 1, p. 1-14.
- Kawamoto, S., Makida, T., Sasaki, F., Okawa, Y. et Nishida, S. (2006). Precise numerical simulations of electrodynamic tethers for an active debris removal system. *Acta Astronautica*, volume 59, numéro 1-5, p. 139-148.
- Kirk, D. E. (2004). *Optimal Control Theory – An Introduction*. Dover Publications, 480 p.
- Liou, J. -. et Johnson, N. L. (2009). A sensitivity study of the effectiveness of active debris removal in LEO. *Acta Astronautica*, volume 64, numéro 2-3, p. 236-243.

-
- Lücking, C., Colombo, C. et McInnes, C. (2011). A Passive De-orbiting Strategy for High Altitude CubeSat Missions using a Deployable Reflective Balloon. Dans *8th IAA Symposium on Small Satellites, 2011-04-04 - 2011-04-08, Berlin*.
- Maessen, D. C., Van Breukelen, E. D., Zandbergen, B. T. C. et Bergsma, O. K. (2007). Development of a generic inflatable de-orbit device for CubeSats. Dans *58th International Astronautical Congress 2007, September 24, 2007 - September 28*, volume 3. International Astronautical Federation, IAF, Hyderabad, India, p. 1860-1870.
- Martin, T., Pérot, E., Desjean, M-C. et Bitetti, Lorenzo (2011). Active Debris Removal Mission Design in Low Earth Orbit. Dans *4th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS), 2011*.
- Pardini, C., Hanada, T. et Krisko, P. H. (2009). Benefits and risks of using electrodynamic tethers to de-orbit spacecraft. *Acta Astronautica*, volume 64, numéro 5-6, p. 571-588.
- Petropoulos, A. E. (2004). Low-thrust orbit transfers using candidate Lyapunov functions with a mechanism for coasting. Dans *Collection of Technical Papers - AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, August 16, 2004 - August 19*, volume 2. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, Providence, RI, United states, p. 748-762.
- Quinlan, J. R. (2011). A preliminary systems-level analysis of candidate active space debris removal architectures. Dans *21st AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, February 13, 2011 - February 17*, volume 140. Univelt Inc, New Orleans, LA, United states, p. 2165-2184.
- Roberts, C.E. (1971). *An Analytic Model for Upper Atmosphere Densities Based Upon Jacchia's 1970 Models*. *Celestial Mechanics*, volume 4, issue 3, pp. 368-377.
- Smith, E. A. (1974). *Minimum Fuel Continuous Low Thrust Orbital Transfer*. Air Force Institute of Technology.
- Stansbury, S. (2009). *Low Thrust Transfer to GEO: Comparison of Electric and Chemical Propulsion* [site Web], consulté le 17 août 2016, http://ccar.colorado.edu/asen5050/projects/projects_2009/stansbury/.
- Tarzi, Z., Speyer, J. and Wirz, R. (2013). *Fuel optimum low-thrust elliptic transfer using numerical averaging*. *Acta Astronautica*, volume 86, Mai-Juin 2013, p, 95-118.
- Vallado, D. A. (2007). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, Third Edition. Microcosm Press, USA, 1055 p.
- Volkov, I. I. (1984). *The Upper Atmosphere of the Earth. Model of Density for Ballistic Maintenance of the Earth Artificial Satellite Flights*. GOST 25645-115-84. Publishing House of the Standards, Moscou.

- Wei, P. et Changhou, L. (2011). Direct optimization of low-thrust transfers using averaging techniques based on fourier series expansion. Dans *4th International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization, CSO 2011, April 15, 2011 - April 19*. IEEE Computer Society, Kunming, Lijiang, Yunnan, China, p. 46-50.
- Yue, X., Yang, Y. et Geng, Z. (2009). Continuous low-thrust time-optimal orbital maneuver. Dans *2009 Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) and 28th Chinese Control Conference (CCC 2009)*. IEEE, Piscataway, NJ, USA, p. 1457-62.