

**NOMBRES DE MARKOFF ET  
CATÉGORIES INCLINÉES AMASSÉES**

par

**ALEXANDRE LASNIER**

Thèse présentée au Département de mathématiques  
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

**FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

Sherbrooke, Québec, Canada, mai 2012



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-89642-6*

*Our file Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-89642-6*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

**Le 7 juin 2012**

*le jury a accepté la thèse de Monsieur Alexandre Lasnier  
dans sa version finale.*

**Membres du jury**

**Professeur Thomas Brustle  
Directeur de recherche  
Département de mathématiques**

**Professeur Shiping Liu  
Membre  
Département de mathématiques**

**Professeure Gordana Todorov  
Membre externe  
Northeastern University**

**Professeur Ibrahim Assem  
Président rapporteur  
Département de mathématiques**

**RÉSUMÉ.** On introduit une famille de modules, appelés modules de Markoff, engendrée par un procédé itératif semblable à la mutation des objets inclinants dans une catégorie amassée. On montre que ces modules ont une structure combinatoire similaire à celle des mots de Christoffel. En outre, on construit une bijection entre l'ensemble des triplets de modules de Markoff et l'ensemble des triplets de Markoff propres. Ceci nous permet de reformuler la conjecture d'unicité des nombres de Markoff dans un cadre algébrique.

Dans la deuxième partie, on étudie les dimensions projectives de la restriction des foncteurs  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$  à une sous-catégorie contravariantement finie et rigide d'une catégorie triangulée  $\mathcal{C}$ . On montre que la dimension projective de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)|_{\mathcal{T}}$  est au plus un si et seulement si il n'existe aucun morphisme non nul entre objets de  $\mathcal{T}[1]$  qui se factorise par  $X$ , lorsque  $X$  appartient à une certaine sous-catégorie convenable de  $\mathcal{C}$ . Par conséquent, on obtient une caractérisation des objets de dimension projective infinie dans la catégorie des foncteurs contravariants de présentation finie sur une sous-catégorie inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ .



## Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de doctorat, Thomas Brüstle, pour ses précieux conseils et encouragements tout au long de mes études universitaires. J'aimerais aussi remercier Louis Beaudet et Thomas Brüstle pour une série de discussions qui ont inspiré le travail présenté dans le deuxième chapitre de cette thèse. Enfin, je remercie le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT) et l'Université de Sherbrooke pour leur soutien financier.



## Table des matières

CHAPITRE 1. MOTS DE CHRISTOFFEL ET TRIPLETS DE MARKOFF : UNE APPROCHE ALGÈBRIQUE	1
1.1. Introduction	2
1.2. Arbres binaires	4
1.3. Triplets de Markoff	9
1.3.1. Un système de représentants	11
1.3.2. Conjecture d'unicité	17
1.4. Mots de Christoffel	19
1.4.1. Factorisation standard	21
1.4.2. L'arbre de Christoffel	23
1.5. Mots de Christoffel et triplets de Markoff	26
1.6. Modules de corde	29
1.6.1. Applications de graphes	31
1.7. Modules de Markoff	35
1.7.1. Triplets mutables	35
1.7.2. Modules de Markoff	43
1.8. Modules de Markoff et mots de Christoffel	48
1.9. Modules de Markoff et triplets de Markoff	54
1.9.1. Propriétés de la trace	56
1.9.2. L'isomorphisme	64



<b>CHAPITRE 2. DIMENSIONS PROJECTIVES DANS LES</b>	
<b>CATÉGORIES INCLINÉES AMASSÉES</b>	<b>69</b>
<b>2.1. Introduction</b>	<b>70</b>
<b>2.2. Préliminaires</b>	<b>73</b>
2.2.1. Catégories triangulées	73
2.2.2. Notations et terminologie	78
2.2.3. Sous-catégorie d'extensions	79
<b>2.3. Foncteur cohomologique</b>	<b>81</b>
<b>2.4. Sous-catégories inclinantes amassées</b>	<b>83</b>
2.4.1. La propriété Gorenstein	84
<b>2.5. Idéaux de factorisation</b>	<b>87</b>
<b>2.6. Sous-catégories rigides</b>	<b>91</b>
<b>2.7. Quelques généralisations</b>	<b>96</b>
<b>CONCLUSION</b>	<b>103</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>107</b>

## CHAPITRE 1

# Mots de Christoffel et triplets de Markoff : une approche algébrique

## 1.1. INTRODUCTION

Un triplet de Markoff est un triplet d'entiers strictement positifs  $(a, b, c)$  qui satisfont à l'équation de Diophante

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$$

Les nombres qui composent ces triplets, appelés nombres de Markoff, apparaissent dans les travaux de Markoff sur les minima des formes binaires quadratiques indéfinies [74],[75]. Il a montré que tout ces triplets peuvent être engendrés par un simple procédé arithmétique à partir de  $(1, 1, 1)$ . On construit ainsi un arbre 3-régulier composé de toutes les solutions à cette équation. La conjecture d'unicité des nombres de Markoff, énoncée par Frobenius en 1913, voir [48], prétend que chaque nombre de Markoff est le terme maximal d'un unique triplet de Markoff (à permutation près).

Les mots de Christoffel ont été introduits dans [35]. Plus récemment, Borel et Laubie ont relancé l'étude de ces mots dans leur travail approfondi [26]. Ce sont des mots dans un alphabet à deux lettres obtenus en codant la discrétisation de certains segments de droites dans  $\mathbb{R}^2$ . Dans [88], Reutenauer construit une application bijective associant un triplet de Markoff à chaque mot de Christoffel. Suivant une méthode de Cohn [36], il établit cette bijection en utilisant les identités de Fricke [47]; une stratégie qui nous sera essentielle.

Dans ce chapitre, nous introduisons une famille de modules, appelés modules de Markoff, engendrée en triplets par un procédé itératif inspiré par la mutation des objets inclinants dans une catégorie amassée [28] et analogue à la construction de l'arbre des triplets de Markoff. On montrera que cette dernière ressemblance est plus que superficielle en définissant explicitement une bijection entre l'ensemble des triplets de modules de Markoff  $\mathcal{T}$  et l'ensemble des triplets de Markoff propres  $\mathcal{M}$ . De plus, cette bijection commute avec les applications de structure des arbres respectifs. La bijection est définie sur un module de Markoff par  $M(w) \mapsto \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w)$  où  $\varphi(w)$  est une matrice de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  construite à partir de la corde  $w$  à laquelle le module  $M(w)$  est associé. Nos principaux résultats peuvent être résumés comme suit :

**THÉORÈME.** *L'application  $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{M}$  définie par*

$$\Phi(M(w_1), M(w_2), M(w_3)) = \left( \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w_1), \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w_2), \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w_3) \right)$$

*est un isomorphisme d'arbres binaires. En outre, la conjecture d'unicité des nombres de Markoff est équivalente à l'injectivité de l'application  $M(w) \mapsto \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w)$  où  $M(w)$  parcourt l'ensemble des modules de Markoff propres.*

## 1.2. ARBRES BINAIRES

Bien que les arbres binaires ont été étudiés de façon exhaustive en mathématiques et en informatique, nous proposons ici une définition alternative mieux adaptée à notre cadre algébrique. Plusieurs ensembles que nous allons considérer dans ce chapitre ont une structure naturelle d'arbre binaire. Ce qui nous motive à explorer ce concept dans l'abstrait.

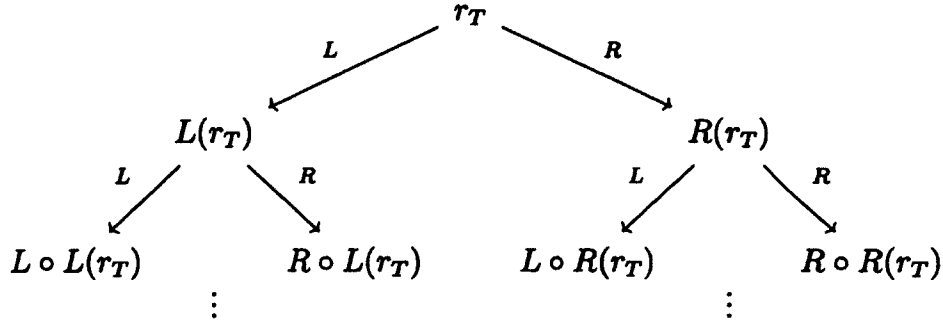
Pour un ensemble  $X$ , on note  $X^*$  le monoïde libre engendré par les éléments de  $X$ .

**DÉFINITION 1.2.1.** Un *arbre binaire (complet, infini)* est un triplet  $(T, L, R)$ , où  $T$  est un ensemble infini dénombrable et  $L, R$  sont deux applications injectives  $T \rightarrow T$ , tel que

(1) Il existe un unique élément  $r_T \in T$  tel que  $r_T \notin \text{Im } L \cup \text{Im } R$ .  
Cet élément est appelé la *racine*.

(2) Aucun élément de  $T$  appartient simultanément à  $\text{Im } L$  et  $\text{Im } R$ .

(3) Pour tout  $x \in T$ , il existe  $f_x \in \{L, R\}^*$  tel que  $f_x(r_T) = x$ .



LEMME 1.2.2. Soit  $(T, L, R)$  un arbre binaire. Pour tout  $x \in T$ , l'élément  $f_x \in \{L, R\}^*$  tel que  $f_x(r_T) = x$  est unique.

DÉMONSTRATION. La preuve est par récurrence sur la longueur de  $f_x$ . Puisque  $r_T \notin \text{Im } L \cup \text{Im } R$ ,  $f = \mathbb{I}_T$  est l'unique élément de  $\{L, R\}^*$  tel que  $f(r_T) = r_T$ .

Supposons que  $f_x \in \{L, R\}^*$  est l'unique application telle que  $f_x(r_T) = x$ , pour un certain  $x \in T$ .

Soit  $y = L(x)$ , alors il existe  $f_y \in \{L, R\}^*$  tel que  $f_y(r_T) = y$ . Comme  $y \in \text{Im } L$ , on a  $y \notin \text{Im } R$  donc  $f_y$  s'écrit seulement sous la forme  $f_y = L \circ g$  avec  $g \in \{L, R\}^*$ . Ainsi  $L \circ g(r_T) = y = L(x)$  et l'injectivité de  $L$  implique que  $g(r_T) = x$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $g = f_x$ . Donc  $f_y = L \circ f_x$  est l'unique élément de  $\{L, R\}^*$  tel que  $f_y(r_T) = y$ .

De même, on montre que  $f = R \circ f_x$  est l'unique application telle que  $f(r_T) = R(x)$ . □

Comme pour toute structure algébrique, on aura besoin d'une notion d'application qui préserve cette structure.

**DÉFINITION 1.2.3.** Un *homomorphisme d'arbres binaires* entre deux arbres binaires  $\varphi : (T_1, L_1, R_1) \rightarrow (T_2, L_2, R_2)$  est la donnée d'une application  $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$  telle que  $\varphi L_1 = L_2 \varphi$  et  $\varphi R_1 = R_2 \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\varphi} & T_2 \\ L_1 \downarrow & & \downarrow L_2 \\ T_1 & \xrightarrow{\varphi} & T_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\varphi} & T_2 \\ R_1 \downarrow & & \downarrow R_2 \\ T_1 & \xrightarrow{\varphi} & T_2 \end{array}$$

Soient  $(T_1, L_1, R_1)$  et  $(T_2, L_2, R_2)$  deux arbres binaires. Définissons un homomorphisme de monoïdes  $i : \{L_1, R_1\}^* \rightarrow \{L_2, R_2\}^*$  par  $i(L_1) = L_2$  et  $i(R_1) = R_2$ . Il est clair que  $i$  est un isomorphisme de monoïdes.

**LEMME 1.2.4.** Soient  $\varphi : (T_1, L_1, R_1) \rightarrow (T_2, L_2, R_2)$  un homomorphisme d'arbres binaires et  $f \in \{L_1, R_1\}^*$ . On a  $\varphi \circ f = i(f) \circ \varphi$ .

**DÉMONSTRATION.** L'égalité est évidente lorsque  $f = \mathbb{I}_{T_1}$ . Supposons que l'énoncé soit vérifié pour un certain  $f \in \{L_1, R_1\}^*$ . Alors, on

a

$$\begin{aligned} \varphi \circ (L_1 \circ f) &= L_2 \circ (\varphi \circ f) = L_2 \circ i(f) \circ \varphi \\ &= i(L_1) \circ i(f) \circ \varphi = i(L_1 \circ f) \circ \varphi \end{aligned}$$

et de même  $\varphi \circ (R_1 \circ f) = i(R_1 \circ f) \circ \varphi$ . □

**PROPOSITION 1.2.5.** *Soient  $\varphi, \psi : (T_1, L_1, R_1) \rightarrow (T_2, L_2, R_2)$  deux homomorphismes d'arbres binaires. Alors  $\varphi = \psi$  si et seulement si  $\varphi(r_{T_1}) = \psi(r_{T_1})$ .*

**DÉMONSTRATION.** La nécessité est évidente. Supposons que  $\varphi(r_{T_1}) = \psi(r_{T_1})$ . Soit  $x \in T_1$ , alors il existe  $f_x \in \{L_1, R_1\}^*$  tel que  $f_x(r_{T_1}) = x$ . On a

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(f_x(r_{T_1})) = i(f_x)(\varphi(r_{T_1})) \\ &= i(f_x)(\psi(r_{T_1})) = \psi(f_x(r_{T_1})) = \psi(x).\end{aligned}$$

□

**THÉORÈME 1.2.6.** *Soit  $\varphi : (T_1, L_1, R_1) \rightarrow (T_2, L_2, R_2)$  un homomorphisme d'arbres binaires. Alors  $\varphi$  est une bijection si et seulement si  $\varphi(r_{T_1}) = r_{T_2}$ . Dans ce cas, on dira que  $\varphi$  est un isomorphisme d'arbres binaires.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $\varphi$  est une bijection. Alors il existe  $x \in T_1$  tel que  $\varphi(x) = r_{T_2}$ . Si  $x$  était élément de  $\text{Im } L_1 \cup \text{Im } R_1$  on aurait, en vertu des propriétés de commutativité,  $r_{T_2} \in \text{Im } L_2 \cup \text{Im } R_2$ ; une contradiction. Ainsi  $x \notin \text{Im } L_1 \cup \text{Im } R_1$  donc  $x = r_{T_1}$ .

Réciproquement, supposons que  $\varphi(r_{T_1}) = r_{T_2}$ . Soit  $y \in T_2$ , alors il existe  $f_y \in \{L_2, R_2\}^*$  tel que  $f_y(r_{T_2}) = y$ . Posons  $x = f_x(r_{T_1})$  où  $f_x$  est l'unique élément de  $\{L_1, R_1\}^*$  tel que  $i(f_x) = f_y$ . On a

$$\varphi(x) = \varphi(f_x(r_{T_1})) = i(f_x)(\varphi(r_{T_1})) = f_y(r_{T_2}) = y.$$



Donc  $\varphi$  est surjectif.

Soient  $x, y \in T_1$  et supposons que  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Il existe  $f_x, f_y \in \{L_1, R_1\}^*$  tels que  $f_x(r_{T_1}) = x$  et  $f_y(r_{T_1}) = y$ . On a

$$\varphi(x) = \varphi(f_x(r_{T_1})) = i(f_x)(\varphi(r_{T_1})) = i(f_x)(r_{T_2})$$

et de même  $\varphi(y) = i(f_y)(r_{T_2})$ . D'où  $i(f_x)(r_{T_2}) = i(f_y)(r_{T_2})$  ce qui entraîne  $i(f_x) = i(f_y)$  d'après le lemme 1.2.2. Puisque  $i$  est un isomorphisme, on a  $f_x = f_y$  et

$$x = f_x(r_{T_1}) = f_y(r_{T_1}) = y.$$

Donc  $\varphi$  est injectif. □

**COROLLAIRE 1.2.7.** *Soit  $\varphi : (T_1, L_1, R_1) \rightarrow (T_2, L_2, R_2)$  un isomorphisme d'arbres binaires. Alors  $i(f_x) = f_{\varphi(x)}$  pour tout  $x \in T_1$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $x \in T_1$ , alors il existe  $f_x \in \{L_1, R_1\}^*$  tel que  $f_x(r_{T_1}) = x$ . On a

$$i(f_x)(r_{T_2}) = i(f_x)(\varphi(r_{T_1})) = \varphi(f_x(r_{T_1})) = \varphi(x) = f_{\varphi(x)}(r_{T_2}).$$

En vertu de l'unicité de  $f_{\varphi(x)}$  on conclut que  $i(f_x) = f_{\varphi(x)}$ . □

### 1.3. TRIPLETS DE MARKOFF

La théorie des nombres de Markoff a son origine dans les deux articles de Markoff [74], [75] sur l'approximation diophantienne et les formes quadratiques indéfinies. Cette théorie a des liens marqués avec plusieurs domaines mathématiques ; entre autres, les algèbres amassées [17], [82], les fractions continues [24], [48], la géométrie hyperbolique [36], [37], [53], [71], [76], les groupes fuchsien [47], [83] et les variétés algébriques [54].

**DÉFINITION 1.3.1.** Un *triplet de Markoff* est une solution  $(a, b, c)$  dans les entiers strictement positifs de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \tag{1}$$

Un triplet de Markoff est dit *propre* si  $a, b$  et  $c$  sont deux à deux distincts, sinon il est dit *impropre*. Tout entier faisant partie d'un triplet de Markoff est appelé *nombre de Markoff*.

L'équation (1) est symétrique par rapport aux variables  $x, y$  et  $z$ . Par conséquent, si l'on connaît une solution  $(a, b, c)$ , il est facile d'en trouver cinq autres en calculant les permutations de  $(a, b, c)$ . Bien que ces six solutions peuvent être différentes, il est souvent préférable de les considérer comme une seule. On vise donc à construire un système de représentants des classes d'équivalences de permutations. La plupart

des auteurs utilisent le représentant  $(a, b, c)$  tel que  $a \leq b \leq c$ , mais ce choix ne serait pas convenable pour nous.

**PROPOSITION 1.3.2.** *Les seuls triplets de Markoff impropres sont  $(1, 1, 1)$  et  $(1, 2, 1)$ , à permutation près.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $(a, b, c)$  un triplet de Markoff impropre. Puisque que l'on travaille à permutation près, on peut supposer sans perte de généralité que  $a = c$ . Ainsi

$$2a^2 + b^2 = 3a^2b \quad (2)$$

d'où  $b^2 = a^2(3b - 2)$  et on en déduit que  $a^2$  divise  $b^2$ . Donc  $a$  divise  $b$  et il existe un entier naturel  $k$  tel que  $b = ka$ . L'équation (2) devient  $2a^2 + k^2a^2 = 3ka^3$ . On obtient  $2 + k^2 = 3ka$  d'où  $2 = k(3a - k)$ . Ainsi  $k = 1$  ou  $k = 2$  car  $k$  divise 2. Si  $k = 1$ , alors  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ . Si  $k = 2$ , alors on obtient la solution  $(1, 2, 1)$ .  $\square$

À partir d'un triplet de Markoff, on peut construire d'autres solutions de l'équation (1) en lui appliquant certaines opérations arithmétiques. On définit deux applications  $\mathbf{Z}^3 \rightarrow \mathbf{Z}^3$  par

$$m_L : (a, b, c) \mapsto (b, 3bc - a, c) \quad \text{et} \quad m_R : (a, b, c) \mapsto (a, 3ab - c, b)$$

**PROPOSITION 1.3.3.** *Soit  $(a, b, c)$  un triplet de Markoff. Les triplets  $m_L(a, b, c)$  et  $m_R(a, b, c)$  sont des triplets de Markoff.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $(a, b, c)$  est un triplet de Markoff.

Alors

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$$

Il faut montrer que  $(b, 3bc - a, c)$  est un triplet de Markoff. On a

$$\begin{aligned} b^2 + (3bc - a)^2 + c^2 &= b^2 + (9b^2c^2 - 6abc + a^2) + c^2 \\ &= 9b^2c^2 - 6abc + (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 9b^2c^2 - 6abc + 3abc \\ &= 3b(3bc - a)c \end{aligned}$$

La preuve pour  $m_R$  est semblable. □

### 1.3.1. Un système de représentants

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des triplets  $(a, b, c)$  obtenus par applications itérées de  $m_L$  et  $m_R$  à partir du triplet de Markoff  $M_0 = (1, 5, 2)$ .

$$\mathcal{M} = \{M_0\} \cup \left\{ M \mid M_0 \xrightarrow{m_1} \dots \xrightarrow{m_n} M \text{ où } m_i = m_L \text{ ou } m_i = m_R \right\}$$

D'après la proposition 1.3.3, les éléments de  $\mathcal{M}$  sont des triplets de Markoff. En vertu de la définition de  $\mathcal{M}$ , on a  $m_L(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$  et  $m_R(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ . On peut donc voir  $m_L$  et  $m_R$  comme des applications  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ .

**LEMME 1.3.4.** *Si  $M = (a, b, c) \in \mathcal{M}$ , alors  $b = \max M$ . De plus, si  $M \in \text{Im } m_L$ , alors  $a > c$  et si  $M \in \text{Im } m_R$ , alors  $a < c$ .*

**DÉMONSTRATION.** Il est clair que le triplet initial  $(1, 5, 2)$  satisfait aux conditions ci-dessus. Supposons que la propriété est vérifiée pour un  $(a, b, c) \in \mathcal{M}$ . On doit montrer qu'il en est de même pour  $m_L(a, b, c)$  et  $m_R(a, b, c)$ . On a  $m_L(a, b, c) = (b, 3bc - a, c)$  et on sait déjà que  $b > c$ . De plus,  $3bc - a > 2b + (b - a) > b$  puisque  $c \geq 1$  et  $a < b$ . La démonstration pour  $m_R$  est semblable.  $\square$

Définissons une troisième application

$$m_C : \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a \neq c\} \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

par

$$m_C(a, b, c) = \begin{cases} (3ac - b, a, c) & \text{si } a > c \\ (a, c, 3ac - b) & \text{si } a < c \end{cases}$$

**PROPOSITION 1.3.5.** *Si  $M = (a, b, c)$  est un triplet de Markoff propre, alors  $m_C(M) = (a', b', c')$  est un triplet de Markoff. De plus, si  $b = \max M$ , alors  $b' = \max m_C(M)$  et  $b > b' > 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** On montre aisément que  $m_C(M)$  est un triplet de Markoff en utilisant la même démarche que dans la preuve de la proposition 1.3.3.

Considérons le cas  $a > c$ , alors  $m_C(a, b, c) = (3ac - b, a, c)$ . Montrons d'abord que  $a > 3ac - b > 0$ . Puisque  $(3ac - b, a, c)$  est un triplet de Markoff, on a

$$3(3ac - b)ac = (3ac - b)^2 + a^2 + c^2 > 0$$

d'où  $3ac - b > 0$  car  $ac > 0$ . D'autre part,  $c < a$  entraîne que  $c^2 < ac < a^2c$  d'où  $2a^2 + c^2 < 3a^2c$ . Ce qui donne  $2a^2 - 3a^2c + c^2 < 0$ . On a

$$\begin{aligned}
2a^2 - 3a^2c + c^2 &= a^2 - 3a^2c + (a^2 + b^2 + c^2) - b^2 \\
&= a^2 - 3a^2c + ba - ba + 3abc - b^2 \\
&= a^2 - a(3ac - b) - ba + b(3ac - b) \\
&= (a - b)(a - (3ac - b)).
\end{aligned}$$

Ainsi  $(a - b)(a - (3ac - b)) < 0$  et puisque  $b > a$  on a  $a - (3ac - b) > 0$ . Donc  $a > 3ac - b$ . De plus,  $b = \max(a, b, c) > a = \max m_C(M)$ . Le cas  $a < c$  se démontre de façon analogue.  $\square$

**LEMME 1.3.6.** *Soit  $M = (a, b, c)$  un triplet de Markoff propre. Le triplet de Markoff  $m_C(M)$  est impropre si et seulement si  $M = (1, 5, 2)$  ou  $M = (2, 5, 1)$ . De plus,  $m_C(M)$  est impropre si et seulement si  $m_C(M) = (1, 2, 1)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $M = (1, 5, 2)$  ou  $M = (2, 5, 1)$ . Dans les deux cas  $m_C(M) = (1, 2, 1)$  qui est impropre. Réciproquement, supposons que  $m_C(M)$  est impropre. Considérons d'abord le cas  $a < c$ . Puisque  $m_C(M) = (a, c, 3ac - b)$  est impropre et  $a \neq c$ , on a  $(a, c, 3ac - b) = (1, 2, 1)$  d'après la proposition 1.3.2. D'où  $M = (1, 5, 2)$ . D'autre part, si  $a > c$  alors  $m_C(M) = (3ac - b, a, c) = (1, 2, 1)$ . Donc  $M = (2, 5, 1)$ .  $\square$

LEMME 1.3.7. *Si  $M \in \mathcal{M} \setminus \{(1, 5, 2)\}$ , alors  $m_C(M) \in \mathcal{M}$ . En outre, l'application  $m_C$  est un inverse à gauche de  $m_L$  et de  $m_R$  :*

$$m_C m_L = \mathbb{I}_{\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad m_C m_R = \mathbb{I}_{\mathcal{M}}$$

*En particulier,  $m_L$  et  $m_R$  sont injectives.*

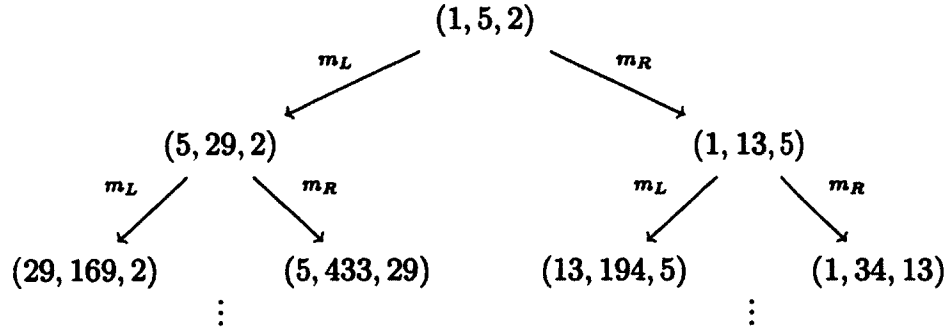
DÉMONSTRATION. Il est clair que  $\mathcal{M} \setminus \{(1, 5, 2)\} = \text{Im } m_L \cup \text{Im } m_R$ . Donc, il existe un triplet  $M' = (a, b, c) \in \mathcal{M}$  tel que  $m_L(M') = M$  ou  $m_R(M') = M$ . Dans le premier cas,

$$\begin{aligned} m_C(M) &= m_C m_L(a, b, c) = m_C(b, 3bc - a, c) \\ &= (3bc - (3bc - a), b, c) = (a, b, c) \end{aligned}$$

car  $b > c$  d'après le lemme 1.3.4. D'où  $m_C(M) = M'$  et on en déduit que  $m_C(M) \in \mathcal{M}$ . Le deuxième cas est semblable.  $\square$

PROPOSITION 1.3.8. *Le triplet  $(\mathcal{M}, m_L, m_R)$  est un arbre binaire de racine  $(1, 5, 2)$ .*

DÉMONSTRATION. On vérifie aisément qu'il n'existe aucun triplet de Markoff propre  $M$  tel que  $m_L(M) = (1, 5, 2)$  ou  $m_R(M) = (1, 5, 2)$ . Donc, d'après la définition de  $\mathcal{M}$ ,  $(1, 5, 2)$  est la racine de  $\mathcal{M}$ . De plus, le lemme 1.3.4 implique que  $\text{Im } m_L \cap \text{Im } m_R = \emptyset$ .  $\square$



LEMME 1.3.9. Soient  $M = (a, b, c)$  un triplet de Markoff propre et  $\sigma \in S_3$  la permutation  $\sigma(a, b, c) = (c, b, a)$ . Alors,  $m_C \circ \sigma(M) = \sigma \circ m_C(M)$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $M = (a, b, c)$  un triplet de Markoff propre, alors  $a < c$  ou  $c < a$ . Si  $a < c$ , on a

$$m_C \circ \sigma(M) = m_C(c, b, a) = (3ca - b, c, a)$$

et

$$\sigma \circ m_C(M) = \sigma(a, c, 3ac - b) = (3ac - b, c, a).$$

Si  $c < a$ , on a

$$m_C \circ \sigma(M) = m_C(c, b, a) = (c, a, 3ca - b) = \sigma(3ac - b, a, c) = \sigma \circ m_C(M).$$

Dans les deux cas  $m_C \circ \sigma(M) = \sigma \circ m_C(M)$ .  $\square$

En adaptant la preuve du résultat classique de Markoff [75], on montrera que  $\mathcal{M}$  coïncide avec l'ensemble des triplets de Markoff propres,



à permutation près. Considérons la relation d'équivalence  $\sim$  sur l'ensemble des triplets de Markoff propres définie par  $M \sim N$  s'il existe une permutation  $\pi \in \mathcal{S}_3$  telle que  $\pi(M) = N$ .

**THÉORÈME 1.3.10.** *L'ensemble  $\mathcal{M}$  est un système de représentants de la relation  $\sim$  sur l'ensemble des triplets de Markoff propres.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $M'$  un triplet de Markoff propre. Posons  $b = \max M'$  et  $a, c$  les deux éléments de  $M' \setminus \{b\}$  de telle sorte que  $a < c$ . Remarquons qu'il existe une permutation  $\pi \in \mathcal{S}_3$  telle que  $\pi(M') = (a, b, c)$ . Posons  $M = (a, b, c)$ , on prétend que soit  $M \in \mathcal{M}$ , soit  $\sigma(M) = (c, b, a) \in \mathcal{M}$ .

Posons  $b_n = \max m_C^n(M)$ . Alors, d'après la proposition 1.3.5, on obtient une suite  $b > b_1 > b_2 > \dots$ . Comme chaque  $b_n$  est un entier positif, cette suite doit être finie. Ce procédé prend fin lorsque l'on atteint un triplet de Markoff  $(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha = \gamma$ . Donc, selon le lemme 1.3.6, il existe un entier naturel  $n$  tel que  $m_C^n(M) = (1, 2, 1)$ . On procède par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , alors  $M = (1, 5, 2)$  ou  $(2, 5, 1)$ . On a  $\sigma(2, 5, 1) = (1, 5, 2) \in \mathcal{M}$  et  $(2, 5, 1) \notin \mathcal{M}$ . Maintenant, supposons que  $m_C^n(M) = (1, 2, 1)$  implique que soit  $M \in \mathcal{M}$ , soit  $\sigma(M) \in \mathcal{M}$ , pour tout  $M$ . Supposons que  $m_C^{n+1}(M) = (1, 2, 1)$ . Ainsi,  $m_C^n(m_C(M)) = (1, 2, 1)$  donc soit  $m_C(M) \in \mathcal{M}$ , soit  $\sigma(m_C(M)) \in \mathcal{M}$  d'après l'hypothèse de récurrence. Si  $m_C(M) \in \mathcal{M}$ , alors  $m_C(M) = (a, c, 3ac - b)$  car  $a < c$ . On a

$$m_R(m_C(M)) = (a, 3ac - (3ac - b), c) = (a, b, c) = M$$

donc  $M \in \mathcal{M}$ . Si  $\sigma(m_C(M)) \in \mathcal{M}$ , alors

$$m_L(\sigma(m_C(M))) = m_L(3ac - b, c, a) = (c, 3ca - (3ac - b), a) = \sigma(M)$$

donc  $\sigma(M) \in \mathcal{M}$ .

Supposons que  $M$  et  $\sigma(M)$  appartiennent simultanément à  $\mathcal{M}$ . D'après le lemme 1.3.7, on a  $m_C(M) \in \mathcal{M}$  et  $m_C(\sigma(M)) \in \mathcal{M}$ . Mais, en vertu du lemme 1.3.9,  $m_C(\sigma(M)) = \sigma(m_C(M))$ . D'où  $\sigma(m_C(M)) \in \mathcal{M}$ , une contradiction.

Il reste à montrer que  $\mathcal{M}$  contient un seul représentant par classe d'équivalence. Supposons que  $M = (a, b, c)$  et  $\pi(M) = (a', b', c')$  appartiennent à  $\mathcal{M}$  pour une permutation  $\pi \in \mathcal{S}_3 \setminus \{\text{I}\}$ . Alors  $b = \max M = \max \pi(M) = b'$  et on en déduit que  $\pi = \sigma$ . Donc  $M \in \mathcal{M}$  et  $\sigma(M) \in \mathcal{M}$ , une absurdité.  $\square$

### 1.3.2. Conjecture d'unicité

Une grande partie des travaux reliés aux nombres de Markoff sont motivés par la *conjecture d'unicité des nombres de Markoff* formulée par Frobenius en 1913, voir [48].

**CONJECTURE 1.3.11.** *Soient  $M_1$  et  $M_2$  des triplets de Markoff. Si  $\max M_1 = \max M_2$ , alors  $M_1 \sim M_2$ .*

Cette conjecture a été démontrée dans plusieurs cas particuliers, par exemple :

- Pour les triplets de Markoff  $M$  avec  $\max M$  un nombre premier [33].
- Pour les triplets de Markoff  $M$  avec  $m = \max M$  tels que  $m$ ,  $3m - 2$  ou  $3m + 2$  est égal à  $p$ ,  $2p$  ou  $4p$  où  $p$  est un nombre premier [14].
- Pour les triplets de Markoff  $M$  tels que  $\max M = 4p^n$  ou  $8p^n$  où  $p$  est un nombre premier et  $n \geq 1$ , voir [95].
- Pour les nombres de Markoff paramétrisés par les couples d'entiers de la forme  $(1, n)$  ou  $(m, 1)$  avec  $n, m \geq 2$ , voir [31].

Grâce au théorème 1.3.10, on peut reformuler la Conjecture 1.3.11 comme suit :

**CONJECTURE 1.3.12.** *Soient  $M_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $M_2 = (a_2, b_2, c_2)$  deux éléments de  $\mathcal{M}$ . Si  $b_1 = b_2$  alors  $M_1 = M_2$ .*

## 1.4. MOTS DE CHRISTOFFEL

Les mots de Christoffel sont des mots dans un alphabet à deux lettres nommés d'après le mathématicien allemand Elwin B. Christoffel. Ces mots apparaissent dans la littérature dès 1771 dans les travaux de Bernoulli sur les fractions continues [20]. Un mot de Christoffel se définit de plusieurs façons à partir d'une paire d'entiers copremiers. Nous présentons ici la définition géométrique due à Borel et Laubie [26] basée sur la discrétisation d'un segment de droite de pente rationnelle. Un aperçu détaillé de la théorie des mots de Christoffel se trouve dans [21].

Un *chemin de treillis* est un sous-ensemble de  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$  composé de segments de droites consécutifs de la forme  $[(a, b), (a+1, b)]$  ou  $[(a, b), (a, b+1)]$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Un tel chemin est l'image d'une fonction continue et injective  $f : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$  telle que  $f(0)$  et  $f(1)$  appartiennent à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**DÉFINITION 1.4.1.** Soient  $p$  et  $q$  deux entiers copremiers. Le *chemin de Christoffel de pente  $q/p$*  est le chemin de treillis reliant les points  $(0, 0)$  et  $(p, q)$  tel que

- (1) Le chemin reste en dessous du segment de droite  $[(0, 0), (p, q)]$ .
- (2) La région limitée par le chemin et le segment  $[(0, 0), (p, q)]$  ne contient aucun point de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

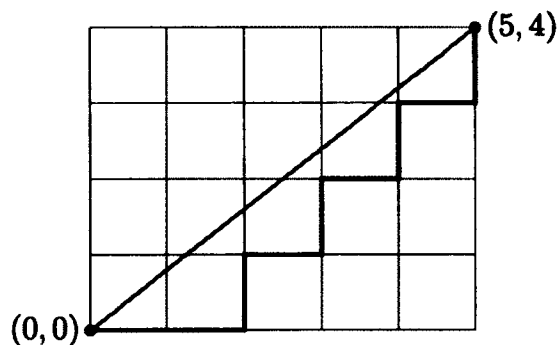


FIGURE 1. Le chemin de Christoffel de pente  $4/5$

DÉFINITION 1.4.2. Le mot de Christoffel de pente  $q/p$  est le mot  $C(p, q) \in \{x, y\}^*$  obtenu en suivant le chemin de Christoffel de pente  $q/p$  à partir de  $(0, 0)$  et en désignant chaque segment de la forme  $[(a, b), (a + 1, b)]$  par  $x$  et chaque segment de la forme  $[(a, b), (a, b + 1)]$  par  $y$ .

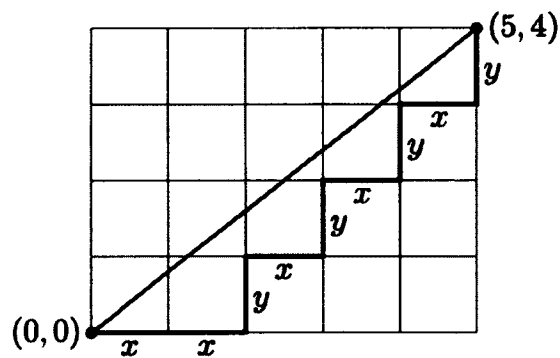


FIGURE 2. Le mot de Christoffel  $C(5, 4) = xyxyxyxy$

EXEMPLE 1.4.3. Le mot de Christoffel de pente 0 est  $C(1, 0) = x$  et le mot de Christoffel de pente  $\infty$  est  $C(0, 1) = y$ . Les mots de Christoffel différents de  $x$  et  $y$  sont dits *propres*.

Il existe aussi des moyens plus directs de calculer le mot de Christoffel associé à une paire d'entiers copremiers. Par exemple, la proposition suivante nous fournit un algorithme très simple. Cette construction est très semblable à celle donnée par Christoffel [35].

**PROPOSITION 1.4.4** ([21, Section 1.2]). *Le mot de Christoffel de pente  $q/p$  est donné par  $C(p, q) = w_1 w_2 \cdots w_{p+q}$  où*

$$w_i = \begin{cases} x & \text{si } (i-1)q \in \{0, 1, \dots, p-1\} \bmod(p+q) \\ y & \text{si } (i-1)q \in \{p, p+1, \dots, p+q-1\} \bmod(p+q) \end{cases}$$

### 1.4.1. Factorisation standard

Borel et Laubie [26] ont montré que chaque mot de Christoffel propre s'exprime uniquement comme la concaténation de deux mots de Christoffel ; c'est ce qui s'appelle la factorisation standard. Le chemin de Christoffel de pente  $q/p$  contient un unique point  $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de distance non-zéro minimale au segment de droite  $[(0, 0), (p, q)]$ .

**DÉFINITION 1.4.5.** La *factorisation standard* du mot de Christoffel  $C(p, q)$  est la factorisation  $C(p, q) = C(c, d)C(p-c, q-d)$ .

**EXEMPLE 1.4.6.** Considérons le mot de Christoffel  $C(5, 4)$ . Le point  $(4, 3)$  sur le chemin de Christoffel de pente  $4/5$  est de distance non-zéro minimale au segment de droite  $[(0, 0), (5, 4)]$ . La factorisation standard de  $C(5, 4)$  est donc  $C(4, 3) \cdot C(1, 1) = xyxyxy \cdot xy$ .

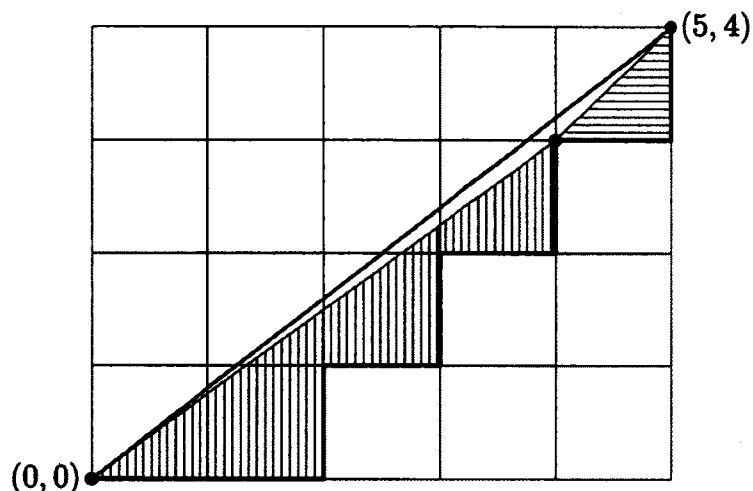


FIGURE 3. Le point  $(4, 3)$  sur le chemin de Christoffel de pente  $4/5$

PROPOSITION 1.4.7 ([21, Proposition 3.2]). *Si  $w = w_1w_2$  est la factorisation standard du mot de Christoffel  $w$ , alors  $w_1$  et  $w_2$  sont des mots de Christoffel.*

La factorisation standard d'un mot de Christoffel est la seule factorisation avec cette propriété.

THÉORÈME 1.4.8 ([26, Théorème 1]). *Un mot de Christoffel  $w$  admet une unique factorisation  $w = w_1w_2$  avec  $w_1$  et  $w_2$  des mots de Christoffel.*

Étant donné une factorisation d'un mot de Christoffel, on peut facilement déterminer s'il s'agit de la factorisation standard grâce au résultat suivant :

PROPOSITION 1.4.9 ([26, Proposition 1]). *Soient  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$  deux paires d'entiers copremiers. La concaténation  $C(p_1, q_1)C(p_2, q_2)$  est un mot de Christoffel si et seulement si  $\det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} = 1$ .*

Notons  $|w|_x$  le nombre d'apparitions de la lettre  $x$  dans le mot  $w$ . On peut reformuler la proposition précédente comme suit :

PROPOSITION 1.4.10 ([21, Lemme 3.4]). *La factorisation  $w = w_1w_2$  d'un mot de Christoffel  $w$  est standard si et seulement si*

$$\det \begin{bmatrix} |w_1|_x & |w_1|_y \\ |w_2|_x & |w_2|_y \end{bmatrix} = 1.$$

### 1.4.2. L'arbre de Christoffel

Il sera souvent avantageux d'utiliser la construction de l'ensemble des mots de Christoffel par l'intermédiaire d'un arbre binaire (voir [21], [22],[26]).

Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des triplets  $(w_1, w_2, w_3)$  de mots dans  $\{x, y\}^*$  tels que  $w_2 = w_1w_3$ . On définit deux applications  $c_L, c_R : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  par

$$c_L(w_1, w_2, w_3) = (w_2, w_2w_3, w_3) \quad \text{et} \quad c_R(w_1, w_2, w_3) = (w_1, w_1w_2, w_2)$$

Posons  $C_0 = (x, xy, y)$  et considérons l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{C_0\} \cup \left\{ C \mid C_0 \xrightarrow{c_1} \dots \xrightarrow{c_n} C \text{ où } c_i = c_L \text{ ou } c_i = c_R \right\}$$

Un élément de  $\mathcal{C}$  est appelé un *triplet de Christoffel*.



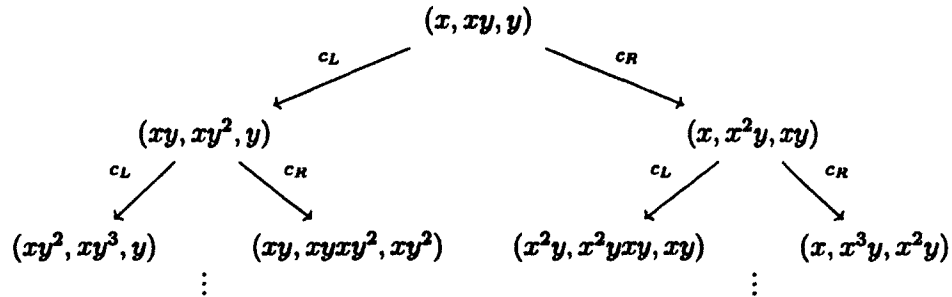
PROPOSITION 1.4.11. *Le triplet  $(\mathcal{C}, c_L, c_R)$  est un arbre binaire de racine  $(x, xy, y)$ .*

DÉMONSTRATION. Il est clair que  $(x, xy, y)$  est la racine de  $\mathcal{C}$ . Montrons d'abord que  $c_L$  est injective. Supposons que  $c_L(w_1, w_2, w_3) = c_L(v_1, v_2, v_3)$ , c'est-à-dire que  $(w_2, w_2w_3, w_3) = (v_2, v_2v_3, v_3)$ . Donc  $w_2 = v_2$ ,  $w_3 = v_3$  et puisque  $w_2 = w_1w_3$ , on a  $v_2 = w_1v_3$ . Mais  $v_2 = v_1v_3$  ainsi  $v_1 = w_1$ . La preuve de l'injectivité de  $c_R$  est semblable.

Supposons que  $\text{Im } c_L \cap \text{Im } c_R$  est non vide. Alors, il existe  $(w_1, w_2, w_3)$ ,  $(v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{C}$  tels que

$$(w_2, w_2w_3, w_3) = c_L(w_1, w_2, w_3) = c_R(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_1v_2, v_2).$$

D'où  $v_1 = w_2 = w_1w_3 = w_1v_2 = w_1v_1v_3$ . Donc  $w_1$  et  $v_3$  sont de longueur zéro, une contradiction car aucun triplet de  $\mathcal{C}$  contient un mot de longueur zéro.  $\square$



THÉORÈME 1.4.12 ([21, Théorème 3.6]). *Soit  $(w_1, w_2, w_3)$  un triplet de Christoffel. Les mots  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  sont des mots de Christoffel et  $w_2 = w_1w_3$  est la factorisation standard de  $w_2$ . De plus, chaque mot de*

*Christoffel propre apparaît exactement une fois comme terme médian d'un triplet de Christoffel.*

On obtient donc une bijection entre  $\mathcal{C}$  et l'ensemble des mots de Christoffel propres donnée par  $(w_1, w_2, w_3) \mapsto w_2$ .

## 1.5. MOTS DE CHRISTOFFEL ET TRIPLETS DE MARKOFF

Les mots de Christoffel apparaissent implicitement dans les travaux de Markoff [74],[75] qui n'était apparemment pas au courant de l'article de Christoffel [35]. Le lien précis entre ces deux concepts n'a été explicité que bien plus tard. La bijection décrite dans cette section est due à Reutenauer [88]. Elle est construite à partir d'une application entre les mots de Christoffel et les nombres de Markoff définie à l'aide d'une méthode développée par Cohn [36]. Un résultat équivalent a été obtenu par Bombieri [24] dans un contexte différent.

On définit un homomorphisme de monoïdes  $\mu : \{x, y\}^* \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  par

$$\mu(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mu(y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**EXEMPLE 1.5.1.** L'image du mot de Christoffel  $C(2, 3) = xyxyy$  par l'homomorphisme  $\mu$  est

$$\begin{aligned} \mu(C(2, 3)) &= \mu(x)\mu(y)\mu(x)\mu(y)\mu(y) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1045 & 433 \\ 613 & 254 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**THÉORÈME 1.5.2** ([88, Théorème 2.1]). *Le triplet  $(a, b, c)$  est un triplet de Markoff propre si et seulement si*

$$\{a, b, c\} = \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mu(w_1), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mu(w_2), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mu(w) \right\}$$

*pour un unique mot de Christoffel  $w$  avec factorisation standard  $w = w_1 w_2$ .*

On peut facilement adapter la preuve de ce théorème pour obtenir le résultat suivant :

**THÉORÈME 1.5.3.** *L'application  $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$  définie par*

$$\Psi(w_1, w, w_2) = \left( \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mu(w_1), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mu(w), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mu(w_2) \right)$$

*rend commutatifs les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M} \\ c_L \downarrow & & \downarrow m_L \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M} \\ c_R \downarrow & & \downarrow m_R \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M} \end{array}$$

*En outre,  $\Psi$  est un isomorphisme d'arbres binaires.*

**DÉMONSTRATION.** D'après le théorème 1.5.2,  $\Psi(C)$  est un triplet de Markoff pour tout  $C \in \mathcal{C}$ . On vérifie aisément que  $\Psi(x, xy, y) = (1, 5, 2)$  ce qui est la racine  $\mathcal{M}$ . Pour montrer que  $\Psi$  est un isomorphisme d'arbres binaires correctement défini, il suffira donc d'établir la commutativité des deux diagrammes. Le lecteur pourra vérifier que

cela consiste essentiellement à démontrer l'égalité

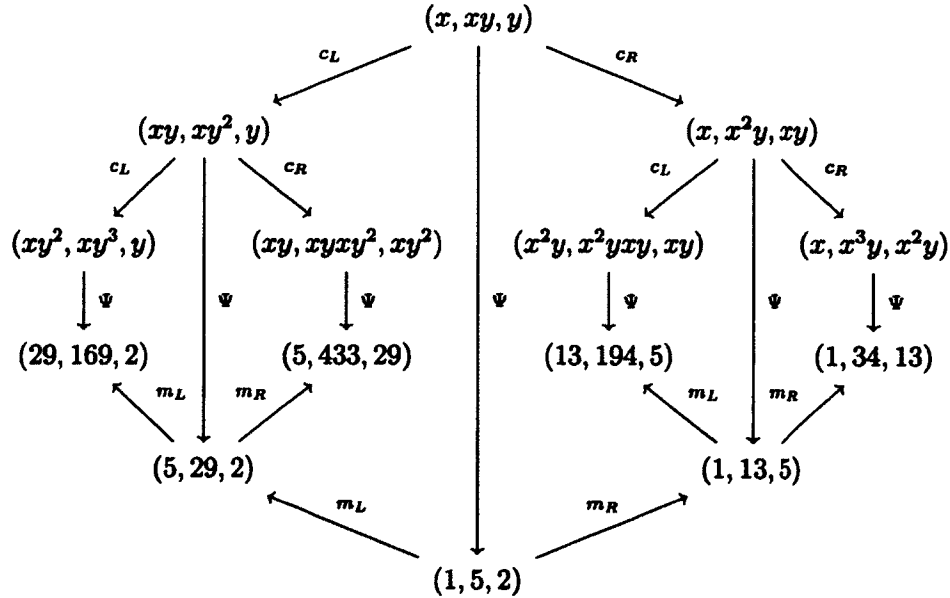
$$\text{Tr } \mu(w_2 w_3) = \text{Tr } \mu(w_2) \text{Tr } \mu(w_3) - \text{Tr } \mu(w_1)$$

où  $(w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{C}$ . Mais ceci est une conséquence du lemme 1.9.4 car  $w_2 = w_1 w_3$ .  $\square$

EXEMPLE 1.5.4. Le mot de Christoffel  $C(2, 3)$  admet la factorisation standard  $C(2, 3) = (xy) \cdot (xyy)$ . Donc  $(xy, xyxyy, xyy) \in \mathcal{C}$  et

$$\begin{aligned} \Psi(xy, xyxy^2, xyy) &= \left( \frac{1}{3} \text{Tr} \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \text{Tr} \begin{bmatrix} 1045 & 433 \\ 613 & 254 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \text{Tr} \begin{bmatrix} 70 & 29 \\ 41 & 17 \end{bmatrix} \right) \\ &= (5, 433, 29) \end{aligned}$$

La figure ci-dessous illustre l'isomorphisme  $\Psi$  sur une partie de  $\mathcal{C}$ .



## 1.6. MODULES DE CORDE

Les modules de corde proviennent des méthodes développées par Gelfand et Ponomarev lors de leur classification des modules indécomposables sur l'algèbre de groupe de Lorentz [50]. Par la suite, cette notion a été généralisée à plusieurs autres situations (voir, par exemple, [25], [32], [42], [89]). Ce développement a finalement abouti à la définition des algèbres de corde ; une classe d'algèbres spécifiquement adaptée aux techniques de Gelfand et Ponomarev.

Soit  $Q = (Q_0, Q_1)$  un carquois avec  $Q_0$  l'ensemble des sommets et  $Q_1$  l'ensemble des flèches. Pour une flèche  $\alpha : i \rightarrow j$ , on note  $s(\alpha) = i$  sa source et  $t(\alpha) = j$  son but. À chaque flèche  $\alpha \in Q_1$ , on associe un inverse formel  $\alpha^{-1}$  tel que  $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$  et  $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ . Écrivons  $Q_1^{-1}$  pour l'ensemble des inverses formels des flèches dans  $Q_1$ . On convient que  $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ . Pour chaque  $i \in Q_0$ , notons  $e_i$  le chemin stationnaire associé au sommet  $i$ .

**DÉFINITION 1.6.1.** Une *corde* de longueur  $n \geq 1$  sur un carquois lié  $(Q, I)$  est une suite  $c = a_1 a_2 \cdots a_n$  d'éléments  $a_i \in Q_1 \cup Q_1^{-1}$  telle que :

- (1)  $t(a_i) = s(a_{i+1})$  pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ .
- (2)  $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$  pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ .
- (3) Pour chaque sous-suite  $v$  de  $w$ , ni  $v$ , ni  $v^{-1}$  n'est contenu dans  $I$ .

De plus, pour chaque sommet  $i \in Q_0$ , on définit une corde  $\varepsilon_i$  de longueur nulle telle que  $s(\varepsilon_i) = t(\varepsilon_i) = i$ .

Pour une corde  $c = a_1 a_2 \cdots a_n$ , on définit sa source  $s(c) = s(a_1)$ , son but  $t(c) = t(a_n)$  et son inverse  $c^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1}$ .

DÉFINITION 1.6.2. Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Une  $k$ -algèbre  $A \cong kQ/I$  est une *algèbre de corde* si :

- (1) L'idéal  $I$  est engendré par des relations monomiales.
- (2) Chaque sommet de  $Q$  est la source d'au plus deux flèches et le but d'au plus deux flèches.
- (3) Pour toute flèche  $\beta$ , il y a au plus une flèche  $\alpha$  telle que  $\alpha\beta \notin I$  et au plus une flèche  $\gamma$  telle que  $\beta\gamma \notin I$ .

Soit  $A = kQ/I$  une algèbre de corde. Étant donné une corde  $c$  sur  $(Q, I)$  il est possible de construire un  $A$ -module  $M(c)$  appelé un *module de corde*. Ce module est construit comme suit : D'abord, si  $c = a_1 a_2 \cdots a_n$  on se fixe une  $k$ -base  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$  de  $M(c)$  que l'on appelle la *base canonique* de  $M(c)$ . Ainsi,

$$M(c) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} kz_i$$

en tant que  $k$ -espace vectoriel. Ensuite, pour conférer à  $M(c)$  une structure de  $A$ -module on commence par définir une application

$$v_c : \{1, 2, \dots, |c| + 1\} \rightarrow Q_0$$

pour chaque corde  $c = a_1 a_2 \cdots a_n$  par

$$v_c(i) = \begin{cases} s(a_i), & \text{si } 1 \leq i \leq |c| \\ t(a_n), & \text{si } i = |c| + 1 \end{cases}$$

et pour les cordes de longueur nulle  $v_{\varepsilon_i}(1) = i$ . Lorsque  $c = a_1 a_2 \cdots a_n$  on définit

$$e_i \cdot z_j = \begin{cases} z_j, & \text{si } j \in v_c(i)^{-1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour une flèche  $\alpha \in Q_1$

$$\alpha \cdot z_i = \begin{cases} z_{i+1}, & \text{si } \alpha = a_i, 1 \leq i \leq n \\ z_{i-1}, & \text{si } \alpha^{-1} = a_{i-1}, 2 \leq i \leq n+1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, si  $c = \varepsilon_i$ , alors on prend une base  $\{z_1\}$  de  $M(c)$  et on définit  $e_j \cdot z_1 = \delta_{ij} z_1$  et  $\alpha \cdot z_1 = 0$ .

On peut montrer que le module  $M(c)$  est indécomposable (voir [32]). De plus, deux modules de corde  $M(c_1)$  et  $M(c_2)$  sont isomorphes si et seulement si  $c_1 = c_2$  ou  $c_1 = c_2^{-1}$ .

### 1.6.1. Applications de graphes

En vertu d'un résultat dû à Crawley-Boevey [40] on peut décrire explicitement une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M(c_1), M(c_2))$  où  $c_1$  et  $c_2$  sont des cordes.

Soit  $c$  une corde sur un carquois lié  $(Q, I)$ . Un triplet de cordes  $(d, e, f)$  tel que  $c = def$  s'appelle une *trisection* de  $c$ .

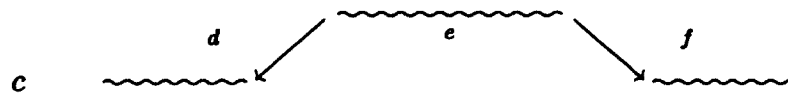
**DÉFINITION 1.6.3.** Une trisection  $(d, e, f)$  de  $c$  telle que



(1) Soit  $d$  est de longueur nulle, soit  $d$  se termine par une flèche inverse.

(2) Soit  $f$  est de longueur nulle, soit  $f$  commence par une flèche.

est appelée une *trisection en corde quotient*. On dit que  $e$  est une *corde quotient* de  $c$ .



Dualement, une trisection  $(d, e, f)$  de  $c$  telle que

(1) Soit  $d$  est de longueur nulle, soit  $d$  se termine par une flèche.

(2) Soit  $f$  est de longueur nulle, soit  $f$  commence par une flèche inverse.

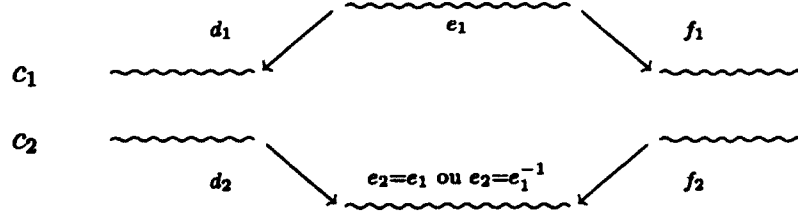
est appelée une *trisection en sous-corde*. On dit que  $e$  est une *sous-corde* de  $c$ .



Les sous-cordes et les cordes quotients correspondent à des sous-modules indécomposables et à des quotients indécomposables, respectivement.

On note  $Q(c)$  l'ensemble des trisections en corde quotient de  $c$  et  $S(c)$  l'ensemble des trisections en sous-corde de  $c$ . Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux cordes, alors on dira qu'un couple  $((d_1, e_1, f_1), (d_2, e_2, f_2)) \in Q(c_1) \times$

$\mathcal{S}(c_2)$  est admissible si  $e_2 = e_1$  ou  $e_2 = e_1^{-1}$ .



Notons  $\mathcal{A}(c_1, c_2)$  l'ensemble des couples admissibles de  $\mathcal{Q}(c_1) \times \mathcal{S}(c_2)$

Pour chaque couple admissible

$$a = ((d_1, e_1, f_1), (d_2, e_2, f_2)) \in \mathcal{A}(c_1, c_2)$$

on définit un morphisme de  $A$ -modules  $f_a : M(c_1) \rightarrow M(c_2)$  de la manière suivante : Soient  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$  et  $\{z'_1, z'_2, \dots, z'_{m+1}\}$  les bases canoniques respectives de  $M(c_1)$  et  $M(c_2)$ . Si  $e_2 = e_1$ , alors

$$f_a(z_{|d_1|+i}) = z'_{|d_2|+i}$$

et si  $e_2 = e_1^{-1}$ , alors

$$f_a(z_{|d_1|+i}) = z'_{|d_2 e_2|+2-i}$$

pour  $1 \leq i \leq |e_1| + 1$  et  $f_a(z_i) = 0$  pour les autres éléments de la base canonique. Un morphisme  $f_a$  est appelé une *application de graphes*.

**THÉORÈME 1.6.4** (Crawley-Boevey [40]). Soient  $A = kQ/I$  une algèbre de corde et  $c_1, c_2$  deux cordes sur  $(Q, I)$ . Alors  $\{f_a \mid a \in \mathcal{A}(c_1, c_2)\}$  est une base de  $\text{Hom}_A(M(c_1), M(c_2))$ .

Dans le cas particulier où  $w_2$  est une corde quotient de  $w_1$ , on écrira simplement  $w_1 \rightarrow w_2$  au lieu de  $f_a$  où  $a = ((x, w_2, y), (\varepsilon_i, w_2, \varepsilon_j))$ , lorsqu'il n'y aura aucun risque de confusion.

## 1.7. MODULES DE MARKOFF

Les triplets mutables ont été introduit dans le mémoire de maîtrise de l'auteur [67] (voir aussi [68] pour une présentation améliorée). Ces objets étaient définis afin de fournir un cadre catégorique pour l'étude d'une certaine algèbre amassée cyclique. Nous résumons ici les principaux résultats sur ces triplets et, ensuite, nous présentons quelques nouveaux développements de cette théorie. On s'intéressera par la suite à un exemple particulier de triplets mutables qui feront l'objet d'étude dans la suite du chapitre.

### 1.7.1. Triplets mutables

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $k$ -abélienne de Krull-Schmidt où  $k$  est un corps.

**DÉFINITION 1.7.1.** Un triplet  $(M_1, M_2, M_3)$ , où  $M_1, M_2, M_3$  sont trois objets indécomposables deux-à-deux non-isomorphes de  $\mathcal{C}$ , sera dit *mutable* s'il satisfait aux conditions suivantes :

$$(M1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3, M_1 \oplus M_2 \oplus M_3) = 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

$$(M2) \quad \dim_k \text{End}_{\mathcal{C}}(M_i) = 1 \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

$$(M3) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, M_j) = 0 \text{ lorsque } i > j.$$

$$(M4) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_2) \text{ admet une base } \{\beta_1, \beta_2\} \text{ où } \beta_1 \text{ et } \beta_2 \text{ sont des monomorphismes,}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2, M_3) \text{ admet une base } \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ où } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont des épimorphismes,}$$

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_3)$  admet une base  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  telle que  $\gamma_1 = \alpha_1\beta_1$  et  $\gamma_2 = \alpha_2\beta_2$ ,  
 $\alpha_1\beta_2 = 0$  et  $\alpha_2\beta_1 = 0$ .

En particulier, les conditions (M2) à (M4) entraînent que le carquois de l'algèbre  $\text{End}_{\mathcal{C}}(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3)$  est de la forme

$$M_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} M_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} M_3$$

où les lignes en pointillé représentent des relations monomiales. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de supposer que  $M_1, M_2, M_3$  soient indécomposables et deux-à-deux non-isomorphes car ces propriétés suivent directement de (M2) et (M3).

**PROPOSITION 1.7.2** ([68, Proposition 4.1]). *Soit  $(M_1, M_2, M_3)$  un triplet mutable, alors*

- (a)  $M_1$  n'est pas injectif.
- (b)  $M_3$  n'est pas projectif.
- (c)  $M_2$  n'est ni injectif, ni projectif.

**PROPOSITION 1.7.3** ([68, Proposition 4.2]). *Soit  $(M_1, M_2, M_3)$  un triplet mutable. Il existe des suites exactes courtes dans  $\mathcal{C}$*

$$0 \longrightarrow M'_3 \xrightarrow{f} M_2 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0 \quad (3)$$

où  $f$  est une  $\text{add}(M_1 \oplus M_2)$ -approximation minimale à gauche et  $g$  est une  $\text{add}(M_1 \oplus M_2)$ -approximation minimale à droite, et

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f'} M_2 \oplus M_2 \xrightarrow{g'} M'_1 \longrightarrow 0$$

où  $f$  est une  $\text{add}(M_2 \oplus M_3)$ -approximation minimale à gauche et  $g$  est une  $\text{add}(M_2 \oplus M_3)$ -approximation minimale à droite.

Soit  $T = (M_1, M_2, M_3)$  un triplet mutable. Puisque les approximations minimales sont uniques à isomorphisme près, il en est de même pour les objets  $M'_1$  et  $M'_3$  de la proposition 1.7.3. Ce qui nous mène à définir  $\mu_L(T) = (M_2, M'_1, M_3)$  et  $\mu_R(T) = (M_1, M'_3, M_2)$ . Les résultats qui suivent serviront à démontrer que  $\mu_L(T)$  et  $\mu_R(T)$  sont des triplets mutables.

LEMME 1.7.4 ([68, Proposition 4.3]). Soit  $\mu_R(T) = (M_1, M'_3, M_2)$  où  $T = (M_1, M_2, M_3)$  est un triplet mutable, alors

- (a)  $\dim_k \text{Hom}_C(M_1, M'_3) = \dim_k \text{Hom}_C(M'_3, M_2) = 2$
- (b)  $\text{Hom}_C(M'_3, M_1) = \text{Hom}_C(M_2, M'_3) = 0$
- (c)  $\dim_k \text{Hom}_C(M'_3, M_3) = 3$  et  $\text{Hom}_C(M_3, M'_3) = 0$
- (d)  $\dim_k \text{Ext}_C^1(M_3, M'_3) = 1$
- (e)  $\dim_k \text{End}_C(M'_3) = 1$

LEMME 1.7.5 ([68, Proposition 4.4]). Soit  $\mu_L(T) = (M_2, M'_1, M_3)$  où  $T = (M_1, M_2, M_3)$  est un triplet mutable, alors

- (a)  $\dim_k \text{Hom}_C(M_2, M'_1) = \dim_k \text{Hom}_C(M'_1, M_3) = 2$
- (b)  $\text{Hom}_C(M'_1, M_2) = \text{Hom}_C(M_3, M'_1) = 0$
- (c)  $\dim_k \text{Hom}_C(M'_1, M_1) = 0$  et  $\text{Hom}_C(M_1, M'_1) = 3$
- (d)  $\dim_k \text{Ext}_C^1(M'_1, M_1) = 1$
- (e)  $\dim_k \text{End}_C(M'_1) = 1$

LEMME 1.7.6. *Soit  $T = (M_1, M_2, M_3)$  un triplet mutable.*

- (a) *Soit  $\mu_R(T) = (M_1, M'_3, M_2)$ , alors il existe des bases  $\{\beta'_1, \beta'_2\}$  et  $\{\alpha'_1, \alpha'_2\}$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M'_3)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M'_3, M_2)$  respectivement, telles que  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$  sont des monomorphismes,  $\alpha'_1$  et  $\alpha'_2$  sont des épimorphismes, et  $\beta_1 = \alpha'_2\beta'_2$ ,  $\beta_2 = \alpha'_1\beta'_1$ ,  $\alpha'_2\beta'_1 = 0 = \alpha'_1\beta'_2$ .*
- (b) *Soit  $\mu_L(T) = (M_2, M'_1, M_3)$ , alors il existe des bases  $\{\beta'_1, \beta'_2\}$  et  $\{\alpha'_1, \alpha'_2\}$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2, M'_1)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M'_1, M_3)$  respectivement, telles que  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$  sont des monomorphismes,  $\alpha'_1$  et  $\alpha'_2$  sont des épimorphismes, et  $\alpha_1 = \alpha'_2\beta'_2$ ,  $\alpha_2 = \alpha'_1\beta'_1$ ,  $\alpha'_2\beta'_1 = 0 = \alpha'_1\beta'_2$ .*

DÉMONSTRATION <sup>1</sup>. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) est semblable.

Soient  $\alpha'_1, \alpha'_2 : M'_3 \rightarrow M_2$  les composantes de  $f = \ker g$  où  $f$  et  $g$  sont les morphismes de la suite exacte courte (3). En appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M_2)$  à (3), on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_3, M_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2 \oplus M_2, M_2) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M'_3, M_2) \longrightarrow 0$$

car  $f$  est une  $\text{add}(M_1 \oplus M_2)$ -approximation à gauche. Donc, le morphisme induit  $f^*$  est un isomorphisme car  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_3, M_2) = 0$ .

Soient  $\pi_1, \pi_2$  les projections canoniques  $M_2 \oplus M_2 \rightarrow M_2$ , il s'en suit de (M2) que  $\{\pi_1, \pi_2\}$  est une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2 \oplus M_2, M_2)$ . Ainsi  $\{\alpha'_1, \alpha'_2\} = f^*(\{\pi_1, \pi_2\})$  est une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M'_3, M_2)$ . On doit maintenant montrer que  $\alpha'_1$  and  $\alpha'_2$  sont des épimorphismes. Considérons le

---

1. La démonstration dans [67] est incomplète. Nous présentons ici une version corrigée.

diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M'_3 & \xrightarrow{f} & M_2 \oplus M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha'_1 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \xlongequal{\quad} & M_2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

D'après le lemme du serpent, on a un diagramme à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha'_1 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \iota_2 & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M'_3 & \xrightarrow{f} & M_2 \oplus M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha'_1 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \xlongequal{\quad} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Coker } \alpha'_1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

De plus, il existe une suite exacte

$$M_2 \xrightarrow{\alpha_2} M_3 \longrightarrow \text{Coker } \alpha'_1 \longrightarrow 0$$

d'où  $\text{Coker } \alpha'_1 = 0$  car  $\alpha_2$  est un épimorphisme. Le même raisonnement sert à montrer que  $\alpha'_2$  est un épimorphisme.



On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M'_3) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_2 \oplus M_2) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_3) \longrightarrow 0$$

donc  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M'_3) \cong \text{Im } f_* = \text{Ker } g_*$  d'où  $\dim_k \text{Im } f_* = 2$ . D'après (M4),  $\alpha_1 \beta_2 = 0$  et  $\alpha_2 \beta_1 = 0$  ainsi  $\begin{bmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \in \text{Ker } g_*$  car  $g = [\alpha_1 \ \alpha_2]$ . Ces deux morphismes forment donc une base de  $\text{Im } f_*$ . Par conséquent, il existe une base  $\{\beta'_1, \beta'_2\}$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M'_3)$  telle que

$$f\beta'_1 = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \beta'_1 \\ \alpha'_2 \beta'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f\beta'_2 = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \beta'_2 \\ \alpha'_2 \beta'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

De plus,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des monomorphismes car  $\beta'_1$  and  $\beta'_2$  le sont.  $\square$

En combinant les lemmes 1.7.4 à 1.7.6 et en appliquant le corollaire 4.4 de [67], on obtient le résultat suivant :

**THÉORÈME 1.7.7.** *Si  $T = (M_1, M_2, M_3)$  est un triplet mutable, alors les triplets  $\mu_L(T)$  et  $\mu_R(T)$  sont mutables.*

Soit  $\mathcal{T}(T_0)$  l'ensemble des triples mutables obtenus par applications itérées de  $\mu_L$  et  $\mu_R$  à partir d'un triplet mutable  $T_0$ .

$$\mathcal{T}(T_0) = \{T_0\} \cup \left\{ T \mid T_0 \xrightarrow{\mu_1} \dots \xrightarrow{\mu_n} T \text{ où } \mu_i = \mu_L \text{ ou } \mu_i = \mu_R \right\}$$

Les deux opérations  $\mu_L$  and  $\mu_R$  peuvent être vues comme des applications  $\mathcal{T}(T_0) \rightarrow \mathcal{T}(T_0)$ . Un triplet  $T$  est dit *non initial* si  $T \in \mathcal{T}(T_0) \setminus \{T_0\}$  pour un certain  $T_0$ .

LEMME 1.7.8. *Soit  $T = (M_1, M_2, M_3)$  un triplet mutable non initial.*

*On a la dichotomie : soit*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} : M_2 \rightarrow M_3 \oplus M_3 \text{ est un monomorphisme,}$$

*soit*

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} : M_1 \oplus M_1 \rightarrow M_2 \text{ est un épimorphisme.}$$

*Le premier cas se produit lorsque  $T = \mu_R(T')$  et le second cas lorsque  $T = \mu_L(T')$  pour un certain triplet mutable  $T'$ .*

DÉMONSTRATION. On considéra seulement le premier cas, le second étant semblable.

Soit  $T = (M_1, M_2, M_3)$  un triplet mutable et posons  $\mu_R(T) = (M_1, M'_3, M_2)$ . Il existe une suite exacte courte

$$0 \rightarrow M'_3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix}} M_2 \oplus M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

d'après la proposition 1.7.3. En particulier  $\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix}$  est un monomorphisme.

On a  $\text{Hom}_C(M'_3, M_2) = \langle \beta'_1, \beta'_2 \rangle$  où les  $\beta'_i$  sont les morphismes du lemme 1.7.6. Supposons maintenant que  $[\beta'_1 \ \beta'_2]$  est un épimorphisme.

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \beta'_1 & \alpha'_1 \beta'_2 \\ \alpha'_2 \beta'_1 & \alpha'_2 \beta'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix}$$

Puisque  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des monomorphismes, on en déduit la contradiction :  $\begin{bmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \end{bmatrix} : M_1 \oplus M_1 \rightarrow M'_3$  est un isomorphisme.  $\square$

Ce qui nous mène à définir l'application  $\mu_C : \mathcal{T}(T_0) \setminus \{T_0\} \rightarrow \mathcal{T}(T_0)$  par

$$\mu_C(M_1, M_2, M_3) = \begin{cases} (M_1, M_3, \text{Coker} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}) & \text{si } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \text{ est un mono.} \\ (\text{Ker} [\beta_1 \ \beta_2], M_1, M_3) & \text{si } [\beta_1 \ \beta_2] \text{ est un épi.} \end{cases}$$

On montrera dans la proposition suivante que cette application vérifie  $\mu_C \mu_L = \mathbb{I}_{\mathcal{T}(T_0)}$  et  $\mu_C \mu_R = \mathbb{I}_{\mathcal{T}(T_0)}$ ; c'est-à-dire,  $\mu_C$  est un inverse à gauche de  $\mu_L$  et de  $\mu_R$ .

**PROPOSITION 1.7.9.** *Le triplet  $(\mathcal{T}(T_0), \mu_L, \mu_R)$  est un arbre binaire de racine  $T_0$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'après lemme 1.7.8, on a  $\text{Im } \mu_L \cap \text{Im } \mu_R = \emptyset$ .

Pour établir l'injectivité de  $\mu_R$ , il suffit de montrer que  $\mu_C \mu_R = \mathbb{I}_{\mathcal{T}(T_0)}$ . Soit  $T = (M_1, M_2, M_3)$  un élément de  $\mathcal{T}(T_0)$ , alors  $\mu_R(T) = T' = (M_1, M'_3, M_2)$  où  $\text{Hom}_C(M'_3, M_2) = \langle \alpha'_1, \alpha'_2 \rangle$  où  $\alpha'_1, \alpha'_2$  sont comme dans le lemme 1.7.6. D'après le lemme 1.7.8,  $\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix}$  est un monomorphisme. Ainsi  $\mu_C(T') = (M_1, M_2, \text{Coker} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix})$ . Mais, puisque  $T' = \mu_R(T)$ , il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow M'_3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix}} M_2 \oplus M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

Par conséquent,  $\mu_C(\mu_R(T)) = T$ . L'injectivité de  $\mu_L$  se démontre de la même façon.  $\square$

Les opérations  $\mu_L$ ,  $\mu_C$  et  $\mu_R$  peuvent être vues comme analogues aux mutations d'un objet inclinant dans une catégorie amassée (voir [28]).

### 1.7.2. Modules de Markoff

EXEMPLE 1.7.10. Soit  $A$  la  $k$ -algèbre de corde donnée par le carquois

$$2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\delta} \end{array} 3$$

lié par les relations  $\alpha\beta = 0$  et  $\gamma\delta = 0$ . Considérons les cordes  $w_1 = \varepsilon_1$ ,  $w_2 = \alpha^{-1}\gamma\beta\delta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$  and  $w_3 = \alpha^{-1}\gamma$ .

$$w_2 = \begin{array}{c} & 2 & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \gamma \\ 1 & & 1 \\ & \beta \searrow & \swarrow \delta \\ & 3 & \end{array} \quad w_3 = \begin{array}{c} & 2 & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \gamma \\ 1 & & 1 \end{array}$$

On vérifie aisément que les  $A$ -modules de corde correspondants forment un triplet mutable  $T_0 = (M(w_1), M(w_2), M(w_3))$ .

DÉFINITION 1.7.11. Soit  $T_0$  le triplet mutable de l'exemple 1.7.10. Un élément de  $\mathcal{T}(T_0)$  est appelé un *triplet de modules de Markoff* et un module faisant partie d'un tel triplet s'appelle un *module de Markoff*. Tout module de Markoff apparaissant comme terme médian d'un triplet de modules de Markoff est dit *propre*.

Nous allons maintenant nous concentrer sur le comportement des triplets de modules de Markoff sous l'action des opérations  $\mu_R$  et  $\mu_L$ . Pour un module  $M$ , on notera  $\underline{\dim} M$  son vecteur dimension. Remarquons que lorsque  $M(w)$  est un module de corde avec  $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ , on a  $\underline{\dim} M(w) = (\delta_{i(a_n),j} + \sum_{i=1}^n \delta_{s(a_i),j})_{j \in Q_0}$  et  $\underline{\dim} M(\varepsilon_i) = (\delta_{i,j})_{j \in Q_0}$  où  $\delta_{i,j}$  est la fonction delta de Kronecker.

**COROLLAIRE 1.7.12.** *Soit  $T = (M_1, M_2, M_3)$  un triplet de modules de Markoff.*

(a) *Si  $\mu_R(T) = (M_1, M'_3, M_2)$ , alors  $\underline{\dim} M'_3 = 2 \underline{\dim} M_2 - \underline{\dim} M_3$ .*

(b) *Si  $\mu_L(T) = (M_2, M'_1, M_3)$ , alors  $\underline{\dim} M'_1 = 2 \underline{\dim} M_2 - \underline{\dim} M_1$ .*

*De plus, si  $M$  est un module de Markoff avec  $\underline{\dim} M = (a, b, c)$ , alors  $a - b - c = 1$ .*

**DÉMONSTRATION.** Les propriétés (a) et (b) découlent directement de la proposition 1.7.3 et de l'additivité de la fonction  $\underline{\dim}$ . D'autre part, il est clair que le deuxième énoncé est vérifié pour chaque module appartenant au triplet initial  $T_0$  car  $\underline{\dim} M(w_1) = (1, 0, 0)$ ,  $\underline{\dim} M(w_2) = (4, 2, 1)$  et  $\underline{\dim} M(w_3) = (2, 1, 0)$ . Supposons qu'il en est de même pour les modules d'un certain triplet  $T = (M_1, M_2, M_3)$ . Considérons  $\mu_L(T) = (M_2, M'_1, M_3)$  et soit  $\underline{\dim} M'_1 = (a, b, c)$ ,  $\underline{\dim} M_1 = (a_1, b_1, c_1)$

et  $\dim M_2 = (a_2, b_2, c_2)$ . Alors la partie (b) implique que

$$\begin{aligned} a - b - c &= (2a_2 - a_1) - (2b_2 - b_1) - (2c_2 - c_1) \\ &= 2(a_2 - b_2 - c_2) - (a_1 - b_1 - c_1) \\ &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

La preuve du cas  $\mu_R(T)$  est semblable.  $\square$

**PROPOSITION 1.7.13.** *Si  $T = (M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  est un triplet de modules de Markoff, alors*

(a)  $w_2 = w_3 u_1 = u_2 w_3$  pour certaines cordes  $u_1, u_2$  et les deux apparitions de  $w_3$  sont des cordes quotients de  $w_2$ .

(b)  $w_2 = w_1 v_1 = v_2 w_1$  pour certaines cordes  $v_1, v_2$  et les deux apparitions de  $w_1$  sont des sous-cordes de  $w_2$ .

De plus,

$$\mu_R(T) = (M(w_1), M(w'_3), M(w_2)) \text{ où } w'_3 = w_2 u_1 = u_2 w_2$$

et

$$\mu_L(T) = (M(w_2), M(w'_1), M(w_3)) \text{ où } w'_1 = w_2 v_1 = v_2 w_2$$

où  $u_1, u_2, v_1$  et  $v_2$  sont les cordes décrites ci-dessus.

**DÉMONSTRATION.** On vérifie aisément les conditions pour le triplet initial  $T_0$  de la définition 1.7.11. Supposons que les propriétés soient satisfaites pour un certain  $T = (M(w_1), M(w_2), M(w_3))$ . Considérons les morphismes  $\alpha_1, \alpha_2 : M(w_2) \rightarrow M(w_3)$  où  $\alpha_1 : w_2 = w_3 u_1 \rightarrow w_3$  et  $\alpha_2 : w_2 = u_2 w_3 \rightarrow w_3$  sont les projections canoniques. Il est clair

que  $g = [\alpha_1 \ \alpha_2] : M(w_2) \oplus M(w_2) \rightarrow M(w_3)$  est un épimorphisme. Posons  $w'_3 = w_2u_1$ , alors on a  $w'_3 = u_2w_2$  car  $w_2u_1 = u_2w_3u_1 = u_2w_2$ . On définit  $\alpha'_1, \alpha'_2 : M(w'_3) \rightarrow M(w_2)$  par  $\alpha'_1 : w'_3 = w_2u_1 \rightarrow w_2$  et  $\alpha'_2 : w'_3 = u_2w_2 \rightarrow w_2$ . On a  $\alpha_1\alpha'_1 = \alpha_2\alpha'_2$  et  $f = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ -\alpha'_2 \end{bmatrix} : M(w'_3) \rightarrow M(w_2) \oplus M(w_2)$  est un monomorphisme. Par conséquent, on obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M(w'_3) \xrightarrow{f} M(w_2) \oplus M(w_2) \xrightarrow{g} M(w_3) \longrightarrow 0$$

Par construction, il s'agit de la suite exacte décrite dans la proposition 1.7.3 d'où  $\mu_R(T) = (M(w_1), M(w'_3), M(w_2))$ . En outre, on note que  $w'_3 = w_2u_1 = w_1(v_1u_1)$  et  $w'_3 = u_2w_2 = (u_2v_2)w_1$ . La démonstration pour  $\mu_R(T)$  est semblable.  $\square$

**EXEMPLE 1.7.14.** Considérons le triplet de modules de Markoff  $T_0 = (M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  introduit dans la définition 1.7.11. Puisque  $w_2 = \alpha^{-1}\gamma\beta\delta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$  et  $w_3 = \alpha^{-1}\gamma$ , on a

$$w_2 = (\alpha^{-1}\gamma) \cdot (\beta\delta^{-1}\alpha^{-1}\gamma) = w_3u_1$$

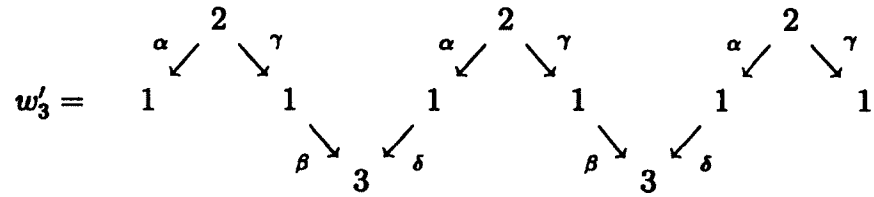
$$w_2 = (\alpha^{-1}\gamma\beta\delta^{-1}) \cdot (\alpha^{-1}\gamma) = u_2w_3$$

où  $u_1 = \beta\delta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$  et  $u_2 = \alpha^{-1}\gamma\beta\delta^{-1}$ . De plus,  $w_2 = \varepsilon_1w_2 = w_1v_1$  et  $w_2 = w_2\varepsilon_1 = v_2w_1$  où  $v_1 = v_2 = w_2$ . En vertu de la proposition 1.7.13, on en déduit que  $\mu_R(T) = (M(w_1), M(w'_3), M(w_2))$  est donné par

$$w'_3 = w_2u_1 = (\alpha^{-1}\gamma\beta\delta^{-1}\alpha^{-1}\gamma) \cdot (\beta\delta^{-1}\alpha^{-1}\gamma)$$

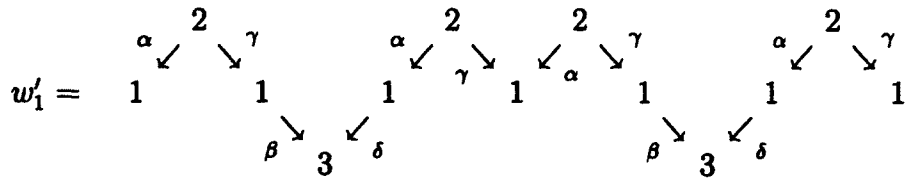
ou

$$w'_3 = u_2 w_2 = (\alpha^{-1} \gamma \beta \delta^{-1}) \cdot (\alpha^{-1} \gamma \beta \delta^{-1} \alpha^{-1} \gamma)$$



et  $\mu_L(T) = (M(w_2), M(w'_1), M(w_3))$  est donné par

$$w'_1 = w_2 v_1 = v_2 w_2 = (\alpha^{-1} \gamma \beta \delta^{-1} \alpha^{-1} \gamma) \cdot (\alpha^{-1} \gamma \beta \delta^{-1} \alpha^{-1} \gamma)$$





## 1.8. MODULES DE MARKOFF ET MOTS DE CHRISTOFFEL

Dans cette section, on établira un isomorphisme entre l'arbre des triplets de modules de Markoff et l'arbre de Christoffel. Une conséquence importante de cette construction est une démonstration simple du fait que chaque triplet de modules de Markoff  $(M_1, M_2, M_3)$  est uniquement déterminé par le module  $M_2$ . On définit d'abord une application qui envoie chaque module de Markoff sur un mot de Christoffel.

À chaque module de Markoff  $M$ , on associe une paire d'entiers  $\delta(M)$  comme suit : soit  $(a, b, c)$  le vecteur dimension de  $M$ , alors

$$M \mapsto \delta(M) = (a - 2b + c, b - c)$$

EXEMPLE 1.8.1. Soit  $(M_1, M_2, M_3)$  le triplet de modules de Markoff de la définition 1.7.11. On a

$$\underline{\dim} M_1 = (1, 0, 0), \quad \underline{\dim} M_2 = (4, 2, 1) \quad \text{et} \quad \underline{\dim} M_3 = (2, 1, 0).$$

Donc

$$\delta(M_1) = (1, 0), \quad \delta(M_2) = (1, 1) \quad \text{et} \quad \delta(M_3) = (0, 1).$$

LEMME 1.8.2. Si  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbf{Z})$ , alors  $\text{pgcd}(a + c, b + d) = 1$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . On a

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = (ad + cd) - (bc + cd) = d(a + c) - c(b + d).$$

D'après le lemme de Bézout,  $\text{pgcd}(a + c, b + d) = 1$ .  $\square$

LEMME 1.8.3. Soit  $(M_1, M_2, M_3)$  un triplet de modules de Markoff et posons  $(x_i, y_i) = \delta(M_i)$ . Alors

$$(a) \delta(M_2) = \delta(M_1) + \delta(M_3).$$

$$(b) \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = 1.$$

$$(c) \text{pgcd}(x_i, y_i) = 1 \text{ pour chaque } i = 1, 2, 3.$$

DÉMONSTRATION. Pour le triplet initial on a

$$\delta(M_1) = (1, 0), \quad \delta(M_2) = (1, 1) \quad \text{et} \quad \delta(M_3) = (0, 1).$$

Les trois conditions de l'énoncé sont évidemment satisfaites. Supposons qu'un triplet  $T = (M_1, M_2, M_3)$  satisfait à ces conditions. On montrera qu'il en est de même pour  $\mu_L(T) = (M_2, M'_1, M_3)$ ; la preuve pour  $\mu_R(T)$  est semblable.

Posons  $\delta(M'_1) = (x, y)$ ,  $\underline{\dim} M_i = (a_i, b_i, c_i)$  et  $\underline{\dim} M'_1 = (a, b, c)$ .

D'après corollaire 1.7.12, on a  $\underline{\dim} M'_1 = 2 \underline{\dim} M_2 - \underline{\dim} M_1$  ainsi

$$\begin{aligned} x &= a - 2b + c = (2a_2 - a_1) - 2(2b_2 - b_1) + (2c_2 - c_1) \\ &= 2(a_2 - 2b_2 + c_2) - (a_1 - 2b_1 + c_1) \\ &= 2x_2 - x_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y = b - c &= (2b_2 - b_1) - (2c_2 - c_1) \\ &= 2(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1) \\ &= 2y_2 - y_1. \end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence,  $x_2 = x_1 + x_3$  et  $y_2 = y_1 + y_3$ .

On en déduit  $2x_2 - x_1 = x_2 + x_3$  et  $2y_2 - y_1 = y_2 + y_3$ . D'où

$$\delta(M'_1) = (2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1) = (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \delta(M_2) + \delta(M_3).$$

De plus,

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - y_2x_3 = (x_1 + x_3)y_3 - (y_1 + y_3)x_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Il s'ensuit du lemme 1.8.2 que  $\text{pgcd}(x, y) = 1$ . □

Le lemme 1.8.3(c) nous permet d'associer à chaque module de Markoff  $M$  le mot de Christoffel  $C(\delta(M))$  que l'on notera  $C_\delta(M)$ .

**PROPOSITION 1.8.4.** *Si  $(M_1, M_2, M_3)$  est un triplet de modules de Markoff, alors  $C_\delta(M_2) = C_\delta(M_1)C_\delta(M_3)$  est la factorisation standard du mot de Christoffel  $C_\delta(M_2)$ .*

**DÉMONSTRATION.** C'est une conséquence directe du lemme 1.8.3 et de la proposition 1.4.9. □

**EXEMPLE 1.8.5.** Considérons le triplet de modules de Markoff  $(M(w_2), M(w'_1), M(w_3))$  où  $w_2 = \alpha^{-1}\gamma\beta\delta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$ ,  $w'_1 = w_2w_2$  et  $w_3 = \alpha^{-1}\gamma$  (voir l'exemple 1.7.14). Alors  $\underline{\dim} M(w_2) = (4, 2, 1)$ ,  $\underline{\dim} M(w'_1) = (7, 4, 2)$  et  $\underline{\dim} M(w_3) = (2, 1, 0)$ . Donc  $C_\delta(M(w_2)) = C(1, 1) = xy$ ,  $C_\delta(M(w'_1)) = C(1, 2) = xyy$  et  $C_\delta(M(w_3)) = C(0, 1) = y$ . On constate que la factorisation standard de  $xyy$  est donnée par  $xy \cdot y$ .

Soient  $\mathcal{T}$  l'ensemble des triplets de modules de Markoff et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des triplets de Christoffel. On définit une application  $\Theta : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$  par

$$(M_1, M_2, M_3) \mapsto (C_\delta(M_1), C_\delta(M_2), C_\delta(M_3))$$

Cette application est correctement définie d'après la proposition 1.8.4.

**THÉORÈME 1.8.6.** *Les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{C} \\ \mu_L \downarrow & & \downarrow c_L \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{C} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{C} \\ \mu_R \downarrow & & \downarrow c_R \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{C} \end{array}$$

En outre,  $\Theta$  est un isomorphisme d'arbres binaires.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $T = (M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{T}$  et posons  $\mu_L(T) = (M_2, M'_1, M_3)$  et  $\mu_R(T) = (M_1, M'_2, M_3)$ . On a

$$\Theta\mu_L(T) = \Theta(M_2, M'_1, M_3) = (C_\delta(M_2), C_\delta(M'_1), C_\delta(M_3))$$

$$\Theta\mu_R(T) = \Theta(M_1, M'_2, M_3) = (C_\delta(M_1), C_\delta(M'_2), C_\delta(M_3))$$

et

$$\begin{aligned}
c_L\Theta(T) &= c_L(C_\delta(M_1), C_\delta(M_2), C_\delta(M_3)) \\
&= (C_\delta(M_2), C_\delta(M_2)C_\delta(M_3), C_\delta(M_3)) \\
c_R\Theta(T) &= c_R(C_\delta(M_1), C_\delta(M_2), C_\delta(M_3)) \\
&= (C_\delta(M_1), C_\delta(M_1)C_\delta(M_2), C_\delta(M_2))
\end{aligned}$$

La commutativité est donc une conséquence de la proposition 1.8.4 car

$$C_\delta(M'_1) = C_\delta(M_2)C_\delta(M_3) \quad \text{et} \quad C_\delta(M'_3) = C_\delta(M_1)C_\delta(M_2).$$

Pour montrer que  $\Theta$  est un isomorphisme, il suffit, selon le théorème 1.2.6, d'établir que l'image de la racine de  $\mathcal{T}$  est la racine de  $\mathcal{C}$ . Or cette image est

$$(C(1, 0), C(1, 1), C(0, 1)) = (x, xy, y)$$

ce qui est bien la racine de  $\mathcal{C}$ . □

**COROLLAIRE 1.8.7.** *Tout triplet de modules de Markoff est uniquement déterminé par son terme médian.*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $T = (M_1, M_2, M_3)$  et  $T' = (M'_1, M_2, M'_3)$  deux triplets de modules de Markoff. Écrivons  $\Theta(T) = (w_1, w_2, w_3)$  et  $\Theta(T') = (w'_1, w_2, w'_3)$ . Alors  $w_2 = w_1w_3$  et  $w_2 = w'_1w'_3$  sont deux factorisations standards du mot de Christoffel  $w_2$ . De l'unicité de cette

factorisation, on déduit que  $w_1 = w'_1$  et  $w_3 = w'_3$  donc  $\Theta(T) = \Theta(T')$ . On conclut que  $T = T'$  car  $\Theta$  est un isomorphisme.  $\square$

**COROLLAIRE 1.8.8.** *L'application  $M \mapsto C_\delta(M)$  définit une bijection entre l'ensemble des modules de Markoff et l'ensemble des mots de Christoffel.*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $\mathcal{M}$  l'ensemble des modules de Markoff propres et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des mots de Christoffel propres. Le corollaire 1.8.7 nous permet de définir une bijection  $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ . On a aussi une bijection  $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$  donnée par  $(w_1, w, w_2) \mapsto w$ . On voit facilement que la composition

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T} \xrightarrow{\Theta} \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$$

est une bijection donnée par  $M \mapsto C_\delta(M)$ . En envoyant les deux modules de Markoff impropres sur les deux mots de Christoffel impropres, on obtient la bijection cherchée.  $\square$

## 1.9. MODULES DE MARKOFF ET TRIPLETS DE MARKOFF

L'objectif de cette section est d'établir notre théorème principal. On définira un isomorphisme entre l'arbre des modules de Markoff et l'arbre des triplets de Markoff en utilisant les traces de matrices dans  $SL_2(\mathbf{Z})$ . Ainsi, il faudra d'abord associer une matrice à chaque module de Markoff. Ensuite, pour faire le lien entre les traces de ces matrices et les triples de Markoff, on fera appel aux identités matricielles de Fricke [47].

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de toutes les cordes sur un carquois lié  $(Q, I)$ . On définit une application  $\nu : \mathcal{S} \rightarrow Q_0^*$  par

$$\nu(w) = \begin{cases} s(a_1)s(a_2)\cdots s(a_n)t(a_n) & \text{si } w = a_1a_2\cdots a_n \\ i & \text{si } w = \varepsilon_i \end{cases}$$

**EXEMPLE 1.9.1.** Considérons les cordes  $w_1, w_2$  et  $w_3$  définies dans l'exemple 1.7.10. Dans ce cas,  $Q_0 = \{1, 2, 3\}$  et on a  $\nu(w_1) = 1$ ,  $\nu(w_2) = 1213121$  et  $\nu(w_3) = 121$ .

Définissons un homomorphisme de monoïdes  $\rho : \{1, 2, 3\}^* \rightarrow SL_2(\mathbf{Z})$  par

$$\rho(1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Des matrices semblables (avec les diagonales renversées) apparaissent dans les travaux de Cohn sur les formes de Markoff (voir [36], [38]).

Lorsque  $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ , on notera la composition  $\varphi = \rho\nu$ .

EXEMPLE 1.9.2. Reprenons les cordes de l'exemple 1.9.1. On a

$$\varphi(w_1) = \rho(1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(w_3) = \rho(1)\rho(2)\rho(1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(w_2) = \rho(121)\rho(3)\rho(121) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

LEMME 1.9.3. Soient  $v$  et  $w$  deux cordes. Si la concaténation  $vw$  est une corde, alors

$$\varphi(vw) = \varphi(v)\varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(w)$$

où  $i$  est le but de  $v$  (et la source de  $w$ ).

DÉMONSTRATION. Si  $v = \varepsilon_i$ , alors  $vw = w$ . On a

$$\varphi(vw) = \varphi(w) = \varphi(v)\varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(w)$$

Le cas  $w = \varepsilon_i$  est semblable.



Supposons que  $v$  et  $w$  sont non-triviaux. Écrivons  $v = a_1 a_2 \cdots a_n$  et  $w = b_1 b_2 \cdots b_m$ . Puisque  $t(a_n) = i$ , on a

$$\rho(t(a_n)) = \rho(i) = \varphi(\varepsilon_i)$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi(v)\varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(w) &= \rho(s(a_1) \cdots s(a_n)t(a_n))\varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(w) \\ &= \rho(s(a_1) \cdots s(a_n))\varphi(\varepsilon_i)\varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(w) \\ &= \rho(s(a_1) \cdots s(a_n))\rho(s(b_1) \cdots s(b_m)t(b_m)) \\ &= \rho(s(a_1) \cdots s(a_n)s(b_1) \cdots s(b_m)t(b_m)) \\ &= \varphi(vw). \end{aligned}$$

□

### 1.9.1. Propriétés de la trace

Pour poursuivre notre étude de la fonction  $\varphi$ , on aura besoin de quelques identités matricielles. On s'intéresse particulièrement aux propriétés de la trace des matrices dans  $SL_2(\mathbb{Z})$ . On rappelle que la trace est invariante par permutations cycliques. En particulier,

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA).$$

LEMME 1.9.4 (Fricke [47]). *Pour tout  $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ ,*

$$\mathrm{Tr}(AB^2) + \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(AB) \mathrm{Tr}(B).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ . On a

$$B + B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}(B)I_2.$$

D'où

$$AB^2 + A = ABB + AB^{-1}B = A \mathrm{Tr}(B)I_2B = \mathrm{Tr}(B)AB$$

en prenant la trace, on obtient

$$\mathrm{Tr}(AB^2) + \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(AB) \mathrm{Tr}(B).$$

□

LEMME 1.9.5. *Pour tout  $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ ,*

$$\mathrm{Tr}(AB^{-1}) = \mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB).$$

DÉMONSTRATION. On a  $B^{-1} + B = \mathrm{Tr}(B)I_2$  et en multipliant par  $A$  on obtient

$$AB^{-1} + AB = \mathrm{Tr}(B)A$$

d'où

$$\mathrm{Tr}(AB^{-1}) + \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(A).$$

□

THÉORÈME 1.9.6 (Identité de Fricke [47]). *Pour tout  $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ ,*

$$\mathrm{Tr}(A)^2 + \mathrm{Tr}(B)^2 + \mathrm{Tr}(AB)^2 = \mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) + 2.$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1.9.4,

$$\mathrm{Tr}(I_2 A^2) + \mathrm{Tr}(I_2) = \mathrm{Tr}(I_2 A) \mathrm{Tr}(A)$$

ainsi

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(A)^2 - 2.$$

D'autre part, le lemme 1.9.5 entraîne que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) &= \mathrm{Tr}(AB(B^{-1}A)^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(AB) \mathrm{Tr}(B^{-1}A) - \mathrm{Tr}(ABB^{-1}A). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.9.4, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) &= \mathrm{Tr}(AB^{-1}) \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A^2) \\ &= (\mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB)) \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A^2) \\ &= \mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB)^2 - \mathrm{Tr}(A)^2 + 2. \end{aligned}$$

De plus, il suit du lemme 1.9.5 que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) &= \mathrm{Tr}((ABA^{-1})B^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(ABA^{-1}) \mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B) \\ &= \mathrm{Tr}(B)^2 - \mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(AB) \\ &\quad + \mathrm{Tr}(AB)^2 + \mathrm{Tr}(A)^2 - 2. \end{aligned}$$

□

LEMME 1.9.7. Soient  $R$  un anneau commutatif,  $A \in M_2(R)$  et  $B \in \text{SL}_2(R)$ . Si  $\frac{1}{3} \text{Tr}(A) = A_{12}$  et  $\frac{1}{3} \text{Tr}(B) = B_{12}$ , alors

$$\frac{1}{3} \text{Tr}(AB^{-1}A) = (AB^{-1}A)_{12}.$$

DÉMONSTRATION. Soient  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ . Supposons que  $3b = a + d$  et  $3q = p + s$ . On a

$$AB^{-1}A = \begin{bmatrix} a^2s - abr + bcp - acq & abs - b^2r + bdp - adq \\ acs - adr + cdp - c^2q & bcs - bdr + d^2p - cdq \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB^{-1}A) &= a^2s - abr + bcp - acq + bcs - bdr + d^2p - cdq \\ &= a^2s + d^2p - br(a + d) + bc(p + s) - cq(a + d) \\ &= a^2s + d^2p - 3b^2r + 3bcq - 3bcq \\ &= a^2s + d^2p - 3b^2r \\ &= (3b - d)as + (3b - a)dp - 3b^2r \\ &= 3abs - 3b^2r + 3bdp - as(p + s) \\ &= 3abs - 3b^2r + 3bdp - 3adq \\ &= 3 \cdot (AB^{-1}A)_{12}. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 1.9.8. Soit  $T = (M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  un triplet de modules de Markoff.

(a) Si  $\mu_L(T) = (M(w_2), M(w'_1), M(w_3))$ , alors

$$\varphi(w'_1) = \varphi(w_2)\varphi(w_1)^{-1}\varphi(w_2).$$

(b) Si  $\mu_R(T) = (M(w_1), M(w'_3), M(w_2))$ , alors

$$\varphi(w'_3) = \varphi(w_2)\varphi(w_3)^{-1}\varphi(w_2).$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 1.7.13,  $w_2 = w_1v$  et  $w'_1 = w_2v$  pour une certaine corde  $v$ . De la première égalité, on déduit

$$\varphi(w_2) = \varphi(w_1v) = \varphi(w_1)\varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(v)$$

où  $i$  est le but de  $w_1$ . Ainsi

$$\varphi(w_1)^{-1}\varphi(w_2) = \varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(v).$$

En utilisant la deuxième égalité,

$$\varphi(w'_1) = \varphi(w_2v) = \varphi(w_2)\varphi(\varepsilon_i)^{-1}\varphi(v) = \varphi(w_2)\varphi(w_1)^{-1}\varphi(w_2).$$

La preuve du second énoncé est semblable.  $\square$

**COROLLAIRE 1.9.9.** *Soit  $(M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  un triplet de modules de Markoff. Les matrices  $\varphi(w_i)$  satisfont à  $\frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w_i) = \varphi(w_i)_{12}$ .*

DÉMONSTRATION. L'exemple 1.9.2 montre que l'énoncé est vérifié pour le triplet initial. Le résultat découle du lemme 1.9.7 au moyen d'une récurrence.  $\square$

PROPOSITION 1.9.10. *Si  $(M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  est un triplet de modules de Markoff, alors*

$$\varphi(w_2) = \varphi(w_1)\varphi(w_3).$$

DÉMONSTRATION. Pour le triplet initial, on a

$$\varphi(w_1)\varphi(w_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \varphi(w_2).$$

Supposons maintenant que  $\varphi(w_2) = \varphi(w_1)\varphi(w_3)$  pour un certain triplet  $T = (M(w_1), M(w_2), M(w_3))$ . Posons

$$\mu_L(T) = (M(w_2), M(w'_1), M(w_3))$$

on a donc

$$\begin{aligned} \varphi(w'_1) &= \varphi(w_2)\varphi(w_1)^{-1}\varphi(w_2) = \varphi(w_2)\varphi(w_1)^{-1}\varphi(w_1)\varphi(w_3) \\ &= \varphi(w_2)\varphi(w_3). \end{aligned}$$

D'autre part, soit  $\mu_R(T) = (M(w_1), M(w'_3), M(w_2))$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi(w'_3) &= \varphi(w_2)\varphi(w_3)^{-1}\varphi(w_2) = \varphi(w_1)\varphi(w_3)\varphi(w_3)^{-1}\varphi(w_2) \\ &= \varphi(w_1)\varphi(w_2). \end{aligned}$$

□

**COROLLAIRE 1.9.11.** *Soit  $(M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  un triplet de modules de Markoff. Les entrées des matrices  $\varphi(w_i)$  sont strictement positives.*

**DÉMONSTRATION.** Vrai pour le triplet initial (voir l'exemple 1.9.2). On procède par récurrence en utilisant la proposition 1.9.10 et en remarquant que si  $(M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  est non initial, alors  $M(w_1)$  et  $M(w_3)$  apparaissent dans le triplet antécédent. Donc  $\varphi(w_2)$  est le produit de  $\varphi(w_1)$  et  $\varphi(w_3)$  et les entrées de ces deux matrices sont strictement positives d'après l'hypothèse de récurrence.  $\square$

**THÉORÈME 1.9.12.** *Si  $(M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  est un triplet de modules de Markoff, alors*

$$\left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_1), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_2), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_3)\right)$$

*est un triplet de Markoff propre.*

**DÉMONSTRATION.** Un calcul simple montre que le triplet initial donne le triplet de Markoff propre  $(1, 5, 2)$ .

Supposons que l'énoncé soit vrai pour un certain

$$T = (M(w_1), M(w_2), M(w_3)).$$

Posons  $A = \varphi(w_1)$ ,  $B = \varphi(w_3)$  et  $C = \varphi(w_2)$ . D'après l'identité de Fricke, on a

$$\operatorname{Tr}(A)^2 + \operatorname{Tr}(B)^2 + \operatorname{Tr}(AB)^2 = \operatorname{Tr}(A) \operatorname{Tr}(B) \operatorname{Tr}(AB) + \operatorname{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) + 2$$

et, puisque  $C = AB$  selon la proposition 1.9.10,

$$\mathrm{Tr}(A)^2 + \mathrm{Tr}(B)^2 + \mathrm{Tr}(C)^2 = \mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(C) + \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) + 2.$$

L'hypothèse que  $(\frac{1}{3} \mathrm{Tr}(A), \frac{1}{3} \mathrm{Tr}(B), \frac{1}{3} \mathrm{Tr}(C))$  est un triplet de Markoff, implique que

$$\mathrm{Tr}(A)^2 + \mathrm{Tr}(B)^2 + \mathrm{Tr}(C)^2 = \mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(C).$$

Donc  $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = -2$ .

Soit  $\mu_L(T) = (M(w_2), M(w'_1), M(w_3))$  et posons  $A' = \varphi(w'_1)$ . Alors

$$\mathrm{Tr}(C)^2 + \mathrm{Tr}(B)^2 + \mathrm{Tr}(CB)^2 = \mathrm{Tr}(C) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(CB) + \mathrm{Tr}(CBC^{-1}B^{-1}) + 2$$

mais  $A' = CB$ , d'où

$$\mathrm{Tr}(C)^2 + \mathrm{Tr}(B)^2 + \mathrm{Tr}(A')^2 = \mathrm{Tr}(C) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(A') + \mathrm{Tr}(CBC^{-1}B^{-1}) + 2.$$

De plus, l'égalité  $C = AB$  entraîne que  $B = A^{-1}C$ . Ainsi

$$CBC^{-1}B^{-1} = CA^{-1}CC^{-1}B^{-1} = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Donc  $\mathrm{Tr}(CBC^{-1}B^{-1}) = \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = -2$ . On conclut que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} \mathrm{Tr} C\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \mathrm{Tr} A'\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \mathrm{Tr} B\right)^2 &= \frac{1}{9} (\mathrm{Tr}(C)^2 + \mathrm{Tr}(B)^2 + \mathrm{Tr}(A')^2) \\ &= \frac{1}{9} (\mathrm{Tr}(C) \mathrm{Tr}(B) \mathrm{Tr}(A')) \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} \mathrm{Tr}(C) \cdot \frac{1}{3} \mathrm{Tr}(A') \cdot \frac{1}{3} \mathrm{Tr}(B)\right) \end{aligned}$$



c'est-à-dire que

$$\left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(C), \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(A'), \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(B)\right)$$

est un triplet de Markoff. Il nous reste à montrer que ce triplet est propre. De l'hypothèse de récurrence on déduit que  $\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(B) \neq \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(C)$ . En utilisant les corollaires 1.9.9 et 1.9.11, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(A') &= A'_{12} = C_{11}B_{12} + C_{12}B_{22} \\ &> B_{12} + C_{12} \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(B) + \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(C) \end{aligned}$$

d'où  $\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(A') > \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(B)$  et  $\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(A') > \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(C)$ . De façon analogue, on montre que  $\mu_R(T)$  est un triplet de Markoff propre.  $\square$

### 1.9.2. L'isomorphisme

Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble des triples de modules de Markoff. Le théorème 1.9.12 nous permet de définir une application  $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{M}$  par

$$\Phi(T) = \left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_1), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_2), \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_3)\right)$$

où  $T = (M(w_1), M(w_2), M(w_3)) \in \mathcal{T}$ .

**THÉORÈME 1.9.13.** *Les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M} \\ \mu_L \downarrow & & \downarrow m_L \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M} \\ \mu_R \downarrow & & \downarrow m_R \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M} \end{array}$$

*En outre,  $\Phi$  est un isomorphisme d'arbres binaires.*

DÉMONSTRATION. Soit  $T = (M(w_1), M(w_2), M(w_3)) \in \mathcal{T}$  et posons  $\Phi(T) = (a, b, c)$  où

$$a = \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_1), \quad b = \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_2) \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \varphi(w_3).$$

Puisque  $m_L \Phi(T) = (b, 3bc - a, c)$  et

$$\mu_L(T) = (M(w_2), M(w'_1), M(w_3))$$

il suffit de montrer que  $\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\varphi(w'_1)) = 3bc - a$ . D'après la proposition 1.9.10,  $\varphi(w'_1) = \varphi(w_2)\varphi(w_3)$  et  $\varphi(w_2) = \varphi(w_1)\varphi(w_3)$  d'où

$$\varphi(w'_1) = \varphi(w_1)\varphi(w_3)\varphi(w_3).$$

Donc, en vertu du lemme 1.9.4,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \varphi(w'_1) &= \operatorname{Tr}(\varphi(w_1)\varphi(w_3)) \operatorname{Tr} \varphi(w_3) - \operatorname{Tr} \varphi(w_1) \\ &= (\operatorname{Tr} \varphi(w_2))(\operatorname{Tr} \varphi(w_3)) - \operatorname{Tr} \varphi(w_1) \\ &= 3c \cdot 3b - 3a \\ &= 3(3bc - a). \end{aligned}$$

Le second cas est semblable.

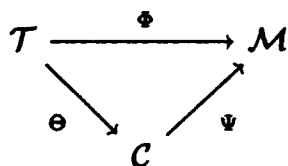
Que  $\Phi$  est un isomorphisme est une conséquence du théorème 1.2.6 car l'image de la racine de  $\mathcal{T}$  est  $(1, 5, 2)$  ce qui est la racine de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.9.14.** *La conjecture d'unicité des nombres de Markoff est équivalente à l'injectivité de l'application  $M(w) \mapsto \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w)$  où  $M(w)$  parcourt l'ensemble des modules de Markoff propres.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que la conjecture soit vraie. Soient  $M(w_1)$  et  $M(w_2)$  deux modules de Markoff propres tels que  $\text{Tr } \varphi(w_1) = \text{Tr } \varphi(w_2)$ . Comme  $M(w_1)$  et  $M(w_2)$  sont propres, il existe  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  tels que  $M(w_1)$  et  $M(w_2)$  sont les termes médians de  $T_1$  et  $T_2$  respectivement. Posons  $\Phi(T_1) = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\Phi(T_2) = (a_2, b_2, c_2)$ . On a  $b_1 = \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w_1) = \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w_2) = b_2$  et nous avons supposé que chaque triplet de Markoff est uniquement déterminé par son terme maximal, donc  $\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ . Par conséquent  $M(w_1) = M(w_2)$ .

Réciproquement, on sait que les triplets de Markoff  $(1, 1, 1)$  et  $(1, 2, 1)$  sont uniquement déterminés par leurs termes maximaux. Soient  $m_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $m_2 = (a_2, b_2, c_2)$  deux éléments de  $\mathcal{M}$  tels que  $b_1 = b_2$ . Puisque  $\Phi$  est bijective, il existe des triplets de modules de Markoff  $T_1 = (M(w_1), M(w_2), M(w_3))$  et  $T_2 = (M(v_1), M(v_2), M(v_3))$  tels que  $\Phi(T_1) = m_1$  et  $\Phi(T_2) = m_2$ . En particulier,  $\frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w_2) = \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(v_2)$ . Donc, d'après notre hypothèse,  $M(w_2) = M(v_2)$ . En appliquant le corollaire 1.8.7, on obtient  $T_1 = T_2$  ce qui entraîne  $m_1 = m_2$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.9.15.** *Le diagramme d'arbres binaires*



*est commutatif.*

DÉMONSTRATION. On a que l'image de la racine de  $\mathcal{T}$  par  $\Psi\Theta$  est  $\Psi(x, xy, y) = (1, 5, 2)$  ce qui est la racine de  $\mathcal{T}$ . En utilisant la proposition 1.2.5, on déduit que  $\Phi = \Psi \circ \Theta$ .  $\square$



## CHAPITRE 2

# **Dimensions projectives dans les catégories inclinées amassées**

## 2.1. INTRODUCTION

Les catégories amassées ont été introduites dans [28] afin de fournir un cadre catégorique pour l'étude des algèbres amassées acycliques. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie amassée. Un objet  $T$  de  $\mathcal{C}$  est dit inclinant si la condition suivante est satisfaite :  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X[1]) = 0$  si et seulement si  $X \in \text{add}(T)$ . Les objets inclinants servent à modéliser la combinatoire de l'algèbre amassée correspondante. Les algèbres inclinées amassées ont été définies dans [30] comme les algèbres d'endomorphismes de la forme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  où  $T$  est un objet inclinant de  $\mathcal{C}$ .

Dans [15], Beaudet, Brüstle et Todorov caractérisent les modules de dimension projective infinie sur une algèbre inclinée amassée en étudiant certains idéaux de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T[1])$ . Un tel idéal, noté  $I_M$ , est composé des endomorphismes de  $T[1]$  qui se factorisent par un objet  $M$  appartenant à  $\mathcal{C}$ . Ils montrent que le  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  est de dimension projective infinie si et seulement si  $I_M$  est non nul.

Dans ce chapitre, nous cherchons à généraliser cette caractérisation au contexte suivant : Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée Hom-finie de Krull-Schmidt et soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie pleine et contravariantement finie de  $\mathcal{C}$ . Il est bien connu que  $\text{mod } \mathcal{T}$ , la catégorie des foncteurs contravariants de présentation finie sur  $\mathcal{T}$ , est abélienne et admet suffisamment d'objets projectifs. Ainsi, nous pouvons parler de la dimension projective d'un objet  $F$  dans  $\text{mod } \mathcal{T}$  que l'on notera  $\text{dp } F$ .

Pour une sous-catégorie pleine  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$ , soit  $\mathcal{I}_X(\mathcal{D})$  l'idéal de  $\mathcal{D}$  engendré par les morphismes entre objets de  $\mathcal{D}$  qui se factorisent par un objet  $X$  dans  $\mathcal{C}$ . Notre but est l'étude des dimensions projectives des foncteurs  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)|_{\mathcal{T}}$  en termes des idéaux de factorisation  $\mathcal{I}_X$ . Notre résultat principal est le suivant :

**THÉORÈME.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie pleine et contravariante-ment finie de  $\mathcal{C}$  telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[1]) = 0$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ . S'il existe un triangle*

$$T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow X \longrightarrow T_1[1]$$

avec  $T_0, T_1 \in \mathcal{T}$ , alors

$$\text{dp Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)|_{\mathcal{T}} \leq 1 \text{ si et seulement si } \mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) = 0.$$

La sous-catégorie  $\mathcal{T}$  est dite inclinante amassée si pour tout objet  $X \in \mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, X[1]) = 0$  si et seulement si  $X \in \mathcal{T}$ . Ces sous-catégories sont une généralisation naturelle des objets inclinants dans une catégorie amassée. Ainsi, leurs propriétés ont été étudiées dans plusieurs articles, par exemple [60],[62],[63],[64]. Lorsque  $\mathcal{T}$  est inclinante amassée, on dira que  $\text{mod } \mathcal{T}$  est une catégorie inclinée amassée. Il a été montré dans [64] que les catégories inclinées amassées sont Gorenstein de dimension au plus 1. Par conséquent, tout objet est de dimension projective zéro, un ou infinie. En utilisant cette remarque, on obtient une caractérisation des objets dans  $\text{mod } \mathcal{T}$  de dimension projective infinie.



**COROLLAIRE.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ .  
Pour tout  $X \in \mathcal{C}$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ ,*

$$\text{dp Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)|_{\mathcal{T}} = \infty \text{ si et seulement si } \mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) \neq 0.$$

Dans la dernière section, nous explorons quelques généralisations de ces résultats lorsque la sous-catégorie  $\mathcal{T}$  satisfait à  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[i]) = 0$  pour tout  $0 < i < n$ , ou lorsque  $\mathcal{T}$  est  $n$ -inclinante amassée.

## 2.2. PRÉLIMINAIRES

### 2.2.1. Catégories triangulées

La notion de catégorie dérivée, conçue par Grothendieck, a été formalisée dans la thèse de doctorat de Verdier. Dans ce même travail apparaît la définition des catégories triangulées qui servent à axiomatiser la structure des catégories dérivées. Ces résultats n'ont été publiés que beaucoup plus tard [92],[93]. Bien que les axiomes des catégories triangulées ne semblent pas naturels à première vue, ce concept est incontournable en mathématiques modernes.

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie additive et  $[1] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  un automorphisme de  $\mathcal{C}$  appelé *foncteur de suspension*. On note  $[-1]$  l'inverse du foncteur de suspension et  $[n]$  son  $n^{\text{e}}$  itéré. Un *triangle* de  $\mathcal{C}$  est un sextuplet  $(X, Y, Z, u, v, w)$  où  $X, Y$  et  $Z$  sont des objets de  $\mathcal{C}$  et  $u : X \rightarrow Y$ ,  $v : Y \rightarrow Z$  et  $w : Z \rightarrow X[1]$  sont des morphismes de  $\mathcal{C}$ . On représente un tel triangle par un diagramme de la forme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

Un *morphisme de triangles* de  $(X, Y, Z, u, v, w)$  vers  $(X', Y', Z', u', v', w')$  est un triplet  $(f, g, h)$  de morphismes  $f : X \rightarrow X'$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$  et

$h : Z \rightarrow Z'$  tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

Un morphisme de triangles  $(f, g, h)$  est un *isomorphisme* si  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des isomorphismes.

**DÉFINITION 2.2.1.** Une *catégorie triangulée* est une catégorie additive  $\mathcal{C}$  munie d'un ensemble de triangles appelés *triangles distingués* possédant les propriétés suivantes :

- (TR1) (a) L'ensemble des triangles distingués est stable par isomorphismes.
- (b) Tout morphisme  $u : X \rightarrow Y$  est la base d'un triangle distingué  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ .
- (c) Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , le triangle

$$X \xrightarrow{I_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

est distingué.

- (TR2) Le triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  est distingué si et seulement si  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$  est distingué.

- (TR3) Soient  $(X, Y, Z, u, v, w)$  et  $(X', Y', Z', u', v', w')$  deux triangles distingués. Tout couple  $(f, g)$  de morphismes  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : Y \rightarrow Y'$  tels que  $gu = u'f$  se complète à un morphisme de

triangles  $(f, g, h)$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1]
 \end{array}$$

(TR4) (Axiome de l'octaèdre) Soient

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\
 & & Y & \xrightarrow{v} & Y' & \longrightarrow & X'[1] \longrightarrow Y[1] \\
 & & X & \xrightarrow{vu} & Y' & \longrightarrow & Z' \longrightarrow X[1]
 \end{array}$$

trois triangles distingués. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X' & \equiv & X' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow v & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{vu} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & X'[1] & \equiv & X'[1] & \longrightarrow & Y[1]
 \end{array}$$

où

$$X' \longrightarrow Z \longrightarrow Z' \longrightarrow X'[1]$$

est un triangle distingué.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée. Dorénavant, on convient que «triangle de  $\mathcal{C}$ » signifiera toujours «triangle distingué de  $\mathcal{C}$ ».

DÉFINITION 2.2.2. Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  est appelé *foncteur cohomologique* si pour tout triangle

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \quad (4)$$

son image

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{F(w)} F(X[1])$$

est une suite exacte de  $\mathcal{A}$ .

En utilisant l'axiome (TR2) on montre aisément qu'un foncteur cohomologique  $F$  associe au triangle (4) une suite exacte longue dans  $\mathcal{A}$  :

$$\dots \longrightarrow F(Z[-1]) \xrightarrow{F(-w[-1])} F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{F(w)} F(X[1]) \longrightarrow \dots$$

Soit  $\text{Ab}$  la catégorie des groupes abéliens additifs.

PROPOSITION 2.2.3. *Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , les foncteurs*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab} \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$$

*sont cohomologiques.*

COROLLAIRE 2.2.4. *Soit  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  un triangle de  $\mathcal{C}$ . Alors  $vu = 0$  et  $wv = 0$ .*

**COROLLAIRE 2.2.5.** *Soit  $(f, g, h)$  un morphisme de triangles. Si deux de ces morphismes sont des isomorphismes, alors  $(f, g, h)$  est un isomorphisme.*

**PROPOSITION 2.2.6.** *Soit  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  un triangle de  $\mathcal{C}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $w = 0$ .
- (b)  $u$  est une section.
- (c)  $v$  est une rétraction.

**LEMME 2.2.7.** *Soit*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z_1 \oplus Z_2 \xrightarrow{w} X[1]$$

*un triangle de  $\mathcal{C}$ . Si  $w = [w_1 \ 0]$ , alors  $Z_2$  est isomorphe à un facteur direct de  $Y$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\iota_2 : Z_2 \rightarrow Z_1 \oplus Z_2$  l'inclusion canonique et écrivons  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ . Puisque  $w\iota_2 = 0$ , il existe, d'après l'axiome (TR3), un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_2 & \xlongequal{\quad} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \iota_2 & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z_1 \oplus Z_2 & \xrightarrow{w} & X[1] \end{array}$$

Ainsi  $\iota_2 = vg$  d'où  $v_2g = \mathbf{I}_{Z_2}$ . Le morphisme  $g$  est donc une section.  $\square$

### 2.2.2. Notations et terminologie

Tout au long de ce chapitre,  $\mathcal{C}$  désignera une catégorie triangulée Hom-finie de Krull-Schmidt et  $\mathcal{T}$  sera une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  stable par isomorphismes, facteurs directs et sommes directes.

**DÉFINITION 2.2.8.** La sous-catégorie  $\mathcal{T}$  est appelée *n-rigide* si

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[i]) = 0 \text{ pour tout } 0 < i < n.$$

Une sous-catégorie 2-rigide sera dite *rigide*. On dit que  $\mathcal{T}$  est *m-forte* si

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}[i], \mathcal{T}) = 0 \text{ pour tout } 0 < i < m.$$

Notons que cette condition est équivalente à  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[-i]) = 0$  pour tout  $0 < i < m$ . Remarquons que si  $\mathcal{T}$  est *n-rigide*, alors  $\mathcal{T}$  est aussi *k-rigide* pour tout  $2 \leq k \leq n$  (et de même pour la propriété *m-forte*).

Les sous-catégories *m-fortes* jouent un rôle important dans les articles [59], [62] et [63]. La terminologie que nous employons («*m-strong*» en anglais) est due à Beligiannis [18].

Un morphisme  $f : T \rightarrow X$  avec  $T \in \mathcal{T}$  et  $X \in \mathcal{C}$  est une  *$\mathcal{T}$ -approximation à droite de  $X$*  si

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T)|_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)|_{\mathcal{T}} \longrightarrow 0$$

est exacte en tant que foncteurs sur  $\mathcal{T}$ . On dit que  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie *contravariamment finie* de  $\mathcal{C}$  si chaque  $X \in \mathcal{C}$  admet une

$\mathcal{T}$ -approximation à droite. Les  $\mathcal{T}$ -approximations à gauche et les sous-catégories covariantement finies se définissent dualement. Une sous-catégorie qui est à la fois contravariantement finie et covariantement finie est appelée *fonctoriellement finie*.

### 2.2.3. Sous-catégorie d'extensions

Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux sous-catégories pleines de  $\mathcal{C}$ .

DÉFINITION 2.2.9. La *sous-catégorie d'extensions*  $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  formée par les objets  $Z$  apparaissant dans un triangle

$$X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow X[1]$$

avec  $X \in \mathcal{X}$  et  $Y \in \mathcal{Y}$ .

La définition de l'opération  $*$  remonte à l'article de Beilinson, Bernstein et Deligne [16]. L'étude des sous-catégories d'extensions est particulièrement intéressante dans le contexte des catégories inclinantes amassées (voir [18], [60]).

LEMME 2.2.10. *Soient  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  des sous-catégories pleines de  $\mathcal{C}$ .*

*Si*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{X}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{Y}) = 0$$

*alors*  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{X} * \mathcal{Y}) = 0$ .



DÉMONSTRATION. Soit  $Z \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ , alors il existe un triangle

$$X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow X[1]$$

avec  $X \in \mathcal{X}$  et  $Y \in \mathcal{Y}$ . Pour tout  $T \in \mathcal{T}$  on a une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y) .$$

□

En utilisant l'axiome de l'octaèdre, on peut facilement montrer que  $\mathcal{X} * (\mathcal{Y} * \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{Z}$ . Des expressions comme  $\mathcal{X} * \mathcal{Y} * \mathcal{Z}$  s'écrivent donc sans ambiguïté.

COROLLAIRE 2.2.11. *Si  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]) = 0.$$

Il est important de remarquer que  $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$  n'est pas, en général, stable par facteurs directs. Nous avons cependant une condition suffisante :

PROPOSITION 2.2.12 ([60, Proposition 2.1]). *Si  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ , alors  $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$  est stable par facteurs directs.*

COROLLAIRE 2.2.13. *Si  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide alors  $\mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$  est stable par facteurs directs.*

### 2.3. FONCTEUR COHOMOLOGIQUE

**DÉFINITION 2.3.1.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie additive. Un foncteur additif contravariant  $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  est de *présentation finie* s'il existe une suite exacte

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

avec  $X$  et  $Y$  des objets de  $\mathcal{A}$ .

On notera  $\text{mod } \mathcal{T}$  la catégorie des foncteurs additifs contravariants de présentation finie sur  $\mathcal{T}$  à valeurs dans  $\text{Ab}$ .

Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie contravariamment finie de  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{T}$  admet des pseudo-noyaux et, par conséquent, la catégorie  $\text{mod } \mathcal{T}$  est abélienne (voir [8]). De plus,  $\text{mod } \mathcal{T}$  possède suffisamment d'objets projectifs.

Le foncteur  $H : \mathcal{C} \rightarrow \text{mod } \mathcal{T}$  défini par  $H(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)|_{\mathcal{T}}$  induit une équivalence entre  $\mathcal{T}$  et les objets projectifs de  $\text{mod } \mathcal{T}$ . Remarquons qu'un morphisme  $f$  est une  $\mathcal{T}$ -approximation à droite si et seulement si  $H(f)$  est un épimorphisme. On pourra consulter [18] pour davantage de propriétés du foncteur  $H$ .

En utilisant le fait que les foncteurs  $\text{Hom}$  sont cohomologiques, on obtient la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.3.2.** *Le foncteur  $H$  est cohomologique.* □

Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie additive et  $\mathcal{B}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  stable par isomorphismes, facteurs directs et sommes directes. La catégorie quotient  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  a les mêmes objets que  $\mathcal{A}$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(X, Y)$  est le quotient de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  par le sous-groupe des morphismes qui se factorisent par un objet de  $\mathcal{B}$ .

**PROPOSITION 2.3.3** ([60, Proposition 6.2(3)]). *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie rigide de  $\mathcal{C}$ . Le foncteur  $H$  induit une équivalence*

$$(\mathcal{T} * \mathcal{T}[1]) / \mathcal{T}[1] \xrightarrow{\sim} \text{mod } \mathcal{T}.$$

Ce qui suit est une variation d'un résultat bien connu sur les catégories quotients. Une preuve est incluse pour la commodité du lecteur.

**COROLLAIRE 2.3.4.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie rigide de  $\mathcal{C}$  et soient  $X, Y \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$ . Si  $HX \cong HY$ , alors il existe  $T \in \mathcal{T}$  tel que  $X$  est isomorphe à un facteur direct de  $Y \oplus T[1]$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $H(f) : HX \rightarrow HY$  un isomorphisme. Alors, il existe un morphisme  $g : Y \rightarrow X$  tel que  $H(g)H(f) = \mathbf{I}_{HX}$ . D'où  $H(\mathbf{I}_X - gf) = 0$  donc  $\mathbf{I}_X - gf$  se factorise par un objet dans  $\mathcal{T}[1]$ . On en déduit l'existence de morphismes  $\alpha : X \rightarrow T[1]$  et  $\beta : T[1] \rightarrow X$  avec  $T \in \mathcal{T}$  tels que  $\mathbf{I}_X - gf = \beta\alpha$ . On a

$$\begin{bmatrix} g & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} = gf + \beta\alpha = \mathbf{I}_X.$$

Donc  $\begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} : X \rightarrow Y \oplus T[1]$  est une section. □

## 2.4. SOUS-CATÉGORIES INCLINANTES AMASSÉES

Les sous-catégories inclinantes amassées ont été introduites dans les articles de Iyama sur la théorie d'Auslander-Reiten de dimension  $n$  [57], [58] sous le nom de sous-catégories  $n$ -orthogonales maximales. Cette définition, une fois adaptée aux catégories triangulées [56], [60], fournit une généralisation naturelle des objets inclinants dans une catégorie amassée.

**DÉFINITION 2.4.1.** On dit que  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie  $n$ -inclinante amassée de  $\mathcal{C}$  si :

- (1)  $\mathcal{T}$  est fonctoriellement finie dans  $\mathcal{C}$ .
- (2)  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, X[i]) = 0$  pour tout  $0 < i < n$  si et seulement si  $X \in \mathcal{T}$ .
- (3)  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{T}[i]) = 0$  pour tout  $0 < i < n$  si et seulement si  $X \in \mathcal{T}$ .

Une sous-catégorie 2-inclinante amassée sera simplement appelée *inclinante amassée*.

**LEMME 2.4.2** ([64, Lemme 3.2]). *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie contra-variantement finie de  $\mathcal{C}$ . Si*

$$X \in \mathcal{T} \text{ si et seulement si } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, X[1]) = 0$$

*alors  $\mathcal{T}$  est inclinante amassée.*

**THÉORÈME 2.4.3** ([60, Théorème 3.1]). *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{C} = \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ .*

### 2.4.1. La propriété Gorenstein

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. On dit que  $\mathcal{A}$  admet *suffisamment d'objets projectifs* si pour tout  $X \in \mathcal{A}$  il existe un épimorphisme  $P \rightarrow X$  avec  $P$  un objet projectif de  $\mathcal{A}$ . Dualement,  $\mathcal{A}$  admet *suffisamment d'objets injectifs* si pour tout  $X \in \mathcal{A}$  il existe un monomorphisme  $X \rightarrow I$  avec  $I$  un objet injectif de  $\mathcal{A}$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets projectifs et suffisamment d'objets injectifs. On peut donc parler de la dimension projective  $\text{dp } X$  et la dimension injective  $\text{di } X$  d'un objet  $X$  dans  $\mathcal{A}$ . On définit

$$\text{di}_P \mathcal{A} = \sup \{ \text{di } P \mid P \text{ projectif dans } \mathcal{A} \}$$

$$\text{dp}_I \mathcal{A} = \sup \{ \text{dp } I \mid I \text{ injectif dans } \mathcal{A} \}$$

et

$$\text{G-dim } \mathcal{A} = \sup \{ \text{di}_P \mathcal{A}, \text{dp}_I \mathcal{A} \}.$$

Si  $n = \text{G-dim } \mathcal{A}$  est fini, on dit que  $\mathcal{A}$  est *Gorenstein de dimension  $n$* .

**LEMME 2.4.4** ([4, Corollaire X.1.4]). *Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne et*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de  $\mathcal{A}$ . On a

$$\mathrm{dp} X \leq \sup \{ \mathrm{dp} Y, \mathrm{dp} Z - 1 \} \quad \text{et} \quad \mathrm{dp} Z \leq \sup \{ \mathrm{dp} Y, \mathrm{dp} X + 1 \}.$$

LEMME 2.4.5. *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne qui est Gorenstein de dimension  $n$ . Pour tout  $X \in \mathcal{A}$ ,  $\mathrm{dp} X < \infty$  si et seulement si  $\mathrm{di} X < \infty$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\mathrm{dp} X < \infty$ . Alors, il existe une résolution projective

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Puisque chaque projectif est de dimension injective finie, il s'ensuit que  $\mathrm{di} X < \infty$ . La réciproque se démontre dualement.  $\square$

PROPOSITION 2.4.6. *Soit  $X$  un objet dans une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  est Gorenstein de dimension  $n$ , alors  $\mathrm{dp} X \leq n$  ou  $\mathrm{dp} X = \infty$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\mathrm{dp} X < \infty$ . Alors, d'après le lemme 2.4.5, on a  $\mathrm{di} X < \infty$ . Si  $\mathrm{di} X = 0$ , alors  $X$  est injectif. Donc

$$\mathrm{dp} X \leq \mathrm{dp}_I \mathcal{A} \leq \mathrm{G-dim} \mathcal{A} = n.$$

Supposons que l'énoncé est vérifié pour tout objet  $X$  tel que  $\mathrm{di} X \leq m$ . Supposons que  $\mathrm{di} X \leq m + 1$ . Alors il existe une résolution injective

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{m+1} \longrightarrow 0$$

Posons  $Y = \text{Coker}(X \rightarrow I^0)$ , ainsi on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{m+1} \longrightarrow 0$$

d'où  $\text{di } Y \leq m$ . De l'hypothèse de récurrence, on déduit que  $\text{dp } Y \leq n$ .

De plus, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

d'où

$$\text{dp } X \leq \sup \{ \text{dp } I^0, \text{dp } Y - 1 \}.$$

Donc  $\text{dp } X \leq n$  car  $\text{dp } I^0 \leq n$  et  $\text{dp } Y \leq n$ . □

**THÉORÈME 2.4.7** ([64, Théorème 4.3]). *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ . La catégorie  $\text{mod } \mathcal{T}$  admet suffisamment d'objets projectifs et suffisamment d'objets injectifs. De plus,  $\text{mod } \mathcal{T}$  est Gorenstein de dimension au plus 1.*

**COROLLAIRE 2.4.8.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $F \in \text{mod } \mathcal{T}$ , on a  $\text{dp } F = 0, 1$  ou  $\infty$ .*

## 2.5. IDÉAUX DE FACTORISATION

Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux sous-catégories de  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $X \in \mathcal{X}$ ,  $Y \in \mathcal{Y}$  et  $M \in \mathcal{C}$ , définissons un sous-ensemble  $\mathcal{I}_M(X, Y)$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  par

$$\mathcal{I}_M(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ se factorise par } M\}$$

Lorsque  $\mathcal{I}_M(X, Y) = 0$  pour tout  $X \in \mathcal{X}$  et  $Y \in \mathcal{Y}$ , on écrira simplement  $\mathcal{I}_M(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ . Si  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$  on écrit  $\mathcal{I}_M(\mathcal{X})$  au lieu de  $\mathcal{I}_M(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ .

**LEMME 2.5.1.** *Soient  $M$  et  $N$  des objets de  $\mathcal{C}$ . Si  $M$  est isomorphe à un facteur direct de  $N$ , alors  $\mathcal{I}_M(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{I}_N(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ .*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $M$  soit isomorphe à un facteur direct de  $N$ . Soient  $\iota : M \rightarrow N$  la section correspondante avec rétraction  $\rho : N \rightarrow M$ . Pour  $X \in \mathcal{X}$  et  $Y \in \mathcal{Y}$ , soit

$$X \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} Y$$

un élément de  $\mathcal{I}_M(X, Y)$ . Considérons la composition  $\beta\rho\circ\iota\alpha$ .

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & Y \\ & \searrow \iota\alpha & \Downarrow \rho & \nearrow \beta\rho & \\ & & N & & \end{array}$$

On a  $\beta\alpha = \beta\rho\iota\alpha$  car  $\rho\iota = \mathbf{I}_M$ . Donc  $\beta\alpha \in \mathcal{I}_N(X, Y)$ .  $\square$



Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie contravariamment finie de  $\mathcal{C}$ . Pour un objet  $X \in \mathcal{C}$ , soit  $g_0 : T_0 \rightarrow X$  une  $\mathcal{T}$ -approximation à droite de  $X$ . On complète  $g_0$  au triangle

$$\Omega^1 X \longrightarrow T_0 \xrightarrow{g_0} X \longrightarrow (\Omega^1 X)[1]$$

Une récurrence donne un triangle pour chaque  $i \geq 0$

$$\Omega^{i+1} X \longrightarrow T_i \xrightarrow{g_i} \Omega^i X \longrightarrow (\Omega^{i+1} X)[1]$$

où  $g_i$  est une  $\mathcal{T}$ -approximation à droite de  $\Omega^i X$  et on convient que  $\Omega^0 X = X$ . Remarquons que les objets  $\Omega^i X$  ne sont pas uniquement déterminés par  $X$ .

**PROPOSITION 2.5.2.** *Soit  $\mathcal{D}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  et soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie contravariamment finie de  $\mathcal{C}$ .*

(a) *Si  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide, alors pour tout  $0 \leq k < n - 1$  et  $i \geq 0$ , on a*

$$\mathcal{I}_{\Omega^{i+1} X}(\mathcal{D}, \mathcal{T}[k]) = 0 \text{ implique que } \mathcal{I}_{\Omega^i X}(\mathcal{D}[1], \mathcal{T}[k+1]) = 0.$$

(b) *Si  $\mathcal{T}$  est  $m$ -forte, alors pour tout  $0 < k \leq m - 1$  et  $i \geq 0$ , on a*

$$\mathcal{I}_{\Omega^i X}(\mathcal{T}[k+1], \mathcal{D}[1]) = 0 \text{ implique que } \mathcal{I}_{\Omega^{i+1} X}(\mathcal{T}[k], \mathcal{D}) = 0.$$

**DÉMONSTRATION.** On se contentera de montrer (a), la preuve de (b) est semblable. Soient  $\alpha : D[1] \rightarrow \Omega^i X$  et  $\beta : \Omega^i X \rightarrow T[k+1]$  deux morphismes avec  $D \in \mathcal{D}$  et  $T \in \mathcal{T}$ . Considérons le triangle

$$\Omega^{i+1} X \longrightarrow T_i \xrightarrow{g_i} \Omega^i X \xrightarrow{h_i} (\Omega^{i+1} X)[1]$$

où  $T_i \in \mathcal{T}$ . On a  $\beta g_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i, T[k+1])$ , ainsi  $\beta g_i = 0$  car  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide et  $0 < k+1 < n$ . Il existe donc un morphisme  $u : (\Omega^{i+1}X)[1] \rightarrow T[k+1]$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D[1] & \xlongequal{\quad} & D[1] \\
 \downarrow h_i \alpha[-1] & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow h_i \alpha \\
 \Omega^{i+1}X & \longrightarrow & T_i & \xrightarrow{g_i} & \Omega^i X & \xrightarrow{h_i} & (\Omega^{i+1}X)[1] \\
 \downarrow u[-1] & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow u \\
 T[k] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T[k+1] & \xlongequal{\quad} & T[k+1]
 \end{array}$$

Puisque  $(uh_i\alpha)[-1] \in \mathcal{I}_{\Omega^{i+1}X}(\mathcal{D}, \mathcal{T}[k]) = 0$ , on conclut que  $\beta\alpha = 0$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.5.3.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie contravariamment finie de  $\mathcal{C}$ .*

(a) *Si  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide, alors*

$$\mathcal{I}_{\Omega^{n-2}X}(\mathcal{T}[1]) = 0 \text{ implique que } \mathcal{I}_X(\mathcal{T}[n-1]) = 0.$$

(b) *Si  $\mathcal{T}$  est  $m$ -forte, alors*

$$\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[m]) = 0 \text{ implique que } \mathcal{I}_{\Omega^{m-1}X}(\mathcal{T}[1]) = 0.$$

$\square$

**PROPOSITION 2.5.4.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ . Alors  $X \in \mathcal{T}$  si et seulement si*

$$\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[-n+1] * \cdots * \mathcal{T}[-1], \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Pour alléger l'écriture, posons  $\mathcal{Y} = \mathcal{T}[-n+1] * \dots * \mathcal{T}[-1]$  et  $\mathcal{Z} = \mathcal{T}[1] * \dots * \mathcal{T}[n-1]$ . Supposons que  $X \in \mathcal{T}$ . Comme  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{T}[i]) = 0$  pour tout  $0 < i < n$ . Donc  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{Z}) = 0$  d'après le lemme 2.2.10. Ainsi, une factorisation de la forme

$$Y \longrightarrow X \longrightarrow Z$$

avec  $Y \in \mathcal{Y}$  et  $Z \in \mathcal{Z}$  doit être de composition égale à zéro.

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{I}_M(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0$ . Puisque  $\mathcal{T}$  est  $n$ -inclinante amassée, on a  $\mathcal{C} = \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \dots * \mathcal{T}[n-1] = \mathcal{T} * \mathcal{Z}$ . Ainsi, il existe un triangle

$$Z \longrightarrow T \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z[1]$$

avec  $T \in \mathcal{T}$  et  $Z \in \mathcal{Z}$ . Soit  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  où  $Y$  est un objet quelconque de  $\mathcal{Y}$ . La composition  $gh$  est donc nulle car  $gh \in \mathcal{I}_M(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ . On en déduit l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & u & & h & & \\ Z & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Z[1] \end{array}$$

On a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}[-i], \mathcal{T}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[i]) = 0$  pour tout  $0 < i < n$ , ce qui implique  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) = 0$ . Le morphisme  $u$  appartient à  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T) = 0$ , d'où  $h = fu = 0$ . Donc  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}[-i], X) = 0$  pour tout  $0 < i < n$  et, en utilisant le fait que  $\mathcal{T}$  est  $n$ -inclinante amassée, il s'ensuit que  $X \in \mathcal{T}$ .  $\square$

## 2.6. SOUS-CATÉGORIES RIGIDES

Cette section est consacrée à la démonstration de notre théorème principal. Tout au long,  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie contravariamment finie et rigide de  $\mathcal{C}$ .

**PROPOSITION 2.6.1.** *Soit  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$ . Si  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) = 0$ , alors  $\text{dp} HX \leq 1$ .*

**DÉMONSTRATION.** Puisque  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$ , il existe un triangle

$$X[-1] \xrightarrow{f} T_1 \xrightarrow{g} T_0 \longrightarrow X$$

avec  $T_0, T_1 \in \mathcal{T}$ . En lui appliquant le foncteur  $H$  on obtient une suite exacte dans  $\text{mod } \mathcal{T}$

$$HX[-1] \xrightarrow{H(f)} HT_1 \xrightarrow{H(g)} HT_0 \longrightarrow HX \longrightarrow 0 .$$

Soit  $h : T \rightarrow X[-1]$  une  $\mathcal{T}$ -approximation à droite de  $X[-1]$ . La composition

$$T[1] \xrightarrow{h[1]} X \xrightarrow{f[1]} T_1[1]$$

est élément de  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1])$ , ainsi  $fh = 0$ . Alors  $H(fh) = 0$  et, comme  $H(h)$  est un épimorphisme, on a  $H(f) = 0$ . La dimension projective de  $HX$  est donc au plus un.  $\square$

**THÉORÈME 2.6.2.** *Soit  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ . Alors  $\text{dp} HX \leq 1$  si et seulement si  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) = 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** La suffisance est une conséquence directe de la proposition 2.6.1.

Supposons que  $\text{dp } \text{HX} = 0$ . Comme  $X$  ne contient pas de facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ ,  $X$  appartient à  $\mathcal{T}$ . Ainsi, toute composition de morphismes

$$\mathcal{T}[1] \longrightarrow X \xrightarrow{\beta} \mathcal{T}'[1]$$

avec  $T, T' \in \mathcal{T}$  doit être nulle car  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[1]) = 0$ . Donc  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) = 0$ .

Maintenant, supposons que  $\text{HX}$  est de dimension projective 1. Il y a donc une résolution projective

$$0 \longrightarrow \text{HT}_1 \xrightarrow{\text{H}(f)} \text{HT}_0 \longrightarrow \text{HX} \longrightarrow 0$$

dans  $\text{mod } \mathcal{T}$  où  $T_0, T_1 \in \mathcal{T}$ . On complète le morphisme  $f$  au triangle

$$T_1 \xrightarrow{f} T_0 \longrightarrow Y \longrightarrow T_1[1] .$$

Puisque  $T_1[1] \in \mathcal{T}[1]$ , on a une suite exacte

$$\text{HT}_1 \xrightarrow{\text{H}(f)} \text{HT}_0 \longrightarrow \text{HY} \longrightarrow 0 .$$

On en déduit que  $\text{HX}$  et  $\text{HY}$  sont isomorphes dans  $\text{mod } \mathcal{T}$ . Les objets  $X$  et  $Y$  appartiennent tous les deux à  $\mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$ . Ainsi, dans la catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $X$  est isomorphe à un facteur direct de  $Y \oplus T_2[1]$  pour un certain  $T_2 \in \mathcal{T}$ . L'objet  $X$  n'a aucun facteur direct dans  $\mathcal{T}[1]$ , donc  $X$  est isomorphe à un facteur direct de  $Y$ . On veut montrer que  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) = 0$

mais, d'après le lemme 2.5.1, il est suffisant d'établir que  $\mathcal{I}_Y(\mathcal{T}[1]) = 0$ .

Étant donné une factorisation

$$T[1] \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} T'[1]$$

avec  $T, T' \in \mathcal{T}$ , on montrera que  $\beta\alpha = 0$ . On construit un diagramme commutatif où les lignes sont des triangles

$$\begin{array}{ccccccc} T & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T[1] & \equiv & T[1] \\ \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow g[1] \\ T_1 & \xrightarrow{f} & T_0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & T_1[1] \\ \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow h[1] \\ T' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T'[1] & \equiv & T'[1] \end{array}$$

et l'existence de  $g$  est une conséquence de la commutativité du carré central supérieur. En outre, le carré central inférieur commute car  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[1]) = 0$ , ce qui assure l'existence du morphisme  $h$ . La commutativité du diagramme entraîne que  $fg = 0$ , donc  $H(g) = 0$  car  $H(f)$  est un monomorphisme. Puisque  $H$  induit une équivalence sur  $\mathcal{T}$ , on a  $g = 0$ . Par conséquent,  $\beta\alpha = h[1] \circ g[1] = 0$ .  $\square$

Il est important de noter que, d'après la proposition 2.3.3, tout objet de  $\text{mod } \mathcal{T}$  est isomorphe à un certain  $HX$  avec  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ . Pour chaque  $X \in \mathcal{C}$  on définit  $\overline{X}$  comme étant la somme directe des facteurs directs indécomposables de  $X$  qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{T}[1]$ . En particulier,  $\overline{X} = 0$  lorsque  $X \in \mathcal{T}[1]$ .

**COROLLAIRE 2.6.3.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ .*

(a) *Pour tout  $X \in \mathcal{C}$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ ,*

$$\text{dp } \text{HX} = \infty \text{ si et seulement si } \mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) \neq 0.$$

(b) *Pour tout  $X \in \mathcal{C}$ ,  $\text{dp } \text{HX} = \infty$  si et seulement si  $\mathcal{I}_{\overline{X}}(\mathcal{T}[1]) \neq 0$ .*

**DÉMONSTRATION.**

(a) Comme  $\mathcal{T}$  est inclinante amassée, on a  $\mathcal{C} = \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$ . Ainsi, pour tout  $X \in \mathcal{C}$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ ,  $\text{dp } \text{HX} > 1$  si et seulement si  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) \neq 0$ . D'après le théorème 2.4.7,  $\text{mod } \mathcal{T}$  est Gorenstein de dimension au plus 1, d'où  $\text{dp } \text{HX} > 1$  si et seulement si  $\text{dp } \text{HX} = \infty$ .

(b) Soit  $X \in \mathcal{C}$ . Par (a), on a  $\text{dp } \text{H}\overline{X} = \infty$  si et seulement si  $\mathcal{I}_{\overline{X}}(\mathcal{T}[1]) \neq 0$ . Il est clair que  $\text{HX} \cong \text{H}\overline{X}$ , donc  $\text{dp } \text{H}\overline{X} = \infty$  si et seulement si  $\text{dp } \text{HX} = \infty$ .

□

D'après le lemme 2.4.5 et le théorème 2.4.7, on a  $\text{dp } \text{HX} = \infty$  si et seulement si  $\text{di } \text{HX} = \infty$  lorsque  $\mathcal{T}$  est inclinante amassée.

**COROLLAIRE 2.6.4.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ .*

(a) *Pour tout  $X \in \mathcal{C}$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ ,*

$$\text{di } \text{HX} = \infty \text{ si et seulement si } \mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) \neq 0.$$

(b) *Pour tout  $X \in \mathcal{C}$ ,  $\mathrm{di} \mathrm{H}X = \infty$  si et seulement si  $\mathcal{I}_{\overline{X}}(\mathcal{T}[1]) \neq 0$ .*

□



## 2.7. QUELQUES GÉNÉRALISATIONS

Quand  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie  $n$ -inclinante amassée de  $\mathcal{C}$  où  $n > 2$ , la catégorie  $\text{mod } \mathcal{T}$  n'admet pas, en général, la propriété Gorenstein. Toutefois, ce problème peut être corrigé avec une hypothèse supplémentaire.

**THÉORÈME 2.7.1** ([18, Théorème 7.5]). *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{T}$  est  $(n - k)$ -forte où  $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ , alors  $\text{mod } \mathcal{T}$  est Gorenstein de dimension au plus  $k$ .*

En particulier, dans le cas  $k = 1$  nous avons le résultat suivant. Nous en donnons une preuve alternative à l'aide de la proposition 2.6.1.

**THÉORÈME 2.7.2.** *Si  $\mathcal{T}$  est  $n$ -inclinante amassée et  $(n - 1)$ -forte, alors  $\text{mod } \mathcal{T}$  est Gorenstein de dimension au plus 1.*

**DÉMONSTRATION.** Lorsque  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie  $n$ -inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $H$  induit une équivalence entre  $\mathcal{T}[n]$  et les objets injectifs de  $\text{mod } \mathcal{T}$  (voir [18], [63], [64]). Montrons d'abord que  $\mathcal{T}[n] \subseteq \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$ . D'après le théorème 2.4.3, on a  $\mathcal{T}[n] \subseteq \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \dots * \mathcal{T}[n - 1]$ . Donc, pour tout  $T \in \mathcal{T}$  il existe un triangle

$$X \longrightarrow T[n] \xrightarrow{g} Y \longrightarrow X[1]$$

avec  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$  et  $Y \in \mathcal{T}[2] * \dots * \mathcal{T}[n - 1]$ . Puisque  $\mathcal{T}$  est  $(n - 1)$ -forte, on a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}[n], \mathcal{T}[i]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}[n - i], \mathcal{T}) = 0$  pour tout  $2 \leq i \leq n - 1$ .

D'où  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}[n], \mathcal{T}[2] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]) = 0$  et on en déduit que  $g = 0$ . Ainsi,  $\mathcal{T}[n]$  est isomorphe à un facteur direct de  $X$ . Comme  $\mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$  est stable par facteurs directs, on obtient  $\mathcal{T}[n] \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$ .

Il est clair que  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}[n]}(\mathcal{T}[1]) = 0$  pour tout  $T \in \mathcal{T}$  car  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide. En vertu de la proposition 2.6.1, on conclut que tout objet injectif de  $\text{mod } \mathcal{T}$  est de dimension projective au plus 1.

En utilisant le dual de la proposition 2.6.1, on montre que tout objet projectif de  $\text{mod } \mathcal{T}$  est de dimension injective au plus 1.  $\square$

Nous obtenons donc une généralisation du corollaire 2.6.3 :

**COROLLAIRE 2.7.3.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $(n-1)$ -forte et  $n$ -inclinante amassée de  $\mathcal{C}$ . Si  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1]$ , alors*

$$\text{dp}HX = \infty \text{ si et seulement si } \mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) \neq 0.$$

$\square$

Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie contravariantement finie de  $\mathcal{C}$ . Pour  $X \in \mathcal{C}$ , nous employons la notation  $\Omega^i X$  introduite dans la section 2.5.

**LEMME 2.7.4.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -rigide de  $\mathcal{C}$ . Si  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ , alors on peut choisir  $\Omega^i X$  dans  $\mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-i-1]$  pour tout  $0 \leq i < n$ .*

DÉMONSTRATION. Puisque  $\Omega^0 X = X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$  il existe un triangle

$$Z_0 \longrightarrow T_0 \xrightarrow{g_0} X \longrightarrow Z_0[1]$$

avec  $T_0 \in \mathcal{T}$  et  $Z_0[1] \in \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ . Notre hypothèse que  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide implique que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]) = 0$  en vertu du corollaire 2.2.11. Ainsi  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, Z_0[1]) = 0$  et on en déduit que  $g_0$  est une  $\mathcal{T}$ -approximation à droite of  $X$ . Donc on peut choisir  $\Omega^1 X = Z_0 \in \mathcal{T} * \cdots * \mathcal{T}[n-2]$ . L'énoncé suit par récurrence en appliquant le même raisonnement.  $\square$

Si, en outre,  $\mathcal{T}$  est  $(n-1)$ -forte, alors on voit facilement que  $X$  n'ayant pas de facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$  implique que  $\Omega^i X$  n'a pas de facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-i-1]$ . En effet, supposons que  $\Omega^1 X = Z_1 \oplus Z_2$  avec  $Z_2 \in \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-2]$ . Il existe un triangle

$$T_0 \longrightarrow X \longrightarrow (Z_1 \oplus Z_2)[1] \longrightarrow T_0[1]$$

avec  $T_0 \in \mathcal{T}$ . Puisque  $\mathcal{T}$  est  $(n-1)$ -forte, on a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_2[1], T_0[1]) = 0$ . Donc  $Z_2[1]$  est isomorphe à un facteur direct de  $X$ , une contradiction. L'affirmation suit par récurrence.

Avec ce choix de  $\Omega^i X$ , nous avons le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.7.5.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -rigide et  $(n-1)$ -forte de  $\mathcal{C}$ . Si  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$  sans facteurs directs dans*

$\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ , alors

$$\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[n-1]) = 0 \text{ si et seulement si } \text{dp H}\Omega^{n-2}X \leq 1.$$

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $\mathcal{T}$  est  $n$ -rigide et  $(n-1)$ -forte. Alors, d'après le corollaire 2.5.3,

$$\mathcal{I}_{\Omega^{n-2}X}(\mathcal{T}[1]) = 0 \text{ si et seulement si } \mathcal{I}_X(\mathcal{T}[n-1]) = 0.$$

Comme  $\Omega^{n-2}X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$  n'a aucun facteur direct dans  $\mathcal{T}[1]$ , on a, selon le théorème 2.6.2,

$$\mathcal{I}_{\Omega^{n-2}X}(\mathcal{T}[1]) = 0 \text{ si et seulement si } \text{dp H}\Omega^{n-2}X \leq 1.$$

□

**LEMME 2.7.6.** Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -rigide et  $(n-1)$ -forte de  $\mathcal{C}$ . Si  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$  et  $\text{HX}[-i] = 0$  pour tout  $0 < i < n$ , alors  $\text{dp H}X \leq n-1$ .

**DÉMONSTRATION.** La preuve est par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$ , on a  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1]$  ainsi il existe un triangle

$$T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow X \longrightarrow T_1[1]$$

avec  $T_0, T_1 \in \mathcal{T}$ . En appliquant  $\text{H}$  au triangle, on obtient une suite exacte

$$\text{HX}[-1] \longrightarrow \text{HT}_1 \longrightarrow \text{HT}_0 \longrightarrow \text{HX} \longrightarrow 0 .$$

Puisque  $HX[-1] = 0$  on conclut que  $\text{dp } HX \leq 1$ .

Supposons que l'énoncé soit vrai pour  $n - 1$ . Soit  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \dots * \mathcal{T}[n - 1]$ . Il y a donc un triangle

$$Y \longrightarrow T \longrightarrow X \longrightarrow Y[1]$$

avec  $T \in \mathcal{T}$  et  $Y \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \dots * \mathcal{T}[n - 2]$ . Pour chaque  $i$  on a une suite exacte

$$HX[-i - 1] \longrightarrow HY[-i] \longrightarrow HT[-i] .$$

Comme  $\mathcal{T}$  est  $(n - 1)$ -forte,  $HT[-i] = 0$  pour tout  $0 < i < n - 1$ . De plus,  $HX[-i - 1] = 0$  pour tout  $0 < i < n - 1$  ainsi  $HY[-i] = 0$  pour tout  $0 < i < n - 1$ . Donc  $\text{dp } HY \leq n - 2$  d'après l'hypothèse de récurrence.

En outre, en utilisant le fait que  $HX[-1] = 0$ , on obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow HY \longrightarrow HT \longrightarrow HX \longrightarrow 0$$

où  $HT$  est projectif. Donc

$$\text{dp } HX \leq \sup \{ \text{dp } HT, \text{dp } HY + 1 \} = n - 1.$$

□

**PROPOSITION 2.7.7.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -rigide et  $(n-1)$ -forte de  $\mathcal{C}$  et soit  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ . Si  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]) = 0$ , alors  $\text{dp } \text{H}X \leq n-1$ .*

**DÉMONSTRATION.** Puisque  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ , il existe un triangle

$$Y \longrightarrow T_0 \longrightarrow X \xrightarrow{h} Y[1]$$

avec  $T_0 \in \mathcal{T}$  et  $Y[1] \in \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ . On applique  $\text{H}$  au triangle pour obtenir une suite exacte dans  $\text{mod } \mathcal{T}$

$$\text{H}X[-i] \xrightarrow{\text{H}(h[-i])} \text{H}Y[-i+1] \longrightarrow \text{H}T_0[-i+1] .$$

Pour chaque  $1 \leq i \leq n-1$ , soit  $f : T \rightarrow X[-i]$  une  $\mathcal{T}$ -approximation à droite de  $X[-i]$ . La composition

$$T[i] \xrightarrow{f[i]} X \xrightarrow{h} Y[1]$$

est un élément de  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1])$ , d'où  $h[-i] \circ f = 0$ . Ainsi  $\text{H}(h[-i] \circ f) = 0$  et comme  $\text{H}(f)$  est un épimorphisme, on a  $\text{H}(h[-i]) = 0$ . Puisque  $\mathcal{T}$  est  $(n-1)$ -forte, on a  $\text{H}T_0[-i] = 0$  pour tout  $0 < i < n-1$ . Donc  $\text{H}Y[-i] = 0$  pour tout  $0 < i < n-1$  et comme  $Y \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-2]$  on peut se servir du lemme 2.7.6 pour conclure que  $\text{dp } \text{H}Y \leq n-2$ . De plus, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{H}Y \longrightarrow \text{H}T_0 \longrightarrow \text{H}X \longrightarrow 0$$

car  $H(h[-1]) = 0$ . Donc la dimension projective de  $HX$  est au plus  $n - 1$ . □

En comparant le théorème 2.6.2 et la proposition 2.7.7, on arrive naturellement à la conjecture suivante :

**CONJECTURE 2.7.8.** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -rigide et  $(n - 1)$ -forte de  $\mathcal{C}$ . Si  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n - 1]$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n - 1]$ , alors*

$\text{dp } HX \leq n - 1$  si et seulement si  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n - 1]) = 0$ .

## Conclusion

Dans le premier chapitre, nous avons vu que les solutions de l'équation de Markoff ainsi que leur structure combinatoire se manifestent dans la famille des modules de Markoff. Ce lien a été explicité en construisant un isomorphisme entre l'arbre des triplets de modules de Markoff et l'arbre des triplets de Markoff. Par conséquent, on a obtenu une reformulation de la conjecture d'unicité des nombres de Markoff. Malheureusement, cet énoncé ne semble pas plus facile à démontrer. Il est facile de voir que la conjecture est équivalente à l'existence d'une application  $f$  des nombres de Markoff vers l'ensemble des modules de Markoff telle que  $\Phi^{-1}(a, b, c) = (f(a), f(b), f(c))$ . Pour être en mesure de trouver une telle fonction, il faudrait d'abord viser une meilleure compréhension de l'application  $M(w) \mapsto \frac{1}{3} \text{Tr } \varphi(w)$  où  $M(w)$  est un module de Markoff.

Soit  $\mathbf{M}$  l'ensemble des modules de Markoff. On définit une application  $\bar{\varphi} : \mathbf{M} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}[x])$  en utilisant la même méthode que dans la section 1.9 mais avec les matrices

$$\rho(1) = \begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(2) = \begin{bmatrix} x+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x+2 \end{bmatrix}$$



La trace d'une matrice  $\tilde{\varphi}(M)$  semble être de la forme

$$\mathrm{Tr} \tilde{\varphi}(M) = x^n(x+2)P(x)$$

où  $n = \deg P(x) = \dim Me_2$  et  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  avec les  $a_i$  des entiers strictement positifs. Si c'est le cas, les résultats de la section 1.9 impliqueraient que  $P(1)$  est un nombre de Markoff. On se demande donc si  $M \mapsto \mathrm{Tr} \tilde{\varphi}(M)$  est une bijection et, en particulier, si ces polynômes contiennent suffisamment d'information pour décrire son inverse. D'autre part, chaque polynôme  $P(x)$  induirait une partition du nombre de Markoff correspondant. En effet, si  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  alors  $P(1) = \sum_{i=0}^n a_i$ . On se pose la question : existe-t-il un algorithme pour calculer une telle partition d'un nombre de Markoff donné ? À partir de cette partition, il serait simple de reconstruire le polynôme  $\mathrm{Tr} \tilde{\varphi}(M)$ . Ce problème est certainement très difficile à dénouer, mais cela nous donne une approche possible pour décrire l'application  $f$ .

En ce qui concerne le deuxième chapitre, nous avons caractérisé les objets de dimension projective au plus 1 dans la catégorie  $\mathrm{mod} \mathcal{T}$  où  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie contravariamment finie et rigide d'une catégorie triangulée  $\mathcal{C}$ . Ce résultat nous a permis de montrer que lorsque  $\mathcal{T}$  est inclinante amassée, les objets de dimension projective infinie dans  $\mathrm{mod} \mathcal{T}$  sont précisément les foncteurs isomorphes à un certain  $HX$  avec  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1]) \neq 0$ .

Il reste encore un problème à résoudre :

CONJECTURE. Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie  $n$ -rigide et  $(n-1)$ -forte de  $\mathcal{C}$ . Si  $X \in \mathcal{T} * \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$  sans facteurs directs dans  $\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]$ , alors

$\text{dp}HX \leq n-1$  si et seulement si  $\mathcal{I}_X(\mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n-1]) = 0$ .

Ensuite, il serait intéressant de savoir si la caractérisation des objets de dimension projective au plus 1 (théorème 2.6.2) pourrait être adaptée au contexte suivant. Un couple de sous-catégories  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  d'une catégorie triangulée  $\mathcal{C}$  est une *paire de torsion* si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$  et  $\mathcal{C} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ . Cette définition généralise les sous-catégories inclinantes amassées et les  $t$ -structures. Dans [79], Nakaoka montre que pour toute paire de torsion  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , la catégorie

$$\mathcal{H} = ((\mathcal{X} * \mathcal{W}) \cap (\mathcal{W} * \mathcal{Y}[1])) / \mathcal{W}$$

est une catégorie abélienne, où  $\mathcal{W} = \mathcal{X}[1] \cap \mathcal{Y}$ . En outre,  $\mathcal{H}$  admet suffisamment d'objets projectifs lorsque  $\mathcal{X}[1] \subseteq \mathcal{Y}$ . Les auteurs de [1] construisent un foncteur cohomologique  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$  ayant des propriétés convenables. Cependant, il n'est pas clair si cette structure est assez riche pour nos besoins.



## Bibliographie

- [1] N. Abe, H. Nakaoka, *General heart construction on a triangulated category (II): Associated cohomological functor*, arXiv:0910.2539v1 [math.CT] (2009)
- [2] C. Amiot, *Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential*, Ann. Inst. Fourier, 59(6), 2525-2590 (2009)
- [3] F.W. Anderson, K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1973)
- [4] I. Assem, *Algèbres et modules*, Les Presses de l'Université d'Ottawa (1997)
- [5] I. Assem, T. Brüstle, R. Schiffler, *Cluster-tilted algebras as trivial extensions*, Bull. London Math. Soc. 40, 151-162 (2008)
- [6] I. Assem, T. Brüstle, G. Charbonneau-Jodoin, P.-G. Plamondon, *Gentle algebras arising from surface triangulations*, Algebra & Number Theory 4, no. 2, 201-229 (2010)
- [7] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Volume 1: Techniques of Representation Theory*, London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge (2006)
- [8] M. Auslander, *Representation dimension of artin algebras*, Queen Mary College, Mathematics Notes, University of London (1971)
- [9] M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras III: Almost split sequences*, Comm. Algebra 3, 239-294 (1975)
- [10] M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras IV: Invariants given by almost split sequences*, Comm. Algebra 5, 443-518 (1977)
- [11] M. Auslander, I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*, Advances in Math. 86, 111-152 (1991)
- [12] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [13] M. Auslander, S.O. Smalø, *Preprojective modules over artin algebras*, J. Algebra 66, No. 1, 61-122 (1980)
- [14] A. Baragar, *On the Unicity Conjecture for Markoff Numbers*, Canad. Math. Bull. 39, 3-9 (1996)
- [15] L. Beaudet, T. Brüstle, G. Todorov, *Projective dimension of modules over cluster-tilted algebras*, arXiv:1111.2013v1 [math.RT] (2011).
- [16] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, Soc. Math. de France (1982)

- [17] A. Beineke, T. Brüstle, L. Hille, *Cluster-Cyclic Quivers with Three Vertices and the Markov Equation*, Algebras and Representation Theory 14, 97-112 (2011)
- [18] A. Beligiannis, *Relative Homology and Higher Cluster Tilting Theory*, preprint (2010).
- [19] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster Algebras III: Upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. 126(1), 1-52 (2005)
- [20] J. Bernoulli, *Sur une nouvelle espèce de calcul*, Recueil pour les astronomes, 255-284 (1771)
- [21] J. Berstel, A. Lauve, C. Reutenauer, F. Saliola, *Combinatorics on Words: Christoffel words and repetitions in words*, American Mathematical Society and Centre de Recherches Mathématiques (2008)
- [22] J. Berstel, A. de Luca, *Sturmian words, Lyndon words and trees*, Theor. Comput. Sci. 178, 1-2, 171-203 (1997)
- [23] V. Berthé, A. de Luca, C. Reutenauer, *On an involution of Christoffel words and Sturmian morphisms*, Eur. J. Comb. 29(2), 535-553 (2008)
- [24] E. Bombieri, *Continued fractions and the Markoff tree*, Expo. Math. 25, no. 3, 187-213 (2007)
- [25] V.M. Bondarenko, *Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2*, Mat. USSR Sbornik 25, 58-68 (1975)
- [26] J.-P. Borel, F. Laubie, *Quelques mots sur la droite projective réelle*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 5, 23-51 (1993)
- [27] N. Bourbaki, *Algèbre homologique*, Ch. X de *Algèbre*, Masson Publ., Paris (1980)
- [28] A.B. Buan, R.Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Advances in mathematics, 204 (2), 572-618 (2006)
- [29] A.B. Buan, R. Marsh, I. Reiten, *Cluster-tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 359, no. 1, 323-332 (2007)
- [30] A.B. Buan, R.Marsh, I. Reiten, *Cluster mutation via quiver representations*, Commentarii Mathematici Helvetici, Volume 83 no.1, 143-177 (2008)
- [31] Y. Bugeaud, C. Reutenauer, S. Siksek, *A Sturmian sequence related to the uniqueness conjecture for Markoff numbers*, Theoretical Computer Science 410, 30-32, 2864-2869 (2009)
- [32] M.C.R. Butler, C.M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Communications in Algebra, 15, 145-179 (1987)
- [33] J.O. Button, *The Uniqueness of the Prime Markoff Numbers*, J. London Math. Soc. (2) 58, 9-17 (1998)
- [34] G. Cerulli Irelli, *Quiver Grassmannians associated with string modules*, arXiv:0910.2592v2 [math.CO] (2010)
- [35] E.B. Christoffel, *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica 6, 145-152 (1875)
- [36] H. Cohn, *Approach to Markoff's Minimal Forms Through Modular Functions*, The Annals of Mathematics Second Series, Vol. 61, No. 1, 1-12 (1955)

- [37] H. Cohn, *Representation of Markoff's binary quadratic forms by geodesics on a perforated torus*, Acta Arith. 18, 125-136 (1971)
- [38] H. Cohn, *Markoff forms and primitive words*, Mathematische Annalen 196, 8-22 (1972)
- [39] H. Cohn, *Markoff geodesics in matrix theory*, Number Theory with an Emphasis on the Markoff Spectrum, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 147, 69-82 (1993)
- [40] W.W. Crawley-Boevey, *Maps between representations of zero-relation algebras*, J. Algebra 126, 259-263 (1989)
- [41] T.W. Cusick, M.E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, AMS Math. Surveys Monographs 30 (1989)
- [42] P.W. Donovan, M.-R. Freislich, *The indecomposable modular representations of certain groups with dihedral Sylow subgroup*, Math. Ann. 238, 207-216 (1978)
- [43] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston, *Cluster Algebras and Triangulated Surfaces. Part I: Cluster Complexes*, Acta Mathematica 201, 83-146 (2008)
- [44] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster Algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc., 15(2), 497-529 (2002)
- [45] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster Algebras II: Finite type classification*, Invent. Math. 154, 63-121 (2003)
- [46] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster Algebras IV: Coefficients*, Compositio Mathematica 143, 112-164 (2007)
- [47] R. Fricke, *Über die Theorie der automorphen Modulgruppen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 91-101 (1896)
- [48] G.F. Frobenius, *Über die Markoffschen Zahlen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 458-487 (1913)
- [49] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math. 165, 589-632 (2006)
- [50] I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev, *Indecomposable representations of the Lorentz group*, Russian Math. Surv. 23, 1-58(1968)
- [51] P.-P. Grivel, *Catégories dérivées, foncteurs dérivés*, A. Borel et al., Algebraic D-modules, Academic Press, 1-108 (1987)
- [52] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 119, Cambridge University Press, Cambridge (1988)
- [53] A. Haas, *Diophantine approximation on hyperbolic Riemann surfaces*, Bull. A.M.S. 11, 359-362 (1984)
- [54] F. Hirzebruch, *The signature theorem: Reminiscences and recreation*, Prospects in Math., Annals of Math. Studies, No. 70, Princeton University Press, Princeton, 3-31, (1971)
- [55] A. Itsara, G. Musiker, J. Propp, R. Viana, *Combinatorial Interpretations for the Markoff Numbers*, preprint (2003)
- [56] O. Iyama, *Maximal orthogonal subcategories of triangulated categories satisfying Serre duality*, Oberwolfach, Rep. 2, no. 1, 353-355 (2005)

- [57] O. Iyama, *Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories*, Adv. Math. 210, no. 1, 22-50 (2007)
- [58] O. Iyama, *Auslander correspondence*, Adv. Math. 210, no. 1, 51-82 (2007)
- [59] O. Iyama, S. Oppermann, *Stable categories of higher preprojective algebras*, arXiv:0912.3412v2 [math.RT] (2009)
- [60] O. Iyama, Y. Yoshino, *Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules*, Inv. Math. 172, 117-168 (2008)
- [61] B. Keller, *On triangulated orbit categories*, Doc. Math. 10, 551-581 (2005)
- [62] B. Keller, I. Reiten, *Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau*, Advances in Mathematics 211, 123-151 (2007)
- [63] B. Keller, I. Reiten, *Acyclic Calabi-Yau Categories*, Compos. Math. 144 no. 5, 1332-1348 (2008)
- [64] S. Koenig, B. Zhu, *From triangulated categories to abelian categories — cluster tilting in a general framework*, Math.Zeit. 258(1), 143-160 (2008)
- [65] H. Krause, *Maps between tree and band modules*, J. Algebra 137, 186-194 (1991)
- [66] H. Krause, M. Saorín, *On minimal approximations of modules*, Contemp. Math. 229, 227-236 (1998)
- [67] A. Lasnier, *Approximations et mutations*, mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke (2009)
- [68] A. Lasnier, *Christoffel Words and Markoff Triples: An Algebraic Approach*, arXiv:1104.1799v2 [math.RT] (2011)
- [69] A. Lasnier, *Projective Dimensions in Cluster-Tilted Categories*, arXiv:1111.3077v1 [math.RT] (2011)
- [70] E. Laurier, *Opérations sur les mots de Christoffel*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, 11 no. 1, 111-132 (1999)
- [71] J. Lehner, M. Sheingorn, *Simple closed geodesics on  $H^+/\Gamma(3)$  arise from the Markov spectrum*, Bull. Amer. Math. Soc. 11, no. 2, 359-362 (1984)
- [72] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin (1972)
- [73] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin (1971)
- [74] A.A. Markoff, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, Math. Ann. 15, 381-496 (1879)
- [75] A.A. Markoff, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies (second mémoire)*, Math. Ann. 17, 379-399 (1880)
- [76] G. McShane, H. Parlier, *Simple closed geodesics of equal length on a torus*, Geometry of Riemann surfaces, LMS Lecture Notes 368, 268-282 (2010)
- [77] A. Mongeau, *Mots de Christoffel et nombres de Markoff*, mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal (2010)
- [78] J.-P. Morin, *Quelques conjectures sur les algèbres bisérielles spéciales*, mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke (2005)
- [79] H. Nakaoka, *General heart construction on triangulated categories (I): Unifying  $t$ -structures and cluster tilting subcategories*, arXiv:0907.2080v6 [math.CT] (2009)

- [80] S. Perrine, *L'interprétation matricielle de la théorie de Markoff classique*, International Journal of mathematical Sciences 32, 193-262 (2002)
- [81] N. Poettering, *Euler Characteristics of Quiver Grassmannians and Ringel-Hall Algebras of String Algebras*, Algebras and Representation Theory, 1-39 (2010)
- [82] J. Propp, *The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers*, arXiv:math/0511633v4 [math.CO] (2008)
- [83] A.L. Schmidt, *Minimum of quadratic forms with respect to Fuchsian groups*, I.J. Reine Angew. Math. 286/7, 341-368 (1976)
- [84] J. Schröer, *Modules without self-extensions over gentle algebras*, J. Algebra 216, 178-189 (1999)
- [85] J. Schröer, A. Zimmermann, *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*, Math. Z. 244, 515-530 (2003)
- [86] C. Series, *The geometry of Markoff numbers*, Math. Intel. 7, 20-29 (1985)
- [87] C. Reutenauer, *Mots de Lyndon généralisés*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 54 (2006)
- [88] C. Reutenauer, *Christoffel words and Markoff triples*, Integers 9, no. 3, 327-332 (2009)
- [89] C.M. Ringel, *The indecomposable representations of the dihedral 2-groups*, Math. Ann. 214, 19-34 (1975)
- [90] J.J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, Saddle River NJ (2002)
- [91] J.J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York (1979)
- [92] J.-L. Verdier, *Catégories dérivées*, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York (1977)
- [93] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque 239, Société Mathématique de France (1996)
- [94] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [95] Y. Zhang, *Congruence and Uniqueness of Certain Markov Numbers*, Acta Arithmetica 128, no. 3, 295-301 (2007)