UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté d'éducation

Analyse de contenu de manuels scolaires en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle

par

Louis Côté

Mémoire présenté à la Faculté d'éducation

en vue de l'obtention du grade de

Maitre ès Arts (M.A.)

Maitrise en sciences de l'éducation

Mars 2015

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté d’éducation

Analyse de contenu de manuels scolaires en lien avec
l’enseignement-apprentissage de la notation exponentielle

Louis Côté

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

____________________________________ Présidente du jury

____________________________________ Directrice de recherche
Diane Biron

____________________________________ Codirectrice de recherche
Geneviève Boulet

____________________________________ Autre membre du jury
Patricia Marchand

Mémoire accepté le ____

SOMMAIRE

L'utilisation du manuel scolaire dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques semble occuper une place importante, et ce, pour plusieurs raisons dont une perception de fiabilité de ce matériel (Lebrun, 2006). Nous pouvons également souligner que le manuel scolaire ne sert pas uniquement de soutien aux apprentissages des élèves; il serait aussi une source importante de renseignement pour la personne enseignante dans sa préparation et sa planification, au point même qu'il se substituerait parfois aux programmes de formation lors de l'identification des contenus à enseigner (Spallanzani *et al.*, 2001).

Ces constats nous invitent à nous intéresser au contenu du manuel scolaire. Plusieurs études portent sur un aspect particulier du manuel de mathématique, comme la nature des problèmes algébriques qu'on y retrouve (Marchand et Bednarz, 1999; Cotnoir, 2010), ou encore l'utilisation des illustrations lors de la résolution de problème arithmétiques (Biron et Chaput, 2001). Tout en étant très pertinents, ces travaux ne donnent pas accès à un portrait complet des dispositifs mis en œuvre pour aborder un contenu mathématique particulier. C'est pourquoi nous avons décidé d'examiner un concept mathématique précis, soit la notation exponentielle qui, par ailleurs, a fait l'objet de peu de recherches (Cangelosi *et al.*, 2013; Mullet et Cheminat, 1995; Pitta-Panzatti *et al.*, 2007; Sastre et Mullet, 1998; Weber, 2002). Dans cette étude, nous voulons répondre à la question générale suivante : quel contenu retrouve-t-on dans les manuels scolaires de mathématiques québécois, de la 5e année du primaire à la 3e année du secondaire, en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle?

Pour ce faire, nous avons réalisé une analyse de contenu (Landry, 1997) en reprenant certains éléments de l'analyse thématique (Paillé et Mucchielli, 2010). Nous avons élaboré une grille d'analyse et un guide de codification qui nous ont permis d'observer le vocabulaire (Pierce et Fontaine, 2009) et le symbolisme (Bessot et Eberhard, 1982; Biron, 2012; Pimm, 1987, Roegiers, 1998*a*) employés dans les manuels scolaires en lien avec la notation exponentielle, à travers les définitions, les exercices et les problèmes

(Gouvernement du Québec, 1988; Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006; Vinner, 1976, 1977, 2002; Wilson, 1990) qui y sont présentés.

Les principaux résultats de cette étude mettent en évidence des aspects communs entre les collections et les cycles d'enseignement. Notamment, nous observons une concentration assez importante de l'information sur la notation exponentielle, souvent à l'intérieur d'une sous-section d'un même chapitre. Aussi, sur le plan du symbolisme (Pimm, 1987), il y a peu de mention explicite en lien avec la position et la taille relative de l'exposant par rapport à la base dans les définitions, si ce n'est que parfois par l'observation de cette convention dans les exemples. Ces mêmes exemples possèdent souvent des particularités qui peuvent entrainer une confusion dans la compréhension de la notation exponentielle, confusion qui peut être amplifié par une absence complète de contrexemple dans l'ensemble des définitions et des exercices (Wilson, 1990). Il apparait aussi que l'approche privilégiée pour l'appropriation de la notation exponentielle repose essentiellement, pour la grande majorité des collections, sur les exercices qui représentent près de la moitié des items analysés dans l'étude. Soulignons également que les problèmes proposés sont relativement variés quant aux contextes, mais sont presque tous à solution unique et à données complètes (Gouvernement du Québec, 1988).

En ce qui a trait aux différences entre les collections et les cycles d'enseignement, notons que les définitions sont plutôt en mots pour l'amorce de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle au primaire, alors qu'une présence accrue des définitions symboliques et en « mots et symboliques » apparait au secondaire. Aussi, les fonctions de ces exercices changent selon les cycles d'enseignement. Au primaire, ce sont les fonctions d'encodage, de décodage, de déduction d'une valeur manquante et de comparaison d'effet qui dominent. Au 1^er^ cycle du secondaire, ce sont les fonctions de déduction d'une valeur manquante et de conjecture-vérification que nous retrouvons. Finalement, c'est la fonction de réduction qui est la plus présente au 2^e^ cycle du secondaire.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon comité de direction, formé des professeures Diane Biron et Geneviève Boulet. Diane, merci pour ta générosité, ta disponibilité, ton écoute et ton accompagnement dans mon développement professionnel. Je te dois beaucoup. Je n'ai pas suffisamment de mots pour exprimer toute la reconnaissance que tu mérites et toute la gratitude que j'éprouve pour toi. Geneviève, merci d'être une guide dans mon aventure de l'enseignement des mathématiques depuis plus de 20 ans. Ton soutien indéfectible et tes conseils judicieux me sont très précieux. Vous êtes les deux modèles qui incarnent le mieux pour moi le désir de mettre l'enfant au cœur de son apprentissage des mathématiques, de manière stimulante et en croyant profondément au potentiel de chacun. Je veux également remercier la professeure Patricia Marchand, membre externe du jury. Ta présence et tes commentaires aux deux moments critiques que sont le dépôt du projet et le dépôt du mémoire ont été très appréciés, surtout dans les contextes où ils ont eu lieu.

Plusieurs personnes m'ont soutenu tout au long de cette aventure. Je remercie ma collègue Francine Boisvert pour ses commentaires toujours pertinents et ses séances de motivation, la professeure Isabelle Nizet pour les échanges fructueux lors de la conception de la grille d'analyse et du guide de codification, les professeures Pascale Nootens et Lynn Thomas pour leurs mots d'encouragements lors des moments de doute, les professeurs Bernard Courteau et Jean-Yves Leduc pour leur regard perçant de mathématiciens sur la dualité « notation exponentielle – exponentiation », mes amis Michaël Hétu et Christian Lachapelle pour m'avoir aidé à y voir plus clair quand les ténèbres rendaient le chemin plus laborieux, et toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce projet.

Mes derniers remerciements, mais non les moindres, vont aux membres de ma famille. Pour commencer, je veux dire merci à ma mère Lina, à mon père Michel et à mon frère Daniel. Chacun à sa manière m'a depuis toujours démontré qu'il croit en moi. Je tiens à vous témoigner à quel point il est important pour moi de sentir que vous êtes toujours là pour m'appuyer dans mes choix. C'est extraordinaire de savoir que vous êtes à mes côtés, à

chacune des étapes de ma vie. Deuxièmement, je dis un gros merci à mes filles Aurélie, Florence et Mathilde pour leur patience, car il était difficile pour elles de comprendre pourquoi je devais souvent aller m'enfermer dans mon bureau pour travailler au lieu de jouer avec elles. Merci aussi pour vos nombreux dessins et vos petits mots d'encouragements qui ornent maintenant mon espace de travail, et qui me redonnaient la force de continuer lorsque je rencontrais des obstacles. Finalement, je remercie du fond du cœur ma conjointe Julie. C'est toi qui as été le pilier de la famille pendant tout ce temps, en plus de tout le reste. Merci d'être si merveilleuse et de croire en moi. Sans toi, je n'y serais jamais arrivé.

À tous mes élèves,
pour le plaisir d’apprendre en leur compagnie
les mathématiques et la vie.

INTRODUCTION[1]

Notre étude s'inscrit dans le cadre des travaux qui visent à apporter un éclairage sur la nature du contenu mis à la disposition des personnes enseignantes pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques au primaire et au secondaire. Plus particulièrement, il tente de dresser un portrait de ce qui est abordé en arithmétique et en algèbre dans les manuels scolaires du primaire et du secondaire et, de manière plus précise, en ce qui a trait à la notation exponentielle.

Pour ce faire, une analyse de contenu a été menée sur les manuels scolaires de mathématiques de la 5e année du primaire jusqu'à la 3e année du secondaire en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. L'analyse qualitative de ce matériel a été réalisée à l'aide d'une une grille comprenant, d'une part, des catégories analytiques s'appuyant sur les écrits scientifiques et, d'autre part, des catégories émergentes qui sont apparues durant l'analyse, en appliquant les principes de l'analyse thématique (Landry, 1997; Paillé et Mucchielli, 2010).

Bien que le matériel didactique employé par les enseignantes et les enseignants ne se limite pas aux manuels scolaires, notre analyse s'y est exclusivement intéressée en raison de sa présence marquée en contexte scolaire (Lebrun, 2006; Lenoir, Roy, Rey et Lebrun, 2001; Spallanzani, Biron, Larose, Lebrun, Lenoir, Masselter et Roy, 2001). Même en cette ère du tableau blanc interactif et de la tablette numérique, les manuels scolaires semblent conserver une place importante, comme en font foi les nombreuses offres des maisons d'édition pour leurs versions électroniques. Aussi, le fait de s'en tenir à ce matériel nous a permis d'examiner à la fois le vocabulaire et le symbolisme qu'on y retrouve, et ce, autant dans les définitions, les exercices que dans les problèmes proposés. Cette manière de faire vise à obtenir un portrait le plus global possible de l'enseignement d'un contenu mathématique précis (dans notre cas, la notation exponentielle) à travers un même outil didactique, soit le manuel scolaire. Notre démarche semble, en ce sens, une contribution

[1] L'orthographe rectifiée est utilisée dans ce document.

originale à la compréhension de ce matériel, puisque plusieurs des études portant sur le manuel scolaire s'intéressent à un aspect particulier de celui-ci, comme la nature des problèmes algébriques qu'on y retrouve (Cotnoir, 2010; Marchand et Bednarz, 1999), ou encore l'utilisation des illustrations lors de la résolution de problème (Biron et Chaput, 2001), ce qui, tout en étant très pertinent, ne nous donne pas accès à une vision complète des dispositifs mis en œuvre pour aborder un contenu mathématique particulier.

Malgré les différents aspects analysés dans notre étude, notre projet ne permet pas d'en apprendre davantage sur l'utilisation de ces documents lors de l'enseignement-apprentissage, puisque la collecte de données s'est effectuée exclusivement sur le matériel lui-même. Dans le cadre de recherches ultérieures, il serait certainement pertinent de s'intéresser à la mise en action des propositions faites dans les manuels scolaires et les guides d'enseignement. Nous pensons cependant, tout comme Lenoir, Rey, Rey et Lebrun (2001), qu'une bonne compréhension du manuel scolaire d'un point de vue didactique est nécessaire, car « [c]ette perspective n'a été que très peu développée. » (p.5) En fait, l'étude du manuel scolaire fait l'objet de travaux importants dans la plupart des baccalauréats en formation à l'enseignement. Souvent, son analyse représente une étape importante lors des recherches en didactique des mathématiques, sans toutefois en être l'objet principal. Ces raisons expliquent probablement que peu de résultats portant sur le manuel scolaire sont ultimement publiés. Ainsi, connaitre ses caractéristiques dans le contexte de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle permet d'apporter une contribution à la compréhension parfois incomplète d'un point de vue scientifique de cet outil didactique.

Le mémoire suivant présente l'ensemble de l'étude réalisée. Tout d'abord, la problématique trace un portrait des quelques études s'étant questionnées explicitement sur la notation exponentielle (Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter, 2013; Mullet et Cheminat, 1995; Pitta-Panzatti, Christou et Zachariades, 2007; Sastre et Mullet, 1998; Weber, 2002). Elle cerne aussi dans quelle mesure il est important de s'intéresser à l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, plus particulièrement dans les manuels scolaires (Lebrun, 2006; Lenoir, Roy, Rey et Lebrun, 2001; Spallanzani, Biron, Larose, Lebrun, Lenoir, Masselter et Roy, 2001). Ensuite, le cadre de référence nous permet d'établir les bases théoriques sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour répondre à nos questions de recherche. Les écrits retenus sont en lien avec le vocabulaire associé aux apprentissages mathématiques (Pierce et Fontaine, 2009), les caractéristiques du symbolisme dans l'écriture mathématique (Bessot et Eberhard, 1982; Biron, 2012; Pimm, 1987, Roegiers, 1998*a*), ainsi que les caractéristiques des définitions, des exercices et des problèmes posés (Gouvernement du Québec, 1988; Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006; Vinner, 1976, 1977, 2002; Wilson, 1990). Dans un troisième temps, la méthodologie présente les appuis scientifiques ayant soutenu notre analyse, soit l'analyse de contenu (Landry, 1997) et certains principes de l'analyse thématique pour les catégories émergentes (Paillé et Mucchielli, 2010). Les différentes étapes de l'élaboration de la grille d'analyse et du guide de codification ayant servi à la collecte de données y sont également décrits. Finalement, le quatrième chapitre présente les principaux résultats obtenus en ce qui a trait à l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle dans les manuels scolaires de la 5^e année du primaire à la 3^e année du secondaire, approuvés par le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec. Quelques constats réalisés par rapport aux résultats présentés concluent cette étude.

PREMIER CHAPITRE
PROBLÉMATIQUE

L'arrivée du *Programme de formation de l'école québécoise* (Gouvernement du Québec, 2006) au début des années 2000, souvent appelé de manière plus succincte PFEQ, est le résultat des recommandations émises par la Commission des États généraux sur l'éducation (1995-1996) et par le Groupe de travail sur la réforme du curriculum dans le document *Réaffirmer l'école* (Gouvernement du Québec, 1997*a*), lui-même suivi de l'énoncé de politique *L'école, tout un programme* (Gouvernement du Québec, 1997*b*). Il avait pour but de mettre à jour le programme de 1980 afin de mieux préparer les futures citoyennes et les futurs citoyens aux exigences anticipées du XXI^{e} siècle. Cette réforme du système d'éducation québécois s'appuie notamment sur deux éléments clés : une approche par compétences et une invitation à aborder l'apprentissage sous un angle dit socioconstructiviste, tel qu'énoncé dans le chapitre 1 du PFEQ (Gouvernement du Québec, 2006) :

> Le *Programme de formation de l'école québécoise* se caractérise essentiellement par le choix de développer des compétences et par l'attention portée à la démarche d'apprentissage. D'une part, il propose une organisation des savoirs sous forme de compétences de manière à leur donner sens et ouverture et, d'autre part, il retient un cadre conceptuel qui définit l'apprentissage comme un processus actif et continu de construction des savoirs. (p. 4)

Au-delà de ces nouvelles assises, l'arrivée du programme a également été l'occasion de revoir la pertinence et l'organisation des notions et des concepts à aborder dans les différents domaines d'apprentissage. Examinons les effets de cette réforme sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

1. IMPACT DE LA RÉFORME CURRICULAIRE EN MATHÉMATIQUES

Parallèlement au questionnement plus général entourant les visées de la formation, chacune des disciplines scolaires s'est penchée, durant les années 1990, sur le curriculum à proposer. Les mathématiques n'ont donc pas échappé à une démarche de réflexion et de consultation auprès de divers groupes d'intérêt, comme l'Association mathématique du Québec (AMQ) et le Regroupement des responsables en mathématiques au secondaire (GRMS), sur les différents contenus à prévoir au primaire et au secondaire afin d'actualiser ceux-ci et de mieux articuler l'apprentissage des élèves. Cette opération a, entre autres, permis de tenir compte de certains aspects relevés par la recherche en didactique sur l'enseignement-apprentissage de cette matière scolaire au cours des trente années qui ont précédé la mise en œuvre du PFEQ. C'est ainsi que, par exemple, l'apprentissage des nombres naturels est passé de 1 à 69 en première année et jusqu'à 99 en deuxième année à un apprentissage des nombres de 1 à 999 au premier cycle du primaire, mettant ainsi en œuvre une des recommandations de chercheurs (Bednarz et Janvier, 1985) à l'effet d'aborder le nombre et la numération en prenant en compte au moins deux niveaux de groupements pour mieux en saisir les principes constitutifs.

Si le curriculum et le parcours en trois profils de formation en mathématiques au secondaire (Sciences naturelles [SN], Technico-sciences [TS], Culture, société et technique [CST]) ont été une tentative d'introduire le principe « des mathématiques différentes pour des besoins différents », il est aussi important de souligner le souci d'assurer un meilleur arrimage entre les ordres primaire et secondaire, ce qui constitue une nouveauté dans la documentation ministérielle. Ainsi, la *Progression des apprentissages* (Gouvernement du Québec, 2009) est un complément au PFEQ. Elle présente en plusieurs sections les différents concepts et les diverses notions à aborder pendant l'ensemble du cheminement scolaire du primaire et du secondaire. Elle constitue un document de référence qui permet à l'enseignante et à l'enseignant de repérer le contenu en principe déjà appris et celui à aborder. Dans la version de la *Progression des apprentissages* (*Ibid.*) du secondaire en mathématiques, par exemple, une colonne permet de vérifier rapidement les acquis que les élèves du primaire devraient posséder en arrivant au secondaire, tout en ayant sous les yeux dans un même espace ce qui est à voir selon les niveaux scolaires et selon les profils de formation mathématique. Cet outil semble avoir le potentiel d'aider à favoriser des liens et possiblement la compréhension des élèves. Mais qu'en est-il réellement dans le milieu scolaire?

2. CHANGEMENTS PORTEURS À MIEUX DÉFINIR

Bien que des changements soient clairement perceptibles dans le curriculum de mathématiques, il s'avère qu'une étude approfondie du cheminement des notions et des concepts mathématiques est toujours justifiée afin d'en saisir les tenants et aboutissants. Notre étude vise, entre autres, à contribuer à cette quête pour mieux saisir le parcours du contenu mathématique et sa nature.

Parmi l'ensemble des notions et des concepts mathématiques à aborder au primaire et au secondaire, un contenu attire plus particulièrement notre attention; il s'agit de la notation exponentielle. Contrairement au sens du nombre et des opérations qui ont fait l'objet de plusieurs travaux, la notation exponentielle a été relativement peu étudiée, comme le soulignent Mullet et Sastre (1998) : « Numerous studies have examined the acquisition of the concepts of addition and multiplication, and the comprehension of fractions and decimals. However, very few studies have focused on the concept of power and how this notion is mastered progressively. »[2] (p. 67) Pourtant, la notation exponentielle est au cœur de plusieurs apprentissages. Plus récemment, Pitta-Panzatti, Christou et Zachariades (2007) soulevaient que

> [i]n recent years, there has been an increased interest in educational research in the understanding of advanced mathematics topics such as functions, limits, infinity (Dubinsky, 1991; Lakoff et Núñez, 2000; Sfard, 1991). However, there has been comparatively little research focused on students' learning and understanding of exponents, which are important mathematical concepts and central to many collegiate mathematics courses, including calculus, differential equations and complex analysis. Much of the published research on this topic consists of researchers' suggestions and descriptions of instructional designs to be used in teaching students about exponents (Barnes, 2006; Weber, 2002),

[2] Plusieurs études ont examiné l'acquisition des concepts d'addition et de multiplication, ou encore la compréhension des fractions et des nombres décimaux. Toutefois, très peu d'études ont fixé leur attention sur la puissance et sur la manière dont cette notion est progressivement maitrisée par les élèves (trad. libre).

> while as Confrey and Smith (1995) note, there have been relatively few studies about students' understanding of exponential numerals. Moreover, the research focusing directly on exponents as an autonomous mathematical object is very limited, with more studies considering exponents in conjunction with functions and concatenations (Confrey et Smith, 1995; Lee et Messner, 2000). In particular, little is known about students' mental constructions and the way in which they develop a meaningful understanding of exponents or logarithms.[3] (p. 301)

La notation exponentielle est aussi l'une des composantes de l'apprentissage de l'algèbre. Plusieurs études se sont intéressées au développement de la pensée algébrique et à l'acquisition des connaissances relatives à l'algèbre par les élèves, en s'attardant toutefois peu au rôle joué par la compréhension de la notation exponentielle dans cet apprentissage. Comme le mentionnent Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter (2013) :

> Research on the development of algebraic reasoning is an emerging focus area in mathematics education (e.g., Kieran, 2007; Seng, 2010; Vlassis, 2002a, 2002b; Warren, 2003). Most studies focus their attention on functions (e.g., Dugdale, 1993; Thompson, 1994; Vinner, 1992) or solving linear equations (e.g., Sfard et Linchevski, 1994; Slavit, 1997). Comparatively few studies investigate the simplification of algebraic expressions (Ayres, 2000; Sakpakornkan et Harries, 2003), a skill which requires students to use their understanding of variables and to interpret mathematical symbols accurately. In addition, research on students' understanding of the negative sign is limited, particularly in the context of exponential notation (Kieran, 2007).[4] (p. 69)

---

[3] Dans les dernières années, il y a eu un intérêt accru dans la recherche en éducation pour comprendre des thèmes de mathématiques avancées comme les fonctions, les limites ou l'infini (Dubinsky, 1991; Lakoff et Núñez, 2000; Sfard, 1991). Cependant, il y a eu en comparaison très peu d'études sur l'apprentissage et la compréhension de la notation exponentielle, qui est pourtant un concept mathématique important et central pour réussir des cours de mathématiques collégiaux comme ceux de calcul différentiel et intégral, ou encore d'analyse. La plupart des écrits scientifiques sur le sujet consistent en des suggestions ou des descriptions de leçons à être utilisées dans l'enseignement de la notation exponentielle (Barnes, 2006; Weber, 2002), alors que Confrey et Smith soulignent qu'il y a eu relativement peu d'études portant sur les expressions exponentielles numériques. Les études portant sur la notation exponentielle comme objet mathématique autonome sont très limitées, alors que plusieurs s'y intéressent dans le contexte des fonctions ou de la concaténation (Confrey et Smith, 1995; Lee et Messner, 2000). En particulier, nous en savons peu sur la construction mentale des élèves, ainsi que la manière dont ceux-ci développent leur compréhension des exposants et des logarithmes (trad. libre).

[4] Les recherches sur le développement du raisonnement algébrique sont de plus en plus nombreuses en didactique des mathématiques (e.g., Kieran, 2007; Seng, 2010; Vlassis, 2002a, 2002b; Warren, 2003). La plupart de ces études se préoccupent des fonctions (e.g., Dugdale, 1993; Thompson, 1994; Vinner, 1992) ou encore de la résolution d'équation du premier degré (e.g., Sfard et Linchevski, 1994; Slavit, 1997). Peu d'études se questionnent sur la simplification d'expressions algébriques (Ayres, 2000; Sakpakornkan et Harries, 2003), une habileté qui est pourtant nécessaire à la compréhension de ce qu'est une variable et à une

Ainsi, le cas de la notation exponentielle parait particulièrement important à approfondir.

Dans la section qui suit, nous allons tout d'abord définir de manière succincte ce que nous entendons par l'expression « notation exponentielle ». Nous nous intéresserons ensuite à la place occupée par ce contenu dans le *Programme de formation de l'école québécoise* (Gouvernement du Québec, 2006).

3. NOTATION EXPONENTIELLE

Dans un premier temps, définissons brièvement ce que nous entendons par l'expression « notation exponentielle ». Selon le *Dictionnaire mathématique CEC* (Dufour, 2011, p. 168), la notation exponentielle se définit comme une

> [f]açon d'exprimer un nombre, appelé *puissance*, en utilisant une base affectée d'un exposant. La notation exponentielle se présente sous la forme base$^{\text{exposant}}$ = puissance. Pour une base *a* et un exposant entier $n > 1$, l'exposant *n* indique le nombre de fois que la base *a* est multipliée par elle-même.
>
> $$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$$

Comme nous le verrons au chapitre suivant, cette définition, quoique suffisante pour aborder le concept, est loin de traduire toute la richesse de cette notation. En outre, elle comporte une difficulté sur le plan sémantique, puisque l'expression « multipliée par elle-même » peut entrainer une base de trop dans la suite de multiplication, tel que le souligne Baruk (1995, p. 944) dans son *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Malgré tout, cette définition permet de saisir l'idée principale entourant ce contenu, tout en nous amenant à poser des questions fondamentales sur la nature même de cette notation. Par exemple, nous nous demandons si les définitions utilisées pour présenter le concept de

---

interprétation adéquate du symbolisme algébrique. De plus, les études sur la compréhension par les élèves du signe négatif sont limitées, en particulier dans le contexte de la notation exponentielle (Kieran, 2007) (trad. libre).

notation exponentielle aux élèves ne pourraient pas entrainer une certaine confusion. Quelques études se sont interrogées sur l'interprétation par les élèves d'expressions arithmétiques écrites en notation exponentielle (Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter, 2013; Mullet et Cheminat, 1995; Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades, 2007; Sastre et Mullet, 1998), mais à notre connaissance, aucune recherche ne s'est penchée sur le rôle que pourraient avoir le vocabulaire et le symbolisme utilisés lors de cet apprentissage. Il nous semble donc opportun de s'intéresser à ce champ d'études.

Ayant défini de manière très générale le concept de notation exponentielle, examinons maintenant la place que celui-ci occupe dans le *Programme de formation de l'école québécoise*.

3.1 Place de la notation exponentielle dans le *Programme de formation de l'école québécoise*

Dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques au Québec, l'arithmétique et l'algèbre occupent toujours une place fondamentale dans les thèmes à traiter au cours de l'ensemble du curriculum scolaire primaire et secondaire des élèves. À l'intérieur de ces deux thèmes mathématiques se retrouvent prescrites des notions en lien avec la notation exponentielle. Pour nous en convaincre, examinons à l'aide des deux sous-sections qui suivent, certains éléments de la progression des apprentissages du primaire et du secondaire qui nous permettent de soutenir cette affirmation.

3.1.1 Notation exponentielle au primaire

En examinant la progression des apprentissages du primaire, il est possible de constater que quelques éléments précis sont prévus en lien avec l'apprentissage de la notation exponentielle, ceux-ci étant exclusivement abordés au 3^{e} cycle. Ils correspondent aux principes élémentaires du concept. En effet, il est indiqué à la page 6 que les élèves doivent être en mesure de représenter la puissance d'un nombre naturel, tout en utilisant le vocabulaire adéquat en lien avec cette notation (exposant, puissance, carré de [le], cube de

[le]). Il est également précisé un peu plus loin à cette page que les symboles en lien avec la notation exponentielle doivent être acquis. À la page 12 de ce même document, il est finalement spécifié que les élèves doivent être en mesure de calculer la puissance d'un nombre. L'annexe 1 présente les extraits pertinents de la progression des apprentissages du primaire en lien avec la notation exponentielle. L'ensemble de ces informations nous permet de constater que la notation exponentielle est toujours présentée dans un contexte arithmétique, ce qui semble cohérent avec le niveau de développement attendu des élèves.

3.1.2 Notation exponentielle au secondaire

Dans la progression des apprentissages du secondaire, la notation exponentielle occupe une place plus importante, comme en témoignent les nombreux éléments qui sont en lien avec celle-ci. Les contextes d'utilisation sont autant arithmétiques qu'algébriques. L'annexe 2 présente les extraits pertinents de la progression des apprentissages du secondaire concernant avec la notation exponentielle.

D'abord, observons les attentes sur le plan de l'arithmétique. Les outils de calculs arithmétiques comprennent principalement ce qui concerne la notation exponentielle, la notation logarithmique et les radicaux, ainsi que les liens qui unissent ces modes de représentation des nombres. Les différents types d'exposants possibles sont introduits progressivement tout au long du secondaire : les exposants entiers ($a^m, pour\ m \in \boldsymbol{Z}$) sont présentés en premier, pour faire suite aux exposants naturels vus au primaire, et sont suivis des exposants fractionnaires ($a^{\frac{m}{n}}, pour\ m \in \boldsymbol{Z}\ et\ n \in \boldsymbol{N}$). Les effets sur la puissance du choix de la base dans une expression écrite en notation exponentielle (par exemple, une base entre 0 et 1) et du type d'exposants (par exemple, l'exposant 0 ou l'exposant négatif) font l'objet de conjectures et de réflexions afin de comprendre toute la portée de cette notation. Les propriétés des opérations et le sens de l'égalité sont également à développer dans le cadre de l'arithmétique du début du secondaire, ce qui permettra d'établir les bases adéquates de la manipulation d'équations et d'inéquations, la notation exponentielle étant intrinsèquement liée à ces concepts.

Les régularités mathématiques sont le point de départ de l'étude des expressions algébriques, toujours en lien avec les apprentissages réalisés au primaire. S'ajoutent au fur et à mesure les notions algébriques d'inconnue, de variable, de constante, de paramètre, de coefficient, de degré, de terme, de terme constant et de termes semblables qui touchent à divers niveaux le concept de notation exponentielle. L'élève doit aussi développer l'habileté à reconnaitre et à construire des expressions algébriques symboliques à partir de différents contextes, pour ensuite être capable de les manipuler. Que ce soit par le calcul de la valeur numérique d'une expression algébrique, par l'apprentissage des diverses opérations sur des monômes et des polynômes ou encore par les nombreux cas de factorisation, l'élève développe sa compétence à réduire et à transformer les expressions algébriques dans la réalisation d'exercices ou dans la résolution de problèmes. Nous pourrions, à ce stade, qualifier la notation exponentielle comme étant un apprentissage transversal préalable à l'utilisation de ces divers outils algébriques. Mais cet apprentissage se réalise-t-il? Comment l'élève s'approprie-t-il ce concept? Examinons quelques recherches menées sur le sujet.

3.2 Ce qu'en dit la recherche

Au-delà de l'aspect normatif de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, il est essentiel d'examiner, dans les écrits scientifiques, les explications sur le sujet afin de mieux en saisir les particularités. Quoique peu nombreuses, les études s'étant penchées sur la notation exponentielle n'en demeurent pas moins importantes pour situer notre questionnement de recherche. Le tableau 1 les présente. Comme chacune des études utilise celles qui les ont précédées historiquement pour soutenir sa démarche, celles-ci sont répertoriées par ordre chronologique. Une description plus détaillée de ces cinq études est disponible à la fin du présent document (annexe 3).

Tableau 1
Synthèse des études portant sur la notation exponentielle

Auteurs	Éléments à retenir
Mullet et Cheminat (1995)	• Objectif principal : saisir comment les élèves âgés de 15 à 18 ans combinent les informations fournies par la base et par l'exposant dans une expression exponentielle pour évaluer l'ordre de grandeur de la puissance. • Méthodologie : estimations graphiques par les élèves d'expressions exponentielles de bases et d'exposants variés. • Résultats : quatre modèles observés (additif avec prépondérance de la base, additif avec prépondérance de l'exposant, multiplicatif et exponentiel), qui permettent d'évaluer les niveaux d'interprétation des expressions exponentielles par les élèves. Parmi ces quatre modèles, constats de la prédominance d'estimation de nature additive, plutôt que multiplicative ou exponentielle des expressions exponentielles, ce qui surprend les auteurs compte tenu de l'âge des participants. Quelques élèves, parmi les plus âgés de l'échantillon, ont une interprétation multiplicative ou exponentielle des expressions proposées.
Sastre et Mullet (1998)	• Objectif principal : interpréter les difficultés d'élèves âgés de 13 à 19 ans à comprendre le code exponentiel et à estimer l'ordre de grandeur d'une expression écrite dans cette notation. • Méthodologie : estimations graphiques par les élèves d'expressions exponentielles de bases et d'exposants variés. • Résultats : raffinement des modèles observés dans l'étude précédente par l'introduction de quatre modèles transitoires qui précisent les caractéristiques des interactions attribuées à la base et à l'exposant dans l'estimation de la puissance d'une expression exponentielle. Ceux-ci permettent ainsi de préciser les différents apports possibles de la base et de l'exposant à l'estimation de la puissance, plus particulièrement sur le plan de la prépondérance de l'effet de la base et de l'exposant sur la puissance estimée. Encore ici, plusieurs élèves semblent estimer plutôt de manière additive la valeur des expressions exponentielles, avec un constat similaire sur les sujets plus âgés qui interprètent plutôt d'une manière exponentielle celle-ci.

Auteurs	Éléments à retenir
Weber (2002)	• Objectif principal : vérifier l'effet d'une séquence d'enseignement s'appuyant sur les différents sens de la notation exponentielle sur l'apprentissage de ce concept par des étudiants universitaires américains. • Méthodologie : création et expérimentation avec groupe témoin d'une séquence d'enseignement portant sur la notation exponentielle et expérimentation de celle-ci. • Résultats : afin de contribuer à la qualité de la compréhension de la notation exponentielle par les élèves, il semble opportun de tenir compte des multiples sens que peut prendre une expression comme b^x, soit : une opération (multiplier x facteurs b ensemble), une structure mathématique (le nombre qui est le résultat du processus d'exponentiation), ou encore comme une fonction. En effet, le modèle expérimenté misait sur ces multiples sens et les étudiants du groupe expérimental ont mieux réussi les tests que les étudiants du groupe témoin.
Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades (2007)	• Objectif principal : décrire le degré de compréhension de la notation exponentielle auprès d'élèves de niveau secondaire. • Méthodologie : activités faisant intervenir une compréhension procédurale (p. ex., pour a^2) versus une compréhension conceptuelle (p. ex., pour $a^{\frac{1}{2}}$) de la notation exponentielle. • Résultats : proposition d'un modèle à trois niveaux pour expliquer la compréhension des élèves. Le niveau 1 est dit préconceptuel : les élèves sont en mesure d'interpréter des expressions exponentielles ayant des exposants entiers positifs comme une suite de multiplications de la base. Le niveau 2 est dit conceptuel : les élèves sont en mesure d'interpréter des expressions exponentielles qui ont des exposants entiers négatifs, ce qui correspond à une extension qui dépasse le sens initial de ce à quoi sert un exposant dans un sens procédural. Le niveau 3 est dit restructuré : les élèves arrivent à comprendre le sens à accorder à n'importe quel type d'exposants réels, en plus de saisir les propriétés sous-jacentes à la manipulation d'expressions exponentielles.

Auteurs	Éléments à retenir
Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter (2013)	• Objectif principal : saisir si certaines erreurs commises lors de la simplification d'expressions exponentielles demeurent les mêmes pendant la progression des étudiants dans leur scolarité. • Méthodologie : tests portant sur la simplification d'expressions exponentielles à des étudiants de niveau collégial. • Résultats : le concept de négativité semble jouer un rôle important dans l'explication des difficultés vécues par les étudiants. Un développement incomplet des concepts d'inverse additif et d'inverse multiplicatif serait à l'origine de plusieurs des erreurs commises par les étudiants. Les chercheurs émettent également l'hypothèse que le langage utilisé dans l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle (comme l'utilisation du mot « opposé » au lieu de l'expression « inverse additif » qui est, selon eux, mathématiquement plus rigoureux pour parler de *-a*), ainsi que l'aisance dans la manipulation et l'interprétation de celle-ci (p. ex., les étudiants éprouvent de la difficulté à différencier des expressions comme -13^8 et $(-13)^8$) jouent un rôle critique dans le développement d'une compréhension conceptuelle de cette notation.

Les informations présentées au tableau 1 peuvent être regroupées selon quatre perspectives différentes. Ainsi, on retrouve des études s'étant intéressées à la notation exponentielle du point de vue : 1) de l'estimation par l'élève des effets respectifs de la base et de l'exposant dans l'évaluation de la puissance; 2) des différents sens pouvant être attribués à cette notation (opération, structure mathématique ou fonction); 3) de l'interprétation procédurale ou conceptuelle de celle-ci, selon les types d'expressions exponentielles étudiées et 4) des rôles respectifs du vocabulaire et du symbolisme dans l'apprentissage de la notation exponentielle. Ces perspectives nous permettent de mieux préciser la persistance des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'acquisition du concept de notation exponentielle, telles que 1) des estimations qui sont majoritairement de type additif des expressions exponentielles par les élèves de l'échantillon (15 à 18 ans), alors que l'attente était que plusieurs auraient une interprétation exponentielle de celles-ci compte tenu de leur âge (Mullet et Cheminat, 1995; Sastre et Mullet, 1998) ; 2) une difficulté à saisir les différents sens des expressions exponentielles (opération, structure mathématique, fonction) selon les types de nombres qui les constituent (Weber, 2002) ; 3) une difficulté à distinguer une utilisation procédurale d'une utilisation conceptuelle de la notation exponentielle (Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades, 2007) et 4) une difficulté à saisir les nuances en lien avec le vocabulaire et le symbolisme utilisé dans l'apprentissage de la notation exponentielle (Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter, 2013). L'ensemble de ces constats nous convainc donc de la pertinence de nous intéresser à l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, car les études précédentes, tout en faisant des constats intéressants et pertinents, soulèvent également plusieurs questionnements, dont la façon d'aborder ce contenu avec les élèves en tenant compte des particularités de la notion et des difficultés liées à son apprentissage.

3.3 En résumé

Cette section nous a tout d'abord permis de constater à l'aide de documents de référence (lexiques et dictionnaires) que, sous son apparente simplicité, le symbolisme rattaché à la notation exponentielle se révèle assez complexe quant à sa définition et à son interprétation. Certains pièges linguistiques semblent notamment présents même lorsque nous en expliquons les principes. Par exemple, affirmer que l'expression « 2^5 » signifie « deux multiplié cinq fois par lui-même » peut mener à une multiplication de trop dans le calcul de la puissance (Baruk, 1995). Ainsi, définir la notation exponentielle comme étant « la notation a^n, où l'exposant n rend compte de la présence de n facteurs égaux à a » élimine la possibilité de se retrouver avec une base de trop lors du calcul *(Ibid.*, p. 469). Il convient de souligner que même dans certains articles présentés à la sous-section précédente, la formulation pouvant mener à une multiplication de trop était présente pour aborder le sens d'origine de l'exposant. Il va sans dire que cette propension à expliquer ainsi les exposants semble tenace et mérite une attention particulière compte tenu des erreurs qu'elle peut engendrer.

Par la suite, nous avons été à même de constater à travers les écrits ministériels que la notation exponentielle occupe une place importante dans l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre par les élèves québécois tant au primaire qu'au secondaire, sinon en quantité, du moins par rapport à son apport à d'autres concepts mathématiques. Il s'agit donc d'un contenu important à comprendre et à étudier.

Finalement, quelques travaux de recherche présentés en lien avec la notation exponentielle ont permis de cerner les avancées déjà réalisées dans notre compréhension de l'acquisition de ce contenu par les élèves, tout en identifiant certaines difficultés qu'ils peuvent avoir à surmonter. Ces études rappellent les défis qu'il reste à relever afin d'assurer un enseignement adéquat de cette notation. Mais qu'en est-il de cet enseignement? Comment cela est-il présenté aux élèves? Bien que ces questions soient fondamentales, les défis méthodologiques sont grands pour cerner avec exactitude comment s'opère son enseignement dans le quotidien de l'élève. Cependant, l'accès au matériel d'enseignement-apprentissage pourrait s'avérer une source utile à examiner, comme le propose la section suivante.

4. MATÉRIEL POUR SOUTENIR L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

D'entrée de jeu, précisons que la personne enseignante est maintenant considérée comme un « maître professionnel » (Gouvernement du Québec, 2001, p. 11); il lui revient de tout mettre en œuvre pour faire en sorte que les élèves qui lui sont confiés réalisent des apprentissages de qualité. D'ailleurs, le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (Gouvernement du Québec, 2009) souligne dans la *Progression des apprentissages* du primaire que

> [l]e rôle de l'enseignante ou de l'enseignant dans l'acquisition des connaissances et dans le développement des compétences est essentiel et une intervention de sa part est requise tout au long de l'apprentissage. La Loi sur l'instruction publique lui donne d'ailleurs la responsabilité du choix des « modalités d'intervention pédagogique qui correspondent aux besoins et aux objectifs fixés pour chaque groupe ou chaque élève qui lui est confié »

> (article 19). Il appartient donc à l'enseignante ou à l'enseignant d'adapter ses interventions et de les appuyer sur une diversité de stratégies, qu'il s'agisse par exemple d'un enseignement magistral donné à l'ensemble de la classe, d'un enseignement individualisé offert à un élève ou à un petit groupe d'élèves, d'une série d'exercices à faire, d'un travail d'équipe ou d'un projet particulier à réaliser. (p. 3)

Dans les différentes options qui s'offrent à elle pour l'aider à atteindre les objectifs curriculaires et ses objectifs spécifiques d'enseignement, la personne enseignante doit donc faire appel à toutes les stratégies qu'elle juge pertinentes. L'une de ces stratégies peut consister en l'utilisation de différents matériels pour la soutenir dans son travail.

Nous pouvons recenser plusieurs types de matériels qui sont utilisés par les enseignantes et les enseignants lors de l'apprentissage des mathématiques par leurs élèves, par exemple, le matériel de manipulation, les lexiques mathématiques ou encore les manuels scolaires. Pour l'instant, concentrons-nous sur les manuels scolaires qui semblent, selon les études examinées (Lebrun, 2006; Lenoir, Roy, Rey et Lebrun, 2001; Spallanzani, Biron, Larose, Lebrun, Lenoir, Masselter et Roy, 2001), un des principaux matériels utilisés.

4.1 Place et rôle des manuels scolaires dans l'enseignement

Avant les années 2000, très peu d'études se sont intéressées de manière systématique et rigoureuse à l'usage fait du manuel scolaire par les enseignantes et les enseignants du Québec (Lenoir *et al*., 2001). Pourtant, Spallanzani et ses collaborateurs (2001) expliquent que dès 1979, le gouvernement du Québec, dans le *Livre orange*, insistait sur l'importance des manuels scolaires dans l'enseignement-apprentissage. Celui-ci présente le manuel scolaire

> comme étant le matériel de base du personnel enseignant. […] les enseignants pourraient ainsi s'appuyer sur des manuels scolaires de base pour standardiser la formation de tous les élèves québécois. Ces manuels devraient préciser tant la démarche d'enseignement et constituer des guides indispensables dans le processus d'intervention éducative. (p. 7)

En 1991, le *Guide général pour l'élaboration du matériel didactique* abonde dans le même sens. Spallanzani et ses collègues (2001) soulignent qu' « [à] la lumière de cette prise de position, il ressort que les manuels scolaires représentent à la fois des outils d'information et de formation pour les enseignantes et les enseignants. » (p. 13) Une tendance différente est toutefois introduite avec l'arrivée du *Programme de formation de l'école québécoise* au début des années 2000, le ministère ouvrant la voie à une plus grande souplesse dans l'usage de ce matériel. En effet, le manuel scolaire y est plutôt présenté comme une ressource documentaire que l'élève peut consulter selon ses besoins (Gouvernement du Québec, 2006*b*), ce qui diffère quelque peu de la posture précédente. De fait, il est très rarement fait mention de l'expression « manuel scolaire » dans le PFEQ. Cependant, malgré cette nouvelle prise de position du ministère, les travaux de Lebrun (2006) ne semblent pas indiquer de changements majeurs sur les pratiques enseignantes.

Des recherches réalisées sur le rôle et la place du manuel scolaire au sein des pratiques enseignantes, il est possible de tirer certaines observations qui obtiennent un assez large consensus auprès des chercheurs. Tout d'abord, une perception d'infaillibilité semble entourer le manuel scolaire. En effet, « le manuel est perçu comme une valeur sûre, le lieu où sont déposées des vérités incontestables » (Lebrun, 2006, p. 15). Si une personne enseignante se retrouve dans une situation où elle ne se sent pas complètement compétente pour enseigner les notions prévues au programme, le manuel scolaire devient un outil indispensable auquel elle aura recours quotidiennement, autant comme soutien théorique que comme source d'information didactique (*Ibid.*). Il semblerait aussi que les enseignantes et les enseignants non spécialistes, comme ceux et celles du primaire, « seraient potentiellement portés à une utilisation peu critique des manuels » (Spallanzani *et al.,* 2001, p. 17). Une autre constatation se rapporte à la fréquence d'utilisation des manuels scolaires en classe. Les enseignantes et les enseignants réfèrent régulièrement à ceux-ci pour présenter le contenu notionnel à leurs élèves, même si « les recherches effectuées ne permettent pas de tirer des conclusions générales quant au rôle et aux modalités d'utilisation des manuels » (*Ibid*., p. 23). Nous pouvons également souligner que le manuel scolaire ne sert pas uniquement de soutien aux apprentissages des élèves; il serait aussi une source importante de renseignement pour la personne enseignante dans sa préparation et sa planification, au point même qu'il se substituerait parfois aux programmes de formation lors de l'identification des contenus à enseigner (*Ibid.*). Il serait aussi une ressource souvent privilégiée lors du choix des activités d'apprentissage et des exercices qui seront proposés aux élèves. Finalement, le manuel scolaire permettrait aux enseignantes et aux enseignants de gagner du temps lors de la préparation des cours, « ce qui peut expliquer que même des enseignants confirmés élaborent largement leur enseignement à partir de leurs manuels » (Lebrun, 2006, p. 18).

4.2 Manuel de mathématiques et notation exponentielle

Le cas de l'enseignement-apprentissage des mathématiques n'échappe pas à cette tendance générale que nous venons d'exposer, à savoir que le manuel scolaire de mathématiques serait une source consultée par certaines enseignantes et par certains enseignants afin de parfaire leur propre compréhension du contenu notionnel à enseigner (Spallanzani *et al,* 2001); il deviendrait dans ce cas un outil d'autoformation (Lebrun, 2006). Mais de quoi est-il question dans ces manuels scolaires? Comment sont abordés les notions et concepts mathématiques et, plus précisément, la notation exponentielle? Observe-t-on un souci de continuité ou de progression dans son apprentissage? Quelles sont les particularités de l'organisation du contenu? Quels sens accorde-t-on à la notation exponentielle? N'ayant pas trouvé d'études qui permettent d'éclairer sur la situation au Québec, nous jugeons intéressant et pertinent de nous y pencher. La section qui suit précise la question générale qui guidera notre démarche de recherche.

5. QUESTION GÉNÉRALE DE RECHERCHE

Tel que nous venons de l'exposer dans le présent chapitre, une première tentative de définition de la notation exponentielle a permis de constater que ce contenu, en apparence simple, sous-tend en fait une certaine complexité. En effet, ne serait-ce que sur le plan des expressions employées pour l'expliquer, par exemple, 7^3 qui signifierait « 7 multiplié 3 fois par lui-même », une certaine ambigüité semble persister (Baruk, 1995). Il parait donc très important de s'intéresser au vocabulaire utilisé lorsque cette notation mathématique est abordée avec les élèves, ainsi qu'aux définitions qui sont utilisées pour la présenter. Ces préoccupations semblent d'autant plus importantes du fait qu'aucune recherche, à notre connaissance, ne s'est posée cette question précise, et ce, même si quelques-unes se sont intéressées à l'interprétation d'expressions arithmétiques écrites en notation exponentielle (Mullet et Cheminat, 1995; Pitta-Panzatti, Christou et Zachariades, 2007; Sastre et Mullet, 1998; Weber, 2002) ou encore aux erreurs typiquement commises par les élèves lors de la simplification d'expressions exponentielles (Cangelosi *et al.*, 2013). Quoique la notation exponentielle soit fondamentale dans l'apprentissage de l'algèbre, elle ne semble pas abordée de manière explicite dans les recherches didactiques recensées qui, jusqu'à présent, s'intéressent à celle-ci (*Ibid*., 2013).

Par ailleurs, nous avons montré que la notation exponentielle constitue une composante importante de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, comme en témoigne sa position privilégiée dans les programmes de formation du primaire et du secondaire. Plus particulièrement dans le programme du primaire, il est clairement explicité que tout ce qui touche à la définition initiale de l'interprétation et de l'écriture d'expressions arithmétiques en notation exponentielle (avec une base naturelle et un exposant positif supérieur ou égal à 2) doit être abordé. Au secondaire, une extension de la notation exponentielle permet de donner un sens aux bases réelles affectées des exposants suivants : 1, 0, négatifs et fractionnaires. Les manipulations d'expressions algébriques, les équations et les inéquations, ainsi que les fonctions font passer l'apprentissage de cette notation d'une approche purement arithmétique à une application fondamentale dans le calcul algébrique.

Or, l'arrimage entre ce qui est prévu au primaire et ce qui est prévu au secondaire est-il réalisé? Si dans la progression des apprentissages du secondaire, il existe une section qui indique les apprentissages normalement acquis en 6^e^ année du primaire, certains choix semblent toutefois particuliers, comme le fait d'introduire la notation scientifique en 1^re^

secondaire impliquant les puissances négatives de base 10, alors que les élèves n'ont pas encore été exposés à ce type d'expressions écrites en notation exponentielle.

Notre cheminement a permis, jusqu'à présent, de préciser que plusieurs matériels peuvent soutenir la personne enseignante afin de favoriser l'acquisition des connaissances et le développement des compétences de ses élèves, tels le matériel de manipulation, les lexiques mathématiques spécialisés ou encore le manuel scolaire. Il semble reconnu que le manuel scolaire est un outil important, consulté par l'enseignante et l'enseignant du primaire et du secondaire (Lenoir *et al.*, 2001, p. 5; Spallanzani *et al.*, 2001, p. 8). Nous en savons toutefois peu sur son contenu, son organisation et encore moins sur la manière de traiter la notation exponentielle à travers ce matériel durant le parcours scolaire des élèves.

L'ensemble des constats soulevés dans cette problématique nous amène ainsi à poser la question générale suivante :

Quel contenu retrouve-t-on dans les manuels scolaires de mathématiques québécois, de la 5^{e} année du primaire à la 3^{e} année du secondaire, en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle?

Pour mener cette étude, un approfondissement de ce qu'est la notation exponentielle, en lien avec le vocabulaire employé pour se l'approprier et avec le symbolisme qui y est associé, s'avère incontournable afin de mieux cerner ses composantes, ses différents sens et ses diverses applications. Un examen des recherches menées sur l'analyse des manuels scolaires de mathématiques nous permettra, en outre, de préciser des critères et des indicateurs afin de dresser un portrait des façons d'aborder, à travers les années du primaire et du secondaire, le concept de notation exponentielle dans les manuels scolaires répertoriés, approuvés par le MELS.

DEUXIÈME CHAPITRE
CADRE DE RÉFÉRENCE

Comme nous l'avons soutenu dans la problématique, il apparait pertinent de nous préoccuper de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, puisque celle-ci occupe une place importante dans le curriculum mathématique scolaire des élèves québécois tant au primaire qu'au secondaire en servant, entre autres, de soutien à l'apprentissage du langage algébrique (Gouvernement du Québec, 2009). En outre, le peu d'études répertoriées sur le sujet invite à s'y intéresser afin d'en savoir davantage sur son enseignement-apprentissage. Par ailleurs, deux préoccupations ressortent des travaux abordés dans le chapitre précédent, à savoir : 1) les difficultés persistantes rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage de la notation exponentielle (Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter, 2013; Mullet et Cheminat, 1995; Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades, 2007 ; Sastre et Mullet, 1998; Weber, 2002) et 2) l'importance de s'intéresser aux manuels scolaires puisqu'ils sont les principaux outils utilisés par les enseignantes et les enseignants (Lebrun, 2006; Lenoir, Roy, Rey et Lebrun, 2001; Spallanzani, Biron, Larose, Lebrun, Lenoir, Masselter et Roy, 2001). Ainsi, une meilleure connaissance de la nature des aspects abordés dans les manuels scolaires, et ce, à la lumière des difficultés recensées, pourrait contribuer à guider les interventions de l'enseignante ou de l'enseignant dans l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle.

Le présent chapitre traite, d'entrée de jeu, de travaux qui permettent d'approfondir la compréhension des difficultés d'apprentissage associées à la compréhension de la notation exponentielle, ceci dans le but de cerner les aspects particuliers qui semblent achopper dans l'apprentissage du concept et pour lesquels il faudrait porter attention dans l'analyse des manuels scolaires. Nous regarderons ensuite comment le traitement des mathématiques en tant que langage peut éclairer notre compréhension du vocabulaire et du symbolisme employés lors de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Nous avons vu, au chapitre précédent, la place qu'occupent ces aspects dans le programme et l'approfondissement de ceux-ci permettra une lecture plus fine et exhaustive des manuels scolaires. Finalement, quelques modèles utilisés dans le cadre de travaux de recherche portant sur les manuels scolaires de mathématiques, ainsi qu'un document ministériel ont rendu possible l'élaboration d'éléments ou de critères généraux d'analyse qui ont été retenus dans la construction de notre propre instrument de collecte de données et d'analyse.

1. DIFFICULTÉS LIÉES À L'APPRENTISSAGE DE LA NOTATION EXPONENTIELLE

Dans le chapitre précédent, nous avons pu constater que les études portant sur l'apprentissage de la notation exponentielle se sont plus particulièrement penchées sur les difficultés qu'éprouvent les élèves dans leur interprétation de celle-ci. Rappelons que, selon ces études, les difficultés portent plus particulièrement sur 1) des estimations qui sont majoritairement de type additif d'expressions exponentielles par des élèves alors qu'une interprétation multiplicative ou idéalement exponentielle est attendue (Mullet et Cheminat, 1995; Sastre et Mullet, 1998); 2) une difficulté à saisir les différents sens des expressions exponentielles (opération, structure mathématique, fonction) selon les types de nombres qui les constituent (Weber, 2002); 3) une difficulté à distinguer l'utilisation procédurale (a^3) de l'utilisation conceptuelle ($a^{\frac{1}{2}}$) de la notation exponentielle (Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades, 2007) et 4) une difficulté à saisir les nuances en lien avec le vocabulaire et le symbolisme utilisé dans l'apprentissage de la notation exponentielle (Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter, 2013). Dans la perspective d'une recherche portant sur la notation exponentielle comme contenu des manuels scolaires, ce sont les deux conjectures de cette dernière étude (celle liée au vocabulaire et celle entourant le symbolisme) qui nous semblent les plus pertinentes à retenir et à approfondir. En effet, les quatre autres études sont plutôt en lien avec la compréhension des élèves et celle-ci ne sera pas traitée ni accessible dans notre cas, puisque nous nous intéressons à l'étude d'un contenu mathématique. Examinons donc comment le vocabulaire et le symbolisme peuvent concourir à l'analyse des manuels scolaires.

1.1 Conjecture liée au vocabulaire

La première conjecture proposée par Cangelosi et ses collaborateurs (2013) porte sur le vocabulaire employé lors de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Plus particulièrement, l'utilisation de l'expression « opposé de a » pour parler de *–a*, au lieu de l'expression « inverse additif de a » introduirait, selon eux, une certaine confusion dans le rôle joué par cette notion mathématique et aurait des conséquences néfastes dans l'interprétation d'expressions exponentielles du type x^{-a}. En effet, cette expression contient un inverse additif en position exposant qui crée en réalité un inverse multiplicatif de l'expression exponentielle exprimée, puisque $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$. Ainsi, toujours selon Cangelosi (*Ibid.*), une mauvaise compréhension de ce qu'est un inverse, à cause entre autres de l'utilisation du terme « opposé » pour parler de l'inverse additif, entrainerait une difficulté supplémentaire dans l'interprétation de la notation exponentielle lorsque nous étendons son utilisation aux exposants négatifs.

Cette première conjecture aborde une difficulté importante dans l'apprentissage de la notation exponentielle, soit celle des problèmes possibles posés par l'utilisation des mots « opposé » et « inverse ». Mais qu'en est-il des autres termes utilisés dans l'enseignement de ce concept? Comment définit-on les mots spécifiques à cette notation comme exposant, base, puissance, exponentiation? Si plusieurs définitions existent, lesquelles sont utilisées? Sur quels critères les enseignantes et les enseignants pourraient-ils s'appuyer pour faire leur choix? Comment ces mots sont-ils réinvestis lors de la présentation d'exemples pour illustrer le fonctionnement de la notation et des propriétés qui en découlent? Quels sont les exemples types qui sont soumis aux élèves? Est-ce que des définitions du type « [p]our une base a et un exposant entier $n > 1$, l'exposant *n* indique le nombre de fois que la base a est multipliée par elle-même » (Dufour, 2011, p. 168) sont monnaie courante dans les manuels scolaires, alors qu'elle contient une erreur conceptuelle selon Baruk (1995) en introduisant un facteur de trop dans le calcul de la puissance? Est-ce que d'autres imprécisions de ce genre peuvent entrainer des erreurs de compréhension chez les élèves? Comment le manuel scolaire exploite-t-il les définitions relatives à la notation exponentielle? À la lumière de ces nombreuses questions, il y a donc lieu, selon nous, d'approfondir la réflexion en ce qui a trait au vocabulaire et au sens des mots dans l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle.

1.2 Conjecture liée au symbolisme

La deuxième conjecture identifiée par Cangelosi et ses collaborateurs (2013) porte sur le symbolisme, et ce, toujours en lien avec le concept de nombre négatif. Lors de leur étude, les auteurs ont découvert que plusieurs élèves avaient des difficultés majeures à différencier les expressions de type $-9^{\frac{3}{2}}$ et $(-9)^{\frac{3}{2}}$, l'erreur la plus fréquente étant d'interpréter celles-ci comme étant équivalentes. Les auteurs soulignent d'ailleurs que « [the students] saw –9 as a signed number in which the negative sign was "stuck" to the base. That is, students view –9 as a single, inseparable object, that was then raised to the $\frac{3}{2}$ power. »[5] (p. 76) Quoique cette difficulté de compréhension ne se limite pas à l'étude de la notation exponentielle, elle a évidemment un impact important lors de l'interprétation d'expressions exponentielles de base négative.

Tout comme pour la première conjecture, il y aurait lieu d'étudier cette difficulté dans une perspective plus large. Il n'y a pas seulement le symbolisme associé aux nombres négatifs qui semble introduire des difficultés dans l'interprétation d'expressions exponentielles; tout ce qui a trait à l'écriture de celles-ci devrait être considéré (Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades, 2007). Qu'en est-il lorsque l'exposant est une fraction, par exemple? Comment les élèves font-ils le lien entre la notation exponentielle et la notation utilisant les radicaux? Jusqu'à quel point l'écriture et la transcription d'expressions exponentielles avec l'aide des symboles adéquats sont-elles des obstacles à l'apprentissage? Encore ici, le potentiel de réflexion est immense et mérite que nous nous y attardions.

[5] Les élèves voient -9 comme un « nombre-signe » dans lequel le signe négatif est perçu comme étant fusionné avec la base. C'est donc dire que les élèves perçoivent -9 comme un objet singulier, une entité inséparable qui sera par la suite élevé à l'exposant $\frac{3}{2}$ (trad. libre).

2. MATHÉMATIQUES ET LANGAGE

Plusieurs auteurs, dont Pimm (1987), Esty (1992), Lakatos (1984) et Ouvrier-Buffet (2006), se sont intéressés aux questions relatives au langage dans l'apprentissage, en général, et pour les mathématiques, en particulier. Ainsi, pour Esty (1992),

> Mathematical results are expressed in a foreign language. That language, like other languages, has its own grammar, syntax, vocabulary, word order, synonyms, negations, conventions, abbreviations, sentence structure, and paragraph structure. [...] Mathematics has certain features unparalleled in other languages, such as *representation* (for example, theorems expressed with ''x'' also apply to ''b'' and to ''2x – 5'').[6] (p. 31)

Dans les sections qui suivent, nous nous intéressons exclusivement aux travaux qui s'inscrivent dans une perspective mathématique, tant sur le plan de son apprentissage que de son enseignement. Ainsi, tout ce qui est relatif à la didactique du français ou encore aux difficultés d'apprentissage de la langue ne fait pas l'objet du présent cadre de référence ni de la présente étude.

2.1 Langage comme outil de compréhension des mathématiques : vocabulaire et définition

Henri Poincaré, célèbre mathématicien du tournant du 20e siècle, réfléchissait déjà, dans son ouvrage *Science et méthodes* (1908), au rôle des définitions :

> Qu'est-ce qu'une bonne définition? Pour le philosophe, ou pour le savant, c'est une définition qui s'applique à tous les objets définis et ne s'applique qu'à eux; c'est celle qui satisfait aux règles de la logique. Mais dans l'enseignement, ce n'est pas cela; une bonne définition, c'est celle qui est comprise par les élèves. (p. 123)

[6] Les résultats mathématiques s'expriment dans un langage particulier. Ce langage, comme les autres langages, possède une grammaire, une syntaxe, un vocabulaire, un ordre de mots, des synonymes, des négations, des conventions, des abréviations, des structures de phrase et des structures de paragraphes qui lui sont propres. […] Les mathématiques possèdent également des particularités de langage qui n'existent pas dans les autres langages, comme la *représentation* (par exemple, les théorèmes utilisant ''x '' sont aussi valables avec ''b'' ou ''2x – 5'' (trad. libre).

Voilà certes une affirmation qui semble rendre pertinente une réflexion sur l'utilisation du vocabulaire et des définitions dans les explications des manuels scolaires pour soutenir la compréhension des élèves. Avant d'arriver à cela, il est toutefois important de réfléchir aux diverses fonctions que la recherche attribue aux définitions et au vocabulaire dans l'apprentissage des mathématiques.

Comme le soulignent Vinner (2002), Ouvrier-Buffet (2006) et Kahane (2000), pour les mathématiciennes et les mathématiciens les définitions servent souvent de points d'appui à l'élaboration de concept ou à la démonstration de théorèmes. Elles présentent ainsi un aspect fini et immuable qui ne traduit pas du tout les efforts qui ont été nécessaires à sa constitution actuelle. Paradoxalement, elles sont à la fois des points de départ de raisonnements mathématiques et des aboutissements de ces mêmes raisonnements, lorsqu'il devient nécessaire de clarifier des concepts. Baruk (1995), quant à elle, nous rappelle que la définition devrait donner accès à « la connaissance ou [à] la possibilité de reconnaissance de ce qui est défini, sans confusion possible avec autre chose » (p. 306). Il est aussi intéressant de noter que l'acte même de définir ce qu'est une définition s'avère un exercice complexe, voire périlleux, comme en témoignent les 35 subdivisions de la définition du terme définition de Legendre (2005) dans son *Dictionnaire actuel de l'éducation*.

Plusieurs perspectives s'offrent à nous dans l'étude du rôle des définitions dans l'apprentissage des mathématiques. Les sous-sections suivantes présentent les grandes lignes de recherches s'étant intéressées à ce sujet et qui ont été à même de nous fournir des critères d'observation pertinents dans notre grille d'analyse.

2.1.1 Travaux de Lakatos (1984)

Dans le cadre de notre étude, deux aspects des travaux de Lakatos (1984) semblent plus pertinents : les *zero-definitions* et les *proof-generated definitions* (que nous traduirons librement par les expressions zéro-définitions et définitions générées par la preuve).

Commençons par expliquer ce qu'est une zéro-définition selon cet auteur. Celle-ci peut être définie comme étant

> une définition qui peut être adoptée, à titre d'essai, à l'origine du processus de la recherche. […] Lakatos souligne que la fonction première de la preuve est de déterminer le domaine de validité de la conjecture, et donc de révéler le véritable concept et sa définition. Tout au plus la zéro-définition peut-elle être trop large et d'aucune utilité, ou trop étroite et constituer un obstacle occultant certaines parties du véritable domaine de validité. (note des traducteurs, Lakatos, 1984, p. 175)

Ce point de vue s'applique bien à l'idée de la définition de la notation exponentielle qui affirme qu'un exposant indique le nombre de fois que le facteur est multiplié dans une suite multiplicative de même base. Celle-ci limite bien évidemment le domaine d'application aux exposants naturels, ce qui en diminue grandement le sens, mais il s'agit d'une première étape essentielle dans le processus de construction de ce qu'est la notation exponentielle. L'histoire du développement de la notation exponentielle (Cajori, 1928) nous permet effectivement de le constater. Ouvrier-Buffet (2006) explique également que « [l]a zéro-définition peut être amenée à disparaître ou à évoluer vers une *proof-generated definition*. Elle possède une fonction de dénomination. » (p. 90)

Les définitions générées par la preuve, quant à elles, « ne sont ni des "spécifications" ni des "généralisations" des concepts naïfs. L'impact des preuves et réfutations sur les concepts naïfs est beaucoup plus révolutionnaire que cela » (Lakatos, 1984, p. 114). Lakatos (*Ibid.*) précise ainsi son explication :

> Je n'appellerais certainement pas une baleine, poisson, ni une radio, boîte à bruit (comme peuvent le faire les aborigènes) et que pour un physicien le verre évoque un liquide, ne me dérange pas. À vrai dire le progrès remplace une *classification naïve* par une *classification théorique,* c'est-à-dire une classification produit d'une théorie (née d'une preuve, ou si vous voulez d'une explication). Les conjectures comme les concepts doivent passer par le purgatoire des preuves et réfutations. *Les conjectures et les concepts naïfs sont remplacés par des conjectures améliorées (théorèmes) et des concepts (nés de preuves ou théoriques) développés dans la méthode des preuves et réfutations.*

> Et de même que les idées et les concepts théoriques supplantent les idées et les concepts naïfs, le langage théorique supplante le langage naïf. (p. 116)

Il ressort de ces études un intérêt à examiner dans quelle mesure les définitions utilisées dans les manuels scolaires sont de nature zéro-définition ou de nature définition générée par la preuve, et ce, selon les contextes, ceci afin de mieux saisir dans quel rapport aux définitions est placé l'élève.

2.1.2 Travaux de Wilson (1990)

L'étude de Wilson (1990) cherche à décrire l'utilisation et la compréhension par les élèves des définitions, des exemples et des contrexemples. L'auteure précise tout d'abord ce qu'elle entend par définition, exemple et contrexemple. La définition donne une description d'un concept mathématique. Les exemples, quant à eux, illustrent la définition et servent à démontrer l'existence de certains cas spéciaux. Finalement, les contrexemples montrent les contextes dans lesquels les conditions de la définition ne sont pas respectées et procurent de cette manière un contraste devant servir à préciser le domaine d'application de la définition. Ensemble, ces trois éléments aident les élèves à construire des concepts mathématiques.

Chacun de ces éléments pris individuellement semble relativement simple. Cependant, les observations de Wilson (*Ibid.*) tendent à montrer que c'est lorsqu'ils sont agencés les uns avec les autres que la situation peut devenir complexe et entrainer des difficultés de compréhension ou des mauvaises interprétations chez les élèves. Ceux-ci ne comprennent pas toujours les définitions dans toute leur profondeur. Les élèves ne voient pas suffisamment les liens qui unissent les exemples et les contrexemples pour illustrer adéquatement les caractéristiques fondamentales des définitions. Ils vont en général être en mesure de reconnaitre les définitions associées à un certain concept, mais seront souvent incapables de donner par eux-mêmes les conditions nécessaires et suffisantes pour définir quelque chose. L'auteure en donne d'ailleurs un exemple complet à partir du concept de carré. Elle fait aussi remarquer que parfois il semble y avoir des incohérences importantes entre les définitions officiellement acceptées et celles construites par les élèves. À ce sujet, elle (1990) présente trois catégories pour répertorier les difficultés des élèves. Il s'agit de l'inconsistance, des différentes natures des définitions et des caractéristiques des exemples.

L'élève fait preuve d'inconsistance, selon Wilson (1990), lorsqu'il introduit des nuances incohérentes entre deux manières différentes de définir un même concept, à l'aide de deux modèles de représentation. Par exemple, prenons un élève qui définit adéquatement en mots les conditions minimales pour traiter d'un carré, parlant entre autres des quatre côtés qui doivent être isométriques (première manière de « définir »), mais qui dessine un rectangle pour illustrer celui-ci (deuxième manière de « définir », à l'aide d'un modèle de représentation graphique au lieu de l'utilisation de mots). Même si la définition en mots semble démontrer une compréhension adéquate du concept par l'élève, la représentation graphique légèrement inexacte entraine un doute sur sa compréhension réelle.

Pour ce qui est de la nature des définitions, il est à noter qu'elle peut être multiple et de plusieurs niveaux (*Ibid.*). Parfois, elle sert simplement à désigner en donnant un nom pour remplacer un groupe de mots. En d'autres occasions, elle sert à illustrer l'origine du concept étudié ou encore à en comprendre les éléments fondamentaux. Il est également possible qu'une définition aille encore plus loin, en décrivant de manière pointue les propriétés d'un concept et même, les relations entre ces propriétés. Pour l'élève, il n'est pas toujours facile de savoir à quel niveau se situe la définition employée dans un contexte donné. Il peut ainsi se limiter à une définition que Lakatos (1984) qualifierait de zéro-définition, comme dire que l'exposant d'une expression exponentielle indique le nombre de facteurs à multiplier, alors qu'il essaie d'interpréter une expression de type $16^{\frac{1}{2}}$. Si l'élève demeure à ce niveau, il lui sera probablement très difficile d'arriver à comprendre le sens de cette expression.

Les exemples qui, rappelons-le, servent à illustrer les définitions ont souvent des caractéristiques particulières qui ne doivent pas être prises en considération pour la définition étudiée. Il arrive parfois que l'élève les « ajoute » inconsciemment à sa compréhension de la définition donnée, ce qui entraine une certaine confusion sur le plan du concept. Un exemple pour illustrer cet effet est fourni par Wilson (1990). Lorsqu'un rectangle est dessiné à titre d'exemple au tableau par l'enseignante ou l'enseignant, il possède des dimensions particulières, une certaine orientation, un certain sens, mais ces caractéristiques ne sont pas propres à tous les rectangles; elles ne doivent donc pas être considérées par l'élève dans sa construction conceptuelle de ce qu'est un rectangle. Un élève pourrait malencontreusement penser que pour être un rectangle, celui-ci doit être deux fois plus long que large ou encore que la longueur est toujours horizontale et la largeur toujours verticale, car tous les exemples avec lesquels il a été mis en contact possédaient ces caractéristiques.

L'ensemble de ces observations nous amène à réfléchir sur les différentes relations existant entre les définitions, les exemples et les contrexemples dans les manuels scolaires. Que comportent les définitions, les exemples et les contrexemples dans les manuels scolaires? Sont-ils justes, complets, cohérents, constants, pertinents?

2.1.3 Travaux d'Ouvrier-Buffet (2006)

Dans son livre, Ouvrier-Buffet (2006) présente tout d'abord, dans une chronologie historique, les différentes postures adoptées par les philosophes et les mathématiciens sur les rôles et les types de définitions. La figure 1 synthétise l'ensemble des observations et interprétations qu'elle a réalisées sur le sujet.

	Types de définition		La définition est/ donne	Processus définissant	Fonction
Aristote	*Nominale*		Signification d'un mot	*Par genre et différences spécifiques* – Dénomination. – Recherche de l'existence. – Dimensions langagière et logique l'essence	Communiquer
	Par la cause		Discours montrant pourquoi la chose est (existe)		
	Sans cause		Conclusion de la démonstration de		
Leibniz	*Nominale*		Connaissance en extension (existence non questionnée)	*Art d'inventer*	Reconnaître un concept
	Réelle		Caractérisation du concept et existence	– Dénomination. – Recherche de l'existence. – Axiomatique. – Caractérisation d'un concept	
		causale	Existence établie par l'expérience (physique)		
		essentielle (parfaite)	Existence, ascendance jusqu'aux éléments premiers (mathématiques)		
Kant	*Analytique (tautologie selon Wittgenstein)*		Explication, exposition d'un concept pré-existant ; pas de construction du concept	*Exposition d'un concept* – Aspect spéculatif (en particulier pour l'existence). – Définition placée au commencement d'un exposé et ne peut être fausse quand elle est synthétique.	Reconnaître un concept, donner d'un concept, le construire
	Synthétique (typiquement mathématique)		Construction d'un concept (la définition forme le concept de toute pièce)		
Durkheim	*Par extension*		Énumération	*Par genre et différences spécifiques* – Énumération. – Construction de l'objet. – Dimensions langagière et logique (une définition doit être « claire, courte, adéquate »).	Caractériser un concept, construire un concept, être un outil dans une démonstration
	Par génération		Construction de l'objet donnée par la définition		
	Par compréhension		Condition nécessaire et suffisante		

Figure 1 – Synthèse des différents types de définitions selon Ouvrier-Buffet (2006, p. 66)

L'auteure rapporte aussi de manière succincte quelques études s'étant intéressées aux conceptions des élèves et des enseignantes et enseignants sur les définitions en mathématiques, entre autres, par rapport à ce qui est ou non une définition adéquate d'un carré. Ainsi, pour les élèves, des conceptions logiques (équivalence, non-redondance, reposant sur des éléments plus simples), cognitives (possibilité d'associer la nouvelle définition à d'autres déjà acquises) et langagières (la définition doit être simple, courte, claire, élégante et familière) sont ressorties. Pour les élèves, les définitions doivent également relever de la perception. Par exemple, une phrase expliquant que le carré est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur, perpendiculaires et se coupent en leur milieu ne sera pas considérée comme une définition, mais plutôt comme une propriété.

Il est à noter que selon la recension effectuée par Ouvrier-Buffet (2006), les enseignantes et les enseignants partagent sensiblement les mêmes conceptions par rapport aux définitions que celles trouvées chez les élèves. Deux spécificités s'ajoutent toutefois pour eux. La définition procédurale ne fait pas l'unanimité auprès des enseignantes et des enseignants; ils remarquent qu'elle est absente des livres universitaires, mais expliquent également qu'elle a une certaine raison d'être d'un point de vue pédagogique, puisqu'elle peut aider les élèves à se construire leur propre image mentale (en parlant du concept de l'aire du carré, par exemple). Le deuxième aspect souligné par l'auteure indique que les enseignantes et les enseignants semblent avoir un fort rapport institutionnel à la définition. Ainsi, lorsqu'il leur est demandé de définir des termes mathématiques, ce sont souvent les définitions proposées par les programmes et les manuels scolaires qui sont énoncées.

Les différents rôles, types et conceptions des définitions relevés par Ouvrier-Buffet (2006) rendent, selon nous, encore plus pertinent le fait de s'intéresser à la présentation des définitions de la notation exponentielle dans les manuels scolaires. En outre, selon ses observations, les enseignantes et les enseignants à qui on demandait de fournir les définitions énonçaient en général celles que l'on retrouve dans les documents institutionnels. Certains constats font écho aux études sur l'utilisation des manuels scolaires par les enseignantes et les enseignants recensées dans la problématique, c'est-à-dire qu'ils auraient une certaine tendance à utiliser ces outils didactiques comme ouvrages de référence dans la préparation de leurs cours.

2.1.4 Travaux de Pierce et Fontaine (2009)

Dans leur étude, Pierce et Fontaine (2009) ont répertorié, dans les examens officiels de troisième année de mathématiques des écoles de l'État du Massachusetts, les mots de vocabulaire technique utilisés (*technical vocabulary words*), c'est-à-dire ceux qui ont une définition mathématique précise et qui peuvent par le fait même être expliqués explicitement par les enseignantes et les enseignants. Elles ont aussi identifié des mots de vocabulaire qui sont utilisés dans le langage courant et pour lesquels les élèves ont habituellement construit une certaine signification, mais qui peuvent être présentés dans des contextes mathématiques et se voir attribuer un sens qui peut être différent de celui-ci des contextes courants de la vie de tous les jours (*subtechnical vocabulary words*). Alors que les enseignantes et les enseignants vont porter une attention particulière à l'enseignement des mots dits « techniques », l'importance de discuter avec les élèves des mots de vocabulaire plus courants, mais dans un contexte mathématique, semble moins présente. Les auteures proposent quelques pistes pour tenter de mettre un peu plus d'importance sur l'enseignement explicite du vocabulaire pouvant posséder un double sens (courant vs mathématique).

Dans le contexte de la notation exponentielle, les mots base, puissance et exposant semblent correspondre à du vocabulaire ayant un sens courant et un sens mathématique. Le mot base peut même avoir plusieurs significations mathématiques selon le domaine mathématique traité : nombre, expression exponentielle, polygones, solides, etc. Il serait donc intéressant de voir dans quelle mesure les auteurs tiennent compte de ces particularités dans l'élaboration de manuels scolaires. Dans le même ordre d'idées, Pimm (1987) soutient que le « [m]athematical discourse is notorious for involving both specialized terms and different meanings attached to everyday words. [...] If the hearer is unaware of this variant usage, resulting in the everyday meaning being carried over to the mathematical setting, a number of understandable difficulties may ensue. »[7] (p. 8)

---

[7] Le discours mathématique est reconnu pour utiliser du vocabulaire spécialisé, ainsi que du vocabulaire courant mais avec un sens mathématique. […] Si l'apprenant ne connait pas ces spécificités, il peut utiliser le

Il apparait donc pertinent, voire essentiel, d'observer le vocabulaire utilisé dans les manuels scolaires et comment les auteurs tiennent compte du caractère polysémique de plusieurs termes utilisés lors de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle.

2.1.5 Travaux de Vinner (1976, 1977, 2002)

Déjà dans les années 1970, Vinner (1976, 1977) s'est intéressé à la place des définitions dans l'apprentissage des mathématiques, entre autres, en lien avec la notation exponentielle. Il a demandé à des étudiantes et à des étudiants universitaires en mathématiques de déterminer la nature de certaines affirmations, comme $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$. Les participantes et les participants à l'étude devaient dire si selon eux cette affirmation était un théorème, une loi, un fait en lien avec les nombres, une définition ou un axiome. Ses résultats tendent à montrer une certaine confusion entre ces termes, d'où l'importance d'utiliser une approche d'enseignement plus explicite pour aider les élèves du primaire et du secondaire à mieux construire leur compréhension de la structure des mathématiques et du rôle des différents éléments (définitions, axiomes, postulats, théorèmes, etc.) qui les composent.

Dans un écrit ultérieur, Vinner (2002) commence son propos en soutenant que « [d]efinition creates a serious problem in mathematics learning. It represents, perhaps, more than anything else the conflict between the structure of mathematics, as conceived by professional mathematicians, and the cognitive processes of concept acquisitions. »[8] (p. 65) Tout comme Pierce et Fontaine (2009), il fait lui aussi référence aux difficultés d'appropriation du vocabulaire dans les définitions en lien avec un usage courant et/ou un usage technique. L'auteur présente finalement cinq affirmations en lien avec les définitions

---

sens courant du mot au lieu de son sens mathématique; de bien compréhensibles difficultés peuvent ainsi en résulter (trad. libre).

[8] Les définitions causent un problème important dans l'apprentissage des mathématiques. Elles représentent peut-être le mieux le conflit entre la structure des mathématiques, telle que conçue par les mathématiciennes et les mathématiciens, et les processus cognitifs d'acquisition des connaissances (trad. libre).

qui servent, selon lui, à la conception des manuels scolaires et à l'enseignement des mathématiques en général, que l'on pourrait résumer ainsi :

- Les concepts mathématiques sont généralement appris par l'acquisition du sens accordé aux définitions.
- Les définitions seront utilisées pour résoudre des problèmes ou pour prouver des théorèmes si c'est nécessaire d'un point de vue mathématique.
- Les définitions doivent établir les conditions minimales d'un concept mathématique.
- Une définition « élégante » d'un point de vue mathématique sera préférable à une qui l'est moins.
- Les définitions sont arbitraires et conventionnées.

Dans la perspective retenue pour notre étude, les conceptions relatives aux définitions relevées par Vinner (2002) permettent d'éclairer le statut des définitions dans les manuels scolaires, en plus de guider sur la façon de les aborder auprès des élèves.

2.1.6 En résumé

Plusieurs éléments ressortent de notre recension de la documentation scientifique concernant l'utilisation des définitions et du vocabulaire. Ces éléments ont été repris dans l'élaboration de la grille d'analyse qui a permis d'étudier les manuels scolaires en lien avec la notation exponentielle. Le tableau 2 les reprend de manière succincte.

Tableau 2
Éléments centraux concernant les définitions et le vocabulaire en mathématiques

Auteurs	**Éléments à retenir**
Lakatos (1984)	• Concepts de zéro-définition et de définition générée par la preuve
Wilson (1990)	• Définitions, exemples et contrexemples (pertinence et cohérence dans leur organisation et leur conception)
Ouvrier-Buffet (2006)	• Conceptions des auteurs sur l'utilisation des définitions • Pertinence et cohérence dans leur utilisation
Pierce et Fontaine (2009)	• Utilisation du vocabulaire technique et du vocabulaire courant (pertinence et cohérence)
Vinner (1976, 1977, 2002)	• Utilisation du vocabulaire technique et du vocabulaire courant et exploration des cinq affirmations en lien avec l'utilisation des définitions dans la conception des manuels scolaires

Maintenant que nous avons tracé un portrait de ce qui semble intéressant et pertinent à considérer du point de vue des définitions et du vocabulaire mathématiques dans cette étude, intéressons-nous au rôle du symbolisme dans son apprentissage par les élèves.

2.2 Mathématiques comme un langage : le symbolisme

Selon Courteau (2010), les symboles mathématiques sont porteurs d'idées. En utilisant des notations mathématiques adéquates, des idées complexes et des processus mentaux de haut niveau peuvent être condensés. Ces idées peuvent ainsi être manipulées plus aisément, ce qui offre un potentiel immense de création de nouvelles idées mathématiques (Harel et Kaput, 2002). Les symboles aident les mathématiciennes et les mathématiciens à réfléchir et à élaborer des théories. Whitehead (1911) notait à ce sujet que

« [b]y relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems »[9] (dans Cajori, 1928, p. 332). Il ajoute même que

> [m]athematics is often considered a difficult and mysterious science, because of the numerous symbols which it employs. Of course, nothing is more incomprehensive than a symbolism which we do not understand. Also a symbolism, which we only partially understand and are unaccustomed to use, is difficult to follow…By the aid of symbolism, we can make transitions in reasoning almost mechanically by the eye, which otherwise would call into play the higher faculties of the brain. It is a profoundly erroneous truism […] that we should cultivate the habit of thinking of what we are doing. The precise opposite is the case. Civilization advances by extending the number of important operations which we can perform without thinking about them.[10] (p. 333)

À partir de ces constats, il semble donc pertinent de s'intéresser aux différentes facettes du symbolisme en mathématiques. Mais tout d'abord, qu'est-ce que le symbolisme en mathématiques et à quoi sert-il?

2.2.1 Fonctions du symbolisme

Pimm (1987) énonce cinq grandes fonctions à la symbolisation : 1) communiquer (les symboles donnent accès aux pensées et aux idées des autres); 2) enregistrer et conserver les connaissances; 3) montrer la structure d'un concept (les relations entre les symboles rendant visibles les relations entre les idées); 4) permettre une manipulation rapide et efficace (ce qui libère une partie de l'attention qui peut ainsi être utilisée pour réfléchir à autre chose) et, finalement, 5) rendre la réflexion possible (en rendant les idées

---

[9] En libérant le cerveau d'un travail non nécessaire, une bonne notation lui permet de se concentrer sur des problèmes plus complexes (trad. libre).

[10] Les mathématiques sont souvent considérées comme une science difficile et mystérieuse, à cause des nombreux symboles qu'elles emploient. Évidemment, rien n'est plus incompréhensible qu'un symbole que nous ne comprenons pas. Un symbolisme que nous ne comprenons que partiellement est difficile à utiliser et à suivre... à l'aide du symbolisme, il est plus facile de raisonner mécaniquement, ce qui sans lui nécessiterait l'utilisation de grandes facultés cérébrales. C'est une idée profondément erronée […] de croire que nous devrions cultiver l'habitude de penser à ce que nous faisons. C'est précisément le contraire qui est vrai. La civilisation progresse en élargissant le nombre d'opérations importantes que nous pouvons réaliser sans y penser (trad. libre).

« concrètes », stables, compactes et permanentes, comme des objets pouvant être étudiés pour eux-mêmes).

Il faut par contre être prudent lorsque vient le temps de réfléchir au rôle du symbole versus le concept qu'il représente. Comme le souligne Pimm (1987),

> [i]t has often been remarked that it is important to be able to distinguish at will between the symbol and the concept, between the signifier (the symbol) and the signified (the referent). The symbol is not the referent, although it is normally functioning best when it can substitute strongly for it. In mathematics, one major use of symbolization is precisely to allow manipulation to move faster and more seamlessly by blurring the distinction between symbol and object. However, both the signifier and the signified have their separate attributes.[11] (p. 139)

Une des difficultés identifiées ici par l'auteur en lien avec cette citation est que, pour l'élève, il semble que les symboles soient les objets mathématiques à apprendre. Ainsi, la flexibilité accordée à une experte ou à un expert en mathématiques à un symbolisme adéquat risque d'être un obstacle à l'apprentissage pour le novice, puisqu'une certaine confusion s'installe entre le symbole et le concept auquel celui-ci fait référence (*Ibid.*).

Nous en savons maintenant un peu plus sur les rôles du symbolisme dans la construction des mathématiques. Mais qu'en est-il des symboles eux-mêmes? Sont-ils tous de même nature? Toute écriture est symbolique, qu'elle soit mathématique ou autre. Qu'est-ce qui distingue donc le symbolisme mathématique des autres symbolismes? C'est ce à quoi tente de répondre la section suivante.

[11] Il a souvent été souligné qu'il est important de distinguer le symbole et le concept, c'est-à-dire le signifiant (le symbole) et le signifié (le référent). Le symbole n'est pas le référent, même s'il fonctionne au mieux lorsqu'il peut fortement s'y substituer. En mathématiques, l'une des utilisations principales de la symbolisation est précisément de pouvoir manipuler rapidement et sans y penser des contenus mathématiques, en diminuant la distinction entre le symbole et l'objet. Cependant, le signifiant et le signifié ont chacun leurs caractéristiques propres (trad. libre).

2.2.2 Types de symboles mathématiques

Pimm (1987) classe les symboles mathématiques en quatre grandes catégories : 1) les logogrammes; 2) les pictogrammes; 3) les symboles de ponctuations et 4) les symboles alphabétiques. Expliquons brièvement ce à quoi fait référence chacune de ces catégories.

Les logogrammes sont des symboles spécifiquement inventés pour être utilisés dans des contextes mathématiques. Pensons, par exemple, aux chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ou encore aux symboles utilisés pour représenter les différentes opérations (+, -, ×, ÷). Le symbole « = » est aussi un exemple connu de logogramme mathématique.

Les pictogrammes sont des symboles stylisés, mais clairement identifiables comme étant des représentations de l'objet lui-même. Par exemple, les symboles □, ○, ▲ et ∠ sont utilisés respectivement pour représenter un carré, un cercle, un triangle et un angle. Ils servent donc principalement à éviter l'écriture complète du nom de l'objet mathématique dont il est question dans une situation donnée.

Les symboles de ponctuation fréquemment utilisés pour l'écriture de la langue ont aussi été récupérés pour illustrer certains concepts en mathématiques. L'expression a : b utilise le symbole « : » pour parler d'un taux. Notons également l'utilisation du point (.) et de la virgule (,) pour séparer la partie entière de la partie décimale, dans le premier cas dans le système impérial et dans le deuxième cas dans le système international (SI). Il est à noter que ces symboles, ayant un nom et une utilisation dans le langage commun, peuvent entrainer une certaine confusion sur le plan de la compréhension approfondie du concept mathématique. Par exemple, le nombre « 3,2 », normalement énoncé comme étant « trois et deux dixièmes », peut glisser vers une lecture littérale de « trois virgule deux » qui enlève partiellement le sens réel à attribuer à l'expression lors de son apprentissage par un novice.

Finalement, les symboles alphabétiques sont l'ensemble des lettres de l'alphabet (a, b, c…). Il est à noter qu'ils sont employés autant dans leur forme minuscule que majuscule, mais dans des contextes différents. Par exemple, « a » peut être utilisé comme représentation d'un paramètre d'une fonction dans l'expression $y = ax + b$, alors que « A » sera plutôt utilisé pour identifier le sommet d'une figure géométrique. Les lettres grecques sont aussi exploitées dans différents contextes, comme π pour représenter la valeur constante 3,1415… du rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle ou α pour identifier un angle particulier d'une figure géométrique.

Certains symboles mathématiques sont parfois utilisés exclusivement dans ce contexte, alors que d'autres sont empruntés au langage commun et se voient attribuer un autre sens, avec toutes les implications que nous pouvons imaginer sur le plan de l'apprentissage. Un symbole seul a toutefois une valeur et un sens relativement limités. Alors comment les symboles sont-ils agencés entre eux pour créer du sens?

2.2.3 Quelques principes généraux dans l'utilisation des symboles mathématiques

Comme le souligne Pimm (1987), « [mathematical ideas] often conveyed using specialized, highly condensed symbol systems (which interact and […] sometimes interfere). These systems attempt to reflect relationships among the ideas by means of relationships among the symbols. »[12] (p. 149) Non seulement faut-il comprendre la signification des symboles comme tels, mais aussi les idées et les sens qui sont engendrés lorsqu'ils sont placés en interaction. Six principes guideront l'utilisatrice et l'utilisateur des symboles mathématiques dans leur usage : 1) l'ordre; 2) la position; 3) la grandeur relative; 4) l'orientation; 5) la répétition et 6) la couleur. Dans le cas de la notation exponentielle, la position et la grandeur relative sont les deux caractéristiques les plus importantes lors de l'encodage de l'expression. Concentrons-nous sur celles-ci.

[12] Les mathématiques utilisent généralement un système de symboles spécialisés, au sens grandement condensés (qui interagissent entre eux […] et parfois même interfèrent). Ces systèmes tentent d'illustrer les relations entre les idées mathématiques en utilisant les relations entre les symboles (trad. libre).

La position, qu'elle soit absolue ou relative, permet d'utiliser les mêmes symboles pour exprimer des idées différentes. Cette caractéristique engendre des discriminations subtiles lors de l'espacement ou de la juxtaposition des symboles dans certaines expressions mathématiques (*Ibid.*). Ainsi, la position permet de différencier 42 de 4^2 (nombre naturel 42 versus expression exponentielle de base 4 et d'exposant 2), ou encore a^4 et a_4 (expression exponentielle de base « a » affectée de l'exposant 4 versus quatrième terme d'une série donnée).

Habituellement, les symboles ont une grandeur assez semblable les uns par rapport aux autres, du moins pour les caractères typographiques. Par contre, une certaine grandeur relative existe entre certains symboles. Cette caractéristique est plus particulièrement présente dans le cas des expressions exponentielles (format plus petit de l'exposant par rapport à la base) et dans les expressions avec des indices (encore ici, format plus petit de l'indice par rapport au terme auquel il est associé). Les exemples a^4 et a_4 utilisés précédemment illustrent bien cet état de fait.

Dans ces deux cas, il ne suffit donc pas de connaitre le sens à attribuer aux symboles pris individuellement. Il faut être en mesure, pour décoder adéquatement l'information, de savoir distinguer les informations supplémentaires apportées par une légère modification de la position des symboles entre eux et de leur grandeur relative.

Si le recours au symbolisme est indispensable en mathématiques, il convient de souligner que, pour s'approprier ce symbolisme et en décoder le sens, il faut un contexte qui le favorise et qui en donne sens. Les travaux de Bessot et Eberhard (1982), bien que dans un contexte différent d'assemblage de cubes, mettent notamment en évidence l'importance de favoriser des situations de communication qui donnent l'occasion aux élèves de coder une situation (représenter un assemblage de cubes) afin de permettre à d'autres élèves de saisir ou de décoder cette situation (réaliser l'assemblage de cubes). La question du décodage ne pourrait donc pas être examinée sans prendre en compte ce qui mène au codage des situations à traiter. Dans le contexte de la numération, qui est plus près de la notation exponentielle, Biron (2012) souligne que les activités de codage sont « des activités qui amènent les élèves à relier une activité concrète […] à une activité semi-concrète […] ou à une activité abstraite » (p. 49), alors que le décodage emprunte le sens contraire. Roegiers (1998*a*), quant à lui, explique que nos nombres s'écrivent à partir d'un code chiffré qui s'appuie sur les principes de groupement et de position. Pour être capable d'écrire un nombre donné en chiffres (codage) ou encore pour être capable de lire un nombre donné écrit en chiffres (décodage), il faut absolument connaitre le fonctionnement du code. Finalement, Van Hout (1994) parle de trois types de transformation lors de l'utilisation du code numérique : 1) l'encodage (transformation de la parole en écriture); 2) le décodage (transformation de l'écriture en parole) et 3) le transcodage (transformation entre deux systèmes distincts). Dans le cas de la notation exponentielle avec des exposants naturels, nous pouvons qualifier de codage le passage de l'écriture d'une suite multiplicative de facteurs (p. ex., 2x2x2) à celle en expression exponentielle (p. ex., 2^3), en tenant pour acquis que la première écriture est déjà connue lors de l'apprentissage de la deuxième. Le chemin contraire peut être interprété comme le décodage du symbolisme associé à la notation exponentielle (passage de l'écriture 2^3 à l'écriture 2x2x2).

2.2.4 En résumé

Les écrits de Pimm (1987) ont permis de constater que plusieurs aspects sont à prendre en compte dans l'usage du symbolisme dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Les travaux de Bessot et Eberhard (1982), de Biron (2012) et de Roegiers (1998*a*), bien que réalisés pour des concepts différents, rappellent que pour s'approprier un symbolisme, il faut être en mesure de coder et de décoder les situations qui s'y rattachent. Le tableau 3 reprend différentes perspectives importantes à tenir compte dans l'analyse de manuels scolaires.

Tableau 3
Aspects importants à considérer par rapport au symbolisme en mathématiques (Bessot et Eberhard, 1982; Biron, 2012; Pimm, 1987; Roegiers, 1998*a*)

Thèmes	Aspects importants à considérer
Fonctions des symboles mathématiques	Cinq fonctions : a) communiquer; b) enregistrer et conserver les connaissances; c) montrer la structure d'un concept; d) permettre une manipulation rapide et efficace; e) rendre la réflexion possible. Attention à la confusion possible entre signifiant et signifié.
Types de symboles mathématiques	a) les logogrammes (0, 1, 2, …; +, -, =, …); b) les pictogrammes (□, ○, ▲ et ∠); c) les symboles de ponctuation (« : », « , », etc.); d) les symboles alphabétiques (A, b, x, y, α, φ, θ, …).
Principes généraux entourant leur utilisation	Dans le cas de la notation exponentielle : a) la position; b) la grandeur relative; c) le codage et le décodage.

3. GRILLES D'ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES

Lenoir, Roy, Rey et Lebrun (2001) expliquent qu'il y a fort peu de données concernant l'utilisation des manuels scolaires par les enseignantes et les enseignants du primaire et il y en a encore moins sur le plan de la nature des propositions pédagogiques et didactiques qu'on y retrouve. En fait, il semble que les études s'y étant intéressées ont été réalisées plutôt en lien avec les dimensions idéologiques et culturelles qui y sont véhiculées (*Ibid.*). Dans ce contexte, sur quels éléments est-il possible de s'appuyer dans le cadre de notre recherche? Parmi les quelques études recensées (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Cotnoir, 2010) et à la suite d'un premier dépouillement de manuels scolaires, un aspect semble plus particulièrement ressortir, soit celui de la présence d'exercices et de problèmes et les caractéristiques qui les distinguent.

3.1 Exercices et problèmes mathématiques

Plusieurs chercheurs ont étudié la question des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Lajoie et Bednarz, 2012; Poirier, 2001; Theis et Gagnon, 2013). En outre, certains critères permettent de distinguer un problème d'un exercice. Dans leurs études, Biron et Chaput (2001) et Biron (2012) suggèrent que le *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) relève des critères qui permettent de distinguer ce qu'est un exercice de ce qu'est un problème, en s'appuyant tout d'abord sur le fait qu'il s'agit d'une distinction relative. En effet, il faut prendre en considération que selon l'âge d'un élève, son degré de maturité intellectuelle ou encore son niveau d'avancement mathématique, il est possible qu'une même situation soit un exercice pour l'un et un problème pour l'autre. Ainsi, « la notion de problème en mathématiques doit être considérée du point de vue de l'élève et non de l'enseignant » (*Ibid.*, p. 20).

Par ailleurs, selon le *Fascicule K* (*Ibid.*), un exercice et un problème partagent deux des trois éléments qui les caractérisent. Ainsi, lorsque réalisés, les élèves doivent « répondre à une question posée ou accomplir une tâche déterminée » (p. 18) et ils doivent utiliser des raisonnements mathématiques adéquats pour y arriver. Par contre, ils sont différents sur le plan d'un aspect : alors que pour l'exercice, l'élève est en mesure de cibler et de mobiliser rapidement un moyen ou une méthode à mettre en œuvre pour y répondre, il devra pour le problème puiser réellement dans ses ressources, mobiliser les connaissances déjà acquises et les habiletés développées, tout en les combinant adéquatement afin d'y arriver. Faire un exercice est ainsi une activité qui tient plus de la mécanique et de l'application, alors que le problème doit activer des connaissances de nature conditionnelle plutôt que seulement déclarative (Tardif, 1992) qui ne mènent pas nécessairement à l'énonciation directe d'une ou de solutions. En général, le problème est considéré comme étant plus complexe que l'exercice.

L'exercice peut être défini comme une activité d'application, d'entrainement, de pratique servant à développer ou à entretenir une habileté. L'activité de résolution est machinale et ponctuelle (Legendre, 2005). L'exercice joue ainsi un rôle différent et complémentaire à celui d'un problème. L'objectif d'un exercice peut être de deux ordres. Il peut être relatif à l'acquisition d'habiletés mathématiques spécifiques, comme mesurer avec l'aide d'une unité non conventionnelle la longueur de la classe. Il peut aussi être un moyen de mettre en application une définition ou une propriété, comme demander d'exprimer sous sa forme exponentielle l'expression $8 \times 8 \times 8 \times 8$. Le *Fascicule K* (*Ibid.*) distingue finalement trois temps possibles d'utilisation des exercices dans l'apprentissage : 1) immédiatement, pour fixer rapidement une habileté ou une méthode; 2) différée, pour renforcer la mécanisation et 3) d'entretien, pour faire un rappel et réactiver des connaissances acquises précédemment.

Roegiers (1998*a*), quant à lui, a proposé un modèle qui présente certaines caractéristiques permettant de distinguer un problème d'un exercice. La figure 2, tirée de son ouvrage *Les mathématiques à l'école élémentaire*, résume bien sa pensée.

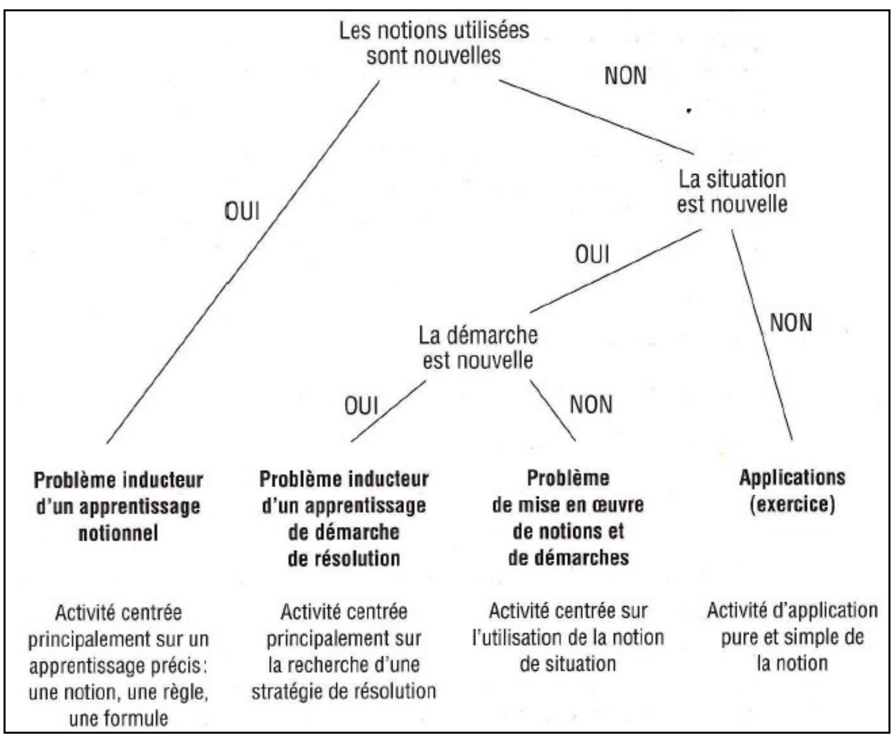


Figure 2 – Classification des quatre types d'activités rencontrées dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques, selon Roegiers (1998*a*, p. 73)

Il est important de souligner que Roegiers (1998*a*) précise, après avoir présenté ce schéma, que

> [l]es catégories proposées ne se veulent en rien exhaustives, ni mutuellement exclusives. Au contraire, [plusieurs] considérations […] ont mis en évidence la difficulté de distinguer clairement ces différents types d'activités, les nombreuses interactions qui les lient entre elles et les facteurs qui transforment parfois une activité d'un type en une activité d'un autre type. (p. 74)

Enfin, pour Baruk (1995), le problème consiste en une question à répondre à partir de données fournies dans un énoncé. Le but de cet énoncé est de formuler de façon cohérente les éléments qui servent à cerner le problème, en vue de pouvoir s'attaquer à sa résolution.

Sur le plan de la nature d'un problème mathématique, il est intéressant de constater que trois éléments principaux sont mis de l'avant, selon le *Fascicule K* : le type de contextes, le nombre de solutions et l'adéquation des données (Gouvernement du Québec, 1988). Quatre types de contextes sont exposés dans la perspective de ce document : le contexte réel (la situation est concrètement réalisée), le contexte réaliste (la situation pourrait être vécue concrètement, mais sera plutôt simulée), le contexte fantaisiste (la situation est imaginaire et ne correspond pas à quelque chose de possible dans la réalité) et le contexte purement mathématique (la situation ne fait appel qu'à des objets mathématiques). Les options possibles pour le nombre de solutions sont : aucune, une seule, un nombre fini ou une infinité. Finalement, l'adéquation des données concerne les informations fournies dans l'énoncé du problème. Un problème sera considéré comme à données complètes si toutes les informations essentielles à sa résolution sont présentes de manière explicite, le rôle de l'élève étant de les repérer et de les utiliser. Un problème contenant des données superflues contient des informations qui ne seront pas nécessaires à sa résolution. L'élève doit donc sélectionner ce qui sera pertinent avant de les utiliser. Un problème avec des données manquantes oblige l'élève à trouver lui-même l'information dont il a besoin pour le résoudre. Il doit donc chercher l'information manquante avant de l'utiliser. Un problème comportant des données insuffisantes implique que l'information fournie est non seulement incomplète, mais également inaccessible; les élèves ne peuvent pas la trouver et le problème demeure donc sans solution.

Ces caractéristiques reliées à un problème sont également celles qui ont servi d'assise à l'étude de Biron et Chaput (2001) et ont fortement influencé les critères utilisés par Cotnoir (2010). Biron (2012) présente, encore plus récemment, ces caractéristiques d'un problème comme étant encore d'actualité dans un ouvrage portant sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques pour les enfants de 4 à 8 ans. Ces aspects de classification des problèmes ont permis de mieux connaitre la nature de ceux rencontrés dans les manuels scolaires pour l'enseignement-apprentissage de l'arithmétique au primaire et pour évaluer la nature des contextes utilisés dans les manuels scolaires pour l'introduction de l'algèbre au secondaire, de 1960 à nos jours. Il s'avère donc pertinent de les reprendre dans notre étude puisqu'ils s'appliquent à des contenus mathématiques.

3.2 En résumé

Les études sur les manuels scolaires (Lenoir, Roy, Rey et Lebrun, 2001; Spallanzani, Lebrun, Biron, Lenoir, Roy, Larose et Masselier, 2001) et le *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permettent de déterminer certains éléments à observer en lien avec les exercices et les problèmes proposés dans les manuels scolaires, par rapport à la notation exponentielle. Comme expliqué précédemment, les critères présents dans le *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous semblent plus opérationnels pour procéder à notre étude. En effet, ils dépendent moins, par exemple, du contexte d'utilisation que ceux présentés par Roegiers (1998*a*). Ces derniers se prêtent mieux à une analyse de l'utilisation du manuel en classe, alors que nous cherchons plutôt à en décrire le contenu. Le tableau 4 résume les différents éléments pris en compte dans l'élaboration de notre outil de collecte.

Tableau 4
Critères d’analyse sur les exercices et les problèmes

Caractéristiques d’un exercice :	Caractéristiques d’un problème :
• L’élève doit répondre à une question posée ou accomplir une tâche déterminée; • Un moyen d’y arriver lui vient rapidement en tête; • Il fait appel à des procédures mathématiques pour les effectuer.	• L’élève doit répondre à une question posée ou accomplir une tâche déterminée; • Une recherche réelle doit être mise en œuvre pour accomplir la tâche; • Il fait appel à des raisonnements mathématiques pour les effectuer.
Éléments à considérer dans la description d’un exercice : a) Exercice relatif à une habileté; b) Exercice relatif à l’application d’une définition ou d’une propriété; c) Temps d’utilisation (exercices d’application immédiate, d’application différée, d’entretien).	Éléments à considérer dans la description d’un problème : a) Types de contextes (réel, réaliste, fantaisiste, pur. mathématique); b) Nombre de solutions (une seule, un nombre fini, une infinité, aucune) c) Adéquation des données (complètes, superflues, manquantes, insuffisantes).

4. QUESTIONS SPÉCIFIQUES DE RECHERCHE

L’ensemble des constats effectués dans le présent cadre de référence permet maintenant de mieux cerner et de préciser notre projet. Dans un premier temps, rappelons notre question générale de recherche :

Quel contenu retrouve-t-on dans les manuels scolaires de mathématiques québécois, de la 5^{e} année du primaire à la 3^{e} année du secondaire, en lien avec l’enseignement-apprentissage de la notation exponentielle?

Notre cadre de référence et l’observation de manuels scolaires nous ont permis de déterminer trois types de contenus à analyser plus finement pour répondre à cette question : 1) les définitions employées pour expliquer la notation exponentielle; 2) les exercices proposés afin de développer une certaine habileté à manipuler les expressions exponentielles et 3) les problèmes servant à mettre en œuvre la notation exponentielle dans divers contextes. Ces trois types de contenus forment les grandes catégories qui permettent d'organiser notre collecte de données. Mais de quelle nature seront les observations afin de décrire adéquatement les caractéristiques de ces contenus? Les dimensions observables reposent essentiellement sur les aspects suivants, issus plus particulièrement des travaux de Lakatos (1984), Wilson (1990), Ouvrier-Buffet (2006), Vinner (2002), Pimm (1987), Bessot et Eberhard (1982), Biron (2012) et Roegiers (1998*a*), soit : 1) l'utilisation d'un vocabulaire et d'un symbolisme adéquats; 2) l'utilisation d'exemples et/ou de contrexemples pour illustrer et expliquer le concept et 3) la position relative des contenus (définition, exercice, problème) les uns par rapport aux autres. Des observations plus spécifiques à chacun des contenus, comme la nature de la définition (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006), la fonction des exercices (Bessot et Eberhard, 1982; Biron, 2012; Roegiers, 1998*a*) ou encore la nature des problèmes proposés (Gouvernement du Québec, 1988) ont aussi été retenues afin d'enrichir et de préciser notre regard sur les manuels scolaires.

Ainsi, dans le but de déterminer le contenu abordé pour l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle dans les manuels scolaires de la 5^{e} année du primaire à la 3^{e} année du secondaire, les questions spécifiques suivantes ressortent :

- Quels types de définitions y retrouve-t-on? Où se situent-elles dans les séquences des diverses activités proposées? Est-ce que le vocabulaire et le symbolisme y sont mathématiquement adéquats? Est-ce que les exemples et les contrexemples sont, s'il y a lieu, cohérents avec la définition à laquelle ils réfèrent?
- Quels types d'exercices y retrouve-t-on? Où se situent-ils dans les séquences des diverses activités proposées? Est-ce que le vocabulaire et le symbolisme y sont mathématiquement adéquats? Est-ce que les exemples et les contrexemples sont, s'il y a lieu, cohérents avec l'exercice qui est proposé?
- Quels types de problèmes y retrouve-t-on? Où se situent-ils dans les séquences des diverses activités proposées? Est-ce que le vocabulaire et le symbolisme y sont

mathématiquement adéquats? Est-ce que les exemples et les contrexemples sont, s’il y a lieu, cohérents avec le problème qui est proposé?

Pour répondre à ces différentes questions, une méthodologie adéquate et rigoureuse a été mise en place. Le prochain chapitre se consacre à l’exposer.

TROISIÈME CHAPITRE
MÉTHODOLOGIE

Dans ce troisième chapitre, nous présentons les choix méthodologiques qui ont permis d'effectuer l'analyse et l'interprétation des contenus présentés dans les manuels scolaires en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Nous allons tout d'abord définir notre choix de méthode, ainsi que les étapes qui en découlent, tout en expliquant les principes qui ont guidé la conception et l'utilisation de la grille d'analyse et du guide de codification que nous avons élaborés. Finalement, quelques considérations éthiques sont énoncées.

1. CHOIX DE LA MÉTHODE DE TRAITEMENT DES DONNÉES

Compte tenu de la nature de la documentation à l'étude et des objectifs de la recherche, qui sont plus particulièrement de décrire les différentes composantes des manuels scolaires en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, c'est l'analyse de contenu qui a été retenue comme méthode de traitement des données, selon le sens attribué par Landry (1997). Celui-ci explique que

> l'analyse de contenu concerne la mise au point et l'utilisation de modèles systématiques de lecture qui reposent sur le recours à des règles explicites d'analyse et d'interprétation des textes. L'objectif de ces procédures est d'arriver à faire des inférences valides. Celles-ci concernent les destinateurs des messages des textes, le contenu de ces messages ou les destinataires des messages. (p. 330)

Gohier (2009) précise également que « [l'analyse de contenu] est utile à la mise au jour située des données d'un texte; ce matériel peut servir de base à une analyse sémantique et conceptuelle » (p. 99-100). De plus, Landry (1997) souligne explicitement que cette méthode d'analyse peut être pertinente dans le cas d'une étude portant sur le contenu des manuels scolaires. Cette méthode nous semble donc tout indiquée pour atteindre nos objectifs dans le cadre de la présente étude.

2. ÉTAPES À SUIVRE LORS DE L'ANALYSE DE CONTENU

Les cinq pôles autour desquels s'est orchestré le déroulement de la recherche s'inspirent de la démarche proposée par Landry (1997) qui se résume ainsi : 1) la détermination des objectifs; 2) la préanalyse; 3) l'analyse; 4) l'évaluation de la fiabilité et de la validité des données et 5) l'analyse et l'interprétation des résultats. En plus de mentionner à la fin de cette section quelques avantages et quelques limites *a priori* de l'analyse de contenu, reprenons chacun des cinq pôles proposés ci-dessus afin de préciser nos choix.

2.1 Détermination des objectifs de l'analyse de contenu

Dans le cadre de notre étude, une grille d'analyse mixte a été élaborée. La majorité des catégories analytiques a été déterminée à partir de théories existantes, tandis que quelques-unes ont émergé du matériel analysé au fur et à mesure du déroulement des travaux. Ceci correspond aux recommandations de Landry (1997) à savoir que « [l]'abondance des théories, de même que la nécessité d'inscrire toute activité de recherche dans un processus de développement cumulatif des connaissances, devrait inciter les chercheurs à éviter de partir d'une grille d'analyse totalement ouverte. » (p. 366) L'auteur souligne, en outre, qu'un des principaux avantages à l'utilisation d'une grille d'analyse mixte est de permettre à de nouvelles catégories, qui ne sont pas nécessairement issues des théories répertoriées, d'apparaitre et ainsi d'enrichir l'ensemble du processus, ce qui a effectivement été le cas pour nous. Cette manière de faire a allié d'une manière intéressante souplesse et rigueur intellectuelle. Pour en faire la démonstration, reprenons chronologiquement les trois temps (grille d'analyse préliminaire, grille de préanalyse et grille d'analyse) qui ont mené à la version de la grille ayant servi à la collecte de données.

2.1.1 Grille d'analyse préliminaire

Comme il est spécifié dans la sous-section précédente, plusieurs catégories analytiques de contenus étaient déjà relativement bien délimitées par les écrits scientifiques, alors que nous pressentions que d'autres émergeraient au fur et à mesure de l'analyse de la documentation. Une première ébauche de la grille d'analyse a donc été conçue en aout et septembre 2013 avec comme objectif de faire une synthèse des aspects possibles à étudier lors de la recherche et afin de pouvoir les présenter aux membres du jury lors de la défense du projet de maitrise (annexe 4). Cette grille préliminaire a également été présentée à une professeure universitaire spécialiste en mesure et évaluation afin d'en connaitre les forces et les limites. À ce moment de la démarche de recherche, il était clair pour cette professeure, ainsi que pour les membres du jury, que des modifications importantes seraient à apporter à la grille préliminaire pour la rendre opérationnelle. Elle s'est toutefois avérée cruciale pour cerner les premiers éléments fondamentaux de la grille, ainsi que les principaux enjeux qui allaient nous attendre dans sa conception. Présentons de manière succincte certains éléments dont nous avions tenu compte à ce stade du projet.

2.1.2 Catégories analytiques déterminées à partir de théories existantes

Pour commencer la création de la grille d'analyse préliminaire déposée dans le cadre du projet, des catégories ont été préalablement établies à partir du cadre de référence. Ce sont essentiellement les observations concernant les définitions et le vocabulaire utilisé issues des écrits de Lakatos (1984), Wilson (1990), Ouvrier-Buffet (2006), Pierce et Fontaine (2009) et Vinner (2002) qui ont servi à cette première ébauche. Afin de mettre à l'essai ces catégories analytiques, un travail préalable d'analyse a été mené sur les définitions des principaux mots de vocabulaire ou expressions en lien avec la notation exponentielle. Ces dernières ont été sélectionnées parmi huit lexiques mathématiques s'adressant à des élèves et à des personnes enseignantes (six ouvrages) ou encore à des experts (deux ouvrages), afin d'avoir la meilleure représentativité possible. Il est notamment ressorti de cet examen des définitions présentes dans ces lexiques que certains mots ont plusieurs sens (comme les mots « base » et « puissance ») et qu'une certaine latitude existe dans leur interprétation selon les contextes d'utilisation. Les approches étaient également très différentes entre les lexiques s'adressant à des élèves et à des personnes enseignantes versus ceux s'adressant à des experts, les premiers étant plutôt axés sur l'accès au code, alors que les deuxièmes étaient clairement dans une perspective de mathématiques avancées.

En ce qui a trait aux aspects en lien avec le symbolisme, ce sont particulièrement les écrits de Pimm (1987), Bessot et Eberhard (1982), Biron (2012) et Roegiers (1998*a*) qui nous ont servi d'assises. Ainsi, des observations en lien avec la grammaire mathématique (dans notre cas, en ce qui concerne plus particulièrement la position, la grandeur relative et la rigueur dans l'utilisation), ont été réalisées. Le principe d'encodage-décodage a aussi été exploré. En effet, la notation exponentielle consistant en un code à comprendre, mais n'ayant pas fait l'objet de recherche explicite en ce sens, nous avons cherché à établir des parallèles avec d'autres domaines mathématiques nécessitant les principes d'encodage-décodage, comme des constructions de représentations de cubes (Bessot et Eberhard, 1982) ou encore la numération (Biron, 2012; Roegiers, 1998*a*).

Finalement, nous avons retenu, des grilles d'analyse de manuels scolaires déjà existantes, certains éléments en lien avec la différence entre exercice et problème (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Gouvernement du Québec, 1988; Roegiers, 1998*a*). À ce stade, ces éléments testés dans d'autres études nous semblaient prometteurs pour la nôtre, sans toutefois avoir été expérimentés directement dans notre recherche.

2.1.3 Catégories analytiques émergentes

Afin de déterminer certaines catégories analytiques lors de l'élaboration de notre grille d'analyse préliminaire et afin de préciser celles déjà existantes, nous avons suivi la démarche de l'analyse thématique telle que présentée par Paillé et Mucchielli (2010). Comme ces auteurs l'indiquent,

> [l]'analyse thématique a deux fonctions principales : une fonction de repérage et une fonction de documentation. La première fonction concerne le travail de saisie de l'ensemble des thèmes d'un corpus. La tâche est de relever tous les thèmes pertinents, en lien avec les objectifs de la recherche, à l'intérieur du matériau à l'étude. La deuxième fonction va plus loin et concerne la capacité de documenter l'importance de certains thèmes au sein de l'ensemble thématique, donc de relever des récurrences, des regroupements, etc. Cette fonction n'intervient évidemment que dans le cas où plusieurs […] documents d'un même type sont soumis à l'analyse. (p. 162)

En ayant en tête ces différentes fonctions lors de la conception de la grille préliminaire, cela laissait davantage place à l'identification des catégories émergentes pertinentes.

2.1.4 Restructuration de la grille préliminaire

Pour tenter de transformer la grille d'analyse préliminaire afin de la rendre opérationnelle, quelques constats initiaux ont été faits et ont servi d'appui dans la poursuite de la démarche qui s'est échelonnée d'octobre 2013 à mai 2014. Nous pouvons les résumer ainsi :

1) Comme définis dans la grille d'analyse préliminaire du projet, plusieurs indicateurs étaient peu opérationnels. L'analyse des indicateurs portant sur les exemples dans la section « définition » et dans la section « exercice » peut l'illustrer. En effet, à part permettre de repérer leur absence ou leur présence, il n'y avait pas de précisions suffisamment claires sur ce qui était à observer, les qualificatifs utilisés (particularités, rigueur, nature, cohérence, pertinence, autres observations) étant trop généraux. De plus, quelques termes employés étaient inadéquats, car ils portaient à interprétation. Par exemple, les termes « rigoureux » et « mixte » étaient mal définis et ce dernier était même présent à des endroits différents, avec des sens différents. Des clarifications s'avéraient donc nécessaires à ce chapitre dans la conception de la grille de préanalyse.

2) Certaines catégories de la grille d’analyse préliminaire étaient à mieux définir, car elles ne semblaient pas s’appuyer sur des éléments théoriques du cadre de référence (p. ex., la position dans le chapitre, la nature de l’exercice ou encore le rôle de l’exercice). D’autres catégories s’appuyaient sur des éléments théoriques du cadre conceptuel, mais pas de manière apparente (p. ex., la nature du vocabulaire, l’utilisation du vocabulaire, l’utilisation du symbolisme mathématique). Il fallait donc rendre le tout apparent dans la conception de la grille de préanalyse.
3) Plusieurs catégories se répétaient d’une section à l’autre de la grille d’analyse préliminaire, comme les catégories « utilisation du vocabulaire » et « utilisation du symbolisme ». Nous nous sommes donc questionnés sur la nécessité ou non de cette répétition et de ce que cela apporterait potentiellement comme richesse à la collecte de données. Cela a également remis en question l’organisation de l’information que nous devions prévoir dans la grille de préanalyse.

Ces quelques constats réalisés à partir de la grille d’analyse préliminaire ont mené à des modifications sur le plan de la structure et du contenu de la grille de préanalyse que nous pouvons résumer ainsi : 1) élaboration d’un format en sections et en sous-sections afin de rendre le travail avec la grille plus efficace; 2) mise en évidence des catégories (avec rappel des auteurs sur lesquels elles s’appuient) qui deviennent des sous-sections de la grille et qui représentent des aspects mieux définis de ce qui sera observable; 3) répétition de certaines sous-sections, puisque des catégories s’appliquent autant aux définitions, aux exercices et aux problèmes afin de mener à une structure où les apparences de redondance relèvent de l’organisation que nous avons définie et 4) élaboration d’indicateurs plus précis qui rendent les catégories opérationnelles. Cette étape a mené à plusieurs constats. Le tableau 5 résume les principales décisions prises à ce stade de l’évolution de la grille de préanalyse.

Tableau 5
Premières transformations à la suite des constats réalisés pour passer de la grille d'analyse préliminaire à la grille de préanalyse

Questions posées	Choix faits
Pourquoi travailler en sections?	Pour mieux structurer l'information, il est convenu de travailler en sections afin de repérer plus facilement l'information lors du traitement des données et de l'analyse.
Pourquoi placer les sous-sections à l'intérieur de chacune des sections dans le même ordre d'apparition?	Pour mieux structurer l'information et soutenir notre pensée lors de la collecte de données, il est convenu d'intégrer des sous-sections dans la grille. Le respect du même ordre d'apparition permettra de se repérer plus aisément et d'établir des liens, s'il y a lieu.
Pourquoi revenir au cadre de référence?	Pour s'assurer que les catégories et les indicateurs s'appuieront clairement sur des éléments théoriques et qu'ils porteront le moins possible à interprétation, il est convenu de préciser les auteurs qui guident l'élaboration des items et des catégories à l'intérieur même de la grille.
Comment tenir compte de la position relative des informations contenues dans le manuel scolaire?	Pour rendre compte de la position relative des informations contenues dans le manuel scolaire, il est convenu d'utiliser la table des matières du manuel afin d'éviter les biais liés aux interprétations possibles lors de la collecte de données.

Pendant ce travail de refonte de la grille, deux rencontres ont été nécessaires avec la professeure spécialiste en mesure et évaluation, ainsi que de fréquentes rencontres avec l'équipe de direction du mémoire. Cette démarche a permis de soutenir l'élaboration de ce qui allait devenir la grille de préanalyse, notamment dans le but d'établir les liens les plus clairs possible avec le cadre de référence et afin de clarifier l'opérationnalisation des indicateurs. Plusieurs discussions ont porté sur l'aspect mutuellement exclusif de certains indicateurs et sur les conséquences de ce qu'il sera possible ou non d'analyser et de mettre en évidence lors de l'interprétation des résultats. Ainsi, le caractère descriptif de l'étude a bien été établi. Également, le fait qu'il ne sera en aucun cas possible de parler de l'utilisation qui est faite du manuel en classe a été éclairci. Finalement, notons que les aspects suivants ont été traités lors de cette démarche : 1) quelques consignes (en italiques) ont été ajoutées à l'intérieur même de certaines sous-sections pour rendre son utilisation plus efficace et pour être capable de nous diriger facilement; 2) la section G (dispositions des informations) a été créée à partir d'indicateurs qui étaient à l'origine dans la section B de la grille préliminaire puisqu'il semblait plus opportun de faire le travail de répartition des items à l'aide de la table des matières et après avoir effectué l'ensemble de la collecte d'information sur chacun des items et 3) une validation théorique a été effectuée en s'assurant que tous les éléments de la grille étaient appuyés par des éléments théoriques issus du cadre de référence.

À ce stade de l'élaboration de la grille de préanalyse, la nécessité de créer un guide de codification est apparue. Ce guide a été très important dans l'élaboration de la grille, car il nous a permis de clarifier plusieurs aspects qui jusqu'alors nous semblaient porter à interprétation. L'arrivée de ce guide a aussi permis de renforcer la fiabilité et la validité de notre étude. Nous reviendrons sur ces derniers aspects à la section 2.4.

L'ensemble des éléments précisés jusqu'ici a mené à la version de la grille ayant été utilisée dans le cadre de la préanalyse (annexe 5).

2.2 Préanalyse

Avant de réaliser l'analyse complète de la documentation disponible, il a été important de bien définir nos catégories analytiques, comme nous l'avons vu à la section précédente. Ces catégories devaient posséder obligatoirement les trois qualités suivantes : 1) l'exclusion mutuelle; 2) la fidélité et 3) la pertinence (Landry, 1997). C'est la préanalyse qui nous a permis de nous assurer que ces qualités étaient bien présentes dans les catégories déterminées. La sélection de l'échantillon, le déroulement de la préanalyse et la description de la version finale de la grille nous permettront de le constater.

2.2.1 Sélection de l'échantillon

L'échantillon total dans le cadre de la collecte de données est composé de neuf collections qui seront présentées plus en détail à la section 2.3.1. Au départ, il était prévu d'en sélectionner une au hasard pour effectuer la préanalyse. Toutefois, après réflexion, il a plutôt été décidé de choisir une collection de 3^{e} secondaire. Ce choix a été guidé par la complexité attendue des éléments à traiter qui devrait être plus grande et plus diversifiée dans ces manuels. Notre raisonnement s'appuyait principalement sur ce qui est prévu dans la progression des apprentissages sur la notation exponentielle (Gouvernement du Québec, 2009, 2011). Nous avons ainsi posé l'hypothèse que si des catégories devaient apparaitre, c'est probablement les items des collections de 3^{e} secondaire qui en favoriseraient l'émergence. Cette hypothèse s'est avérée valide, sauf pour quelques indicateurs dans la sous-section « fonction de l'exercice » qui sont apparus dans les collections de 1re secondaire lors de l'analyse. Toutefois, comme il s'agissait d'indicateurs appartenant à une catégorie, et non d'une catégorie elle-même, il a été relativement facile d'en tenir compte en cours de route.

Par la suite, nous avons effectué la préanalyse, puis un comité d'experts, constitué de la directrice et de la codirectrice du projet de recherche, a comparé certains des résultats obtenus. La grille d'analyse et le guide de codification ont été retravaillés en fonction des conclusions des trois personnes jusqu'à ce que celles-ci s'entendent sur la fiabilité et la validité de la grille et du guide, selon le processus que nous décrirons dans la prochaine sous-section.

2.2.2 Déroulement de la préanalyse

Au départ, nous avons procédé à l'identification des items potentiels à analyser. Cette identification a été effectuée directement sur les photocopies des pages du manuel sélectionné comme échantillon, en suivant dans le manuel original afin d'être certain de n'oublier aucun item.

Dès le début de la préanalyse, des obstacles ont surgi. Nous pouvons les grouper en trois catégories : 1) délimitations des items à analyser; 2) liens entre la grille d'analyse et le guide de codification et 3) structure générale de la grille. Le tableau 6 reprend de manière succincte ces principaux obstacles, tout en faisant état des choix finalement faits, toujours en accord avec le comité d'experts.

Tableau 6
Obstacles rencontrés et choix faits pendant la préanalyse

Obstacles rencontrés	Choix faits
Délimitations des items à analyser	
Présence de la notation exponentielle dans l'apprentissage de la notation scientifique et de l'algèbre : items dans ces contextes à retenir ou non?	Il est convenu que les items reliés à l'apprentissage de la notation scientifique et de l'algèbre ne sont pas retenus, car ils débordent du sujet ciblé. Les items retenus doivent explicitement traiter de la notation exponentielle, en vue de son acquisition. À la suite de cette décision, l'ensemble des items a été révisé afin de mieux les cerner. Au final, 60 items sont sélectionnés pour la préanalyse.
Dans certaines activités de révision, plusieurs notions sont présentes simultanément dans un exercice, qui ne sont pas toujours en lien avec la notation exponentielle.	Il est convenu que seul ce qui concerne uniquement la notation exponentielle sera considéré comme un item à analyser. Ce choix se veut en cohérence avec le rejet des items traitant de la notation scientifique et de l'algèbre fait précédemment.
Présence de problèmes en plusieurs parties : ces problèmes doivent-ils être morcelés en plusieurs items ou non?	Il est convenu que les problèmes présentés en plusieurs parties doivent être analysés de manière non morcelée, car les différents éléments qui dirigent l'élève dans sa résolution et la vue d'ensemble de la situation seraient perdus en les morcelant.
Plusieurs définitions sont rattachées à une même condition d'application. Comment les structurer en items?	Il est convenu que chaque définition constituera un item séparé. La condition d'application sera répétée pour chaque item qui en dépend. Une note sera indiquée en remarque pour tous les items concernés pour dire que la condition d'application est commune et qu'elle n'était présente qu'une seule fois pour toutes les définitions afin de pouvoir tenir compte de cette particularité lors de l'analyse.

Liens entre la grille d'analyse et le guide de codification	
Dans toutes les sous-sections portant sur le vocabulaire, il est difficile de bien cerner ce qui doit être analysé.	Il est convenu que pour toutes les sous-sections portant sur le vocabulaire (sections C, D et E), il faut ajouter des exemples concrets au guide afin de mieux illustrer chacun des indicateurs.
Les sous-sections portant sur les descriptions des exemples et des contrexemples pour les définitions et les définitions sont peu opérationnelles.	Il est convenu qu'il faut tenter de mieux préciser ce qui sera observé. Cette description sera essentiellement qualitative. Les titres sont changés : « description de chaque exemple » devient plutôt « observations et particularités ». Ce qui devra être spécifié dans les indicateurs de ces sous-sections est expliqué de manière détaillée dans le guide.
Dans la section D, sous-section 4 (fonction de l'exercice), des indicateurs émergents apparaissent.	Il est convenu d'inclure les indicateurs émergents au fur et à mesure dans la grille de compilation des données et dans le guide de codification, en plus de les valider avec le comité d'experts.
Structure générale de la grille d'analyse	
Le nom du manuel et la référence à la section A du manuel présentent la même information.	Il est convenu de retirer la sous-section 1 (nom du manuel) dans la section A, à cause de la redondance avec la sous-section suivante (référence bibliographique).
La section F dans le format prévu ne fonctionne pas : il est difficile de gérer les items autres que les définitions, les exercices et les problèmes dans un même document.	Il est convenu que la section F, portant sur les items n'étant ni des définitions, ni des exercices, ni des problèmes, doit être retravaillée afin que celle-ci soit structurée avec la même idéologie ayant mené aux sections C, D et E.
Dans la section G, comment traiter la position relative des informations?	Afin de traiter la position relative des informations, il est convenu de photocopier l'ensemble de la table des matières. Tous les items traitant de près ou de loin de la notation exponentielle seront indiqués dans les marges. Les items traitant explicitement de la notation exponentielle seront précisément indiqués à partir de leur code d'identification. Il sera ainsi possible d'avoir un portrait global de la position relative des informations avec le moins d'inférence possible, puisque c'est le format même du manuel étudié qui sera utilisé.

La préanalyse s'est avérée assez longue à réaliser, compte tenu des ajustements qui devaient être régulièrement faits. Elle s'est donc échelonnée sur le mois de mai 2014. Il fallait procéder avec minutie, préciser les critères d'élagage au fur et à mesure, et ce, autant pour la grille d'analyse que pour le guide de codification. La préanalyse était alors effectuée à nouveau en revenant sur tous les items déjà analysés afin de tenir compte des modifications effectuées. Lorsque la préanalyse a été terminée, un échantillonnage au hasard de neuf items que nous avions étudié (deux items « définition », quatre items « exercice », deux items « problème » et un item « autre nature ») a été fait afin de procéder à une validation de l'analyse par le comité d'experts. Il y a eu recherche et obtention d'un accord unanime pour l'analyse de tous ces items avec les deux membres de ce comité. La préanalyse a ainsi officiellement pris fin.

À la suite de cette préanalyse, des versions finales de la grille (annexe 7) et du guide de codification (annexe 8) ont été produites en juin et juillet 2014. La sous-section suivante présentera de manière plus précise chacune des catégories qui ont été retenues pour la collecte de données sur l'ensemble des collections prévues.

2.2.3 Description de la version finale de la grille

Au terme du processus de préanalyse, les différentes catégories de la grille d'analyse étaient bien établies. Dans un premier temps, il est important de préciser les définitions importantes afin d'en comprendre l'organisation puisqu'elle est constituée de sept sections différentes, qui sont elles-mêmes séparées en un nombre variable de sous-sections. Nous pourrons ensuite observer le contenu détaillé de la grille.

2.2.3.1 Définitions importantes

Pendant l'élaboration de la grille d'analyse et du guide de codification, plusieurs réflexions et discussions ont porté sur le vocabulaire employé. C'est lors de la conception de la version finale de la grille que le sens de chacun des termes utilisés a pu être soigneusement établi. C'est à ce moment-ci de la description de la méthode que nous jugeons opportun de les présenter.

Tout d'abord, précisons que la grille d'analyse correspond à l'outil de collecte de données. Elle est constituée de sept sections qui ont dû être reproduites le nombre de fois nécessaire lors de la collecte de données, selon les informations demandées. Chacune des sept sections (informations générales sur le manuel analysé, sélection de l'item analysé, caractéristiques de la définition analysée, caractéristiques de l'exercice analysé, caractéristiques du problème analysé, item d'une autre nature et disposition des informations) met en évidence un thème général qui est l'objet de l'étude. La section partitionne la grille d'analyse afin de structurer celle-ci et d'organiser l'information en grandes unités de sens. La catégorie, quant à elle, correspond à des aspects particuliers qui sont analysés pour chacune des sections. Elles correspondent aux sous-sections de chacune des sections. Certaines catégories sont communes à plusieurs sections (p. ex., le symbolisme, qui appartient à la fois aux sections C et D ou encore la présence d'exemples et de contrexemples, qui est une catégorie partagée par les sections C, D et E), alors que d'autres sont exclusives à une seule (p. ex., le type de définitions qui appartient seulement à la section C). Chacune des catégories est analysée à l'aide d'indicateurs. Ces indicateurs viennent qualifier la catégorie étudiée. Les indicateurs peuvent être prédéfinis : dans ce cas, nous avons coché celui qui répondait adéquatement au questionnement soulevé dans la catégorie. Les indicateurs peuvent aussi correspondre à des observations ouvertes : nous avons alors inscrit à l'endroit prévu les informations demandées.

Certaines sections, certaines catégories et certains indicateurs ont été définis à l'aide de critères issus de la recherche. Ils s'appuient donc sur des études. Dans ces conditions, l'auteur de l'étude est indiqué, ainsi que l'année de publication, de manière classique (auteur, année de publication). D'autres sections, catégories et indicateurs ne viennent pas explicitement d'études, même s'ils en sont inspirés. Dans ce cas, le qualificatif « émergent » leur est attribué. Aucune mention particulière ne leur est associée.

Finalement, un item correspond à une unité qui a été cernée dans le manuel scolaire et qui a été analysée dans le cadre de l'étude. La façon de délimiter, d'identifier et de codifier un item est définie de manière plus détaillée à la section B de la grille d'analyse et du guide de codification.

Le sens du vocabulaire employé dans la grille d'analyse et dans le guide de codification étant précisé, commentons maintenant la grille d'analyse par section afin de bien en comprendre les différentes constituantes.

2.2.3.2 Présentation de la section A de la grille d'analyse : identification du manuel scolaire

La section A sert à l'identification du manuel scolaire duquel seront tirés les items à analyser. Elle devait être remplie une seule fois pour chacune des neuf collections retenues pour la collecte de données. Elle est constituée de deux sous-sections : 1) la référence bibliographique et 2) le niveau scolaire. La référence bibliographique était notée selon la méthode conventionnelle, alors que l'indicateur du niveau scolaire était coché selon l'information fournie par les auteurs de la collection du manuel scolaire. Le tableau 7 présente la section A de la grille d'analyse de manière détaillée.

Tableau 7
Section A portant sur les informations générales du manuel analysé

1. Référence bibliographique	
2. Niveau scolaire	a. □ 5e année du primaire b. □ 6e année du primaire c. □ 1re année du secondaire d. □ 2e année du secondaire e. □ 3e année du secondaire

2.2.3.3 Présentation de la section B de la grille d'analyse : identification de l'item analysé

La section B avait comme objectif d'identifier adéquatement chacun des items à analyser (principalement pour en connaitre l'emplacement dans le manuel ciblé), d'en cerner la nature (pour pouvoir s'orienter dans les sections suivantes, afin d'en effectuer l'analyse) et de lui attribuer un code d'identification (pour faciliter le repérage pendant la collecte de données et après celle-ci, lorsque nécessaire). Elle devait être remplie autant de fois que le nombre d'items identifiés dans chacune des collections de manuel scolaire. Le tableau 8 présente le format et les moyens choisis pour y arriver.

Tableau 8
Section B portant sur la sélection de l'item analysé

1. Identification de l'item	Chapitre ou section : Page, numéro, titre *(selon les informations disponibles)*
2. Nature de l'item	a. ☐ définition *(remplir la section C)* b. ☐ exercice *(remplir la section D)* c. ☐ problème *(remplir la section E)* d. ☐ autre nature *(remplir la section F)*
3. Code d'identification de l'item	____________________ *Coll. (R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) – ordre (p ou s) – niveau (5,6,1,2,3) – item (d,e,p ou a) – rang (1 à ∞)*

2.2.3.4 Présentation de la section C de la grille d'analyse : aspects à analyser pour les définitions

La section C est consacrée exclusivement à la collecte d'information en lien avec les items identifiés comme étant des définitions. Ainsi, tous les items ayant été identifiés comme des définitions à la section B doivent avoir une section C de la grille remplie. Celle-ci est constituée de six sous-sections, correspondant chacune à une catégorie à analyser pour cette nature d'item : 1) le type de définitions; 2) le vocabulaire; 3) le symbolisme; 4) la présence d'exemples et de contrexemples; 5) la nature de la définition et 6) la fonction de la définition. Le tableau 9 présente de manière détaillée les différents indicateurs qui composent chacune des catégories, ainsi que des indications méthodologiques pour être en mesure de s'orienter adéquatement lors de la complétion de la section C.

Tableau 9
Section C portant sur les caractéristiques de la définition analysée

1. TYPE DE DÉFINITION

a. ☐ en mots   b. ☐ symbolique   c. ☐ en mots et symbolique

Dans le cas d'une définition en mots, remplir la sous-section 2
Dans le cas d'une définition symbolique, remplir la sous-section 3
Dans le cas d'une définition à la fois en mots et symbolique, remplir les sous-sections 2 et 3

Remarque :

---

2. VOCABULAIRE

2.1 Dans le cas d'une définition en mots :
Utilisation de l'expression « multipliée par elle-même » (Baruk, 1995)

a. ☐ oui   b. ☐ non

Remarque :

2.2 Dans le cas d'une définition en mots :
Sens du vocabulaire utilisé (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

a. Sens technique, utilisation au sens technique :
b. Sens courant, utilisation au sens courant :
c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique :
d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant :

Remarque :

---

3. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

3.1 Dans le cas d'une définition symbolique :
Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. ☐ oui   b. ☐ non   c. ☐ sans objet

Remarque :

3.2 Dans le cas d'une définition symbolique :
Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

a. ☐ oui   b. ☐ non   c. ☐ sans objet

Remarque :

---

4. PRÉSENCE D'EXEMPLES – CONTREXEMPLES (Wilson, 1990)

a. ☐ oui   b. ☐ non

Dans le cas où « oui » est coché, remplir les sous-sections 4.1 à 4.4.

4.1 Nombre d'exemple(s) pour illustrer la définition : _______ exemple(s)
4.2 Observations et particularités :
4.3 Nombre de contrexemple(s) pour illustrer la définition : _______
4.4 Observations et particularités :

Remarque :

5. NATURE DE LA DÉFINITION (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006) a. zéro-définition b. définition générée par la preuve Remarque :
6. FONCTION DE LA DÉFINITION (Vinner, 2002) *Une ou plusieurs cases peuvent être cochées* La définition a. sert à acquérir le concept mathématique b. sert à résoudre un problème ou à prouver un théorème c. permet d'établir les conditions minimales d'un concept d. est élégante d'un point de vue mathématique e. est arbitraire et conventionnée Remarque :

2.2.3.5 Présentation de la section D de la grille d'analyse : aspects à analyser pour les exercices

La section D est consacrée exclusivement à la collecte d'information en lien avec les items identifiés comme étant des exercices. Ainsi, tous les items ayant été identifiés comme des exercices à la section B doivent avoir une section D de la grille remplie. Celle-ci est constituée de cinq sous-sections correspondant chacune à une catégorie à analyser pour cette nature d'item : 1) le vocabulaire; 2) le symbolisme; 3) la présence d'exemples et de contrexemples; 4) la fonction de l'exercice et 5) les observations et les particularités de l'exercice. Le tableau 10 présente de manière détaillée les différents indicateurs qui composent chacune des catégories, ainsi que des indications méthodologiques pour être en mesure de s'orienter adéquatement lors de la complétion de la section D.

Tableau 10
Section D portant sur les caractéristiques de l'exercice analysé

1. VOCABULAIRE (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002) Sens du vocabulaire utilisé dans l'énoncé a. Sens technique, utilisation au sens technique : b. Sens courant, utilisation au sens courant : c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique : d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant : Remarque :

2. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

2.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. □ oui b. □ non c. □ sans objet

Remarque :

2.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

a. □ oui b. □ non c. □ sans objet

Remarque :

3. PRÉSENCE D'EXEMPLES OU DE CONTREXEMPLES (Wilson, 1990)

a. □ oui b. □ non

Dans le cas où « oui » est coché, remplir les sous-sections 3.1 à 3.4.

3.1 Nombre d'exemple(s) pour illustrer l'exercice

_______ exemple(s)

3.2 Observations et particularités :

3.3 Nombre de contrexemple(s) pour illustrer l'exercice :

_______ contrexemple(s)

3.4 Observations et particularités :

Remarque :

4. FONCTION DE L'EXERCICE

a. □ Encodage
b. □ Décodage
c. □ Déduction d'une valeur manquante
d. □ Transformation d'écriture
e. □ Réduction
f. □ Évaluation numérique
g. □ Comparaison d'effet
h. □ Définition de termes
i. □ Conjecture et vérification

Remarque :

5. OBSERVATIONS ET PARTICULARITÉS DE L'EXERCICE

5.1 Nombre d'éléments :
5.2 Constitution des éléments :
5.3 Description de l'énoncé en lien avec les éléments :
5.4 Progression entre les éléments :
5.5 Variété des habiletés nécessaires pour la mise en pratique des éléments :
5.6 Symbolisme :
5.7 Autres :

Remarque :

2.2.3.6 Présentation de la section E de la grille d’analyse : aspects à analyser pour les problèmes

La section E est consacrée exclusivement à la collecte d’information en lien avec les items identifiés comme étant des problèmes. Ainsi, tous les items ayant été identifiés comme des problèmes à la section B doivent avoir une section E de la grille remplie. Elle comprend quatre catégories à analyser pour cette nature d’item : 1) le vocabulaire; 2) le symbolisme; 3) la nature du problème et 4) les observations et les particularités du problème. Le tableau 11 présente les différents indicateurs pour chacune des catégories de la section E.

Tableau 11
Section E portant sur les caractéristiques du problème analysé

1. VOCABULAIRE (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002) Sens du vocabulaire utilisé dans l’énoncé a. Sens technique, utilisation au sens technique : b. Sens courant, utilisation au sens courant : c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique : d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant : Remarque :
2. SYMBOLISME (Pimm, 1987) **2.1** Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>position</u> des informations dans l’expression exponentielle a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet Remarque : **2.2** Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>grandeur relative</u> des informations dans l’expression exponentielle a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet Remarque :

3. NATURE DU PROBLÈME (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Gouvernement du Québec, 1988) **3.1** Contexte du problème a. □ contexte réel   b. □ contexte réaliste c. □ contexte fantaisiste   d. □ contexte purement mathématique Remarque : **3.2** Nombre de solutions a. □ une solution   b. □ un nombre fini de solutions c. □ une infinité de solutions   d. □ aucune solution Remarque : **3.3** Adéquation des données a. □ données complètes   b. □ données superflues c. □ données manquantes   d. □ données insuffisantes Remarque :
4. OBSERVATIONS ET PARTICULARITÉS DU PROBLÈME Remarque :

2.2.3.7 Présentation de la section F de la grille d'analyse : autres aspects observés

La section F est consacrée exclusivement à la collecte d'information en lien avec les items identifiés comme étant d'une autre nature, c'est-à-dire qui ne sont ni des définitions, ni des exercices, ni des problèmes. Un item d'une autre nature pourrait, par exemple, être une capsule historique ou encore des indications sur l'utilisation de la calculatrice concernant la notation exponentielle. Tous les items ayant été identifiés comme étant d'une autre nature à la section B doivent avoir une section F de la grille remplie. Elle comprend deux sous-sections : 1) le nom donné à la nature émergente de l'item et 2) sa description générale. Le tableau 12 présente les données à colliger à la section F.

Tableau 12
Section F portant sur les items d'une autre nature

1. INFORMATIONS SUR L'ITEM D'UNE AUTRE NATURE a. Nom donné à la nature émergente de l'item: b. Description générale :

2.2.3.8 Présentation de la section G de la grille d'analyse : position relative des items dans le manuel scolaire

La section G s'intéresse à l'organisation et la position relative des items portant sur la notation exponentielle à l'intérieur d'une même collection de manuels scolaires afin, entre autres, d'observer leur concentration ou leur dispersion à travers le manuel. En utilisant la table des matières du manuel et les codes d'identification des items, il a été possible d'identifier la structure adoptée par les auteurs en lien avec la répartition des informations portant sur la notation exponentielle. Le tableau 13 présente la section G de la grille d'analyse en lien avec la démarche retenue pour rendre compte de la disposition des items dans les manuels scolaires.

Tableau 13
Section G portant sur la position des items dans les manuels scolaires

Reproduction de la table des matières du manuel	Identification et répartition des items selon la structure de la table des matières

En résumé, lorsque la collecte d'information est complétée pour un manuel donné, nous avons en notre possession les documents suivants : 1) une grille remplie de la section A; 2) autant de grilles remplies de la section B qu'il y a d'items à analyser dans le manuel; 3) pour chacune des grilles remplies de la section B, une grille remplie de la section C <u>ou</u> de la section D <u>ou</u> de la section E <u>ou</u> de la section F selon la nature de l'item spécifié à la sous-section 2 de la section B et finalement 4) une grille remplie de la section G. Cette vérification finale permet de valider à la fin du processus l'ensemble de la démarche effectuée.

C'est donc cette grille d'analyse qui a servi à la collecte de données. Le format original utilisé lors de cette collecte était beaucoup plus aéré afin de pouvoir écrire facilement toutes les informations pertinentes (annexe 7). Le guide de codification (annexe 8) permet d'avoir un accès complet aux tenants et aboutissants de toutes les sections de la grille d'analyse pour les personnes qui souhaitent avoir des informations plus précises.

L'instrument et la méthode de collecte étant maintenant connus, présentons de manière détaillée l'échantillon choisi et le déroulement de la collecte de données. Ce sera l'objet de la section suivante.

2.3 Analyse du matériel étudié

Une fois le guide de codification et la grille d'analyse clairement établis, entre autres grâce aux éléments vérifiés et modifiés lors de la préanalyse, ils ont été appliqués systématiquement à l'ensemble du matériel à étudier. Des comptes rendus et des validations auprès des membres du comité d'experts ont été réalisés au fur et à mesure de la collecte de données. Précisons en premier lieu l'échantillon à l'étude, pour ensuite présenter le déroulement effectif de la collecte de données.

2.3.1 Échantillon à l'étude

Les collections sélectionnées dans le cadre de cette recherche sont celles qui ont été approuvées par le ministère de l'Éducation du Québec dans le cadre de l'implantation de la réforme pédagogique du début des années 2000. Trois collections du 3^{e} cycle du primaire : *Clicmaths* (Guay, Hamel et Lemay, 2003), *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005) et *Presto* (Lacasse, Delisle et Bisson, 2004); trois collections du 1er cycle du secondaire : *À vos maths!* (Coupal, 2005), *Panoram@th* (Cadieux, Gendron et Ledoux, 2005, 2006) et *Perspective* (Guay, Hamel et Lemay, 2006) et trois collections de la 1re année du 2^{e} cycle du secondaire : *Intersection* (Boucher, Marotte et Coupal, 2007), *Point de vue* (Guay *et al.*, 2007) et *Visions* (Ledoux et Boivin, 2007) répondaient à ce critère de sélection (annexe 6). Ainsi, nous sommes en présence de l'échantillon complet des manuels scolaires ayant été ciblés par notre question générale de recherche. Toutes les pages traitant de la notation exponentielle de ces neuf ouvrages ont été analysées. Pour repérer celles-ci, une lecture attentive de la table des matières, des glossaires et des index (s'il y a lieu) a été effectuée. Tous les thèmes pouvant toucher de près ou de loin le concept de notation exponentielle ont systématiquement été vérifiés afin de s'assurer d'avoir toute l'information nécessaire. La sélection des items a été faite selon les modalités établies lors de la préanalyse.

2.3.2 Déroulement de la collecte de données

Tout d'abord, notons que la grille définitive a été utilisée pour la collecte de données sur les neuf collections, en respectant scrupuleusement les indications de la grille et du guide de codification (annexes 7 et 8).

Dans un premier temps, nous avons procédé à l'identification des items dans chacune des collections et à leur encodage. Les collections ont été étudiées dans l'ordre alphabétique de leur encodage (de R jusqu'à Z). Ainsi, les trois collections du 3^{e} cycle du primaire ont été étudiées en premier, suivies des trois collections du 1er cycle du secondaire et, finalement, des trois collections de 3^{e} secondaire. En plus de l'identification du code de l'item qui était systématiquement inscrit directement sur les photocopies du manuel, la section B a été remplie chaque début de collecte d'un manuel, et ce, pour tous ses items. Cette manière de faire a permis une meilleure uniformité entre les collections dans l'identification des items à analyser, tout en cernant de manière très précise le travail à réaliser. Lorsque la collection ayant servi à la préanalyse a été étudiée (collection Y), certains items qui avaient été analysés ont finalement été rejetés parce qu'ils portaient sur des notions autres que la notation exponentielle, mais qui l'exploitent (notation scientifique, ordre de grandeur). De plus, une revalidation des items a toujours eu lieu lors de la collecte de données, pour chacune des collections. Quelques items ont dans ce dernier processus été rejetés ou fusionnés afin d'assurer le plus de cohérence possible entre les différentes collections. Il est aussi à noter que lorsqu'un doute subsistait, une vérification était faite auprès de l'équipe de direction afin de valider les choix faits.

Avec l'accord du comité d'experts, il a été décidé que la collecte de données se ferait elle aussi dans l'ordre alphabétique de leur encodage. Il était ainsi possible de déterminer les résultats préliminaires et des interprétations au fur et à mesure de la collecte pour chacune des collections, dans un fichier prévu à cet effet. Cette méthode permettait également de faire ressortir des tendances générales pour les collections pour un même cycle d'études. Ensuite, un regard plus « vertical », portant sur les collections issues d'une même maison d'édition, a pu être réalisé.

À la suite de la collecte de données des trois collections du primaire, une présentation détaillée a été faite au comité d'experts de l'avancement des travaux et de la méthodologie utilisée. Les discussions lors de cette rencontre ont permis de valider ce qui avait été fait jusque-là et de nous assurer de la rigueur du processus.

À la fin du processus de collecte de données, une présentation globale des résultats préliminaires a été effectuée auprès du comité d'experts. Les questionnements qui n'avaient pas été résolus en cours de route ont ainsi pu être clarifiés afin, entre autres, de nous assurer de la fiabilité et de la validité des données, aspect qui fera l'objet de la prochaine section.

2.4 Évaluation de la fiabilité et de la validité des données

Tout d'abord, en ce qui concerne la fiabilité, soulignons que nous pouvons en reconnaitre au moins trois types : 1) la stabilité; 2) la reproductibilité et 3) l'exactitude (Landry, 1997). La stabilité pourrait être définie en quelque sorte comme la cohérence des résultats. Ceux-ci devraient être relativement invariants dans le temps. La reproductibilité, quant à elle, renvoie plutôt à l'idée d'invariance des résultats lorsque le guide de codification est utilisé par diverses personnes. Finalement, l'exactitude correspond au degré de satisfaction en lien avec une norme. Celle-ci est « à peu près impossible à réaliser avec des données d'analyse de contenu. En conséquence, toute l'analyse de contenu doit viser à atteindre un degré élevé de reproductibilité. Le seuil de 95 % constitue une norme dont on ne peut s'éloigner qu'au risque de dériver des conclusions erronées. » (*Ibid*, p. 346)

Afin d'établir la fiabilité de la grille, un guide de codification a été élaboré, comme nous l'avons expliqué à la section 2.1.4. Ce guide a été une source de référence continuelle afin de nous assurer de la reproductibilité, comme spécifié par Landry (1997) au paragraphe précédent. Malgré la lourdeur de la tâche et une certaine étendue dans le temps de la collecte de données (six semaines en tout), nous pensons que nos résultats respectent le niveau attendu de fiabilité.

En ce qui concerne la validité, Landry (1997) rappelle qu'« [elle] renvoie à la capacité de l'unité de mesure choisie et des catégories analytiques retenues à mesurer le phénomène étudié. » (*Ibid*, p. 347) Le type de validité semblant la plus réaliste dans le cadre de notre projet est celle concernant la nature des données, puisqu'elle se forme de la validité de l'échantillon (qui, dans notre cas, est la population au complet) et de la validité sémantique (qui a selon nous été atteinte grâce au travail avec les deux experts). Nous avons tenté, dans la mesure du possible, d'accumuler des preuves s'appuyant sur plusieurs types de validités, comme recommandé par Landry (1997), entre autres, en décrivant systématiquement l'ensemble de nos choix au fur et à mesure du processus dans un fichier électronique prévu à cette fin.

2.5 Analyse et interprétation des résultats

Puisque les objectifs de l'étude ne cherchent pas à comparer les collections de manuels scolaires entre elles, mais plutôt à en décrire les caractéristiques fondamentales, nous avons opté dans le présent projet pour une approche mixte, à forte dimension qualitative. Comme le rappellent Paillé et Mucchielli (2010), « [d]ans les méthodes qualitatives, ce qui caractérise les techniques de traitement ou d'analyse c'est, essentiellement, la mise en œuvre des ressources de l'intelligence pour saisir des significations. » (p. 11) Divers moyens ont été présentés dans les sections précédentes pour baliser cette démarche afin qu'elle soit adaptée et rigoureuse. En effet, « [l]'analyse qualitative n'est pas un acte de divination. Un matériau ne parle pas de lui-même, il doit être interrogé. » (*Ibid.*, p. 70) Selon Landry (1997), l'analyse de contenu se prête autant à une approche qualitative qu'à une approche quantitative, selon les objectifs de l'étude. Dans le cas d'une analyse qualitative de contenu, c'est par une interprétation à l'aide de quelques catégories analytiques de la documentation à l'étude qu'il sera possible de faire ressortir les particularités de celle-ci. Quelques éléments quantitatifs, entre autres sur le plan de la présence relative de chacun des items, viennent nuancer et compléter le portrait. Les résultats seront présentés au chapitre suivant.

2.6 Avantages et limites *a priori* de l'analyse de contenu

Sur le plan des avantages, soulignons tout d'abord que « l'analyse manuelle de contenu constitue une technique non réactive de collecte de données » (Landry, 1997, p. 349). Elle est également très appropriée à l'étude de matériel documentaire comme les manuels scolaires, car le chercheur peut entreprendre quand il le désire son analyse. De plus, cette méthode peut être efficace même dans le cas du traitement d'une grande quantité de données, ce qui était d'ailleurs le cas pour notre étude. Toutefois, elle n'est pas exempte d'inconvénients. Soulignons, entre autres, le fait que l'opération de codification qui peut être complexe et relativement longue, ce qui s'est effectivement produit pour nous. Une autre limite importante consiste en la difficulté à déterminer avec un degré acceptable de certitude la fiabilité et la validité des résultats obtenus (*Ibid.*). Toutefois, nous pensons avoir fait preuve de transparence pendant l'ensemble du processus en nous appuyant autant que possible sur le cadre de référence, sur l'expérience professionnelle du comité d'experts et sur le guide de codification. D'autres avantages et d'autres limites de l'étude seront présentés de manière plus détaillée lors de la discussion des résultats.

3. CONSIDÉRATIONS ÉTHIQUES

Comme le souligne Crête (1997), « [l]'éthique, telle qu'on la comprend de nos jours, cherche à garantir à tout le monde droits et bien-être. » (p. 235) Il est donc fondamental de démontrer que le présent projet a respecté tout au long de son déroulement les règles éthiques.

Tout d’abord, la *Déclaration relative aux travaux de recherche liée au mémoire ou à la thèse* a été acheminée aux responsables du programme, tel que stipulé dans les informations relatives à l’éthique de la recherche. Étant donné que la collecte de données s’est effectuée sur des manuels scolaires, aucun participant humain n’a été sollicité. Il n’a donc pas été nécessaire d’obtenir le certificat de conformité éthique avant de procéder à la collecte des données. Toutes les règles concernant l’anonymat ont été scrupuleusement respectées. Par exemple, l’identification par un code de chacune des collections a permis de conserver l’anonymat. Aucune affirmation de type opinion ou qui pouvait porter préjudice aux auteurs n’a été formulée, plus particulièrement en lien avec la qualité du matériel didactique étudié.

L’ensemble des éléments présentés lors de la méthodologie nous a permis de réaliser la collecte de données prévue d’une manière que nous jugeons fiable et rigoureuse. À la lumière de celle-ci, le quatrième chapitre présente les principaux résultats de l’étude.

QUATRIÈME CHAPITRE
ANALYSE ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

À la suite de notre questionnement de départ concernant l'apprentissage de la notation exponentielle et des difficultés que comporte son enseignement et éclairé par différentes recherches (Bessot et Eberhard, 1982; Biron, 2012; Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006; Pimm, 1987; Roegiers, 1998*a*; Vinner, 2002; Wilson, 1990), nous avons procédé à l'élaboration d'une grille d'analyse − dont la démarche est traitée au troisième chapitre − qui permet de cerner certains aspects présentés dans les manuels scolaires du primaire et du secondaire. Plus précisément, cette grille a pour but de relever de manière systématique et la plus rigoureuse possible la nature des définitions, des exercices, des problèmes ou de tout autre item en lien avec la notation exponentielle dans les manuels scolaires.

Le présent chapitre aborde les principaux résultats obtenus à la suite de l'analyse de neuf collections de manuels scolaires approuvées par le MELS de la 5^{e} année du primaire à la 3^{e} année du secondaire dans le traitement de la notation exponentielle, en réponse aux questions générale et spécifiques de recherche posées aux premier et deuxième chapitres. Rappelons-les afin de les avoir en tête à la lecture des résultats :

Question générale de recherche :

- Quel contenu retrouve-t-on dans les manuels scolaires de mathématiques québécois, de la 5^{e} année du primaire à la 3^{e} année du secondaire, en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle?

Questions spécifiques de recherche :

- Quels types de définitions y retrouve-t-on? Où se situent-elles dans les séquences des diverses activités proposées? Est-ce que le vocabulaire et le symbolisme y sont mathématiquement adéquats? Est-ce que les exemples et les contrexemples sont, s'il y a lieu, cohérents avec la définition à laquelle ils réfèrent?

- Quels types d'exercices y retrouve-t-on? Où se situent-ils dans les séquences des diverses activités proposées? Est-ce que le vocabulaire et le symbolisme y sont mathématiquement adéquats? Est-ce que les exemples et les contrexemples sont, s'il y a lieu, cohérents avec l'exercice qui est proposé?
- Quels types de problèmes y retrouve-t-on? Où se situent-ils dans les séquences des diverses activités proposées? Est-ce que le vocabulaire et le symbolisme y sont mathématiquement adéquats? Est-ce que les exemples et les contrexemples sont, s'il y a lieu, cohérents avec le problème qui est proposé?

Afin de repérer plus facilement les différentes informations colligées dans ce chapitre, nous l'avons structuré selon les cinq sections suivantes : 1) les résultats en lien avec la répartition des items selon les catégories et leur organisation à l'intérieur de la collection; 2) les résultats en lien avec les items « définition »; 3) les résultats en lien avec les items « exercice »; 4) les résultats en lien avec les items « problème » et 5) les résultats en lien avec les items d'une autre nature. Chacune de ces cinq sections est structurée par ordre d'enseignement, primaire et secondaire. Ainsi, pour chacune des sections, nous présentons d'abord les données recueillies pour les collections du 3^{e} cycle du primaire (5^{e} et 6^{e} années du primaire, R-S-T), suivies des collections des 1er et 2^{e} cycles du secondaire (1re et 2^{e} années du secondaire, U-V-W et 3^{e} année du secondaire, X-Y-Z). Aussi, de manière à faciliter l'analyse et l'interprétation des résultats, les divers résultats par collection d'un même cycle scolaire, puis une synthèse en lien avec les trois collections d'un même cycle sont réalisés. Compte tenu de l'ampleur des résultats obtenus, nous avons veillé à éviter les anecdotes pour nous en tenir à des aspects d'intérêt général en lien avec notre objet d'étude. Aussi, chacune des sections et sous-sections présente à cet égard les principaux constats issus des données pour faciliter un regard à la fois particulier à chacune des collections et global en lien avec chacune des catégories étudiées. Ces différents résultats permettent d'apporter un éclairage sur les questions spécifiques de notre étude. Enfin, une synthèse des résultats complète ce chapitre afin de répondre plus spécifiquement à la question générale en lien avec les sous-questions de la recherche.

En terminant, étant donné que les codes d'identification de certains items sont utilisés dans la présentation des résultats afin de soutenir nos propos, rappelons que la première lettre (en majuscule) représente la collection; la deuxième lettre (en minuscule) représente l'ordre d'enseignement; le premier nombre représente le niveau d'enseignement; la troisième lettre (en minuscule) représente la nature de l'item et le dernier nombre représente l'ordre d'apparition de l'item dans la collection. Par exemple, le code d'identification de l'item « Xs3p45 » fait référence à la collection *Intersection* (Boucher, Marotte et Coupal, 2007), au manuel de secondaire 3; il s'agit d'un problème et il est le 45^{e} item explicitement en lien avec la notation exponentielle présent dans la collection selon l'ordre d'apparition chronologique dans le manuel. Des explications plus détaillées sur la codification des items se retrouvent dans le guide de codification (annexe 8).

1. RÉSULTATS EN LIEN AVEC LA RÉPARTITION ET L'ORGANISATION DES ITEMS

Cette section s'intéresse à la répartition des items selon les quatre grandes catégories ayant servi à l'analyse, ainsi qu'à leur organisation à l'intérieur de chacune des collections. Ainsi, cela permet de comparer l'importance relative de chacune des catégories dans chacune des collections, tout en évaluant la concentration ou la dispersion des items dans les manuels. Nous avons choisi de présenter chacune des collections afin de conserver leur caractère particulier et pour permettre une analyse plus fine de leurs ressemblances et de leurs différences. Pour y arriver, ce sont, entre autres, les fréquences d'apparition des items considérés comme des définitions, des exercices, des problèmes ou d'une autre nature qui sont exposées, ainsi que des observations sur leur positionnement à partir des tables des matières. Compte tenu de la grande variété des appellations pour nommer les différentes parties qui constituent les manuels scolaires, nous utiliserons le mot « chapitre » pour identifier celles-ci afin de ne pas avoir à expliquer la nomenclature particulière de chacune des collections. Rappelons également que les abréviations « d », « e », « p » et « a » de la codification utilisée pour les items désignent respectivement les « définition », « exercice », « problème » et les items d'une « autre nature ».

1.1 Répartition et organisation des items pour les collections du primaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec la répartition et l'organisation des items pour chacune des trois collections du primaire. La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblance et de différence entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

1.1.1 Répartition et organisation des items pour la collection R

La collection R comprend 33 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Trente-et-un de ces items, soit la presque totalité, se retrouvent dans le manuel de l'élève A, volume 1 (5^{e} année). Il n'y a aucun item dans le manuel de l'élève A, volume 2 (5^{e} année). Il y a un item dans le manuel de l'élève B, volume 1 (6^{e} année) et il y a également un item dans le manuel de l'élève B, volume 2 (6^{e} année). Le tableau 14 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 14
Répartition des items de la collection R selon leur nature

Nature de l'item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	8	8/33
Exercice	10	10/33
Problème	13	13/33
Autre nature	2	2/33
Total	33	33/33

La répartition des items dans la collection R pourrait être qualifiée de similaire, puisque les trois catégories principales (définition, exercice et problème) comportent sensiblement le même nombre d'items.

Sur le plan de l'organisation des items de la collection R, précisons tout d'abord qu'ils sont grandement concentrés dans l'un des chapitres de l'un des manuels. En effet, 31 des 33 items analysés dans la collection R se retrouvent dans le chapitre 15 du manuel A de l'élève, volume 1 qui contient 19 chapitres en tout. Il est donc possible de relever que la presque totalité du contenu en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle dans la collection R se situe vers la fin du premier manuel destiné à la 5e année du primaire.

Les deux derniers items analysés de cette collection se retrouvent, quant à eux, dans les manuels prévus pour la 6e année du primaire. Plus précisément, l'item Rp5a32 est situé à la toute fin du manuel B, volume 1, normalement prévu pour la 1re moitié de la 6e année, alors que l'item Rp5p33 se situe à la fin du manuel B, volume 2. La présence du terme « retour » dans le titre du chapitre et son emplacement semblent indiquer qu'il constitue une révision de fin d'année et de cycle.

À l'intérieur du chapitre 15 du manuel A, l'organisation des items permet de dégager une certaine structure. Le tableau 15 présente l'ordre d'apparition des items selon les pages du chapitre.

Tableau 15
Ordre d'apparition des items dans la collection R

Chapitre 15 – Manuel A Numéro de la page	Identification et répartition des items
112	p1
113	p2 – e3 – p4 – d5
114	p6 – e7 – p8 – d9
115	p10 – e11 – e12 – d13
116	d14 – e15 – e16 – e17 – e18
117	p19 – p20
118	e21 – a22
119	p23 – e24
120	p25 – d26 – d27 – d28 – d29
121	p30 – p31

Il est possible d'observer que pour les 31 premiers items analysés, chacune des pages contient entre deux et cinq items, sauf pour le premier item (Rp5p1) qui est un problème occupant l'ensemble de la page initiale du chapitre 15. Il existe également une certaine alternance dans la nature des items qui sont présentés au fur et à mesure de l'évolution du chapitre. En effet, la plupart des pages contiennent des items de nature différente qui sont structurés dans des ordres différents. Finalement, soulignons la présence à la page 118 de deux exercices qui réinvestissent la notation exponentielle dans d'autres contextes (décomposition de nombres avec l'aide des puissances de 10 et décomposition de nombres en facteurs premiers). Ces deux exercices n'ont toutefois pas été retenus dans notre analyse compte tenu des règles qui ont été établies afin de cibler les éléments traitant exclusivement de la notation exponentielle.

Il est à noter également qu'aucun symbolisme mathématique n'est introduit avant le quatorzième item (d14) que nous avons analysé. Il semble que dans cette structure les auteurs se préoccupent d'abord de présenter le sens « multiplication répétée » et se soucient de l’appropriation d’une partie du vocabulaire (carré, cube, puissance) pour ensuite introduire le symbolisme et l’exploiter tout de suite dans un exercice à partir du quinzième item (e15). Plusieurs items analysés axés sur le symbolisme suivent d’ailleurs le 14e item (d14), particulièrement sur le plan des exercices.

Le portrait que nous venons de dresser de la collection R met notamment en relief une grande concentration de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle dans un unique chapitre destiné aux élèves de 5e année du primaire, ainsi qu'un contenu naviguant entre un nombre similaire d’exercices, de problèmes et de définitions. Il ressort aussi une tendance à présenter d'abord des problèmes et des exercices avant de faire apparaitre des définitions. Examinons maintenant ce qui en est de la collection S.

1.1.2 Répartition et organisation des items pour la collection S

La collection S comprend sept items qui portent explicitement sur l’enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Les sept items se retrouvent dans le manuel de l’élève du 3e cycle du primaire – volume 2, qui est prévu pour l’enseignement aux élèves de 6e année. Il n’y a donc aucun item portant explicitement sur l’enseignement-apprentissage de la notation exponentielle dans le manuel de l’élève du 3e cycle du primaire – volume 1, qui est celui prévu pour l’enseignement aux élèves de 5e année. Le tableau 16 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 16
Répartition des items de la collection S selon leur nature

Nature de l’item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	2	2/7
Exercice	2	2/7
Problème	2	2/7
Autre nature	1	1/7
Total	7	7/7

La répartition des items dans la collection S pourrait être qualifiée de similaire, puisque les trois catégories principales (définition, exercice et problème) comportent exactement le même nombre d'items.

Sur le plan de l'organisation des items de la collection S, notons que tous les items sont regroupés sur deux pages, situées dans la deuxième moitié du manuel de l'élève 3e cycle du primaire – volume 2, qui est prévu pour les élèves de 6e année. Ces pages font partie d'un chapitre intitulé *Jeux de nombres*.

Les deux pages consacrées à la notation exponentielle commencent par deux problèmes qui sont suivis d'une capsule historique, d'une définition, de deux exercices et d'une dernière définition. Le tableau 17 présente l'ordre d'apparition des items selon les pages du chapitre.

Tableau 17
Ordre d'apparition des items dans la collection S

Volume 2 − 6e année Numéro de la page	Identification et répartition des items
128	p1 – p2
129	a3 – d4 – e5 – e6 – d7

Il convient de souligner que le symbolisme associé à la notation exponentielle est abordé à partir du 4e item (d4). Également, il est à noter qu'aux pages 41, 68 et 70 du même manuel (3e cycle du primaire – volume 2), la notation exponentielle est utilisée dans divers contextes (priorités d'opérations, échelle, décomposition d'un nombre avec l'aide des puissances de 10). Ainsi, la notation exponentielle est exploitée, alors qu'elle n'a pas encore été officiellement présentée.

Le portrait que nous venons de dresser de la collection S nous permet de constater une faible importance accordée à l'enseignement-apprentissage explicite de la notation exponentielle en 5e année du primaire, que ce soit par le peu d'items présents ou encore par le fait qu'elle est utilisée avant d'avoir été officiellement introduite. Ce contenu n'est abordé, dans cette collection, qu'en 6^{e} année. L'organisation des items montre que ce sont en premier lieu des problèmes qui donnent accès à la notation exponentielle. Examinons maintenant la collection T, qui est la dernière collection analysée du niveau primaire.

1.1.3 Répartition et organisation des items pour la collection T

La collection T comprend 19 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Le manuel A, qui est conçu pour les élèves de 5^{e} année, est composé de quatre volumes. Le manuel B, qui est conçu pour les élèves de 6^{e} année, est lui aussi composé de quatre volumes. Seulement deux des huit volumes comportent des items portant explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle : le manuel A – volume 3 (5^{e} année) contient 16 items, alors que le manuel B – volume 2 (6^{e} année) contient les trois autres items. Le tableau 18 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 18
Répartition des items de la collection T selon leur nature

Nature de l'item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	3	3/19
Exercice	8	8/19
Problème	4	4/19
Autre nature	4	4/19
Total	19	19/19

La répartition des items de la collection T pourrait être qualifiée d'inégale, puisque l'importance relative des items de nature « exercice » est approximativement le double de celle des items « définition » et des items « problème ».

Sur le plan de l'organisation des items de la collection T, précisons tout d'abord qu'ils sont grandement concentrés dans l'un des chapitres de l'un des manuels. En effet, des 19 items analysés, 14 font partie du chapitre 30 situé au début du manuel A – volume 3 (5e année). Deux autres items sont présents un peu plus loin dans ce même manuel, dans la première moitié d'un chapitre de révision (appelé *Au diapason*) et dans le chapitre 36. C'est donc dire que 16 des 19 items sont relativement groupés et surtout concentrés en 5e année. Les trois derniers items se retrouvent dans le chapitre 64, qui est au tout début du manuel B – volume 2 (6e année). Ce chapitre porte sur l'écriture des nombres inférieurs à 1 000 000 et propose des activités qui exploitent les puissances de 10.

Afin d'observer plus finement la structure adoptée, examinons de quelle manière les items sont organisés entre eux dans le chapitre 30, puisque celui-ci contient la majorité des items. Le tableau 19 présente l'ordre d'apparition des items selon les pages du chapitre.

Tableau 19
Ordre d'apparition des items dans le chapitre 30 de la collection T

Manuel A – volume 3 – chapitre 30 Numéro de la page	Identification et répartition des items
13	p1
14	p2 – a3
15	p4 – e5
16	e6 – e7 – e8
17	p9 – e10 – a11
18	d12 – d13 – d14

Le tableau précédent permet de constater que le chapitre est, au départ, sensiblement structuré dans une logique de problèmes suivis d'exercices et se termine par l'énonciation de trois définitions. Sur le plan du symbolisme, il est possible d'observer que celui-ci est très présent dès le premier item (manuel A – volume 3).

Soulignons également que les chapitres 64, 65 et 66 (manuel B – volume 2) réinvestissent dans d'autres contextes la notation exponentielle (décomposition de nombres en puissances de 10, décompositions de nombres en facteurs premiers). Il est aussi possible de souligner que des items sont répétés dans les chapitres *Extra*, qui constituent en quelque sorte des synthèses théoriques. Par exemple, les définitions Tp5d12, Tp5d13 et Tp5d14 sont répétées dans leur intégralité dans la section *Extra* du manuel B − volume 3, donc dans le même manuel où elles apparaissent pour la première fois. Ces mêmes définitions réapparaissent également intégralement au chapitre 50 (qui est au tout début du manuel B− volume 1) et dans le chapitre *Extra* de ce même manuel. Soulignons aussi qu'à la toute fin du manuel B – volume 2, l'item Tp6a19 est répété.

Le portrait que nous venons de dresser de la collection T met notamment en relief une grande concentration de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle en 5e année du primaire, ainsi qu'une approche mettant en premier lieu les problèmes et les exercices qui se termine par l'énonciation de définitions. Comparons maintenant les trois collections du primaire afin d'en faire ressortir les différentes particularités sur le plan de la répartition et de l'organisation des items.

1.1.4 Synthèse concernant la répartition et l'organisation des items pour les collections du 3e cycle du primaire

Le portrait des trois collections du primaire que nous venons de présenter indique une tendance marquée à concentrer les items pour les notions reliées à la notation exponentielle non seulement dans un même ouvrage, mais encore plus précisément dans un même chapitre. Alors que pour les collections R et T la concentration des items se retrouve dans le manuel destiné à la 5e année, c'est en 6e année que se destine cette matière pour la collection S. Cette tendance remet en question l'idée d'une progression des apprentissages reliée à ce contenu de la 5e à la 6e année, puisque cela ne se reflète pas dans la distribution des items des collections examinées. Toutefois, le début des chapitres où le concept est abordé est composé d'un ou de deux problèmes dans les trois cas. Une autre particularité à souligner est le fait que ce soit la base 2 qui est utilisée dans le premier item de chacune des collections. Comment expliquer cette tendance? Est-ce à cause de la croissance extrêmement rapide des expressions exponentielles que le choix de prendre la plus petite base naturelle possible a été fait?

Notons aussi la différence entre le nombre d'items présents dans chacune des collections. La collection R est celle qui présente le plus d'items (33), alors que la collection S est celle qui en présente le moins (7); la collection T, quant à elle, se trouve à peu près à mi-chemin pour le nombre d'items (19) présentés. Une si grande variance entre les collections pour traiter de la notation exponentielle permet-elle de l'appréhender avec autant de profondeur dans tous les cas? Aussi, dans les collections R et S, la première moitié environ des items ne traite aucunement du symbolisme, alors que dans la collection T, le symbolisme associé à la notation exponentielle est fortement présent dès le premier item. Est-ce que cela pourrait avoir une incidence sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle? À ce stade-ci, ces données générales ne permettent pas d'apprécier la qualité et les caractéristiques du contenu abordé dans ces collections, c'est pourquoi nous y consacrerons une attention particulière aux sections 2, 3 et 4 qui suivent la présentation des collections. Nous remarquons finalement que les collections R et S présentent un nombre relativement semblable d'items de chacune des natures, alors que la collection T contient une plus grande proportion d'exercices que d'items « définition », « problème » ou d'une « autre nature ».

1.2 Répartition et organisation des items pour les collections du 1er cycle du secondaire

Les trois sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec la répartition et l'organisation des items pour les trois collections du 1er cycle du secondaire. La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblance et de différence entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

1.2.1 Répartition et organisation des items pour la collection U

La collection U comprend 51 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Les manuels A et B s'adressent aux élèves de 1re secondaire. Les manuels C et D s'adressent, quant à eux, aux élèves de 2e secondaire. Deux des quatre volumes contiennent des items portant explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle : le manuel A (1re sec.) contient la presque totalité des items, soit 49, alors que le manuel C (2e sec.) contient les deux derniers. Le tableau 20 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 20
Répartition des items de la collection U selon leur nature

Nature de l'item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	7	7/51
Exercice	28	28/51
Problème	9	9/51
Autre nature	7	7/51
Total	51	51/51

La répartition des items de la collection U pourrait être qualifiée de très inégale, puisque l'importance relative des items de nature « exercice » est beaucoup plus grande que celle des items « définition » et que celle des items « problème ». En effet, 55 % des items de la collection U sont considérés de nature « exercice », les trois autres catégories se répartissant assez équitablement les 45 % restants.

Sur le plan de l'organisation, les items portant sur la notation exponentielle sont concentrés en sept endroits distincts : six de ces endroits sont dans le manuel A (sec. 1), alors que deux items se retrouvent ensemble dans le manuel C (sec. 2). Le tableau 21 présente les résultats en lien avec l'organisation des items dans la collection U.

Tableau 21
Organisation des items dans la collection U

Endroits ciblés	Identification et répartition des items
Manuel A – chapitre 1 – section 4 Page 54	d1 – p2
Manuel A – chapitre 3 – section 3 Pages 181 à 188	a3 – p4 – a5 – d6 – d7 – a8 – e9 – p10 – e11 – e12 – e13 – p14 – a15 – e16 – e17 – a18 – d19 – e20 – e21 – d22 – e23 – e24 – p25 – e26 – p27 – p28
Manuel A – chapitre 3 – section 5 Page 200	a29 – e30 – e31 – e32 – e33
Manuel A – chapitre 3 – *Bric à brac* Pages 209 et 210	a34 – p35
Manuel A – chapitre 4 – section 3 Pages 252 et 255	e36 – e37 – d38 – e39 – e40 – e41 – e42 – e43 – e44
Manuel A – chapitre 4 – *Bric à brac* Pages 263 à 266	p45 – e46 – e47 – e48 – e49
Manuel C – chapitre 4 – section 1 Pages 208 et 224	d50 – e51

Tout d'abord, il est possible de constater que dans la partie traitant le plus de la notation exponentielle (manuel A – chapitre 3 – section 3), la nature des items est relativement entremêlée, c'est-à-dire que nous retrouvons des définitions, des exercices, des problèmes et des items d'une autre nature qui ne sont pas regroupés par catégorie. Les autres endroits où nous retrouvons la notation exponentielle sont principalement composés d'exercices.

Quelques allusions à la notation exponentielle sont présentes, et ce, avant même son introduction explicite dans le contexte de l'étude de notre système de numération. Les deux premiers items sont d'ailleurs présentés dans ce contexte (manuel A – chapitre 1 – section 4). Par la suite, il est possible d'observer une certaine progression : jusqu'au 13e item (e13), l'idée générale (contexte « zéro-définition ») de la notation exponentielle est présentée. On utilise donc principalement des bases naturelles avec des exposants entiers. Du 14e (p14) au 22e (d22) item, les propriétés $m^a \times m^b = m^{a+b}$ et $m^a \div m^b = m^{a-b}$ sont explorées de façon implicite. Viennent ensuite des réinvestissements de tout cela (jusqu'au 28e item (p28), ainsi que les items a34 et p35. Les items 29 à 33 explorent, quant à eux, la base fractionnaire. À partir du 36e item (e36) et jusqu'au 43e (e43), c'est la base entière qui fait son apparition. Les items 45 à 49 correspondent à un nouveau réinvestissement des acquis. Finalement, les items d50 et e51 préparent la transition de la notation exponentielle du contexte arithmétique au contexte algébrique. Malgré une assez grande concentration des informations relatives à la notation exponentielle (la moitié des items se retrouve à l'intérieur de quelques pages : manuel A – chapitre 3 – section 3), il est possible de remarquer que le sujet est quand même abordé à différents endroits et dans quelques contextes (numération, notation exponentielle comme telle, opérations, nombres décimaux et fractionnaires, algèbre). Notons également que la notation exponentielle est utilisée dans quelques contextes connexes, comme pour l'apprentissage de la notation scientifique.

Le portrait que nous venons de faire de la collection U nous permet de constater que la notation exponentielle y occupe somme toute une place assez importante. En effet, cinquante-et-un items ont été répertoriés et des réinvestissements sont présents dans divers contextes. Malgré une concentration de la moitié des items dans un même endroit (manuel A – chapitre 3 – section 3), il n'en demeure pas moins que la notation exponentielle est abordée de manière explicite dans pas moins de sept parties différentes de l'ouvrage. Examinons maintenant ce qui en est de la collection V.

1.2.2 Répartition et organisation des items pour la collection V

La collection V comprend 56 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Le manuel A, qui est conçu pour les élèves de secondaire 1, est composé de deux volumes. Le manuel B, qui est conçu pour les élèves de secondaire 2, est lui aussi composé de deux volumes. Trois des quatre volumes contiennent des items portant explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle : le manuel A – volume 1 (sec. 1) contient 47 items; le manuel A – volume 2 (sec. 1) contient huit items et le manuel B – volume 1 (sec. 2) contient un item. Le tableau 22 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 22
Répartition des items de la collection V selon leur nature

Nature de l'item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	9	9/56
Exercice	26	26/56
Problème	18	18/56
Autre nature	3	3/56
Total	56	56/56

La répartition des items de la collection V pourrait être qualifiée de plutôt inégale, puisque l'importance relative des items de nature « exercice » est beaucoup plus grande que celle des items « définition » et un peu plus grande que celle des items « problème ».

Sur le plan de l'organisation, les items portant sur la notation exponentielle sont concentrés en neuf endroits distincts : quatre de ces endroits sont dans le manuel A – volume 1 (sec. 1), quatre autres sont dans le manuel A – volume 2 (sec. 1) et le dernier se retrouve dans le manuel B – volume 1 (sec. 2). Le tableau 23 présente les résultats en lien avec l'organisation des items dans la collection V.

Tableau 23
Organisation des items dans la collection V

Endroits ciblés	Identification et répartition des items
Manuel A – volume 1 – unité 2.1 Pages 68 à 73	d1 – d2 – d3 – d4 – d5 – e6 – e7 – e8 – e9 – e10 – e11 – e12 – e13 – e14 – p15 – e16 – e17 – e18 – e19 – e20 – e21 – e22 – p23 – p24 – e25 – e26 – a27 – p28 – p29 – p30 – p31 – e32 – p33
Manuel A – volume 1 – *Tour d'horizon* Pages 104 à 108	p34 – p35 – p36 – e37 – p38 – p39
Manuel A – volume 1 – unité 3.4 Pages 143 à 147	p40 – d41 – e42 – e43 – p44 – e45
Manuel A – volume 1 – *Album* Pages 224 et 230	a46 – a47
Manuel A – volume 2 – unité 5.7 Pages 56 à 59	p48 – d49 – e50 – p51
Manuel A – volume 2 – unité 6.3 Page 99	e52
Manuel A – volume 2 – *Tour d'horizon* Page 153	p53
Manuel A – volume 2 – *Album* Pages 228 et 230	d54 – d55
Manuel B – volume 1 – unité 10.4 Page 82	e56

De prime abord, il est possible d'observer que les trente-trois premiers items sont concentrés dans une seule partie, soit dans le manuel A – volume 1 – unité 2.1. Ceux-ci y sont structurés de manière assez distincte selon leur nature : des définitions ouvrent l'unité; elles sont suivies de plusieurs exercices et de quelques problèmes qui clôturent le tout. Les items 34 à 39 se retrouvent dans la section *Tour d'horizon* qui sert de retour au chapitre 2. Il est donc possible de constater que 39 des 56 items se trouvent concentrés dans ce chapitre. Il est aussi à noter que tous ces items ne portent que sur des bases naturelles affectées d'un exposant entier plus grand ou égal à 0.

Les items 40 à 45 se retrouvent dans l'unité 3.4 du manuel A – volume 1, *panorama 3*, sec. 1. Ils traitent, entre autres, des bases entières et de la gestion des parenthèses dans ce type de situation. Deux items d'une autre nature (a46 et a47) se retrouvent à la toute fin du manuel A – volume 1. Ils portent sur l'utilisation de la calculatrice et sont un rappel du fonctionnement de la notation exponentielle. Notons que 47 des 56 items se retrouvent dans le manuel A – volume 1 de la collection.

Les items 48 à 51 se retrouvent dans l'unité 5.7 du manuel A – volume 2 et portent sur les exposants entiers. Compte tenu de leur dispersion, nous précisons ici l'organisation des derniers items de la collection. Ainsi, l'item e52 se retrouve dans l'unité 6.3 du manuel A – volume 2 et porte sur des bases décimales. La notation exponentielle est ensuite réinvestie dans quelques éléments des unités 6.3 et 6.4 (chaînes d'opérations, transformation d'unités, système de numération). L'item p53, pour sa part, est situé dans le *Tour d'horizon* du chapitre 7 (manuel A, volume 2). Finalement, les définitions d55 et d56 se retrouvent dans un glossaire situé à la toute fin de ce manuel. Soulignons que ces définitions sont répétées mot pour mot dans le glossaire du manuel B – volume 2 (sec. 2). Le dernier item se retrouve au chapitre 10 qui porte principalement sur la racine carrée. Il s'agit d'un exercice qui demande aux élèves de calculer des puissances d'expressions exponentielles affectées de l'exposant 0,5. Il est entouré de quelques réinvestissements, principalement dans le contexte de la racine carrée et de l'algèbre. Ainsi, un effort semble présent pour ne pas traiter exclusivement de la notation exponentielle dans un chapitre prévu à cet effet, même si la très grande majorité des items se retrouve dans quelques chapitres (plus particulièrement dans l'unité 2.1). Il est aussi possible de constater que 55 des 56 items se retrouvent en secondaire 1. Notons finalement que la notation exponentielle est réinvestie dans plusieurs contextes (factorisation première, critères de divisibilité, priorités d'opérations, transformation d'unités de mesure, aire).

Le portrait que nous venons de faire de la collection V nous permet de constater que la notation exponentielle occupe ici aussi une place assez importante. En effet, cinquante-six (56) items ont été répertoriés et des réinvestissements sont présents dans divers contextes. Malgré une concentration de près de 70 % des items dans un même chapitre (manuel A – volume 1 – chapitre 2), il n'en demeure pas moins que la notation exponentielle est abordée de manière explicite dans pas moins de neuf parties différentes de l'ouvrage, et ce, surtout en secondaire 1. Examinons maintenant la collection W, qui est la dernière collection analysée pour le premier cycle du secondaire.

1.2.3 Répartition et organisation des items pour la collection W

La collection W comprend 22 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Le manuel A, prévu pour l'enseignement aux élèves de secondaire 1, est composé de deux volumes. Le manuel B, prévu pour l'enseignement aux élèves de secondaire 2, est lui aussi composé de deux volumes. Trois des quatre volumes comportent des items portant explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle : le manuel A – volume 1 (sec. 1) contient deux items; le manuel A – volume 2 (sec. 1) contient deux items et le manuel B – volume 2 (sec. 2) contient 18 items. Le tableau 24 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 24
Répartition des items de la collection W selon leur nature

Nature de l'item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	10	10/22
Exercice	7	7/22
Problème	5	5/22
Autre nature	0	0/22
Total	22	22/22

La répartition des items de la collection W pourrait être qualifiée de plutôt inégale, puisque l'importance relative des items de nature « définition » représente le double de celle des items « problème », celle des items « exercice » se situant entre les deux autres catégories principales.

Sur le plan de l'organisation, les items portant sur la notation exponentielle sont concentrés en quatre endroits distincts : le premier de ces endroits est dans le manuel A – volume 1 (sec. 1), le deuxième est dans le manuel A – volume 2 (sec. 1) et les deux derniers se retrouvent dans le manuel B – volume B (sec. 2). Le tableau 25 présente les résultats en lien avec l'organisation des items dans la collection W.

Tableau 25
Organisation des items dans la collection W

Endroits ciblés	Identification et répartition des items
Manuel A – volume 1 – *Glossaire* Page 218	d1 – d2
Manuel A – volume 2 – *Glossaire* Page 451	d3 – d4
Manuel B – volume 2 – chapitre 7 Pages 370 à 377	p5 – d6 – e7 – e8 – d9 – d10 – d11 – e12 – e13 – e14 – e15 – e16 – p17 – p18 – p19 – p20
Manuel B – volume 2 – *Glossaire* Pages 548 et 556	d21 – d22

Tout d'abord, il est possible de constater que la très grande majorité des items se retrouve dans une seule partie du manuel (manuel B – volume 2 – chapitre 7). Nous remarquons qu'après avoir entremêlé un problème avec quelques définitions et deux exercices, il y avait présence de quatre nouveaux exercices, puis de quatre problèmes pour conclure. Tous les items n'étant pas situés dans cette partie sont des définitions qui se retrouvent dans les glossaires présents à la fin de chacun des manuels. Quelquefois, une même définition y est d'ailleurs répétée d'un manuel à l'autre, mais des définitions différentes sont tout de même présentes dans trois des quatre glossaires.

Il est à noter que l'ensemble des items porte principalement sur les expressions exponentielles ayant un exposant entier, ce qui semble le cœur des apprentissages visés sur le sujet dans cette collection. Il apparait aussi qu'il y a très peu de réutilisations de la notation exponentielle présentes dans les autres chapitres. Soulignons tout de même la présence de quelques allusions au fur et à mesure des différents manuels, plus particulièrement dans les contextes d'ordre de grandeur des nombres, de factorisation première, de priorité des opérations et de l'algèbre.

Le portrait que nous venons de dresser de la collection W met notamment en relief une présence peu importante de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, puisque seulement 22 items y sont explicitement consacrés. Ceux-ci sont grandement concentrés à l'intérieur de quelques pages d'un même chapitre se situant en 2e secondaire (manuel B – volume 2). Comparons maintenant les trois collections du premier cycle du secondaire afin d'en faire ressortir les différentes particularités sur le plan de la répartition et de l'organisation des items.

1.2.4 Synthèse concernant la répartition et l'organisation des items pour les collections du 1er cycle du secondaire

Dans les collections U et V, la presque totalité des items portant sur la notation exponentielle se retrouve en 1re secondaire, alors que dans la collection W, c'est en secondaire 2 que nous les retrouvons.

Dans les collections U et V, une assez grande importance est accordée à l'étude de la notation exponentielle (plus de cinquante items y sont consacrés dans les deux cas et plusieurs contextes de réinvestissement sont proposés au fur et à mesure de l'avancement dans les collections). Pour ce qui est de la collection W, l'importance accordée est vraiment moins grande (seulement 22 items). De plus, si nous enlevons les six items situés dans les glossaires de cette collection, nous nous retrouvons avec seulement 16 items pour aborder la notation exponentielle. Si nous en savons peu sur l'utilisation générale des manuels lors de l'enseignement des mathématiques, nous en savons encore moins sur l'utilisation précise des glossaires en classe.

Les items répertoriés dans les collections sont, de manière générale, relativement concentrés dans des chapitres précis. Toutefois, bien que la répartition ne soit pas toujours équivalente, il y a des items tant au secondaire 1 qu'au secondaire 2, ce qui semble une tentative pour refléter davantage qu'au primaire une progression des apprentissages, telle que suggérée dans la documentation ministérielle (Gouvernement du Québec, 2009, 2011). Précisions aussi que les collections U et V contiennent en proportion beaucoup plus d'exercices que de définitions ou de problèmes, alors que la collection W est plutôt axée sur les définitions. Rappelons qu'une analyse plus fine de ces items permettra d'approfondir notre compréhension sur les ressemblances et les différences des collections examinées.

Il ressort donc que les collections U et V sont semblables du point de vue de la répartition et de l'organisation des items, alors que la collection W est très différente de celles-ci. Elle se distingue particulièrement par un nombre d'items beaucoup moins élevé (22 pour la collection W, comparativement à 51 et 56 pour les collections U et V). Elle se distingue aussi par la présence des items portant sur la notation exponentielle en secondaire 2, alors que les deux autres collections concentrent la majorité des items présents en secondaire 1.

1.3 Répartition et organisation des items pour les collections du 2e cycle du secondaire

Les trois sous-sections qui suivent présenteront les résultats en lien avec la répartition et l'organisation des items pour les trois collections du 2e cycle du secondaire. Rappelons que, bien que le 2e cycle du secondaire porte sur trois années (secondaire 3, 4 et 5), nous nous concentrons dans cette étude sur l'analyse des manuels de secondaire 3 étant donné que l'enseignement-apprentissage explicite de la notation exponentielle est présente à ce niveau scolaire, pour laisser place en secondaire 4 et 5 à la fonction exponentielle plutôt qu'à la notation comme telle. La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblance et de différence entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

1.3.1 Répartition et organisation des items pour la collection X

La collection X comprend 63 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. L'ensemble de la collection s'adresse à des élèves de secondaire 3 et est composé de deux manuels (A et B). Les deux manuels comportent des items portant explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle : le manuel A contient 55 items, alors que le manuel B en contient huit. Le tableau 26 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 26
Répartition des items de la collection X selon leur nature

Nature de l'item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	14	14/63
Exercice	32	32/63
Problème	13	13/63
Autre nature	4	4/63
Total	63	63/63

La répartition des items de la collection X pourrait être qualifiée de très inégale, puisque l'importance relative des items de nature « exercice » est beaucoup plus grande que celle des items « définition » et que celle des items « problème ». En effet, un peu plus de 50 % des items de la collection X sont considérés de nature « exercice », alors que les catégories « définition » et « problème » représentent respectivement 22 % et 21 % des items présents.

Sur le plan de l'organisation, les items portant sur la notation exponentielle sont concentrés en six endroits distincts : quatre de ces endroits se retrouvent dans le manuel A, alors que les deux derniers sont situés dans le manuel B. Le tableau 27 présente les résultats en lien avec l'organisation des items dans la collection X.

Tableau 27
Organisation des items dans la collection X

Endroits ciblés	Identification et répartition des items
Manuel A – chapitre 1 – section 1 Pages 4 à 15	e1 – p2 – e3 – e4 – e5 – d6 – d7 – d8 – e9 – e10 – e11 – e12 – e13 – p14
Manuel A – chapitre 1 – section 3 Pages 31 à 39	p15 – a16 – e17 – e18 – e19 – p20 – e21 – e22 – a23 – d24 – d25 – d26 – d27 – a28 – e29 – e30 – e31 – e32 – e33 – e34 – e35 – e36 – e37 – e38 – e39 – e40 – e41 – p42 – p43 – p44 – p45
Manuel A – chapitre 1 – *consolidation* Pages 40 à 44	e46 – e47 – e48 – p49 – p50 – p51 – p52 – p53 – p54
Manuel A – index Page 278	a55
Manuel B – chapitre 5 – *réactivation* Page 4	e56
Manuel B – *Faire le point, manuel A* Page 259	d57 – d58 – d59 – d60 – d61 – d62 – d63

Tout d'abord, il est possible de constater que 85 % des items se retrouvent dans le chapitre 1 du manuel A, même s'ils sont répartis dans trois sections distinctes (section 1, section 3 et consolidation). Du premier au quatorzième item, la notation exponentielle y est utilisée dans le contexte de la notation scientifique (chapitre 1, section 1), puis les propriétés m^a x m^b = m^{a+b}, $m^a \div m^b = m^{a-b}$ et $(a^m)^n = a^{mxn}$ sont plus spécifiquement travaillées. Les items 15 à 45 sont ensuite présents dans le chapitre 1, section 3, en lien surtout avec les trois propriétés citées précédemment, ainsi que les expressions en notation exponentielle avec des exposants fractionnaires et leur lien avec les radicaux. Pour terminer le chapitre 1, une section « consolidation » contient, entre autres, les items 46 à 54 qui réinvestissent l'ensemble de ce qui a été abordé. L'étude de la notation exponentielle et de ses propriétés se trouve donc concentrée dans une vingtaine de pages qui se retrouvent presque toutes dans le premier chapitre du manuel A (p. 4 à 46). Il est aussi possible de remarquer qu'après quelques problèmes et exercices pour amorcer ce chapitre, nous avons trois blocs distincts qui se suivent : quatre définitions, suivies de 13 exercices, puis de quatre problèmes.

Dans le chapitre 5, le seul item présent (Xs3e56) arrive au tout début et peut en quelque sorte être considéré comme un rappel. Ce chapitre porte sur les expressions algébriques équivalentes. Les propriétés de l'exponentiation y sont donc grandement réinvesties, plus particulièrement dans le contexte des opérations sur les polynômes. Les items 57 à 63 sont des définitions qui se retrouvent à la toute fin du manuel B, dans une section *Faire le point, manuel A*. Cette section semble faire office de bref rappel de ce qui a été étudié dans le premier manuel.

Il ressort de cette section que la collection X semble accorder une grande importance à l'étude de la notation exponentielle, comme en fait foi le nombre élevé d'items (63) qui y sont consacrés. Les items sont principalement regroupés dans le premier chapitre de la collection, mais un réinvestissement est présent dans le contexte des opérations algébriques. Examinons maintenant les résultats associés à la répartition et à l'organisation des items de la collection Y.

1.3.2 Répartition et organisation des items pour la collection Y

La collection Y comprend 51 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. L'ensemble de la collection est conçu pour des élèves de secondaire 3 et est composé de deux volumes (1 et 2). Les deux volumes contiennent des items portant explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle : le volume 1 contient 50 items, alors que le volume 2 en contient seulement un. Le tableau 28 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 28
Répartition des items de la collection Y selon leur nature

Nature de l’item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	15	15/51
Exercice	28	28/51
Problème	5	5/51
Autre nature	3	3/51
Total	51	51/51

La répartition des items de la collection Y pourrait être qualifiée de très inégale, puisque l’importance relative des items de nature « exercice » est beaucoup plus grande que celle des items « définition » et que celle des items « problème ». En effet, 55 % des items de la collection Y sont considérés de nature « exercice », alors que les catégories « définition » et « problème » représentent respectivement 29 % et 10 % des items présents.

Sur le plan de l’organisation, les items portant sur la notation exponentielle sont concentrés en six endroits distincts : cinq de ces endroits se retrouvent dans le volume 1, alors que le dernier est situé dans le volume 2. Le tableau 29 présente les résultats en lien avec l’organisation des items dans la collection Y.

Tableau 29
Organisation des items dans la collection Y

Endroits ciblés	Identification et répartition des items
Volume 1 – chapitre 1 – section 1 Page 3	e1
Volume 1 – chapitre 2 – section 1 Pages 64, 65, puis 74 à 85	e2 – d3 – p4 – a5 – e6 – e7 – p8 – a9 – e10 – e11 – e12 – d13 – d14 – d15 – d16 – d17 – d18 – d19 – a20 – e21 – e22 – e23 – e24 – e25 – e26 – e27 – e28 – e29 – e30 – e31 – e32 – e33 – e34 – e35 – e36 – e37 – p38 – e39 – e40 – p41 – e42
Volume 1 – *Retour* Page 123	p43
Volume 1 – chapitre 4 – section 1 Page 207	d44 – d45
Volume 1 – index Pages 276, 277 et 330	d46 – d47 – d48 – d49 – d50
Volume 2 – chapitre 7 – section 2 Page 588	e51

Tout d'abord, il est possible de constater la très grande concentration des items dans un même endroit (volume 1 – chapitre 2 – section 1) : la très grande majorité des items s'y retrouve sur une douzaine de pages. À l'intérieur de cette section, les informations sont regroupées en trois blocs : un premier où nous retrouvons entremêlés des items de toutes les natures, suivi d'un deuxième qui contient sept définitions, puis un dernier constitué presque exclusivement d'exercices (une vingtaine) et de deux problèmes. Il est à noter que les items de cette section portent plus particulièrement sur les différentes propriétés de l'exponentiation, ainsi que sur les exposants fractionnaires.

Pour les autres items, nous remarquons plus particulièrement qu'au chapitre 4, section 1 du volume 1, les apprentissages réalisés sur la notation exponentielle sont réinvestis dans le contexte des opérations sur les polynômes. C'est à cet endroit que deux définitions directement en lien avec la notation exponentielle (Ys3d44 et Ys3d45) sont présentées. Toujours dans le volume 1, soulignons également la présence de cinq définitions dans une section identifiée *Ma mémoire*.

Dans le volume 2, un exercice (Ys3e51) se retrouve à la toute fin du chapitre 7, dans une *Banque de problèmes* à résoudre. La notation exponentielle y est aussi réinvestie dans deux contextes (notation scientifique et ordre de grandeur).

Il ressort de cette section que la collection Y semble accorder une grande importance à l'étude de la notation exponentielle, comme en fait foi le nombre élevé d'items (51) qui lui sont consacrés. Les informations sont principalement regroupées à un même endroit de la collection (volume 1 – chapitre 2 – section 1), mais un réinvestissement est présent dans le contexte des opérations algébriques. Examinons maintenant la collection Z, qui est la dernière collection analysée du deuxième cycle du secondaire.

1.3.3 Répartition et organisation des items pour la collection Z

La collection comprend 39 items qui portent explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. L'ensemble de la collection s'adresse à des élèves de secondaire 3 et est composé de deux volumes (1 et 2). Les deux volumes comportent des items portant explicitement sur l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle : le volume 1 contient quatre items, alors que le volume 2 en contient 35. Le tableau 30 présente la répartition des items selon leur nature.

Tableau 30
Répartition des items de la collection Z selon leur nature

Nature de l'item	Fréquence	Fréquence relative
Définition	18	18/39
Exercice	14	14/39
Problème	4	4/39
Autre nature	3	3/39
Total	39	39/39

La répartition des items de la collection Z pourrait être qualifiée de plutôt inégale, puisque l'importance relative des items de nature « problème » est vraiment plus petite que celle des deux autres catégories principales. En effet, seulement 10 % des items ont été considérés comme des problèmes, alors que les définitions et les exercices composent respectivement 46 % et 36 % des items de la collection Z.

Sur le plan de l'organisation, les items portant sur la notation exponentielle sont concentrés en quatre endroits distincts : le premier de ces endroits se retrouve dans le manuel A, alors que les trois autres sont situés dans le manuel B. Le tableau 31 présente les résultats en lien avec l'organisation des items dans la collection Z.

Tableau 31
Organisation des items dans la collection Z

Endroits ciblés	Identification et répartition des items
Volume 1 – *Album* Pages 223, 231, 242 et 245	a1 – a2 – d3 – d4
Volume 2 – chapitre 5 – section 5.4 Page 43	e5
Volume 2 – chapitre 6 – section 6.1 Pages 77 à 88	p6 – p7 – p8 – d9 – d10 – d11 – d12 – d13 – d14 – d15 – d16 – d17 – d18 – d19 – d20 – e21 – e22 – e23 – e24 – e25 – e26 – e27 – e28 – e29 – e30 – e31 – e32
Volume 2 – *Chronique du passé* Pages 114-115	a32 – d33 – d34 – d35 – d36 – p37 – e38

Tout d'abord, notons que les quatre premiers items de la collection Z se retrouvent à la toute fin du volume 1, dans les sections *Technologies* (Zs3a1 et Zs3a2) et *Savoirs* (Zs3d3 et Zs3d4). Aucune utilisation, aucune allusion à la notation exponentielle n'est présente ailleurs dans ce volume.

Il est aussi possible de constater que les items relatifs à l'apprentissage explicite de la notation exponentielle sont principalement situés dans un même endroit (volume 2 – chapitre 6 – section 6.1). En effet, près de 70 % des items y sont regroupés. L'ensemble des informations tient sur une dizaine de pages. Dans ce chapitre, trois blocs se dégagent clairement : un premier formé de quatre problèmes, suivi d'un deuxième bloc de 11 définitions, puis d'un dernier bloc de 12 exercices. La notation exponentielle et les propriétés de l'exponentiation y sont présentées de manière concomitante à l'apprentissage du concept de notation scientifique. Cette situation a peut-être eu un effet sur le nombre d'items considérés comme traitant de la notation exponentielle, plus particulièrement par rapport aux problèmes. En effet, plusieurs items potentiels ont été rejetés parce qu'ils traitaient plutôt de la notation scientifique, même si la notation exponentielle était exploitée. Un réinvestissement suit dans la section 6.2, dans le contexte de l'algèbre (manipulation d’expressions algébriques, multiplication de polynômes et factorisation). Finalement, les items 33 à 39 se retrouvent à la fin de ce même chapitre 6, dans une section intitulée *Chronique du passé – John Wallis*.

Le portrait que nous venons de dresser de la collection Z met notamment en relief une présence plus difficile à discerner de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, entre autres parce qu’elle a été traitée en concomitance avec la notation scientifique. Selon nos critères, seulement 39 items y sont explicitement consacrés. Les items sont grandement concentrés à l’intérieur de quelques pages d’un même chapitre se situant dans le volume 2. Comparons maintenant les trois collections du deuxième cycle du secondaire afin d’en faire ressortir les différentes particularités sur le plan de la répartition et de l’organisation des items.

1.3.4 Synthèse concernant la répartition et l’organisation des items pour les collections du 2e cycle du secondaire

Encore ici, deux collections sont davantage semblables (X et Y), alors que la troisième (Z) est passablement différente. Par exemple, le nombre d’items traitant de la notation exponentielle est plus important dans les deux premières collections, alors que la collection Z lui accorde moins d’importance. Notons toutefois que l’approche privilégiée dans cette dernière collection (traitement simultané de la notation exponentielle et de la notation scientifique) a probablement influencé cette différence, puisque nous n'avons traité que ce qui concerne la notation exponentielle proprement dite. Signalons toutefois que pour les trois collections, peu d’items sont des problèmes, la majorité ayant plutôt comme nature d’être des exercices ou encore des définitions.

Sur le plan de l’organisation des items, une grande concentration de ceux-ci a été observée. En effet, un fort pourcentage des items traitant de la notation exponentielle se retrouve dans un même chapitre et parfois même dans une même section de chapitre. Cela semble s’éloigner de ce qui est attendu dans la documentation ministérielle (Gouvernement du Québec, 2009, 2011), à savoir qu'il faut privilégier un travail continu des différents concepts à aborder.

1.4 Synthèse générale sur la répartition et l'organisation des items

De manière générale, nous constatons que l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle est présent dans l'ensemble des collections approuvées par le MELS, ce qui est conforme à ce qui est prescrit dans les progressions des apprentissages du primaire et du secondaire (Gouvernement du Québec, 2009, 2011). Cette présence est plus ou moins importante en matière de nombre d'items selon les collections, mais il n'en demeure pas moins qu'elles en traitent toutes de manière explicite. Comme attendu, l'importance du traitement est de plus en plus grande au fur et à mesure de la progression dans les niveaux scolaires. Ainsi, les collections du primaire contiennent relativement moins d'items sur la notation exponentielle que celles du secondaire; celles qui en contiennent le plus étant les collections s'adressant aux élèves de 3^{e} secondaire.

Sur le plan de l'organisation, nous pouvons observer que l'ensemble des collections privilégie une concentration assez importante de l'information sur la notation exponentielle. Ces informations sont toutefois situées à des endroits différents dans les cycles et dans le déroulement prévu de l'année scolaire selon les collections.

À ce stade de la présentation des résultats, il est déjà possible d'avancer l'hypothèse suivante. Dans la perspective où une personne enseignante suivrait à la lettre les indications du manuel scolaire, il pourrait y avoir des différences notables quant à l'importance du traitement et aux moments où ce traitement se produirait pendant l'année scolaire, selon le choix de la collection utilisée. L'étude approfondie des différentes natures d'items nous permettra d'en apprendre davantage à ce sujet. La prochaine section nous permettra d'analyser plus en profondeur les définitions présentées dans chacune des collections.

2. RÉSULTATS EN LIEN AVEC LES ITEMS « DÉFINITION »

Cette section s'intéresse à l'analyse des items identifiés comme étant des définitions à l'intérieur de chacune des collections. Comme spécifié dans la grille, six grandes catégories nous permettent de le faire. Ces catégories sont 1) le type de définitions; 2) le sens du vocabulaire employé; 3) le symbolisme employé; 4) la présence d'exemples ou de contrexemples; 5) la nature de la définition et 6) la fonction de la définition. Nous avons privilégié la présentation de chacune des collections afin de conserver le caractère particulier et pour permettre une analyse plus fine des ressemblances et des différences.

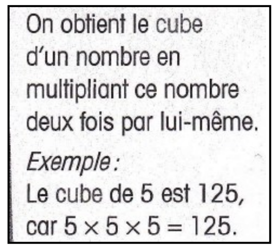
2.1 Caractéristiques des items « définition » pour les collections du primaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les définitions pour chacune des trois collections du primaire (R, S et T). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

2.1.1 Caractéristiques des items « définition » pour la collection R

L'analyse fait ressortir la présence de huit définitions dans la collection R. Pour approfondir notre analyse, nous précisons, dans ce qui suit, leurs particularités.

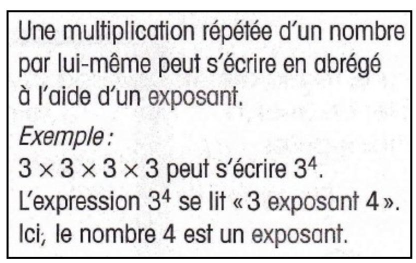
Tout d'abord, notons que les huit définitions de la collection R sont exclusivement formulées en mots. Ainsi, aucun symbolisme d'une quelconque nature n'est présent dans leur composition. Aussi, cinq des huit définitions (5/8) utilisent l'expression « multiplié par elle-même » (Baruk, 1995) ou une de ses variantes. Il est toutefois à souligner qu'elle est toujours utilisée de manière adéquate, c'est-à-dire qu'elle n'introduit jamais dans le calcul un facteur de trop dans la multiplication répétée d'une même base, l'un des dangers soulignés par Baruk (1995). Cependant, 4 des 5 utilisations de l'expression pourraient mener à construire une mauvaise représentation de la notation exponentielle. Par exemple, pour Rp5d9, il est question du cube « en multipliant ce nombre deux fois par lui-même », ce qui semble associer le cube à l'idée de « deux fois » quelque chose. La figure 3 présente l'item Rp5d9.


On obtient le cube
d'un nombre en
multipliant ce nombre
deux fois par lui-même.

Exemple :
Le cube de 5 est 125,
car $5 \times 5 \times 5 = 125$.

Figure 3 – Item Rp5d9

Un autre exemple intéressant à relever comme potentiellement risqué pour développer un sens juste de la notation exponentielle est celui de l'item Rp5d14, où dans la définition il est question de « multiplication répétée d'un nombre par lui-même ». La figure 4 présente cet item.


Une multiplication répétée d'un nombre
par lui-même peut s'écrire en abrégé
à l'aide d'un exposant.

Exemple :
$3 \times 3 \times 3 \times 3$ peut s'écrire 3^4.
L'expression 3^4 se lit « 3 exposant 4 ».
Ici, le nombre 4 est un exposant.

Figure 4 – Item Rp5d14

Soulignons qu'à travers ces deux exemples, c'est l'idée de répétition de la multiplication d'un nombre par lui-même qui semble un peu obscure. En effet, est-ce qu'on le répète une fois? Si c'est plusieurs fois, c'est par lui-même, mais n'y en avait-il qu'un au départ? Donc, même si cette façon de définir ne tombe pas dans le piège identifié par Baruk (1995), nous constatons par l'analyse précédente que cette utilisation soulève quand même des questions.

Le vocabulaire employé dans les définitions semble très restreint, même en tenant compte que la définition du terme « exposant » se répète à deux endroits. En effet, une vingtaine de termes différents sont utilisés en tout dans la composition des huit définitions. Nous observons aussi que les auteurs de la collection R ne tombent pas dans le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé. Rappelons que cette utilisation peut entrainer des incompréhensions importantes pour les élèves qui pourraient adopter le sens qui n'est pas celui qui est approprié dans le contexte.

En ce qui a trait à l'utilisation des exemples et des contrexemples pour soutenir la compréhension des définitions de la collection R, nous observons que toutes les définitions sont illustrées par exactement un exemple. Ces exemples sont tous numériques, ce qui était attendu au regard de la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009). Ils sont tous cohérents avec la définition qu'ils illustrent. Notons finalement qu'il n'y a aucun contrexemple pour mettre en perspective les définitions présentées (Wilson, 1990).

L'ensemble des définitions est de nature « zéro-définition », dans le sens attribué par Lakatos (1984) et Ouvrier-Buffet (2006), ce qui était aussi attendu au regard de la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009).

Les différents aspects analysés semblent indiquer que la collection R comporte des définitions adéquates dans l'ensemble, pouvant cependant générer une certaine confusion en lien avec l'emploi de l'expression « multiplié par lui-même ». Examinons maintenant plus en profondeur les caractéristiques des définitions de la collection S.

2.1.2 Caractéristiques des items « définition » pour la collection S

L'analyse fait ressortir la présence de deux définitions dans la collection S. Pour approfondir notre analyse, nous en précisons dans ce qui suit leurs particularités.

Tout d'abord, notons que les deux définitions de la collection S sont exclusivement formulées en mots. Ainsi, aucun symbolisme d'une quelconque nature n'est présent dans leur composition. L'expression « multiplié par lui-même » n'est utilisée dans aucune des deux définitions (Baruk, 1995).

Le vocabulaire employé dans les définitions est ici aussi très restreint : treize mots différents sont utilisés en tout. Nous observons aussi que les auteurs de la collection S évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé.

Des exemples sont présents pour illustrer chacune des définitions (quatre pour la première définition et deux pour la deuxième). Notons toutefois qu'il n'y a aucun contrexemple pour mettre en perspective les définitions présentées (Wilson, 1990). Cependant, la nature des exemples (démarches présentées) et la présence des exposants négatifs nous permettent d'affirmer que la première définition constitue une définition « générée par la preuve » au sens de Lakatos (1984) et d'Ouvrier-Buffet (2006), ce qui est inattendu étant donné que le manuel s'adresse à des élèves de 6^{e} année et que cela suppose une certaine compréhension du concept pour en apprécier la démonstration. En outre, la définition repose principalement sur l'observation de quatre exemples qui introduisent le sens à accorder à l'exposant négatif. La figure 5 présente l'item Sp6d4.

Pour découvrir la clé de la notation exponentielle, observe d'abord les exemples ci-dessous.

John Wallis

$$\frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10} = \frac{10 \times 10}{1} = 10^{+2} \qquad \frac{10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$\frac{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = \frac{4 \times 4 \times 4}{1} = 4^{+3} \qquad \frac{4 \times 4}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{4 \times 4} = 4^{-2}$$

Figure 5 – Item Sp6d4

La deuxième définition est, quant à elle, une zéro-définition et sert principalement à établir le vocabulaire à employer dans le contexte de la notation exponentielle.

En résumé, la collection S contient seulement deux définitions, mais la présence d'une définition de type « générée par la preuve » est quand même à souligner, puisque cette collection s'adresse à des élèves de 6e année. Passons maintenant à l'analyse des définitions de la dernière collection s'adressant à des élèves du primaire, la collection T.

2.1.3 Caractéristiques des items « définition » pour la collection T

L'analyse fait ressortir la présence de trois définitions dans la collection T. Pour approfondir notre analyse, nous préciserons leurs particularités.

Tout d'abord, notons que les trois définitions de la collection T sont exclusivement formulées en mots. Ainsi, aucun symbolisme d'une quelconque nature n'est présent dans leur composition. L'expression « multiplié par lui-même » n'est utilisée dans aucune des trois définitions (Baruk, 1995).

Le vocabulaire employé dans les définitions est encore une fois plutôt restreint : une vingtaine de mots différents sont utilisés en tout. Nous observons aussi que les auteurs de la collection T ne tombent pas dans le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé.

Seulement une des trois définitions est accompagnée d'un exemple pour l'illustrer. Toutefois, les deux autres définitions étant situées à la même page, tout juste sous la première, il est possible de s'y référer facilement pour aller vérifier ce qu'elles expliquent. L'exemple en question est $10^2 = 10 \times 10 = 100$. Il est explicite sur le plan du décodage de la notation exponentielle menant au calcul de la puissance. Le symbolisme y est utilisé adéquatement. L'information fournie est cohérente entre les définitions et l'exemple. Signalons cependant l'absence de contrexemple pour mettre en perspective la définition (Wilson, 1990). Notons aussi que les définitions sont de nature « zéro-définition », dans le sens attribué par Lakatos (1984) et Ouvrier-Buffet (2006), ce qui était attendu au regard de la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009).

Deux particularités ressortent des définitions de la collection T. Tout d'abord, une précision importante est apportée dans l'une des définitions en lien avec la position que doit prendre l'exposant (en haut et à droite de la base). Toutefois, il n'y a pas de mention en lien avec la taille légèrement plus petite que l'exposant doit avoir (Pimm, 1987). Notons également que les mots « produit » et « facteurs » sont réinvestis d'une manière très judicieuse ce qui, selon nous, établit un lien pertinent entre la multiplication, qui est déjà connue, et l'exponentiation, qui est à apprendre à partir de ces définitions.

En résumé, malgré la présence de seulement trois définitions dans la collection T, nous constatons que des particularités en lien avec le symbolisme (spécification explicite de la position que doit prendre l'exposant par rapport à la base) et le vocabulaire (réinvestissement de mots utilisés dans le contexte de la multiplication, comme « produit » et « facteurs ») sont présentes. Les résultats concernant les définitions dans les trois collections du primaire étant présentés, mettons en lumière les ressemblances et les différences entre celles-ci.

2.1.4 Synthèse des caractéristiques des items « définition » pour les collections du 3^e^ cycle du primaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 3e cycle du primaire en ce qui a trait aux définitions, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 32 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des définitions pour chacune des collections et d'en faire ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 32
Principaux résultats en lien avec les définitions pour les collections du 3e cycle du primaire

Aspects analysés		Collections du 3e cycle du primaire		
Catégories	Caractéristiques	R	S	T
1. Type de définition	a. En mots b. Symbolique c. En mots et symbolique	8 0 0	2 0 0	3 0 0
2. Vocabu-laire	a. Présence de l'expression « multiplié par lui-même » b. Sens du vocabulaire utilisé	5/8 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	0/2 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	0/3 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
3. Symbo-lisme	Information sur la position et sur la grandeur relative de l'exposant	s/o	s/o	Précision explicite de la position de l'exposant par rapport à la base.
4. Exemples ou contrexemples	a. Présence d'exemples b. Nombre d'exemples pour illustrer la définition c. Présence de contrexemples	Oui 1 exemple par définition L'exemple définit parfois plus que la définition elle-même. Non	Oui Quelques exemples par définition Non	Oui 1 même exemple pour illustrer les trois définitions Non
5. Nature de la définition	a. Zéro-définition b. Générée par la preuve	8 0	1 1	3 0

Nous pouvons dégager de notre analyse que, pour les trois collections examinées, quatre aspects sont semblables sur le plan des définitions. Ainsi, 1) les définitions sont toutes exclusivement en mots; 2) soit un exemple est présent pour illustrer la définition, soit un exemple est suffisamment près physiquement de la définition pour en soutenir la compréhension; 3) il n'y a jamais de contrexemple pour mettre en perspective la définition (Wilson, 1990) et 4) toutes les définitions sont considérées comme des « zéro-définition », à l'exception d'une repérée dans la collection S qui fait référence aux exposants négatifs et qui est donc considérée comme une définition « générée par la preuve » (Lakatos, 1984 ; Ouvrier-Buffet, 2006).

Sur le plan des différences, notons que malgré une présence significativement plus importante d'items « définition » dans la collection R (huit items, comparativement à deux et à trois pour les collections S et T), seuls les manuels de la collection R utilisent l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995). Par ailleurs, même si son utilisation est rigoureuse dans une perspective mathématique, il n'en demeure pas moins que cette définition soulève certaines questions par rapport aux incompréhensions potentielles qu'elle pourrait engendrer chez l'élève. En effet, l'apprenante ou l'apprenant pourrait ajouter ou oublier de prendre en compte un facteur dans le calcul de la puissance s'il ne comprend pas bien le lien entre l'utilisation de l'expression « multiplié par lui-même » et la valeur à attribuer à l'exposant. Soulignons également la très faible présence d'information explicite sur le symbolisme (Pimm, 1987), sauf dans le cas de la collection T où il est clairement précisé que l'exposant doit se retrouver en haut à droite de la base, sans toutefois spécifier sa taille relative. C'est pour cette raison qu'il a peu été question de cette catégorie dans la présentation des résultats des sous-sections précédentes. Finalement, toujours pour la collection T, l'utilisation du vocabulaire associé à la multiplication (produit et facteurs) nous a semblé très judicieuse pour permettre à l'élève de faire des liens entre cette opération connue et celle à apprendre (exponentiation).

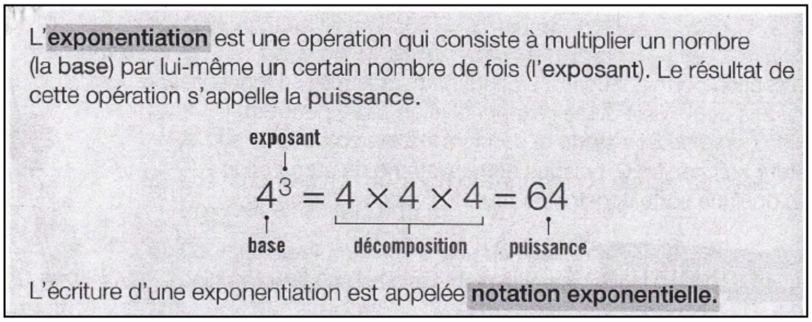
2.2 Caractéristiques des items « définition » pour les collections du 1er cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les définitions pour chacune des trois collections du 1er cycle du secondaire (U, V et W). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

2.2.1 Caractéristiques des items « définition » pour la collection U

L'analyse fait ressortir la présence de sept définitions dans la collection U. Pour approfondir notre analyse, nous présentons maintenant leurs particularités.

Tout d'abord, notons que les sept définitions de la collection U sont exclusivement formulées en mots. Ainsi, aucun symbolisme d'une quelconque nature n'est présent dans leur composition. Toutefois, une des définitions exploite l'écriture symbolique de la notation de la manière suivante : « $(\text{base})^{\text{exposant}}$ = puissance ». Ainsi, sans donner explicitement des informations sur la position ou sur la taille relative de l'exposant (Pimm, 1987), le format d'écriture informe sur les caractéristiques attendues. L'expression « multiplié par lui-même » est quant à elle utilisée dans deux des sept définitions présentes (Baruk, 1995). La première de ces deux utilisations (item Us1d7) pourrait mener à une mauvaise interprétation, même si elle est adéquate mathématiquement. L'exemple clarifie cependant la définition. La figure 6 présente l'item Us1d7.

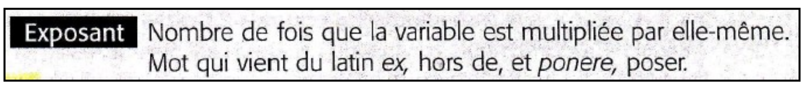


L'**exponentiation** est une opération qui consiste à multiplier un nombre (la **base**) par lui-même un certain nombre de fois (l'**exposant**). Le résultat de cette opération s'appelle la **puissance**.

L'écriture d'une exponentiation est appelée **notation exponentielle.**

Figure 6 – Item Us1d7

Pour la deuxième utilisation (item Us2d50), le danger soulevé par Baruk (1995) de mener vers un facteur de trop dans le calcul de la puissance apparait toutefois bien présent. La figure 7 présente l'item Us2d50.



Exposant Nombre de fois que la variable est multipliée par elle-même. Mot qui vient du latin *ex,* hors de, et *ponere,* poser.

Figure 7 – Item Us2d50

Sur le plan du vocabulaire, moins de 50 mots différents ont été utilisés dans l'ensemble des sept définitions. Nous constatons aussi que les auteurs de la collection U évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé.

Une seule des définitions ne possède pas d'exemple (item Us1d19). Toutefois, l'item d'une « autre nature » Us1a18, situé juste à côté, l'illustre bien. Les six autres définitions possèdent entre un et cinq exemples pour les illustrer. Ces exemples sont tous numériques, sauf pour celui de l'item Us2d50 qui est algébrique et qui se situe d'ailleurs dans ce contexte. Le symbolisme rattaché à la notation exponentielle (position et taille relative) y est adéquat (Pimm, 1987). D'ailleurs, notons qu'aucune des définitions ne présente d'information explicite sur la position et la taille relative de l'exposant dans la notation exponentielle. Seuls les exemples nous permettent donc d'en constater l'écriture. Toutefois, aucun contrexemple ne vient mettre en perspective les définitions et les exemples présentés (Wilson, 1990).

Cinq des sept définitions sont qualifiées de « zéro-définition », alors que les deux autres sont considérées comme des définitions « générées par la preuve » (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006). Cette proportion nous semble adéquate en tenant compte de la progression des apprentissages proposée (Gouvernement du Québec, 2011).

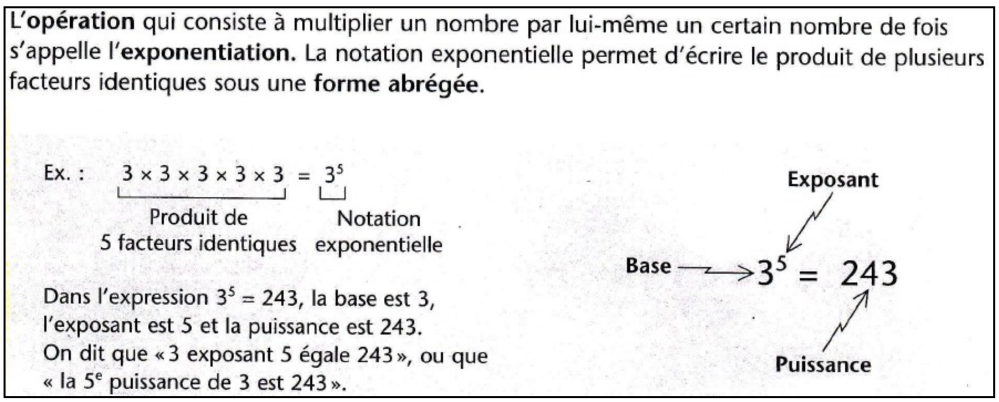
La collection U comporte de nombreux aspects particuliers sur le plan des définitions. Nous en retiendrons ici deux qui nous semblent d'intérêt général en lien avec notre objet d'étude. Tout d'abord, dans l'item Us1d7 (figure 7, page précédente), l'exponentiation est clairement définie comme étant une opération, et non seulement comme une notation. Cette manière de définir est intéressante dans la perspective où, même pour les mathématiciennes et les mathématiciens, un certain flou semble demeurer à ce sujet (Courteau, 2010). Nous avons également observé dans toutes les définitions un très grand souci de précision dans l'utilisation du vocabulaire technique. En effet, les mots « exponentiation », « base », « exposant », « décomposition », « notation exponentielle » sont toujours utilisés judicieusement et adéquatement.

En résumé, malgré la présence de l'expression « multiplié par lui-même » d'une manière potentiellement risquée du point de vue de l'apprentissage dans deux des sept définitions (Baruk, 1995), la collection U présente en général des définitions riches sur le plan du vocabulaire et bien illustrées par des exemples pertinents. Examinons maintenant la collection V du point de vue des définitions qui y sont présentées.

2.2.2 Caractéristiques des items « définition » pour la collection V

L'analyse fait ressortir la présence de neuf définitions dans la collection V. Pour en approfondir leur analyse, leurs caractéristiques seront précisées.

Parmi les neuf définitions, sept sont en mots, alors que deux ont été considérées comme étant à la fois en mots et symboliques (items Vs1d2 et Vs1d5). Pour ces deux définitions, le symbolisme associé à l'écriture de la notation exponentielle (position et taille relative) est adéquat. Seule la première définition (item Vs1d1) utilise l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995). Cette utilisation est adéquate dans le contexte, mais pourrait quand même mener à une base de trop si elle n'était pas soutenue par un exemple. Il est d'ailleurs à noter qu'une manière différente d'expliquer l'exponentiation (produit de facteurs identiques) est utilisée. La figure 8 présente l'item Vs1d1 dont l'interprétation pourrait conduire à une erreur.



L'**opération** qui consiste à multiplier un nombre par lui-même un certain nombre de fois s'appelle l'**exponentiation.** La notation exponentielle permet d'écrire le produit de plusieurs facteurs identiques sous une **forme abrégée.**

Ex. : $\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{Produit de 5 facteurs identiques}} = \underbrace{3^5}_{\text{Notation exponentielle}}$

Dans l'expression $3^5 = 243$, la base est 3, l'exposant est 5 et la puissance est 243. On dit que « 3 exposant 5 égale 243 », ou que « la 5^e puissance de 3 est 243 ».

Figure 8 – Item Vs1d1

Sur le plan du vocabulaire, moins de 55 mots différents ont été utilisés dans l'ensemble des neuf définitions. Nous constatons aussi que les auteurs de la collection V ne tombent pas dans le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé.

À part l'item Vs1d2 qui n'en possède pas, toutes les autres définitions proposent un à quatre exemples pour les illustrer. Dans tous les cas, le symbolisme associé à la position et à la taille relative de l'exposant est respecté. Les exemples sont tous constitués de valeurs numériques et sont cohérents avec les définitions qu'ils doivent illustrer. D'ailleurs, notons qu'aucune des définitions ne présente d'information explicite sur la position et la taille relative de l'exposant dans la notation exponentielle (Pimm, 1987). Seuls les exemples nous permettent donc d'en constater l'écriture. Toutefois, aucun contrexemple ne vient mettre en perspective les définitions et les exemples présentés (Wilson, 1990).

Seules deux définitions peuvent être considérées comme des définitions « générées par la preuve » (items Vs1d5 et Vs1d49). Les sept autres définitions sont des « zéro-définition » (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006). Cette proportion nous semble adéquate en tenant compte de la progression des apprentissages proposée (Gouvernement du Québec, 2011).

La collection V comporte de nombreux aspects particuliers sur le plan des définitions. Nous en retiendrons deux d'intérêt plus général dans le cadre de notre étude. Dans un premier temps, à l'item Vs1d1 (figure 8, page précédente), l'utilisation de l'expression « sous une forme abrégée » nous apparait intéressante et pertinente pour définir ce qu'est la notation exponentielle. Dans un deuxième temps, les items Vs1d54 et Vs1d55 sont des définitions qui se retrouvent dans les glossaires des volumes 2 des deux manuels (A et B). Nous pourrions qualifier ces définitions de « techniques », c'est-à-dire qu'elles disent ce que sont la base, l'exposant, la puissance et l'exponentiation les uns par rapport aux autres. Par contre, si nous ne savons pas déjà ce que c'est, il serait extrêmement difficile de comprendre le concept à partir de celles-ci, autrement que de pouvoir en nommer les constituants. Ces définitions ne nous donnent aucun aperçu de ce qu'est le code de la notation exponentielle. Les figures 9 et 10 présentent ces deux items.

Exponentiation
Opération qui consiste à affecter une base d'un exposant.
Ex. : Dans 2^3, la base est 2 et l'exposant est 3.

Figure 9 – Item Vs1d54

Puissance
Résultat d'une exponentiation.
Ex. : Dans $4^2 = 16$, 16 est la 2^e puissance de 4.

Figure 10 – Item Vs1d55

En résumé, la collection V présente des définitions contenant un vocabulaire varié, mais certaines sont tellement minimales qu'elles donnent peu accès au sens de ce qu'est la notation exponentielle. Plusieurs exemples illustrent de façon pertinente huit des neuf définitions. Voyons maintenant ce qui en est pour la dernière collection du 1er cycle du secondaire, la collection W.

2.2.3 Caractéristiques des items « définition » pour la collection W

L'analyse fait ressortir la présence de dix définitions dans la collection W. Afin d'approfondir notre analyse, nous présentons leurs particularités.

Parmi les dix définitions, neuf sont en mots, alors qu'une a été considérée comme étant à la fois en mots et symbolique (item Ws2d9). Pour cette dernière, le symbolisme associé à l'écriture de la notation exponentielle est adéquat (position et grandeur relative). Quatre des dix définitions utilisent l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995) ou une de ses variantes (items Ws1d1, Ws1d4, Ws2d10 et Ws2d21). Il est toutefois à souligner que trois des quatre utilisations sont adéquates (Ws1d1, Ws1d4 et Ws2d21), c'est-à-dire qu'elles n'introduisent pas dans le calcul un facteur de trop dans la multiplication répétée d'une même base. Pour ce qui est de Ws2d10, elle tombe clairement dans le piège soulevé par Baruk (1995), car la formulation suivie à la lettre impliquerait un facteur de trop dans le calcul de la puissance. La figure 11 présente l'item Ws2d10.

> Pour déterminer la valeur d'un nombre élevé à un exposant négatif, on peut multiplier par lui-même l'inverse de ce nombre autant de fois que l'indique l'opposé de l'exposant.
>
> *Exemple :* $5^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$
>
> On peut aussi écrire : $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$.

Figure 11 – Item Ws2d10

Sur le plan du vocabulaire, moins de 40 mots différents ont été utilisés dans l'ensemble des dix définitions. Nous constatons aussi que les auteurs de la collection W évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé. Aussi, aucune des définitions ne comporte d'explication sur la position et la taille relative de l'exposant dans l'écriture d'une expression exponentielle (Pimm, 1987). Seuls les exemples nous permettent de le constater.

Les deux définitions nous paraissant les moins précises (items Ws1d3 et Ws2d22) n'ont pas d'exemple pour les illustrer. En fait, elles ne nous apprennent pas vraiment ce qu'est la notation exponentielle. La figure 12 présente en exemple l'item Ws1d3 pour illustrer cette situation.

> **Notation exponentielle**
> Représentation d'une grandeur à l'aide d'un exposant.

Figure 12 – Item Ws1d3

Les 8 autres définitions sont illustrées par 1 à 3 exemples. Dans tous les cas, le symbolisme associé à la position et à la taille relative de l'exposant est respecté. Les exemples sont tous constitués de valeurs numériques. Ils sont cohérents avec les définitions qu'ils doivent illustrer, même s'ils auraient parfois gagné à être mieux adaptés, comme dans le cas de l'item Ws2d11 présenté à la figure 13. Cette définition expose le fait qu'une base affectée d'un exposant 0 donne une puissance de 1, pour toute base non nulle. Cependant, comme l'exemple présente une chaine d'opérations entre parenthèses qui est affectée de l'exposant 0, il semble plus vouloir illustrer l'intérêt de la propriété lors de calculs que vouloir expliquer la propriété elle-même.

> Tout nombre non nul élevé à l'exposant 0 est égal à 1.
> *Exemple :* L'expression $(345 \times 2821 + 543)^0$ est égale à 1.

Figure 13 – Item Ws2d11

Notons qu'aucun contrexemple ne vient mettre en perspective les définitions et les exemples présentés (Wilson, 1990). Aussi, trois définitions peuvent être considérées comme des définitions « générées par la preuve » (items Ws2d9, Ws2d10 et Ws2d11), les sept autres définitions étant des « zéro-définition » (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006). Cette proportion nous semble adéquate en tenant compte de la progression des apprentissages proposée (Gouvernement du Québec, 2011).

La collection W se distingue des deux autres collections à plusieurs égards sur le plan des définitions. Soulignons tout d'abord que six des dix définitions se retrouvent dans les différents glossaires. Ainsi, seulement quatre définitions apparaissent dans un chapitre portant explicitement sur l'apprentissage de la notation exponentielle. Plusieurs des définitions comportent des tournures de phrases ou une utilisation de vocabulaire que nous trouvons risquées, comme dans le cas de l'item Ws1d2 présenté à la figure 14.

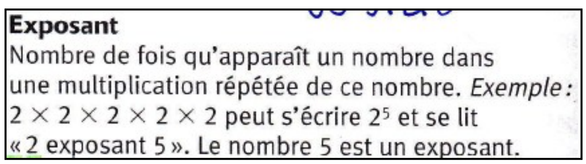

Exposant
Nombre de fois qu'apparaît un nombre dans une multiplication répétée de ce nombre. *Exemple :* $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ peut s'écrire 2^5 et se lit « 2 exposant 5 ». Le nombre 5 est un exposant.

Figure 14 – Item Ws1d2

Cette définition utilise le mot « nombre » trois fois ce qui, selon nous, pourrait engendrer une certaine confusion, puisque les auteurs ne réfèrent pas toujours au même sens du mot nombre. En effet, ils font référence, d'une part, à la base et, d'autre part, à la quantité de bases qu'on retrouve. Les auteurs auraient pu simplement expliquer qu'il s'agit du « nombre de fois qu'apparait un même facteur dans une multiplication répétée », utilisant ainsi un vocabulaire plus précis. Ainsi, même s'il est possible pour un expert de s'y retrouver pour un expert, il nous semble qu'une importante confusion peut se manifester pour l'élève.

Soulignons finalement que lors de la collecte de données, une parenté nous est apparue entre plusieurs des définitions des collections R et W. Après vérification, nous avons constaté que ces deux collections sont issues non seulement d'une même maison d'édition, mais aussi que ce sont les mêmes auteurs qui les ont composées. Le matériel de la collection du 3e cycle du primaire semble donc avoir été réutilisé dans la conception de la collection du 1er cycle du secondaire.

En résumé, la collection W nous apparait préoccupante en ce qui a trait aux définitions présentées dans le contexte de la notation exponentielle. En plus de l'erreur conceptuelle reliée à une utilisation inadéquate de l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995), plusieurs des décisions prises en lien avec le vocabulaire et la clarté des termes nous semblent interrogeables, comme l'utilisation du mot « nombre » dans une même définition comportant deux référents différents. Faisons maintenant une synthèse des éléments clés des collections du 1er cycle du secondaire par rapport aux items « définition ».

2.2.4 Synthèse des caractéristiques des items « définition » pour les collections du 1er cycle du secondaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 1er cycle du secondaire en ce qui a trait aux définitions, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 33 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des définitions pour chacune des collections et d'en ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 33
Principaux résultats en lien avec les définitions pour les collections du 1er cycle du secondaire

Aspects analysés		Collections du 1er cycle du secondaire		
Catégories	Caractéristiques	U	V	W
1. Type de définition	a. En mots b. Symbolique c. En mots et symbolique	7 0 0	7 0 2	9 0 1
2. Vocabulaire	a. Présence de l'expression « multiplié par lui-même » b. Sens du vocabulaire utilisé	2/7 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	1/9 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	4/10 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
3. Symbolisme	Information sur la position et sur la grandeur relative de l'exposant	Pas d'information explicite, mais présence d'éléments soutenants.	Pas d'information explicite, mais les exemples sont soutenants.	Pas d'information explicite, mais les exemples sont soutenants.
4. Exemples ou contrexemples	a. Présence d'exemples b. Nombre d'exemples pour illustrer la définition c. Présence de contrexemples	Oui (6/7) 1 à 5 exemples par définition. Les exemples sont soutenants et pertinents. Non	Oui (8/9) 1 à 4 exemples par définition. Les exemples sont soutenants et pertinents. Non	Oui (8/10) 1 à 3 exemples par définition. Les deux définitions sans exemple en auraient eu le plus besoin. Non
5. Nature de la définition	a. Zéro-définition b. Générée par la preuve	5 2	7 2	7 3

Il ressort de cette analyse, pour les trois collections examinées, que cinq aspects sont semblables sur le plan des définitions. Ainsi, les définitions sont très majoritairement en mots. Aucune utilisation d'un mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant n'est présente (Pierce et Fontaine, 2009). Il n'y a pas d'information explicite concernant la position et la taille relative de la base et de l'exposant dans une expression exponentielle (Pimm, 1987). La plupart des définitions possèdent des exemples pertinents et soutenants pour les illustrer, mais aucune n'a de contrexemple (Wilson, 1990). La proportion de définitions de nature « zéro-définition » et « générées par la preuve » (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006) est sensiblement la même.

Sur le plan des différences, soulignons que l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995) se retrouve au moins une fois dans toutes les collections du 1er cycle du secondaire. Cependant, seule la collection W présente pour un item une utilisation pouvant mener sans équivoque à une base de trop dans le calcul de la puissance, alors que les autres cas sont adéquats d'un point de vue conceptuel. Également, la collection W nous semble moins riche que les collections U et V, entre autres, en raison d'une utilisation moins adéquate du vocabulaire lié à la notation exponentielle. Notons finalement que la collection U se démarque des deux autres par une présentation de l'exponentiation comme une opération et non seulement comme une notation. Explorons maintenant les caractéristiques des items « définition » des collections du 2^{e} cycle du secondaire.

2.3 Caractéristiques des items « définition » pour les collections du 2^{e} cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les définitions pour chacune des trois collections du 2^{e} cycle du secondaire (X, Y et Z). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

2.3.1 Caractéristiques des items « définition » pour la collection X

L'analyse fait ressortir la présence de 14 définitions dans la collection X. Pour approfondir notre analyse, nous précisons, dans ce qui suit, leurs particularités.

Par rapport au type de définition, six sont symboliques et huit sont en mots et symboliques. Elles servent principalement à expliquer les propriétés de l'exponentiation, ce qui était attendu compte tenu de la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2011). La présence des propriétés fait en sorte qu'il est nécessaire de déterminer leur champ de validité. La figure 15 présente l'item Xs3d7 qui se préoccupe des contraintes d'application de la propriété.

Quotient de puissances de même base Le résultat est la base affectée de la différence des exposants des puissances (exposant du dividende moins exposant du diviseur). $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $a \neq 0$	$6^5 \div 6^3 = \frac{6^5}{6^3} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6} = 6^2$ $6^5 \div 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$

Figure 15 – Item Xs3d7

Cet exemple nous permet de constater la présence de la contrainte $a \neq 0$ qui est essentielle à cause de la division. La figure 16 (item Xs3d62) présente, quant à elle, une définition où une contrainte d'application nécessaire est absente.

Exposant négatif $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Figure 16 – Item Xs3d62

Ici, la contrainte $a \neq 0$ aurait été essentielle, puisque l'expression exponentielle se retrouve au dénominateur. Toutefois, certaines affirmations sont parfois trop restrictives. La figure 17 présente le champ de validité annoncé des items Xs3d6, Xs3d7 et Xs3d8.

> Voici des lois qui facilitent le calcul d'expressions comprenant des exposants.
> Ces lois s'appliquent aussi aux exposants négatifs.

Figure 17 – Champ de validité des définitions Xs3d6, Xs3d7 et Xs3d8

Les propriétés de l'exponentiation présentées ne s'appliquent pas uniquement aux exposants négatifs, mais bien à l'ensemble des exposants réels.

L'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995) ne se retrouve dans aucune des définitions, ce qui est cohérent avec le fait qu'aucune de celles-ci n'est uniquement en mots.

Sur le plan du vocabulaire, moins de 30 mots différents ont été utilisés dans l'ensemble des 14 définitions, ce qui s'explique par la plus grande quantité de définitions uniquement symboliques. Nous constatons aussi que les auteurs de la collection X évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé. Aussi, dans aucune des définitions, il n'y a d'explication sur la position et la taille relative de l'exposant dans l'écriture d'une expression exponentielle (Pimm, 1987). Dans tous les cas, le symbolisme associé à la notation exponentielle est utilisé adéquatement (position et taille relative de l'exposant par rapport à la base). Les lettres a et b sont toujours utilisées pour désigner les bases, alors que ce sont les lettres m et n qui sont toujours utilisées pour désigner les exposants.

En ce qui a trait aux exemples, 12 des 14 définitions en possèdent. Tous les exemples sont exclusivement numériques. Toutefois, deux tendances se dégagent quant au rôle que les exemples jouent : certains sont très explicites et très détaillés, afin d'illustrer le fonctionnement d'une propriété de l'exponentiation, alors que d'autres montrent seulement leur application. La figure 18 (item Xs3d6) présente le premier cas.

Produit de puissances de même base Le résultat est la base affectée de la somme des exposants des puissances. $a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\underbrace{\overbrace{5 \times 5 \times 5}^{5^3} \times \overbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}^{5^4}}_{5^7}$ $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

Figure 18 – Item Xs3d6

Il est possible ici de constater l'importance de l'exemple pour soutenir la compréhension de la propriété. La figure 19 (item Xs3d57) présente quant à elle le deuxième type d'exemples.

Produit de puissances de même base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$7^4 \cdot 7^5 = 7^{4+5} = 7^9$

Figure 19 – Item Xs3d57

Ici, l'exemple illustre le fonctionnement de la propriété, mais ne fournit pas d'explication sur les raisons qui font que cela fonctionne. Notons toutefois que le premier type d'exemples est associé aux définitions qui se retrouvent dans le chapitre portant sur l'apprentissage de l'exponentiation, alors que le deuxième type est présent pour les définitions se retrouvant dans le glossaire du manuel, celles-ci faisant ainsi plus office de rappel. Soulignons finalement qu'il n'y a pas de contrexemple présent pour mettre en perspective la définition (Wilson, 1990).

Par rapport à la nature des définitions, elles sont toutes considérées comme étant « générées par la preuve », puisqu'elles présentent des propriétés de l'exponentiation issues de la manière de les symboliser (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006).

Une particularité importante est présente pour les définitions de la collection X : elles se présentent en deux sous-groupes distincts. Un premier sous-groupe se trouve dans le chapitre portant explicitement sur l'exponentiation. Les sept définitions en faisant partie sont généralement plus détaillées sur le plan des explications et des exemples, comme nous permettent de le constater les figures 15 et 18. Le deuxième sous-groupe de définitions est situé dans le glossaire à la fin du manuel B. Ces sept définitions sont plus succinctes, comme en témoignent les figures 16 et 19.

En résumé, le symbolisme prend une place prépondérante dans les définitions de la collection X. Les définitions sont dans l'ensemble adéquates, mais les contraintes d'application sont parfois correctes, parfois trop restrictives ou pas assez. De plus, certains des exemples qui accompagnent les définitions sont très explicites et très détaillés, alors que d'autres servent plutôt à montrer comment appliquer les différentes propriétés de l'exponentiation. Examinons maintenant les définitions de la collection Y.

2.3.2 Caractéristiques des items « définition » pour la collection Y

L'analyse fait ressortir la présence de 15 définitions dans la collection Y. Pour approfondir notre analyse, nous précisons leurs particularités dans les pages qui suivent.

Par rapport au type de définition, trois sont uniquement en mots et 12 sont en mots et symboliques. Ces définitions servent principalement à expliquer les propriétés de l'exponentiation, ce qui était attendu compte tenu de la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2011). La présence des propriétés fait en sorte qu'il est nécessaire de déterminer leur champ de validité. Dans plusieurs items, des contraintes d'utilisation sont présentées. Toutefois, elles manquent souvent de précision ou sont trop restrictives. Par exemple, dans l'item Ys3d13, il est indiqué que l'exposant doit être naturel, alors qu'il pourrait être dans les réels. La figure 20 présente cet item.

Si a représente n'importe quel nombre réel (sauf 0) et que m représente un nombre naturel, alors $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ et $a^0 = 1$.

Figure 20 – Item Ys3d13

Les items Ys3d14, Ys3d15, Ys3d16, Ys3d17 et Ys3d18 ont des contraintes communes qui sont énoncées avant les cinq définitions regroupées. Encore là, les contraintes sur les exposants sont trop restrictives. Par contre, elles sont adéquates pour les bases. La figure 21 présente ces contraintes communes.

Si m et n représentent des nombres entiers et que a et b représentent des nombres réels, alors les cinq propriétés des exposants ci-dessous sont vraies.

Figure 21 – Contraintes des items Ys3d14, Ys3d15, Ys3d16, Ys3d17 et Ys3d18

Deux des quatorze définitions utilisent l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995). Il est toutefois à souligner qu'une des deux utilisations est adéquate (item Ys3d49), c'est-à-dire qu'elle n'introduit pas dans le calcul un facteur de trop dans la multiplication répétée d'une même base, ce qui est le danger souligné par Baruk (1995). Par contre, pour ce qui est de l'item Ys3d47, les auteurs tombent clairement dans le piège, car la formulation suivie à la lettre impliquerait un facteur de trop dans le calcul de la puissance. La figure 22 présente l'item Ys3d47.

Pour déterminer la valeur d'un nombre élevé à un exposant négatif, on peut multiplier par lui-même l'inverse de ce nombre autant de fois que l'indique l'opposé de l'exposant.

Exemple :

$$5^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

On peut aussi écrire : $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$.

Figure 22 – Item Ys3d47

Cet item est exactement le même que l'item Ws2d10. En effet, nous avons remarqué que les définitions des items Ys3d46, Ys3d47 et Ys3d48 sont des reproductions exactes des définitions des items Ws2d9, Ws2d10 et Ws2d11. Après vérification, les deux collections sont produites par la même maison d'édition. Il semble donc y avoir eu une récupération du matériel produit pour la collection du 1er cycle du secondaire.

Sur le plan du vocabulaire, moins de 50 mots différents ont été utilisés dans l'ensemble des 15 définitions. Nous constatons aussi que les auteurs de la collection Y ne font pas l'erreur soulevée par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé. Aussi, dans aucune des définitions il n'y a d'explication sur la position et la taille relative de l'exposant dans l'écriture d'une expression exponentielle (Pimm, 1987). Dans tous les cas, le symbolisme associé à la notation exponentielle est utilisé adéquatement (position et taille relative de l'exposant par rapport à la base). Les lettres a et b sont toujours utilisées pour désigner les bases, alors que ce sont les lettres m et n qui sont toujours utilisées pour désigner les exposants.

En ce qui a trait aux exemples, 11 des 15 définitions en possèdent de un à quatre pour les illustrer. Une particularité de ces exemples est en lien avec leur nature (numérique ou algébrique). Les exemples de 5 des 11 définitions sont exclusivement numériques, alors que les 6 autres possèdent à la fois des exemples numériques et algébriques. Toutefois, aucune des définitions n'a de contrexemple pour la mettre en perspective (Wilson, 1990).

Par rapport à la nature des définitions, trois sont considérées comme des « zéro-définition », alors que les 12 autres sont des définitions « générées par la preuve » (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006).

En résumé, nous constatons que les définitions de la collection Y sont adéquates, même si certaines imprécisions sont présentes en ce qui a trait aux contraintes d'utilisation des propriétés. Une autre particularité est la présence d'exemples numériques et algébriques. Aussi, nous avons remarqué que quelques définitions qui se retrouvent dans la collection Y sont des reprises intégrales de la collection W, issue de la même maison d'édition. Notons que nous avions observé précédemment la même situation entre les collections R et W. Il semble que cette maison d'édition a décidé de reprendre sciemment des définitions en lien avec la notation exponentielle de ses collections précédentes. Quelles raisons sous-tendent ce choix? Aucun indice ne nous informe de manière explicite sur les raisons de ce choix. Passons finalement à la dernière collection du 2^e^ cycle du secondaire analysée, soit la collection Z.

2.3.3 Caractéristiques des items « définition » pour la collection Z

L'analyse fait ressortir la présence de 18 définitions dans la collection Z. Pour approfondir notre analyse, nous en précisons, dans ce qui suit, leurs particularités.

Par rapport aux types de définition, trois sont uniquement en mots, cinq sont uniquement symboliques et dix sont à la fois en mots et symboliques. La majorité des définitions sert à expliquer les propriétés de l'exponentiation, ce qui était attendu compte tenu de la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2011). La présence des propriétés fait en sorte qu'il est nécessaire de déterminer leur champ de validité. En général, des contraintes d'utilisation sont présentées. Toutefois, elles manquent souvent de précision ou sont trop restrictives. Par exemple, des précisions sont en général apportées sur les contraintes liées à la base, mais pas sur celles en lien avec l'exposant. La figure 23 présente l'item Zs3d20, qui illustre cette situation.

Puissance d'un quotient Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{7^3}{2^3} = \frac{343}{8} = 42{,}875$

Figure 23 – Item Zs3d20

Il aurait été possible dans ce cas de préciser « Pour $m\ et\ n\ \in \boldsymbol{R}$ » afin d'apporter plus de précision.

Aucune des définitions n'utilise l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995). Soulignons d'ailleurs qu'elle est habilement évitée dans l'item Zs3d10, comme présenté à la figure 24.

Pour une base a et un exposant entier $m > 1$: $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ fois}}$ L'exposant m indique le nombre de fois que la base a apparaît comme facteur dans un produit.	$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2187$

Figure 24 – Item Zs3d10

L'utilisation de l'expression « l'exposant *m* indique le nombre de fois que la base *a* apparaît comme facteur dans un produit », en plus de réinvestir le vocabulaire adéquatement, limite le danger lié à l'utilisation de l'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995).

Sur le plan du vocabulaire, moins de 25 mots différents ont été utilisés dans l'ensemble des 18 définitions. Nous constatons aussi que les auteurs de la collection Z ne tombent pas dans le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), puisqu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est observé. Aussi, dans aucune des définitions il n'y a d'explication sur la position et la taille relative de l'exposant dans l'écriture d'une expression exponentielle (Pimm, 1987). Dans tous les cas, le symbolisme associé à la notation exponentielle est utilisé adéquatement (position et taille relative de l'exposant par rapport à la base). Les lettres a et b sont toujours utilisées pour désigner les bases, alors que ce sont les lettres m et n qui sont toujours utilisées pour désigner les exposants.

En ce qui a trait aux exemples, 17 des 18 définitions possèdent exactement un exemple pour les illustrer, alors que la 18e définition en a trois. Tous les exemples présentés sont exclusivement numériques. Ils servent peu à démontrer les fondements de la définition, mais plutôt à en illustrer l'application. Les exemples des figures 23 et 24 montrent bien le type d'exemples présentés dans la collection Z. Notons aussi que le fait d'avoir un seul exemple entraine un risque de généralisation abusive dans certains cas, car l'exemple présenté contient des caractéristiques particulières que l'élève peut interpréter à notre insu comme étant des conditions essentielles à l'application de la définition. Prenons le cas de l'exemple de la définition Zs3d12, présenté à la figure 25.

Pour une base $a \neq 0$ et l'exposant 0 : $a^0 = 1$	$18{,}2^0 = 1$

Figure 25 – Item Zs3d12

Pourquoi la base est-elle un nombre décimal? Que se passe-t-il si la base est un nombre naturel ou un entier relatif? L'élève peut-il associer la puissance 1 autant à la présence de la base décimale qu'à celle de l'exposant 0, malgré la contrainte d'utilisation de la définition associée à cet exemple? Une réflexion semblable peut se présenter pour les définitions qui introduisent les exposants $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, où les deux exemples utilisent des bases qui mènent à une puissance naturelle, ce qui est loin d'être toujours le cas. Notons finalement qu'aucun contrexemple n'est présent afin de mettre en perspective la définition, comme proposé par Wilson (1990).

Par rapport à la nature des définitions, quatre sont considérées comme des « zéro-définition », alors que les 14 autres sont des définitions « générées par la preuve » (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006). Deux des « zéro-définition » sont d'ailleurs des reproductions intégrales de définitions se retrouvant dans la collection V, issue de la même maison d'édition.

En résumé, il est possible de constater que les types de définition retrouvés dans la collection Z sont plutôt variés. En effet, nous avons des définitions qui font partie de chacun des trois sous-groupes existants (en mots, symboliques, en mots et symboliques). Même si des contraintes d'utilisation des propriétés sont présentes en lien avec la base, une plus grande précision en ce qui a trait à celles touchant les exposants aurait été possible. La présence d'un seul exemple pour la très grande majorité des définitions nous amène à nous questionner sur la construction potentielle d'une compréhension rattachée aux particularités de l'exemple choisi, au lieu de son idée générale. Finalement, nous avons observé dans cette collection la présence de deux définitions utilisées également dans la collection V, issue de la même maison d'édition. Comparons les différents résultats en lien avec les définitions pour les collections du 2^{e} cycle du secondaire.

2.3.4 Synthèse des caractéristiques des items « définition » pour les collections du 2e cycle du secondaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 2e cycle du secondaire en ce qui a trait aux définitions, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 34 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des définitions pour chacune des collections et d'en dégager les ressemblances et les différences.

Tableau 34
Principaux résultats en lien avec les définitions pour les collections du 2^e cycle du secondaire

Aspects analysés		Collections du 2e cycle du secondaire		
Catégories	Caractéristiques	X	Y	Z
1. Type de définition	a. En mots b. Symbolique c. En mots et symbolique	0 6 8	5 0 10	3 5 10
2. Vocabulaire	a. Présence de l'expression « multiplié par lui-même » b. Sens du vocabulaire utilisé	0/14 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	2/15 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	0/18 Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
3. Symbolisme	Information sur la position et sur la grandeur relative de l'exposant	Aucune mention explicite, utilisation adéquate.	Aucune mention explicite, utilisation adéquate.	Aucune mention explicite, utilisation adéquate.
4. Exemples ou contrexemples	a. Présence d'exemples b. Nombre d'exemples pour illustrer la définition c. Présence de contrexemples	Oui (12/14) 1 à 4 exemples par définition, tous numériques. Ils servent à démontrer une propriété ou son application. Non	Oui (11/15) 1 à 4 exemples par définition, tous numériques dans 5 cas, numériques et algébriques dans les 6 autres cas. Non	Oui (18/18) 1 exemple pour 17 des 18 définitions, 3 exemples pour la 18^e; tous numériques. Ils servent à montrer son application. Non
5. Nature de la définition	a. Zéro-définition b. Générée par la preuve	0 14	3 12	4 14

Il ressort de l'analyse que, pour les trois collections examinées, plusieurs aspects sont semblables sur le plan des définitions. En premier lieu, aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant, n'est utilisé (Pierce et Fontaine, 2009). En deuxième lieu, il n'y a pas d'explication sur la position et la taille relative de l'exposant dans l'écriture d'une expression exponentielle (Pimm, 1987). En troisième lieu, la plupart des définitions possèdent des exemples pour les illustrer, mais aucune n'a de contrexemple (Wilson, 1990). En quatrième lieu, la proportion de définitions de nature « zéro-définition » et « générées par la preuve » (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006) est sensiblement la même. En cinquième lieu, les lettres a et b sont toujours utilisées pour désigner les bases, alors que ce sont les lettres m et n qui sont toujours utilisées pour désigner les exposants et en sixième lieu, les contraintes d'utilisation des propriétés sont présentes, mais manquent souvent de précision ou de clarté.

Sur le plan des différences, signalons que la proportion du type de définition retrouvée dans chacune des collections n'est pas la même, malgré le fait que la majorité des définitions soit en mots et symboliques à la fois. Notons aussi qu'une seule collection (collection Y) emploie l'expression « multiplié par lui-même ». Cette même collection est aussi la seule à présenter des exemples algébriques pour illustrer ses définitions, les deux autres présentant des exemples exclusivement numériques. Faisons maintenant la synthèse des éléments importants en lien avec l'analyse des définitions de toutes les collections.

2.4 Synthèse générale sur les caractéristiques des items « définition »

Les définitions représentent un peu plus de 25 % des items analysés dans le cadre de cette étude. L'analyse des définitions des neuf collections nous permet de remarquer certaines tendances en lien avec les différentes catégories.

Tout d'abord, il est possible de constater une certaine progression entre les trois cycles. En effet, les types de définition sont plutôt en mots lors de l'amorce de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle, alors qu'une présence accrue des définitions « symboliques » et « en mots et symboliques » apparait au secondaire. Une progression encore plus nette est observée par rapport à la nature des définitions. Alors que ce sont presque exclusivement des « zéro-définition » dans les collections du 3^{e} cycle du primaire, il y a quelques définitions « générées par la preuve » au 1er cycle du secondaire et une majorité des définitions sont de cette dernière nature au 2^{e} cycle du secondaire (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006). Cette logique semble cohérente avec l'évolution historique de la notation exponentielle (Cajori, 1928) et avec ce qui est attendu par la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009, 2011), puisque l'apprentissage des propriétés de l'exponentiation est prévu au 2^{e} cycle du secondaire.

Un autre constat important est en lien avec le vocabulaire employé. Même s'il semble peu varié, il est en général utilisé adéquatement. De plus, aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant, n'est observé ce qui, il faut le rappeler, pourrait mener l'élève à donner un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte (Pierce et Fontaine, 2009). L'expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995), quoique présente à quelques reprises dans la moitié des collections, est généralement bien utilisée et ne mène pas nécessairement à la présence d'une base de trop dans le calcul de la puissance, sauf dans quelques cas isolés. Il serait évidemment préférable que ce ne soit jamais le cas, mais il semble que les auteurs des différentes collections aient été sensibles à cette forme d'énonciation.

Sur le plan du symbolisme, pratiquement aucune mention explicite n'est faite en lien avec la position et la taille relative de l'exposant par rapport à la base (Pimm, 1987). Ce résultat est plus surprenant pour les collections du 3^{e} cycle du primaire, puisque c'est à ce moment que la notation est introduite pour la première fois. Il nous semblerait donc essentiel d'en présenter explicitement les aspects constituants afin d'en favoriser l'apprentissage. Ce résultat est cependant moins surprenant pour le secondaire, puisque les élèves de ces niveaux scolaires ont normalement été mis en présence de la notation exponentielle depuis quelques années et devraient connaitre le symbolisme associé à l'écriture de l'exponentiation.

L'absence complète de contrexemple dans toutes les définitions pour toutes les collections est particulièrement préoccupante. Comme le souligne Wilson (1990), le contrexemple est très important pour mettre en perspective le domaine de validité d'une définition. Ainsi, l'absence complète de contrexemple nous amène à nous questionner sur la qualité du soutien offert à l'élève pour développer un sens riche du concept, puisque cela repose essentiellement sur des exemples. Par ailleurs, ces derniers, même s'ils sont présents à raison de un à cinq par définition dans plusieurs cas, ont aussi des particularités qui nous préoccupent. Même s'il nous semble adéquat que les exemples soient exclusivement numériques au primaire et au 1er cycle du secondaire, nous trouvons dommage, d'un point de vue de la construction et de l'intégration du concept d'exponentiation, que peu d'exemples algébriques soient présents au 2^{e} cycle du secondaire. En fait, une seule des collections en propose quelques-uns. Étant donné que la notation exponentielle est fondamentale dans l'acquisition des habiletés nécessaires aux manipulations algébriques (Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter, 2013), aurait-il été pertinent de rendre ce fait plus explicite dès son acquisition?

Finalement, soulignons, comme annoncé au début du chapitre, que certaines catégories n'ont pas été incluses dans la présentation finale des résultats. Ainsi, la collecte de données en lien avec les fonctions des définitions (Vinner, 2002) s'est avérée peu révélatrice, puisque plusieurs des fonctions pouvaient être présentes simultanément rendant impossible toute possibilité de dégager des tendances. Ainsi, bien qu'ayant été abordés lors de la collecte de données, les résultats en lien avec cette catégorie n'ont pu être traités dans le contexte de notre analyse. Il convient de souligner que, malgré cet imprévu, il s'agit d'un résultat à tenir compte lors de futures analyses.

La description des items « définition » étant complétée, passons maintenant au portrait des différents exercices présents dans les neuf collections analysées.

3. RÉSULTATS EN LIEN AVEC LES ITEMS « EXERCICE »

Cette section s'intéresse à l'analyse des items identifiés comme étant des exercices à l'intérieur de chacune des collections. Comme spécifié dans la grille, cinq grandes catégories nous permettent de le faire. Ces catégories sont 1) le sens du vocabulaire employé dans les énoncés; 2) le symbolisme employé; 3) la présence d'exemples ou de contrexemples; 4) la fonction de l'exercice et 5) les observations sur les particularités de l'exercice. Nous avons privilégié ici aussi de présenter chacune des collections afin de conserver le caractère particulier et permettre une analyse plus fine des ressemblances et des différences.

3.1 Caractéristiques des items « exercice » pour les collections du 3^{e} cycle du primaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les exercices pour chacune des trois collections du primaire (R, S et T). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

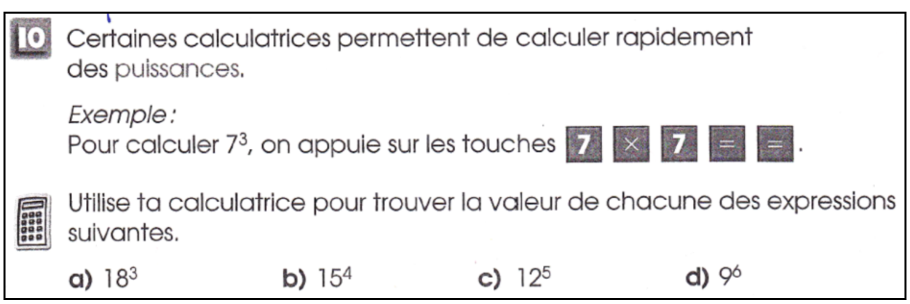
3.1.1 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection R

Nous avons repéré dix exercices dans la collection R. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des dix exercices de la collection R apparait assez restreint : moins de 40 termes différents sont utilisés en tout dans les dix énoncés. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est utilisé. Ainsi, les auteurs de cette collection évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte. Cependant, pour les items Rp5e21 et Rp5e24, le mot « valeur » est utilisé, alors que le mot « puissance » aurait été plus précis dans le contexte.

En ce qui a trait à l'utilisation du symbolisme (Pimm, 1987), nous observons que dans six des dix exercices, le symbolisme n'est pas utilisé ni même nécessaire pour amener l'élève à traiter la notion d'exponentiation. Dans les quatre exercices où la notation exponentielle est présente, elle est toujours adéquatement utilisée, autant pour la position de l'exposant que pour la taille relative des informations.

Les neuf premiers exercices sur les dix présents n'ont aucun exemple pour illustrer leur résolution. Toutefois, plusieurs exercices sont physiquement situés à proximité d'une définition qui fait explicitement mention d'éléments nécessaires à leur réalisation, soit dans la définition elle-même ou soit dans l'exemple qui l'accompagne. L'exemple de la définition est même dans un cas une réponse attendue de l'exercice (l'item exercice Rp5e11, en lien avec l'item définition Rp5d13). Le dixième exercice (item Rp5e24) possède, quant à lui, un exemple : il s'agit d'expliquer comment il est possible de faire une multiplication répétée sur la calculatrice sans retaper continuellement les informations, mais en utilisant plutôt la touche « = » à répétition. La figure 26 présente cet item.


10 Certaines calculatrices permettent de calculer rapidement des puissances.

Exemple :
Pour calculer 7^3, on appuie sur les touches 7 × 7 = =.

Utilise ta calculatrice pour trouver la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) 18^3 **b)** 15^4 **c)** 12^5 **d)** 9^6

Figure 26 – Item Rp5e24

Malheureusement, cette manière de faire ne fonctionne que sur les calculettes de base : elle n'est pas opérationnelle sur la majorité des calculatrices scientifiques. À noter également que cette proposition pourrait avoir un impact négatif sur le sens accordé au symbole « = » par les élèves en renforçant celui d'obtention d'un résultat plutôt que le sens d'équivalence, qui est à privilégier (Baroody et Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; Powell et Fuchs, 2010; Sáenz-Ludlow et Walgamuth, 1998). Finalement, soulignons qu'aucun contrexemple n'est présenté (Wilson, 1990).

Les diverses fonctions des exercices répertoriés sont celles d'encodage, de décodage, de déduction d'une valeur manquante et de comparaison d'effet. Les six premiers exercices ont une fonction exclusive, alors que les quatre derniers conjuguent deux ou trois fonctions. La fonction d'encodage se retrouve dans deux exercices, celle de décodage dans cinq exercices, celle de déduction d'une valeur manquante dans sept exercices et celle de comparaison d'effet dans deux exercices. Tous les exercices sont constitués exclusivement de nombres naturels qui sont dans le répertoire numérique prévu au 3^e^ cycle du primaire, soit plus petit que 1 000 000 (Gouvernement du Québec, 2009).

Neuf des dix énoncés présentant les exercices à compléter semblent indiquer clairement ce qui est attendu. Parfois, un réinvestissement plus explicite des définitions dans des énoncés aurait pu être présent. Par exemple, pour l'item Rp5e15, il nous semble que l'énoncé « Écris les multiplications ci-dessous en utilisant des exposants » aurait pu réinvestir la définition Rp5d14 située juste à côté pour devenir « Écris les multiplications ***répétées*** ci-dessous de ***manière abrégée*** en utilisant un exposant ». L'économie réalisée en matière de mots pourrait devenir un obstacle à l'apprentissage, puisque le sens de ce qui est à faire se perd dans l'imprécision de l'énoncé. Il nous semble aussi que dans deux items, l'utilisation de l'expression « en utilisant des exposants » est un peu abusive et aurait pu être remplacée par « en utilisant la notation exponentielle ». En effet, il est possible de se questionner sur le sens à attribuer à une expression telle que « utiliser des exposants ».

Finalement, il ne semble pas y avoir une progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice, à part peut-être la complexité des calculs quand les bases et les exposants grossissent, si la calculatrice est interdite (sauf pour l'exercice traitant explicitement de l'utilisation de la calculatrice, rien n'indique s'il est permis ou non de l'utiliser). Notons également que les procédés à exécuter sont toujours de même nature pour tous les éléments d'un même exercice, ce qui met en lumière l'aspect répétitif de chacun.

Somme toute, les exercices proposés dans la collection R semblent respecter la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009) en proposant des activités en lien avec les fonctions d'encodage, de décodage et de recherche d'une valeur manquante. Il faut noter qu'un vocabulaire plus précis aurait pu occasionnellement être réinvesti afin de favoriser son apprentissage par l'élève. Examinons maintenant les différentes caractéristiques des exercices pour la collection S.

3.1.2 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection S

Nous avons repéré deux exercices dans la collection S. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des deux exercices de la collection S est très restreint : 11 termes différents sont utilisés en tout dans les deux énoncés. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est employé. Ainsi, les auteurs de cette collection ne tombent pas dans le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte.

En ce qui a trait à l'utilisation du symbolisme (Pimm, 1987), nous observons que la notation exponentielle est toujours adéquatement utilisée, autant pour la position de l'exposant que pour la taille relative des informations. Notons aussi qu'il n'y a ni exemple ni contrexemple présent dans les exercices (Wilson, 1990). Toutefois, plusieurs items environnants soutiennent directement ce qui est à réaliser.

Les diverses fonctions des exercices répertoriés sont celles d'encodage, de décodage et de déduction d'une valeur manquante. Les deux exercices conjuguent deux fonctions : encodage et déduction d'une valeur manquante pour l'item Sp6e5, décodage et déduction d'une valeur manquante pour l'item Sp6e6. Les exercices font apparaitre l'exposant 0, ainsi que des puissances sous forme de fractions à quelques reprises, ce qui est inattendu dans une collection s'adressant à des élèves du 3e cycle du primaire, mais conséquent avec l'approche adoptée par les auteurs de cette collection. En effet, rappelons que cette collection est la seule à avoir présenté une définition « générée par la preuve » portant sur l'interprétation d'une expression exponentielle ayant comme exposant « 0 » ou un nombre négatif.

Les exercices contiennent plusieurs éléments (neuf et huit respectivement). Ils sont constitués uniquement de valeurs numériques, ce qui est attendu compte tenu du niveau scolaire (6e année). Les énoncés des deux exercices sont adéquats et semblent amener l'élève à réaliser la tâche. Cependant, pour l'item Sp6e6, le mot « puissance » aurait été plus précis que le mot « valeur » dans le contexte. De plus, nous nous questionnons sur le sens de l'ajout de la phrase « Utilise un nombre entier ou une fraction ordinaire » comme commentaire pour soutenir l'élève dans la réalisation de cet exercice. Qu'est-ce qu'une fraction ordinaire? Cela veut-il dire de laisser la puissance sous la forme d'une fraction dans le cas de l'utilisation de la propriété $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$? La figure 27 présente l'item Sp6e6.

2 Calcule la valeur exacte des expressions suivantes. Utilise un nombre entier ou une fraction ordinaire.

a) 4^{+4}	**b)** 5^{+2}
c) 2^{-3}	**d)** 1^{6}
e) 7^{-1}	**f)** 3^{5}
g) 9^{-2}	**h)** 10^{0}

Figure 27 – Item Sp6e6

Finalement, il ne semble pas y avoir une progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice. Notons également que les procédés à exécuter sont relativement de même nature pour tous les éléments d'un même exercice, même si une certaine variété est présente dans l'ordre, ce qui fait que ce n'est pas toujours la même procédure qui est à exécuter si la séquence proposée est suivie (figure 27).

En résumé, les exercices de la collection S, même s'ils sont peu nombreux, font déjà travailler les élèves sur des expressions exponentielles où l'exposant est un entier relatif, alors que ce qui est attendu est plutôt que l'exposant soit un nombre naturel (Gouvernement du Québec, 2009). Cela est toutefois cohérent avec l'approche des auteurs, puisque l'une des deux définitions proposées introduisait ce concept. Passons maintenant à la dernière collection du 3e cycle du primaire, la collection T.

3.1.3 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection T

Nous avons repéré huit exercices dans la collection T. Nous en précisons maintenant les caractéristiques et les particularités.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des huit exercices de la collection T apparait assez restreint : moins de 35 termes différents sont utilisés en tout dans les huit énoncés. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est employé. Ainsi, les auteurs de cette collection évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte. Cependant, pour certains items, le mot « valeur » est utilisé pour parler de la puissance et le mot « nombre » est utilisé pour parler de la base. Il aurait donc été possible d'être plus précis dans le contexte.

En ce qui a trait à l'utilisation du symbolisme (Pimm, 1987), nous observons que dans cinq des huit exercices, le symbolisme n'est pas utilisé ni même nécessaire pour amener l'élève à traiter la notion d'exponentiation. Dans les trois exercices où la notation exponentielle est présente, elle est toujours adéquatement utilisée, autant pour la position de l'exposant que pour la taille relative des informations.

Notons aussi qu'il n'y a ni exemple ni contrexemple présent dans les exercices (Wilson, 1990). Toutefois, la stratégie proposée dans certains exercices va permettre à l'élève de répondre à d'autres exercices situés un peu plus loin dans la séquence. La figure 28 présente l'item Tp5e5, qui est un exemple de cette situation.

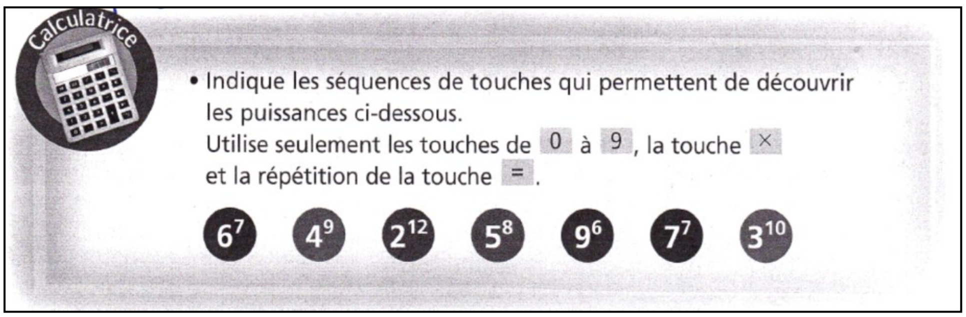


Figure 28 – Item Tp5e5

En effectuant l'exponentiation à partir de la stratégie proposée, les puissances consécutives de même base seront rencontrées sur l'écran de la calculatrice. Ainsi, lors de la réalisation de l'item suivant (Tp5e6), où l'on demande de trouver deux manières possibles de faire une multiplication de facteurs identiques donnant la puissance 512, ces manières possibles auront été croisées grâce à l'exercice précédent. Rappelons toutefois que la manière de faire proposée à l'item Tp5e5 ne fonctionne que sur les calculettes de base, ce qui peut être un obstacle et qu'elle peut renforcer une conception non souhaitée du symbole « = » (Baroody et Ginsburg, 1983; Kieran, 1981; Powell et Fuchs, 2010; Sáenz-Ludlow et Walgamuth, 1998).

Les diverses fonctions des exercices répertoriés sont celles d'encodage, de décodage, de déduction d'une valeur manquante et de comparaison d'effet. Trois exercices ont comme fonction unique d'encoder, quatre autres partagent comme fonction du décodage et de la déduction de valeurs manquantes et un exercice sert à la fois à décoder, à déduire une valeur manquante et à comparer des effets. Un dernier exercice a, quant à lui, comme fonctions l'encodage et la déduction de valeurs manquantes. Tous les exercices sont constitués exclusivement de nombres naturels qui sont dans le répertoire numérique prévu au 3e cycle du primaire, soit plus petit que 1 000 000 (Gouvernement du Québec, 2009).

Les huit énoncés des exercices sont adéquats et permettent de comprendre ce qui est attendu. Toutefois, comme spécifié précédemment, quelques mots de vocabulaire plus précis auraient pu être utilisés afin, entre autres, de réinvestir les termes en lien avec la notation exponentielle. Soulignons qu'il n'y a pas de progression apparente entre les éléments d'un même exercice. Notons finalement que les procédés à exécuter sont toujours de même nature pour tous les éléments d'un même exercice, ce qui met en lumière l'aspect répétitif de chacun.

En résumé, les exercices de la collection T possèdent plusieurs fonctions, souvent de manière simultanée. Les énoncés qui les accompagnent sont adéquats, mais auraient pu être plus précis dans l'utilisation de certains mots de vocabulaire. Même si aucun exemple ni contrexemple ne sont présents pour en illustrer le fonctionnement, certains exercices précédents soutiennent la réalisation des exercices qui les suivent. Comparons maintenant les trois collections du 3e cycle du primaire, afin d'en faire ressortir les particularités.

3.1.4 Synthèse des caractéristiques des items « exercice » pour les collections du primaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 3e cycle du primaire en ce qui a trait aux exercices, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 35 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des exercices pour chacune des collections et d'en faire ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 35
Principaux résultats en lien avec les exercices pour les collections du 3e cycle du primaire

Aspects analysés		Collections du 3e cycle du primaire		
Catégories	Caractéristiques	R	S	T
1. Vocabulaire	Sens du vocabulaire utilisé	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
2. Symbolisme	Utilisation (position et taille relative)	Adéquate	Adéquate	Adéquate
3. Exemples ou contrexemples	a. Présence d'exemples	Oui (1/10) Un exemple d'utilisation de la calculatrice. Par contre, des définitions qui possèdent des exemples sont souvent à proximité.	Non (0/2) Par contre, des items présentent des informations pertinentes à proximité.	Non (0/8) Par contre, certains exercices apportent des moyens pour répondre à d'autres.
	b. Présence de contrexemples	Non	Non	Non
4. Fonction de l'exercice	a. Encodage	2/10	1/2	4/8
	b. Décodage	5/10	1/2	5/8
	c. Déduction d'une valeur manquante	7/10	2/2	6/8
	d. Comparaison d'effet	2/10	0/2	1/8

5. Autres particularités	a. Énoncés	Utilisation de l'expression un peu abusive « en utilisant des exposants » dans les énoncés.	Adéquats, même si l'expression « fraction ordinaire » nous interroge.	Adéquats, même si certains mots utilisés auraient pu être remplacés par des mots plus précis.
	b. Progression	Pas de progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice.	Pas de progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice.	Pas de progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice.

Certaines particularités sont présentes dans toutes les collections du 3^{e} cycle du primaire en lien avec les exercices. D'abord, aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant, n'est utilisé dans les différents énoncés (Pierce et Fontaine, 2009), ce qui pourrait entrainer une confusion pour l'élève s'il utilise le mauvais sens dans le contexte. Ensuite, le symbolisme associé à la notation exponentielle (Pimm, 1987) est utilisé de façon adéquate. Puis, en général, il n'y a ni exemple ni contrexemple (Wilson, 1990) pour illustrer ce qui est attendu dans l'exercice. Par la suite, plusieurs fonctions sont présentes simultanément dans les exercices à réaliser (principalement l'encodage, le décodage et la déduction d'une valeur manquante). En dernier lieu, il n'y a pas vraiment de progression explicite présente entre les différents éléments d'un même exercice.

Quelques nuances sont parfois présentes entre les trois collections. Par exemple, chacune a des particularités différentes par rapport à ses énoncés (choix d'une expression ou d'un vocabulaire manquant de précision), même s'ils sont généralement adéquats. Cependant, une différence majeure existe entre la collection S et les deux autres. Le fait de travailler les expressions exponentielles ayant comme exposants des entiers relatifs est unique à la collection S. Les deux autres collections (R et T) se ressemblent davantage dans leur approche, misant sur une assez grande quantité d'exercices (dix et huit respectivement) et favorisant une utilisation malheureusement pas toujours fonctionnelle de la calculatrice dans leur recherche de la puissance d'une exponentiation.

Examinons ce qui en est pour les exercices des collections du 1er cycle du secondaire.

3.2 Caractéristiques des items « exercice » pour les collections du 1er cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les exercices pour chacune des trois collections du 1er cycle du secondaire (U, V et W). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

3.2.1 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection U

Nous avons repéré 28 exercices dans la collection U. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Sur le plan du vocabulaire, moins de 90 mots différents ont été utilisés dans l'ensemble des énoncés des 28 exercices. Un mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant (Pierce et Fontaine, 2009) est employé dans l'item Us1e43. Il s'agit du mot « différence ». La figure 29 présente cet item.

5. Selon toi, quelle est la différence entre les expressions $(^{-}5)^4$, $^{-}5^4$ et $^{-}(5)^4$?

Figure 29 – Item Us1e43

Une certaine confusion peut apparaitre si l'élève tente de faire des soustractions avec les expressions exponentielles présentées, alors que l'objectif de l'exercice est de relever ce qui serait différent sur le plan de la puissance obtenue selon chacun des cas.

Aucun des exercices n'a d'exemple pour l'illustrer. Toutefois, 20 des 28 exercices sont à proximité d'un autre item qui est en lien direct avec l'exercice qui est proposé et qui peut en favoriser la réalisation. Signalons également qu'il n'y a aucun contrexemple pour mettre en perspective l'exercice (Wilson, 1990).

En ce qui a trait aux fonctions de l'exercice, notons que 16 items ont une seule et unique fonction, 10 items combinent deux fonctions, un item combine 3 fonctions et un item combine 4 fonctions. Toutes les fonctions ayant émergé de l'analyse sont plus ou moins présentes (encodage, décodage, déduction d'une valeur manquante, transformation d'écriture, réduction, comparaison d'effet, définitions de termes, conjecture et validation), à part la fonction d'évaluation numérique qui est complètement absente des exercices de cette collection. Tout cela nous permet de constater que les exercices de la collection U sont relativement variés et diversifiés dans leurs objectifs et leurs moyens de faire travailler les élèves.

Nous pouvons constater que 26 des 28 énoncés des exercices sont pertinents et permettent de définir clairement ce qui est attendu. Dans ces énoncés, le vocabulaire est en général adéquat, à l'exception de quelques endroits où le mot « puissance » aurait été plus précis que « résultat » ou « valeur » dans le contexte. L'un des deux énoncés moins clairs est celui présenté précédemment à la figure 29, l'interprétation du mot « différence » étant ambigüe. La figure 30 présente le deuxième cas où l'énoncé est moins clair, l'item Us1e24.

2. Rien ne sert de courir

Effectue les calculs suivants.

a) $2^3 \times 2^2$

b) $3^2 + 3^2$

c) $3^2 \times \frac{3^5}{3^4} \times 2^3$

d) $5^3 + 5^0$

Figure 30 – Item Us1e24

Ici, nous avons droit à un énoncé « fourre-tout ». Que veut dire « Effectue les calculs suivants »? Est-ce que l'élève doit utiliser les propriétés de l'exponentiation et fournir la réponse en notation exponentielle? Est-ce qu'il doit fournir la puissance? S'il est impossible d'utiliser une propriété pour réduire, est-ce qu'il faut calculer en décodant les expressions exponentielles? Cet énoncé soulève, selon nous, plus de questions qu'il n'apporte d'aide.

Finalement, il est possible de remarquer que certains exercices proposent une progression entre les éléments d'un même exercice, alors que d'autres n'en ont apparemment pas. Notons également que contrairement à ce que nous pourrions croire, à savoir que l'aspect répétitif de faire des exercices ne sert qu'à développer des habiletés, nous constatons que cette collection comporte plusieurs exercices où une réflexion riche et profonde est nécessaire pour les réaliser. La figure 31 présente l'item Us1e48 pour illustrer ce fait.

23. Si tu le dis...

Détermine si les conjectures suivantes sont vraies ou fausses. Appuie tes réponses de contre-exemples ou de justifications.

a) Si une puissance est négative, la base était nécessairement négative.

b) Le signe de la puissance dépend seulement de la base.

c) Le signe de la puissance dépend seulement de l'exposant.

d) Les puissances des nombres pairs sont paires et les puissances des nombres impairs sont impaires.

e) Il existe toujours deux nombres ayant le même carré.

f) Si une base a un exposant négatif, alors la puissance est négative.

g) Si la puissance est positive, il est impossible de connaître le signe de l'exposant.

h) Si la base et l'exposant sont négatifs, alors la puissance l'est aussi.

i) Il est impossible qu'une base impaire ait une puissance positive.

Figure 31 – Item Us1e48

En résumé, la collection U s'avère relativement riche sur le plan des exercices, entre autres, par rapport aux multiples fonctions qu'ils occupent, et ce, malgré la présence de quelques imprécisions en lien avec l'utilisation de certains mots de vocabulaire et avec la clarté des énoncés. Voyons maintenant ce qui en est pour la collection V.

3.2.2 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection V

Nous avons repéré 26 exercices dans la collection V. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des 26 exercices apparait assez diversifié : plus de 120 termes différents sont utilisés en tout dans les 26 énoncés. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est utilisé. Ainsi, les auteurs de cette collection ne tombent pas dans le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte.

Deux exercices de cette collection possèdent un exemple pour aider à leur réalisation. Dans le premier cas (item Vs1e11), l'exemple sert à illustrer une manière d'utiliser l'associativité dans le calcul de la puissance d'une expression écrite en notation exponentielle. La figure 32 présente cet item.

6. Plutôt que d'effectuer les multiplications dans l'ordre habituel (de gauche à droite) pour calculer 2^6, Kim propose la stratégie suivante :

$$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 8 \times 8 = 64$$

a) Kim exploite l'une des propriétés de la multiplication. Laquelle ?

b) Calcule mentalement 3^4 en utilisant cette stratégie.

Figure 32 – Item Vs1e11

L'exemple est cohérent avec ce qui est demandé dans la suite de l'exercice, soit d'exploiter cette stratégie pour trouver la puissance d'une autre expression exponentielle. Dans le deuxième cas (item Vs1e13), l'exemple sert à illustrer ce qui est entendu par l'énoncé. La figure 33 présente cet item.

8. Estime la valeur de chacune des expressions suivantes en arrondissant la base à sa plus grande position.

Ex. : $29^2 \approx 30^2 = 30 \times 30 = 900$

a) 11^4	b) 51^2	c) 98^2
d) 31^3	e) 19^3	f) 201^2

Figure 33 – Item Vs1e13

Encore ici, l'exemple est éclairant et cohérent avec l'énoncé. Il permet de comprendre ce qui est demandé dans les différents éléments de l'exercice. Les 24 autres exercices n'ont pas d'exemple pour les illustrer et ne sont pas situés de manière remarquable par rapport à un autre item qui pourrait en faciliter la réalisation. Notons également qu'aucun contrexemple n'est présent pour mettre en perspective l'exercice (Wilson, 1990).

En ce qui a trait aux fonctions de l'exercice, notons que 20 items ont une seule et unique fonction, alors que 6 items en combinent deux. Cinq des fonctions ayant émergé de l'analyse sont plus ou moins présentes (encodage, décodage, déduction d'une valeur manquante, comparaison d'effet, conjecture et validation). Notons toutefois que la fonction « déduction d'une valeur manquante » (dans le trio base-exposant-puissance, deux sont connus et le troisième doit être déterminé) est nettement prépondérante. Tout cela nous permet de constater que les exercices de la collection V sont plus ou moins variés et diversifiés dans leurs objectifs et leurs moyens de faire travailler les élèves.

Tous les énoncés sont clairs, pertinents et réalistes. Ils permettent, selon nous, de comprendre explicitement ce qui est attendu. Dans la plupart des cas, le vocabulaire est recherché. Dans quelques rares cas, certains mots auraient pu être plus précis. Par exemple, l'utilisation du mot « puissance » au lieu de « résultats » ou de « valeur » aurait été plus juste dans certains énoncés. Soulignons toutefois que le mot « valeur » est utilisé de manière pertinente dans l'énoncé de l'item Vs1e18, puisqu'on y cherche tantôt la puissance, tantôt la base, tantôt l'exposant. Aussi, dans les items Vs1e21 et Vs2e56, on fait ressortir toutes les possibilités de touches selon les modèles de calculatrice qui existent, ce qui est facilitant. Notons également que dans les exercices où plus de deux éléments sont présents, il n'y a pas vraiment de progression remarquable entre eux.

Finalement, l'item Vs1e17 a plus particulièrement retenu notre attention. La figure 34 nous le présente.

12. Explique pourquoi les énoncés suivants sont faux.

a) $2^3 = 2 \times 3$ b) $5^0 = 5 \times 0$ c) $8^1 - 8^0 = 8$ d) $3^8 \div 3^2 = 3^4$

Figure 34 – Item Vs1e17

Cet exercice est intéressant en ce sens qu'il illustre certaines des interprétations incorrectes pouvant être données par les élèves à une expression exponentielle, en s'appuyant sur les mêmes fondements que ceux présentés par Mullet et Sastre (1998) :

interprétation additive (c) et interprétation multiplicative (a, b et d) de l'expression exponentielle. Ces interprétations sont présentées plus en détail dans le premier chapitre de cette étude.

En résumé, il est possible de constater que les exercices de la collection V ont principalement comme fonction de déduire une valeur manquante. Nous remarquons également que le vocabulaire employé dans les énoncés est très varié et généralement précis dans son utilisation. Passons maintenant à l'analyse des exercices de la dernière collection du 1er cycle du secondaire, la collection W.

3.2.3 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection W

Nous avons repéré sept exercices dans la collection W. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des sept exercices apparait assez diversifié : plus de 45 termes différents sont employés en tout. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est utilisé. Ainsi, les auteurs de cette collection évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte.

Aucun des exercices n'a d'exemple pour l'illustrer. Toutefois, trois des sept exercices sont à proximité d'un autre item qui est en lien direct avec l'exercice proposé et qui peut en favoriser la réalisation. Signalons également qu'il n'y a aucun contrexemple pour mettre en perspective l'exercice (Wilson, 1990).

En ce qui a trait aux fonctions de l'exercice, trois items ont une seule et unique fonction, alors que les quatre autres en combinent deux. Six des fonctions ayant émergé de l'analyse sont plus ou moins présentes (encodage, déduction d'une valeur manquante, transformation d'écriture, réduction, comparaison d'effet, conjecture et validation). Notons toutefois que la fonction « déduction d’une valeur manquante » (dans le trio base-exposant-puissance, deux sont connus et le troisième doit être déterminé) est nettement prépondérante. Tout cela nous permet de constater que les exercices de la collection W, en plus d’être peu nombreux, sont plus ou moins diversifiés.

Tous les énoncés sont clairs, pertinents et réalistes. Ils permettent, selon nous, de comprendre explicitement ce qui est attendu. Dans la plupart des cas, le vocabulaire est recherché. Dans un cas, le mot « puissance » au lieu du mot « nombre » aurait été plus juste. Cependant, des indications explicites auraient été nécessaires dans quatre exercices en lien avec la possibilité d’utiliser ou non la calculatrice. La figure 35 présente en exemple l’item Ws2e7.

1. Représente les nombres suivants sous la forme de fractions, puis en notation décimale.

a) 2^{-3} **b)** 2^{-5} **c)** 5^{-1} **d)** 5^{-2} **e)** 10^{-1} **f)** 10^{-3}

Figure 35 – Item Ws2e7

L’élève peut-il utiliser la calculatrice, particulièrement pour déterminer les puissances en notations décimales? D’ailleurs, pourquoi est-il demandé d’écrire les puissances en fractions, puis en notation décimale? Quel est le but? L’énoncé de cet exercice laisse donc plusieurs questions en suspens.

Finalement, deux exercices proposent une certaine progression entre les éléments qui les constituent, alors que les cinq autres n’en ont pas vraiment.

Somme toute, la collection W nous laisse perplexe par rapport aux exercices qu’elle propose. Il semble y avoir un certain potentiel dans quelques exercices présents (les items Ws2e15 et Ws2e16, par exemple), mais peu de questionnements explicites sont présents pour faire observer les élèves et pour les amener à conjecturer, ce qui fait qu’un doute subsiste quant à leur capacité d’en ressortir de manière autonome avec une compréhension profonde de ce qu'est la notation exponentielle. En effet, en plus d'être peu nombreux, les exercices travaillent presque exclusivement la déduction d'une valeur manquante. Réalisons maintenant une synthèse des aspects importants à retenir sur les exercices en lien avec les collections du 1er cycle du secondaire.

3.2.4 Synthèse des caractéristiques des items « exercice » pour les collections du 1er cycle du secondaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 1er cycle du secondaire en ce qui a trait aux exercices, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 36 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des exercices pour chacune des collections et d'en faire ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 36
Principaux résultats en lien avec les exercices pour les collections du 1er cycle du secondaire

Aspects analysés		Collections du 1er cycle du secondaire		
Catégories	Caractéristiques	U	V	W
1. Vocabulaire	Sens du vocabulaire utilisé	Un mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
2. Symbolisme	Utilisation (position et taille relative)	Adéquate	Adéquate	Adéquate

3. Exemples ou contrexemples	a. Présence d'exemples	Non (0/28) Par contre, 20 des 28 exercices se trouvent à proximité d'un autre item pouvant soutenir leur réalisation.	Oui (2/26) Les exemples soutiennent la réalisation de ces exercices. Les 24 autres ne sont pas situés près d'un item facilitant la réalisation de façon remarquable.	Non (0/7) Par contre, la réalisation de trois des exercices peut bénéficier de la présence d'autres items à proximité.
	b. Présence de contrexemples	Non	Non	Non
4. Fonction de l'exercice	a. Encodage	4/28	5/26	1/7
	b. Décodage	3/28	3/26	0/7
	c. Déduction d'une valeur manquante	12/28	14/26	5/7
	d. Transformation d'écriture	1/28	0/26	1/7
	e. Réduction	7/28	0/26	1/7
	f. Évaluation numérique	0/28	0/26	0/7
	g. Comparaison d'effet	8/28	3/26	1/7
	h. Définitions de termes	3/28	0/26	0/7
	i. Conjecture et validation	5/28	7/26	2/7

5. Autres particularités	a. Énoncés	Utilisation d'un énoncé « fourre-tout » dans un des exercices.	Utilisation d'un vocabulaire précis dans la très grande majorité des cas.	Utilisation d'un vocabulaire précis dans la très grande majorité des cas.
	b. Progression	Certains exercices ont une progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice; d'autres non.	Pas de progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice.	Deux exercices ont une progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice; d'autres non.

À part l'utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la notation exponentielle (Pimm, 1987), les trois collections du 1er cycle du secondaire sont passablement différentes en ce qui a trait aux exercices qu'ils proposent. Tout d'abord, deux des trois collections (U et V) comportent une grande quantité d'items de cette catégorie, alors que la collection W est plutôt pauvre à ce chapitre. Toutefois, malgré la présence d'un nombre comparable d'exercices dans les collections U et V, ces exercices sont très différents sur le plan de leur fonction. Les exercices de la collection U sont très riches et très diversifiés, alors que ceux de la collection V ont principalement comme fonction la déduction d'une valeur manquante, ce qui est loin d'être aussi varié. Plusieurs petits aspects distinguent également chacune des collections : utilisation d'un mot ayant un sens courant et technique dans un sens courant, ainsi que d'un énoncé « fourre-tout » pour la collection U; présence d'exemples dans deux exercices de la collection V; fonctions très peu diversifiées des exercices pour la collection W. Au-delà de ces particularités, il apparait que l'utilisation de l'une ou de l'autre de ces collections dans l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle mènera les élèves à faire des exercices très différents selon la collection choisie, ce qui pourrait entrainer une plus ou moins grande appropriation du concept, selon le cas.

Passons maintenant à l'analyse des items « exercice » pour les collections du 2e cycle du secondaire.

3.3 Caractéristiques des items « exercice » pour les collections du 2e cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les exercices pour chacune des trois collections du 2e cycle du secondaire (X, Y et Z). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

3.3.1 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection X

Nous avons repéré 32 exercices dans la collection X. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des 32 exercices est relativement limité : environ 80 mots différents sont utilisés en tout. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est employé. Ainsi, les auteurs de cette collection évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte.

Aucun des exercices n'a d'exemple pour l'illustrer. Toutefois, certains exercices sont regroupés selon les propriétés à travailler et d'autres sont à proximité de définitions possédant des exemples qui peuvent en favoriser la réalisation. Signalons également qu'il n'y a aucun contrexemple pour mettre en perspective l'exercice (Wilson, 1990).

En ce qui a trait aux fonctions de l'exercice, 17 items ont une seule et unique fonction, 13 items combinent deux fonctions et deux items en cumulent trois. Cinq des fonctions ayant émergé de l'analyse sont présentes (déduction d'une valeur manquante, transformation d'écriture, réduction, comparaison d'effet, conjecture et validation). De ces cinq fonctions, la réduction et la déduction d'une valeur manquante occupent une place nettement prépondérante. Il est donc possible de constater que même si la collection X contient beaucoup d'exercices, ils travaillent sensiblement tous des habiletés de même nature, et ce, toujours avec des valeurs numériques. Cependant, dans plus de la moitié des exercices, l'élève doit recourir à l'utilisation de différentes propriétés d'un élément à un autre d'un même exercice. Ce fait assure une meilleure compréhension des conditions d'utilisation des propriétés de l'exponentiation, c'est-à-dire qu'il faut que l'élève sache quand il peut utiliser une propriété donnée et quand il ne le peut pas. La figure 36 présente l'item Xs3e4, qui est représentatif de cette situation.

2. Simplifie chacune des expressions suivantes.

a) $5^2 \times 5^4$	c) $6^8 \times 6^{-4}$	e) $3^{-2} \div 3^7$	g) $(2^4)^3$
b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8$	d) $2^7 \div 2^4$	f) $\left(\frac{1^5}{4^2}\right)^3$	h) $(5^{-3})^5$

Figure 36 – Item Xs3e4

Tous les énoncés sont clairs, pertinents et réalistes. Le vocabulaire est généralement bien utilisé, même si quelquefois le mot « puissance » aurait été plus précis. Toutefois, plus du tiers des énoncés pourraient être considérés comme tellement généraux qu'ils nous informent peu sur ce qui est attendu (calcule la valeur des expressions suivantes, simplifie chacune des expressions suivantes, réduis chacune des expressions suivantes). Ces énoncés seraient interchangeables. Est-ce que les élèves les lisent vraiment avant de répondre? Est-ce que cela ferait une différence si c'était une autre question qui était formulée? Ce n'est souvent pas la formulation la plus précise qui est offerte en lien avec ce qui est demandé, même si cela demeure compréhensible (figure 36).

Dans les exercices où plus de deux éléments sont présents, il n'y a pas vraiment de progression explicite entre eux. Notons toutefois la présence de la mention « calcul mental » à proximité de quelques exercices ciblés. L'item Xse310, présenté à la figure 37, illustre cette particularité.

Calcul mental

7. Exprime les multiplications et les divisions suivantes sous la forme d'une base affectée d'un seul exposant.

a) $3^3 \times 3^{-2}$ c) $2^4 \times 4^2$ e) $5^{-3} \div 5^{-2}$ g) $(5^{-3})^2$

b) $2^7 \div 2^4$ d) $8^5 \div 4^2$ f) $10^5 \times (0,1)^{-5}$ h) $(7^3 \div 15^2)^0$

Figure 37 – Item Xs3e10

Nous trouvons cette précision pertinente, puisqu'elle permet de bien faire saisir à l'élève que la calculatrice n'est pas nécessaire dans la réalisation de cette activité, si les propriétés apprises sont réinvesties dans les calculs demandés.

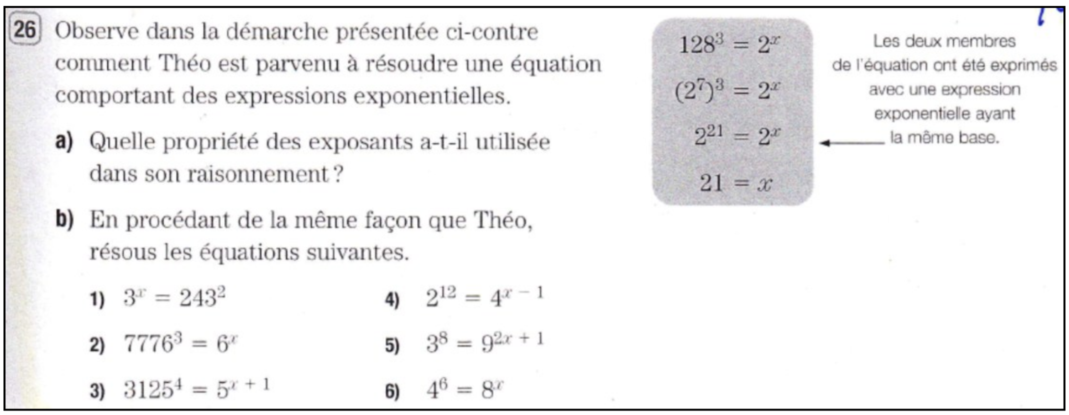
Somme toute, la collection X présente une grande quantité d'exercices. Même s'ils servent principalement à développer les habiletés en lien avec seulement deux des neuf fonctions répertoriées (réduction et déduction d'une valeur manquante), l'obligation d'utiliser plusieurs propriétés dans un même exercice et la mise en valeur du calcul mental comme moyen pertinent de calculer font en sorte que la collection X s'avère intéressante sur le plan des exercices qu'elle propose. Passons maintenant à l'analyse des exercices de la collection Y.

3.3.2 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection Y

Nous avons repéré 28 exercices dans la collection Y. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des 28 exercices est relativement limité : environ 65 mots différents sont utilisés en tout. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est utilisé. Ainsi, les auteurs de cette collection ne tombent pas dans le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte.

Trois des 28 exercices possèdent un exemple pour illustrer sa réalisation. La figure 38 présente l'un de ces cas, qui se retrouve à l'item Ys3e40.



26 Observe dans la démarche présentée ci-contre comment Théo est parvenu à résoudre une équation comportant des expressions exponentielles.

a) Quelle propriété des exposants a-t-il utilisée dans son raisonnement ?

b) En procédant de la même façon que Théo, résous les équations suivantes.

1) $3^x = 243^2$ **4)** $2^{12} = 4^{x-1}$

2) $7776^3 = 6^x$ **5)** $3^8 = 9^{2x+1}$

3) $3125^4 = 5^{x+1}$ **6)** $4^6 = 8^x$

$$128^3 = 2^x$$
$$(2^7)^3 = 2^x$$
$$2^{21} = 2^x$$
$$21 = x$$

Les deux membres de l'équation ont été exprimés avec une expression exponentielle ayant la même base.

Figure 38 – Item Ys3e40

Il est possible de constater que l'exemple utilisé est soutenant. Il permet à l'élève de visualiser ce qui est attendu de lui, tout en lui faisant remarquer la propriété mise de l'avant pour y arriver. Quelques-uns des exercices n'ayant pas d'exemple sont tout de même situés à proximité d'autres items qui peuvent soutenir l'élève dans leur réalisation. Cependant, aucun des exercices ne présente un contrexemple (Wilson, 1990).

En ce qui a trait aux fonctions de l'exercice, 15 items ont une seule et unique fonction, alors que les 13 autres en combinent deux. Six des fonctions ayant émergé de l'analyse sont plus ou moins présentes (encodage, déduction d'une valeur manquante, transformation d'écriture, réduction, évaluation numérique, conjecture et validation). Notons toutefois que la fonction « réduction » est nettement prépondérante. Il est donc possible de constater que même si la collection Y contient beaucoup d'exercices, ils travaillent sensiblement tous des habiletés de même nature. Cependant, l'élève doit recourir à l'utilisation de différentes propriétés d'un élément à un autre d'un même exercice dans

75 % des exercices. Ce fait assure une meilleure compréhension des conditions d'utilisation des propriétés de l'exponentiation, c'est-à-dire qu'il faut que l'élève sache quand il peut utiliser une propriété donnée et quand il ne le peut pas. Signalons également que des contextes numériques et algébriques sont présents, ce qui rend le travail plus diversifié, tout en préparant l'élève à l'utilisation des propriétés de l'exponentiation en algèbre. La figure 39 présente l'item Ys3e35, qui est représentatif de cette situation.

15 Réduis les expressions suivantes.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{2^6} \times 4^5}{2^{-2}}$ **e)** $x^6 \, \dfrac{\sqrt{4x}}{2^3 x^4}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{2^{-6}} \times 4^5}{2^{-2}}$ **f)** $(ab)^2 + \dfrac{3a^{-3}b^2}{a^{-5}}$

c) $\dfrac{b^4c^4}{b^2b^{-1}} + \dfrac{b^5}{\sqrt[4]{b^8}}$ **g)** $\sqrt[5]{32^3} \div 2^4$

d) $\left(\dfrac{25}{5^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{-3}{2}}$ **h)** $\left(\dfrac{x^3}{y}\right)\left(\dfrac{x}{y^{-1}}\right) \div \sqrt{x}$

Figure 39 – Item Ys3e35

Tous les énoncés sont clairs, pertinents et réalistes, mais quelques caractéristiques soulèvent des questions. L'utilisation du mot « réduire » dans un contexte précis (p. ex., avec des expressions algébriques) laisse peu de doute sur ce qui est attendu. Toutefois, le même mot dans un contexte numérique peut faire en sorte que nous nous demandions s'il fallait uniquement réduire à l'aide des propriétés de l'exponentiation ou s'il fallait également donner la puissance (figure 39). Dans ce cas, la question de l'utilisation ou non de la calculatrice peut aussi être soulevée, car cela n'est jamais dit explicitement. Certains énoncés plus généraux, comme « trouve les quotients demandés » (item Ys3e22), soulèvent la question de savoir si seulement les propriétés sont à utiliser ou si les puissances doivent être déterminées.

Dans les exercices où plus de deux éléments sont présents, il n'y a pas vraiment de progression explicite entre eux.

En résumé, la collection Y propose de nombreux exercices. Ils servent principalement à pratiquer la fonction de réduction. Toutefois, la variété des propriétés à utiliser à l'intérieur d'un même exercice et la présence d'expressions numériques et algébriques rendent tout de même leur présence pertinente. Examinons maintenant la dernière collection du 2e cycle du secondaire, la collection Z.

3.3.3 Caractéristiques des items « exercice » pour la collection Z

Nous avons repéré 14 exercices dans la collection Z. Nous en précisons les caractéristiques et les particularités dans ce qui suit.

Le vocabulaire utilisé dans les différents énoncés des 14 exercices est relativement limité : environ 50 mots différents sont utilisés en tout. Aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est utilisé. Ainsi, les auteurs de cette collection évitent le piège soulevé par Pierce et Fontaine (2009), à savoir que l'élève pourrait utiliser un autre sens que celui qui est approprié dans le contexte.

Aucun des exercices n'a d'exemple pour l'illustrer. Toutefois, un exercice est situé à proximité d'un item « définition » qui possède trois exemples pouvant soutenir sa réalisation. Signalons également qu'il n'y a aucun contrexemple pour mettre en perspective l'exercice (Wilson, 1990).

En ce qui a trait aux fonctions de l'exercice, 10 items ont une seule et unique fonction, alors que les quatre autres en combinent deux. Cinq des fonctions ayant émergé de l'analyse sont plus ou moins présentes (déduction d'une valeur manquante, transformation d'écriture, réduction, comparaison d'effet, conjecture et validation). Notons toutefois que les fonctions « réduction » et « déduction d'une valeur manquante » sont prépondérantes. Il est donc possible de constater que les exercices de la collection Z travaillent sensiblement tous des habiletés de même nature. Même si l'élève, dans la moitié des exercices, doit recourir à l'utilisation de différentes propriétés d'un élément à un autre d'un même exercice la variété qui en découle est elle aussi minimale. La figure 40 présente l'item Zs3e22, qui est représentatif de cette situation.

4 Écris les expressions ci-dessous sous la forme d'une puissance de la base.

a) $3^4 \times 3^6$ b) $(4^8)^{\frac{1}{2}}$ c) $2^{-4} \times 2^0 \times 2^6$

d) $\frac{8^6}{8^2 \times 8^3}$ e) $\left(\frac{2}{2^2}\right)^{-3}$ f) $(12^{12} \times 12^3)^{\frac{1}{3}}$

Figure 40 – Item Zs3e22

Signalons également que la plupart des contextes d'utilisation sont numériques, mais que deux situations algébriques sont présentes.

Tous les énoncés sont clairs, pertinents et réalistes, mais deux particularités sont observables. Premièrement, le vocabulaire est en général adéquat, mais quelques mots utilisés auraient parfois pu être plus précis, comme « puissance » au lieu de « valeur » à l'item Zs3e5. Deuxièmement, à l'item Zs3e22 (figure 40), l'utilisation de l'expression « sous la forme d'une puissance de même base » est la seule du genre à avoir été rencontrée, toutes collections confondues. Elle nous semble claire : ce n'est pas la puissance réduite qui est attendue, mais bien celle exprimée avec une base et un exposant.

Dans les exercices où plus de deux éléments sont présents, il n'y a pas vraiment de progression explicite entre eux. Toutefois, quelques exercices se démarquent, comme l'item Zs3e26, présenté à la figure 41.

9 Explique pourquoi les énoncés suivants sont faux.

a) $(2^3)^4 = 2^7$ b) $(-3)^2 = -(3 \times 3)$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3}$ d) $3 \times 2^{-2} = \frac{1}{3 \times 2^2}$

Figure 41 – Item Zs3e26

Cet exercice est intéressant, car dans l'énoncé il est déjà annoncé que les égalités sont fausses : c'est l'explication qui est importante. Les erreurs présentes dans les égalités reviennent souvent dans l'application des propriétés de l'exponentiation. Il est donc pertinent de faire expliquer pourquoi c'est incorrect, pour que l'élève ne fasse pas ces mêmes erreurs.

La collection Z contient relativement peu d'exercices (14). Ils servent principalement à pratiquer la réduction et la déduction d'une valeur manquante à l'aide des propriétés de l'exponentiation. Même s'ils sont en général plus ou moins riches, quelques items se démarquent par la profondeur des réflexions à laquelle l'élève doit parvenir. La présence de l'expression « sous la forme d'une puissance de même base » est aussi très intéressante et est unique à cette collection. Comparons maintenant les collections du 2^{e} cycle du secondaire par rapport aux exercices qu'elles proposent.

3.3.4 Synthèse des caractéristiques des items « exercice » pour les collections du 2^{e} cycle du secondaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 2^{e} cycle du secondaire en ce qui a trait aux exercices, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 37 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des exercices pour chacune des collections et d'en faire ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 37
Principaux résultats en lien avec les exercices pour les collections
du 2e cycle du secondaire

Aspects analysés		Collections du 2e cycle du secondaire		
Catégories	Caractéristiques	X	Y	Z
1. Vocabulaire	Sens du vocabulaire utilisé	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
2. Symbolisme	Utilisation (position et taille relative)	Adéquate	Adéquate	Adéquate
3. Exemples ou contrexemples	a. Présence d’exemples	Non (0/32) Par contre, certains exercices se trouvent à proximité de définitions pouvant soutenir leur réalisation et d’autres sont regroupés selon les propriétés.	Oui (3/28) Les exemples soutiennent la réalisation de ces exercices. Quelques exercices se trouvent à proximité d’un autre item pouvant soutenir leur réalisation.	Non (0/14) Par contre, un exercice est situé à proximité d’un item définition qui possède trois exemples pouvant soutenir sa réalisation.
	b. Présence de contrexemples	Non	Non	Non

4. Fonction de l'exercice	a. Encodage b. Décodage c. Déduction d'une valeur manquante d. Transformation d'écriture e. Réduction f. Évaluation numérique g. Comparaison d'effet h. Définitions de termes i. Conjecture et validation	0/32 0/32 14/32 5/32 20/32 0/32 3/32 0/32 4/32	1/28 0/28 7/28 8/28 21/28 2/28 0/28 0/28 2/28	0/14 0/14 5/14 3/14 8/14 0/14 1/14 0/14 1/14
5. Autres particularités	a. Énoncés	Plus du tiers des énoncés sont généraux et interchan-geables.	Utilisation du mot « réduire » dans les contextes numériques et algébriques apporte un certain question-nement.	Utilisation de l'expression « sous la forme d'une puissance de même base », unique à cette collection.
	b. Progression	Pas de progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice.	Pas de progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice.	Pas de progression explicite entre les différents éléments d'un même exercice.

Les trois collections partagent plusieurs aspects. Ainsi, aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est utilisé (Pierce et Fontaine, 2009). De plus, le symbolisme en lien avec la notation exponentielle est toujours utilisé adéquatement (Pimm, 1987). Aussi, aucun contrexemple n'est présent pour mettre en perspective les contextes d'utilisation des propriétés de l'exponentiation (Wilson, 1990). Puis, la fonction de réduction est celle qui est la plus exploitée et enfin, il n'y a pas de progression apparente entre les différents éléments des exercices.

Quelques différences notables sont toutefois présentes. Tout d'abord, les collections X et Y proposent une très grande quantité d'exercices relativement variés, alors que la collection Z en contient beaucoup moins et sont généralement moins riches, malgré quelques trouvailles intéressantes. La collection Y possède trois exercices qui contiennent un exemple pour en illustrer la réalisation (Wilson, 1990), alors que les deux autres n'en ont pas. Cette dernière collection est aussi la seule à exploiter autant les contextes algébriques que numériques dans l'appropriation des propriétés de l'exponentiation, alors que la collection X se situe toujours dans des contextes numériques et que la collection Z investit seulement deux fois des contextes algébriques, et ce, de façon très limitée. Sur le plan des énoncés, les trois collections ont des particularités. La collection X présente des énoncés généraux et interchangeables dans le tiers de ses exercices; la collection Y utilise le verbe « réduire » dans les contextes numériques et algébriques, ce qui peut entrainer une certaine confusion et la collection Z est la seule qui propose l'expression « sous la forme d'une puissance de même base », qui nous semble claire et pertinente.

Faisons maintenant la synthèse des éléments marquants en lien avec l'analyse des exercices pour toutes les collections analysées.

3.4 Synthèse générale sur les caractéristiques des items « exercice »

La catégorie des exercices est de loin celle qui contient le plus d'items (155). En effet, les exercices représentent plus de 45 % des items analysés dans les neuf collections. Dans cinq de ces collections, c'est la catégorie qui est la plus représentée et dans les quatre autres, le nombre d'items « exercice » est toujours près du nombre d'items de la catégorie ayant le plus grand effectif. Les exercices occupent donc une place centrale dans ce qui est proposé à l'élève dans son apprentissage de la notation exponentielle. L'analyse des exercices nous a toutefois permis de constater qu'ils ont des caractéristiques et des particularités d'une collection à l'autre, et ce, dans chacun des cycles d'enseignement. Regarder la quantité d'exercices offerts dans une collection donnée pour faire un choix éclairé de manuel scolaire nous semble donc nettement insuffisant comme stratégie.

Sur le plan du vocabulaire utilisé, il a été possible de constater que peu de mots sont généralement nécessaires pour construire les énoncés. Ce résultat pourrait indiquer qu'ils manquent de richesse, ou encore qu'un réinvestissement du vocabulaire déjà appris est souvent de mise. Même si parfois le vocabulaire utilisé aurait pu être plus précis, il n'en demeure pas moins qu'il est souvent clair et adapté, reprenant même intégralement des mots introduits dans des définitions précédant les exercices, ce qui est positif dans la perspective de l'apprentissage d'un vocabulaire technique adéquat par l'élève (Pierce et Fontaine, 2009). De plus, un seul mot ayant à la fois un sens courant et technique, utilisé dans un sens courant, a été répertorié, ce qui s'avère être un résultat très positif compte tenu du grand nombre d'énoncés impliqués. En effet, comme la présence de ce type de mots peut entrainer de la confusion chez l'élève (*Ibid.*, 2009), il est rassurant de constater qu'ils sont très peu fréquents. Parmi l'ensemble des exercices examinés, l'expression du type « sous la forme d'une puissance de même base » est une trouvaille intéressante et pertinente, puisqu'elle amène des précisions importantes sur la nature de la réponse attendue, même si elle est unique à la collection Z. Cependant, nous avons observé la présence d'énoncés « fourre-tout » ou tellement généraux qu'ils auraient pu être interchangeables. Aussi, la présence d'expressions au sens flou, comme « en utilisant des exposants », laisse songeur sur leur capacité à favoriser la compréhension de la tâche par l'élève. En fait, dans certains cas, ces énoncés n'apportent que très peu d'indications sur ce qui est attendu; voire si peu que nous nous demandons si les élèves prennent le temps de les lire. Compte tenu de cette situation, ce type d'énoncés semble peu utile et n'aide pas vraiment les élèves à s'approprier le vocabulaire nécessaire à la compréhension de l'exponentiation.

En ce qui a trait au symbolisme, il est intéressant de souligner qu'aucune mauvaise utilisation n'a été identifiée. Il est donc possible de constater qu'une grande rigueur semble avoir été présente chez les auteurs pour s'assurer que le symbolisme répondait toujours aux normes en vigueur en mathématiques.

Six exercices sur 155 présentent un exemple explicite pour soutenir la compréhension de la tâche par l'élève (Wilson, 1990). Quoique peu nombreux, ils sont pertinents, sinon nécessaires à la réalisation des exercices proposés. Notons que plusieurs des exercices sont situés à proximité d'autres items (principalement des définitions et des items d'une autre nature) pouvant soutenir l'élève lorsqu'il les traite. Ainsi, une certaine forme d'exemples est présente de manière implicite, ce qui peut aider l'élève s'il a développé un regard global sur le matériel qu'il utilise au lieu de s'en tenir uniquement à l'exercice proposé.

Les fonctions occupées par les exercices s'avèrent la catégorie d'analyse qui distingue le plus les collections examinées (3^e^ cycle du primaire et aux 1^er^ et 2^e^ cycles du secondaire). Soulignons, toutes collections confondues, que neuf indicateurs ont émergé dans cette catégorie : encodage, décodage, déduction d'une valeur manquante, transformation d'écriture, réduction, évaluation numérique, comparaison d'effet, définitions de termes et conjecture et validation. Au 3^e^ cycle du primaire, ce sont principalement les fonctions d'encodage, de décodage, de déduction d'une valeur manquante et de comparaison d'effet qui sont présentes, et ce, dans des proportions semblables. Au 1^er^ cycle du secondaire, les fonctions d'encodage et de décodage diminuent d'importance, alors que les fonctions « déduction d'une valeur manquante » et « conjecture et vérification » sont plus présentes. Finalement, une fonction est nettement prépondérante au 2^e^ cycle du secondaire, soit celle de la réduction. L'encodage et le décodage disparaissant presque complètement à ce niveau scolaire, tandis que la déduction d'une valeur manquante est la seule autre fonction encore relativement présente. Même s'il avait été souhaitable, d'un point de vue de l'apprentissage, qu'une certaine variété demeure présente à tous les niveaux d'enseignement, ce résultat semble cohérent avec la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009, 2011). En effet, la notation étant introduite au 3^e^ cycle du primaire, il semble naturel que les fonctions d'encodage et de décodage y soient plus présentes. Au secondaire, le cheminement vers l'appropriation des propriétés de l'exponentiation explique, selon nous, la présence des fonctions conjecture et vérification, et celle de réduction. Finalement, la déduction d'une valeur manquante étant un aspect explicite de la progression des apprentissages en arithmétique autant au primaire qu'au secondaire, il apparait normal que cette fonction soit présente dans toutes les collections et à tous les niveaux scolaires.

La description des items « exercice » et le portrait par collection et par niveau ou cycle scolaire étant complétés, passons maintenant au portrait des différents problèmes présents dans les neuf collections analysées.

4. RÉSULTATS EN LIEN AVEC LES ITEMS « PROBLÈME »

Cette section s'intéresse à l'analyse des items identifiés comme étant des problèmes à l'intérieur de chacune des collections. Comme spécifié dans la grille, quatre grandes catégories nous permettent de le faire. Ces catégories sont 1) le sens du vocabulaire employé dans les énoncés; 2) le symbolisme employé; 3) la nature du problème et 4) les observations sur les particularités du problème. Ici aussi, nous avons privilégié de présenter chacune des collections afin de conserver le caractère particulier et pour permettre une analyse plus fine des ressemblances et des différences.

4.1 Caractéristiques des items « problème » pour les collections du 3e cycle du primaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les problèmes pour chacune des trois collections du primaire (R, S et T). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

4.1.1 Caractéristiques des items « problème » pour la collection R

Nous avons repéré 13 problèmes dans la collection R. Nous en précisons les principales caractéristiques dans ce qui suit.

Le vocabulaire employé dans les 13 items « problème » de la collection R est multiple et varié, et ce, plus particulièrement sur le plan des mots de sens courant. Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents (plus d'une cinquantaine de verbes ont été répertoriés dans les 13 problèmes). Ces verbes ont parfois un sens technique d'un domaine autre que mathématique. Prenons, par exemple, le contexte informatique de l'item Rp6p33, qui implique des verbes comme « infecter », « endommager », « acheminer », « propager », « s'attaquer » et « provenir ». Ce même contexte implique également des mots comme « virus », « système d'exploitation » et « infection ». Cela peut-il être un obstacle à la compréhension? Finalement, quelques mots qui ont un sens technique et courant sont utilisés dans un sens courant. Soulignons plus particulièrement les mots « problème », « sommet » et « tout » qui peuvent poser une potentielle difficulté puisque, comme le précisent Pierce et Fontaine (2009), si l'élève utilise le mauvais sens dans le contexte, il peut se retrouver dans une impasse.

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater que les contextes des problèmes sont assez variés : deux problèmes sont à contextes réels, trois sont à contextes réalistes, quatre sont à contextes fantaisistes et quatre sont à contextes purement mathématiques. Les deux autres catégories sont toutefois beaucoup plus uniformes : tous les problèmes ont exactement une solution, à part Rp5p6 qui possède un nombre limité de solutions, et tous les problèmes sont à données complètes.

Six des treize problèmes sont accompagnés d'un soutien visuel pour aider à leur résolution. Ce soutien est parfois essentiel à la réalisation du problème, comme pour les items Rp5p2 et Rp5p19 : une suite est représentée visuellement, sans la présenter numériquement. Le problème serait donc insoluble sans l'image. Il est aussi à noter que deux problèmes proposent à l'élève de manipuler du matériel afin de le soutenir dans leur conceptualisation (items Rp5p6 et Rp5p10). Finalement, soulignons que quelques problèmes obligent les élèves à mobiliser leurs connaissances de manière plus soutenue. Par exemple, l'item Rp5p30 nous apparait particulièrement riche, puisqu'il permet de relier la somme des *n* premiers nombres impairs à une expression exponentielle. La figure 42 présente ce dernier.

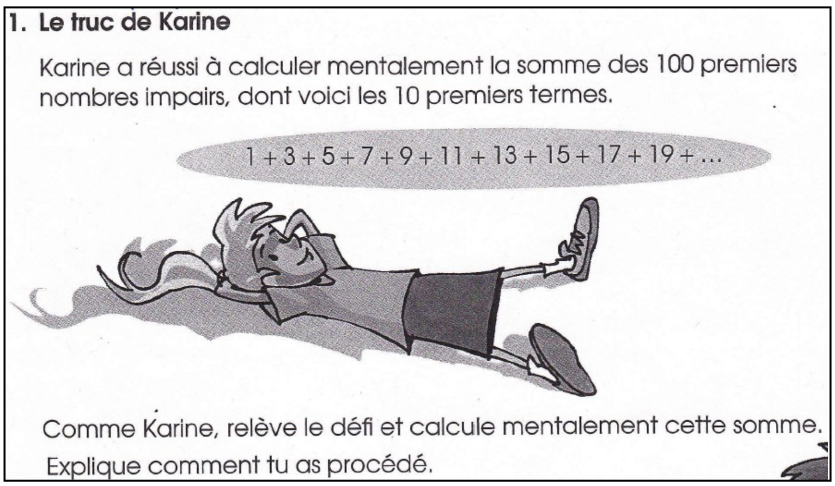


Figure 42 – Item Rp5p30

En somme, les problèmes de la collection R apparaissent variés sur les plans du vocabulaire et des contextes, mais plutôt uniformes en ce qui a trait au nombre de solutions (presque tous une seule) et à l'adéquation des données (tous à données complètes). Examinons maintenant les résultats en lien avec les problèmes présents dans la collection S.

4.1.2 Caractéristiques des items « problème » pour la collection S

Nous avons repéré deux problèmes dans la collection S. Nous en précisons les principales caractéristiques.

Étant donné que seulement deux problèmes sont présents, le vocabulaire employé est relativement restreint. Signalons cependant qu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009).

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater que le premier problème est à contexte fantaisiste, alors que le deuxième est à contexte réaliste. Les deux problèmes n'admettent qu'une solution. Par rapport à l'adéquation des données, l'item Sp6p2 est à données complètes. L'item Sp6p1, quant à lui, est à données manquantes, car le problème implique le nombre de cases sur un échiquier, ce qui n'est pas spécifié dans l'énoncé. Toutefois, il y a trois images d'échiquier qui sont présentes autour de l'énoncé du problème. Ces trois échiquiers sont des 7x7, ce qui mène à 49 cases au lieu du 64 qui est habituellement utilisé (échiquier 8x8). Si l'élève choisit l'échiquier 7X7 plutôt que l'échiquier 8X8 pour résoudre le problème, des solutions différentes pourraient donc être données. Malgré cela, nous maintenons que le problème ne mène qu'à une solution, car une fois l'échiquier choisi, une seule réponse est possible.

Le thème du problème Sp6p2 porte sur les pliages consécutifs d'une bande de papier. Des images des deux premiers pliages sont présentes près de l'énoncé pour soutenir le raisonnement de l'élève. Toutefois, il n'est pas proposé explicitement à l'élève d'expérimenter réellement avec une feuille.

En résumé, le peu de problèmes de la collection S (seulement deux) nous permet difficilement d'établir des tendances. Cependant, notons que les deux problèmes n'ont qu'une seule solution, que les deux contextes exploités sont fantaisiste et réaliste et que l'adéquation des données est à données manquantes pour le premier problème et à données complètes pour le deuxième. Passons maintenant à la dernière collection du 1er cycle du primaire, la collection T.

4.1.3 Caractéristiques des items « problème » pour la collection T

Nous avons repéré quatre problèmes dans la collection T. Nous en précisons les principales caractéristiques dans ce qui suit.

Une cinquantaine de mots différents ont été utilisés dans les énoncés des quatre problèmes. Signalons qu'aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009).

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater qu'un problème est à contexte réel, qu'un autre problème est à contexte réaliste et que les deux derniers sont à contexte purement mathématique. Trois des problèmes n'admettent qu'une seule solution, alors que le quatrième en possède un nombre fini. Par rapport à l'adéquation des données, trois des problèmes sont à données complètes, alors que le quatrième est à données manquantes.

L'item Tp5p9 est une trouvaille particulièrement intéressante. Il est une mise en œuvre ingénieuse de la fausse conception documentée par Baruk (1995) en lien avec l'utilisation de l'expression « multiplié par lui-même » dans le contexte de la notation exponentielle. La figure 43 présente ce problème.

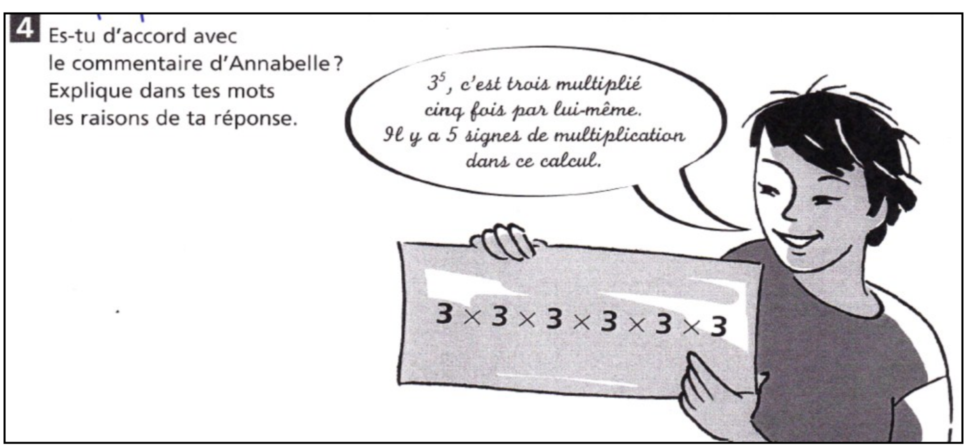


Figure 43 – Item Tp5p9

L’élève doit se rendre compte que l’utilisation de l’expression « multiplié par lui-même » peut mener à introduire un facteur de trop dans une suite de multiplication d’un même facteur, qui est l’interprétation d’une expression écrite en notation exponentielle. Le fait de demander à l’élève d’expliquer, et non seulement de dire si c’est correct ou incorrect, rend aussi le problème plus riche.

Somme toute, malgré la présence de peu de problèmes dans la collection T, une variété relative quant aux contextes, au nombre de solutions et à l’adéquation des données est observée. De plus, il est intéressant de trouver ici un problème qui tente de démystifier l’utilisation de l’expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995), en faisant réfléchir l’élève sur l’erreur qui peut en résulter. Comparons maintenant les différentes collections du 3e cycle du primaire en lien avec les problèmes qu’ils comportent.

4.1.4 Synthèse des caractéristiques des items « problème » pour les collections du 3e cycle du primaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 3e cycle du primaire en ce qui a trait aux problèmes, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 38 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des problèmes pour chacune des collections et d’en faire ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 38
Principaux résultats en lien avec les problèmes pour les collections
du 3^{e} cycle du primaire

Aspects analysés		Collections du 3^{e} cycle du primaire		
Catégories	Caractéristiques	R	S	T
1. Vocabulaire	Sens du vocabulaire utilisé	Quelques mots ayant à la fois un sens technique et courant, utilisés dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
2. Nature du problème	2.1 Contexte : a) Réel b) Réaliste c) Fantaisiste d) Purement math.	(sur 13) 2 3 4 4	(sur 2) 0 1 1 0	(sur 4) 1 1 0 2
	2.2 Nombre de solutions : a) Une b) Nombre fini c) Infinité d) Aucune	(sur 13) 12 1 0 0	(sur 2) 2 0 0 0	(sur 4) 3 1 0 0
	2.3 Adéquation des données : a) Complètes b) Superflues c) Manquantes d) Insuffisantes	(sur 13) 13 0 0 0	(sur 2) 1 0 1 0	(sur 4) 3 0 1 0
3. Autres particularités		Soutien visuel pour aider à la résolution : 6/13 Invitation à manipuler : 2/13	Soutien visuel pour aider à la résolution : 2/2	Présence d'un problème qui met en perspective l'expression « multiplié par lui-même ».

Nous pouvons constater que les trois collections du 3e cycle du primaire sont passablement différentes sur le plan du vocabulaire associé aux énoncés des problèmes. La collection R se démarque par la richesse et la variété de son vocabulaire, tout en soulevant un certain questionnement en lien avec l'utilisation de plusieurs verbes dont le sens peut être mal compris par les élèves et de quelques mots ayant un sens courant et technique, mais utilisés dans un sens courant, qui peut entrainer une incompréhension chez l'élève si le mauvais sens est attribué dans le contexte (Pierce et Fontaine, 2009). Il est possible que la différence soit accentuée par le fait que la collection R contient beaucoup plus de problèmes que les deux autres.

En ce qui a trait à l'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988), les trois collections sont davantage semblables. Les contextes sont relativement variés, alors que la très grande majorité des problèmes analysés a une seule solution et que seulement deux problèmes analysés possèdent un nombre fini de solutions. Sur le plan de l'adéquation des données, la presque totalité des problèmes est à données complètes, alors que seulement deux problèmes analysés sont à données manquantes. Allons maintenant voir ce qui en est des problèmes pour les trois collections du 1er cycle du secondaire.

4.2 Caractéristiques des items « problème » pour les collections du 1er cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les problèmes pour chacune des trois collections du 1er cycle du secondaire (U, V et W). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

4.2.1 Caractéristiques des items « problème » pour la collection U

Nous avons repéré neuf problèmes dans la collection U. Nous en précisons les principales caractéristiques dans les pages qui suivent.

Le vocabulaire employé dans les neuf items « problème » de la collection U est multiple et varié (près de 140 mots différents sont présents), et ce, plus particulièrement sur le plan des mots de sens courant. Cependant, aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009). Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents (plus d'une quarantaine de verbes ont été répertoriés dans les neuf problèmes). Ceux-ci ont des sens courant et/ou technique (*Ibid.*, 2009).

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater qu'un problème est à contexte réaliste, que trois problèmes sont à contexte fantaisiste et que cinq problèmes sont à contexte purement mathématique. Notons que tous les problèmes possèdent une seule solution et qu'ils sont tous à données complètes.

Plusieurs problèmes reprennent des thèmes classiques de la notation exponentielle (multiplication de bactéries, prolifération d'une population, problème de l'échiquier, etc.). Par exemple, l'item Us1p28 est une adaptation du problème des nénuphars d'Albert Jacquart, issu de son ouvrage *L'équation du nénuphar : les plaisirs de la science*, publié en 1998. La figure 44 présente cet item.

8. Des nénuphars

Imagine que la surface d'un lac occupée par les nénuphars double chaque jour. Après 30 jours, le lac est entièrement couvert de nénuphars.

a) Après combien de jours la moitié de l'aire du lac était-elle couverte de nénuphars ?

b) Quelle fraction de l'aire du lac était occupée par les nénuphars le premier jour ?

Figure 44 – Item Us1p28

Ici, l'intérêt est de comprendre que le jour précédant la couverture totale du lac, seulement la moitié était recouvert! Il est intéressant aussi de partir d'un « tout » (le lac complètement recouvert) et de regarder à rebours le recouvrement, de manière fractionnaire, au lieu d'agir sur une quantité comme il est habituellement proposé dans les situations exponentielles. La figure 45 présente, quant à elle, l'item Us1p45.

9. Miaou^N !

Une femme a sept fils.
Chaque fils a sept boîtes.
Chaque boîte contient sept chats.
Et chaque chat a sept petits.

Combien de chats y a-t-il en tout ?

Figure 45 – Item Us1p45

Ce problème ne présente pas une grande difficulté. Cependant, sa particularité se situe dans le fait qu'il s'agit d'une adaptation du problème 79 du papyrus Rhind. Il est à noter qu'un problème de ce type est également présent dans la collection R (item Rp5p23).

Finalement, soulignons qu'aucune illustration et qu'aucune invitation à manipuler ne sont présentes pour soutenir les élèves dans la résolution des problèmes proposés.

En résumé, les problèmes de la collection U apparaissent variés sur les plans du vocabulaire et des contextes, mais uniformes en ce qui a trait au nombre de solutions (tous une seule) et à l'adéquation des données (tous à données complètes). Examinons maintenant les résultats en lien avec les problèmes présents dans la collection V.

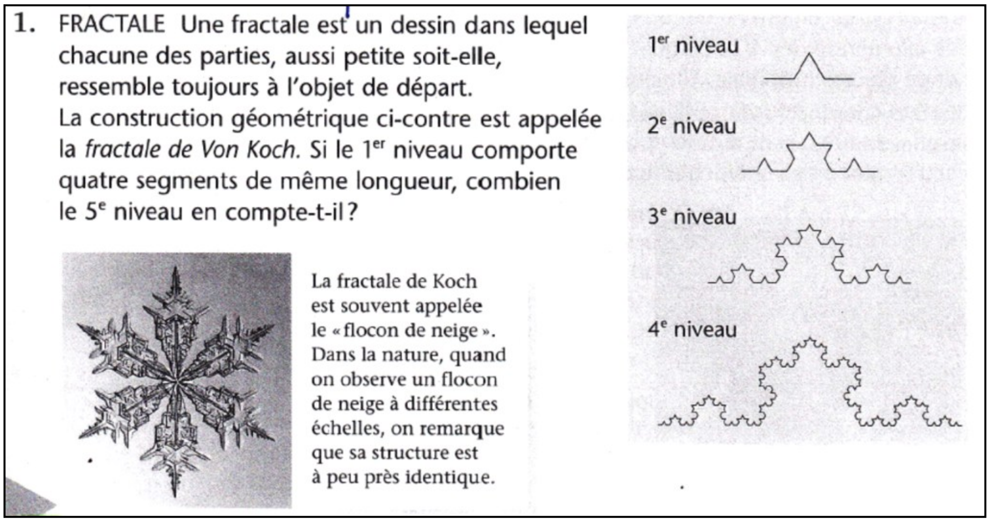
4.2.2 Caractéristiques des items « problème » pour la collection V

Nous avons repéré 18 problèmes dans la collection V. Il s'agit de la collection en contenant le plus. Nous en précisons les principales caractéristiques dans ce qui suit.

Le vocabulaire employé dans les 18 items « problème » de la collection V est multiple et varié (près de 170 mots différents sont présents), et ce, plus particulièrement sur le plan des mots de sens courant. Cependant, aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009). Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents (plus d'une cinquantaine) qui soulève un questionnement sur les difficultés qu'ils peuvent engendrer dans la compréhension de l'élève.

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater que deux problèmes sont à contexte réaliste, six à contexte fantaisiste et dix à contexte purement mathématique. Sur le plan du nombre de solutions, 16 problèmes en ont une seule, alors qu'un problème en a un nombre fini (2 solutions) et que le dernier n'a aucune solution. Par rapport à l'adéquation des données, les 18 problèmes sont à données complètes.

Ici aussi, plusieurs thèmes classiques associés à l'exponentiation sont présents (pliage d'une bande de papier, papyrus Rhind, multiplication de bactéries, croissance d'une plante). Toutefois, un problème utilise les fractales, ce qui s'avère différent. La figure 46 présente l'item Vs1p34.


1. FRACTALE Une fractale est un dessin dans lequel chacune des parties, aussi petite soit-elle, ressemble toujours à l'objet de départ. La construction géométrique ci-contre est appelée la *fractale de Von Koch*. Si le 1er niveau comporte quatre segments de même longueur, combien le 5e niveau en compte-t-il ?

La fractale de Koch est souvent appelée le « flocon de neige ». Dans la nature, quand on observe un flocon de neige à différentes échelles, on remarque que sa structure est à peu près identique.

Figure 46 – Item Vs1p34

Il est possible de voir que le soutien visuel est indispensable à la réalisation de ce problème. Un problème à contexte purement mathématique retient aussi notre attention : il s'agit de l'item Vs1p24. La figure 47 le présente.

19. Est-ce que 2^{99} est pair ou impair ? Explique ta réponse.

Figure 47 – Item Vs1p24

La richesse de ce problème vient du fait qu'il faut fournir une explication. L'utilisation de la calculatrice pourrait donner l'impression que la puissance est impaire, puisque le nombre est tellement grand que la calculatrice passe en mode « notation scientifique ». Le dernier chiffre visible sur l'écran est impair, mais il faut comprendre qu'il ne s'agit pas du dernier chiffre du nombre! En fait, il faut réaliser que c'est la base 2 qui détermine que la puissance est paire, et ce, peu importe l'exposant. C'est cette généralisation qui permet de résoudre le problème.

Pour résumer, les problèmes de la collection V apparaissent variés sur les plans du vocabulaire et des contextes, mais uniformes en ce qui a trait au nombre de solutions (16 des 18 problèmes en ont une seule) et à l'adéquation des données (tous à données complètes). Passons maintenant à la dernière collection du 1er cycle du secondaire, la collection W.

4.2.3 Caractéristiques des items « problème » pour la collection W

Nous avons repéré cinq problèmes dans la collection W. Nous en présentons maintenant les principales caractéristiques.

Le vocabulaire employé dans les problèmes de la collection W est multiple et varié (près de 140 mots différents sont présents pour seulement cinq problèmes), et ce, plus particulièrement sur le plan des mots de sens courant. Cependant, aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009). Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents (35).

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater que deux problèmes sont à contexte réaliste, deux sont à contexte fantaisiste et un seul à contexte purement mathématique. Les cinq problèmes ont une seule solution et sont à données complètes.

Un des cinq problèmes retient plus particulièrement notre attention. Il s'agit de l'item Ws2p18, présenté à la figure 48.

16 Dans les albums de bandes dessinées relatant les aventures de Tintin, un des amis du jeune journaliste, le capitaine Haddock, a une façon bien particulière de marquer sa colère.

Représente son juron à l'aide d'une puissance de 10.

Figure 48 – Item Ws2p18

Ce problème peut sembler simple, mais le fait que le nombre recherché soit très grand et qu'il est demandé de passer d'une écriture en mots à une écriture symbolique représentent un degré de difficulté qui peut être important pour les élèves. La connaissance de la propriété de multiplication des expressions écrites en notation exponentielle de même base est un atout ici, même si elle n'a pas été présentée explicitement auparavant dans cette collection.

En résumé, le nombre assez restreint de problèmes présents dans la collection W ne nous permet pas de déterminer une tendance majeure. Cependant, le vocabulaire présent est riche et varié; les contextes sont plutôt répartis entre les indicateurs; les problèmes ont tous une seule solution et ils sont tous à données complètes. Comparons maintenant les collections du 1er cycle du secondaire par rapport aux problèmes qu'ils proposent.

4.2.4 Synthèse des caractéristiques des items « problème » pour les collections du 1er cycle du secondaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 1er cycle du secondaire en ce qui a trait aux problèmes, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 39 permet donc de visualiser les principales caractéristiques des problèmes pour chacune des collections et d'en faire ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 39
Principaux résultats en lien avec les problèmes pour les collections du 1er cycle du secondaire

Aspects analysés		Collections du 1er cycle du secondaire		
Catégories	Caractéristiques	U	V	W
1. Vocabulaire	Sens du vocabulaire utilisé	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
2. Nature du problème	2.1 Contexte : a) Réel b) Réaliste c) Fantaisiste d) Purement math.	(sur 9) 0 1 3 5	(sur 18) 0 2 6 10	(sur 5) 0 2 2 1
	2.2 Nombre de solutions : a) Une b) Nombre fini c) Infinité d) Aucune	(sur 9) 9 0 0 0	(sur 18) 16 1 0 1	(sur 5) 5 0 0 0
	2.3 Adéquation des données : a) Complètes b) Superflues c) Manquantes d) Insuffisantes	(sur 9) 9 0 0 0	(sur 18) 18 0 0 0	(sur 5) 5 0 0 0
3. Autres particularités		Aucun soutien visuel. Thèmes variés.	Soutien visuel pour aider à la résolution : 1/18. Thèmes variés.	Aucune.

Plusieurs aspects sont partagés par les trois collections par rapport aux problèmes proposés par les collections du 1er cycle du secondaire. Le vocabulaire employé est riche et varié, autant sur le plan des noms que des verbes utilisés (Pierce et Fontaine, 2009). Aucun mot ayant un sens courant et technique, utilisé dans un sens courant, n'est employé (*Ibid.*, 2009). Les contextes sont relativement variés, malgré le fait qu'aucun problème à contexte réel ne soit proposé (Gouvernement du Québec, 1988) et les problèmes ont presque exclusivement une seule solution et sont tous à données complètes (*Ibid.*, 1988).

Les collections U et V se distinguent toutefois de la collection W en ce qui a trait à la variété des thèmes abordés par les problèmes. Alors que les deux premières en proposent plusieurs, la collection W est plutôt limitée à ce sujet, même si cette situation est probablement accentuée par le fait qu'elle propose peu de problèmes. Notons aussi que la collection V se démarque par rapport au nombre de problèmes qu'elle possède. Elle est la collection en ayant le plus, toutes collections confondues. Passons maintenant à l'analyse des problèmes des collections du 2e cycle du secondaire.

4.3 Caractéristiques des items « problème » pour les collections du 2e cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les problèmes pour chacune des trois collections du 2e cycle du secondaire (X, Y et Z). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

4.3.1 Caractéristiques des items « problème » pour la collection X

Nous avons repéré 13 problèmes dans la collection X. Nous en précisons les principales caractéristiques dans ce qui suit.

Le vocabulaire employé dans les 13 problèmes de la collection X est multiple et varié (plus de 225 mots différents), et ce, plus particulièrement sur le plan des mots de sens courant. Cependant, aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009). Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents (plus d'une cinquantaine de verbes ont été répertoriés dans les 13 problèmes). Certains verbes, comme « vérifier », « justifier », « démontrer » et « prouver », qui ont un sens mathématique très précis, sont-ils compris à leur juste sens?

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater que trois des problèmes possèdent un contexte réaliste, deux ont un contexte fantaisiste et huit ont un contexte purement mathématique. Par rapport au nombre de solutions, 12 problèmes ont une seule solution, alors que le 13^{e} a un nombre fini de solutions (2). Finalement, tous les problèmes sont à données complètes.

Les thèmes des problèmes sont variés. Aux thèmes classiques de l'exponentiation croisés jusqu'à maintenant, comme la prolifération de bactéries, s'ajoutent les conjectures sur des expressions exponentielles particulières (par exemple, 0^0), le calcul de taux d'intérêt pour des placements et la géométrie (lien entre périmètre, aire, volume et exponentiation). La figure 49 présente l'item Xs3p45, qui touche ce dernier thème.

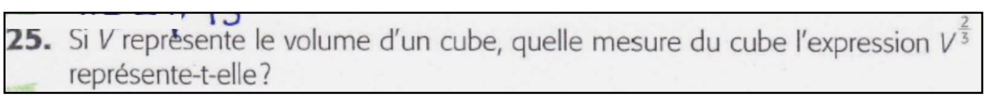

25. Si V représente le volume d'un cube, quelle mesure du cube l'expression $V^{\frac{2}{3}}$ représente-t-elle?

Figure 49 – Item Xs3p45

Une interprétation correcte de l'exposant fractionnaire permet de trouver que l'expression $V^{\frac{2}{3}}$ correspond à l'aire d'une face de ce cube.

La collection X présente des problèmes ayant un vocabulaire riche et varié, ainsi que des contextes diversifiés. Toutefois, les problèmes possèdent presque exclusivement une solution unique et sont tous à données complètes. Voyons maintenant ce qui en est pour la collection Y.

4.3.2 Caractéristiques des items « problème » pour la collection Y

Nous avons repéré cinq problèmes dans la collection Y. Nous en précisons les principales caractéristiques dans ce qui suit.

Le vocabulaire employé dans les problèmes de la collection Y est multiple et varié (près de 160 mots différents sont présents pour seulement cinq problèmes), et ce, plus particulièrement sur le plan des mots de sens courant. Cependant, aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009). Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents (40), qui soulève un questionnement sur les difficultés qu'ils peuvent engendrer dans la compréhension de l'élève.

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater que deux problèmes sont à contexte réaliste, un est à contexte fantaisiste et deux sont à contexte purement mathématique. Les cinq problèmes ont une seule solution et sont à données complètes.

Les thèmes abordés par les problèmes portent sur la demi-vie d'un médicament dans le sang, sur la gamme en musique (octave et demi-tons) et sur un jeu qui s'inspire du problème de l'échiquier. Quoique pertinents pour travailler la notation exponentielle, ces thèmes nous semblent loin de la vie courante d'un élève de 3^e^ secondaire, en particulier la demi-vie et la gamme. Il nous semble difficile, voire impossible, pour des personnes n'ayant pas les connaissances générales associées à ces thèmes, d'être en mesure d'utiliser la notation exponentielle pour arriver à résoudre ces problèmes.

En résumé, la collection Y contient peu de problèmes. De plus, les thèmes des problèmes semblent difficilement accessibles à des élèves de 3e secondaire. Passons maintenant à la dernière collection du 2e cycle du secondaire, la collection Z.

4.3.3 Caractéristiques des items « problème » pour la collection Z

Nous avons repéré quatre problèmes dans la collection Z. Nous en précisons les principales caractéristiques dans ce qui suit.

Le vocabulaire employé dans les problèmes de la collection Z est multiple et varié (près de 140 mots différents sont présents pour seulement quatre problèmes), et ce, plus particulièrement sur le plan des mots de sens courant. Cependant, aucun mot ayant un sens technique et courant, et utilisé dans un sens courant, n'est présent (Pierce et Fontaine, 2009). Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents (35).

L'analyse à l'aide des catégories du *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) nous permet de constater qu'un problème est à contexte fantaisiste et que les trois autres sont à contexte purement mathématique. Les quatre problèmes ont une seule solution et sont à données complètes.

La particularité de cette collection par rapport aux problèmes consiste en l'exploration de plusieurs prises d'écran d'une calculatrice graphique pour expliquer les propriétés des exposants. La figure 50 présente un extrait de l'item Zs3p6.

Exploration ①

$$7^2 \times 7^4 = (7 \times 7)(7 \times 7 \times 7 \times 7) = 7^{2+4} = 7^6$$

```
7^2*7^4
                117649
7^6
                117649
```

a. À partir de l'exploration ① :
1) écris chacune des expressions suivantes à l'aide d'un seul exposant.
   i) $3^4 \times 3^6$ ii) $(-2)^3 \times (-2)^7$ iii) $a^7 \times a^9$ iv) $a^m \times a^n$
2) explique pourquoi le raisonnement employé ne s'applique pas à l'expression $3^2 \times 4^5$.
3) quelle conjecture peut-on émettre quant au produit de deux puissances de même base ?

Figure 50 – Extrait de l'item Zs3p6

Les observations et les questionnements très dirigés devraient permettre à l'élève d'émettre la conjecture demandée en 3), mais ne laissent pas beaucoup de place à la réflexion personnelle. Nous nous questionnons aussi sur l'importance accordée à la calculatrice dans cette situation. À quel point est-elle vraiment nécessaire dans ce problème? N'y a-t-il pas un danger que l'élève déduise que ce qui est découvert est vrai parce que cela vient de la calculatrice?

Somme toute, le peu de problèmes, ainsi que certains choix faits par les auteurs de la collection en lien avec la présence de la calculatrice, nous laissent perplexe. Comparons maintenant les trois collections du 2e cycle du secondaire par rapport aux problèmes qu'elles proposent.

4.3.4 Synthèse des caractéristiques des items « problème » pour les collections du 2e cycle du secondaire

Afin de mettre en évidence le portrait des trois collections du 2e cycle du secondaire en ce qui a trait aux problèmes, nous avons colligé en un seul tableau les données recueillies. Le tableau 40 permet de visualiser les caractéristiques des problèmes pour chacune des collections et d'en faire ressortir les ressemblances et les différences.

Tableau 40
Principaux résultats en lien avec les problèmes pour les collections du 2e cycle du secondaire

Aspects analysés		Collections du 2e cycle du secondaire		
Catégories	Caractéristiques	X	Y	Z
1. Vocabulaire	Sens du vocabulaire utilisé	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.	Aucun mot ayant à la fois un sens technique et courant, utilisé dans un sens courant.
2. Nature du problème	2.1 Contexte : a) Réel b) Réaliste c) Fantaisiste d) Purement math.	(sur 13) 0 3 2 8	(sur 5) 0 2 1 2	(sur 4) 0 0 1 3
	2.2 Nombre de solutions : a) Une b) Nombre fini c) Infinité d) Aucune	(sur 13) 12 1 0 0	(sur 5) 5 0 0 0	(sur 4) 4 0 0 0
	2.3 Adéquation des données : a) Complètes b) Superflues c) Manquantes d) Insuffisantes	(sur 13) 13 0 0 0	(sur 5) 5 0 0 0	(sur 4) 4 0 0 0
3. Autres particularités		Thèmes variés et différents.	Thèmes loin de la réalité d'un élève de 3e secondaire.	Utilisation interrogeable de la calculatrice.

Nous dégageons trois aspects communs présents pour les trois collections du 2e cycle du secondaire. Premièrement, le vocabulaire employé est riche et varié, autant sur le plan des noms que des verbes utilisés (Pierce et Fontaine, 2009). Deuxièmement, aucun mot ayant un sens courant et technique, utilisé dans un sens courant, n'est employé (*Ibid.*, 2009) et troisièmement, les problèmes ont presque exclusivement une seule solution et sont tous à données complètes (*Ibid.*, 1988).

Il est toutefois possible de remarquer que la collection X se distingue des deux autres par rapport aux problèmes qu'elle propose, entre autres, sur le nombre beaucoup plus élevé de problèmes qu'elle possède et sur la présence de thèmes variés et différents de ceux identifiés dans les autres collections jusqu'à maintenant. Certains choix des collections Y et Z nous laissent perplexes : thèmes très loin de la réalité des élèves de 3^e^ secondaire pour la collection Y (demi-vie d'un médicament dans le sang, octave et demi-tons), utilisation de la calculatrice d'une manière questionnable pour la collection Z (comme si la vérité émergeait de la technologie), en plus du très petit nombre de problèmes présents dans ces deux collections (cinq et quatre respectivement).

Tentons maintenant de ressortir les aspects les plus importants à retenir pour toutes les collections en lien avec les problèmes portant sur la notation exponentielle.

4.4 Synthèse générale sur les caractéristiques des items « problème »

Les problèmes représentent environ 21 % des items portant sur la notation exponentielle. La présence de la compétence 1 (résoudre des problèmes) dans le domaine mathématique du PFEQ (Gouvernement du Québec, 2006*a*, 2006*b*, 2007) met explicitement de l'avant l'importance de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Nous aurions donc pu nous attendre à une plus grande proportion des items de cette catégorie dans notre étude. Toutefois, tout n'est pas une question de quantité : la qualité de ce qui est proposé est tout aussi importante, sinon plus. Examinons plus en détail les caractéristiques des problèmes répertoriés.

Le vocabulaire employé dans la grande majorité des collections est riche et varié. Toutefois, Pierce et Fontaine (2009) se questionnent sur certaines difficultés des élèves en résolution de problème à savoir si ces mots sont toujours considérés comme compris sans que les enseignantes et les enseignants aient à donner des explications. Ainsi, certaines difficultés éprouvées par les élèves ne sont peut-être pas causées par des obstacles mathématiques, mais plutôt par une incompréhension du vocabulaire courant utilisé dans les problèmes et rarement explicité par les personnes enseignantes, alors que les termes au sens technique sont habituellement plus expliqués. Soulignons également qu'il y a présence d'une quantité importante de verbes différents dans les énoncés des problèmes proposés. Ils ont des sens courant et/ou technique. Les élèves ont-ils une compréhension suffisante de ces verbes? Font-ils la différence entre les différents sens? Les personnes enseignantes les explicitent-elles? Certains verbes comme « vérifier », « justifier », « démontrer » et « prouver », qui ont un sens mathématique très précis, sont-ils compris à leur juste sens? (*Ibid.*, 2009) Il y a parfois également la présence de verbes techniques d'un domaine autre que mathématique. Prenons, par exemple, le contexte informatique de l'item Rp6p33, qui implique des verbes comme « infecter », « endommager », « acheminer », « propager », « s'attaquer » et « provenir ». Ce même contexte implique également des mots comme virus, système d'exploitation et infection. Cela peut-il être un obstacle à la compréhension, d'autant plus que le manuel s'adresse à des élèves du 3e cycle du primaire? Il est cependant à souligner que huit des neuf collections n'utilisent pas de mots ayant un sens courant et technique dans un sens courant, ce qui est préférable selon Pierce et Fontaine (2009), puisque cela diminue le risque de confusion pour l'élève.

L'analyse des problèmes selon le *Fascicule K* (Gouvernement du Québec, 1988) est elle aussi révélatrice de tendances lourdes observables dans presque toutes les collections. En ce qui a trait au contexte, il est possible de voir un effort notable. En effet, la plupart des manuels offrent des problèmes ayant au moins trois des quatre indicateurs de cette catégorie, même si ce n'est pas toujours dans des proportions relativement équitables. Les problèmes ayant un contexte réel sont peu présents, mais les problèmes à contextes réaliste, fantaisiste et purement mathématique occupent un espace intéressant. Ainsi, la proposition didactique sur l'importance de la variété des contextes, datant des années 1980, mais étant toujours d'actualité, semble avoir porté certains fruits. Toutefois, sur le plan des catégories « nombre de solutions » et « adéquation des données », le portrait est beaucoup moins reluisant. La très grande majorité des problèmes ne comporte qu'une seule et unique solution et est à données complètes. Ces constats sont préoccupants. En effet, à force de toujours faire des problèmes qui donnent toujours une réponse unique et dans lesquels ils doivent toujours prendre en compte l'ensemble des données présentes, les élèves pourraient construire une représentation erronée de ce qu'est fondamentalement faire des mathématiques (Baruk, 1985). À ce sujet, Biron (2012) souligne que la diversité des problèmes sur le plan du nombre de solutions invite l'élève à « explorer des pistes ingénieuses dans la résolution de ceux-ci, n'ayant pas en tête qu'il doit absolument trouver la bonne réponse à tout coup » (p. 171).

Un dernier aspect intéressant à constater par rapport aux problèmes proposés sur l'exponentiation concerne les thèmes abordés. Deux des trois collections du 3e cycle du primaire proposent des problèmes stimulants qui exploitent des thèmes accessibles pour des élèves de ce niveau scolaire. La collection R propose des supports visuels dans plusieurs situations et invite même à quelques reprises les élèves à manipuler pour mieux comprendre le sens de ce qui est demandé. Ce constat nous semble propice à l'apprentissage de l'utilité de la notation exponentielle. La troisième collection du primaire ayant seulement 2 problèmes, il n'est pas possible de l'inclure dans cette conclusion. Les collections du 1er cycle du secondaire, quant à elles, proposent des thèmes variés dans deux cas sur trois. Ces thèmes sont aussi accessibles et pertinents pour soutenir l'apprentissage de la notation exponentielle. Ce sont malheureusement les collections du 2e cycle du secondaire qui sont les plus inquiétantes. En effet, seule la collection X présente des problèmes diversifiés qui exploitent plusieurs thèmes pertinents, accessibles et même nouveaux par rapport à ce qui est proposé dans les autres niveaux scolaires, les deux autres collections étant relativement pauvres à ce sujet. Ainsi, alors que ce sont les élèves de 3e secondaire qui bénéficieraient le plus d'avoir en leur possession des situations riches et complexes, deux des trois collections qui s'adressent à eux en manquent cruellement.

Passons maintenant à la présentation des résultats de la dernière catégorie à l'étude, soit les items d'une autre nature.

5. RÉSULTATS EN LIEN AVEC LES ITEMS D'UNE AUTRE NATURE

Cette section s'intéresse à l'analyse des items identifiés comme étant d'une autre nature à l'intérieur de chacune des collections. Comme spécifié dans la grille, deux informations étaient recueillies pour ces items. Tout d'abord, un nom était attribué comme indicateur afin d'identifier sommairement la nature de l'item, puis une brève description était fournie. Nous avons privilégié de présenter chacune des collections afin de conserver le caractère particulier et pour permettre une analyse plus fine des ressemblances et des différences.

5.1 Caractéristiques des items d'une autre nature pour les collections du 3e cycle du primaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les items d'une autre nature pour chacune des trois collections du primaire (R, S et T). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

5.1.1 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection R

Deux items ont été identifiés comme étant d'une autre nature. Nous avons attribué le nom de « Représentation imagée de la notation exponentielle » à l'item Rp5a22, puisqu'il présente d'une manière imagée et fantaisiste la position et la taille relative de l'exposant. La figure 51 présente cet item et son environnement immédiat.

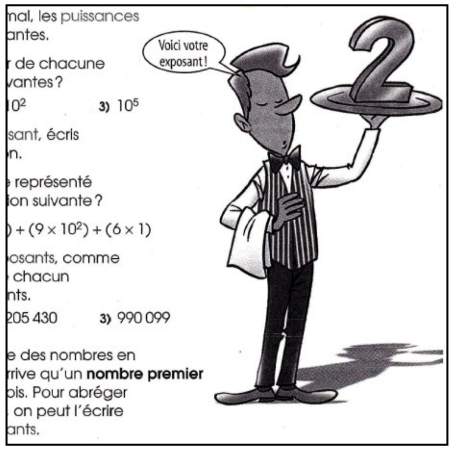


Figure 51 – Item Rp5a22

Nous nous demandons cependant si les élèves sont en mesure d'observer ce fait sur l'image qui semble, de prime abord, un moyen de combler un espace vide dans une page d'exercices. Pourrait-elle être exploitée en classe et, si oui, comment? Bien que sa fonction ne soit pas précise ni assurée, il est important de noter que cette image présente adéquatement les principes de position et de taille relative de l'exposant par rapport à la base, ce qui n'est pas fait explicitement dans cette collection. Cependant, la présence simultanée d'une image symbolique (l'exposant) avec une image non symbolique (le serveur qui représente la base) nous interroge : est-ce pertinent et adéquat de procéder ainsi? (Biron et Chaput, 2001)

L'item Rp6a32 a été qualifié de capsule historique augmentée. Elle présente sur une page complète le mathématicien Pierre de Fermat, ainsi que des observations que celui-ci a réalisées sur les nombres. Cette capsule propose ensuite à l'élève de vérifier et d'expérimenter sur ces observations. Compte tenu de sa position (à la toute fin du manuel B, volume 1) dans une situation appelée *Le savais-tu?*, nous nous interrogeons sur l'exploitation de cet item en classe. Les élèves peuvent-ils traiter cet item sans aide? Comment cela sera-t-il exploité?

En résumé, les items d'une autre nature de cette collection recèlent de potentiel s'ils sont adéquatement exploités. Ainsi, la représentation imagée pourrait informer l'élève sur une caractéristique importante de la notation exponentielle (position et taille relative de l'exposant par rapport à la base). La capsule historique, qui s'avère attendue compte tenu de l'importance accordée aux repères culturels dans le programme de formation (Gouvernement du Québec, 2001), pourrait quant à elle s'avérer une situation enrichissante pour stimuler le questionnement des élèves sur le concept d'exponentiation. Examinons maintenant les caractéristiques des items d'une autre nature de la collection S.

5.1.2 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection S

Seulement un item d'une autre nature est présent dans la collection S (Sp6a3). Il s'agit d'une capsule historique qui présente une phrase mathématique ayant mené, selon les auteurs, à la création de la notation exponentielle par René Descartes et John Wallis, afin d'en simplifier l'écriture. Au regard de nos recherches sur le développement historique de la notation exponentielle, entre autres appuyées par les écrits de Cajori (1928), cette capsule nous laisse perplexe. L'évolution de la notation exponentielle est beaucoup plus complexe que ce que prétendent ici les auteurs. Sans nier les apports de Descartes et de Wallis, ils sont loin d'être les seuls à avoir contribué à l'évolution du symbolisme associé au concept d'exponentiation. En effet, pourquoi ne pas parler du rôle de Nicole Oresme, premier inventeur connu d'une écriture de la notation exponentielle, ou de Nicolas Chuquet, qui semble être le premier mathématicien à avoir exploité un symbolisme pour illustrer le principe de l'exponentiation dans un contexte algébrique, ou encore d'Isaac Newton, qui a grandement soutenu la diffusion de la notation encore utilisée de nos jours? Jusqu'où peut-on minimaliser les apports historiques tout en rendant « à César ce qui est à César »? Tant qu'à en dire si peu et que cela devienne un très pâle reflet de ce nous pensons connaitre de la réalité, ne vaut-il pas mieux ne rien mettre du tout? L'intérêt de présenter des repères culturels à l'élève est fort louable, mais ne doivent-ils pas lui permettre d'approfondir sa compréhension?

Passons finalement aux résultats en lien avec les items d'une autre nature de la dernière collection du primaire, soit la collection T.

5.1.3 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection T

Parmi les quatre items répertoriés comme étant d'une autre nature dans la collection T, trois ont été identifiés comme des moyens de tenter de mettre en perspective l'utilisation de la notation exponentielle dans le quotidien (items Tp5a11, Tp6a18 et Tp6a19). Ces items proposent à l'élève d'observer son environnement pour repérer des endroits où la notation exponentielle est exploitée (dans la vie courante, dans les livres, dans les magazines, par les scientifiques, etc.).

Le quatrième item pourrait être qualifié de capsule culturelle. Elle informe dans un premier temps les élèves sur l'origine du terme « google » pour représenter l'expression 10^{100}, alors que dans un deuxième temps on leur demande d'inventer et de proposer des « nouveaux mots » pour nommer les expressions 20^{100} et 5^{100}. Sans être extravagant, cela nous semble à tout le moins original.

En résumé, les quatre items d'une autre nature de cette collection semblent s'inscrire dans l'idée du PFEQ de fournir aux élèves des repères culturels dans leur apprentissage (Gouvernement du Québec, 2001). Comparons maintenant les items d'une autre nature des trois collections du primaire, afin d'en voir les ressemblances et les différences.

5.1.4 Synthèse des caractéristiques des items d'une autre nature pour les collections du 3^e^ cycle du primaire

Une tendance générale semble partagée par les trois collections du primaire : il s'agit d'intégrer des items permettant de fournir des repères culturels aux élèves. Les collections R et S privilégient une approche en lien avec le développement historique de la notation exponentielle, alors que la collection T opte plutôt pour une tentative d'ancrer son utilisation dans la vie courante des élèves. Compte tenu de la position en toute fin de volume de la capsule historique de la collection R et du peu d'approfondissement de celle-ci dans le cas de la collection S, il nous semble plausible de penser que les items de la collection T soient plus significatifs pour les élèves puisqu'ils font saisir les usages de la notation exponentielle dans la vie quotidienne. Ils sont également plus judicieusement positionnés dans le manuel et donc plus susceptibles d'être exploités.

Passons maintenant aux résultats en lien avec les items d'une autre nature pour les trois collections du 1er cycle du secondaire.

5.2 Caractéristiques des items d'une autre nature pour les collections du 1er cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les items d'une autre nature pour chacune des trois collections du 1er cycle du secondaire (U, V et W). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

5.2.1 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection U

La collection U est celle qui contient le plus d'items d'une autre nature, soit sept. Par contre, il est à noter que cette particularité se retrouve dans la collection qui a été la plus délicate à encoder. En effet, l'ensemble de l'information proposée dans le manuel l'était de manière continue, souvent sous forme de texte suivi, ce qui entrelaçait et intégrait les différentes catégories d'items de notre étude (définitions, exercices, problèmes). Il est donc possible d'émettre comme hypothèse qu'il s'agit peut-être d'une conséquence de cette particularité.

Le premier item (Us1a3) a été nommé « introduction ». Il s'agit d'un paragraphe qui sert de présentation à la section 3 du chapitre 3. Il informe l'élève que le sujet de cette section sera l'exponentiation, qui a sans doute été utilisée par les élèves auparavant peut-être sans savoir la nommer. Un lien explicite est également établi avec le chapitre 0, qui porte sur notre système de numération construit autour des puissances de 10. Cet item situe donc l'élève dans les apprentissages qui seront à faire.

Le deuxième item (Us1a5) consiste, quant à lui, en une capsule culturelle qui explique le principe général de la division cellulaire (base 2). L'expression en titre (diviser pour multiplier) est intéressante, mais peu exploitée dans les explications qui suivent.

Le troisième item (Us1a8) établit un lien explicite entre notre système de numération et la notation exponentielle, à partir d'une représentation déjà utilisée dans le chapitre 0. Cette représentation met en lien une puissance de 10, son développement comme une suite multiplicative d'un même facteur et le vocabulaire utilisé dans le contexte des valeurs de position pour en parler.

Dans le quatrième et le cinquième item d'une autre nature (Us1a15 et Us1a18), on explique que la notation exponentielle peut être utile lors de la multiplication ou de la division mentale de nombres qui se transforment facilement en écriture exponentielle de même base. Les propriétés $m^a \times m^b = m^{a+b}$ et $m^a \div m^b = m^{a-b}$ émergent de ces items.

Le sixième item (Us1a29) présente la mise en commun des connaissances sur la multiplication des fractions et sur l'exponentiation d'une base fractionnaire, appliquées à un exemple portant sur les probabilités.

Finalement, l'item d'une autre nature Us1a34 présente la notation exponentielle comme un moyen de réduire l'écriture arithmétique ($2x2x2=2^3=8$) tout comme l'écriture algébrique ($aaa=a^3$) d'une suite multiplicative d'un même facteur.

En résumé, les items d'une autre nature de la collection U servent principalement à situer l'élève dans son apprentissage de la notation exponentielle, tout en lui permettant d'établir des liens entre celle-ci et des domaines mathématiques connexes comme le fonctionnement de notre système de numération. Rappelons que cette collection a été la plus délicate à encoder à cause de l'organisation particulière des informations, qui s'entrelaçaient en intégrant les différentes catégories d'items de notre étude dans des textes continus. Cela explique probablement la présence plus importante d'items d'une autre nature dans cette collection. Examinons maintenant les items d'une autre nature de la collection V.

5.2.2 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection V

Trois items ont été identifiés comme étant d'une autre nature dans la collection V. Le premier item (Vs1a27) est identifié comme étant une capsule historique. Elle présente très brièvement René Descartes comme philosophe et mathématicien du 17^{e} siècle à qui nous devrions la notation exponentielle. Elle nous semble tellement minimaliste, autant du point de vue de la présentation de René Descartes que de sa contribution à la notation exponentielle, que nous nous demandons si la présence de cette capsule historique en vaut vraiment la peine. Celle-ci semble toutefois répondre à la demande du programme de formation en lien avec les repères culturels (Gouvernement du Québec, 2001).

Le deuxième item d'une autre nature (Vs1a46) porte le nom de « calculatrice ». Il s'agit d'un tableau qui explique, entre autres, le fonctionnement des touches de la calculatrice en lien avec la notation exponentielle. Il y a le symbole qu'on retrouve sur la touche en premier lieu, suivi d'une courte définition sur son utilité, puis d'un exemple pour illustrer son fonctionnement possible (car il est spécifié que cela peut varier selon les modèles).

Finalement, le troisième item (Vs1a47) se nomme « notations et symboles ». Il s'agit encore ici d'un tableau. Dans ce cas-ci, il présente les différentes notations et les différents symboles mathématiques qui portent, entre autres, sur la notation exponentielle. Chaque notation ou symbole est suivi d'une explication sur sa signification et d'un exemple d'écriture.

Les trois items d'une autre nature de la collection V remplissent un rôle bien défini d'informer l'élève sur des aspects historiques, technologiques et symboliques portant sur la notation exponentielle. Cependant, la capsule historique est tellement succincte qu'elle ne permet pas vraiment, selon nous, d'établir un lien significatif avec l'objectif de présenter des repères culturels, tels que spécifiés dans le PFEQ (Gouvernement du Québec, 2001). Passons maintenant à la dernière collection du 1er cycle du secondaire, soit la collection W.

5.2.3 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection W

Dans la collection W, aucun item d'une autre nature n'est présent. C'est la seule collection où ce résultat est apparu, ce qui en fait une particularité importante, puisque ce fait est unique. Passons donc immédiatement à la comparaison des ressemblances et des différences entre les items d'une autre nature des trois collections du 1er cycle du secondaire.

5.2.4 Synthèse des caractéristiques des items d'une autre nature pour les collections du 1er cycle du secondaire

Les items d'une autre nature des trois collections du 1er cycle du secondaire sont très différents. En effet, la collection U en possède sept, dont l'objectif principal semble d'informer l'élève sur la place de la notation exponentielle dans différents domaines mathématiques connexes. Les trois items de la collection V, quant à eux, semblent plutôt orientés vers la mise en perspective de quelques faits entourant l'évolution de la notation exponentielle (capsule historique) et vers l'apprentissage de l'utilisation de la calculatrice et du symbolisme qui y est associé. La collection W ne contient pas d'items d'une autre nature. Ces constats en lien avec les items d'une autre nature semblent indiquer que les approches privilégiées dans ces collections sont très éloignées les unes des autres. Voyons maintenant ce qui en est pour les trois collections du 2e cycle du secondaire.

5.3 Caractéristiques des items d'une autre nature pour les collections du 2e cycle du secondaire

Les trois premières sous-sections qui suivent traitent des résultats en lien avec les items d'une autre nature pour chacune des trois collections du 2e cycle du secondaire (X, Y et Z). La quatrième sous-section présente une synthèse qui permet de dégager certains éléments fondamentaux de ressemblances et de différences entre les trois collections, tout en soulevant certains aspects particuliers à chacune.

5.3.1 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection X

Dans la collection X, quatre items ont été identifiés comme étant d'une autre nature. Présentons-les brièvement.

L'item Xs3a16 est une capsule TIC qui explique comment utiliser la calculatrice pour déterminer la valeur d'une puissance lorsque l'expression écrite en notation exponentielle est affectée d'un exposant fractionnaire. À partir d'une capture d'écran pour en illustrer le fonctionnement sont présentées les touches possibles à exploiter et la gestion des parenthèses.

L'item Xs3a23 est, quant à lui, une capsule historique qui présente René Descartes, mathématicien et philosophe français important, qui a établi plusieurs notations en algèbre, dont l'exposant, ainsi que le radical avec le trait supérieur. Encore une fois, cette capsule historique est plutôt réductrice, à la fois pour l'homme et pour l'histoire des symboles qui sont beaucoup plus riches et complexes que ce qui est présenté. À trop condenser l'information, l'essence finit par disparaitre, et à ce prix, cela vaut-il la peine de présenter ce genre de capsule? Il est intéressant de noter que cet item ressemble beaucoup à l'item Vs1a27.

Le troisième item d'une autre nature de la collection X est une capsule « pièges et astuces » (item Xs3a28) qui présente le cas où le numérateur d'un exposant fractionnaire est plus grand que 1 en établissant un lien avec l'extraction des racines. Ce cas aurait pu être traité dans la définition Xs3d24 située un peu avant cet item, mais ne l'a pas été. La figure 52 présente l'item Xs3a28.

Pièges et astuces

Lorsque le numérateur d'un exposant fractionnaire est différent de 1, la commutativité de la multiplication permet d'extraire la racine du dénominateur en premier. Ainsi, les nombres à calculer sont moins gros.

Exemple :

Pour calculer $8^{\frac{5}{3}}$, il est plus simple de procéder de cette façon :

$8^{\frac{5}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = 32$

que de cette façon :

$8^{\frac{5}{3}} = \left(8^5\right)^{\frac{1}{3}} = 32\ 768^{\frac{1}{3}} = 32.$

Figure 52 – Item Xs3a28

Signalons que sans l'exemple, la formulation de l'explication nous semble plutôt obscure, voire incorrecte. En effet, que signifie « la commutativité de la multiplication permet d'extraire la racine du dénominateur en premier »? Une certaine confusion semble exister entre les propriétés de l'exponentiation qui permettent ce genre de simplification et le symbolisme utilisé.

Finalement, l'item Xs3d55 consiste en un extrait de tableau présentant a^2 comme le carré de a et a^3 comme le cube de a. D'autres notations et symboles qui ne sont pas en lien avec la notation exponentielle sont également présents dans le tableau avec cet item.

Nous constatons que les quatre items d'une autre nature de la collection X jouent chacun un rôle différent : capsule TIC, capsule historique, pièges et astuces, et symbolisme et vocabulaire. Ces items apportent peu sur le plan conceptuel et peuvent même, dans certains cas, être remis en question quant à leur clarté et à leur utilité. Examinons maintenant les items d'une autre nature de la collection Y.

5.3.2 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection Y

Dans cette collection, ce sont trois items d'une autre nature qui sont présents. Ils consistent en deux capsules TIC et en une capsule historique.

La première capsule TIC (item Ys3a5) demande à l'élève comment il parvient à calculer une exponentiation sur sa calculatrice. Cette approche nous semble pertinente, plus particulièrement pour deux raisons : 1) les élèves de 3e secondaire devraient déjà avoir utilisé les touches en lien avec la notation exponentielle. Il s'agit donc ici d'une réactivation et 2) comme il y a plusieurs touches possibles selon les modèles de calculatrice, cela évite d'avoir à toutes les présenter. L'élève identifie lui-même celles qui sont présentes sur la sienne.

L'item Ys3a9 est la deuxième capsule TIC. On demande à l'élève comment il parvient à calculer une exponentiation comportant un exposant fractionnaire sur sa calculatrice. Contrairement à l'item précédent, nous nous demandons si des indications plus précises sur les touches à utiliser auraient pu être fournies, car il s'agit du premier contact des élèves avec des exposants fractionnaires.

Le troisième item d'une autre nature (item Ys3a20) consiste en une capsule historique présentant succinctement trois étapes du développement historique de la notation exponentielle. Sans être exhaustive, elle donne quand même certains détails, ne serait-ce que sur le plan de l'affirmation que cette notation a pris plus de 500 ans à atteindre le développement qu'on lui connait aujourd'hui. De plus, la contribution de quelques mathématiciens y est soulignée. Il s'agit d'une capsule historique assez riche; mais il aurait tout de même été possible d'aller un peu plus en profondeur si l'intention est de faire comprendre à l'élève l'évolution de la notation exponentielle pour en faire saisir les qualités du symbolisme retenu encore aujourd'hui.

En résumé, nous pensons que les capsules TIC de cette collection peuvent être utiles sur le plan de l'utilisation de la calculatrice pour déterminer la puissance d'une expression exponentielle. La capsule historique, quant à elle, est assez riche pour que cela soit souligné. Présentons maintenant les résultats en lien avec les items d'une autre nature de la dernière collection analysée, soit la collection Z.

5.3.3 Caractéristiques des items d'une autre nature pour la collection Z

Trois items identifiés comme étant d'une autre nature sont présents dans la collection Z. L'item Zs3a1 est un tableau qui explique, entre autres, le fonctionnement des touches de la calculatrice en lien avec la notation exponentielle. Il y a le symbole retrouvé sur la touche en premier lieu, suivi d'une courte définition sur son utilité, puis d'un exemple pour illustrer son fonctionnement possible (car il est spécifié que cela peut varier selon les modèles). Cet item est quasiment identique à l'item Vs1a46 de la collection V du 1er cycle du secondaire. Ces deux collections (V et Z) sont issues de la même maison d'édition.

Le deuxième item (Zs3a2) est également un tableau. Il présente différentes notations et différents symboles mathématiques qui portent, entre autres, sur la notation exponentielle. Chaque notation ou symbole est suivi d'une explication sur sa signification. Cet item est quasiment identique à un item de la collection V (item Vs1a47). Quelques symboles ont été changés de position relative et il n'y a pas d'exemple d'écriture, alors que l'item Vs1a47 en possédait.

Finalement, l'item Zs3a33 est une capsule historique qui présente sur deux pages la vie, l'époque et l'œuvre de John Wallis, entre autres, sur le plan de sa contribution au développement de la notation exponentielle (exposant nul, exposants négatifs et exposants fractionnaires). La capsule comprend également des définitions, un problème et un exercice qui ont été analysés à part (items 34 à 39). Même si le contenu est parfois anecdotique, c'est de loin la capsule historique la plus détaillée en lien avec un personnage historique et son apport sur le développement de la notation exponentielle qui a été analysée pendant cette collecte de données. Elle campe Wallis dans son époque et met en perspective certaines de ses contributions, par exemple par rapport au développement décimal de π.

Les items d'une autre nature de cette collection sont particuliers principalement par rapport à deux aspects. En premier lieu, les deux items sous forme de tableau ressemblent fortement à ceux d'une autre collection issue de la même maison d'édition. Il semble donc que parfois, une certaine récupération du matériel produit précédemment soit présente. Également, la capsule historique présente dans la collection Z est de loin la plus complète et la plus intéressante dans une perspective d'ancrer la notation exponentielle dans son développement historique. Comparons maintenant les résultats portant sur les items d'une autre nature pour les collections du 2e cycle du secondaire.

5.3.4 Synthèse des caractéristiques des items d'une autre nature pour les collections du 2e cycle du secondaire

Nous constatons que les items d'une autre nature des collections du 2e cycle du secondaire semblent s'orchestrer principalement autour de trois grands thèmes : 1) le vocabulaire et le symbolisme associé à la notation exponentielle; 2) le développement historique de la notation exponentielle et 3) l'utilisation de la calculatrice en lien avec la notation exponentielle. Attardons-nous aux particularités des deux derniers aspects qui nous semblent plus intéressants compte tenu de la grande ressemblance des contenus sur le plan du vocabulaire et du symbolisme.

Des capsules historiques sont présentes dans chacune des collections du 2e cycle du secondaire, mais leur importance est très différente d'une collection à l'autre. Alors que la collection X souligne brièvement l'apport au développement de la notation exponentielle de René Descartes, la collection Y décrit plutôt son évolution en trois grandes étapes sur 500 ans et la collection Z opte pour la présentation assez détaillée du mathématicien John Wallis et de ses contributions aux mathématiques, entre autres, dans le développement du symbolisme associé à la notation exponentielle. Les auteurs des collections Y et Z ont exploité relativement en profondeur des éléments d'histoire associés à l'évolution de la notation exponentielle.

Sur le plan de l'utilisation de la calculatrice, nous remarquons qu'une certaine importance est accordée à l'identification et au fonctionnement des touches nécessaires pour déterminer la puissance d'une expression exponentielle donnée. Compte tenu de l'augmentation rapide des valeurs obtenues de puissance, à cause de la nature même de ce qu'est l'exponentiation, il nous semble pertinent de s'y attarder de manière explicite comme l'ont choisi de le faire les auteurs des trois collections étudiées. L'utilisation de la calculatrice nous semble pertinente au regard du niveau scolaire (3e secondaire) des élèves concernés.

Soulignons finalement que la collection Z se démarque par le fait qu'elle réutilise de manière quasiment identique des informations retrouvées dans des items d'une autre nature de la collection V. Rappelons toutefois que ces deux collections sont issues de la même maison d'édition. Nous nous questionnons sur la nature courante ou non d'une telle pratique : si cela a été observé pour la notation exponentielle, en est-il de même pour d'autres concepts? Prenons maintenant le temps de ressortir les éléments fondamentaux en lien avec les caractéristiques des items d'une autre nature pour l'ensemble des collections.

5.4 Synthèse générale sur les caractéristiques des items d'une autre nature

Au total, c'est 27 items qui ont été identifiés comme étant d'une autre nature dans l'ensemble des neuf collections, ce qui représente environ 8 % des items analysés. Même si une certaine variété a pu être observée sur le plan de leur contenu (repères culturels, capsules historiques, utilisation de la calculatrice, vocabulaire et symbolisme, informations connexes, etc.), deux particularités peuvent être identifiées.

Notons, dans un premier temps, la présence de capsules historiques dans six des neuf collections analysées. Parmi ces capsules, les collections Y et Z se démarquent par l'approfondissement proposé. En effet, alors que les auteurs des quatre autres collections se contentent de présenter très brièvement un ou deux faits, les collections Y et Z approfondissent l'évolution de la notation exponentielle en présentant quelques étapes marquantes. Soulignons également le fait que dans les six collections ayant une capsule historique, seuls deux mathématiciens sont éventuellement présentés explicitement comme ayant contribué à l'évolution de la notation exponentielle : René Descartes et John Wallis.

Sans vouloir nier leur contribution, il n’en demeure pas moins que plusieurs autres mathématiciens auraient mérité d’être cités, comme Nicole Oresme, Nicolas Chuquet ou encore Isaac Newton (Cajori, 1928).

Dans un deuxième temps, il est à souligner que l’utilisation de la calculatrice dans le contexte de la notation exponentielle est plus particulièrement présente dans les collections du 2e cycle du secondaire, alors qu’une seule collection du 1er cycle du secondaire présente des informations à ce sujet. Aucune des collections du 3e cycle du primaire n’a d’item associé à l’utilisation de la calculatrice. Les registres numériques attendus aux divers niveaux scolaires peuvent expliquer cette différence. Toutefois, compte tenu de l’augmentation rapide des valeurs de puissance associées à des expressions exponentielles, nous nous demandons si l'utilisation plus systématique de la calculatrice dès le primaire permettrait de soutenir davantage le développement du sens qui doit être associé à l’exponentiation en donnant un accès plus direct à la rapidité de sa croissance.

La présentation des résultats en lien avec les cinq catégories principales de l’analyse étant maintenant complétée, synthétisons quelques aspects fondamentaux sur l’ensemble des catégories analysées dans le cadre de cette étude sur l’enseignement-apprentissage de la notation exponentielle.

6. CONSTATS GÉNÉRAUX

Afin de répondre à notre question de recherche et aux questions spécifiques précisées au début du chapitre en lien plus particulièrement avec les définitions, les exercices et les problèmes, dressons maintenant un portrait de la situation à l'aide de quelques constats généraux.

Plusieurs résultats ont été dégagés de cette étude et nous pouvons ainsi les résumer :

1) l'ensemble des collections de manuels scolaires privilégie une concentration assez importante de l'information sur la notation exponentielle, souvent à l'intérieur d'une sous-section d'un même chapitre;

2) les types de définitions sont plutôt en mots lors de l'amorce de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle au primaire, alors qu'une présence accrue des définitions symboliques et en « mots et symboliques » apparait au secondaire, ce qui nous semble cohérent avec ce qui est attendu par la progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009, 2011);

3) sur le plan du symbolisme (Pimm, 1987), pratiquement aucune mention explicite n'est faite en lien avec la position et la taille relative de l'exposant par rapport à la base dans les définitions, autrement que par l'observation de cette convention dans les exemples;

4) ces mêmes exemples possèdent souvent des particularités qui peuvent entrainer une confusion dans la compréhension de la notation exponentielle, confusion qui peut être amplifiée par une absence complète de contrexemple dans l'ensemble des définitions et des exercices de toutes les collections (Wilson, 1990);

5) l'approche privilégiée pour l'appropriation de la notation exponentielle repose essentiellement dans la grande majorité des collections sur les exercices, qui représentent près de la moitié des items analysés dans l'étude;

6) les fonctions de ces exercices changent selon les cycles d'enseignement (primaire : encodage, décodage, déduction d'une valeur manquante et comparaison d'effet; 1er cycle du secondaire : déduction d'une valeur manquante et conjecture-vérification; 2e cycle du secondaire : réduction);

7) les problèmes proposés sont relativement variés quant aux contextes, mais sont presque tous à solution unique et à données complètes (Gouvernement du Québec, 1988).

Outre ces résultats, il a aussi été possible de constater, à la lumière des particularités et des différences entre les manuels scolaires dans leur contenu et leur approche, que le choix d'une collection pourrait avoir un impact sur les priorités dans l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Par exemple, même sans en connaitre l'utilisation concrète par la personne enseignante en classe, notre étude montre que les élèves d'un même cycle n'auront pas accès aux mêmes informations selon le manuel qu'ils possèdent, du moins pour ce contenu mathématique précis, soit la notation exponentielle.

Un autre constat intéressant est que la grande majorité des collections présente des items ayant du potentiel pour faire réfléchir les élèves et les faire raisonner mathématiquement, mais il leur manque souvent une ou deux questions qui rendraient ces raisonnements plus explicites et qui permettraient d'aller plus en profondeur dans la compréhension de la notation exponentielle et de l'exponentiation. Un bon exemple de cette situation est celui d'un exercice (item Vs1e14) qui propose aux élèves de calculer la puissance de plusieurs expressions exponentielles ayant le nombre « 1 » comme base, mais qui conjecture presque entièrement ce qui est attendu à la suite de la réalisation de tous les calculs demandés, au lieu de questionner les élèves pour qu'ils fassent eux-mêmes les constats. Le raisonnement mathématique attendu est ainsi réalisé par les auteurs du manuel plutôt que par les élèves. Ce sont pourtant ces derniers qui sont en train d'apprendre. Dans cette perspective, il faudrait donc chercher à « faire dire » plutôt que « dire ».

Nous sommes conscient que cette étude est d'une très grande ampleur. Pourtant, une quantité impressionnante de résultats n'est même pas présentée dans ce document. La grille d'analyse développée a permis une collecte de données immense par une observation fine des particularités des définitions, des exercices et des problèmes en lien avec la notation exponentielle. Des choix ont donc dû être faits. Avec le recul, il nous semble évident que la question de recherche, couplée au nombre de collections impliquées dans l'étude (neuf), menait à ce grand nombre de données dont nous avons dû faire le tri. En raison du fait que le projet de recherche avait été approuvé tel quel lors de son dépôt, nous avons décidé d'assumer cette réalité et de respecter le contrat déterminé. Toutefois, malgré la lourdeur de la tâche, nous demeurons convaincu que cela fait aussi ressortir l'originalité de notre étude.

Comme c'est toujours le cas, des limites sont associées à cette recherche. Il est nécessaire de les souligner afin de mettre en perspective les résultats obtenus. Premièrement, notre collecte de données repose sur une grille d'analyse et un guide de codification qui, malgré la grande minutie appliquée et la participation du comité d'experts de manière continue lors de leur conception, demeurent des outils qui n'ont pas été validés à grande échelle. De surcroit, il est plus difficile d'atteindre les objectifs de fiabilité et de validité dans une recherche reposant sur l'analyse de contenu, comme spécifié par Landry (1997). Certains indicateurs de la grille peuvent être plus discutables que d'autres. Deux cas nous viennent plus particulièrement en tête : 1) la différence entre un exercice et un problème et 2) la délimitation des différents sens du vocabulaire, dans la perspective de Pierce et Fontaine (2009). Malgré les assises théoriques dont nous disposions, il n'était pas toujours facile de distinguer ces aspects pendant la préanalyse et l'analyse.

Une autre limite méthodologique est apparue lors de la collecte de données. L'ampleur de la tâche, qui a été réalisée sur quelques semaines, amenait une certaine surcharge cognitive dont nous avons pris conscience à partir de l'analyse de la 5^{e} collection. Il devenait de plus en plus difficile de ne pas faire de comparaison entre les collections au fur et à mesure de l'avancement de la collecte, car il était impossible d'effacer de notre esprit des perceptions qui s'accumulaient. Aussi, nous souffrions parfois d'une impression de « déjà vu », qui faisait en sorte que nous avions le sentiment de recoder les mêmes items, alors qu'ils étaient finalement, après vérification, différents. La lourdeur de la tâche à réaliser a ainsi fort probablement eu un certain impact sur des éléments de la collecte. Cependant, il faut souligner qu'après avoir pris conscience de ce phénomène, nous avons tenté d'en diminuer les effets par une introspection en continu et par une validation plus fréquente avec les membres du comité d'experts.

Une dernière limite de l'étude concerne l'utilisation concrète du manuel scolaire en classe. Même si les résultats présentent une description de ce qui est présent, nous ne savons rien sur ce qui en est fait lors de l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Ainsi, la faiblesse sur le plan de l'approfondissement de certains items soulevée précédemment est peut-être comblée par un questionnement adéquat de la personne enseignante. En effet, nous demeurons sans réponse en ce qui a trait aux items choisis par les enseignantes et les enseignants et à la façon dont ils sont présentés. Sont-ils pris intégralement ou sont-ils modifiés pour répondre à d'autres intentions? Autant de questions auxquelles il nous est impossible de répondre.

Certaines pistes se dégagent de notre étude et seraient à explorer, selon nous, dans le cadre d'autres recherches. Dans un premier temps, nous avons observé que seule la collection U présente l'exponentiation comme n'étant pas seulement une notation, mais bien une opération à part entière. Cette idée de réfléchir au statut de la notation exponentielle nous habitait au début du projet, mais nous avons finalement opté pour aborder le sujet sous un angle didactique plutôt que purement mathématique. Il nous semblerait toutefois très intéressant, autant d'un point de vue mathématique que dans une perspective d'apprentissage, de nous questionner sur la place réelle qu'occupe cette distinction dans les façons de voir la notation exponentielle. Alors que l'enseignement de la notation exponentielle semble présentement plus axé sur l'aspect « notation », travailler également ce contenu mathématique par son côté « opération » enrichirait certainement la compréhension des élèves à son sujet.

Deuxièmement, à la lumière des résultats obtenus pour la notation exponentielle, il nous semblerait important de faire ce genre d'étude sur d'autres contenus mathématiques, voire pour tous les contenus mathématiques traités dans les manuels scolaires. Évidemment, cette tâche serait titanesque. Dans un monde idéal, nous nous attendons à ce que ce soit les enseignantes et les enseignants qui vérifient la qualité des définitions, des exercices et des problèmes proposés aux élèves. À la suite de l'analyse que nous venons de mener, cela parait maintenant impossible à faire pour eux, du moins s'ils désirent aller plus en profondeur tel que nous avons voulu le faire. Ainsi, cette tâche reviendrait probablement davantage aux chercheuses et aux chercheurs en didactique des mathématiques qui pourraient s'assurer de la qualité scientifique de ce qui se retrouve dans le matériel remis ultimement dans les mains des enfants. Nous sommes bien entendu conscient qu'il s'agirait d'une entreprise d'une grande ampleur, mais nous croyons qu'elle serait possiblement envisageable si une équipe en faisait sa priorité.

Finalement, il serait opportun de vérifier comment les personnes enseignantes utilisent le manuel scolaire mathématique en lien avec l'enseignement-apprentissage de l'exponentiation. Maintenant que nous disposons d'un portrait assez complet de ce contenu mathématique, il serait pertinent d'aller en observer les effets et les particularités de l'enseignement-apprentissage dans la salle de classe. Cette perspective répondrait en même temps à l'une des limites de notre étude énoncées précédemment, à savoir le fait que malgré notre connaissance du contenu du manuel scolaire portant sur la notation exponentielle, nous ne savons rien des choix faits lors de son utilisation. Cela nous fournirait en plus des informations précieuses sur l'apprentissage de ce contenu.

CONCLUSION

Le présent document établit les fondements et les références théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyé pour réaliser notre étude, les choix méthodologiques qui ont été pris en considération pour y arriver et les résultats que nous avons obtenus.

Dans notre problématique, nous avons tenté de montrer l'intérêt et la pertinence de nous intéresser à l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Les documents gouvernementaux nous ont permis de cibler la place occupée par cette notion dans le curriculum mathématique québécois. Cette place semble être assez importante compte tenu du fait qu'elle sert de support à plusieurs autres apprentissages mathématiques, plus particulièrement en lien avec l'algèbre (Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter, 2013). Ensuite, les études recensées sur le sujet nous ont éclairé sur les difficultés vécues par les élèves lors de leur apprentissage de la notation exponentielle, tout en nous suggérant des pistes d'explications sur les causes de ces difficultés (Cangelosi *et al.*, 2013; Mullet et Cheminat, 1995; Pitta-Panzatti, Christou et Zachariades, 2007; Sastre et Mullet, 1998; Weber, 2002). Il semble que les élèves éprouveraient des difficultés dans l'interprétation du symbolisme associé à la notation exponentielle, par exemple, sur le plan de l'effet de l'exposant sur la base. Aussi, certains choix de vocabulaire associé à l'enseignement de la notation exponentielle, comme l'utilisation du terme « opposé » au lieu de l'expression « inverse additif », auraient des conséquences fâcheuses sur la compréhension de celle-ci par les élèves. Finalement, un court survol de la place occupée par le manuel scolaire dans l'enseignement des mathématiques a été effectué (Lebrun, 2006; Lenoir, Roy, Rey et Lebrun, 2001; Spallanzani, Biron, Larose, Lebrun, Lenoir, Masselter et Roy, 2001). Il ressort de ce survol que le manuel scolaire semble largement utilisé, et ce, de multiples façons. Toutefois, peu d'études se sont intéressées à analyser le contenu des manuels scolaires pour en connaitre les caractéristiques (Lenoir *et al.,* 2001). L'ensemble de ces constats nous a permis de préciser notre question de recherche, qui consiste à analyser le contenu des manuels scolaires de mathématiques québécois, de la 5^{e} année du primaire à la

3^e année du secondaire, en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle.

Notre cadre de référence a permis, pour sa part, de dresser un tableau des liens entre les mathématiques et le langage. Tout d'abord, les résultats de quelques auteurs ont été synthétisés en lien avec le rôle des définitions dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques (Courteau, 2010; Kahane, 2000; Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006; Pierce et Fontaine, 2009). Il a été possible de constater que ce rôle peut être multiple. Étant à la fois un point de départ dans la compréhension d'un concept mathématique et un aboutissement de l'acte mathématique de création, la définition peut être exploitée comme amorce dans l'apprentissage, mais aussi comme un moyen d'approfondir la compréhension. Pour un même concept, plusieurs définitions peuvent donc coexister, ce qui est riche d'un point de vue mathématique, mais peut aussi entrainer une certaine confusion pour l'élève qui est en train de se l'approprier. Puis, une autre avenue intéressante à explorer est celle de la place du symbolisme en mathématiques (Pimm, 1987). D'entrée de jeu, il est important de noter que le symbole n'est pas la notion, mais bien une représentation graphique nous permettant de la concrétiser. Cela n'est pas sans conséquence. En effet, une certaine confusion semble exister chez les élèves, car ils ont tendance à traiter les symboles comme étant les concepts eux-mêmes. Plusieurs règles, parfois plus implicites qu'explicites, sont aussi à respecter lors de l'écriture en langage mathématique. Il a aussi été possible de constater que les symboles mathématiques ne sont pas tous de même nature. Certains ont uniquement un sens mathématique, alors que d'autres sont empruntés au langage courant. Cette situation, qui est parfaitement maitrisée par la mathématicienne ou le mathématicien « expert », entraine également son lot de difficultés lors de l'apprentissage des mathématiques chez les élèves. Finalement, un regard sur les différentes caractéristiques de quelques grilles d'analyse de manuels scolaires a été effectué afin de nourrir nos propres réflexions sur le sujet (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Cotnoir, 2010). D'autres écrits portant sur les exercices et les problèmes sont venus compléter notre réflexion (Bessot et Eberhard, 1982; Gouvernement du Québec, 1988; Roegiers, 1998*a*) afin de nous guider dans l'élaboration des critères qui ont servi à notre analyse.

Le chapitre sur la méthodologie a permis d'expliquer les raisons qui nous ont amené à choisir l'analyse de contenu (Landry, 1997) comme méthode afin de pouvoir répondre à notre question générale de recherche. Une grille d'analyse, constituée de catégories analytiques s'appuyant sur les études de notre cadre de référence et d'autres catégories qui ont émergé en cours d'analyse, selon les principes de l'analyse thématique (Paillé et Mucchielli, 2010), a été employée. Les différentes étapes du processus de recherche (la détermination des objectifs, la préanalyse, l'analyse, l'évaluation de la fiabilité et de la validité des données et l'analyse et l'interprétation des résultats) ont été expliquées et justifiées. Un comité d'experts s'est assuré de la fiabilité et de la validité de cette grille lors d'une préanalyse. L'échantillon sur lequel a porté l'étude concerne tous les manuels scolaires mathématiques de la 5^{e} année du primaire à la 3^{e} année du secondaire qui ont été approuvés par le MELS, soit neuf collections. L'ensemble du processus a respecté les exigences éthiques de la recherche en éducation.

Les résultats de cette étude ont été nombreux. Les données permettent de dresser un portrait du contenu présenté dans les manuels scolaires portant sur la notation exponentielle du 3^{e} cycle du primaire au 2^{e} cycle du secondaire. Sans reprendre en détail les résultats présentés au quatrième chapitre, il convient de rappeler que parmi les aspects analysés, certains étaient plus transversaux, dont le vocabulaire et le symbolisme. Nos données permettent de nous rassurer sur le fait que le vocabulaire est en général utilisé adéquatement, même si certains mots pourraient parfois être plus précis. Cependant, la présence importante de mots, et plus particulièrement de nombreux verbes, ayant parfois un sens commun, parfois un sens technique, est plus interrogeable, dans la perspective où nous ne savons pas s'ils sont explicités par les personnes enseignantes (Pierce et Fontaine, 2009). Par ailleurs, le symbolisme, bien que plus présent au secondaire, semble adéquatement exploité à tous les niveaux scolaires. Toutefois, certains résultats soulèvent aussi des questions, comme le fait qu'aucune indication n'est fournie sur la position et la taille relative de l'exposant dans une expression exponentielle, l'acquisition de cette convention reposant exclusivement sur l'observation des exemples proposés. Enfin, l'absence complète de contrexemple de toutes les collections analysées est préoccupante. Comme le souligne

Wilson (1990), c’est la présence simultanée d’exemples et de contrexemples qui aide l’élève à découvrir, entre autres, le domaine d’application d’une définition donnée.

En ce qui a trait plus spécifiquement aux définitions, aux exercices et aux problèmes présents dans les collections analysées, il convient de rappeler quelques résultats. De manière générale, les définitions sont présentes dans les manuels scolaires, parfois dans les chapitres et parfois dans un glossaire. Malgré la présence de quelques formulations pouvant conduire à une interprétation erronée, comme l’utilisation de l’expression « multiplié par lui-même » (Baruk, 1995), elles sont assez fiables sur le plan mathématique. Aussi, selon la collection, ces définitions se raffinent et se complexifient d'un cycle à l'autre, alors que pour d'autres collections, elles sont simplement reprises intégralement d'un manuel à l'autre. Cette situation soulève certainement des questions quant au statut accordé aux définitions si celles-ci varient peu ou sont situées dans une section éloignée du contenu à apprendre, puisque les définitions ne sont pas simplement des informations, mais devraient servir à construire le concept.

Nos résultats montrent aussi la présence marquée des exercices dans les collections examinées, et ce, pour tous les cycles. Bien que les fonctions de ces exercices varient d'un cycle à l'autre, la propension à faire maitriser des procédures semble encore très présente dans les manuels scolaires. En outre, cela semble se faire au détriment des problèmes qui sont moins nombreux et, malgré leurs contextes assez variés, qui sont peu diversifiés sur le plan du nombre de solutions et de l'adéquation des données. Ce résultat soulève certainement une inquiétude quant au développement de la compétence à résoudre des problèmes si ceux-ci sont si peu diversifiés et conduisent, par leur réponse unique, à développer davantage un réflexe de fournir la bonne réponse plutôt que celui de déployer un raisonnement et de réfléchir au concept. Enfin, les autres items répertoriés concernent surtout des capsules historiques. Nos observations conduisent à soulever certaines inquiétudes concernant l'information transmise qui apparait, à l'exception d'une collection, plutôt sommaire et diluée. Le rehaussement culturel sous-entendu par leur présence serait probablement à remettre en question.

Somme toute, le portait que nous venons de dresser montre, d'une part, la pertinence de réfléchir aux concepts à enseigner, d'en connaitre leurs particularités et leur progression d'un cycle à l'autre et, d'autre part, de s'interroger sur le contenu du manuel scolaire afin de pallier ses faiblesses et de s'appuyer sur ses forces. En effet, les collections examinées n'apparaissent pas toutes équivalentes. Des distinctions importantes sont parfois observées sur le plan des définitions, des exercices et des problèmes, ce qui amène à être vigilant quant à leur utilisation future en classe. Bref, cela soulève l'importance de développer un regard analytique sur ce qui est à enseigner et un esprit critique à l'égard de ce qui soutient l'enseignement.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Association mathématique du Québec (1995). *Mémoire présenté par l'AMQ au Ministère de l'Éducation pour la Commission des États généraux sur l'éducation.* Sherbrooke : AMQ. Document téléaccessible à l'adresse <http://archimede.mat.ulaval.ca/amq/ArchivesMemoires/mem95.html>.

Baroody, A.J. et Ginsburg, H.P. (1983). The effect of instruction on children's understanding of the «equals» sign. *The Elementary School Journal*, *84*(2), 199-212.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques.* Paris : Éditions du Seuil.

Baruk, S. (1995). *Dictionnaire des mathématiques élémentaires.* Paris : Éditions du Seuil.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1985). La numération : une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension. *Grand N*, *34*, 5-17.

Bessot, A. et Eberhard, M. (1982). Représentation d'assemblages de cubes au CM. *Grand N*, *26*, 29-68.

Biron, D. (2012). *Développement de la pensée mathématique. Du préscolaire au premier cycle du primaire*. Montréal : Éditions CEC.

Biron, D. et Chaput, N. (2001). Place et rôle des représentations imagées dans les manuels scolaires pour l'enseignement de la résolution de problèmes. *In* Y. Lenoir, B. Rey, G.-R. Roy et J. Lebrun (dir.), *Le manuel scolaire et l'intervention éducative. Regards critiques sur ses apports et ses limites* (p. 145-160). Sherbrooke : Éditions du CRP.

Boulet, G. et Francavilla, M. (2007). *Math en mots. Vocabulaire mathématique à la portée de tous.* Sherbrooke : Éditions du CRP.

Bouvier, A., George, M. et Le Lionnais, F. (2005). *Dictionnaire des mathématiques.* Paris : Presses universitaires de France.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations* (Tome 1). La Salle, Il : The Open Court Publishing Company.

Cangelosi, R., Madrid, S., Cooper, S., Olsen J. et Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions : Unveiling students' persistent errors and misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 69-82.

Côté, R. et Laflamme, J. (2002). *Leximath. Lexique mathématique de base.* Montréal : Éditions Beauchemin.

Cotnoir, G. (2010). *Évolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours – mémoire de maitrise.* Mémoire de maitrise en éducation, Université de Sherbrooke, Québec.

Courteau, B. (2010). *Entretien sur la notation exponentielle et l'exponentiation* (Entretien inédit sur vidéo). Sherbrooke : Université de Sherbrooke, Faculté d'éducation.

Crête, J. (1997). L'éthique en recherche sociale. *In* B. Gauthier (dir.), *De la problématique à la collecte des données* (p. 217-238). Québec : Presses de l'Université du Québec.

de Champlain, D., Mathieu, P., Patenaude, P. et Tessier, H. (1996). *Lexique mathématique. Enseignement secondaire.* Québec : Éditions du Triangle d'or.

Dufour, N. (2011). *Dictionnaire mathématique CEC.* Montréal : Les Éditions CEC.

Esty, W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning in Mathematics, 14*(4), 31-54.

Gohier, C. (2009). Le cadre théorique. *In* Karsenti, T. et L. Savoie-Zajc (dir.), *La recherche en éducation : étapes et approches* (p. 81-107). Sherbrooke : Éditions du CRP.

Gouvernement du Québec (1988). *Fascicule K. Mathématique du primaire – Résolution de problèmes et orientation générale.* Québec : Ministère de l'Éducation du Québec.

Gouvernement du Québec (1997*a*). *Réaffirmer l'école. Prendre le virage du succès.* Rapport du Groupe de travail sur la réforme du curriculum. Québec : Ministère de l'Éducation. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/REFORME/curricu/inter.htm>.

Gouvernement du Québec (1997*b*). *Énoncé de politique éducative « L'école, tout un programme ».* Québec : Ministère de l'Éducation. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/reforme/pol_eco/inter.htm>.

Gouvernement du Québec (2001). *La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles.* Québec : Ministère de l'Éducation. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/dftps/interieur/pdf/formation_ens.pdf>.

Gouvernement du Québec (2006*a*). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire. Enseignement primaire*. Québec : Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/lancement/prog_formation/index.htm>.

Gouvernement du Québec (2006*b*). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/dgfj/dp/programme_de_formation/secondaire/prformsec1ercycle.htm>.

Gouvernement du Québec (2007). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec : Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeformation/secondaire2/index.asp?page=math>.

Gouvernement du Québec (2009). *Progression des apprentissages au primaire. Mathématiques*. Québec : Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/mathematique/>.

Gouvernement du Québec (2011). *Progression des apprentissages au secondaire. Mathématiques*. Québec : Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports. Document téléaccessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/secondaire/mathematique/>.

Groupe des responsables en mathématique au secondaire (1995). *Mémoire présenté par le Groupe des responsables en mathématique au secondaire (GRMS) au ministère de l'Éducation pour la Commission des États généraux sur l'éducation.* Montréal : Groupe des responsables en mathématique au secondaire.

Harel, G. et Kaput, J. (2002). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. *In* D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 82-94). New York, NY : Kluwer Academic Publishers.

Kahane, J.-P. (2000). *Nécessité et pièges des définitions mathématiques.* Conférence téléaccessible à l'adresse <http://www.canalu.tv/producteurs/universite_de_tous_les_savoirs/dossier_programmes/les_conferences_de_l_annee_2000/perspectives_sur_les_mathematiques_actuelles/necessite_et_pieges_des_definitions_mathematiques>.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 317-326.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne en enseignement des sciences, de la technologie et des mathématiques*, *12*(2), 178-213.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations.* Paris : Éditions Hermann.

Landry, R. (1997). L'analyse de contenu. *In* B. Gauthier (dir.), *De la problématique à la collecte des données* (p. 329-356). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Lebrun, M. (2006). *Le manuel scolaire : un outil à multiples facettes.* Québec : Presses de l'Université du Québec.

Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3e éd.). Montréal : Éditions Guérin.

Lenoir, Y., Roy, G.-R., Rey, B. et Lebrun, J. (2001). *Le manuel scolaire et l'intervention éducative : regards critiques sur ses apports et ses limites.* Sherbrooke : Éditions du CRP.

Lixi, C. et Gourion, M. (1988). *Dictionnaire de mathématiques.* Paris : Éditions Nathan.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ, 39*(4), 30-42.

Mathieu, P., de Champlain, D. et Tessier, H. (1990). *Petit lexique mathématique : élèves, parents, enseignants.* Québec : Éditions du Triangle d'or.

Mullet, E. et Cheminat, Y. (1995). Estimation of exponential expressions by High School students. *Contemporary Educational Psychology*, *20*, 451-456.

Munoz Sastre, M. et Mullet, E. (1998). Evolution of the intuitive mastery of the relationship between base, exponent and number magnitude in High-School students. *Mathematical Cognition*, *4*(1), 67-77.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). *Des définitions pour quoi faire? Analyse épistémologique et utilisation didactique.* Paris : Éditions Fabert.

Paillé, P. et Mucchielli, A. (2010). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales.* Paris : Éditions Armand Colin.

Pierce, M. et Fontaine, M. (2009). Designing vocabulary instruction in mathematics. *The Reading Teacher*, *63*(3), 239-243.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classroom.* London : Routledge.

Pitta-Panzatti, D., Christou, C. et Zachariades T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 301-311.

Poincaré, H. (1905). *Science et méthode*. Paris: Éditions Flammarion.

Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire. Notes didactiques*. Montréal : ERPI.

Powell, S. et Fuchs, L. (2010). Contribution of equal-sign instruction beyond word-problem tutoring for third-grade students with mathematics difficulty. *Journal of Educationnal Psychology*, *102*(2), 381-394.

Roegiers, X. (1998*a*). *Les mathématiques à l'école élémentaire. Tome 1 – Le nombre, la numération et les opérations.* Bruxelles : Éditions De Boeck.

Sáenz-Ludlow, A. et Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 153-187.

Spallanzani, C., Lebrun, J., Biron, D., Lenoir, Y., Roy, G.-R., Larose, F. et Masselier, G. (2001). *Le rôle du manuel scolaire dans les pratiques enseignantes au primaire.* Sherbrooke : Éditions du CRP.

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive.* Montréal : Les Éditions Logiques.

Theis, L. et Gagnon, N. (2013). *L'apprentissage à travers les situations-problèmes. Bases théoriques et réalisation pratique.* Québec : Presses de l'Université du Québec.

Van Hout, G. (1994). *Et que le nombre soit!...* Bruxelles : Éditions De Boeck.

Vinner, S. (1976). The naive concept of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 7*(4), 413-429.

Vinner, S. (1977). The concept of exponentiation at the undergraduate level and the definitional approach. *Educational Studies in Mathematics, 8*(1), 17-26.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *In* D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 65-81). New York, NY : Kluwer Academic Publishers.

Weber, K. (2002). Developping students' understanding of exponents and logarithms. *In Procedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of Mathematics Education, 1-4,* 1019-1027.

Wilson, P. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 31-47.

ANNEXE 1

ÉLÉMENTS EN LIEN AVEC LA NOTATION EXPONENTIELLE DE LA PROGRESSION DES APPRENTISSAGES DU PRIMAIRE EN MATHÉMATIQUES (MELS, 2009)

14. Représenter la puissance d'un nombre naturel					→	★

p. 6

Vocabulaire Centaine de mille, million Exposant, puissance, carré de (le), cube de (le) Parenthèse **Symboles** ( ), nombres écrits en chiffres, notation exponentielle					→	★

p.6

10. Calculer la puissance d'un nombre					→	★

p.12

ANNEXE 2

ÉLÉMENTS EN LIEN AVEC LA NOTATION EXPONENTIELLE DE LA PROGRESSION DES APPRENTISSAGES DU SECONDAIRE EN MATHÉMATIQUES (MELS, 2011)

11. Représenter et écrire							
a. la puissance d'un nombre naturel	★						
b. des carrés et des racines carrées		→	★				
c. des nombres en notation exponentielle (exposant entier)		→	★				
d. des nombres en notation scientifique				★			
e. des cubes et des racines cubiques				★			
f. des nombres en notation exponentielle (exposant fractionnaire)				★			
g. des nombres à l'aide de radicaux ou d'exposants rationnels							CST
					★		TS
						★	SN
h. des nombres en notation logarithmique en utilisant, au besoin, l'équivalence $\log_a x = n \Leftrightarrow a^n = x$							CST
					→	★	TS
						★	SN
12. Apprécier la valeur de la puissance d'une expression exponentielle au regard de ses différentes composantes : base (entre 0 et 1, supérieure à 1), exposant (positif ou négatif, entier ou fractionnaire) **Note :** Il en va de même pour une expression logarithmique en TS et SN.					★		CST
				→	★		TS
						★	SN

p.8

12. Calculer la puissance d'un nombre naturel	★						
13. Décomposer un nombre naturel en facteurs premiers	★						
14. Manipuler des expressions numériques comportant							
a. des exposants entiers (base rationnelle) et des exposants fractionnaires **Note** : Dans la manipulation d'expressions numériques, l'élève est amené à déduire les propriétés des puissances.				★			
b. des puissances (changement de base), des exposants, des radicaux (racine n^e) en recourant à leurs propriétés **Note** : Pour le changement de base en TS de 4e secondaire, l'élève utilise les puissances de base 2 et 10. En SN, l'élève est amené à déduire les propriétés des radicaux.							CST
					→	★	TS
						★	SN
c. des logarithmes							
i. définition et changement de base							CST
					★		TS
						★	SN
ii. propriétés							CST
						★	TS
						★	SN
d. des valeurs absolues							CST
							TS
						★	SN

p.11

Sens et manipulation des expressions algébriques

→ L'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant.

★ L'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire.

L'élève réutilise cette connaissance.

	Primaire	Secondaire				
		1er cycle		2e cycle		
A. Expressions algébriques	**6e**	**1re**	**2e**	**3e**	**4e**	**5e**
1. Décrire, dans ses mots et à l'aide du langage mathématique, des régularités numériques						
2. Décrire, dans ses mots et à l'aide du langage mathématique, des suites de nombres et famille d'opérations	★					
3. Ajouter de nouveaux termes à une suite dont au moins les trois premiers termes sont donnés	★					
4. Décrire le rôle des composantes des expressions algébriques :						
a. inconnue **Note** : Ce concept, a été abordé sans qu'il soit nommé comme tel, au primaire, dans le contexte de la recherche d'un terme manquant.	→	→	★			
b. variable, constante		→	★			
c. paramètre **Note** : Le concept de paramètre est abordé, de façon intuitive, sans qu'il soit nommé comme tel, aux trois premières années du secondaire.		→	→	→	CST : TS : → SN : ★	CST : TS : ★ SN :
d. coefficient, degré, terme, terme constant, termes semblables		→	★			
5. Construire une expression algébrique à partir d'un registre (mode) de représentation		→	★			
6. Interpréter une expression algébrique selon le contexte		→	★			
7. Reconnaître ou construire des expressions algébriques équivalentes		→	★			
8. Reconnaître ou construire						
a. des égalités et des équations	→	→	★			
b. des inégalités et des inéquations				★		
B. Manipulation d'expressions algébriques	**6e**	**1re**	**2e**	**3e**	**4e**	**5e**
1. Calculer la valeur numérique d'expressions algébriques		→	★			
2. Effectuer les opérations suivantes sur des expressions algébriques avec ou sans l'aide de matériel concret ou imagé : addition et soustraction, multiplication et division par une constante, multiplication de monômes du premier degré		→	★			
3. Effectuer des mises en évidence simples d'expressions numériques (distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction)		→	★			
4. Multiplier						
a. des expressions algébriques de degré inférieur à 3				★		

b. des expressions algébriques							CST
					★		TS
					★		SN
5. Diviser							
a. des expressions algébriques par un monôme				★			
b. un polynôme par un binôme (avec ou sans reste)							CST
					★		TS
							SN
c. un polynôme par un autre polynôme (avec ou sans reste)							CST
							TS
					★		SN
6. Factoriser des polynômes à l'aide							
a. de mises en évidence simples				★			
b. de la mise en évidence double (polynômes incluant les trinômes du second degré décomposables)							CST
					★		TS
					★		SN
c. de la complétion du carré (factorisation et passage d'une forme d'écriture à l'autre)							CST
						★	TS
					★		SN
d. de formules pour les trinômes de la forme $ax^2 + bx + c$: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$							CST
						★	TS
					★		SN
e. de la substitution d'identités algébriques du second degré (trinôme carré parfait et différence de deux carrés)							CST
					★		TS
					★		SN
7. Manipuler des expressions rationnelles **Note** : L'expression rationnelle (fraction algébrique) s'ajoute aux expressions algébriques à traiter. En TS, la recherche d'un dénominateur commun dans l'addition de deux expressions rationnelles se limite au cas où le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre.							CST
					★		TS
					★		SN

C. Analyse de situations à l'aide d'équations ou d'inéquations	6e	1re	2e	3e	4e	5e
1. Reconnaître si une situation peut se traduire par						
a. une équation		→	★			
b. une inéquation				★		
2. Reconnaître ou construire						
a. des relations ou des formules		→	★			
b. des relations d'inégalité et des inéquations du premier degré à une variable				★		
3. Manipuler des relations ou des formules (ex. : isoler un élément)		→	★			
4. Représenter une situation à l'aide						
a. d'une équation du premier degré à une inconnue		→	★			
b. d'une inéquation du premier degré à une variable				★		
5. Représenter						
a. une équation à l'aide d'un autre registre (mode) de représentation, au besoin		→	★			
b. une inéquation à l'aide d'un autre registre (mode) de représentation, au besoin				★		

ANNEXE 3

RÉSUMÉS DES ÉTUDES PORTANT SUR L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DE L'EXPONENTIATION

L'étude de Mullet et Cheminat (1995)

L'étude de Mullet et Cheminat (1995) avait comme objectif de saisir comment les élèves combinent les informations fournies par la base et par l'exposant dans une expression exponentielle pour évaluer l'ordre de grandeur de la puissance. Pour ce faire, ils ont demandé à 35 élèves âgés de 15 à 18 ans ayant déjà reçu un enseignement sur la notation exponentielle d'indiquer sur des graphiques l'ordre de grandeur estimé d'expressions exponentielles de base 5, avec les exposants 2, 3, 4 et 5. Ils ont répété l'expérience avec les bases 7 et 9, en utilisant les quatre mêmes exposants. Pour analyser les résultats, les chercheurs se sont appuyés sur six manifestations observables relativement aux courbes obtenues pour chacune des bases lors de l'estimation : 1) les courbes sont distinctes; 2) les courbes sont croissantes; 3) les courbes présentent un effet plus important en ordonnée qu'en abscisse; 4) les courbes sont divergentes; 5) les courbes sont espacées de manière non équidistante les unes par rapport aux autres, selon les bases de l'expression exponentielle et 6) les courbes sont de pentes toujours de plus en plus accentuées.

L'analyse des données recueillies leur a permis de dégager quatre modèles différents d'interprétation de l'interaction de la base et de l'exposant dans l'estimation de l'ordre de grandeur de la puissance, en se référant aux six manifestations observables sur les courbes obtenues. Le premier modèle, de nature additive, nous montre des courbes distinctes (a) et croissantes (b) plutôt droites et parallèles, comme si la base et l'exposant s'additionnaient. Dans le deuxième modèle, il est possible de remarquer un plus grand espace entre les courbes selon l'exposant employé. Ainsi, se joignent aux éléments précédents (a et b) des courbes (c) qui présentent un effet plus important en ordonnée qu'en abscisse de sorte que même si le raisonnement est de type additif, un effet plus important semble accordé à l'exposant. Le troisième modèle est de type multiplicatif. En plus des trois premières caractéristiques qui sont présentes s'ajoutent des courbes divergentes (d). Cet ajout semble indiquer une prise en compte d'un certain effet combiné des valeurs de la base et de l'exposant. Le quatrième et dernier modèle est dit exponentiel et correspond à ce qui est attendu, c'est-à-dire la prise en compte de l'effet réel des valeurs de la base et de l'exposant sur la puissance estimée. Les six manifestations observables présentées précédemment sont présentes dans les courbes produites.

Les auteurs concluent que la majorité des élèves interrogés, peu importe leur niveau scolaire, a tendance à interpréter les expressions exponentielles selon une structure additive. Seulement quelques-uns présentent un raisonnement multiplicatif ou un raisonnement exponentiel et cela s'observe davantage chez les sujets plus âgés de leur échantillon.

L'étude de Sastre et Mullet (1998)

Pour Sastre et Mullet (1998), les difficultés d'interprétation d'une expression exponentielle sont de deux natures. La première vient du fait qu'une expression telle que 4^3 manque de transparence : pour être en mesure de lui donner un sens, il faut en effet connaitre le code employé. Il s'agit également de saisir que l'exposant joue un rôle très important dans l'évaluation de la puissance de l'expression exponentielle, malgré ce que sa position (en haut, à droite) et sa taille (plus petite) peuvent laisser supposer. Il importe donc de décoder dès le départ cette expression pour en comprendre le sens. La deuxième difficulté se situe dans la capacité des élèves à évaluer l'expression décodée selon son ordre de grandeur. Ainsi, une fois l'expression 4^3 décodée en $4x4x4$ (la première difficulté étant surpassée), il peut demeurer difficile pour certains élèves d'évaluer la puissance qui lui est associée, particulièrement lorsque les bases et les exposants ont des valeurs plus grandes, comme dans l'expression 9^5.

Les auteurs précisent que leur étude s'inscrit dans la continuité de celle présentée à la sous-section précédente, soit celle de Mullet et Cheminat (1995). Les tâches présentées aux élèves sont les mêmes; ils doivent situer sur un graphique leur estimation de l'ordre de grandeur de la puissance associée à une expression exponentielle donnée. Sastre et Mullet

(1998) utilisent aussi les combinaisons des mêmes bases (5, 7 et 9) et des mêmes exposants (2, 3, 4 et 5) que lors de l'étude de 1995. La seule différence importante se situe sur le plan de l'échantillon utilisé : au lieu de 35 élèves âgés de 15 à 18 ans, ce sont plutôt 107 élèves de 13 à 19 ans qui ont participé à l'expérimentation.

Les résultats auxquels arrivent Sastre et Mullet (1998) sont sensiblement les mêmes que ceux de l'étude de Mullet et Cheminat en 1995. Ils observent à nouveau les quatre modèles d'interprétation présentés précédemment, soit les deux modèles additifs, le modèle multiplicatif et le modèle exponentiel, mais précisent toutefois certains modèles transitoires pour expliquer l'évolution de la compréhension des élèves selon l'âge. D'ailleurs, encore ici, la majorité des élèves plus jeunes se réfère plutôt à une pensée additive, alors que les plus âgés sont presque exclusivement dans une interprétation exponentielle des expressions présentées. Les figures A et B, tirées de leur publication, illustrent et expliquent chacun des modèles proposés.

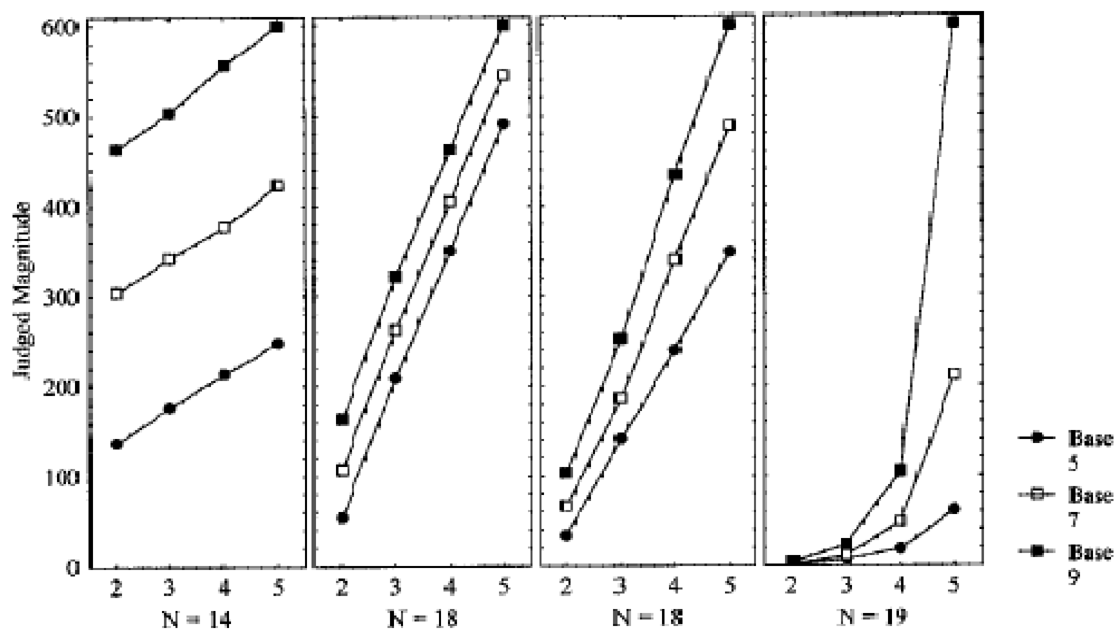


FIG. 2. Mean response pattern observed in each of the four a priori clusters: Additive with preponderant effect of the base (left panel), additive with preponderant effect of the exponent (second panel), multiplicative with preponderant effect of the exponent (third panel), exponential (right panel).

Figure A – Les quatre modèles principaux selon Sastre et Mullet (1998, p. 73)

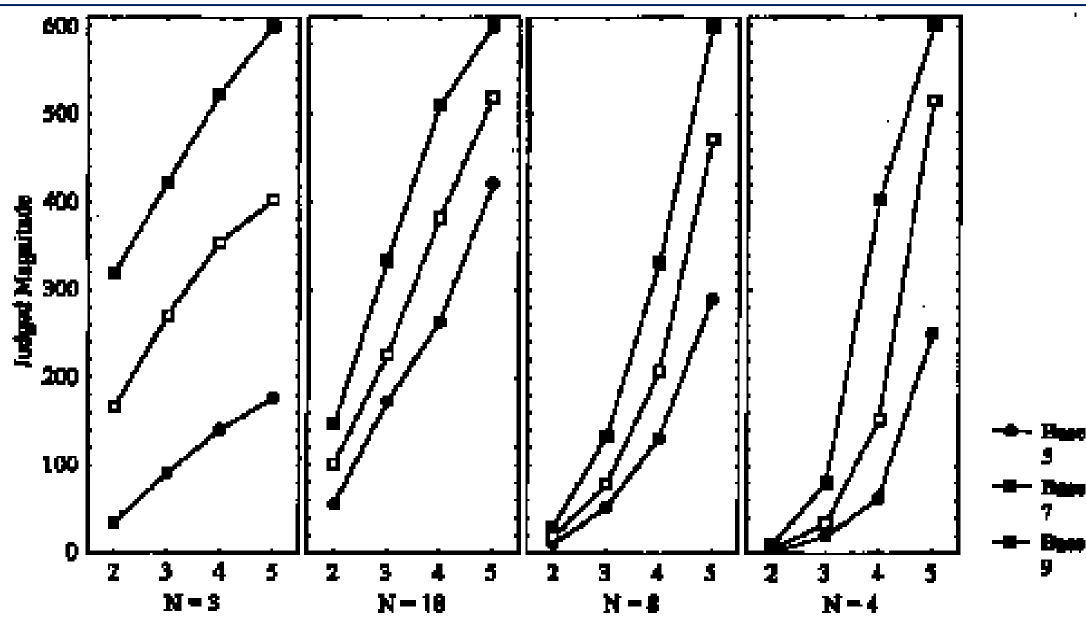


FIG. 3. Mean response pattern observed in each of the four transitional clusters: Multiplicative with preponderant effect of the base (left panel), additive-multiplicative with preponderant effect of the exponent (second panel), multiplicative with non-linear effect of the exponent (third panel), multiplicative-exponential (right panel).

Figure B – Les quatre modèles transitoires selon Sastre et Mullet (1998, p. 74)

L'étude de Weber (2002)

L'étude de Weber (2002) propose, pour sa part, une situation d'enseignement afin de favoriser une compréhension riche de la notation exponentielle et des logarithmes. En s'appuyant sur les travaux théoriques des années 1990 de Dubinski et Sfard portant sur le développement d'un sens procédural et conceptuel des objets mathématiques, l'auteur décrit deux interventions utilisées pour améliorer la compréhension des élèves : une activité utilisant le logiciel *Maple* et une feuille d'exercices de type papier crayon.

En comparant les résultats obtenus par 15 élèves volontaires ayant suivi les leçons préparées par l'auteur à 15 autres élèves ayant travaillé avec un autre enseignant qui n'utilisait pas la même méthode d'enseignement, il arrive à la conclusion que sa manière de faire permet aux élèves de mieux comprendre la notation exponentielle et les logarithmes. Ses interventions étaient principalement axées sur une appropriation des multiples sens que peut prendre une expression comme b^x, soit : une opération (multiplier x facteurs b ensemble), une structure mathématique (le nombre qui est le résultat du processus d'exponentiation) ou encore comme une fonction ou une famille de fonctions. Malgré les limites méthodologiques de cette étude exploratoire, la piste présentée par l'auteur lui semble prometteuse. Malheureusement, à notre connaissance, aucune recherche subséquente n'est venue vérifier à une plus grande échelle les constatations réalisées par Weber (2002).

L'étude de Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades (2007)

Les travaux de Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades (2007) ont pour but de décrire le degré de compréhension de la notation exponentielle auprès d'élèves du secondaire. Selon eux, ce concept est principalement enseigné à partir de quelques exemples types, sans mettre d'accent sur un développement conceptuel de leurs propriétés. Deux raisons semblent à l'origine des difficultés éprouvées par les élèves lors de leur apprentissage de la notation exponentielle. Dans un premier temps, les élèves ont à considérer les relations entre les symboles, les sens et les propriétés des exposants lors de leur apprentissage de la notation exponentielle, ce qui rend celle-ci difficile à appréhender dans son entièreté. Dans un deuxième temps, une compréhension conceptuelle de la notation exponentielle implique une compréhension approfondie des ensembles de nombres et, plus particulièrement, de leur structure interne (nombres naturels, nombres rationnels, nombres irrationnels, nombres réels, etc.). Ainsi, lors des premiers apprentissages proposés sur la notation exponentielle, une expression comme a^2 doit être interprétée comme une procédure : a x a. Par contre, une expression comme $a^{\frac{1}{2}}$ est en assez grande contradiction avec cette définition initiale (il n'est pas possible de multiplier un demi fois la base a) et demande à l'élève de saisir une nouvelle logique, qui est plus conceptuelle que procédurale.

À la suite de l'analyse des résultats obtenus lors de la passation d'un questionnaire auprès de 202 élèves du secondaire portant sur la comparaison d'expressions exponentielles, Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades proposent un modèle en trois niveaux pour expliquer leur compréhension. Le niveau 1 est dit préconceptuel : les élèves sont en mesure d'interpréter des expressions exponentielles ayant des exposants entiers positifs comme une suite de multiplications de la base. Le niveau 2 est dit conceptuel : les élèves sont en mesure d'interpréter des expressions exponentielles qui ont des exposants entiers négatifs, ce qui correspond à une extension qui dépasse le sens initial de ce à quoi sert un exposant dans un sens procédural. Dans le niveau 3, dit restructuré, les élèves arrivent à comprendre le sens à accorder à n'importe quel type d'exposants réels, en plus de saisir les propriétés sous-jacentes à la manipulation d'expressions exponentielles. La figure C, tirée de leur publication, permet de mieux comprendre les caractéristiques de chacun des niveaux.

Model of students' reasoning in solving exponential tasks

Levels of thinking	Students' skills and knowledge
Level 1 (Group 1 students): pre-conceptual level; repeated multiplication prototype for integer exponents	Students solve all tasks that are in agreement with the prototype concept of exponents as repeated multiplication of positive integers. Specifically, students compute a^x, if a and x are positive integers. Extend the prototype concept to involve bases with positive fractional numbers and powers positive integers
Level 2 (Group 2 students): conceptual level; extension of the prototype concepts	Students extend the prototype concept to involve exponents with negative numbers. Specifically, students compute a^x, if a and x are either positive or negative integers. Students compute a^x, if a is a rational number (positive or negative), and x is a positive or negative integer. Students understand the properties of integers (negative and positive). Students understand that $a^x a^y = a^{x+y}$, if a, x, and y are positive integers
Level 3 (Group 3 students): restructured level; reorganization of knowledge.	Students reorganize their thinking in such a way as to understand the concept of roots and see conceptually exponents of the form $a^{x/y}$. Specifically, students compute a^x, if a and x are rational numbers (positive or negative). Students understand the properties of rational numbers (negative and positive)

Figure C – Les trois niveaux de raisonnement dans l'interprétation d'expressions exponentielles, selon Pitta-Pantazi *et al.* (2007, p. 308)

Finalement, les auteurs invitent les enseignants à l'utilisation de leur modèle à trois niveaux dans l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle afin de faire acquérir une compréhension riche et profonde de ce concept par les élèves.

L'étude de Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter (2013)

Les travaux de Cangelosi, Madrid, Cooper, Olsen et Hartter (2013) poursuivent l'objectif de saisir si certaines erreurs commises lors de la simplification d'expressions exponentielles demeurent les mêmes au fur et à mesure de la progression des élèves dans leur scolarité. Pour y arriver, ils ont administré des tests à des étudiants collégiaux portant sur la simplification d'expressions exponentielles. Leur choix d'items pour ces tests reposait principalement sur des recommandations émises par Weber (2002) et Pitta-Pantazi, Christou et Zachariades (2007).

Leur principale conclusion indique que le concept de négativité semble jouer un rôle important dans l'explication des difficultés vécues par les élèves. Selon Cangelosi et ses collaborateurs (*Ibid.*), un développement incomplet des concepts d'inverse additif et d'inverse multiplicatif serait à l'origine de plusieurs des erreurs commises par les élèves. Ils émettent également l'hypothèse que le langage utilisé dans l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle (comme l'utilisation du mot « opposé » au lieu de l'expression « inverse additif » qui est, selon eux, mathématiquement plus rigoureux pour parler de -*a*), ainsi que l'aisance dans la manipulation et l'interprétation de celle-ci (par exemple, les élèves éprouvent de la difficulté à différencier des expressions comme -13^8 et $(-13)^8$) jouent un rôle critique dans le développement d'une compréhension conceptuelle de cette notation.

ANNEXE 4

GRILLE PRÉLIMINAIRE POUR L'ANALYSE DE CONTENU DES MANUELS SCOLAIRES EN LIEN AVEC LA NOTATION EXPONENTIELLE

Nom de l'ouvrage :	Auteur(s) :

Identification de l'item (page, extrait analysé) :

Nature de l'item :
☐ Définition (aller à la section A)
☐ Exercice (aller à la section B)
☐ Problème (aller à la section C)

Section A – Étude d'une définition

a) Définition
☐ rigoureuse ☐ non rigoureuse
Observations :

b) Nature du vocabulaire :
☐ technique ☐ courant ☐ mixte
Observations :

c) Utilisation du vocabulaire
☐ rigoureuse ☐ non rigoureuse
Observations :

d) Utilisation du symbolisme mathématiquement
☐ rigoureuse ☐ non rigoureuse
Observations :

e) ☐ zéro-définition ☐ définition générée par la preuve
Observations :

f) Utilisation d'un ou de plusieurs exemples pour illustrer la définition
☐ oui ☐ non
Si oui, quelles en sont les particularités? (rigueur, nature, cohérence, pertinence, autres observations) :

g) Utilisation d'un ou de plusieurs contrexemples
☐ oui ☐ non
Si oui, quelles en sont les particularités? (rigueur, nature, cohérence, pertinence, autres observations) :

h) Position dans le chapitre
☐ au début ☐ intercalée ☐ à la fin
Observations :

i) Dans sa présentation, la définition sert à
☐ acquérir le concept mathématique
☐ résoudre un problème ou prouver un théorème
☐ établir les conditions minimales du concept
☐ autre : ________________________________
Observations :

j) Catégories émergentes (à préciser)

Section B – Étude d’un exercice

a) Utilisation du vocabulaire
 rigoureuse non rigoureuse
Observations :

b) Utilisation du symbolisme mathématiquement
 rigoureuse non rigoureuse
Observations :

c) Utilisation d’un ou de plusieurs exemples pour illustrer l’exercice
 oui non Si oui, quelles en sont les particularités? (rigueur, nature, cohérence, pertinence, autres observations) :

d) Utilisation d’un ou de plusieurs contrexemples
 oui non Si oui, quelles en sont les particularités? (rigueur, nature, cohérence, pertinence, autres observations) :

e) Position dans le chapitre
 au début intercalée à la fin
Observations:

f) Nature/rôle de l’exercice :
 encodage décodage autre (catégories émergentes, à préciser)

g) Pertinence et cohérence avec les définitions (s’il y a lieu)

h) Catégories émergentes (à préciser)

Section C – Étude d’un problème

a) Utilisation du vocabulaire
 rigoureuse non rigoureuse
Observations :

b) Utilisation du symbolisme mathématiquement
 rigoureuse non rigoureuse
Observations :

c) Utilisation d’un ou de plusieurs exemples pour illustrer le problème
 oui non Si oui, quelles en sont les particularités? (rigueur, nature, cohérence, pertinence, autres observations) :

d) Utilisation d’un ou de plusieurs contrexemples
 oui non Si oui, quelles en sont les particularités? (rigueur, nature, cohérence, pertinence, autres observations) :

e) Position dans le chapitre
 au début intercalée à la fin
Précision sur la position par rapport aux définitions et/ou à la théorie :

f) Contexte du problème
 réel réaliste fantaisiste purement mathématique

g) Nombre de solutions :
 une seule un nombre fini une infinité aucune

h) Adéquation des données :
 complètes superflues manquantes insuffisantes

i) Pertinence et cohérence avec les définitions (s’il y a lieu)

j) Position dans le chapitre
 au début intercalée à la fin

k) Catégories émergentes (à préciser)

ANNEXE 5

GRILLE UTILISÉE LORS DE LA PRÉANALYSE

PORTRAIT DU MATÉRIEL EN LIEN AVEC LA NOTATION EXPONENTIELLE

SECTION A – INFORMATIONS GÉNÉRALES SUR LE MANUEL ANALYSÉ

1. Nom du manuel	
2. Référence bibliographique	
3. Niveau scolaire	a. □ 5e année du primaire b. □ 6e année du primaire c. □ 1re année du secondaire d. □ 2e année du secondaire e. □ 3e année du secondaire

SECTION B – SÉLECTION DE L'ITEM ANALYSÉ

1. Identification de l'item	Chapitre : Page, numéro, titre *(selon les informations disponibles)*
2. Nature de l'item	a. ☐ définition *(remplir la section C)* b. ☐ exercice *(remplir la section D)* c. ☐ problème *(remplir la section E)* d. ☐ autre catégorie *(remplir la section F)*
3. Code d'identification de l'item	______________________________ *Coll. (R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) – ordre (p ou s) – niveau (5,6,1,2,3) – item (d,e,p ou a) – rang (1 à ∞)*

SECTION C – CARACTÉRISTIQUES DE LA DÉFINITION ANALYSÉE

1. TYPE DE DÉFINITION

a. □ en mots   b. □ symbolique   c. □ en mots et symbolique

Dans le cas d'une définition en mots, remplir la sous-section 2

Dans le cas d'une définition symbolique, remplir la sous-section 3

Dans le cas d'une définition à la fois en mots et symbolique, remplir les sous-sections 2 et 3

Remarque :

2. VOCABULAIRE

2.1 Dans le cas d'une définition en mots :

Utilisation de l'expression « multipliée par elle-même » (Baruk, 1995)

a. □ oui   b. □ non

Remarque :

2.2 Dans le cas d'une définition en mots :

Sens du vocabulaire utilisé (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

a. Sens technique, utilisation au sens technique :

b. Sens courant, utilisation au sens courant :

c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique :

d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant :

Remarque :

3. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

3.1 Dans le cas d'une définition symbolique :

Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. □ oui　　b. □ non　　c. □ sans objet

Remarque :

3.2 Dans le cas d'une définition symbolique :

Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

a. □ oui　　b. □ non　　c. □ sans objet

Remarque :

4. PRÉSENCE D'EXEMPLES OU DE CONTREXEMPLES (Wilson, 1990)

a. □ oui　　b. □ non

Dans le cas où « oui » est coché, remplir les sous-sections 4.1 à 4.4.

4.1 Nombre d'exemples pour illustrer la définition

_______ exemple(s)

4.2 Description de chaque exemple :

4.3 Nombre de contrexemples pour illustrer la définition

_______ contrexemple(s)

4.4 Description de chaque contrexemple :

Remarque :

5. NATURE DE LA DÉFINITION (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006)

a. ☐ zéro-définition b. ☐ définition générée par la preuve

Remarque :

6. FONCTION DE LA DÉFINITION (Vinner, 2002)

Une ou plusieurs cases peuvent être cochées

La définition

a) ☐ sert à acquérir le concept mathématique

b) ☐ sert à résoudre un problème ou à prouver un théorème

c) ☐ permet d'établir les conditions minimales d'un concept

d) ☐ est élégante d'un point de vue mathématique

e) ☐ est arbitraire et conventionnée

Remarque :

SECTION D – CARACTÉRISTIQUES DE L'EXERCICE ANALYSÉ

1. VOCABULAIRE (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

Sens du vocabulaire utilisé dans l'énoncé

a. Sens technique, utilisation au sens technique :

b. Sens courant, utilisation au sens courant :

c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique :

d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant :

Remarque :

2. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

2.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

2.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

b. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

3. PRÉSENCE D'EXEMPLES OU DE CONTREXEMPLES (Wilson, 1990)

a. oui b. non

Dans le cas où « oui » est coché, remplir les sous-sections 3.1 à 3.4.

3.1 Nombre d'exemples pour illustrer l'exercice

_______ exemple(s)

3.2 Description de chaque exemple :

3.3 Nombre de contrexemples pour illustrer l'exercice :

_______ contrexemple(s)

3.4 Description de chaque contrexemple

Remarque :

4. FONCTION DE L'EXERCICE (Perret, 1985; Roegiers, 1998*a* ; Van Hout, 1994)

a. encodage c. décodage

b. transcodage d. réduction d'expressions

Remarque :

SECTION E – CARACTÉRISTIQUES DU PROBLÈME ANALYSÉ

1. VOCABULAIRE (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

Sens du vocabulaire utilisé dans l'énoncé

a. Sens technique, utilisation au sens technique :

b. Sens courant, utilisation au sens courant :

c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique :

d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant :

Remarque :

2. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

2.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>position</u> des informations dans l'expression exponentielle

a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

2.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>grandeur relative</u> des informations dans l'expression exponentielle

a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

3. NATURE DU PROBLÈME (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Gouvernement du Québec, 1988)

3.1 Contexte du problème

a. ☐ contexte réel b. ☐ contexte réaliste

c. ☐ contexte fantaisiste d. ☐ contexte purement mathématique

Remarque :

3.2 Nombre de solutions

a. ☐ une solution b. ☐ un nombre fini de solutions

c. ☐ une infinité de solutions d. ☐ aucune solution

Remarque :

3.3 Adéquation des données

a. ☐ données complètes b. ☐ données superflues

c. ☐ données manquantes d. ☐ données insuffisantes

Remarque :

SECTION F – AUTRES CATÉGORIES

1. IDENTIFICATION DE LA CATÉGORIE ÉMERGENTE

a. □

description générale :

b. □

description générale :

c. □

description générale :

d. □

description générale :

SECTION G – DISPOSITION DES INFORMATIONS

Reproduction de la table des matières du manuel	Identification et répartition des items selon la structure de la table des matières

ANNEXE 6

LISTE DES MANUELS SCOLAIRES DU PRIMAIRE ET DU SECONDAIRE EXPLORÉS DANS LE CADRE DE L'ÉTUDE

Boucher, C., Marotte, L. et Coupal, M. (2007). *Intersection mathématique, 2e cycle du secondaire, 1re année. Manuel de l'élève A.* Montréal : Graficor.

Boucher, C., Marotte, L. et Coupal, M. (2007). *Intersection mathématique, 2e cycle du secondaire, 1re année. Manuel de l'élève B.* Montréal : Graficor.

Cadieux, R, Gendron, I. et Ledoux, A. (2005). *Panoram@th A. Mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève A, volume 1.* Montréal : Éditions CEC.

Cadieux, R, Gendron, I. et Ledoux, A. (2005). *Panoram@th A. Mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève A, volume 2.* Montréal : Éditions CEC.

Cadieux, R, Gendron, I. et Ledoux, A. (2006). *Panoram@th A. Mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève B, volume 1.* Montréal : Éditions CEC.

Cadieux, R, Gendron, I. et Ledoux, A. (2006). *Panoram@th A. Mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève B, volume 2.* Montréal : Éditions CEC.

Coupal, M. (2005). *À vos maths! Mathématiques, 1er cycle du secondaire. Manuel A.* Montréal : Graficor.

Coupal, M. (2005). *À vos maths! Mathématiques, 1er cycle du secondaire. Manuel B.* Montréal : Graficor.

Coupal, M. (2006). *À vos maths! Mathématiques, 1er cycle du secondaire. Manuel C.* Montréal : Graficor.

Coupal, M. (2006). *À vos maths! Mathématiques, 1er cycle du secondaire. Manuel D.* Montréal : Graficor.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2003). *Clicmaths, 3e cycle du primaire. Manuel de l'élève A, volume 1.* Montréal : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2003). *Clicmaths, 3e cycle du primaire. Manuel de l'élève A, volume 2.* Montréal : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2003). *Clicmaths, 3e cycle du primaire. Manuel de l'élève B, volume 1.* Montréal : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2003). *Clicmaths, 3e cycle du primaire. Manuel de l'élève B, volume 2.* Montréal : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2006). *Perspective mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève A, volume 1*. Laval : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2006). *Perspective mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève A, volume 2*. Laval : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2006). *Perspective mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève B, volume 1*. Laval : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2006). *Perspective mathématique, 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève B, volume 2*. Laval : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Ducharme, M. et Van Moorhem, A. (dir.) (2007). *Point de vue mathématique, 2e cycle du secondaire, 1re année. Manuel de l'élève, volume 1.* Laval : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Ducharme, M. et Van Moorhem, A. (dir.) (2007). *Point de vue mathématique, 2e cycle du secondaire, 1re année. Manuel de l'élève, volume 2.* Laval : Éditions Grand Duc.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel A, volume 1.* Montréal : Éditions CEC.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel A, volume 2.* Montréal : Éditions CEC.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel A, volume 3.* Montréal : Éditions CEC.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel A, volume 4.* Montréal : Éditions CEC.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel B, volume 1.* Montréal : Éditions CEC.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel B, volume 2.* Montréal : Éditions CEC.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel B, volume 3.* Montréal : Éditions CEC.

Lacasse, C., Delisle, C. et Bisson, C. (2004). *Presto. Mathématiques, 3e cycle du primaire. Manuel B, volume 4.* Montréal : Éditions CEC.

Ledoux, A. et Boivin, D. (2007). *Visions mathématiques, 1re année du 2e cycle du secondaire. Manuel de l'élève, volume 1.* Montréal : Éditions CEC.

Ledoux, A. et Boivin, D. (2007). *Visions mathématiques, 1re année du 2e cycle du secondaire. Manuel de l'élève, volume 2.* Montréal : Éditions CEC.

Lyons, M. et Lyons, R. (2005). *Défi mathématique 1, 3e cycle du primaire, Guide.* Montréal : Chenelière/McGraw-Hill.

Lyons, M. et Lyons, R. (2005). *Défi mathématique 2, 3e cycle du primaire. Manuel.* Montréal : Chenelière/McGraw-Hill.

ANNEXE 7

VERSION FINALE DE LA GRILLE D'ANALYSE

GRILLE D'ANALYSE
PORTRAIT DU MATÉRIEL EN LIEN AVEC LA NOTATION EXPONENTIELLE

SECTION A – INFORMATIONS GÉNÉRALES SUR LE MANUEL ANALYSÉ

1. Référence bibliographique	
2. Niveau scolaire	a. □ 5^{e} année du primaire b. □ 6^{e} année du primaire c. □ 1re année du secondaire d. □ 2^{e} année du secondaire e. □ 3^{e} année du secondaire

SECTION B – SÉLECTION DE L'ITEM ANALYSÉ

1. Identification de l'item	Chapitre ou section : Page, numéro, titre *(selon les informations disponibles)*
2. Nature de l'item	a. □ définition *(remplir la section C)* b. □ exercice *(remplir la section D)* c. □ problème *(remplir la section E)* d. □ autre nature *(remplir la section F)*
3. Code d'identification de l'item	______________________________ *Coll. (R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) – ordre (p ou s) – niveau (5,6,1,2,3) – item (d,e,p ou a) – rang (1 à ∞)*

SECTION C – CARACTÉRISTIQUES DE LA DÉFINITION ANALYSÉE

1. TYPE DE DÉFINITION

a. □ en mots b. □ symbolique c. □ en mots et symbolique

Dans le cas d'une définition en mots, remplir la sous-section 2

Dans le cas d'une définition symbolique, remplir la sous-section 3

Dans le cas d'une définition à la fois en mots et symbolique, remplir les sous-sections 2 et 3

Remarque :

2. VOCABULAIRE

2.1 Dans le cas d'une définition en mots :

utilisation de l'expression « multipliée par elle-même » (Baruk, 1995)

a. □ oui b. □ non

Remarque :

2.2 Dans le cas d’une définition en mots :

sens du vocabulaire utilisé (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

a. sens technique, utilisation au sens technique :

b. sens courant, utilisation au sens courant :

c. sens technique et courant, utilisation au sens technique :

d. sens technique et courant, utilisation au sens courant :

Remarque :

3. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

3.1 Dans le cas d’une définition symbolique :

utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>position</u> des informations dans l’expression exponentielle

a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

3.2 Dans le cas d’une définition symbolique :

utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>grandeur relative</u> des informations dans l’expression exponentielle

a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

4. PRÉSENCE D'EXEMPLES OU DE CONTREXEMPLES (Wilson, 1990)

a. ☐ oui b. ☐ non

Dans le cas où « oui » est coché, remplir les sous-sections 4.1 à 4.4.

4.1 Nombre d'exemples pour illustrer la définition

_______ exemple(s)

4.2 Observations et particularités :

4.3 Nombre de contrexemples pour illustrer la définition

_______ contrexemple(s)

4.4 Observations et particularités :

Remarque :

5. NATURE DE LA DÉFINITION (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006)

a. ☐ zéro-définition b. ☐ définition générée par la preuve

Remarque :

6. FONCTION DE LA DÉFINITION (Vinner, 2002)

Une ou plusieurs cases peuvent être cochées

La définition

a. ☐ sert à acquérir le concept mathématique

b. ☐ sert à résoudre un problème ou à prouver un théorème

c. ☐ permet d'établir les conditions minimales d'un concept

d. ☐ est élégante d'un point de vue mathématique

e. ☐ est arbitraire et conventionnée

Remarque :

SECTION D – CARACTÉRISTIQUES DE L'EXERCICE ANALYSÉ

1. VOCABULAIRE (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

Sens du vocabulaire utilisé dans l'énoncé

a. sens technique, utilisation au sens technique :

b. sens courant, utilisation au sens courant :

c. sens technique et courant, utilisation au sens technique :

d. sens technique et courant, utilisation au sens courant :

Remarque :

2. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

2.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

2.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

a. ☐ oui b. ☐ non c. ☐ sans objet

Remarque :

3. PRÉSENCE D’EXEMPLES OU DE CONTREXEMPLES (Wilson, 1990)

a. □ oui b. □ non

Dans le cas où « oui » est coché, remplir les sous-sections 3.1 à 3.4.

3.1 Nombre d’exemples pour illustrer l’exercice

_______ exemple(s)

3.2 Observations et particularités :

3.3 Nombre de contrexemples pour illustrer l’exercice :

_______ contrexemple(s)

3.4 Observations et particularités :

Remarque :

4. FONCTION DE L'EXERCICE

a. □ encodage

b. □ décodage

c. □ déduction d'une valeur manquante

d. □ transformation d'écriture

e. □ réduction

f. □ évaluation numérique

g. □ comparaison d'effet

h. □ définition de termes

i. □ conjecture et vérification

Remarque :

5. OBSERVATIONS ET PARTICULARITÉS DE L'EXERCICE

5.1 Nombre d'éléments :

5.2 Constitution des éléments :

5.3 Description de l'énoncé en lien avec les éléments :

5.4 Progression entre les éléments :

5.5 Variété des habiletés nécessaires pour la mise en pratique des éléments :

5.6 Symbolisme :

5.7 Autres :

Remarque :

SECTION E – CARACTÉRISTIQUES DU PROBLÈME ANALYSÉ

1. VOCABULAIRE (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

Sens du vocabulaire utilisé dans l’énoncé

a. sens technique, utilisation au sens technique :

b. sens courant, utilisation au sens courant :

c. sens technique et courant, utilisation au sens technique :

d. sens technique et courant, utilisation au sens courant :

Remarque :

2. SYMBOLISME (Pimm, 1987)

2.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>position</u> des informations dans l'expression exponentielle

a. □ oui b. □ non c. □ sans objet

Remarque :

2.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la <u>grandeur relative</u> des informations dans l'expression exponentielle

a. □ oui b. □ non c. □ sans objet

Remarque :

3. NATURE DU PROBLÈME (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Gouvernement du Québec, 1988)

3.1 Contexte du problème

a. □ contexte réel b. □ contexte réaliste

c. □ contexte fantaisiste d. □ contexte purement mathématique

Remarque :

3.2 Nombre de solutions

a. □ une solution b. □ un nombre fini de solutions

c. □ une infinité de solutions d. □ aucune solution

Remarque :

3.3 Adéquation des données

a. □ données complètes b. □ données superflues

c. □ données manquantes d. □ données insuffisantes

Remarque :

4. OBSERVATIONS ET PARTICULARITÉS DU PROBLÈME

Remarque :

SECTION F – ITEM D’UNE AUTRE NATURE

1. INFORMATIONS SUR L’ITEM D’UNE AUTRE NATURE

a. Nom donné à la nature émergente de l’item:

b. Description générale :

SECTION G – DISPOSITION DES INFORMATIONS

Reproduction de la table des matières du manuel	Identification et répartition des items selon la structure de la table des matières

ANNEXE 8

VERSION FINALE DU GUIDE DE CODIFICATION

GUIDE DE CODIFICATION DE LA GRILLE D'ANALYSE PORTRAIT DU MATÉRIEL EN LIEN AVEC LA NOTATION EXPOTIELLE

DÉFINITIONS IMPORTANTES

Avant de procéder à la description des différentes sections de la grille, il est nécessaire de définir l'emploi de quelques mots qui auront un sens particulier dans le cadre de l'étude.

- *Grille d'analyse*. La grille d'analyse correspond à l'outil de collecte de données. Elle est constituée de sept sections qui devront être reproduites le nombre de fois nécessaire lors de la collecte de données, selon les informations demandées.
- *Section*. La section met en évidence un thème général qui sera objet de l'étude. Elle partitionne la grille afin de la structurer et d'organiser l'information en grandes unités de sens. La grille comporte sept sections (informations générales sur le manuel analysé, sélection de l'item analysé, caractéristiques de la définition analysée, caractéristiques de l'exercice analysé, caractéristiques du problème analysé, item d'une autre nature et disposition des informations).
- *Catégorie*. La catégorie correspond à des aspects particuliers qui seront analysés pour chacune des sections. Elles sont organisées en sous-sections dans chacune des sections. Certaines catégories sont communes à plusieurs sections, alors que d'autres sont exclusives à une seule.
- *Indicateur*. Chacune des catégories sera analysée à l'aide d'indicateurs. Ces indicateurs viennent qualifier la catégorie étudiée. Les indicateurs peuvent être prédéfinis : dans ce cas, la personne effectuant la collecte de données cochera celui qui répond adéquatement au questionnement soulevé dans la catégorie. Les indicateurs peuvent aussi correspondre à des observations ouvertes : dans ce cas, la personne effectuant la collecte de données inscrira à l'endroit prévu les informations demandées.
- *... appuyé sur des études*. Certaines sections, certaines catégories et certains indicateurs ont été définis à l'aide de critères issus de la recherche. Ils s'appuient donc sur des études. Dans ce cas, l'auteur de l'étude est indiqué, ainsi que l'année de publication, de manière classique (auteur, année de publication).
- *... émergent*. D'autres sections, catégories et indicateurs ne viennent pas explicitement d'études, même s'ils en sont inspirés. Dans ce cas, le qualificatif « émergent » leur est attribué. Aucune mention particulière ne leur est associée.
- *Item*. Un item correspond à une unité qui sera cernée dans le manuel scolaire et qui sera analysée dans le cadre de l'étude. La manière de délimiter, d'identifier et de codifier un item est définie de manière plus détaillée à la section B.

SECTION A – INFORMATIONS GÉNÉRALES SUR LE MANUEL ANALYSÉ

Cette section est remplie une seule fois pour chacun des manuels analysés.

1. **Référence bibliographique**

   La référence bibliographique est constituée de l'auteur ou des auteurs, de l'année de publication, du titre complet du manuel, des tomes (s'il y a lieu), de la ville et de la maison d'édition, comme spécifié dans le *Guide de présentation des documents écrits pour les travaux, essais, mémoires et thèses* de la Faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke (4^e^ édition, 2009).

2. **Niveau scolaire**

   Le niveau scolaire est celui qui est explicitement annoncé par l'auteur ou les auteurs dans la collection en vue de son utilisation effective avec des élèves. Les différents manuels et volumes qui composent la collection sont précisés à côté du niveau scolaire identifié, lorsque nécessaire, s'il y a lieu.

   a. 5^e^ année du primaire

   b. 6^e^ année du primaire

   c. 1^re^ année du secondaire

   d. 2^e^ année du secondaire

   e. 3^e^ année du secondaire

SECTION B – INFORMATIONS GÉNÉRALES SUR L'ITEM ANALYSÉ

Cette section est remplie pour chacun des items analysés

1. Identification de l'item

L'identification de l'item se fait selon le modèle proposé par l'auteur ou les auteurs du manuel. Il s'agit minimalement du chapitre ou d'une section spécifique (comme un glossaire) et de la page à laquelle se retrouve l'item, mais peut être précisé par un numéro, une lettre, un titre ou une combinaison de ces éléments, selon les informations disponibles.

2. Nature de l'item

Quatre choix de réponses mutuellement exclusifs sont possibles lors de la précision de la nature de l'item : définition, exercice, problème ou autre nature.

a. Définition

Est considéré comme une définition tout item qui donne une description d'un concept mathématique (Wilson, 1990). Cet énoncé tente de donner accès à « la connaissance ou à la possibilité de reconnaissance de ce qui est défini » (Baruk, 1995) et présente les fondements et/ou les propriétés mathématiques du concept (Legendre, 2005; Ouvrier-Buffet, 2006). La définition sert à délimiter la signification d'un mot, d'une expression ou d'un symbole, explicitement en lien avec la notation exponentielle, objet de notre étude, afin d'éliminer les nombreux cas où celle-ci est exploitée plutôt que présentée pour elle-même. L'item considéré comme une définition est analysé à partir des catégories présentées à la section C.

b. Exercice

Est considéré comme un exercice tout item qui présente une activité d'application, d'entrainement, de pratique servant à développer ou à entretenir une habileté. La résolution de l'exercice est machinale et ponctuelle (Legendre, 2005). Lorsqu'il effectue un exercice, l'élève est en mesure de cibler et de mobiliser rapidement un moyen ou une méthode à mettre en œuvre (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Gouvernement du Québec, 1988; Roegiers, 1998*a*). Dans le cadre de notre étude, l'exercice doit nécessiter explicitement le recours à la notation exponentielle, c'est-à-dire qu'il vise l'acquisition de connaissances ou le développement d'habiletés faisant appel à celle-ci et non pas son utilisation dans un autre contexte. L'item considéré comme un exercice est analysé à partir des catégories présentées à la section D.

c. Problème

Est considéré comme un problème tout item qui présente une activité complexe où une recherche réelle doit être mise en œuvre pour déterminer un moyen d'accomplir la situation proposée. Le problème doit activer des connaissances de nature conditionnelle plutôt que des connaissances de nature seulement déclarative ou procédurale (Tardif, 1992), qui ne mènent pas nécessairement à l'énonciation directe d'une ou de solutions à celui-ci. L'élève doit, pour résoudre le problème, puiser réellement dans ses ressources, mobiliser les connaissances déjà acquises et les habiletés développées, tout en les combinant adéquatement afin d'y arriver (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Gouvernement du Québec, 1988; Roegiers, 1998*a*). Dans le cadre de notre étude, le problème doit nécessiter explicitement le recours à la notation exponentielle, c'est-à-dire qu'il exploite la compréhension de celle-ci afin de résoudre la situation proposée. L'item considéré comme un problème est analysé à partir des catégories présentées à la section E.

d. Autre nature

Est considéré comme faisant partie d'une autre nature tout item traitant explicitement de la notation exponentielle et qui ne peut explicitement être introduit dans l'une des trois natures précédentes. Une ou des natures émergentes sont ainsi déterminées et décrites succinctement à la section F.

3. Code d'identification de l'item

Afin de faciliter l'organisation des nombreuses données qui seront à traiter, un code d'identification est mis en place. Cette procédure permettra un traitement statistique ultérieur. Celui-ci est consigné en en-tête de page dans l'espace prévue à cet effet aux sections C, D, E et F sur toutes les grilles remplies pour un item donné, diminuant ainsi le risque d'erreur lors de la collecte de données. Ce code comprend cinq types d'information : 1) le nom de la collection; 2) l'ordre d'enseignement; 3) le niveau scolaire; 4) le type d'item étudié et 5) le rang de l'item dans la collection.

Collection − Le premier élément du code est une lettre majuscule qui correspond à une collection étudiée. Les lettres utilisées sont les neuf dernières de l'alphabet usuel, afin d'éviter toute confusion avec l'identification des différentes sections de la grille qui, elles, utilisent les sept premières. Le codage suivant est utilisé :

R : *Clicmaths* (Guay, Hamel et Lemay, 2003)

S : *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005)

T : *Presto* (Lacasse, Delisle et Bisson, 2004)

U : *À vos maths!* (Coupal, 2005)

V : *Panoram@th* (Cadieux, Gendron et Ledoux, 2005, 2006)

W : *Perspective* (Guay, Hamel et Lemay, 2006)

X : *Intersection* (Boucher, Marotte et Coupal, 2007)

Y : *Point de vue* (Guay *et al.*, 2007)

Z : *Visions* (Ledoux et Boivin, 2007)

Ordre − Le deuxième élément du code correspond à l'ordre d'enseignement auquel s'adresse le manuel. Les lettres « p » ou « s », en minuscule, sont utilisées selon que la collection étudiée en est une s'adressant aux élèves du primaire ou du secondaire.

p : primaire

s : secondaire

Niveau − Le troisième élément du code correspond au niveau scolaire du manuel dans lequel se retrouve l'item étudié.

5 : 5^{e} année du primaire

6 : 6^{e} année du primaire

1 : 1re année du secondaire

2 : 2^{e} année du secondaire

3 : 3^{e} année du secondaire

Item − Le quatrième élément est une lettre en minuscule qui identifie la nature de l'item étudié.

d : définition

e : exercice

p : problème

a : autre catégorie

Rang − Le cinquième et dernier élément correspond au rang de l'item étudié. Les rangs sont attribués de 1 jusqu'au nombre total d'items étudiés dans le manuel, selon leur ordre d'apparition chronologique.

À titre d'exemple − Le code d'identification de l'item « Xs3p45 » fait référence à la collection *Intersection* (Boucher, Marotte et Coupal, 2007), au manuel de secondaire 3. Il s'agit d'un problème et il est le 45^{e} item explicitement en lien avec la notation exponentielle présent dans la collection selon l'ordre d'apparition chronologique dans le manuel.

SECTION C – CARACTÉRISTIQUES DE LA DÉFINITION ANALYSÉE

Cette section est remplie pour chaque item ayant été identifié comme une définition à la section B.

À la suite de chaque indicateur, une section « remarque » est présente. Celle-ci peut contenir toutes les observations et toutes les informations permettant de préciser les indicateurs cochés, dans le cas où les éléments précisés par la grille ne permettent pas de l'encoder dans son entièreté.

1. Type de définition

a. En mots

Une définition est considérée comme en mots si elle est rédigée exclusivement avec le vocabulaire usuel de la langue française. La définition suivante est en mots : « Notation exponentielle : Représentation d'un nombre réel à l'aide d'exposants, que ce soit en base dix ou en toute autre base, suite à une décomposition de ce nombre en facteurs. » (de Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier, 1996). Dans le cas d'une définition en mots, la sous-section 2 doit être remplie.

b. Symbolique

Une définition est considérée comme symbolique si elle est rédigée exclusivement à l'aide de symboles mathématiques. La définition suivante est symbolique : « Si $x \neq 0$ et $n \in N^*$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ » (Lixi et Gourion, 1988). Dans le cas d'une définition symbolique, la sous-section 3 doit être remplie.

c. En mots et symbolique

Une définition est considérée comme en mots et symbolique si le vocabulaire usuel de la langue française et des symboles mathématiques sont présents ensemble dans la définition. La définition suivante est à la fois en mots et symbolique : « Base : (Opération) Nombre b qui est pris n fois comme facteur dans une multiplication.

$\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\,fois} = b^n$ » (Mathieu, de Champlain et Tessier, 1990).

Dans le cas d'une définition à la fois en mots et symbolique, les sous-sections 2 et 3 doivent être remplies.

2. Vocabulaire

2.1 Utilisation de l'expression « multipliée par elle-même »

a. Oui

Dans le cas d'une définition en mots, l'indicateur « oui » est coché si celle-ci contient l'expression « multipliée par elle-même » (Baruk, 1995) dans son énoncé ou toute autre forme de déclinaisons découlant des différentes structures de phrases possibles (multiplié par *lui*-même, multiplié *le facteur* par lui-même, etc.).

b. Non

Dans le cas d'une définition en mots, l'indicateur « non » est coché si celle-ci ne contient pas l'expression « multipliée par elle-même » (Baruk, 1995) dans son énoncé ou toute autre forme de déclinaisons découlant des différentes structures de phrases possibles.

2.2 Sens du vocabulaire utilisé (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

Les mots à analyser dans la définition sont les noms, les adjectifs et les verbes. Pour les verbes, l'infinitif est indiqué entre parenthèses. Les indicateurs sont mutuellement exclusifs, ce qui implique qu'un mot donné ne peut pas se retrouver vis-à-vis de deux indicateurs, à moins que celui-ci soit utilisé deux fois, mais avec des sens différents (p. ex., le mot « base » qui serait utilisé une première fois dans un sens courant, puis une autre fois dans un sens technique, dans une même définition).

a. Sens technique, utilisation au sens technique

Dans le cas d'une définition en mots, les mots possédant exclusivement un sens mathématique sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens technique, utilisation au sens technique ».

b. Sens courant, utilisation au sens courant

Dans le cas d'une définition en mots, les mots possédant exclusivement un sens commun dans le langage quotidien sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens courant, utilisation au sens courant ».

c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique

Dans le cas d'une définition en mots, les mots possédant à la fois un sens mathématique et un sens commun dans le langage quotidien, mais qui sont utilisés dans un sens mathématique dans le contexte, sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens technique et courant, utilisation au sens technique ».

d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant

Dans le cas d'une définition en mots, les mots possédant à la fois un sens mathématique et un sens commun dans le langage quotidien, mais qui sont utilisés dans un sens commun dans le contexte, sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens technique et courant, utilisation au sens courant ».

L'exemple suivant sert à illustrer la méthode de répartition des différents mots.

Définition : « On obtient le **cube** d'un nombre en effectuant le produit de trois facteurs égaux à ce nombre. »[13]

a. Sens technique, utilisation au sens technique : nombre, trois.
b. Sens courant, utilisation au sens courant : obtient (obtenir), effectuant (effectuer).
c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique : cube, produit, facteurs, égaux.
d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant : -----

3. Symbolisme (Pimm, 1987)

3.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. L'indicateur « oui » est coché si, dans toutes les expressions exponentielles présentes, l'exposant est toujours situé adéquatement par rapport à la base, c'est-à-dire en haut à droite.

b. L'indicateur « non » est coché si, dans une des expressions exponentielles présentes, l'exposant n'est pas situé adéquatement par rapport à la base, c'est-à-dire qu'il ne se retrouve pas en haut à droite.

c. L'indicateur « sans objet » est coché s'il y a absence d'expression exponentielle dans la définition.

3.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

a. L'indicateur « oui » est coché si, dans toutes les expressions exponentielles présentes, la taille de l'exposant est légèrement inférieure à celle de la base.

b. L'indicateur « non » est coché si, dans une des expressions exponentielles présentes, la taille de l'exposant n'est pas légèrement inférieure à celle de la base.

c. L'indicateur « sans objet » est coché s'il y a absence d'expressions exponentielles dans la définition

4. Présence d'exemples ou de contrexemples (Wilson, 1990)

a. L'indicateur « oui » est coché si au moins un exemple ou au moins un contrexemple est présent à la suite de la définition. Dans ce cas, les sous-sections 4.1 à 4.4 inclusivement doivent être remplies.

b. L'indicateur « non » est coché si aucun exemple ni contrexemple n'est présent à la suite de la définition. Dans ce cas, les sous-sections 4.1 à 4.4 inclusivement ne doivent pas être remplies.

---

[13] Cet exemple est tiré d'un des items analysés lors de la collecte de données. Afin de ne pas influencer le traitement des données, aucune information relative à son origine ne sera fournie dans le guide.

4.1 Nombre d’exemples pour illustrer la définition

Le nombre d’exemples est un nombre entier compris entre 0 et l’infini et correspond au dénombrement de la quantité d’exemples présents à la suite de la définition.

4.2 Observations et particularités

Chaque exemple est tout d’abord noté. Dans un premier temps, l’utilisation adéquate du symbolisme, en lien avec la position et la grandeur relative des informations, est vérifiée (Pimm, 1987), si cela est pertinent. Dans un deuxième temps, des observations générales sont notées (p. ex., exemples numériques ou algébriques, choix des bases, choix des exposants, démarche explicite ou non, choix relatifs au symbolisme mathématique en général, etc.). Dans un troisième temps, des commentaires généraux sur la pertinence et la cohérence entre eux des différents exemples présents sont précisés (p. ex., choix dans l’ordre de présentation, si tous les exemples partagent des caractéristiques semblables ou non, réinvestissement ou non d’apprentissages précédents, etc.). Dans un quatrième temps, des informations sur la cohérence entre l’exemple et la définition qu’elle illustre sont notées.

4.3 Nombre de contrexemples pour illustrer la définition

Le nombre de contrexemples est un nombre entier compris entre 0 et l’infini et correspond au dénombrement de la quantité de contrexemples présents à la suite de la définition.

4.4 Observations et particularités

Chaque contrexemple est tout d’abord noté. Dans un premier temps, l’utilisation adéquate du symbolisme, en lien avec la position et la grandeur relative des informations, est vérifiée (Pimm, 1987), si cela est pertinent. Dans un deuxième temps, des observations générales sont notées (p. ex., contrexemples numériques ou algébriques, choix des bases, choix des exposants, démarche explicite ou non, choix relatifs au symbolisme mathématique en général, etc.). Dans un troisième temps, des commentaires généraux sur la pertinence et la cohérence entre eux des différents contrexemples présents sont précisés (p. ex., choix dans l’ordre de présentation, si tous les contrexemples partagent des caractéristiques semblables ou non, réinvestissement ou non d’apprentissages précédents, etc.). Dans un quatrième temps, des informations sur la cohérence entre le contrexemple et la définition qu’elle illustre sont notées.

5. Nature de la définition (Lakatos, 1984; Ouvrier-Buffet, 2006)

a. Zéro-définition

Une définition est considérée comme une zéro-définition : 1) si elle a une fonction de dénomination (donner un nom à un objet mathématique) ou 2) si elle circonscrit le principe fondateur d’un concept mathématique. La définition suivante est une zéro-définition à cause d’une fonction de dénomination : « Exponentiation : Opération consistant à affecter un exposant à une base afin d’obtenir une puissance. » (Dufour, 2011). La définition suivante est une zéro-définition, car elle circonscrit le principe fondateur de la notation exponentielle :

> Notation exponentielle − Façon d'exprimer un nombre, appelé *puissance*, en utilisant une base affectée d'un exposant. La notation exponentielle se présente sous la forme base$^{\text{exposant}}$ = puissance. Pour une base a et un exposant entier $n > 1$, l'exposant n indique le nombre de fois que la base a est *multipliée par elle-même* (sic).
>
> $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$ (Dufour, 2011, p. 168)

Ainsi, dans le deuxième cas, c'est l'idée originale de codification d'une suite multiplicative d'un même facteur qui crée le concept. Cette nature de définition explique l'existence des exposants naturels plus grands que 1 dans l'écriture symbolique d'une expression exponentielle.

b. Définition générée par la preuve

Une définition est considérée comme générée par la preuve si elle permet d'exposer l'extension du sens mathématique de la notation exponentielle aux exposants un, zéro, nombres entiers négatifs, nombres fractionnaires, etc., dépassant ainsi le concept original de codification d'une suite multiplicative d'un même facteur. La définition suivante est considérée comme une définition générée par la preuve : « Si $x > 0, p \in Z$ et $q \in N^*$, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ » (Lixi et Gourion, 1988).

6. **Fonction de la définition** (Vinner, 2002)

Pour une même définition, il est possible qu'aucun, un, deux, trois, quatre ou cinq des indicateurs soient cochés.

La définition peut servir à différentes fonctions, comme celles identifiées par Vinner (2002) :

a. Sert à acquérir le concept mathématique

Cet indicateur est coché si la définition est le premier élément explicatif d'un chapitre ou d'une section de chapitre en lien avec l'acquisition d'une nouvelle notion relative à la notation exponentielle.

b. Sert à résoudre un problème ou à prouver un théorème

Cet indicateur est coché si la définition est présentée dans le contexte d'un problème à résoudre ou lors de la démonstration d'un théorème.

c. Permet d'établir les conditions minimales d'un concept

Cet indicateur est coché si la définition ne contient pas d'éléments qui peuvent être démontrés mathématiquement à partir d'autres éléments de celle-ci.

d. Est élégante d'un point de vue mathématique

Cet indicateur est coché si la définition exprime d'une manière synthétisée et conceptuellement juste la notion.

e. Est arbitraire et conventionnée

Cet indicateur est coché s'il y a une mention explicite, du fait que la définition est arbitraire, ou encore conventionnée qui est présente avec l'énoncé.

SECTION D – CARACTÉRISTIQUES DE L’EXERCICE ANALYSÉ

Cette section est remplie pour chaque item ayant été identifié comme un exercice à la section B.

À la suite de chaque indicateur, une section « remarque » est présente. Celle-ci peut contenir toutes les observations et toutes les informations permettant de préciser les indicateurs cochés, dans le cas où les éléments précisés par la grille ne permettent pas de l’encoder dans son entièreté.

1. Vocabulaire

Sens du vocabulaire utilisé (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

Les mots à analyser dans l’énoncé de l’exercice sont les noms, les adjectifs et les verbes. Pour les verbes, l’infinitif est indiqué entre parenthèses. Les indicateurs sont mutuellement exclusifs, ce qui implique qu’un mot donné ne peut pas se retrouver vis-à-vis de deux indicateurs, à moins que celui-ci soit utilisé deux fois, mais avec des sens différents (p. ex., le mot « base » qui serait utilisé une première fois dans un sens courant, puis une autre fois dans un sens technique, dans un même énoncé).

a. Sens technique, utilisation au sens technique

Dans l’énoncé de l’exercice, les mots possédant exclusivement un sens mathématique sont énumérés vis-à-vis de l’indicateur « sens technique, utilisation au sens technique ».

b. Sens courant, utilisation au sens courant

Dans l’énoncé de l’exercice, les mots possédant exclusivement un sens commun dans le langage quotidien sont énumérés vis-à-vis de l’indicateur « sens courant, utilisation au sens courant ».

c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique

Dans l’énoncé de l’exercice, les mots possédant à la fois un sens mathématique et un sens commun dans le langage quotidien, mais qui sont utilisés dans un sens mathématique dans le contexte, sont énumérés vis-à-vis de l’indicateur « sens technique et courant, utilisation au sens technique ».

d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant

Dans l’énoncé de l’exercice, les mots possédant à la fois un sens mathématique et un sens commun dans le langage quotidien, mais qui sont utilisés dans un sens commun dans le contexte, sont énumérés vis-à-vis de l’indicateur « sens technique et courant, utilisation au sens courant ».

L’exemple suivant sert à illustrer la méthode de répartition des différents mots.

Énoncé de l'exercice : « Écris les expressions suivantes à l'aide d'un radical, puis évalue-les. S'il y a lieu, arrondis au centième. »[14]

a. Sens technique, utilisation au sens technique : centième.
b. Sens courant, utilisation au sens courant : écris (écrire), suivantes.
c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique : expressions, radical, évalue (évaluer), arrondis (arrondir).
d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant : -----

2. Symbolisme (Pimm, 1987)

2.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. L'indicateur « oui » est coché si, dans toutes les expressions exponentielles présentes, l'exposant est toujours situé adéquatement par rapport à la base, c'est-à-dire en haut à droite.

b. L'indicateur « non » est coché si, dans une des expressions exponentielles présentes, l'exposant n'est pas situé adéquatement par rapport à la base, c'est-à-dire qu'il ne se retrouve pas en haut à droite.

c. L'indicateur « sans objet » est coché s'il y a absence d'expression exponentielle dans l'ensemble de l'exercice

2.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

a. L'indicateur « oui » est coché si, dans toutes les expressions exponentielles présentes, la taille de l'exposant est légèrement inférieure à celle de la base.

b. L'indicateur « non » est coché si, dans une des expressions exponentielles présentes, la taille de l'exposant n'est pas légèrement inférieure à celle de la base.

c. L'indicateur « sans objet » est coché s'il y a absence d'expression exponentielle dans l'ensemble de l'exercice

3 Présence d'exemples ou de contrexemples (Wilson, 1990)

a. L'indicateur « oui » est coché si au moins un exemple ou au moins un contrexemple est présent à la suite de l'énoncé de l'exercice. Dans ce cas, les sous-sections 3.1 à 3.4 inclusivement doivent être remplies.

---

[14] Cet exemple est tiré d'un des items analysés lors de la collecte de données. Afin de ne pas influencer le traitement des données, aucune information relative à son origine ne sera fournie dans le guide.

b. L’indicateur « non » est coché si aucun exemple ni contrexemple n’est présent à la suite de l’énoncé de l’exercice. Dans ce cas, les sous-sections 3.1 à 3.4 inclusivement ne doivent pas être remplies.

3.1 Nombre d’exemples pour illustrer l’exercice

Le nombre d’exemples est un nombre entier compris entre 0 et l’infini et correspond au dénombrement de la quantité d’exemples présents à la suite de l’énoncé de l’exercice.

3.2 Observations et particularités

Chaque exemple est tout d’abord noté. Dans un premier temps, l’utilisation adéquate du symbolisme, en lien avec la position et la grandeur relative des informations, est vérifiée (Pimm, 1987), si cela est pertinent. Dans un deuxième temps, des observations générales sont notées (p. ex., exemples numériques ou algébriques, choix des bases, choix des exposants, démarche explicite ou non, choix relatifs au symbolisme mathématique en général, etc.). Dans un troisième temps, des commentaires généraux sur la pertinence et la cohérence entre eux des différents exemples présents sont précisés (p. ex., choix dans l’ordre de présentation, si tous les exemples partagent des caractéristiques semblables ou non, réinvestissement ou non d’apprentissages précédents, etc.). Dans un quatrième temps, des informations sur la cohérence entre l’exemple et l’exercice qu’il illustre sont notées.

3.3 Nombre de contrexemples pour illustrer l’exercice

Le nombre de contrexemples est un nombre entier compris entre 0 et l’infini et correspond au dénombrement de la quantité de contrexemples présents à la suite de l’énoncé de l’exercice.

3.4 Observations et particularités

Chaque contrexemple est tout d’abord noté. Dans un premier temps, l’utilisation adéquate du symbolisme, en lien avec la position et la grandeur relative des informations, est vérifiée (Pimm, 1987), si cela est pertinent. Dans un deuxième temps, des observations générales sont notées (p. ex., contrexemples numériques ou algébriques, choix des bases, choix des exposants, démarche explicite ou non, choix relatifs au symbolisme mathématique en général, etc.). Dans un troisième temps, des commentaires généraux sur la pertinence et la cohérence entre eux des différents contrexemples présents sont précisés (p. ex., choix dans l’ordre de présentation, si tous les contrexemples partagent des caractéristiques semblables ou non, réinvestissement ou non d’apprentissages précédents, etc.). Dans un quatrième temps, des informations sur la cohérence entre le contrexemple et l’exercice qu’il illustre sont notées.

4. Fonction de l'exercice

Dans cette sous-section, les deux premiers indicateurs s'appuient sur les principes d'encodage et de décodage en numération (Perret, 1985; Roegiers, 1998*a*; Van Hout, 1994). Les indicateurs qui suivent ont émergé de la pré-expérimentation et de la collecte de données. Il est à noter que les indicateurs ne sont pas mutuellement exclusifs : il se peut donc que certains exercices aient plus d'un indicateur coché pour déterminer leur fonction.

a. Encodage

Un exercice est considéré comme de l'encodage s'il sert à symboliser une expression de manière réduite (sous la forme $\text{base}^{\text{exposant}}$), sans nécessairement mener à énoncer la puissance, dans le cas d'une expression numérique. Demander à l'élève d'écrire sous sa forme exponentielle l'expression 6x6x6x6 (6^4) ou encore de passer d'une écriture en mots à une écriture symbolique (par exemple, écrire 8 exposant 3 ou encore 12 au carré, en notation exponentielle) sont considérés comme des exercices d'encodage.

b. Décodage

Un exercice est considéré comme du décodage s'il sert à donner l'expression développée d'une expression $\text{base}^{\text{exposant}}$, menant ou non à l'énonciation de la puissance dans le cas d'une expression numérique. Demander à l'élève d'écrire sous sa forme développée l'expression exponentielle 6^4 (6x6x6x6) est considéré comme un exercice de décodage.

c. Déduction d'une valeur manquante

Un exercice est considéré comme de la déduction d'une valeur manquante si, connaissant deux des trois valeurs numériques dans une expression de type « $\text{base}^{\text{exposant}}$ = puissance », on cherche à connaitre la troisième valeur. Demander à l'élève quelle est la 8e puissance de 5 ou bien de déterminer quelle est la valeur de x qui permet à l'expression $4^2 = 4^{-1} \times 4^x$ d'être vraie sont considérés comme des exercices de déduction d'une valeur manquante.[15]

d. Transformation d'écriture

Un exercice est considéré comme de la transformation d'écriture si celui-ci demande de transformer un nombre donné ou une expression donnée sous une autre forme. Demander d'écrire un nombre décimal sous sa forme exponentielle ou demander d'écrire une expression en notation radicale sous une forme équivalente contenant plutôt des exposants fractionnaires sont considérés comme des exercices de transformation d'écriture.[16]

[15] Cet exemple est tiré d'un des items analysés lors de la collecte de données. Afin de ne pas influencer le traitement des données, aucune information relative à son origine ne sera fournie dans le guide.

[16] Cet exemple est tiré d'un des items analysés lors de la collecte de données. Afin de ne pas influencer le traitement des données, aucune information relative à son origine ne sera fournie dans le guide.

e. Réduction

Un exercice est considéré comme de la réduction s'il sert à appliquer les propriétés des exposants lors d'opérations afin de simplifier une expression numérique ou algébrique donnée. Demander à l'élève de réduire l'expression $\frac{a^2b^2a^3}{b}$ en a^5b est un exercice de réduction.[17]

f. Évaluation numérique d'une expression algébrique

Un exercice est considéré comme de l'évaluation numérique si l'objectif visé est de déterminer la valeur numérique d'une expression algébrique selon des valeurs proposées pour chacune des variables présentes dans celle-ci. Demander à l'élève d'évaluer l'expression $\sqrt[3]{a^2}$ sachant que $a = 2$ est considéré comme un exercice d'évaluation numérique.[18]

g. Comparaison d'effet

Un exercice est considéré comme de la comparaison d'effet si l'objectif est de voir l'impact de nombres et de symboles particuliers sur la valeur de la puissance. L'effet des grandeurs relatives des bases et des exposants sur la puissance (p.ex., en les interchangeant dans des expressions écrites en notation exponentielle), l'effet sur la puissance d'une base négative avec des exposants pairs ou impairs ou encore le rôle des parenthèses dans une expression écrite en notation exponentielle sont considérés comme des exercices de comparaison d'écriture.

h. Définition de termes

Un exercice est considéré comme de la définition de termes s'il est demandé à l'élève de définir des termes en lien avec la notation exponentielle. Demander à l'élève de définir dans ses mots ce que veut dire le terme « puissance » est considéré comme un exercice de définition de termes.

i. Conjecture et vérification

Un exercice est considéré comme de la conjecture et de la vérification si l'objectif de celui-ci est de faire énoncer une conjecture par les élèves ou encore de faire vérifier une conjecture énoncée dans l'exercice. Demander à l'élève d'énoncer une conjecture en lien avec l'effet de l'utilisation des parenthèses ou non lorsqu'un signe négatif précède la base ou encore demander à l'élève de valider que $(m^a)^b = m^{ab}$sont considérés comme des exercices de conjecture et vérification.

---

[17] Cet exemple est tiré d'un des items analysés lors de la collecte de données. Afin de ne pas influencer le traitement des données, aucune information relative à son origine ne sera fournie dans le guide.

[18] Cet exemple est tiré d'un des items analysés lors de la collecte de données. Afin de ne pas influencer le traitement des données, aucune information relative à son origine ne sera fournie dans le guide.

5. Observations et particularités de l'exercice

Dans cette sous-section, plusieurs indicateurs permettront des observations et des particularités sur les exercices proposés.

5.1 Nombre d'éléments :

L'indicateur « nombre d'éléments » correspond au dénombrement des tâches a), b), c), d), etc. qui composent l'exercice.

5.2 Constitution des éléments :

L'indicateur « constitution des éléments » correspond au fait que les éléments de l'exercice sont constitués de valeurs numériques, d'expressions algébriques ou d'un mélange des deux. Dans le cas de valeurs numériques, l'ordre de grandeur et le type de nombres utilisé sont précisés. Dans le cas d'expressions algébriques, la variété ou non des lettres employées est précisée. Des indications sur les valeurs obtenues dans les réponses finales (ordre de grandeur, type de nombre, etc.) sont également précisées, s'il y a lieu.

5.3 Description de l'énoncé en lien avec les éléments :

L'indicateur « description de l'énoncé en lien avec les éléments » permet d'observer si l'énoncé précise de manière implicite ou explicite ce qui est attendu de l'élève. Il permet aussi d'établir si l'énoncé est pertinent et réaliste par rapport aux différents éléments de l'exercice.

5.4 Progression entre les éléments :

L'indicateur « progression entre les éléments » permet d'observer s'il y a une progression ou non sur le plan de la difficulté relative des différents éléments de l'exercice. Une explication précise explique en quoi il est possible d'affirmer la progression ou non.

5.5 Variété des habiletés nécessaires pour la mise en pratique des éléments :

L'indicateur « variété des habiletés nécessaires pour la mise en pratique des éléments » sert à vérifier si l'utilisation d'une seule propriété est nécessaire pour résoudre tous les éléments de l'exercice, ou encore deux, ou plusieurs. Dans le cas où plusieurs propriétés sont nécessaires, le fait que les différentes propriétés à utiliser soient mélangées ou non est précisé.

5.6 Symbolisme :

L'indicateur « symbolisme » décrit les particularités en lien avec l'utilisation du symbolisme (p. ex., la présence de x comme variable en même temps que x pour représenter une multiplication).

5.7 Autres :

L'indicateur « autres » est utilisé pour présenter des observations ou des particularités qui ne sont pas intégrables dans l'un des indicateurs précédents.

SECTION E – CARACTÉRISTIQUES DU PROBLÈME ANALYSÉ

Cette section est remplie pour chaque item ayant été identifié comme un problème à la section B.

À la suite de chaque indicateur, une section « remarque » est présente. Celle-ci peut contenir toutes les observations et toutes les informations permettant de préciser les indicateurs cochés, dans le cas où les éléments précisés par la grille ne permettent pas de l'encoder dans son entièreté.

1. Vocabulaire

Sens du vocabulaire utilisé (Pierce et Fontaine, 2009; Vinner, 2002)

Les mots à analyser dans l'énoncé du problème sont les noms, les adjectifs et les verbes. Pour les verbes, l'infinitif est indiqué entre parenthèses. Les indicateurs sont mutuellement exclusifs, ce qui implique qu'un mot donné ne peut pas se retrouver vis-à-vis de deux indicateurs, à moins que celui-ci soit utilisé deux fois, mais avec des sens différents (p. ex., le mot « base » qui serait utilisé une première fois dans un sens courant, puis une autre fois dans un sens technique, dans un même énoncé).

a. Sens technique, utilisation au sens technique

Dans l'énoncé du problème, les mots possédant exclusivement un sens mathématique sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens technique, utilisation au sens technique ».

b. Sens courant, utilisation au sens courant

Dans l'énoncé du problème, les mots possédant exclusivement un sens commun dans le langage quotidien sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens courant, utilisation au sens courant ».

c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique

Dans l'énoncé du problème, les mots possédant à la fois un sens mathématique et un sens commun dans le langage quotidien, mais qui sont utilisés dans un sens mathématique dans le contexte, sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens technique et courant, utilisation au sens technique ».

d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant

Dans l'énoncé du problème, les mots possédant à la fois un sens mathématique et un sens commun dans le langage quotidien, mais qui sont utilisés dans un sens commun dans le contexte, sont énumérés vis-à-vis de l'indicateur « sens technique et courant, utilisation au sens courant ».

L'exemple suivant sert à illustrer la méthode de répartition des différents mots[19].

a. Sens technique, utilisation au sens technique : calculatrice, nombres entiers, deux.
b. Sens courant, utilisation au sens courant : utiliser, remplis (remplir), feuille, remet (remettre), fais (faire), équipe, camarade, choisissez (choisir), questionnements, amorcez (amorcer), précisez (préciser), choix, arguments, convaincants, appuyer, représentent (représenter), est (être), joignez (joindre), dyade, ayant exploré (explorer), présentez (présenter), convainquent (convaincre), partagez (partager).
c. Sens technique et courant, utilisation au sens technique : tableau, validez (valider), réponses, valeurs, expression, équivalente.
d. Sens technique et courant, utilisation au sens courant : réflexion, membres, groupe, classe.

2. Symbolisme (Pimm, 1987)

2.1 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la position des informations dans l'expression exponentielle

a. L'indicateur « oui » est coché si, dans toutes les expressions exponentielles présentes, l'exposant est toujours situé adéquatement par rapport à la base, c'est-à-dire en haut à droite.

b. L'indicateur « non » est coché si, dans une des expressions exponentielles présentes, l'exposant n'est pas situé adéquatement par rapport à la base, c'est-à-dire qu'il ne se retrouve pas en haut à droite.

c. L'indicateur « sans objet » est coché s'il y a absence d'expression exponentielle dans l'ensemble du problème.

2.2 Utilisation adéquate du symbolisme en lien avec la grandeur relative des informations dans l'expression exponentielle

a. L'indicateur « oui » est coché si, dans toutes les expressions exponentielles présentes, la taille de l'exposant est légèrement inférieure à celle de la base.

b. L'indicateur « non » est coché si, dans une des expressions exponentielles présentes, la taille de l'exposant n'est pas légèrement inférieure à celle de la base.

c. L'indicateur « sans objet » est coché s'il y a absence d'expression exponentielle dans l'ensemble du problème.

[19] Cet exemple est tiré d'un des items analysés lors de la collecte de données. Afin de ne pas influencer le traitement des données, aucune information relative à son origine ne sera fournie dans le guide.

3. Nature du problème (Biron, 2012; Biron et Chaput, 2001; Gouvernement du Québec, 1988)

3.1 Contexte du problème

Les indicateurs suivants s'excluent mutuellement.

a. Contexte réel

Un problème est considéré comme ayant un contexte réel si la situation proposée est concrètement réalisée.

b. Contexte réaliste

Un problème est considéré comme ayant un contexte réaliste si la situation proposée peut être vécue dans la réalité, mais qu'elle est plutôt simulée.

c. Contexte fantaisiste

Un problème est considéré comme ayant un contexte fantaisiste si la situation proposée est imaginaire et ne correspond pas à quelque chose de possible dans la réalité.

d. Contexte purement mathématique

Un problème est considéré comme ayant un contexte purement mathématique si la situation proposée ne fait appel qu'à des objets mathématiques.

3.2 Nombre de solutions

Les indicateurs suivants s'excluent mutuellement.

a. Une solution

Un problème est considéré comme ayant une seule solution si la résolution de celui-ci conduit à une réponse unique.

b. Un nombre fini de solutions

Un problème est considéré comme ayant un nombre fini de solutions si la résolution de celui-ci peut conduire à deux ou plusieurs réponses différentes, mais qu'il est possible de les dénombrer.

c. Une infinité de solutions

Un problème est considéré comme ayant une infinité de solutions si la résolution de celui-ci peut conduire à une quantité indénombrable de réponses différentes.

d. Aucune solution

Un problème est considéré comme n'ayant aucune solution si la résolution de celui-ci permet de démontrer qu'il n'y a pas de réponse possible respectant les contraintes données.

3.3 Adéquation des données

Les indicateurs suivants s'excluent mutuellement.

a. Données complètes

Un problème est considéré comme à données complètes si toutes les informations essentielles à sa résolution sont présentes de manière explicite. L'élève devra repérer et utiliser celles-ci.

b. Données superflues

Un problème est considéré comme à données superflues si certaines informations fournies ne sont pas essentielles à sa résolution. L'élève devra donc sélectionner ce qui est pertinent avant d'utiliser celles-ci.

c. Données manquantes

Un problème est considéré comme à données manquantes si certaines informations essentielles à sa résolution ne sont pas fournies, mais qu'il est possible de les trouver. L'élève devra chercher et trouver lui-même les informations dont il a besoin pour résoudre le problème avant d'utiliser celles-ci.

d. Données insuffisantes

Un problème est considéré comme à données insuffisantes si les informations essentielles à sa résolution sont non seulement incomplètes, mais également inaccessibles. L'élève ne pourra pas trouver celles-ci et le problème sera insoluble.

4. Observations et particularités du problème

Il s'agit ici de décrire dans ses grandes lignes des observations et des particularités du problème proposé. Celles-ci peuvent concerner les différents choix faits par les auteurs (p. ex., données numériques ou algébriques, choix des bases, choix des exposants, ordre de grandeur des données impliquées, opérations en jeu, exigence de démarche ou non, choix relatifs au symbolisme mathématique en général, etc.). Elles peuvent aussi mettre en relief des informations générales sur la pertinence et la cohérence du problème en lien avec l'utilisation de la notation exponentielle. Une indication sur le fait que le problème soit plutôt ouvert ou assez dirigé est aussi notée.

SECTION F – ITEM D’UNE AUTRE NATURE

Cette section est remplie pour chaque item ayant été identifié comme ayant une autre nature à la section B.

1. Informations sur l’item d’une autre nature

Dans cette section sont décrits des items qui traitent de la notation exponentielle, mais qui ne sont ni des définitions ni des exercices, ni des problèmes. En guise d’exemple, il est possible que des éléments d’histoire du développement de la notation exponentielle soient présentés dans un manuel donné. Dans ce cas, un indicateur émergent « capsule historique » est créé et décrit à l’aide de la section F. Cette description se fait selon deux aspects :

a. Nom donné à la nature émergente de l’item :

Une expression permettant de synthétiser en quelques mots la nature émergente de l’item est créée.

b. Description générale :

Une description générale de quelques lignes explique dans ses grands traits ce dont il est question dans cet indicateur émergent et le moyen choisi pour le présenter. Par exemple, une capsule historique pourrait montrer sous forme de bande dessinée un mathématicien, comme Nicolas Chuquet, en train d’expliquer comment il notera dorénavant une suite multiplicative comme 2x2x2x2. Ces indicateurs ne sont pas analysés plus en profondeur; il n’est question ici que de signaler leur présence.

SECTION G – DISPOSITION DES INFORMATIONS

Cette section expose les informations concernant la structure et l'organisation des différents éléments en lien avec la notation exponentielle. Les éléments recueillis émergent de la table des matières du manuel. La position relative de chacun des items est précisée en fonction de celle-ci. Ainsi, tous les codes des items seront indiqués dans leur ordre chronologique d'apparition, en fonction de la table des matières.

Cette section met succinctement en lumière les choix de l'auteur ou des auteurs (p. ex., traiter de la notation exponentielle de manière concentrée, dans un seul chapitre, ou plutôt à plusieurs reprises dans plusieurs chapitres différents, spécifier la position du traitement de la notation exponentielle dans la séquence des chapitres et ainsi de suite). Dans le cas où plus d'un manuel est utilisé pour un même niveau scolaire dans une même collection, la place relative de ce manuel recommandé par l'auteur ou les auteurs par rapport aux autres est également accessible, car les items sont présentés selon leur apparition chronologique. L'objectif de cette section est donc d'avoir accès à une description qualitative globale, pour pouvoir mettre en perspective les observations réalisées dans les sections précédentes qui, elles, s'avèrent beaucoup plus ciblées et spécifiques aux items analysés.

PRODUITS FINAUX

Lorsque la collecte d'information est complétée pour un manuel donné, la personne qui procède à l'analyse doit avoir en sa possession les documents suivants :

- une grille remplie de la section A;
- autant de grilles remplies de la section B qu'il y a d'items à analyser dans le manuel;
- pour chacune des grilles remplies de la section B, une grille remplie de la section C **ou** de la section D **ou** de la section E **ou** de la section F, selon la nature de l'item spécifié à la sous-section 2 de la section B;
- une grille remplie de la section G.