Méthodes de point fixe et calcul de la racine n-ième

par

Calvin GNANG

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maîtrise en sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, novembre 2012

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-91655-1

Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-91655-1

Le 7 novembre 2012

le jury a accepté le mémoire de Monsieur Calvin Gnang
dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur François Dubeau
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeur Jean-Pierre Dussault
Membre
Département d'informatique

Professeur Jean-Marc Belley
Président rapporteur
Département de mathématiques

SOMMAIRE

Dans la première partie de ce travail, nous parlons de l'accéleration de la convergence de méthodes itératives de point fixe. Nous parlerons particulièrement de l'itération de Newton et de la façon dont on peut augmenter son ordre de convergence. Cette méthode, portant le nom de Isaac Newton, est un algorithme populaire pour approximer le zéro d'une fonction. Nous parlerons donc des conditions sous lesquelles cet algorithme nous procure des résultats valides.

Dans la deuxième portion de ce travail, nous appliquerons les résultats de la première partie au problème de la recherche de la n-ième racine d'un nombre. Ceci nous conduira vers des familles d'algorithmes que nous comparerons. Nous présenterons aussi des méthodes associées très spécifiquement au calcul de la n-ième racine d'un nombre que nous généraliserons pour un problème quelconque.

Dédié
à ma famille,
mes collegues
et mon superviseur.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ma famille et mon directeur de maîtrise, M. François Dubeau, pour les nombreux échanges mathématiques qui m'ont été si bénéfiques au cours ces deux années, ainsi que le support financier que celui-ci m'a apporté. Je veux aussi remercier tous les membres du Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke, tant pour les discussions que pour l'esprit de camaraderie qui est toujours resté au sein de l'équipe.

Gnang Calvin

Sherbrooke, Septembre 2012

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le calcul de la n-ième racine $r^{1/n}$ d'un nombre réel positif est un problème qui date de l'antiquité. Plusieurs méthodes pour approximer la solution à ce problème ont été suggérées depuis. Le problème plus général de trouver le zéro α d'une fonction $f(x)$ occupe une très grande place dans l'analyse numérique. Ce n'est pas seulement parce que souvent nous avons énormément de difficultés à trouver les solutions analytiques à ce problème, mais c'est aussi que parfois la meilleur façon de résoudre ce problème est de trouver de bonnes approximations à sa solution.

Par exemple, dès un très jeune age, on apprend aux mathématiciens comment factoriser un polynôme de degré deux pour résoudre et trouver les zéros. Parce que ceci peut être fait de façon systématique, on peut écrire une formule explicite, très simple d'ailleurs, qui nous donne la solution à ce problème en terme des coefficients de ce polynôme. Par contre, l'un des multiples accomplissements de la théorie de Galois, en algèbre, est de montrer qu'un polynôme de degré cinq, ou plus, ne puisse pas être résolu par la méthode des radicaux. Ce que cela signifie, c'est que si on nous donne un polynôme de degré cinq ou plus, il n'existe aucune formule explicite permettant de déterminer les zéros à partir de ses coefficients. Cela ne veut pas dire qu'un polynôme de degré cinq ou plus ne peut pas être factorisé, ce que cela signifie surtout, c'est que notre meilleure chance de résoudre pour les zéros de ce polynôme est de le faire numériquement, d'où l'importance des méthodes d'approximation.

Même aujourd'hui, dans les publications d'analyse numérique, il est très courant de trouver de nouvelles suggestions de méthodes itératives d'ordre spécifique. Chaque mois, un auteur présente une "nouvelle méthode" d'ordre m pour le calcul du zéro d'une fonction. Bien entendu, plus l'ordre de la méthode est grand, plus la formulation est difficile, alors il est très courant de voir de "nouvelles méthodes" d'ordre trois ou quatre. Ou encore de "nouvelles" modifications de la méthode de Newton, avec un plus grand ordre. Pourtant la popularité des méthodes itératives de Newton, Halley et Chebyshev, est toujours très flagrante. L'un des résultats que nous montrons dans ce mémoire c'est, qu'à une fonction $b(x)$, suffisamment régulière, qui aurait la simple propriété de ne pas être nulle au zéro α, on peut associer une série de "nouvelles" méthodes itératives d'ordre quelconque (Section 6.3). En d'autres termes, on peut écrire plus de nouvelles méthodes d'ordre quelconque m, qu'il n'y a d'encre dans notre stylo. Nous montrons d'ailleurs dès le premier chapitre que si on connait déjà une méthode d'ordre m, il suffit d'ajouter un terme de la forme $\mathcal{O}(f^m)$ pour avoir une autre méthode qui conservera l'ordre (Section 1.4).

Pour appliquer concrètement nos résultats, nous regardons le problème de la racine n-ième d'un nombre. L'article [3] présente les deux familles de méthodes itératives d'ordre m pour le calcul de la racine n-ième :

$$M_{1,m}(x) = x - \frac{(x^n - r)\sum_{j=1}^{m-1}\binom{1/n}{j}\left(\frac{x^n}{r}-1\right)^{j-1}}{nx^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} j\binom{1/n}{j}\left(\frac{x^n}{r}-1\right)^{j-1}}$$

et

$$M_{2,m}(x) = x\sum_{j=0}^{m-1}\binom{1/n}{j}\left(\frac{r}{x^n}-1\right)^{j}.$$

Celles-ci sont initialement apparues dans les articles [1] et [9]. Ces méthodes par contre, sont spécifiquement adaptées au calcul de la racine n-ième d'un nombre et leur utilisation y est limitée. Si donc on essaie de résoudre pour les zéros d'une autre fonction, ces méthodes deviennent inutiles. Notre objectif principal dans ce mémoire est de les généraliser. Nous voulons avoir deux familles distinctes de méthodes itératives qui pourraient approximer les zéros d'une fonction suffisamment régulière, mais nous voudrions aussi, qu'une fois appliquées au problème du calcul de la racine, ces méthodes coïncident avec les méthodes que nous présente cet article.

Dans le Chapitre 1, nous présentons des résultats essentiels sur la convergence de méthodes itératives. Beaucoup de ces résultats ont des applications très surprenantes que nous illustrerons. Nous regarderons aussi comment l'ordre de convergence et la constante asymptotique de méthodes itératives peuvent être utilisées à des fins comparatives (Section 1.3).

Dans le deuxième chapitre nous regardons spécifiquement la méthode itérative de Newton et ses propriétés. En pratique, la méthode itérative qui convient le mieux dépend du coût des opérations que cette méthode nécessite et du temps disponible pour faire des calculs et avoir une plus grande précision. Avoir une plus grande famille de méthodes itératives d'un ordre donné procure plus de choix. C'est pour cela que dans le troisième chapitre, nous comparons des méthodes populaires de troisième ordre. Nous comparons plus particulièrement les méthodes itératives de Halley, Chebyshev et Super-Halley.

Dans le quatrième chapitre, nous commençons à regarder la famille de méthodes itératives de Householder. Parce que celle-ci a été redécouverte si souvent, il est naturel de s'assurer que notre recherche ne soit pas une autre redécouverte de cette famille de méthodes très populaires. On s'aperçoit très vite par contre que ce n'est pas le cas. Nous regardons les diverses façons d'écrire la famille de méthodes itératives de Householder et nous l'appliquons au problème du calcul de la racine d'un nombre pour remarquer qu'elles produisent une série de fonctions itérantes très différentes de celles qu'on recherche.

Dans le chapitre 5, nous présentons des façons alternatives et élémentaires d'obtenir les méthodes présentées dans l'article [3]. On s'aperçoit qu'on peut utiliser certaines propriétées de la fonction $f(x) = x^n - r$, notamment son inversibilité, pour faciliter nos calculs. Nous montrons aussi comment des developpements Taylor de diverses fonctions peuvent être utilisés avec les concepts du premier chapitre pour obtenir des méthodes itératives.

Dans le sixième et dernier chapitre de ce mémoire, nous présentons d'abord un processus d'accélération dû à Schröder. Celui-ci nous procure une famille de méthodes itératives qui coïncide avec l'une des méthodes présentées dans l'article [3]. On remarque aussi que ce processus peut être utilisé différemment pour obtenir une quatrième famille de méthodes itératives, différente des celles des articles [1] et [9], et aussi différente de la méthode de Householder. On conclut en présentant un autre processus d'accélération qui généralise la méthode $M_{1,m}(x)$. Nous utilisons ce processus de nouveau pour trouver un cinquième algorithme pour le calcul de la racine.

Pour conclure le mémoire nous énumérons certaines des observations et remarques que nous n'avons pas eu l'opportunité d'investiguer en détails dans ce mémoire.

CHAPITRE 1

Méthode de point fixe.

1.1 Préliminaires

Un point fixe de la fonction $g(x)$ est une valeur de x, disons α, qui reste invariante pour cette fonction, c'est-à-dire

$$g(\alpha) = \alpha.$$

Une méthode de point fixe utilisée pour determiner un zéro de $f(x)$, disons $f(\alpha) = 0$, consiste à réécrire le problème sous une forme équivalente, $F(\alpha) = \alpha$, pour une nouvelle fonction $F(x)$, et à effectuer les itérations

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, à partir d'une valeur donnée x_0. Ainsi, lorsque $F(x)$ est continue et que la suite des x_n converge vers α, on peut déduire que $F(\alpha) = \alpha$. On appele $F(\cdot)$ une fonction itérante.

On dit qu'une méthode de point fixe $x_{n+1} = F(x_n)$ qui converge vers un nombre α est d'ordre $p \geq 1$ si

$$K_p(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} > 0.$$

On appèle constante asymptotique la valeur finie $K_p(\alpha)$ et la convergence est dite linéaire si $p = 1$. Dans ce cas il faut avoir $K_1(\alpha) \leq 1$. Si $K_1(\alpha) = 0$ on dit que la convergence est superlinéaire. Si $K_1(\alpha) = 1$ on dit que la convergence est sous linéaire.

Soit $F : [a, b] \to [a, b]$, on dit que F est γ-lipschitzienne si pour toute valeur $x, y \in [a, b]$ on a

$$|F(x) - F(y)| \leq \gamma |x - y|. \tag{1.1}$$

Si de plus, $\gamma < 1$, on dit que F est une contraction.

Rappelons quelques résultats élémentaires qui seront utiles par la suite, comme le Théorème de la valeur intermédiaire.

Théorème 1.1.1. *Soit f une fonction à valeur réelle, définie et continue sur un interval $[a, b]$. Soient $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Alors pour toute valeur $y \in [m, M]$, il existe au moins un point $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

Nous aurons aussi besoin du Théorème de la valeur moyenne.

Théorème 1.1.2. *Soit f une fonction à valeur réelle, continue sur $[a, b]$ et différentiable sur (a, b). Alors, il existe au moins un point $c \in (a, b)$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f^{(1)}(c)(b - a).$$

Pour finir, rappelons la formule de Taylor avec reste sous la forme de Lagrange.

Théorème 1.1.3. *Soit $f \in C^{n+1}(a,b)$ une fonction $n+1$ continûment différentiable. Pour $\alpha \in (a,b)$ et pour chaque $x \in (a,b)$, il existe un point $\nu_x \in (a,b)$ entre x et α tel que*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}(x-\alpha)^i + R_n(x), \tag{1.2}$$

où

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\nu_x)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}. \tag{1.3}$$

Dans ce chapitre, nous parlons de propriétés fondamentales de méthodes itératives. On débutera en parlant des conditions sous lesquelles il existe un point fixe. Ensuite nous illustrons les avantages d'avoir un ordre de convergence élevé et une constante asymtotique aussi petite que possible, souvent au prix de calculs plus coûteux. Dans la dernière section de ce chapitre nous parlerons de la façon de déterminer l'ordre de convergence d'une méthode itérative. Pour finir, nous présenterons des résultats peu connus mais extrêmement utiles dans l'étude de la convergence de nos méthodes.

1.2 Existence et unicité d'un point fixe

Nous avons mentionné auparavant qu'un point fixe α pour une fonction $F(x)$ est un point tel que $F(\alpha) = \alpha$. Par exemple, un problème comme trouver la racine d'un nombre peut être ramené à trouver le point fixe d'une autre fonction. Si on suppose par exemple que $g(x)$ est une fonction avec comme zéro β , c'est-à-dire $g(\beta) = 0$, alors la fonction $f(x) = g(x) + x$ aura pour point fixe la valeur β. De façon similaire, si $f(x)$ est une fonction avec un point fixe η, alors la fonction $g(x) = x - f(x)$ a cette valeur η comme zéro. On observe donc la correspondance entre le point fixe d'une fonction et le zéro d'une autre.

Nous présentons d'abord le Théorème de point fixe de Banach.

Théorème 1.2.1. *Soit $F \in C([a,b])$ et $F : [a,b] \to [a,b]$ une contraction avec une valeur $\gamma < 1$ telle que pour tout $x, y \in [a,b]$*

$$|F(x) - F(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Alors F a un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$ et l'itération $x_{n+1} = F(x_n)$ pour $n = 0, 1, \ldots,$ converge vers α pour toute valeur $x_0 \in [a,b]$.

Démonstration : Définissons $h(x) = F(x) - x$. Alors,

$$h(b) = F(b) - b \leq 0$$

et

$$h(a) = F(a) - a \geq 0.$$

Par le Théorème de la valeur intermédiaire, on sait que h a une racine α dans l'interval $[a,b]$. Ainsi $h(\alpha) = 0$, d'où $\alpha = F(\alpha)$, ce qui prouve l'existence d'un point fixe.

Supposons qu'il existe deux points fixes $\alpha = F(\alpha)$ et $\beta = F(\beta)$. Alors

$$|\alpha - \beta| = |F(\alpha) - F(\beta)| \leq \gamma |\alpha - \beta|$$

ce qui implique que

$$|\alpha - \beta|(1 - \gamma) \leq 0$$

Comme $0 \leq \gamma < 1$, il suit que $|\alpha - \beta| = 0$. Ainsi $\alpha = \beta$ et le point fixe est unique.

Considérons maintenant

$$|\alpha - x_{n+1}| = |F(\alpha) - F(x_n)| \leq \gamma |\alpha - x_n|.$$

Si on écrit $e_n = |\alpha - x_n|$, l'équation devient $e_{n+1} \leq \gamma e_n$. On obtient de façon récursive que $e_n \leq \gamma^n e_0$. De là il vient que $e_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. On en déduit donc la convergence de notre itération. $\square$

Notons que nous avons les inégalitées suivantes

$$|\alpha - x_0| = |\alpha - F(x_0) + x_1 - x_0| \leq |F(\alpha) - F(x_0)| + |x_1 - x_0| \leq \gamma|\alpha - x_0| + |x_1 - x_0|$$

il en découle donc que

$$|\alpha - x_0| \leq \frac{1}{1-\gamma}|x_1 - x_0|.$$

Ainsi nous observons l'approximation suivante

$$e_n \leq \gamma^n e_0 \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma}|x_1 - x_0|,$$

qui ne dépend que des valeurs x_0 , x_1 et γ. Si de plus $F \in C^1([a,b])$ avec $|F^{(1)}(\alpha)| \leq \gamma < 1$, du Théorème de la valeur moyenne, nous avons

$$\alpha - x_{n+1} = F(\alpha) - F(x_n) = F^{(1)}(\eta_n)(\alpha - x_n)$$

avec η_n entre x_n et α. Ainsi

$$\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = F^{(1)}(\eta_n) \to F^{(1)}(\alpha)$$

parce que $\eta_n \to \alpha$ comme x_n converge vers α et $F^{(1)}$ est continue. La convergence est d'ordre 1 avec $K_1(\alpha) = |F^{(1)}(\alpha)|$.

Nous présentons maintenant un corollaire de convergence locale.

Corollaire 1.2.2. *Soit $g \in C^1([a,b])$ et $\alpha \in (a,b)$ un point fixe de g tel que $|g'(\alpha)| < 1$. Alors pour x_0 suffisamment près de α, l'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g^{(1)}(\alpha)$$

et

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma}|x_1 - x_0|$$

pour une valeur $\gamma < 1$.

Démonstration : Comme g est continûment différentiable dans l'interval ouvert contenant le point fixe, avec $|g^{(1)}(\alpha)| < 1$, on peut trouver un interval fermé J dans (a, b), centré au point α, tel que $|g^{(1)}(x)| \leq \gamma < 1$ pour toute valeur $x \in J$. Il suit donc de la définition de notre méthode itérative que

$$|\alpha - x_1| = |g(\alpha) - g(x_0)| \leq \gamma|\alpha - x_0|.$$

En d'autres termes, x_1 est plus proche du point fixe que x_0, et il en est de même pour le reste des itérations. Ainsi $g(x) \in J$ pour toute valeur $x \in J$ et on peut donc appliquer le théorème précédent pour obtenir la convergence de notre itération. □

Théorème 1.2.3. *Considérons une méthode itérative $g(x_k) = x_{k+1}$ où g est différentiable et la suite x_n avec $x_0 \neq 0$.*

1-Si la suite converge vers α, α est un point fixe.

2-En plus si $x_k \neq \alpha$ pour toute valeur de k, on doit avoir $|g'(\alpha)| \leq 1$.

3-Si la convergence est linéaire, alors $|g'(\alpha)| < 1$.

Démonstration : 1-Si $x_k \to \alpha$, par continuité on a $g(x_k) \to g(\alpha)$.

2-Procédons par contradiction, si on a $|g^{(1)}(\alpha)| > 1$, il existe un interval centré en α, $(\alpha - r, \alpha + r)$ tel que $|g(x)| > L > 1$. Si $x_k \in (\alpha - r, \alpha + r)$ alors $x_{k+1} - \alpha = g(x_k) - \alpha = g^{(1)}(\eta_k)(x_k - \alpha)$. Donc on a

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g^{(1)}(\eta_k)||x_k - \alpha| > L|x_k - \alpha|.$$

Si $x_{k+1} \in (\alpha - r, \alpha + r)$ on aura aussi $|x_{k+2} - \alpha| > L^2|x_k - \alpha|$ tant que $x_{k+s} \in (\alpha - r, \alpha + r)$. Ainsi pour toute valeur $0 < \beta < r$, il existe un tel $x_{k(\beta)}$ tel que $|x_{k(\beta)} - \alpha| > \beta$. Pour tout indice K il existe $k(\beta) > K$, ce qui contredit la convergence de x_k vers α.

3- Si la convergence est linéaire on a

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\right| = K_1(\alpha) < 1$$

mais $\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = g^{(1)}(\eta_k)$ avec $\eta_k \to \alpha$, d'où $|g^{(1)}(\alpha)| = K_1(\alpha) < 1$. □

1.3 Ordre de convergence et constante asymptotique

Rappelons qu'on dit qu'une méthode de point fixe $x_{n+1} = F(x_n)$ qui converge vers un nombre α est d'ordre $p \geq 1$ si

$$K_p(\alpha) = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} > 0,$$

et la constante asymptotique est la valeur finie $K_p(\alpha)$.

L'ordre de convergence est un bon estimateur du nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une certaine précision. Si l'on suppose que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = c,$$

alors, pour un nombre n suffisamment grand, on peut estimer

$$|x_{n+1}-\alpha| \approx c|x_n-\alpha|^p.$$

Supposons que nous avons deux méthodes itératives d'ordre respective p_1 et p_2 avec $p_1 \leq p_2$. Supposons aussi que la valeur de la constante asymptotique est la même pour les deux méthodes, qu'on dénote $c_1 = c_2 = c$. Si à l'itération k les 2 méthodes coïncident, et qu'on denote $x_{k,1} = x_{k,2} = x_k$, pour k une valeur telle que

$$|x_k - \alpha| < 1.$$

Étant donné $p_1 \leq p_2$, on peut déduire que

$$|x_k - \alpha|^{p_1} \geq |x_k - \alpha|^{p_2}.$$

On observe donc que

$$\begin{aligned} |x_{k+1,2} - \alpha| &\approx c_2|x_k - \alpha|^{p_2} \\ &\leq c_2|x_k - \alpha|^{p_1} \\ &= c_1|x_k - \alpha|^{p_1} \\ &= c_1|x_{k,1} - \alpha|^{p_1} \\ &\approx |x_{k+1,1} - \alpha|. \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'iteration qui suit de la méthode qui a le plus grand ordre est plus proche de la solution α.

Notons que même si $c_2 \neq c_1$, et que les méthodes convergent encore avec $p_1 \leq p_2$, on peut trouver un nombre k suffisamment grand tel que l'inégalité $c_2|x_{k,2} - \alpha|^{p_2} \leq c_1|x_{k,1} - \alpha|^{p_1}$ sera encore valide. C'est la raison pour laquelle nous disons que l'ordre de convergence est un estimateur du nombre d'iterations requis pour atteindre une certaine précision.

Si maintenant nous supposons que les deux méthodes ont le même ordre de convergence $p_1 = p_2 = p$ et que les constantes asymptotiques diffèrent selon $c_2 \leq c_1$. On suppose que pour un nombre k on a $x_{k,1} = x_{k,2} = x_k$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}
|x_{k+1,2}-\alpha| &\approx c_2|x_k-\alpha|^{p_2} \\
&= c_2|x_k-\alpha|^{p} \\
&\leq c_1|x_k-\alpha|^{p} \\
&= c_1|x_{k,1}-\alpha|^{p_1} \\
&\approx |x_{k+1,1}-\alpha|
\end{aligned}$$

En d'autre termes, si l'ordre de convergence des 2 méthodes est le même, l'itération qui suit la méthode qui a la plus petite constante asymptotique est plus proche de la solution.

1.4 Convergence d'ordre supérieur

L'ordre de convergence est une indication de la vitesse à laquelle une méthode itérative converge. Plus l'ordre de convergence est grand, moins on a besoin de faire d'itération pour être proche de la bonne solution. Ceci justifie donc l'intérêt d'avoir un ordre de convergence aussi grand que possible. Le théorème suivant nous donne une caractérisation essentielle de ce qu'est l'ordre de convergence. Il est aussi à la base de beaucoup des processus d'accélération de convergence que nous aborderons. Dans toute cette section nous assumons que la suite x_n converge vers α.

Théorème 1.4.1. *Considérons l'itération de point fixe définie par*

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

avec $g \in C^p([a,b])$ *et* $\alpha = g(\alpha)$. *Si*

$$g^{(1)}(\alpha) = g^{(2)}(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$$

mais

$$g^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

alors notre itération converge vers α pour une valeur x_0 suffisamment proche de α, l'ordre de convergence est p. De plus, la constante asymptotique est

$$K_p(\alpha) = \left|\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|.$$

Démonstration : Le fait que $g^{(1)}(\alpha) = 0 < 1$, entraîne que l'itération va converger pour une valeur x_0 suffisamment proche de α, par le Corollaire 1.2.2. Il ne nous reste donc plus qu'à établir la convergence d'ordre supérieur. Par l'utilisation du développement de Taylor, nous avons

$$g(x_n) = g(\alpha) + g^{(1)}(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{g^{(2)}(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 + \cdots + \frac{g^{(p)}(\eta_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p,$$

avec η_n entre x_n et α. Puisque les derivées sont nulles en α, on obtient que

$$g(x_n) = g(\alpha) + \frac{g^{(p)}(\eta_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p.$$

Par la définition de notre itération on obtient donc que

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \frac{1}{p!}g^{(p)}(\eta_n).$$

Donc, notre convergence d'ordre p suit et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \frac{1}{p!}g^{(p)}(\alpha) \tag{1.4}$$

puisque $\eta_n \to \alpha$ et $g \in C^p([a, b])$ □

Théorème 1.4.2. *Supposons que $x_{n+1} = g(x_n)$ soit une méthode itérative d'ordre $p \geq 2$ et $g \in C^p([a, b])$. Alors $g(\alpha) = \alpha$ et $g^{(1)}(\alpha) = g^{(2)}(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ et $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$.*

Démonstration : On a $g(\alpha) = \alpha$ par continuité de g. Aussi

$$g(x) - g(\alpha) = g^{(1)}(\eta_x)(x - \alpha)$$

et aussi

$$g^{(1)}(\eta_x) = \frac{g(x) - g(\alpha)}{(x - \alpha)} = \frac{g(x) - g(\alpha)}{(x - \alpha)^p}(x - \alpha)^{p-1} \to 0$$

quand $x \to \alpha$. Ainsi $g^{(1)}(\alpha) = 0$. Supposons que $g^{(k)}(\alpha) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, l - 1$, on a

$$g(x) - g(\alpha) = \frac{g^{(l)}(\eta_x)}{l!}(x - \alpha)^l$$

et

$$g^{(l)}(\eta_x) = l!\frac{g(x) - g(\alpha)}{(x - \alpha)^l} = l!\frac{g(x) - g(\alpha)}{(x - \alpha)^p}(x - \alpha)^{p-l} \to 0$$

quand $x \to \alpha$. Ceci est vraie pour $l \leq p - 1$. Alors

$$g(x) - g(\alpha) = \frac{g^{(p)}(\eta_x)}{p!}(x - \alpha)^p$$

d'où

$$p!\frac{g(x) - g(\alpha)}{(x - \alpha)^p} = g^{(p)}(\eta_x) \to g^{(p)}(\alpha)$$

quand $x \to \alpha$ avec $|g^{(p)}(\alpha)| = p!|K_p(\alpha)|$ □

Lemme 1.4.3. *Si $g \in C^p$ est telle que $g(\alpha) = \alpha$, alors la méthode itérative*

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

est d'ordre p si et seulement si $g(x) = \alpha + \mathcal{O}\Big((x - \alpha)^p\Big)$.

Démonstration : On a $g(\alpha) = \alpha$ et $g^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i = 1, \dots, p - 1$ □

Corollaire 1.4.4. *Deux méthodes itérative d'ordre p diffèrent d'un facteur $\mathcal{O}\Big((x - \alpha)^p\Big)$.*

De la même façon

Lemme 1.4.5. *Si $V(x) \in C^m$, avec $f(x) \in C^m$ pour $f(\alpha) = 0$ et*

$$V(x) = \mathcal{O}(f(x)^m),$$

alors $V^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Démonstration : On a

$$V(x) = \frac{V(x)}{f(x)^m} f(x)^m \to 0$$

quand $x \to \alpha$, et $V(\alpha) = 0$. Si $V^{(i-1)}(\alpha) = 0$ alors

$$V(x) = \frac{V^{(i)}(\eta_x)}{i!}(x-\alpha)^i$$

et

$$V^{(i)}(\eta_x) = i! \frac{V(x)}{(x-\alpha)^i} = i! \frac{V(x)}{(x-\alpha)^m}(x-\alpha)^{m-i} \to 0$$

quand $x \to \alpha$ d'où $V^{(i)}(\alpha) = 0$ car $\eta_x \to \alpha$. □

Théorème 1.4.6. *Soient $f \in C^m$ et α tels que $f(\alpha) = 0$. Si pour $T \in C^m$ on a $T(x) = \alpha + \mathcal{O}(f(x)^m)$, alors l'itération*

$$x_{k+1} = T(x_k)$$

est d'ordre m.

Démonstration : On a $T(\alpha) = \alpha$ et on procède comme précédement pour avoir $T^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i = 1, \ldots, m-1$. □

En remarquant que $\mathcal{O}((x-\alpha)^m)) = \mathcal{O}(f(x)^m)$ pour une racine simple α de $f(x)$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.7. *L'ajout d'un terme de la forme $\mathcal{O}\Big(f(x)^m\Big)$ conserve l'ordre d'une méthode itérative d'ordre m pour le calcul d'un zéro simple α d'une fonction $f(x) \in C^m$.*

CHAPITRE 2

Méthode de Newton-Raphson

2.1 Introduction

La méthode itérative de Newton est très populaire à cause de la simplicité de sa formulation et de son ordre de convergence. Nous allons présenter ici une dérivation simple de cette méthode, et nous parlerons des modifications qui peuvent y être apportées pour augmenter l'ordre de convergence.

Il y a plusieurs façons d'obtenir cette méthode. En cherchant une méthode convergeant à l'ordre 2, on pose

$$F(x) = x + \phi(x)f(x)$$

de telle sorte que $F^{(1)}(\alpha) = 0$ et $F^{(2)}(\alpha) \neq 0$. Mais

$$F^{(1)}(x) = 1 + \phi^{(1)}(x)f(x) + \phi(x)f^{(1)}(x).$$

avec

$$F^{(1)}(\alpha) = 1 + \phi(\alpha)f^{(1)}(\alpha).$$

Il suffit alors de choisir $\phi(x) = -1/f^{(1)}(x)$ et on a

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}.$$

Notons que pour x_0 donné et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, si la suite de points x_n converge vers α , alors $f(\alpha) = 0$. En effet si $x_n \to \alpha$ alors $\frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)} \to 0$, ainsi

$$f(x_n) = \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)} f^{(1)}(x_n) \to 0 f^{(1)}(\alpha) = 0.$$

Aussi $f(x_n) \to f(\alpha)$ par continuité de f et $f^{(1)}$.

Dans ce chapitre nous présentons les résultats classiques concernant l'itération de Newton. Notamment, comment son ordre varie en fonction de la multiplicité du zéro, et sous quelles conditions cette méthode a un ordre plus que grand que deux.

2.2 Ordre de convergence

Dans cette section nous parlerons de l'ordre de convergence de la méthode de Newton et de la façon dont cet ordre est affecté par certaines propriétés de la fonction itérante. Nous présentons d'abord le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit $f \in C^2(a,b)$ et $\alpha \in (a,b)$ tel que $f(\alpha) = 0$. Si $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ la méthode de Newton converge vers α et la convergence est d'ordre 2.*

Démonstration : Comme $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$ la fonction d'itération

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}$$

est de classe C^1 dans un voisinage de α. De plus

$$F^{(1)}(x) = \frac{f(x)f^{(2)}(x)}{(f^{(1)}(x))^2}$$

et $F^{(1)}(\alpha) = 0$. Donc la méthode converge localement et la convergence est au moins superlinéaire. De plus

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \\ &= x_n + \frac{f(\alpha) - f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \\ &= x_n + \frac{f^{(1)}(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\nu_n)(\alpha - x_n)^2}{f^{(1)}(x_n)}. \end{aligned}$$

Alors

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f^{(2)}(\nu_n)}{2f^{(1)}(x_n)}(\alpha - x_n)^2,$$

ainsi

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{f^{(2)}(\nu_n)}{2f^{(1)}(x_n)} \to \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2f^{(1)}(\alpha)}$$

quand $n \to \infty$ et ainsi la convergence est quadratique. □

Théorème 2.2.2. *Soit $f \in C^2$ strictement croissante, convexe et il existe deux nombres réels a et b tel que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Alors $f(x) = 0$ a une seule solution et la méthode de Newton converge à partir d'un point réel x_0 arbitraire.*

Démonstration : La fonction possède au moins un zéro et comme f est strictement croissant on a $f^{(1)}(x) > 0$. Elle ne peut avoir un second zéro car f est convexe avec $f^{(2)}(x) \geq 0$ et $f^{(1)}(x) > 0$. Comme

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f^{(2)}(\nu_n)}{2f^{(1)}(x_n)}(x_n - \alpha)^2 > 0$$

alors $x_{n+1} \geq \alpha$. Si $x_n > \alpha$ on a $f(x_n) \geq f(\alpha)$ car f est croissante et

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f^{(1)}(x_n)} < x_n - \alpha.$$

Ainsi la séquence de points x_n est décroissante et a comme plus petite bornée inférieure α. Elle converge donc vers α, puisqu'elle converge. □

2.3 Convergence d'ordre supérieur

Si le graphe de la fonction f "ressemble" au graphe d'une droite au voisinage de la racine α, la convergence devrait être plus rapide.

Théorème 2.3.1. *Soit p un entier ≥ 2, et f une fonction p fois continûment différentiable, $f \in C^p(a,b)$, telle que $f(\alpha) = 0, f^{(1)}(\alpha) \neq 0$, $f^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i = 2, 3, \cdots, p-1$ et $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Alors si x_0 est suffisamment près de α, la méthode de Newton converge et la convergence est d'ordre p. De plus*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \frac{p-1}{p!} \frac{f^{(p)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}. \tag{2.1}$$

Démonstration : On écrit

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \frac{x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}}{(x_n - \alpha)^p} = \frac{(x_n - \alpha) f^{(1)}(x_n) - f(x_n)}{(x_n - \alpha)^p f^{(1)}(x_n)}.$$

En utilisant les développements de Taylor de $f(x)$ et $f^{(1)}(x)$ autour de α nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} &= \frac{(x_n - \alpha)[f^{(1)}(\alpha) + \frac{f^{(p)}(\nu_n)(x_n - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!}] - [f^{(1)}(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f^{(p)}(\zeta_n)(x_n - \alpha)^p}{p!}]}{(x_n - \alpha)^p f^{(1)}(x_n)} \\
&= \frac{p f^{(p)}(\nu_n) - f^{(p)}(\zeta_n)}{p! f^{(1)}(x_n)} \\
&\to \frac{p-1}{p!} \frac{f_p^{(p)}(\alpha)}{f_p^{(1)}(\alpha)}
\end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$ puisque ν_n et $\zeta_n \to \alpha$ et $f^{(p)}(x)$ est continue. □

On peut prouver ce même résultat d'une autre façon si nous avons la condition $f \in$

$C^{p+1}([a,b])$. En effet considérons la fonction

$$g(x) = \frac{1}{f^{(1)}(x)}.$$

On écrit $f^{(1)}(x)g(x) = 1$ et on a

$$\frac{d^l}{dx^l} f^{(1)}(x)g(x) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} f^{(1+k)}(x)g^{(l-k)}(x) = 0$$

pour $l \geq 1$. On écrit alors

$$f^{(1)}(x)g^{(l)}(x) + \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} f^{(1+k)}(x)g^{(l-k)}(x) = 0$$

d'où

$$g^{(l)}(\alpha) = 0$$

pour $l = 1, \ldots, p-2$ et

$$g^{(p-1)}(\alpha) = -\frac{f^{(p)}(\alpha)g(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} = -\frac{f^{(p)}(\alpha)}{[f^{(1)}(\alpha)]^2}.$$

Pour $F(x) = x - f(x)/f^{(1)}(x) = x - f(x)g(x)$ on a

$$F(\alpha) = \alpha.$$

Comme

$$F^{(1)}(x) = 1 - f^{(1)}(x)g(x) - f(x)g^{(1)}(x) = -f(x)g^{(1)}(x).$$

et aussi $F^{(1)}(\alpha) = 0$. On en déduit que

$$F^{(1+l)}(x) = -\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} f^{(k)}(x)g^{(1+l-k)}(x)$$

et

$$F^{(1+l)}(\alpha) = -\Big[l f^{(1)}(\alpha)g^{(l)}(\alpha) + \sum_{k=2}^{l} \binom{l}{k} f^{(k)}(\alpha)g^{(1+l-k)}(\alpha)\Big],$$

d'où $F^{(l)}(\alpha) = 0$ pour $l = 1, 2, \ldots, p-1$ et

$$\begin{aligned} F^{(p)}(\alpha) &= -[(p-1)f^{(1)}(\alpha)g^{(p-1)}(\alpha) + \sum_{k=2}^{p-1}\binom{p-1}{k}f^{(k)}(\alpha)g^{(p-1)}(\alpha)] \\ &= (p-1)\frac{f^{(1)}(\alpha)f^{(p)}(\alpha)}{[f^{(1)}(\alpha)]^2} \\ &= (p-1)\frac{f^{(p)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après les Théorèmes 1.4.1 et 2.3.1, nous obtenons

$$\left|\frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)^p}\right| \to \left|\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\right| = \frac{(p-1)}{p!}\left|\frac{f^{(p)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right|.$$

Théorème 2.3.2. *Supposons que $g \in C^k$. Si $g(\alpha) = g^{(1)}(\alpha) = g^{(2)}(\alpha) = \ldots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $g^{(k)}(\alpha) \neq 0$, alors $g(x) = (x-\alpha)^k v(x)$ pour une fonction $v(x)$ continue tel que $v(\alpha) \neq 0$. On dit que α est une racine de g avec multiplicité égale à k.*

Démonstration : Posons

$$v(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{(x-\alpha)^k} & \text{si} \quad x \neq \alpha, \\ \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!} & \text{si} \quad x = \alpha. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x\to\alpha} v(x) = \frac{g^{(k)}(\eta_x)}{k!} \to \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!} = v(\alpha)$$

et on voit que $g(x) = v(x)(x-\alpha)^p$. □

Théorème 2.3.3. *Considérons la méthode Newton appliquée sur une fonction $f(x) \in C^{p+1}$, avec $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}.$$

Si la méthode de Newton est d'ordre $p > 2$, alors $f^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i = 2, \ldots, p-1$ et $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration : Si $F(x)$ est une méthode d'ordre p, par le Théorème 1.4.2 nous pouvons conclure que

$$F^{(i)}(\alpha) = 0$$

pour $i = 1, \ldots, p-1$. Ceci veut dire que α est une racine de multiplicité $p-1$ de $F^{(1)}(x)$. Entre autre

$$F^{(1)}(x) = (x-\alpha)^{p-1} v(x)$$

pour une fonction $v(x)$ continue telle que $v(\alpha) \neq 0$. Observons donc que

$$F^{(1)}(x) = \frac{f(x) f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2} = (x-\alpha)^{p-1} v(x).$$

Parce que $f(\alpha) = 0$ et $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$ on a $f(x) = (x-\alpha) w(x)$ pour $w(\alpha) \neq 0$. On a donc

$$F^{(1)}(x) = \frac{f(x) f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2} = \frac{(x-\alpha) w(x) f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2} = (x-\alpha)^{p-1} v(x)$$

Ceci implique que

$$f^{(2)}(x) = (x-\alpha)^{p-2} s(x)$$

pour une fonction $s(x)$ telle que $s(\alpha) \neq 0$. En d'autres termes, α est une racine de $f^{(2)}(x)$ de multiplicité $p-2$. Donc $f^{(j)}(\alpha) = 0$ pour $2 \leq j < p$ et $f^{(p)}(\alpha) = 0$. □

2.4 Racines multiples

Si la fonction $f(.)$ a une racine multiple en α, en fait de multiplicité m, en d'autres termes, $f^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i = 0, \cdots, m-1$ et $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ la convergence est plus lente.

Lemme 2.4.1. *Soit f une fonction de classe C^m et*

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} \alpha & si \quad x = \alpha, \\ x - \lambda \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} & si \quad x \neq \alpha. \end{cases} \tag{2.2}$$

pour λ réel, et α une racine de multiplicité m de f. Alors $F_\lambda(x) \in C^1(a,b)$ et $F_\lambda^{(1)}(\alpha) = 1 - \frac{\lambda}{m}$.

Démonstration : Notre fonction $F_\lambda(x)$ definie ci-dessus est continue car

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha} F_\lambda(x) &= \lim_{x\to\alpha}\left[x - \lambda\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}\right] \\
&= \alpha - \lambda\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} \\
&= \alpha - \lambda\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{\frac{1}{m!}f^{(m)}(\eta_x)(x-\alpha)^m}{\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\zeta_x)(x-\alpha)^{m-1}}\right] = \alpha
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_\lambda^{(1)}(x) = \begin{cases} \lim_{x\to\alpha}\left[\frac{x-\alpha-\lambda\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}}{x-\alpha}\right] = 1 - \frac{\lambda}{m} & \text{si} \quad x = \alpha, \\ 1 - \lambda\frac{[f^{(1)}(x)]^2 - f(x)f^{(2)}x}{[f^{(1)}(x)]^2} & \text{si} \quad x \neq \alpha. \end{cases}$$

On observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha} F_\lambda^{(1)}(x) &= 1 - \lambda + \lambda\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2} \\
&= 1 - \lambda + \lambda\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{\frac{f^{(m)}(\eta)}{m!}(x-\alpha)^m[\frac{f^{(m)}(\gamma)}{(m-1)!}](x-\alpha)^{m-1}}{\frac{f^{(m)}(\zeta)}{(m-1)!}(x-\alpha)^{m-1}}\right] \\
&= 1 - \lambda + \lambda\frac{m-1}{m} \\
&= 1 - \frac{\lambda}{m}
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.4.2. *Soit $\alpha \in (a,b)$ une racine de multiplicité $m > 1$ de $f \in C^m(a,b)$. Alors si x_0 est suffisamment près de α, la méthode de Newton converge, mais la convergence* *est linéaire avec*

$$K_1(\alpha) = 1 - 1/m$$

Démonstration : Dans ce cas la fonction itérante définie par $F(x) = F_\lambda(x)$, pour la valeur $\lambda = 1$ avec $F_\lambda(x)$ définie par l'équation 2.2 , est $C^1(a,b)$ et $F^{(1)}(\alpha) = 1 - 1/m$. Donc la convergence locale est assurée avec convergence linéaire. □

Théorème 2.4.3. *Soit $\alpha \in (a,b)$ une racine de multiplicité $m > 1$ de $f \in C^{(m+1)}(a,b)$. La méthode de Newton modifiée, $x_{n+1} = F(x_n)$, où*

$$F(x) = \begin{cases} \alpha & si \quad x = \alpha, \\ x - m\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} & si \quad x \neq \alpha. \end{cases}$$

converge quadratiquement si $x_0 \in (a,b)$ est suffisamment près de α.

Démonstration : La fonction itérante est $C^1(a,b)$ et $F^{(1)}(\alpha) = 0$, par notre Corollaire 1.2.2 . La convergence locale est ainsi assurée. De plus.

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{x_n - \alpha - m\frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{(x_n - \alpha)f^{(1)}(x_n) - mf(x_n)}{(x_n - \alpha)^2 f^{(1)}(x_n)} \tag{2.3}$$

Notons que

$$f^{(1)}(x_n) = [\frac{(x_n - \alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^m}{m!} f^{(m)}(\nu_n)]$$

et

$$f(x_n) = [\frac{(x_n - \alpha)^m}{m!} f^{(m)}(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\lambda_n)]$$

on peut aussi écrire

$$f^{(1)}(x_n) = \frac{(x_n - \alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\phi_n),$$

pour les valeurs α_n, ν_n et ϕ_n données par applications de la formule de Taylor avec reste sous forme de Lagrange autour de α pour les fonctions $f(x_n)$ et $f^{(1)}(x_n)$. Après substitution dans l'équation 2.3 on obtient

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{\frac{f^{(m+1)}(\nu_n)}{m!} - \frac{mf^{(m+1)}(\lambda_n)}{(m+1)!}}{\frac{f^{(m)}(\phi_n)}{(m-1)!}} \to \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{m(m+1)f^{(m)}(\alpha)}$$

$\square$

Théorème 2.4.4. *Si $f \in C^m$ et $f(x)$ a une racine α de multiplicité m, alors α est une racine simple de la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.*

Démonstration : Si

$$f(x) = (x-\alpha)^m v(x)$$

on a

$$f'(x) = (x-\alpha)^{m-1} w(x).$$

Et donc

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = (x-\alpha)\frac{v(x)}{w(x)}$$

avec

$$\frac{v(\alpha)}{w(\alpha)} = \frac{\frac{1}{m!}f^{(m)}(\alpha)}{\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\alpha)} = \frac{1}{m} \quad \square$$

Pour obtenir une méthode d'ordre 2 au moins, on peut donc appliquer la méthode de Newton sur cette nouvelle fonction $g(x)$ et considérer

$$\begin{aligned} N_g(x) &= x - \frac{f(x)/f^{(1)}(x)}{[f(x)/f^{(1)}(x)]^{(1)}} \\ &= x - \frac{f(x)f^{(1)}(x)}{f^{(1)}(x)^2 - f(x)f^{(2)}(x)} \\ &= x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}\left[\frac{1}{1-\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}}\right] \end{aligned}$$

Notons que

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{1}{1-\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}}\right]=m$$

et ainsi, asymptotiquement, le facteur de correction de cette méthode, $\frac{1}{1-\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}}$, est voisin de m, le facteur de correction du Théorème 2.4.3.

Notons que si $g(x)$ est tel que $g(\alpha)=\alpha$, et

$$f(x)=g(x)-x$$

on a $f(\alpha)=0$, $f^{(1)}(x)=g^{(1)}(x)-1$ et $f^{(k)}(x)=g^{(k)}(x)$ pour $k=1,2,\ldots,p-1$. Si $g(\alpha)=\alpha$ et $g^{(k)}(\alpha)=0$ pour $k=1,\ldots,p-1$, on a $f(\alpha)=0$ et $f^{(1)}(\alpha)=-1$ et $f^{(k)}(\alpha)=0$ pour $k=1,\ldots,p-1$. La méthode Newton appliquée à $f(x)$ sera d'ordre p.

$$N(x)=x-\frac{g(x)-x}{g^{(1)}(x)-1}$$

Inversement, si $f(x)$ est une fonction telle que $f(\alpha)=0$ et $f^{(1)}(\alpha)\neq 0$, $f^{(k)}(\alpha)=0$ pour $k=2,\ldots,p-1$, en posant

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f^{(1)}(\alpha)}$$

on aura

$$g(\alpha)=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}=\alpha,$$

$$g^{(1)}(x)=1-\frac{f^{(1)}(x)}{f^{(1)}(\alpha)},$$

et donc $g^{(1)}(\alpha)=0$. Avec

$$g^{(k)}(x)=-\frac{f^{(k)}(x)}{f^{(1)}(\alpha)}$$

on a $g^{(i)}(\alpha)=0$ pour $i=2,\ldots,p-1$. Ainsi g sera une méthode itérative d'ordre p.

On conclut en notant que deux méthodes de Newton d'ordre m ne diffère que par un $\mathcal{O}\Big((x-\alpha)^m\Big)$. Comme $f(x) = (x-\alpha)v(x)$ avec $v(\alpha) \neq 0$, un $\mathcal{O}\Big((x-\alpha)^m\Big)$ est aussi un $\mathcal{O}\Big(f(x)^m\Big)$ et vice versa.

CHAPITRE 3

Quelques méthodes d'ordre 3

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques méthodes d'ordre 3 très populaires, entre autres les méthodes de Halley, Chebyshev et Super-Halley. Nous présentons des façons de les obtenir l'une de l'autre. Nous nous servons du calcul de la racine pour les comparer et voir s'il y a lieu de croire que la méthode Super-Halley soit la meilleure.

3.2 Méthodes d'ordre 3

Débutons par le lemme suivant énoncé dans [7].

Lemme 3.2.1. *Soit α une racine simple d'une fonction $f(x)$ de classe C^4 et $H(x)$ une fonction de classe C^3, telle que $H(0) = 1$, $H^{(1)}(0) = \frac{1}{2}$. On définit*

$$L_f(x) = \frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}$$

et

$$I_H(x) = x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} H(L_f(x)).$$

Alors l'itération

$$x_{k+1} = I_H(x_k)$$

est au moins d'ordre 3.

Notons d'abord comme énoncé dans[7], que toute méthode itérative d'ordre 3 sera de la forme

$$\begin{aligned}
I(x) &= I_H(x) + \mathcal{O}\Big((x-\alpha)^3\Big) \\
&= I_H(x) + \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} \mathcal{O}(f(x)^2) \\
&= x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} \Big[H(L_f(x) + b(x) f(x)^2\Big]
\end{aligned}$$

pour une fontion $b(x) \in C^3$. Maintenant démontrons le Lemme.

Démonstration : Notons que $L_f(\alpha) = 0$ et

$$I_H(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} H(L_f(\alpha)) = \alpha.$$

Aussi

$$I_H^{(1)}(x) = 1 - [1 - L_f(x)] H(L_f(x)) - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} H^{(1)}(L_f(x)) L_f^{(1)}(x)$$

et donc

$$I_H^{(1)}(\alpha) = 1 - H(0) = 0.$$

Il ne nous reste plus qu'à remarquer que

$$I_H^{(2)}(\alpha) = L_f^{(1)}(\alpha)[H(L_f(\alpha)) - 2H^{(1)}(L_f(\alpha))] = L_f^{(1)}(\alpha)[H(0) - 2H^{(1)}(0)] = 0.$$

Pourvu donc que $I_H^{(3)}(\alpha) \neq 0$ par notre Théorère 1.4.1 on peut conclure que notre méthode aura une convergence à l'ordre 3, et la condition $H(x) \in C^3$ est suffisante. $\square$

Comme exemple prenons

$$H_\beta(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{(1-\beta x)} = \frac{1+(\frac{1}{2}-\beta)x}{1-\beta x}.$$

On remarque que pour toute valeur réelle β notre fonction $H_\beta(x)$ satisfait la condition du lemme. Nous avons

$$\begin{aligned}
I_{H_\beta}(x) &= x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}\Big[1 + \frac{1}{2}\frac{\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}}{\left(1-\beta\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}\right)}\Big] \\
&= x - \frac{f}{f^{(1)}}\Big[\frac{2+(1-2\beta)\frac{ff^{(2)}}{f'^2}}{2(1-\beta\frac{ff^{(2)}}{f'^2})}\Big] \\
&= x - \frac{f}{f^{(1)}}\Big[\frac{1+(1/2-\beta)\frac{ff^{(2)}}{[f^{(1)}]^2}}{1-\beta\frac{ff^{(2)}}{[f^{(1)}]^2}}\Big] \\
&= x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} - \frac{\frac{f^{(2)}(x)}{2f^{(1)}(x)}\big[\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}\big]^2}{1-\beta\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}}.
\end{aligned}$$

Pour la valeur $\beta = 0$ on obtient

$$H_0(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

avec

$$I_{H_0}(x) = x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} - \frac{f^{(2)}(x)}{2f^{(1)}(x)}\Big[\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}\Big]^2. \tag{3.1}$$

Il s'agit ici de la méthode itérative de Chebyshev.

Si par contre $\beta = \frac{1}{2}$ on obtient

$$H_{\frac{1}{2}}(x) = 1 + \frac{x}{2-x}$$

et

$$I_{H_{\frac{1}{2}}}(x) = x - \frac{f(x)f^{(1)}(x)}{f^{(1)}(x)^2 - \frac{f(x)f^{(2)}(x)}{2}}. \tag{3.2}$$

Il s'agit ici de la méthode itérative de Halley.

Pour $\beta = 1$ on obtient la méthode itérative de Super-Halley, soit

$$I_{H_1}(x) = x - \frac{f(x)}{f^{(1)}(x)} - \frac{\frac{f^{(2)}(x)}{2f^{(1)}(x)}[\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)}]^2}{1 - \frac{f(x)f^{(2)}(x)}{[f^{(1)}(x)]^2}}.$$

Rappelons que la valeur de la constante asymptotique est $K_3(\alpha) = \frac{|I_H^{(3)}(\alpha)|}{3!}$. Nous procédons de la façon suivante pour calculer la valeur $I_H^{(3)}(\alpha)$: On remarque d'abord que

$$I_H = x - \frac{f}{f^{(1)}}H(L_f),$$

et donc

$$I_H^{(1)} = 1 - H(L_f) + L_f H(L_f) - \frac{f}{f^{(1)}}H^{(1)}(L_f)L_f^{(1)}.$$

On observe que

$$\begin{aligned} I_H^{(2)} &= -2H^{(1)}(L_f)L_f^{(1)} + L_f^{(1)}H(L_f) + 2L_f H^{(1)}(L_f)L_f^{(1)} \\ &\quad - \frac{f}{f^{(1)}}\left(H^{(2)}(L_f)[L_f^{(1)}]^2 + H^{(1)}(L_f)L_f^{(2)}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$I_H^{(3)}(\alpha) = \left([L_f^{(2)}][-3H^{(1)}(L_f) + H(L_f)] + [L_f^{(1)}]^2[-3H^{(2)}(L_f) + 3H^{(1)}(L_f)]\right)_{x=\alpha}.$$

Observons que

$$L_f(\alpha) = 0,$$

$$L_f^{(1)}(\alpha) = \frac{f^{(2)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}$$

et

$$L_f^{(2)}(\alpha) = 2\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} - 3\left[\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right]^2.$$

Notons que $L_f^{(2)}(\alpha)$ est la dérivée de Schwarzienne. Ainsi, avec

$$H(x) = 1 + \frac{x}{2(1-\beta x)}$$

nous avons $H(0) = 1$, $H^{(1)}(0) = 1/2$ et $H^{(2)}(0) = \beta$. On peut donc remarquer que

$$I_H^{(3)}(\alpha) = -\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} + 3\left[\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right]^2 (1-\beta)$$

Si nous définissons deux fonctions de f et α

$$\eta_1(f,\alpha) = \left[\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right]^2 = \left[L_f^{(1)}(\alpha)\right]$$

et

$$\eta_2(f,\alpha) = \frac{f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} = \frac{L_f^{(2)}(\alpha) + 3[L_f^{(1)}(\alpha)]^2}{2}$$

et $I_H^{(3)}(\alpha)$ sera nul lorsque

$$\beta = \frac{3\eta_1(f,\alpha) - \eta_2(f,\alpha)}{3\eta_1(f,\alpha)} \tag{3.3}$$

Exemple1 : Si nous regardons la méthode itérative de Halley, on pose $\beta = 1/2$, et on a $I_H^{(3)}(\alpha) = -\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} + \frac{3}{2}\left[\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right]^2$ avec

$$K_3(\alpha, 1/2) = \frac{1}{3!}\left| -\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} + \frac{3}{2}\left[\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right]^2 \right| \tag{3.4}$$

On peut remarquer aussi que

$$K_3(\alpha, 0) = \frac{1}{3!}\left| -\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)} + 3\left[\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right]^2 \right|$$

et

$$K_3(\alpha, 1) = \frac{1}{3!}\left|\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)}\right|.$$

3.3 Application au calcul de la racine n-ième

Si on considére le calcul de la racine, soit $f(x) = x^n - r$, nous obtenons

$$I_{H_\beta}(x) = x - \frac{x^n - r}{nx^{n-1}} - \frac{\frac{(n-1)x^{n-2}}{2x^{n-1}}\left[\frac{(x^n-r)}{nx^{n-1}}\right]^2}{1 - \beta\frac{x^n-r}{nx^{n-1}}\frac{(n-1)x^{n-2}}{x^{n-1}}}.$$

Rappelons aussi que

$$\binom{b}{i} = \frac{b(b-1)\cdots(b-(i-1))}{i!}.$$

Pour toute valeur $i \geq 1$, on a

$$\binom{1/n}{i} = \frac{(1/n)(1/n-1)(1/n-2)\cdots(1/n-(i-1))}{i!}.$$

On peut simplifier la formule de I_{H_β} pour obtenir

$$I_{H_\beta}(x) = x\left[1 + \frac{\binom{1/n}{1}\left(\frac{r}{x^n} - 1\right) + \binom{1/n}{2}(1-2\beta)\left(\frac{r}{x^n} - 1\right)^2}{1 - 2\beta\frac{\binom{1/n}{1}}{\binom{1/n}{2}}\left(\frac{r}{x^n} - 1\right)}\right].$$

On a également

$$\eta_1(f,\alpha) = (n-1)^2\alpha^{-2} = \frac{(n-1)^2}{\alpha^2}$$

et

$$\eta_2(f,\alpha) = (n-1)(n-2)\alpha^{-2} = \frac{(n-1)(n-2)}{\alpha^2}.$$

Ainsi

$$I^{(3)}_{H_\beta}(\alpha) = \frac{(n-1)}{\alpha^2}\Big[3(n-1)(1-\beta) - (n-2)\Big] \tag{3.5}$$

On voit donc que notre méthode sera d'ordre 4 si on pose

$$\beta = \frac{2n-1}{3(n-1)}.$$

Nous allons regarder la valeur $|I^{(3)}_{H_\beta}(\alpha)| = 3!K_3(\alpha,\beta)$ pour les valeurs β égales à 0, $\frac{1}{2}$ et 1 afin de comparer les méthodes itératives de Chebyshev, Halley et Super-Halley pour le problème du calcul de la racine n-ième pour $n \geq 2$. Puisque nous calculons la racine d'un nombre fixe α, étudié $|I_{H_\beta}^{(3)}(\alpha)|$ est équivalent à regarder les propriétés de la fonction

$$\mathcal{L}_\beta = |\alpha^2 I_{H_\beta}^{(3)}(\alpha)| = (n-1)\Big|3(n-1)(1-\beta)-(n-2)\Big|$$

pour les valeurs $n \geq 2$ et différents choix de valeurs de β. Observons que

$$\mathcal{L}_0 = (2n-1)(n-1)$$

$$\mathcal{L}_1 = (n-2)(n-1)$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(n-1)(n+1)$$

On peut donc observer que $\mathcal{L}_0 \geq \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$, et aussi que $\mathcal{L}_0 \geq \mathcal{L}_1$ tant que $n \geq 0$. En d'autres termes la méthode de Chebyshev est la moins rapide des 3 méthodes pour le calcul de la racine. Si maintenant on compare Halley et Super-Halley, on observe que $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ pour les valeurs $n \geq 5$. En d'autres termes, à partir de la valeur $n = 5$, la méthode itérative de Halley devient plus précise que la Super-Halley pour le calcul de la racine n-ième.

$\mathcal{L}_\beta = 3!\alpha^2 K_3(\alpha,\beta)$			
	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 1/2$
n	$(2n-1)(n-1)$	$(n-2)(n-1)$	$\frac{1}{2}(n+1)(n-1)$
2	3	0	1.5
3	10	2	4
4	21	6	7.5
5	36	12	12
6	55	20	17.5
7	78	30	24
8	105	42	24.5
9	136	56	40
10	171	72	49.5

Tableau 3.1 – Variation de la fonction $\mathcal{L}_\beta$.

3.4 Approximation rationnelle

L'auteur du livre [18] fait la remarque que la méthode de Halley peut être obtenue comme une approximation rationnelle de la méthode de Chebyshev. Ici nous allons illustrer le fait qu'il est possible d'obtenir la méthode de Chebyshev comme approximation polynômiale de la méthode de Halley. Observons que la méthode itérative d'Halley peut être écrite

$$H_3(x) = x - \frac{\frac{f}{f^{(1)}}}{1 - \frac{f^{(2)}}{2f^{(1)}}\frac{f}{f^{(1)}}} = x - \frac{f}{f^{(1)}}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{f^{(2)}f}{[f^{(1)}]^2}}\right].$$

On peut donc regarder $H_3(x) - x$ comme un quotient sous la forme

$$\frac{p_0 + p_1 h}{1 + q_1 h}$$

avec $p_0 = 0$, $p_1 = -1$, $p_2 = -\frac{f^{(2)}}{2f^{(1)}}$, et $h = \frac{f}{f^{(1)}}$. Si donc comme le suggère le Lemme 1.4.7, nous cherchons une approximation telle que

$$\frac{p_0 + p_1 h}{1 + q_1 h} - (a_0 + a_1 h + a_2 h^2) = \mathcal{O}(h^3).$$

on veut donc que

$$(p_0 - a_0) + (p_1 - a_1 - q_1 a_0)h - (q_1 a_1 + a_2)h^2 + (a_2 q_1)h^3 = \mathcal{O}(h^3)$$

On obtient comme conditions suffisante

$$p_0 - a_0 = 0$$

$$p_1 - a_1 - q_1 a_0 = 0$$

$$q_1 a_1 + a_2 = 0$$

ce qui nous donne $a_0 = 0$, $a_1 = p_1$, $a_2 = -q_1 p_1$ et $h = (f/f^{(1)})$. On observe alors qu'avec nos valeurs a_i, nous avons

$$(a_0 + a_1 h + a_2 h^2) = -\frac{f}{f^{(1)}} - \frac{1}{2}\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}}\left(\frac{f}{f^{(1)}}\right)^2 = C_f - x.$$

On obtient notre méthode itérative de Chebyshev comme approximation polynomiale de la méthode de Halley.

CHAPITRE 4

Accélération progressive

4.1 Introduction

Le processus d'accélération de Householder a été souvent redécouvert par différents mathématiciens. Ceci est en partie à cause de plusieurs formes méconnaissables sous lesquelles il peut être écrit. Nous allons dans ce chapitre présenter certaines de ses formes et voir si ce processus d'accélération coïncide avec l'une des méthodes que nous recherchons. Notons que les articles [14] et [15] présentent une multitude de formes équivalentes, ici nous allons en montrer cinq.

4.2 Accélération progressive de la méthode de Newton

Dans cette section, nous présentons le processus d'accélération de l'ordre de convergence tel que présenté dans [8]. Nous allons appliquer ce processus à la méthode itérative de Newton et étudier la convergence qui en résulte.

Comme exemple, nous considérons le cas où $f(\alpha) = 0, f^{(1)}(\alpha) > 0$ et $f^{(2)}(\alpha) \neq 0$, et considérons la fonction $F(x) = f(x)g(x)$, où la fonction $g(x)$ est à déterminer. On a $F(\alpha) = 0$ et, si $g(\alpha) \neq 0$, on a $F^{(1)}(\alpha) \neq 0$. En plus, puisque $f(\alpha) = 0$

$$F^{(2)}(\alpha) = 2f^{(1)}(\alpha)g^{(1)}(\alpha) + f^{(2)}(\alpha)g(\alpha).$$

Quoique nous ne voulions satisfaire l'équation $F^{(2)}(\alpha) = 0$ qu'au point $x = \alpha$, on se retourne vers une équation différentielle pour la fonction g :

$$g^{(1)}(x) = \frac{-f^{(2)}(x)}{2f^{(1)}(x)}g(x).$$

Après intégration, on obtient $g(x) = c/(f^{(1)}(x))^{1/2}$ comme solution générale. En prenant $c = 1$, la fonction F devient $F(x) = f(x)/(f^{(1)}(x))^{1/2}$. La méthode de Newton appliquée à $F(x)$ nous donne

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F^{(1)}(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)f^{(1)}(x_k)}{f^{(1)}(x_k)^2 - \frac{f(x_k)f^{(2)}(x_k)}{2}}$$

Voici donc un exemple d'itération de 3ième ordre qui est la méthode de Halley de l'équation 3.2. On peut vérifier que pour $F(x) = f(x)/(f^{(1)}(x)^{1/2})$ que

$$F^{(3)}(\alpha) = \frac{\frac{3}{2}f^{(2)}(\alpha)^2 - f^{(1)}(\alpha)f^{(3)}(\alpha)}{2f^{(1)}(\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

avec $F^{(1)}(\alpha) = f^{(1)}(\alpha)^{1/2}$. On applique le Théorème 2.3.1 pour conclure que

$$K_3(\alpha) = \left|\frac{2}{3!}\frac{F^{(3)}(\alpha)}{F^{(1)}(\alpha)}\right| = \frac{1}{3!}\left|\frac{\frac{3}{2}f^{(2)}(\alpha)^2 - f^{(1)}(\alpha)f^{(3)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)^2}\right|$$

ce qui correspond à (3.4).

Définition : On dit qu'une fonction f appartient à la classe $D_m(\alpha)$, et on écrit $f(x) \in D_m(\alpha)$, si

$$f(\alpha) = 0$$

$$f^{(1)}(\alpha) \neq 0$$

$$f^{(2)}(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

$$f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \quad \square$$

Théorème 4.2.1. *Soit* $f(\alpha) = 0, f^{(1)}(\alpha) > 0, f^{(2)}(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, *et* $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$. *Alors la fonction*

$$F(x) = \frac{f(x)}{(f^{(1)}(x))^{1/m}}$$

satisfait $F(\alpha) = 0, F^{(1)}(\alpha) > 0, F^{(2)}(\alpha) = \cdots = F^{(m)}(\alpha) = 0$. *Et pour* $m \geq 3$ *on a*

$$F^{(m+1)}(\alpha) = \frac{-f^{(m+1)}(\alpha)}{m(f^{(1)}(\alpha))^{1/m}}$$

Notons que le cas de $m = 2$ *a déjà été traité.*

Démonstration : Définissons la fonction $g(x) = 1/(f^{(1)}(x)^{1/m})$ et on suppose $m \geq 3$. Alors par définition $1 = g(x)^m f^{(1)}(x)$, et par différentiation

$$0 = m[g(x)]^{m-1} g^{(1)}(x) f^{(1)}(x) + g(x)^m f^{(2)}(x).$$

Comme $g(x) \neq 0$ au voisinage de α, on peut écrire

$$0 = m g^{(1)}(x) f^{(1)}(x) + g(x) f^{(2)}(x).$$

Comme $f^{(2)}(\alpha) = 0$ et $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$, alors $g^{(1)}(\alpha) = 0$. Dérivons $k-1$-fois l'équation précédente et nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 = {} & m g^{(k)}(x) f^{(1)}(x) + (m(k-1)+1) g^{(k-1)}(x) f^{(2)}(x) + \cdots \\ & + \frac{(k-1)!}{j!(k-j)!}(j + m(k-j)) g^{(k-j)}(x) f^{(j+1)}(x) + \cdots \\ & + (m+k-1) g^{(1)}(x) f^{(k)}(x) + g(x) f^{(k+1)}(x). \end{aligned}$$

Puisque $f^{(2)}(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, on en déduit que $g^{(k)}(\alpha) = 0$ pour $1 \leq k \leq m-2$. Pour $k = m-1$ et $x = \alpha$, notre équation se réduit à

$$mg^{(m-1)}(\alpha)f^{(1)}(\alpha) + g(\alpha)f^{(m)}(\alpha) = 0,$$

pour $k = m$ et $x = \alpha$ on obtient

$$mg^{(m)}(\alpha)f^{(1)}(\alpha) + g(\alpha)f^{(m+1)}(\alpha) = 0.$$

Investiguons la fonction $F(x) = f(x)g(x)$. En répétant l'application de notre dérivation par la règle de Leibnitz on obtient

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x) &= f(x)g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)g(x) \\ F^{(2)}(x) &= f(x)g^{(2)}(x) + 2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(2)}(x)g(x) \\ &\vdots \\ F^{(k)}(x) &= f(x)g^{(k)}(x) + kf^{(1)}(x)g^{(k-1)}(x) + \cdots \\ &+ \binom{k}{j} f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x) + \cdots \\ &kf^{(k-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(k)}(x)g(x) \end{aligned}$$

pour toute fonction $g(x)$. Par définition $F(\alpha) = 0$, et si nous choisissons $g(x)$ comme avant, en utilisant les équations précédentes, on obtient pour les dérivées de F au point $x = \alpha$

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\alpha) &= f^{(1)}(\alpha)g(\alpha) = f^{(1)}(\alpha)^{1-1/m} > 0 \\ F^{(2)}(\alpha) &= 2f^{(1)}(\alpha)g(1)(\alpha) = 0 \\ &\vdots \\ F^{(k)}(\alpha) &= kf^{(1)}(\alpha)g^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F^{(m-1)}(\alpha) &= (m-1)f^{(1)}(\alpha)g^{(m-2)}(\alpha) = 0\\
F^{(m)}(\alpha) &= mf^{(1)}(\alpha)g^{(m-1)}(\alpha) + f^{(m)}(\alpha)g(\alpha) = 0\\
F^{(m+1)}(\alpha) &= (m+1)f^{(1)}(\alpha)g^{(m)}(\alpha) + f^{(m+1)}(\alpha)g(\alpha)\\
&= (1-\frac{m+1}{m})f^{(m+1)}(\alpha)g(\alpha) = \frac{-f^{(m+1)}(\alpha)}{m(f^{(1)}(\alpha))^{1/m}}.
\end{aligned}
$$

□

L'artice [6] présente le processus que nous venons de discuter, sous une forme équivalente, mais plus simple à implémenter.

Corollaire 4.2.2. *Si $f(x) \in D_M(\alpha)$, et pour $N \geq M$, on pose*

$$
\begin{cases}
F_N(x) = f(x) & si \quad N = M,\\
F_{N+1}(x) = \frac{F_N(x)}{[F_N^{(1)}(x)]^{1/N}} & si \quad N \geq M.
\end{cases}
$$

Alors $F_N(x) \in D_N(\alpha)$.

Théorème 4.2.3. *Si $f(x) \in D_M(\alpha)$, alors on peut obtenir le zéro de $f(x)$ en considérant l'itération*

$$
x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{(1)}(x_k) - \frac{1}{N-1}f(x_k)\frac{Q_N^{(1)}(x_k)}{Q_N(x_k)}}
$$

pour $k = 0, 1, 2\ldots$, où on définit

$$
\begin{cases}
Q_N(x) = 1 & si \quad N = M,\\
Q_{N+1}(x) = f^{(1)}(x)Q_N(x) - \frac{1}{N-1}f(x)Q_N^{(1)}(x) & si \quad N \geq M.
\end{cases}
$$

L' itération définie ci-dessus aura un ordre de convergence N. Notons que notre itération peut s'écrire

$$
x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{Q_N(x_k)}{Q_{N+1}(x_k)},
$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$

Démonstration : Construisons une suite de fonctions $F_N(x)$,

$$F_N(x) = \frac{f(x)}{[Q_N(x)]^{1/(N-1)}},$$

pour $N \geq M$, en utilisant la définition de $Q_N(x)$. Après une différentiation on a

$$\begin{aligned}
F_N^{(1)}(x) &= f^{(1)}(x)Q_N(x)^{\frac{-1}{N-1}} - \frac{1}{N-1}f(x)Q_N(x)^{\frac{-N}{N-1}}Q_N^{(1)}(x) \\
&= Q_N(x)^{\frac{-N}{N-1}}[f^{(1)}(x)Q_N(x) - \frac{1}{N-1}f(x)Q_N^{(1)}(x)] \\
&= Q_N(x)^{\frac{-N}{N-1}}Q_{N+1}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{F_N(x)}{[F_N^{(1)}(x)]^{1/N}} = \frac{f(x)}{[Q_{N+1}(x)]^{\frac{1}{N}}} = F_{N+1}(x).$$

Alors, la fonction $F_N(x)$ satisfait la condition du théorème précédent, et on a

$$F_N^{(1)}(x) = Q_N(x)^{\frac{-N}{N-1}}Q_{N+1}(x) = \frac{f(x)Q_{N+1}(x)}{Q_N(x)^{\frac{1}{N-1}}f(x)Q_N(x)} = F_N(x)\frac{Q_{N+1}(x)}{f(x)Q_N(x)}$$

□

Notre itération est donc la méthode de Newton appliquée à la fonction $F_N(x)$. Comme $F_N(x) \in D_N(\alpha)$, par notre corollaire on peut donc conclure que notre itération est d'ordre N.

4.3 Itération de Householder

Dans cette section nous faisons une preuve directe que la méthode présentée dans la section précédente coïncide avec la méthode itérative de Househoulder.

Rappelons que dans la section précédente, nous avons obtenu le processus d'accéleration suivant : pour $k \geq 2$, on pose $F_2 = f$ et on définit

$$N_k(x) = x - \frac{F_k(x)}{F_k^{(1)}(x)}.$$

avec

$$F_{k+1}(x) = \frac{F_k(x)}{[F_k^{(1)}(x)]^{1/k}}.$$

Pour $k > 2$, on sait alors que N_k a généralement un ordre de convergence k. Considérons maintenant la méthode itérative de Householder, présentée dans [10] :

$$H_k(x) = x + (k-1)\frac{\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k-2)}}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k-1)}},$$

Il est montré dans [10] que cette méthode est au moins d'ordre k pour calculer une racine simple α d'une fonction $f(x)$.

Théorème 4.3.1.

$$H_{k+1}(x) = N_{k+1}(x)$$

pour $k = 0, 1, \ldots$

Démonstration : Notons d'abord que

$$H_2(x) = N_2(x) = x - f/f^{(1)}.$$

Assumons maintenant par induction que $H_k = N_k$ avec

$$H_k(x) = x + (k-1)\frac{\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k-2)}}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k-1)}}$$

et

$$N_k(x) = x - \frac{F_k(x)}{F_k^{(1)}(x)}.$$

En d'autres termes

$$(k-1)\frac{\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k-2)}}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k-1)}} = -\frac{F_k(x)}{F_k^{(1)}(x)}.$$

Par définition de F_{k+1}, on obtient

$$F_{k+1}^{(1)} = \frac{F_k^{(1)}}{[F_k^{(1)}]^{1/k}} - \frac{1}{k}\frac{F_k F_k^{(2)}}{[F_k^{(1)}]^{\frac{k+1}{k}}} = \frac{(F_k^{(1)})^2 - \frac{1}{k}F_k F_k^{(2)}}{(F_k^{(1)})^{\frac{k+1}{k}}}.$$

Aussi par la même définition

$$\frac{F_{k+1}}{F_{k+1}^{(1)}} = \frac{F_k(x)}{[F_k^{(1)}(x)]^{1/k}}\frac{(F_k^{(1)})^{\frac{k+1}{k}}}{(F_k^{(1)})^2 - \frac{1}{k}F_k F_k^{(2)}}$$

$$= \frac{F_k F_k^{(1)}}{(F_k^{(1)})^2 - \frac{1}{k}F_k F_k^{(2)}}.$$

Par notre argument d'induction on a

$$[1/f]^{(k-2)} = -[1/f]^{(k-1)}\frac{1}{k-1}\frac{F_k(x)}{F_k^{(1)}(x)}.$$

Par différentiation on obtient

$$[1/f]^{(k-1)} = -[1/f]^{(k)}\frac{1}{(k-1)}\frac{F_k}{F_k^{(1)}} - [1/f]^{(k-1)}\frac{1}{(k-1)}\Big(1 - \frac{F_k F_k^{(2)}}{(F_k^{(1)})^2}\Big).$$

En d'autres termes

$$[1/f]^{(k-1)}\Big[1 + \frac{1}{(k-1)}\Big(1 - \frac{F_k F_k^{(2)}}{(F_k^{(1)})^2}\Big)\Big] = -[1/f]^{(k)}\frac{1}{(k-1)}\frac{F_k}{F_k^{(1)}},$$

ce qui signifie que

$$\frac{[1/f]^{(k-1)}}{[1/f]^{(k)}} = -\frac{1}{(k-1)}\frac{F_k}{F_k^{(1)}}\Big[1 + \frac{1}{(k-1)}(1 - \frac{F_k F_k^{(2)}}{(F_k^{(1)})^2})\Big]^{-1}.$$

On note que

$$\Big[1 + \frac{1}{(k-1)}\Big(1 - \frac{F_k F_k^{(2)}}{(F_k^{(1)})^2}\Big)\Big] = \frac{k(F_k^{(1)})^2 - F_k F_k^{(2)}}{(k-1)(F_k^{(1)})^2}.$$

Ceci implique que

$$\frac{[1/f]^{(k-1)}}{[1/f]^{(k)}} = \frac{-F_k F_k^{(1)}}{k(F_k^{(1)})^2 - F_k F_k^{(2)}}.$$

Sachant que $\frac{F_{k+1}}{F_{k+1}^{(1)}} = \frac{F_k F_k^{(1)}}{(F_k^{(1)})^2 - \frac{1}{k} F_k F_k^{(2)}}$, on peut conclure que

$$k\frac{[1/f]^{(k-1)}}{[1/f]^{(k)}} = -\frac{F_{k+1}}{F_{k_1}^{(1)}}.$$

Il suit que

$$H_{k+1} = N_{k+1}.$$

Nous avons donc montré que la méthode itérative de Householder est la même que celle que nous avons présentée dans les sections précédentes.

4.4 Forme déterminantale

Dans cette section nous établirons l'égalité de la méthode de Householder avec la forme déterminantale tel que fait dans [14].

D'abord nous définissons

$$D_m(x) = det \begin{pmatrix} f^{(1)}(x) & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & \cdots & \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \\ f(x) & f^{(1)}(x) & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!} \\ 0 & f(x) & f^{(1)}(x) & \cdots & \frac{f^{(m-2)}(x)}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f^{(1)}(x) \end{pmatrix}$$

Les propriétées suivantes de $D_m(x)$ sont établies dans [12] :

$$D_0(x) = 1$$

et

$$D_m(x) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \frac{[f(x)]^{i-1} f^{(i)}(x)}{i!} D_{m-i}(x)$$

Une méthode itérative définie dans [12] est

$$K_m(x) = x - f(x) \frac{D_{m-2}(x)}{D_{m-1}(x)}.$$

Ainsi par notre définition de $D_m(x)$, tel qu'il est fait dans [14], on peut établir le lemme suivant :

Lemme 4.4.1. *La relation suivante est vraie*

$$D_m(x) = \frac{(-1)^m (f(x))^{m+1}}{m!} \left(\frac{1}{f(x)} \right)^{(m)}$$

pour $m = 1, 2, \ldots$

Démonstration : La preuve se fait par induction. On peut observer que la proposition est valide pour la valeur $m = 1$

$$D_1(x) = f^{(1)}(x) = \frac{(-1)(f(x))^2}{1} \frac{(-f'(x))}{f(x)^2} = \frac{(-1)(f(x))^2}{1} \left(\frac{1}{f(x)} \right)^{(1)}.$$

Assumons que le résultat est vrai pour les valeurs $n = 1, 2, \ldots, k$. Ensuite, nous utilisons la formule récursive pour obtenir sur la valeur $n = k + 1$

$$
\begin{aligned}
D_{k+1}(x) &= \sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{r+1}\frac{f(x)^{r-1}f^{(r)}(x)}{r!}D_{k+1-r}(x) \\
&= \sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{r+1}\frac{f(x)^{r-1}f^{(r)}(x)}{r!}\frac{(-1)^{k+1-r}}{(k+1-r)!}f(x)^{k+2-r}\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k+1-r)} \\
&= \frac{(-1)^k f(x)^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{r=1}^{k+1}\binom{k+1}{r}f^{(r)}(x)\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k+1-r)} \\
&= \frac{(-1)^k f(x)^{k+1}}{(k+1)!}\Big(\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}f^{(r)}(x)\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k+1-r)} - f(x)\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k+1)}\Big) \\
&= \frac{(-1)^k f(x)^{k+1}}{(k+1)!}\Big(\Big[f(x)\Big(\frac{1}{f(x)}\Big)\Big]^{(k+1)} - f(x)\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k+1)}\Big) \\
&= \frac{(-1)^k f(x)^{k+1}}{(k+1)!}\Big(0 - f(x)\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k+1)}\Big) \\
&= \frac{(-1)^{k+1} f(x)^{k+2}}{(k+1)!}\left[\frac{1}{f(x)}\right]^{(k+1)}
\end{aligned}
$$

Notre relation est donc valide pour la valeur $n = k+1$. Par notre induction, elle est donc valide pour $n = 1, 2, \ldots$ $\square$

Si on utilise le lemme précédent, on observe :

$$
\begin{aligned}
H_m(x) &= x - (m-1)\frac{[1/f(x)]^{(m-2)}}{[1/f(x)]^{(m-1)}} \\
&= x - (m-1)\frac{(-1)^{m-2}(m-2)!D_{m-2}(x)/(f(x)^{m-1})}{(-1)^{m-1}(m-1)!D_{m-1}(x)/(f(x)^m)} \\
&= x - f(x)\frac{D_{m-2}(x)}{D_{m-1}(x)} \\
&= K_m(x)
\end{aligned}
$$

En d'autres termes, comme il a été observé dans [14] et [12], la méthode itérative de Householder peut être aussi réécrite sous la forme ci-dessus. Nous avons donc présenté trois façons différentes d'écrire la même méthode itérative.

4.5 Autres équivalences

Si comme dans [14] et [17] nous définissons récursivement

$$R_0(x) = 1/f(x)$$

et

$$R_k(x) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \frac{f^{(r)}(x)}{r!f(x)} R_{k-r}(x)$$

pour $k = 1, 2, \ldots$. On considère la méthode itêrative

$$S_m(x) = x - \frac{R_{m-2}(x)}{R_{m-1}(x)}.$$

La relation de récursion sur D_m, soit

$$D_m(x) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \frac{[f(x)]^{i-1} f^{(i)}(x)}{i!} D_{m-i}(x)$$

avec $D_0(x) = 1$, implique que

$$R_k(x) = \frac{D_k(x)}{f(x)^{k+1}},$$

Ainsi

$$S_m(x) = x - \frac{R_{m-2}(x)}{R_{m-1}(x)} = x - \frac{D_{m-2}(x)/f(x)^{m-1}}{D_{m-1}(x)/f(x)^m} = x - f(x)\frac{D_{m-2}(x)}{D_{m-1}(x)} = H_m(x).$$

On voit donc que la fonction

$$S_m(x) = x - \frac{R_{m-2}(x)}{R_{m-1}(x)}$$

est une autre façon d'écrire l'itération de Householder. Cette forme-ci vient de Schröder comme présenté dans [16] et [17]

4.6 Application au calcul de la racine

Nous allons appliquer ce processus d'accélération au calcul de la racine n-ième d'un nombre. On considère $f(x) = x^n - r$ et on dénote par $H_{f,m}(x)$ la méthode itérative de Householder d'ordre m appliquée à la fonction $f(x)$. On obtient alors les formules suivantes

$$H_{f,3}(x) = x - \frac{x\left[n\left(1-\frac{r}{x^n}\right)\right]}{\left[n\binom{n}{1} - \binom{n}{2}\left(1-\frac{r}{x^n}\right)\right]} = x - \frac{(x^n - r)\left[\binom{1/n}{1}\right]}{nx^{n-1}\left[\binom{1/n}{1} + \binom{1/n}{2}\left(1-\frac{r}{x^n}\right)\right]}$$

et

$$H_{f,4}(x) = x - \frac{(x^n - r)\left[\binom{1/n}{1} + \binom{1/n}{2}\left(1-\frac{r}{x^n}\right)\right]}{nx^{n-1}\left[\binom{1/n}{1} + 2\binom{1/n}{2}\left(1-\frac{r}{x^n}\right) + \binom{1/n}{3}\left(1-\frac{r}{x^n}\right)^2\right]}$$

Si on regarde les deux méthodes présentées dans l'article [3] on a

$$M_{1,m}(x) = x - \frac{(x^n - r)\sum_{j=1}^{m-1}\binom{1/n}{j}\left(\frac{x^n}{r} - 1\right)^{j-1}}{nx^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} j\binom{1/n}{j}\left(\frac{x^n}{r} - 1\right)^{j-1}}$$

et

$$M_{2,m}(x) = x\sum_{j=0}^{m-1}\binom{1/n}{j}\left(\frac{r}{x^n} - 1\right)^j.$$

Et comme première méthode du troisième ordre on a

$$M_{1,3}(x) = x - \frac{(x^n - r)\left[\binom{1/n}{1} + \binom{1/n}{2}\left(\frac{x^n}{r} - 1\right)\right]}{nx^{n-1}\left[\binom{1/n}{1} + 2\binom{1/n}{2}\left(\frac{x^n}{r} - 1\right)\right]}.$$

Et comme deuxième méthode du troisième ordre on a

$$M_{2,3} = x\left[1 + \binom{1/n}{1}\left(\frac{r}{x^n} - 1\right) + \binom{1/n}{2}\left(\frac{r}{x^n} - 1\right)^2\right].$$

Quoique nous puissions être tenté de trouver la formule générale de $H_{f,m}$, on remarque déjà à partir de $H_{f,3}$ que la méthode itérative de Householder du troisième ordre ne coïncide avec aucun des algorithmes présentés dans [3]. Il nous faudra donc chercher d'autres méthodes itératives différentes de Householder. Observons aussi que si on considére une fonction $h(x) = f(x)/x^n = 1 - \frac{r}{x^n}$, alors $h(\alpha) = f(\alpha) = 0$. On remarque

$$H_{h,3}(x) = x - \frac{(1 - \frac{r}{x^n})\left[\binom{1/n}{1}\right]}{nrx^{-n-1}\left[\binom{1/n}{1} + \binom{1/n+1}{2}(\frac{x^n}{r} - 1)\right]}$$

est aussi une méthode itérative d'ordre 3 différente de celles que nous recherchons.

CHAPITRE 5

Développement de Taylor et calcul de la racine n-ième

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons obtenir les deux méthodes présentées dans l'article [3] en regardant des prorpiétés spécifiques de la fonction $f(x) = x^n - r$. Rappelons que ces méthodes ont originalement été introduites dans les articles [1] et [9]. Les processus que nous utilisont ici sont adaptés au problème très spécifique de la racine. Plus tard nous présenterons des familles de méthodes itératives qui coïncideront avec les résultats que nous obtenons dans ce chapitre.

5.2 Application directe du développement de Taylor

Quand on regarde notre fonction $f(x) = x^n - r$ avec $\alpha = r^{1/n}$ on a $f(\alpha) = 0$. Observons la chose suivante comme l'auteur de l'article [11] le fait dans le cas $n = 2$. On prend

$$g(x) = \frac{r}{x^n} - 1$$

et on observe que pour $\alpha = r^{1/n}$, on a $g(\alpha) = 0$, de plus

$$\begin{aligned} \alpha &= r^{1/n} \\ &= (x^n + r - x^n)^{1/n} \\ &= x(1 + \frac{r}{x^n} - 1)^{1/n} \\ &= x(1 + g(x))^{1/n}. \end{aligned}$$

Nous allons donc utiliser le développement de Taylor de la fonction

$$q(x) = (1 + x)^{1/n}$$

qui est

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/n}{k} x^k.$$

On a alors

$$\alpha = xq(g(x)) = x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/n}{k} [g(x)]^k$$

et

$$\alpha = x \sum_{k=0}^{m-1} \binom{1/n}{k} [g(x)]^k + \mathcal{O}(g^m). \tag{5.1}$$

Par le Théorème 1.4.6 , si nous utilisons (5.1), et posons

$$T(x) = x \sum_{k=0}^{m-1} \binom{1/n}{k} [g(x)]^k,$$

l'itération définie par $x_{k+1} = T(x_k)$ sera d'ordre m. Pour finir on observe que

$$T(x) = x \sum_{k=0}^{m-1} \binom{1/n}{k} (\frac{r}{x^n} - 1)^k.$$

Ce qui nous donne la méthode d'ordre m pour trouver la racine de α, une méthode présentée dans [9] (voir aussi [3]).

5.3 Constante asymptotique

Pour calculer la constante asymptotique on remarque que

$$T(x) = x \sum_{k=0}^{m-1} \binom{1/n}{k} [g(x)]^k = \alpha - x \binom{1/n}{m} g(x)^m + \mathcal{O}(g^{m+1})$$

On a

$$T^{(m)}(\alpha) = -\binom{1/n}{m} \left[xg(x)^m\right]^{(m)}_{x=\alpha}$$

On peut observer que

$$\left[xg(x)^m\right]^{(m)}_{x=\alpha} = m!\alpha g^{(1)}(\alpha)^m.$$

On remarque que par notre définition de la fonction $g(x)$

$$g^{(1)}(\alpha) = -\frac{n}{\alpha}$$

et donc

$$T^{(m)}(\alpha) = -\alpha m! \binom{1/n}{m} g^{(1)}(\alpha)^m = (-1)^{m+1} \alpha m! \binom{1/n}{m} \frac{n^m}{\alpha^m}.$$

On a alors

$$K_m(\alpha) = \frac{|T^{(m)}(\alpha)|}{m!} = \left|\alpha \binom{1/n}{m} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^m\right| = n^m \binom{1/n}{m} \left|r^{\frac{-(m-1)}{n}}\right|.$$

On peut observer que

$$T(x) = x + x \sum_{k=1}^{m-1} \binom{1/n}{k} [g(x)]^k$$

et donc si on définit

$$\tilde{T}(x) = x \sum_{k=1}^{m-1} \binom{1/n}{k} [g(x)]^k,$$

alors $\tilde{T}(x)$ satisfait les conditions pour que son application à Newton soit aussi une méthode d'ordre m.

5.4 Développement de Taylor et fonction inverse

Dans le cas de la racine, nous pouvons utiliser la propriété d'inversibilité de la fonction $f(x) = x^n - r$ pour en extraire une nouvelle méthode itérative.

Considérons une fonction $f(x)$ tel que $f(\alpha) = 0$ avec $f \in C^\infty$ et la condition $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$. Soit la fonction inverse, $g(x) \in C^\infty$, c'est-à-dire $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$. Nous pouvons considérer le développement de Taylor de la fonction g à la valeur $y = 0$

$$g(y) = g(0) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} y^i + \mathcal{O}(y^m).$$

On peut déduire de ce développement que

$$x = g(f(x)) = g(0) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} (f(x))^i + \mathcal{O}((f(x))^m).$$

Notons que, parce que $f(\alpha) = 0$ et g est la fonction inverse de f, on a $g(0) = g(f(\alpha)) = \alpha$. En d'autre termes

$$x = \alpha + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} (f(x))^i + \mathcal{O}((f(x))^m).$$

Alors si nous définissons

$$T_m(x) = x - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} (f(x))^i$$

On observe que

$$T_m(x) = \alpha + \mathcal{O}(f^m)$$

Par application du Théorème 1.4.6, on observe que l'itération définie par $x_{k+1} = T_m(x_k)$ a un ordre de convergence égal à m pour le calcul de α, si $T_m^{(m)}(\alpha) \neq 0$. Si nous considérons particulièrement la fonction $f(x) = x^n - r$, pour $n \geq 1$ et un nombre réel r. On peut observer que, pour $\alpha = r^{1/n}$, on obtient $f(\alpha) = 0$ et la fonction inverse de $f(x)$ est $g(y) = (y + r)^{1/n}$. On observe aussi pour notre fonction $g(y)$ que

$$\frac{g^{(i)}(0)}{i!} = \binom{1/n}{i} r^{-i}\alpha.$$

On observe plus particulièrement que $\alpha = r^{1/n}$ et $\frac{g^{(i)}(0)}{i!} = \binom{1/n}{i} r^{-i}\alpha$ implique que

$$T_m(x) = x - \alpha\Big[\sum_{i=1}^{m-1} \binom{1/n}{i} r^{-i} f(x)^i\Big].$$

Notons que $T_m(x)$ satisfait les conditions $T_m(\alpha) = \alpha$ avec $T_m^{(j)}(\alpha) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, m-1$. On écrit

$$T_m(x) = x - \alpha F_m(x),$$

où on définit

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{1/n}{i} r^{-i} f(x)^i.$$

La condition $T_m(\alpha) = \alpha$ implique que $F_m(\alpha) = 0$. Nous observons aussi que

$$T_m^{(1)}(x) = 1 - \alpha F_m^{(1)}(x).$$

La condition $T_m'(\alpha) = 0$ signifie que $0 = 1 - \alpha F_m'(\alpha)$. En d'autres termes, nous avons $F_m^{(1)}(\alpha) = 1/\alpha$, sachant que $\alpha \neq 0$. Il ne nous reste donc plus qu'à observer que

$$T_m^{(i)}(x) = -\alpha F_m^{(i)}(x).$$

pour toute valeur $i \geq 2$. En d'autres termes

$$F_m^{(i)}(\alpha) = 0$$

pour $i = 2, \ldots, m-1$. C'est-à-dire, la fonction $F_m(x)$ satisfait les conditions : $F_m(\alpha) = 0, F_m^{(1)}(\alpha) = 1, F_m^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i = 2, \ldots, m-1$. En d'autres termes, son application à l'itération de Newton aura un ordre de convergence m, pourvu que $F_m^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Observons que

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{1/n}{i} r^{-i}(x^n - r)^i.$$

La méthode itérative dérivée dans [1] et [3] qu'on applique à Newton.

5.5 Constante asymptotique

Pour le calcul de la constante asymptotique on observe que

$$T_m(x) = x - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} f(x)^i = \alpha + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} f(x)^m + \mathcal{O}(f(x)^{m+1})$$

et donc encore on a

$$T_m^{(m)}(\alpha) = g^{(m)}(0) f^{(1)}(\alpha)^m$$

et on note que $T_m(x) = x - \alpha F_m(x)$ implique que

$$T_m^{(m)}(x) = -\alpha F_m^{(m)}(x)$$

et donc

$$F_m^{(m)}(\alpha) = -\frac{T_m^{(m)}(\alpha)}{\alpha} = -\frac{g^{(m)}(0) f^{(1)}(\alpha)^m}{\alpha}.$$

Notons que la condition $F^{(1)}(\alpha) = 1/\alpha$ et le Théorème 2.3.1 implique que

$$K_m(\alpha) = \frac{m-1}{m!} \left| \frac{F_m^{(m)}(\alpha)}{F^{(1)}(\alpha)} \right| = \frac{m-1}{m!} |g^{(m)}(0) f^{(1)}(\alpha)^m|$$

Remarquons que $g^{(m)}(0) = m! \binom{1/n}{m} r^{-m} \alpha$ et $f^{(1)}(\alpha) = nr\alpha^{-1}$ implique que

$$K_m(\alpha) = (m-1) \binom{1/n}{m} \left| \alpha \frac{n^m}{\alpha^m} \right| = (m-1) \binom{1/n}{m} n^m r^{\frac{1-m}{n}}.$$

On conclut en regardant le tableau suivant :

Calcul de la racine cubic de 8			
	Newton	1ère méthode d'ordre 3	2ième méthode d'ordre 3
x_o	1.5	1.5	1.5
x_1	2.18518518518519	1.87219935985368	2.08987747145642
x_2	2.01525033603938	1.99893784657155	1.99934620158175
x_3	2.00011511527036	1.99999999949992	2.00000000023278
x_4	2.00000000662525	2.00000000000000	2.00000000000000

Tableau 5.1 – Comparaison des 3 méthodes dans Matlab

CHAPITRE 6

Autres processus d'accélération

6.1 Introduction

Nous savons que la méthode itérative de Newton est typiquement d'ordre deux. Quant aux méthodes itératives de Chebysev et Halley, elles sont obtenues par une processus d'accélération appliqué à la méthode Newton, et elles sont typiquement d'ordre 3. Dans la Section 4.2, nous avons présenté un processus d'accélération dont la méthode de Halley découle. Ici nous ferons de même pour la méthode de Chebyshev.

Soit une fonction $f(x)$, suffisamment régulière telle que $f(\alpha) = 0$ et $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$. Si nous supposons comme dans [4] que f a pour fonction inverse $g(x)$, et $g(x)$ est régulière avec $g(0) = \alpha$, en développant autour de y

$$g(\tilde{y}) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{g^{(i)}(y)}{i!}(\tilde{y} - y)^i + \frac{g^{(m)}(\eta_y)}{m!}(\tilde{y} - y)^m$$

et en remplaçant $\tilde{y}$ par 0 et y par $f(x)$, on obtient

$$\alpha = g(0) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{g^{(i)}(f(x))}{i!}(-f(x))^i + \frac{g^{(m)}(\eta_{f(x)})}{m!}(-f(x))^m.$$

Ainsi

$$T_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \Big[\frac{g^{(i)}(f(x))}{i!}\Big] f(x)^i = \alpha + \mathcal{O}(f(x)^m)$$

est d'ordre m. Si on note

$$A_i(x) = (-1)^i \Big[\frac{g^{(i)}(f(x))}{i!}\Big]$$

alors

$$\begin{aligned} A_{i+1}(x) &= (-1)^{i+1} \Big[\frac{g^{(i+1)}(f(x))}{(i+1)!}\Big] \\ &= \frac{(-1)}{(i+1)} \frac{1}{f^{(1)}(x)} \frac{d}{dx} (-1)^i \frac{g^{(i)}(f(x))}{i!} \\ &= -\frac{1}{i+1} \Big(\frac{1}{f^{(1)}(x)} \frac{d}{dx}\Big) A_i(x) \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, m-2$ et

$$A_0(x) = (-1)^0 \frac{g^{(0)}(f(x))}{0!} = x.$$

Pour résumer on obtient

$$\alpha = g(0) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i(x) f(x)^i + \mathcal{O}(f(x)^m)$$

avec

$$A_0(x) = x$$

et

$$A_{i+1}(x) = -\frac{1}{i+1} \Big(\frac{1}{f^{(1)}(x)} \frac{d}{dx}\Big) A_i(x).$$

C'est le procédé de Shröder que nous allons aussi énoncer à nouveau dans la prochaine section. On définit l'opérateur de Schröder, comme dans [16] et [17],

$$D_f := \Big(\frac{1}{f^{(1)}(x)} \frac{d}{dx}\Big)$$

On a par exemple :

$$D_f f = (\frac{1}{f^{(1)}}\frac{d}{dx})f = \frac{f^{(1)}}{f^{(1)}} = 1,$$

$$D_f^2 f = \Big(\frac{1}{f^{(1)}(x)}\frac{d}{dx}\Big)\Big[\Big(\frac{1}{f^{(1)}(x)}\frac{d}{dx}\Big)f\Big] = (\frac{1}{f^{(1)}}\frac{d}{dx})1 = 0,$$

$$D_f(\frac{1}{f^{(1)}}) = \Big(\frac{1}{f^{(1)}(x)}\frac{d}{dx}\Big)\frac{1}{f^{(1)}} = \frac{1}{f^{(1)}}[-\frac{f^{(2)}}{[f^{(1)}]^2}] = -\frac{f^{(2)}}{[f^{(1)}]^3}.$$

6.2 Méthode de Schröder

Le processus d'accélération de Schrörder que nous présentons ici, coïncide avec la méthode de Chebyshev pour un ordre égal à trois. Nous montrons dans cette section que ce processus d'accélération, une fois appliqué au calcul de la racine, nous donne la première méthode itérative présentée dans l'article [9], et nous obtenons donc ici notre première généralisation.

Lemme 6.2.1. *Soit $M_p(x)$ une fonction telle que $M(\alpha) = \alpha$ et $M_p^{(1)}(x) = \mathcal{O}(f^{p-1})$, alors la méthode définie par $x_{k+1} = M_p(x_k)$ définie une méthode itérative d'ordre p.*

Démonstration : Parce que $M_p^{(1)}(x) = \mathcal{O}(f^{p-1})$ on peut appliquer le Lemme 1.4.5 pour conclure que $M^{(i)}(\alpha) = 0$ pour les valeurs $i = 1, \ldots, p-1$. Avec la condition $M(\alpha) = 0$ il suffit d'appliquer le Théorème 1.4.1. □

Théorème 6.2.2. *Soit $f \in C^p$ telle que $f(\alpha) = 0$ pour un nombre α et $f^{(1)}(\alpha) \neq 0$. Soit une fonction $a_0(x) \in C^p$ telle que $a_0(\alpha) = \alpha$, alors pour une fonction*

$$M_p(x) = a_0(x) + a_1(x)[f(x)] + a_2(x)[f(x)]^2 + a_3[f(x)]^3 + \cdots + a_{p-1}[f(x)]^{p-1},$$

l'itération définie par

$$x_{k+1} = M_p(x_k)$$

a un ordre de convergence d'au moins p si

$$0 = a_0^{(1)}(x)+a_1(x)f^{(1)}(x) = a_1^{(1)}(x)+2a_2(x)f^{(1)}(x) = \cdots = a_{p-2}^{(1)}(x)+(p-1)a_{p-1}(x)f^{(1)}(x).$$

En d'autres termes si

$$a_{i-1}^{(1)}(x) + ia_i(x)f^{(1)}(x) = 0,$$

pour les valeurs $i = 1, \ldots, p-1$. *Nous notons aussi que pour ces même valeurs de* i *on a alors*

$$a_i(x) = -\frac{1}{i}\Big(\frac{1}{f^{(1)}(x)}\frac{d}{dx}\Big)a_{i-1}(x).$$

Le théorème ci dessus est énoncé dans [10], nous présentons la preuve ci-bas

Démonstration : Pour la fonction

$$M_p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(x)[f(x)]^i,$$

si on dérive cette fonction et réorganise les termes en puissance de f on obtient

$$M_p^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{p-1}[a_{i-1}^{(1)}(x) + ia_i(x)f^{(1)}(x)]f(x)^{i-1} + a_{p-1}^{(1)}(x)f(x)^{p-1}.$$

Les conditions $a_{i-1}^{(1)}(x) + ia_i(x)f^{(1)}(x) = 0$ pour les valeurs $i = 2, \ldots, p-1$ et $0 = 1 + a_1(x)f^{(1)}(x)$, nous permettent de conclure que

$$M_p^{(1)}(x) = a_{p-1}^{(1)}(x)[f(x)]^{p-1}.$$

En d'autres termes, $M_p^{(1)} = \mathcal{O}(f^{p-1})$. On peut conclure $M^{(i+1)}(\alpha) = 0$ pour toute valeur $i < p-1$ et la convergence d'ordre p suit du Lemme 6.2.1 car $M_p(\alpha) = a_0(\alpha) = \alpha$. $\square$

Corollaire 6.2.3. *Soit*

$$M_p(x) = x + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i\frac{[f(x)]^i}{i!}D_f^{i-1}\left(\frac{1}{f^{(1)}(x)}\right).$$

Alors la méthode $x_{k+1} = M_p(x_k)$ *est une méthode itérative d'ordre p au moins.*

Démonstration : On observe que

$$\frac{d}{dx}D_f^{i-2} = f^{(1)}D_f^{i-1}.$$

Ainsi en définissant

$$a_i(x) = \frac{(-1)^i D_f^{i-1}[\frac{1}{f^{(1)}(x)}]}{i!}, \tag{6.1}$$

avec $a_0(x) = x$ nous avons

$$a_{i-1}(z) = \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}D_f^{i-2}(1/f^{(1)}(x)).$$

Nous effectuons une dérivation pour obtenir

$$\begin{aligned}
a_{i-1}^{(1)}(x) &= \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{d}{dx}\left[D_f^{i-2}(1/f^{(1)}(x))\right] \\
&= \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}f^{(1)}(x)D_f^{i-1}(1/f^{(1)}(x)) \\
&= \frac{-i(-1)^i}{i!}f^{(1)}(x)D_f^{i-1}(1/f^{(1)}(x)) \\
&= -ia_i(x)f^{(1)}(x).
\end{aligned}$$

Nous avons donc que

$$a_{i-1}^{(1)}(x) + ia_i(x)f^{(1)}(x) = 0$$

pour les valeurs $i = 1, \ldots, p-1$. Ce qui est une condition suffisante pour avoir l'ordre de convergence que nous cherchions. □

Exemple 1 : On peut appliquer le résultat précédent au calcul de la racine de la façon suivante : notre fonction d'intérêt ici est

$$f(x) = x^n - r$$

avec $\alpha = r^{1/n}$ on a aussi

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= nx^{n-1},\\
\frac{1}{f^{(1)}(x)} &= \frac{1}{nx^{n-1}},\\
D_f(1/f^{(1)}(x)) &= \frac{-n+1}{n^2}x^{-2n+1},\\
D_f^2(1/f^{(1)}(x)) &= \frac{(-n+1)(-2n+1)}{n^3}x^{-3n+1}.
\end{aligned}$$

On peut montrer inductivement que

$$D_f^k(1/f^{(1)}(x)) = \frac{[\prod_{i=1}^k(-in+1)]x^{-(k+1)n+1}}{n^{k+1}}.$$

Comme on a

$$\begin{aligned}
\binom{1/n}{i} &= \frac{(1/n)(1/n-1)(1/n-2)\cdots(1/n-(i-1))}{i!}\\
&= \frac{(1-n)(1-2n)\cdots(1-n(i-1))}{(n^i)i!}\\
&= \prod_{k=0}^{i-1}\frac{(1-kn)}{n^i}\frac{1}{i!}.
\end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\frac{1}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}\frac{(1-jn)}{n^{k+1}} = \binom{1/n}{k+1}.$$

On obtient donc pour notre choix de fonction f

$$D_f^{i-1}(1/f^{(1)}(x)) = \binom{1/n}{i}i!x^{-in+1}.$$

On peut alors constater que

$$\begin{aligned}
M_p(x) &= x + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i\frac{[f(x)]^i}{i!}D^{i-1}(\frac{1}{f^{(1)}(x)})\\
&= x + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i(x^n-r)^i\binom{1/n}{i}x^{-in+1}
\end{aligned}$$

$$= x + x[\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \binom{1/n}{i} x^{-in}(x^n - r)^i]$$

$$= x + x[\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \binom{1/n}{i} (1 - \frac{r}{x^n})^i].$$

On peut donc conclure que

$$M_p(x) = x + x[\sum_{i=1}^{p-1} \binom{1/n}{i} (\frac{r}{x^n} - 1)^i],$$

ce qui coïncide avec la méthode présentée dans [3] et[9]. Si on définit

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^n} = 1 - \frac{r}{x^n},$$

on voit que

$$M_p(x) = x + x[\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \binom{1/n}{i} g(x)^i].$$

Exemple 2 : Si nous considérons

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^n} = 1 - \frac{r}{x^n}$$

on observe que $g(r^{1/n}) = f(r^{1/n}) = 0$ et

$$g^{(1)}(x) = \frac{nr}{x^{n+1}}.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{g^{(1)}(x)} = \frac{x^{n+1}}{nr}.$$

On a

$$D_g\Big(\frac{1}{g^{(1)}(x)}\Big) = \frac{1}{n}\frac{(n+1)}{n}\frac{1}{r^2}x^{2n+1}$$

et

$$D_g^2\Big(\frac{1}{g^{(1)}(x)}\Big) = \frac{1}{n}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n+1)}{n}\frac{1}{r^3}x^{3n+1}.$$

Et on peut montrer inductivement que

$$D_g^k\Big(\frac{1}{g^{(1)}(x)}\Big) = (k+1)!\binom{1/n+k}{k+1}x\Big[\frac{x^n}{r}\Big]^{k+1}$$

Si donc nous définissons comme dans (6.1)

$$a_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!}D_g^{k-1}\Big(\frac{1}{g'(x)}\Big)$$

nous avons

$$a_k(x) = (-1)^k x\binom{1/n+k-1}{k}\Big[\frac{x^n}{r}\Big]^k.$$

Et donc

$$M_{g,p}(x) = x\Big[1+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{1/n+k-1}{k}\Big[\frac{x^n}{r}\Big]^k\Big(\frac{r}{x^n}-1\Big)^k\Big].$$

On remarque donc que

$$M_{g,p}(x) = x\Big[1+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\binom{1/n+k-1}{k}\Big[\frac{f(x)}{r}\Big]^k\Big]$$

est aussi une méthode itérative d'ordre p pour le calcul de la racine.

6.3 Deuxième méthode

Dans cette section nous obtenons la généralisation qui coïncide avec la deuxième méthode itérative présentée dans [1] et [3].

Lemme 6.3.1. *Soit $M_m(x)$ une fonction telle que $M_m(\alpha) = 0$, $M_m^{(1)}(\alpha) \neq 0$ et $M_m^{(2)}(x) = \mathcal{O}(f^{m-2})$, alors la méthode de Newton appliquée sur $M_m(x)$, définie par $x_{k+1} = x_k - \frac{M_m(x_k)}{M_m^{(1)}(x_k)}$, est une méthode itérative d'ordre m pour x_0 suffisamment proche de α.*

Démonstration : Parce que $M_m^{(2)}(x) = \mathcal{O}(f^{m-2})$, par application du Lemme 1.4.5 on peut conclure que $M^{(i)}(\alpha) = 0$ pour les valeurs $i = 2,\ldots,m-1$. Avec les conditions $M(\alpha) = \alpha$, $M'(\alpha) \neq 0$ on peut appliquer le Théorème 2.3.1 pour conclure. □

Théorème 6.3.2. *Soit $b_0(x) := 0$ et $b_1(x) \in C^m$ tel que $b_1(\alpha) \neq 0$ pour α une racine simple de $f(x) \in C^{m+1}$. Si on définit*

$$b_{i+2} = -\frac{b_i^{(2)} + 2(i+1)b_{i+1}^{(1)}f^{(1)} + (i+1)b_{i+1}f^{(2)}}{(i+1)(i+2)[f^{(1)}]^2} \tag{6.2}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et

$$M_f(x) = b_1(x)f(x) + b_2(x)f(x)^2 + \cdots + b_{m-1}(x)f(x)^{m-1},$$

alors la méthode de Newton appliquée à $M_f(x)$, soit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{M_f(x)}{M_f^{(1)}(x)},$$

est d'ordre m pour x_0 suffisamment proche de α.

Démonstration : Pour notre fonction

$$M_f(x) = b_1(x)f(x) + b_2(x)f(x)^2 + \cdots + b_{m-1}(x)f(x)^{m-1}$$

on a $M_f(\alpha) = 0$. Ainsi la dérivée est

$$M_f^{(1)} = b_1 f^{(1)} + \sum_{i=1}^{m-2} \left(b_i^{(1)} + (i+1)b_{i+1}f^{(1)}\right)f^i + b_{m-1}^{(1)}f^{m-1}.$$

Comme $b_0(x) = 0$ nous pouvons poser

$$M_f^{(1)} = \sum_{i=0}^{m-2} \left(b_i^{(1)} + (i+1)b_{i+1}f^{(1)}\right)f^i + b_{m-1}^{(1)}f^{m-1}.$$

Nous effectuons une autre dérivation pour obtenir

$$M_f^{(2)} = \sum_{i=0}^{m-3} \left[\left(b_i^{(1)} + (i+1)b_{i+1}f^{(1)}\right)^{(1)} + (i+1)\left(b_{i+1}^{(1)} + (i+2)b_{i+2}f^{(1)}\right)f^{(1)}\right]f^i$$

$$+\left[\left(b_{m-2}^{(1)} + (m-1)b_{m-1}f^{(1)}\right)^{(1)} + (m-1)b_{m-1}^{(1)}f^{(1)}\right]f^{m-2}$$

$$+b_{m-1}^{(2)} f^{m-1}$$

si nous avons

$$\left(b_i^{(1)} + (i+1) b_{i+1} f^{(1)}\right)^{(1)} + (i+1)\left(b_{i+1}^{(1)} + (i+2) b_{i+2} f^{(1)}\right) f^{(1)} = 0$$

pour $i = 0, \ldots, m-3$, alors

$$M_f^{(2)} = \mathcal{O}(f^{m-2})$$

associé avec la condition $b_1(\alpha) f^{(1)}(\alpha) \neq 0$, on peut remarquer que M_f satisfait les conditions pour que N_{M_f} soit d'ordre m, par le lemme précédent. Il ne nous reste plus qu'à réécrire la condition

$$b_{i+2} = -\frac{b_i^{(2)} + 2(i+1) b_{i+1}^{(1)} f^{(1)} + (i+1) b_{i+1} f^{(2)}}{(i+1)(i+2)[f^{(1)}]^2}$$

pour $b_0(x) = 0$ avec $f(x) \in C^{m+1}$ et $b_1(x) \in C^m$, pour assurer que $b_{m-1}(x) \in C^2$ on peut poser $f(x) \in C^{m+3}$. $\square$

Exemple 1 : Considérons le problème du calcul de la racine. On regarde une fonction $f(x) = x^n - r$ et $\alpha = r^{1/n}$. Remarquons que l'étude de $f(x)$ est équivalent à l'étude de la fonction

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^n} = 1 - \frac{r}{x^n}$$

On observe aussi que

$$g^{(1)}(x) = \frac{nr}{x^{n+1}}$$

et

$$g^{(2)}(x) = -\frac{n(n+1)r}{x^{n+2}}.$$

Si nous considérons les fonctions $b_0(x) = 0$ et

$$b_1(x) = \binom{1/n}{1}\left[\frac{x^n}{r}\right]$$

on a $b_1(\alpha) = 1/n \neq 0$. L'équation

$$b_{i+2} = -\frac{b_i^{(2)} + 2(i+1)b_{i+1}^{(1)}g^{(1)} + (i+1)b_{i+1}g^{(2)}}{(i+1)(i+2)[g^{(1)}]^2} \tag{6.3}$$

nous donne

$$b_2(x) = -\frac{2b_1'g' + b_1g^{(2)}}{2g'^2} = \binom{1/n}{2}\left[\frac{x^n}{r}\right]^2.$$

Assumons par induction que $b_i(x) = \left[\frac{x^n}{r}\right]^i \binom{1/n}{i}$ et $b_{i+1}(x) = \left[\frac{x^n}{r}\right]^{i+1}\binom{1/n}{i+1}$. De (6.3) nous avons

$$b_{i+2}(x) = -\left[\frac{x^{n(i+2)}}{r^{i+2}}\right]\frac{\left[\binom{1/n}{i}i(in-1) + 2(i+1)^2 n\binom{1/n}{i+1} - (i+1)\binom{1/n}{i+1}(n+1)\right]}{(i+1)(i+2)n}$$

et donc

$$b_{i+2}(x) = -\left[\frac{x^{n(i+2)}}{r^{i+2}}\right]\binom{1/n}{i+1}\frac{n(i+1)-1}{n(i+2)} = \left[\frac{x^n}{r}\right]^{i+2}\binom{1/n}{i+2}.$$

On peut donc conclure que

$$b_i(x) = \binom{1/n}{i}\left[\frac{x^n}{r}\right]^i$$

et notre méthode définie par

$$M_g(x) = b_1(x)g(x) + b_2(x)g(x)^2 + \cdots + b_{m-1}(x)g(x)^{m-1}$$

sera d'ordre m si on applique l'itération de Newton. Observons que

$$M_g(x) = \sum_{i=1}^{m-1}\binom{1/n}{i}\left[\frac{x^n}{r}\right]^i g(x)^i. \tag{6.4}$$

On remarque

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$$

et donc

$$x^{ni}g(x)^i = f(x)^i.$$

Ainsi 6.4 nous donne

$$M_g(x) = \sum_{i=1}^{m-1}\binom{1/n}{i}\frac{f(x)^i}{r^i},$$

ce qui correspond exactement à la deuxième méthode itérative présentée dans **[1]** et **[3]**.

Exemple 2 : Considérons $f(x) = x^n - r$ et $b_1(x) = \binom{1/n}{1}x^{-n}$ alors, pour $\alpha = r^{1/n}$, nous avons $b_1(\alpha) \neq 0$. Observons aussi qu'avec (6.2) on obtient $b_2(x) = \binom{1/n+1}{2}x^{-2n}$. Si donc on pose par induction que

$$b_j(x) = \binom{1/n + j - 1}{j} x^{-jn},$$

et on a $b_{j+1}(x) = \binom{1/n+j}{j+1}x^{-n(j+1)}$. On peut observer que

$$\frac{b_j^{(2)}(x)}{n^2} = \binom{1/n + j}{j+1} j(j+1)x^{-nj-2}$$

et

$$\frac{b_{j+1}^{(1)}(x)}{n} = -\binom{1/n + j}{j+1}(j+1)x^{-n(j+1)-1},$$

avec $f(x) = x^n - r$. Alors (6.2) devient

$$b_{j+2}(x) = -\frac{\binom{1/n+j}{j+1}(-\frac{1}{n} - j - 1)}{(j+2)x^{(j+2)n}} = \frac{\binom{1/n+j}{j+1}(\frac{1}{n} + j + 1)}{(j+2)x^{(j+2)n}}.$$

On obtient donc

$$b_{j+2}(x) = \binom{1/n + j + 1}{j+2} x^{-(j+2)n},$$

ce qui confirme donc que pour

$$b_j(x) = \binom{1/n + j - 1}{i} x^{-jn},$$

avec $f(x) = x^n - r$, l'application de Newton à la méthode

$$M_f(x) = b_1(z)f(z) + b_2(z)f(z)^2 + \cdots + b_{m-1}(z)f(z)^{m-1},$$

est d'ordre m. Observons que

$$M_f(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{1/n + j - 1}{j} x^{-nj}(x^n - r)^j,$$

donc

$$M_f(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{1/n + j - 1}{j} (1 - \frac{r}{x^n})^j.$$

Pour notre fonction $g(x) = 1 - r/x^n$ on peut voir que

$$M_f(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{1/n + j - 1}{j} g(x)^j$$

est une méthode d'ordre m une fois appliqué à la méthode de Newton. Nous avons donc une autre méthode de calcul de la racine.

CONCLUSION

Bien que nous ayons réussi à généraliser les deux méthodes itérativesprésentées dans [3], il y a plusieurs autres questions auxquelles nous n'avons pas répondu. Remarquons que nous n'avons pas eu l'opportunité d'écrire explicitement ce que l'application de la méthode de Householder à la racine n-ième nous donnait pour un ordre quelconque. Mais nous pouvons résumer les méthodes suivantes dans une table :

Méthodes appliquées à Newton		
Fonction appliquée a Newton	Constante asymptotique	Ordre de convergence
$\sum_{i=1}^{m-1} \binom{1/n+i-1}{i}(1-\frac{r}{x^n})^i$	$\lvert(m-1)n^m\binom{1/n+m-1}{m}r^{\frac{1-m}{n}}\rvert$	m
$\sum_{i=1}^{m-1} \binom{1/n}{i}(\frac{x^n}{r}-1)^i$	$\lvert(m-1)n^m\binom{1/n}{m}r^{\frac{1-m}{n}}\rvert$	m
Méthodes itérative dirèctes		
Fonction	Constante asymptotique	Ordre de convergence
$x\left(1+\sum_{i=1}^{m-1} \binom{1/n+i-1}{i}(1-\frac{x^n}{r})^i\right)$	$\lvert n^m\binom{1/n+m-1}{m}r^{\frac{1-m}{n}}\rvert$	m
$x\left(1+\sum_{i=1}^{m-1} \binom{1/n}{i}(\frac{r}{x^n}-1)^i\right)$	$\lvert n^m\binom{1/n}{m}r^{\frac{1-m}{n}}\rvert$	m

Tableau 6.1 – Résumé des méthodes

Nous montrons aussi que les méthodes que nous présente l'article [3] ne correspondent pas à l'application directe de Householder sur notre fonction $f(x)$ ni sur la fonction $h(x)$, mais il serait intéressant de voir si elles correspondent à l'application directe de Householder à une autre fonction. Et si c'était le cas contraire, quelle serait la corrélation entre la fonctions $f(x)$ et cette nouvelle fonction. Nous pourrions même nous posez la question suivante : si on nous donne une méthode itérative d'un ordre quelconque, comment ferions-nous pour savoir si celle-ci est une forme méconnaissable de la méthode itérative de Householder. On peut même chercher à voir le lien entre le processus d'accélération de Householder (Chapitre 4) et celui de Schröder (Chapitre 6). Nous savons qu'il varie d'un facteur d'ordre f mais peut-on prédire la forme de ce terme quand on passe à un ordre supérieur.

Dans la toute dernière section de ce mémoire on réalise qu'on a une très grande liberté par rapport à notre choix de fonction $b_1(x)$. Il serait intéressant de savoir si un choix de fonction $b_1(x)$ particulier pourrait correspondre directement à la méthode de Householder. Mais en général comment doit-on choisir notre fonction $b_1(x)$ pour que les autres $b_i(x)$ soient faciles à calculer. Comme nous avons pu le constater un choix judicieux du terme $b_1(x)$ facilite énormement le calcul des autres facteurs. Est-ce que cette liberté de choix peut nous permettre d'éviter certains comportements chaotiques de la méthode de Newton quand nous sommes éloignés de la racine α.

On peut remarquer que l'auteur de l'article de [3] combine les 2 familles de méthodes itératives qu'il présente pour en créer de nouvelles, mais cette combinaison pourrait-elle correspondre à une autre famille de méthodes itératives. Et si nous notons que les approximations rationnelles nous permettent de trouver de nouvelles méthodes itératives à partir de la famille de méthodes de Schröder, quel serait le lien entre elles et des approximations de séries par fractions continues. Dans le troisième chapitre nous montrons aussi qu'entre les méthodes Halley, Chebyshev et Super-Halley, le choix de la méthode la plus rapide des trois dépend essentiellement du problème à résoudre. Pour un problème donné peut-on déterminer laquelle des familles de méthode itérative sera la plus rapide. Le choix cette famille varie-t-il si on cherche une méthode d'ordre supérieur. En d'autre terme comme on remarque que pour le calcul de la racine la méthode de Halley est plus rapide que celle de Chebyshev, cela laisse-t-il entendre que la famille de Householder est plus rapide que celle de Schröder pour le calcul de la racine si on regarde les méthode d'ordre supérieur. Pour un problème spécifique comment peut-on déterminer la famille de méthodes itératives la plus convenable ?

Pour finir, notons aussi que les résultats que nous prouvons dans le cas réel dans ce mémoire se généralisent de façon naturelle pour les complexes.

Bibliographie

[1] F. Dubeau, Algorithms for n-th root approximation, *Computing*, 57 (1996), 365-369.

[2] F. Dubeau, Notes de cours sur les solutions des équations non-linéaires, U de S, Canada, 2010.

[3] F. Dubeau, Newton's method and high-order algorithms for nth root computation, *JCAM*, 224 (2009), 66-76.

[4] J.P. Dussault, High-order Newton penalty algorithms, Newton's method and high-order algorithms for nth root computation, *JCAM*, 182 (2005) 117-133

[5] J. F. Epperson, *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, Wiley-Interscience, Malden MA, 2007.

[6] W.F. Ford et J.A. Pennline, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Review*, 38 (1996), 658-659.

[7] W. Gander, On Halley's iteration method, *Amer. Math. Month.*, 92 (1985), 131-134.

[8] J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Review*, 36 (1994), 272-276.

[9] M.A. Hernandez et N. Romero, High order algorithms for approximating nth roots *IJCM*, 81 (2004) , 1001-1014.

[10] A. Householder, *Principles of Numerical Analysis* , McGraw Hill, Columbus OH, 1953.

[11] D. Jeffrey, High precision computation of elementary functions in Maple, *CASC*, (2002), 184-185.

[12] B. Kalantari, Approximation of polynomial root using a single input and the corresponding derivative values, *BIT*, 36 (1996), 395-399.

[13] D. Kincaid et W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Pub. Co., California, 1991.

[14] M. Petkovic, L. Petkovic et D. Herceg, On Schröder's families of root-finding methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(2010), 1755-1762.

[15] M. Petkovic et D. Herceg, On rediscovering iteration methodes for solving equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 107(1999), 275-284.

[16] E. Schröder, Uber unendlich viele Algorithmen zur Auflosung der Gleichungen, *Math. Ann.*, 2 (1870), 317-365.

[17] W. Stewart, On Infinitely Many Algorithms For Solving Equations, *IACS*, U of Maryland, 1993.(Traduction de [16]).

[18] J.F. Traub, *Iterative Methods for Solution of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.