

**NOUVELLES APPROCHES DE MODÉLISATION ET
D'OPTIMISATION DE DIÈTE ANIMALE**

par

Emilie JOANNOPOULOS

Mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2012



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-90959-1

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-90959-1

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

Le 23 août 2012

*le jury a accepté le mémoire de Madame Émilie Joannopoulos
dans sa version finale.*

Membres du jury

**Professeur François Dubeau
Directeur de recherche
Département de mathématiques**

**Monsieur Candido Pomar-Goma
Codirecteur de recherche
Agriculture et Agroalimentaire Canada**

**Monsieur Jean-Pierre Dussault
Codirecteur de recherche
Département d'informatique**

**Monsieur Patrice Marcotte
Membre externe
Université de Montréal**

**Professeur Jean-Marc Belley
Président rapporteur
Département de mathématiques**

SOMMAIRE

La production porcine est une activité très importante au Canada. Chaque année, environ 21 millions de porcs y sont produits. Le Québec est le plus gros producteur du Canada. Il produit à lui seul environ 8 millions de porcs par an, soit 38% de la production totale.

Les coûts de l'alimentation chez le porc à l'engraissement représentent environ 70% du coût total de la production, ce qui en constitue une part importante. Il est donc primordial pour les producteurs de nourrir les animaux à moindre coût tout en ne négligeant aucun de leurs besoins. Depuis plusieurs années, les producteurs cherchent de nouvelles méthodes pour minimiser le coût de l'alimentation, mais également depuis peu à minimiser les effets environnementaux de leur production.

Ce travail est principalement centré sur la diminution des coûts d'alimentation, tout en regardant l'impact environnemental, sans toutefois essayer de diminuer les rejets. Nous étudions trois types d'alimentation : l'alimentation traditionnelle, l'alimentation multiphase à énergie fixe et l'alimentation multiphase à énergie libre. Nous développerons les modèles correspondants à chaque type d'alimentation et nous les appliquerons plus précisément aux données du porc charcutier. Ces modèles prennent en compte uniquement les coûts d'alimentation et non les coûts de fabrication, de transport et d'entreposage. Pour finir, nous analyserons les résultats obtenus à partir de ces données.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mes directeurs de maîtrise, François Dubeau et Jean-Pierre Dussault, respectivement professeurs titulaires au Département de mathématiques et au Département d'informatique de l'Université de Sherbrooke, pour toutes les connaissances qu'ils m'ont apportées dans le domaine de la recherche opérationnelle. Je remercie également mon codirecteur de maîtrise, Candido Pomar, Chercheur au Centre de Recherche d'Agriculture et Agroalimentaire Canada de Sherbrooke pour tout son savoir concernant les besoins et contraintes des animaux. Merci également à Candido Pomar, Agriculture et Agroalimentaire Canada ainsi qu'au Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke pour le soutien financier qu'ils m'ont apporté pendant toute la durée de ma maîtrise. Enfin, merci à Marie-France Roy, secrétaire du département de mathématiques, et Lise Charbonneau, adjointe au Vice-Décanat des Études Supérieures et de la Recherche de la Faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke, ainsi que Sophie Boisvert, commis aux ressources humaines au Centre de Recherche d'Agriculture et Agroalimentaire Canada de Sherbrooke, pour l'aide apportée durant mes démarches administratives.

Emilie Joannopoulos
Sherbrooke, juillet 2012

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	iii
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — Le problème d'alimentation : formulation d'une diète animale	5
1.1 Introduction	5
1.2 Éléments du problème général	6
1.2.1 Période de croissance	6
1.2.2 Diète : poids et coût	6

1.2.3	Besoins journaliers	7
1.2.4	Caractéristiques d'une diète	8
1.2.5	Diète réalisable	9
1.3	Diète à coût minimal	12
1.3.1	Diète à énergie libre et à coût minimal	12
1.3.2	Diète à énergie fixe et à coût minimal	12
1.3.3	Remarque	13
1.4	Modélisation du problème avec phases	14
1.4.1	Phase d'alimentation	14
1.4.2	Problème à énergie libre	15
1.4.3	Problème à énergie fixe	17
1.4.4	Remarque	19
1.5	Comparaison entre l'alimentation journalière et l'alimentation par phases	20
1.6	Contraintes linéaires équivalentes	21
1.7	Modélisation avec prémélanges	21
1.7.1	Prémélange	22
1.7.2	Problème à énergie libre	22
1.7.3	Problème à énergie fixe	25
1.7.4	Comparaison entre l'alimentation à prémélanges libres et prémélanges fixes	28

1.8 Comparaison globale	29
CHAPITRE 2 — Modélisation des besoins	31
2.1 Introduction	31
2.2 Coût des ingrédients et coefficients techniques	32
2.3 Modèle de croissance	33
2.4 Besoins ou restrictions par kilocalorie	39
2.5 Modélisation par phase	40
2.6 Modèles linéaires équivalents	42
CHAPITRE 3 — Résultats : Comparaison et discussion	44
3.1 Introduction	44
3.2 Alimentation sans prémélanges	45
3.3 Alimentation avec prémélanges	52
3.3.1 Formulation à énergie libre	52
3.3.1.1 Prémélanges fixes	52
3.3.1.2 Prémélanges libres	54
3.3.2 Formulation à énergie fixe	58
3.3.2.1 Prémélanges fixes	58
3.3.2.2 Prémélanges libres	60
CHAPITRE 4 — Solveurs et algorithmes	62

4.1	Introduction	62
4.2	Nature des problèmes	62
4.3	Solveurs utilisés	64
4.4	Difficultés rencontrées et solutions	66
	CONCLUSION	69
	BIBLIOGRAPHIE	71

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Moyenne des coûts unitaires c_j des ingrédients sur 12 mois	32
2.2	Apports nutritionnels des ingrédients.	34
2.3	Restrictions sur les ingrédients, p_j^{min} et p_j^{max}	38
3.1	Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie libre et sans prémélanges.	45
3.2	Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase avec un contenu en énergie fixé à 3400 kcal/kg et sans prémélanges, *Situation actuelle dans l'industrie.	45
3.3	Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie libre et prémélanges fixes.	53
3.4	Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie libre et prémélanges libres.	55
3.5	Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie fixe et avec prémélanges fixes.	58
3.6	Coût de l'alimentation et P et N ingéré et excrété par porc pour une alimentation multiphase à énergie fixe et prémélanges libres.	61

4.1 Complexité des problèmes.	63
---------------------------------------	----

LISTE DES FIGURES

2.1	Évolution des besoins en énergie $E(t)$ et du poids $p(t)$ d'un porc par jour.	35
2.2	Évolution de la quantité maximum que peut ingérer un porc $W^{max}(t)$ et du contenu en énergie minimum des mélanges $e^{min}(t)$ par jour.	35
2.3	Évolution du besoin $AA_i(t)$ en acides aminés i par jour pour quelques acides aminés.	36
2.4	Évolution des besoins minimaux en minéraux $B_i^{min}(t)$ par jour.	37
2.5	Évolution du besoin $\frac{AA_i(t)}{E(t)}$ par kcal en acide aminé i	39
2.6	Évolution du besoin $\frac{B_i^{min}(t)}{E(t)}$ en minéral i par kcal.	40
3.1	Évolution du contenu en énergie $e(t)$ avec une alimentation à énergie libre à trois phases et phases journalières sans prémélanges et pour une alimentation à énergie fixe ainsi que le contenu minimal $e^{min}(t)$ en énergie des mélanges.	47
3.2	Évolution du coût de l'alimentation par jour pour une alimentation à énergie libre à trois phases et à phases journalières et pour une alimentation à trois phases à énergie fixe.	47

3.3	Évolution du coût du kilogramme de mélange avec une alimentation à énergie libre en trois phases et à phases journalières.	49
3.4	Évolution du coût du kilogramme de mélange avec une alimentation en 3, 7, 10 et 111 phases sans prémélanges à énergie fixe (3400 kcal/kg).	51
3.5	Prix du kg de mélange pour une alimentation à 3 et 111 phases sans prémélanges et avec prémélanges fixes à énergie libre.	54
3.6	Prix du kg de mélange pour une alimentation à 3 et 111 phases sans prémélanges et avec prémélanges fixes à énergie libre.	56
3.7	Contenu en phosphore d'un kilogramme de mélange pour une alimentation à énergie et prémélanges libres en 111 phases et une alimentation en 3 phases à énergie fixe sans prémélanges.	57
3.8	Consommation de phosphore par jour pour une alimentation à énergie et prémélanges libres en 111 phases et une alimentation en 3 phases à énergie fixe sans prémélanges.	57
3.9	Prix du kg de mélange pour une alimentation à 3 et 111 phases sans prémélanges et avec prémélanges fixes à énergie fixe.	59

INTRODUCTION

La formulation d'une diète à moindre coût est aujourd'hui un exemple classique de problème de modélisation mathématique. Il apparaît dans différents livres de recherche opérationnelle. Sous sa forme classique, le modèle qui permet de trouver un mélange alimentaire à moindre coût qui satisfait des besoins nutritionnels est un problème de programmation linéaire et peut être, aujourd'hui, solutionné facilement.

Supposons que l'on ait n ingrédients. La variable de décision x_j représente la proportion de l'ingrédient j dans la diète et $x = (x_j)_{j=1}^n$ est le vecteur de décision du modèle. Le coût unitaire de l'ingrédient j est représenté par c_j et $c = (c_j)_{j=1}^n$ est le vecteur coût. Ainsi, le prix unitaire de la diète est donnée par $z = cx$ qui doit être minimisé dans l'ensemble des diètes réalisables. Le modèle classique de formulation à moindre coût apparaît sous la forme suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = cx \\ \text{sujet à} \\ x \in S = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n \mid Ax \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} b \text{ et } x \geq 0 \right\} \end{cases}$$

où A est la matrice des apports $a_{i,j}$ des ingrédients et b est le vecteur des besoins. Notons que dans ce modèle, les coûts de fabrication, transport et entreposage ne sont pas

considérés.

Ce modèle a également été formulé pour minimiser plusieurs fonctions objectif. Nous pouvons par exemple vouloir minimiser à la fois le coût de la diète, mais également le rejet de certains nutriments. Dans ce cas, on parle de modèle multicritère. Ce modèle a été présenté entre autres par Steuer en 1986 [30]. Il s'écrit sous sa forme générale de la manière suivante :

$$(PMC) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min z_1 = c_1 x \\ \vdots \\ \min z_k = c_k x \\ \text{sujet à} \\ x \in S \end{array} \right.$$

Une telle modélisation permet d'optimiser plusieurs fonctions objectif en même temps. Ici par exemple, l'optimisation concerne z_1, \dots, z_n .

Le problème classique de formulation de diète a été posé pour la première fois par l'économiste américain Stigler en 1945 [31]. Il a ensuite été élargi par Dantzig en 1963 [10] avec le développement de l'algorithme du simplexe, grâce auquel ce problème est devenu facilement résoluble. En effet, cet algorithme a permis de résoudre les problèmes de programmation linéaire, dont le problème de diète décrit par Stigler, de façon rapide et avec des solutions précises. L'historique des problèmes de diète a été décrit par Dantzig en 1990 [11] et a été revisité par Garille et Gass en 2001 [18]. Il est également décrit dans plusieurs travaux, comme par exemple ceux de Bertsimas et Tsitsiklis en 1997 [4] ou Ignacio et Cavalier en 1994 [21]. En 1992, Lancaster [22] [23] a étudié les différentes évolutions des modèles de diète (linéaires, non-linéaires et stochastiques). Notons toutefois que c'est la programmation linéaire qui est le plus largement utilisée pour les formulations de diète [26].

Plus particulièrement pour le porc charcutier, des études ont été réalisées afin de réduire les coûts d'alimentation (Benchakroun *et al.* [3], Jean dit Bailleul [12], Beaudoin [1]). L'impact environnemental de la production est également important, notamment en ce qui concerne les rejets d'azote et de phosphore. Des études ont été réalisées afin de réduire ces rejets (Jean dit Bailleul [13], Beaudoin *et al.* [2], Pomar *et al.* [29] [28]). Dans certaines de ces études, la modélisation consistait à rajouter un objectif au modèle classique de diète afin de réduire ces rejets. On retrouve alors le modèle multi-critère. Il a également été montré que ces rejets pouvaient être considérablement abaissés moyennant une légère augmentation du coût de l'alimentation (Dubeau *et al.* [15] [16]). De nouvelles modélisations ont été proposées pour permettre aux producteurs de nourrir les animaux avec un nombre plus élevé de phases qu'actuellement. Aujourd'hui les animaux sont principalement nourris en trois phases. Les impacts économique et environnemental de cette modélisation ont été partiellement étudiés par Letourneau-Montminy *et al.* en 2005 [24]. Des études expérimentales ont été réalisées, entre autres par Beers *et al.* en 1991, cité par van der Peet-Schwering *et al.* en 1999 [33] , Bourdon *et al.* en 1995 [6] et van der Peet-Schwering *et al.* en 1996 [34], afin de mesurer l'impact environnemental réel. Les impacts théoriques correspondent avec les impacts expérimentaux.

Le coût d'alimentation des animaux représente une part de plus en plus importante du coût total de production, c'est pourquoi il est primordial pour les producteurs de réussir à le diminuer. Cette étude a donc pour but de proposer de nouvelles modélisations de diètes animales afin de diminuer les coûts d'alimentation. Lors de la fabrication de mélanges, c'est l'énergie qui coûte le plus cher à intégrer. Les producteurs de porcs d'aujourd'hui, auxquels nous nous intéressons particulièrement, utilisent une alimentation en trois phases et à énergie fixe, c'est-à-dire que le contenu en énergie de la diète sera

fixe pour toute la période d'alimentation. Dans ce cas, la modélisation se fait à l'aide du modèle linéaire décrit par Stigler [31]. Nous proposerons donc un nouveau type de modélisation afin de laisser varier le contenu en énergie au cours du temps. Une étude similaire du modèle à énergie libre a été réalisée pour l'industrie de la volaille par Pesti et Miller en 1988 [27]. Nous avons également cherché à augmenter le nombre de phases d'alimentation pour arriver à une alimentation à phases quotidiennes, comme l'a montré Letourneau-Montminy *et al.* [24] pour une alimentation à énergie fixe, tout en appliquant notre nouvelle modélisation à énergie libre. Pour réaliser cela, nous avons utilisé deux types des modèles différents : le modèle linéaire et le modèle bi-linéaire. Cette étude fournit aux producteurs des informations et des méthodes pour nourrir les animaux à un coût moins élevé qu'actuellement.

Ainsi, dans une première partie, nous décrirons les différents types de formulation dans le cas général. Nous expliciterons le modèle utilisé actuellement par les producteurs, le modèle à énergie fixe, ainsi que notre nouvelle modélisation, celle à énergie libre. Nous pourrions voir dans cette partie comment sont reliées ces deux formulations. Nous appliquerons ainsi les modèles présentés dans la première partie au problème spécifique du porc, c'est pourquoi, dans la seconde partie, nous indiquerons l'évolution des nutriments et des besoins au cours du temps pour toute la durée de l'alimentation chez cet animal. Dans une troisième partie, nous pourrions voir les résultats des simulations effectuées pour chacun des modèles présentés et les comparer entre eux. Le dernier chapitre sera consacré aux solveurs et algorithmes utilisés pour résoudre les modèles décrits dans les parties précédentes.

CHAPITRE 1

Le problème d'alimentation : formulation d'une diète animale

1.1 Introduction

Une diète est un mélange d'ingrédients disponibles et digestibles utilisés à des fins de subsistance et de croissance. Une diète évolue normalement dans le temps pour satisfaire les besoins de subsistance et de croissance. Il est donc nécessaire d'identifier ces besoins. De plus, de façon générale, le facteur "coût" d'une diète est important. En effet, c'est habituellement le principal critère de sélection d'une diète optimale tout en satisfaisant les besoins.

Dans ce qui suit, nous considérerons le problème de formulation de diète optimale (à coût minimum) pour le problème du porc charcutier sur sa période de croissance. Nous identifions les besoins de l'animal, donnons les conditions que doit satisfaire une diète pour qu'elle soit admissible et présentons des formulations.

Les besoins journaliers décrits ici sont donnés par les nutritionnistes dans le domaine et concernent ceux d'un porc moyen. De même, les caractéristiques souhaitées par une diète pour qu'elle soit admissible sont des contraintes fournies par les concepteurs de diète. Nous baserons nos modèles sur ces informations.

Lorsque les besoins des porcs sont tous comblés, on assure qu'ils auront une croissance optimal. Dans ce cas, la linéarisation des contraintes n'a aucune conséquence sur leur croissance

1.2 Éléments du problème général

1.2.1 Période de croissance

La période de croissance du porc charcutier débute à 20-25 kg de poids vif après une période en pouponnière et se termine au moment de l'abattage entre 110 et 130 kg de poids vif. Elle dure T jours et sera notée $D = \{1, 2, \dots, T\}$.

1.2.2 Diète : poids et coût

Supposons que nous disposons de n ingrédients pour formuler une diète. À chaque jour $t \in T$ nous noterons par $x_j(t)$ la quantité (en kg) du $j^{\text{ième}}$ ingrédient de la diète pour $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$. Ainsi, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur diète au jour t .

Le poids de la diète au jour t est

$$W(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t).$$

Si on note par $c_j(t)$ le coût unitaire du $j^{\text{ième}}$ ingrédient au jour t , le coût de la diète au jour t est

$$z(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)x_j(t).$$

Le coût total d'engraissement sur la période D est alors

$$Z = \sum_{t=1}^T z(t) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{t=1}^T c_j(t)x_j(t) \right].$$

Dans notre cas, les coûts des ingrédients seront fixes pour toute la période de croissance, c'est-à-dire

$$c_j(t) = c_j \quad (t \in D).$$

1.2.3 Besoins journaliers

Pour sa croissance, le porc a un besoin énergétique journalier. Nous noterons par $E(t)$ l'énergie digestible, en kilocalories, à fournir au jour t via l'alimentation (diète) pour assurer une croissance idéale du porc. Si e_j est l'apport énergétique par kilogramme (kcal/kg) du $j^{\text{ième}}$ ingrédient, la diète $x(t)$ doit vérifier l'équation

$$\sum_{j=1}^n e_j x_j(t) = E(t).$$

Nous dirons qu'une diète de poids $W(t)$ ayant une énergie $E(t)$ a un **contenu en énergie** $e(t)$, en kilocalories par kilogramme, donné par

$$e(t) = \frac{E(t)}{W(t)}.$$

Il faut également fournir des quantités minimales d'un ensemble d'acides aminés. Notons par I_{AA} l'ensemble de ces acides aminés et par $AA_i(t)$ la quantité minimale journalière d'acide aminé de type i nécessaire au temps t . Si $aa_{i,j}^{dig}$ représente la quantité d'acide aminé digestible de type i dans un kilogramme d'ingrédient de type j , la diète doit vérifier

$$\sum_{j=1}^n aa_{i,j}^{dig} x_j(t) \geq AA_i(t) \quad (i \in I_{AA}).$$

De plus, certains minéraux doivent apparaître dans la diète en quantités minimales sans dépasser des quantités maximales. Notons par I_B l'ensemble de ces minéraux et par $B_i^{min}(t)$ et $B_i^{max}(t)$ les apports minimal et maximal du minéral de type i au jour t . Si $a_{i,j}$ est l'apport en minéral i dans un kilogramme d'ingrédient j , nous devons avoir

$$B_i^{min}(t) \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j(t) \leq B_i^{max}(t).$$

Puisque la capacité d'ingestion des animaux est restreinte à chaque jour, nous devons ajouter une contrainte de poids de diète à ingéré au jour t . Cette limite maximale est donnée par la fonction $W^{max}(t)$ et représente la capacité gastrique de l'animal. La difficulté est dans la caractérisation de cette fonction. Notre diète doit satisfaire

$$W(t) \leq W^{max}(t).$$

1.2.4 Caractéristiques d'une diète

D'autres types de contraintes sur les ingrédients et les minéraux sont imposées pour obtenir une diète de bonne qualité. Nous en considérons deux.

Le premier type de contraintes concerne l'importance, en proportion, de certains ingrédients dans la diète. Certaines proportions d'ingrédients ne doivent pas dépasser des seuils

minimaux et maximaux fixés à l'avance au jour t ou même être en proportion fixe dans la diète. Notons par J_p cet ensemble d'ingrédients et par $p_j^{min}(t)$ et $p_j^{max}(t)$ respectivement la proportion minimale et maximale de l'ingrédient j dans la diète au jour t . Ainsi nous avons les contraintes suivantes

$$p_j^{min}(t) \leq \frac{x_j(t)}{W(t)} \leq p_j^{max}(t) \quad (j \in J_p).$$

Le deuxième type de contraintes concerne des paires de minéraux pour lesquels le rapport de leur quantité respective dans la diète doit être compris entre une valeur minimale et une valeur maximale au jour t . Notons par I_R^2 cet ensemble de paires de minéraux et par $r_{i_1, i_2}^{min}(t)$ et $r_{i_1, i_2}^{max}(t)$, les valeurs minimales et maximales du ratio des apports en minéraux i_1 et i_2 . Nous avons

$$r_{i_1, i_2}^{min}(t) \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_1, j} x_j(t)}{\sum_{j=1}^n a_{i_2, j} x_j(t)} \leq r_{i_1, i_2}^{max}(t) \quad ((i_1, i_2) \in I_R^2).$$

1.2.5 Diète réalisable

En tenant compte des besoins des porcs et des caractéristiques d'une diète, nous pouvons définir l'ensemble des diètes réalisables au jour t , cet ensemble est noté $S^L(t)$. Une diète $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est réalisable au jour t , c'est-à-dire $x(t) \in S^L(t)$, si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes

$$(S^L(t)) \left\{ \begin{array}{ll} x_j(t) \geq 0 & (j \in J = \{1, \dots, n\}) \\ \sum_{j=1}^n e_j x_j(t) = E(t) & \\ \sum_{j=1}^n a a_{i,j}^{dig} x_j(t) \geq AA_i(t) & (i \in I_{AA}) \\ B_i^{min}(t) \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j(t) \leq B_i^{max}(t) & (i \in I_B) \\ p_j^{min}(t) \leq \frac{x_j(t)}{\sum_{j=1}^n x_j(t)} \leq p_j^{max}(t) & (j \in J_p) \\ r_{i_1, i_2}^{min}(t) \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_1, j} x_j(t)}{\sum_{j=1}^n a_{i_2, j} x_j(t)} \leq r_{i_1, i_2}^{max}(t) & ((i_1, i_2) \in I_R^2) \\ \sum_{j=1}^n x_j(t) \leq W^{max}(t). & \end{array} \right.$$

Une diète $x(t) \in S^L(t)$ de poids $W(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t)$ a un contenu en énergie $e(t) = \frac{E(t)}{W(t)}$ par kilogramme de mélange déterminé a posteriori qui n'est pas fixé à l'avance. Nous dirons que nous avons une **diète à énergie libre**.

Si on fixe le contenu en énergie $e(t)$ d'un kilogramme de diète a priori, on devra donner la quantité (en kilogramme)

$$W(t) = \frac{E(t)}{e(t)}$$

de diète à l'animal. En tenant compte de la contrainte de poids

$$W(t) = \frac{E(t)}{e(t)} \leq W^{max}(t),$$

ce contenu en énergie doit vérifier l'inégalité suivante

$$e(t) \geq \frac{E(t)}{W^{max}(t)} = e^{min}(t)$$

Cette quantité $e^{min}(t)$ est le contenu minimal en énergie que doit avoir une diète au jour t .

Écrivons $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ où $y_j(t)$ est la proportion du $j^{\text{ième}}$ ingrédient dans la diète au jour t . Nous aurons en particulier que $y(t) \in \Delta_n$ où

$$\Delta_n = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y_j \geq 0 \quad (j \in J) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}.$$

Il faut alors que les proportions retenues de $y(t) \in \Delta_n$ donnent une diète

$$x(t) = W(t)y(t) = \frac{E(t)}{e(t)}y(t)$$

qui soit réalisable, c'est-à-dire $x(t) \in S^L(t)$, ou de façon équivalente $y(t) \in \frac{e(t)}{E(t)}S^L(t)$.

L'ensemble des proportions réalisables ayant un contenu en énergie fixé à $e(t)$ est alors défini par

$$S^F(t; e(t)) = \Delta_n \cap \frac{e(t)}{E(t)}S^L(t).$$

Ainsi $y(t) \in S^F(t; e(t))$ si et seulement si $y(t)$ vérifie les conditions suivantes

$$(S^F(t; e(t))) \left\{ \begin{array}{ll} y_j(t) \geq 0 & (j \in J) \\ \sum_{j=1}^n y_j(t) = 1 \\ \sum_{j=1}^n e_j y_j(t) = e(t) \\ \sum_{j=1}^n a a_{i,j}^{dig} y_j(t) \geq \frac{AA_i(t)}{E(t)} e(t) & (i \in I_{AA}) \\ \frac{B_i^{min}(t)}{E(t)} e(t) \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j(t) \leq \frac{B_i^{max}(t)}{E(t)} e(t) & (i \in I_B) \\ p_j^{min}(t) \leq y_j(t) \leq p_j^{max}(t) & (j \in J_p) \\ r_{i_1, i_2}^{min}(t) \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_1, j} y_j(t)}{\sum_{j=1}^n a_{i_2, j} y_j(t)} \leq r_{i_1, i_2}^{max}(t) & ((i_1, i_2) \in I_R^2). \end{array} \right.$$

Dans ce cas nous dirons alors que la diète $x(t)$, de contenu en énergie fixé a priori à $e(t)$, est une diète à énergie fixe.

1.3 Diète à coût minimal

1.3.1 Diète à énergie libre et à coût minimal

Au jour t , nous cherchons ici une diète à énergie libre réalisable et à coût minimal. C'est une solution optimale du programme mathématique suivant

$$(P^L(t)) \quad \left\{ \begin{array}{l} z^L(t) = \min_{x(t)} \sum_{j=1}^n c_j x_j(t) \\ \text{sujet à} \\ x(t) \in S^L(t). \end{array} \right.$$

Le problème pour toute la durée de la période de croissance sera noté (P^L) et le coût total optimal d'engraissement sur cette période est

$$Z^L = \sum_{t \in D} z^L(t).$$

Nous avons ainsi un problème global séparable.

1.3.2 Diète à énergie fixe et à coût minimal

Au jour t , nous cherchons ici à minimiser le coût unitaire d'une diète qui a un contenu en énergie donné et fixé $e(t)$, avec $e(t) \geq e^{\min}(t) = \frac{E(t)}{W^{\max}(t)}$. C'est une solution optimale du programme mathématique suivant

$$(P^F(t; e(t))) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_u^F(t; e(t)) = \min_{y(t)} \sum_{j=1}^n c_j y_j(t) \\ \text{sujet à} \\ y(t) \in S^F(t; e(t)). \end{array} \right.$$

Le coût total journalier est

$$z^F(t; e(t)) = W(t) z_u^F(t; e(t)).$$

De même que pour le problème à énergie libre, le problème pour toute la durée de la période de croissance sera noté $(P^F(e))$ et le coût total optimal d'engraissement sur cette période est

$$Z^F = \sum_{t \in D} z^F(t; e(t)).$$

Ici également, nous avons un problème global séparable.

1.3.3 Remarque

Supposons qu'il y ait une solution réalisable au problème de diète à énergie libre, c'est-à-dire qu'on ait un $x(t) \in S^L(t)$. Le poids de cette diète est $W(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t)$ et son contenu en énergie est $e(t) = \frac{E(t)}{W(t)}$. Ainsi, $y(t) = \frac{1}{W(t)}x(t) \in S^F(t; e(t))$ et il existe un niveau de contenu en énergie pour lequel le problème de diète à énergie fixe est réalisable. Inversement toute diète réalisable du problème de diète à énergie fixe donne une diète réalisable du problème de diète à énergie libre. Nous résumons formellement ces résultats dans le théorème suivant pour références futures.

Théorème 1 *Les problèmes de diète à énergie libre et énergie fixe vérifient les relations suivantes :*

(a) $S^L(t)$ est non vide si et seulement si il existe un $e(t)$ tel que $S^F(t; e(t))$ est non vide. Dans ce cas le problème $(P^L(t))$ et les problèmes $(P^F(t; e(t)))$ vérifient l'égalité suivante

$$z^L(t) = \min_{e(t) \in \{e \in \mathbf{R} \mid e \geq e^{\min(t)}\}} z^F(t; e(t)).$$

(b) Si, pour tout $t \in D$, $S^L(t)$ est non vide ou bien il existe un $e(t)$ tel que $S^F(t, e(t))$ est non vide, alors

$$Z^L \leq Z^F.$$

1.4 Modélisation du problème avec phases

Bien qu'il soit possible de résoudre mathématiquement le problème de diète optimale à chaque jour durant la période de croissance, nous obtenons un plan d'alimentation qui n'est pas utile en pratique à cause des limitations physiques de capacité d'entreposage des diètes, le nombre de silos requis étant limité. Une technique utilisée par l'industrie porcine est alors l'alimentation avec phases.

1.4.1 Phase d'alimentation

Une phase d'alimentation sera un intervalle de temps durant lequel nous utiliserons la même diète. Cette diète devra être réalisable pour chaque journée de la phase. On partitionne la durée de croissance en introduisant K phases. Nous prenons une suite croissante de temps $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{K-1} < t_K = T$ et définissons la $k^{\text{ième}}$ phase par l'ensemble $D_k = \{t_{k-1} + 1, \dots, t_k\}$ pour $k = 1, \dots, K$. La longueur d'une phase est donnée par $\Delta D_k = t_k - t_{k-1}$. Si $\Delta D_k = 1$ pour tout k , l'alimentation est journalière et $D_k = \{t_k\}$.

À chaque phase k , la diète retenue devra fournir la quantité d'énergie totale requise pendant la phase. Cette énergie est donnée par

$$\bar{E}(k) = \sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} E(t).$$

1.4.2 Problème à énergie libre

Pour le problème à énergie libre, nous cherchons une diète $\bar{x}(k) = (\bar{x}_1(k), \dots, \bar{x}_n(k)) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait à la somme des besoins en énergie de tous les jours de la phase $\bar{E}(k)$. Le poids total de cette diète est $\bar{W}(k) = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j(k)$. À chaque jour $t \in D_k$ on donne au porc la quantité $x(t) = \frac{E(t)}{\bar{E}(k)} \bar{x}(k)$ qui doit être réalisable au jour t , et doit en particulier satisfaire les besoins en énergie. Ainsi

$$x(t) = \frac{E(t)}{\bar{E}(k)} \bar{x}(k) \in S^L(t) \quad (t \in D_k),$$

c'est-à-dire

$$\bar{x}(k) \in \frac{\bar{E}(k)}{E(t)} S^L(t) \quad (t \in D_k).$$

On définit alors l'ensemble des diètes réalisables à la phase k par

$$\bar{S}^L(k) = \bigcap_{t \in D_k} \frac{\bar{E}(k)}{E(t)} S^L(t).$$

Une diète $\bar{x}(k)$ doit donc vérifier à chaque jour $t \in D_k$ les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{x}_j(k) \geq 0 & (j \in J) \\ \sum_{j=1}^n e_j \bar{x}_j(k) = \bar{E}(k) & \\ \sum_{j=1}^n a a_{i,j}^{dig} \bar{x}_j(k) \geq \frac{AA_i(t)}{E(t)} \bar{E}(k) & (i \in I_{AA}) \\ \frac{B_i^{min}(t)}{E(t)} \bar{E}(k) \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \bar{x}_j(k) \leq \frac{B_i^{max}(t)}{E(t)} \bar{E}(k) & (i \in I_B) \\ p_j^{min}(t) \leq \frac{\bar{x}_j(k)}{\sum_{j=1}^n \bar{x}_j(k)} \leq p_j^{max}(t) & (j \in J_p) \\ r_{i_1, i_2}^{min}(t) \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_1, j} \bar{x}_j(k)}{\sum_{j=1}^n a_{i_2, j} \bar{x}_j(k)} \leq r_{i_1, i_2}^{max}(t) & ((i_1, i_2) \in I_R^2) \\ \sum_{j=1}^n \bar{x}_j(k) \leq \frac{W^{max}(t)}{E(t)} \bar{E}(k). & \end{array} \right.$$

Posons

$$\begin{aligned} \widetilde{a}a_i(k) &= \max_{t \in D_k} \frac{AA_i(t)}{E(t)} & , & \quad \widetilde{W}^{max}(k) = \min_{t \in D_k} \frac{W^{max}(t)}{E(t)} & , \\ \widetilde{b}_i^{min}(k) &= \max_{t \in D_k} \frac{B_i^{min}(t)}{E(t)} & , & \quad \widetilde{b}_i^{max}(k) = \min_{t \in D_k} \frac{B_i^{max}(t)}{E(t)} & , \\ \widetilde{p}_j^{min}(k) &= \max_{t \in D_k} p_j^{min}(t) & , & \quad \widetilde{p}_j^{max}(k) = \min_{t \in D_k} p_j^{max}(t) & , \\ \widetilde{r}_{i_1, i_2}^{min}(k) &= \max_{t \in D_k} r_{i_1, i_2}^{min}(t) & , & \quad \widetilde{r}_{i_1, i_2}^{max}(k) = \min_{t \in D_k} r_{i_1, i_2}^{max}(t) & . \end{aligned}$$

Ainsi $\bar{x}(k) \in \bar{S}^L(k)$ si et seulement si $\bar{x}(k)$ vérifie les conditions suivantes

$$(\bar{S}^L(k)) \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_j(k) \geq 0 \quad (j \in J) \\ \sum_{j=1}^n e_j \bar{x}_j(k) = \bar{E}(k) \\ \sum_{j=1}^n aa_{i,j}^{dig} \bar{x}_j(k) \geq \widetilde{a}a_i(k) \bar{E}(k) \quad (i \in I_{AA}) \\ \widetilde{b}_i^{min}(k) \bar{E}(k) \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \bar{x}_j(k) \leq \widetilde{b}_i^{max}(k) \bar{E}(k) \quad (i \in I_B) \\ \widetilde{p}_j^{min}(k) \leq \frac{\bar{x}_j(k)}{\sum_{j=1}^n \bar{x}_j(k)} \leq \widetilde{p}_j^{max}(k) \quad (j \in J_p) \\ \widetilde{r}_{i_1, i_2}^{min}(k) \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_1, j} \bar{x}_j(k)}{\sum_{j=1}^n a_{i_2, j} \bar{x}_j(k)} \leq \widetilde{r}_{i_1, i_2}^{max}(k) \quad ((i_1, i_2) \in I_R^2) \\ \sum_{j=1}^n \bar{x}_j(k) \leq \widetilde{W}^{max}(k) \bar{E}(k). \end{array} \right.$$

À chaque phase, le problème est alors de trouver une diète réalisable à énergie libre $\bar{x}(k)$ en solutionnant le programme mathématique suivant

$$(\bar{P}^L(k)) \left\{ \begin{array}{l} \bar{z}^L(k) = \min_{\bar{x}(k)} \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j(k) \\ \text{sujet à} \\ \bar{x}(k) \in \bar{S}^L(k). \end{array} \right.$$

Comme $\bar{z}^L(k)$ est le coût total d'alimentation pour la phase k , le coût total de l'alimentation sur la période de croissance avec K phases est alors

$$\bar{Z}^L(K) = \sum_{k=1}^K \bar{z}^L(k)$$

Nous avons ainsi un problème global séparable.

Ce problème à K phases sur toute la période de croissance sera noté $(\overline{P}^L(K))$.

Notons que $(\overline{P}^L(T))$ coïncide avec (P^L) .

Dans ce problème, la difficulté est de modéliser la capacité gastrique de l'animal $W^{max}(t)$ qui peut limiter la consommation d'aliment à basse densité énergétique. Cette capacité est limitante chez le jeune porc, mais augmente avec l'âge, comme on pourra le voir dans le Chapitre 2.

1.4.3 Problème à énergie fixe

Pour le problème à énergie fixe, le contenu en énergie de la diète est fixé à $\bar{e}(k)$ durant toute la phase k . Ce contenu $\bar{e}(k)$ doit vérifier

$$W(t) = \frac{E(t)}{\bar{e}(k)} \leq W^{max}(t) \quad \text{pour tout } t \in D_k$$

c'est-à-dire

$$\bar{e}(k) \geq \bar{e}^{min}(k) = \max_{t \in D_k} e^{min}(t) = \max_{t \in D_k} \frac{E(t)}{W^{max}(t)}.$$

Dans ce cas on cherche des proportions $\bar{y}(k) = (\bar{y}_1(k), \dots, \bar{y}_n(k)) \in \Delta_n$ qui doivent donner le contenu en énergie

$$\sum_{j=1}^n e_j \bar{y}_j(k) = \bar{e}(k).$$

À chaque jour $t \in D_k$ on fournit la quantité $W(t) = \frac{E(t)}{\bar{e}(k)}$, c'est-à-dire que la diète est déterminée par $x(t) = W(t)\bar{y}(k) = \frac{E(t)}{\bar{e}(k)}\bar{y}(k)$. Il faut ainsi

$$x(t) \in S^L(t) \quad (\forall t \in D_k),$$

c'est-à-dire

$$\bar{y}(k) \in \frac{\bar{e}(k)}{E(t)} S^L(t) \quad (\forall t \in D_k).$$

Définissons alors l'ensemble des proportions réalisables par

$$\bar{S}^F(k; \bar{e}(k)) = \Delta_n \cap \bigcap_{t \in D_k} \frac{\bar{e}(k)}{E(t)} S^L(t).$$

Il faut donc que les proportions $\bar{y}(k)$ vérifient les conditions suivantes pour chaque $t \in D_k$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{y}_j(k) \geq 0 & (j \in J) \\ \sum_{j=1}^n \bar{y}_j(k) = 1 \\ \sum_{j=1}^n e_j \bar{y}_j(k) = \bar{e}(k) \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}^{dig} \bar{y}_j(k) \geq \frac{AA_i(t)}{E(t)} \bar{e}(k) & (i \in I_{AA}) \\ \frac{B_i^{min}(t)}{E(t)} \bar{e}(k) \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \bar{y}_j(k) \leq \frac{B_i^{max}(t)}{E(t)} \bar{e}(k) & (i \in I_B) \\ p_j^{min}(t) \leq \bar{y}_j(k) \leq p_j^{max}(t) & (j \in J_p) \\ r_{i_1, i_2}^{min}(t) \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_1, j} \bar{y}_j(k)}{\sum_{j=1}^n a_{i_2, j} \bar{y}_j(k)} \leq r_{i_1, i_2}^{max}(t) & ((i_1, i_2) \in I_R^2). \end{array} \right.$$

Ainsi $\bar{y}(k) \in \bar{S}^F(k; \bar{e}(k))$ si et seulement si $\bar{y}(k)$ vérifie les conditions suivantes

$$(\bar{S}^F(k; \bar{e}(k))) \left\{ \begin{array}{ll} \bar{y}_j(k) \geq 0 & (j \in J) \\ \sum_{j=1}^n \bar{y}_j(k) = 1 \\ \sum_{j=1}^n e_j \bar{y}_j(k) = \bar{e}(k) \\ \sum_{j=1}^n a a_{i,j}^{dig} \bar{y}_j(k) \geq \widetilde{a a}_i(k) \bar{e}(k) & (i \in I_{AA}) \\ \widetilde{b}_i^{min}(k) \bar{e}(k) \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \bar{y}_j(k) \leq \widetilde{b}_i^{max}(k) \bar{e}(k) & (i \in I_B) \\ \widetilde{p}_j^{min}(k) \leq \bar{y}_j(k) \leq \widetilde{p}_j^{max}(k) & (j \in J_p) \\ \widetilde{r}_{i_1, i_2}^{min}(k) \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_1, j} \bar{y}_j(k)}{\sum_{j=1}^n a_{i_2, j} \bar{y}_j(k)} \leq \widetilde{r}_{i_1, i_2}^{max}(k) & ((i_1, i_2) \in I_R^2). \end{array} \right.$$

Le problème revient alors à résoudre

$$\left(\overline{P}^F(k; \bar{e}(k)) \right) \begin{cases} \text{sujet à} \\ \bar{z}_u^F(k; \bar{e}(k)) = \min_{\bar{y}(k)} \sum_{j=1}^n c_j \bar{y}_j(k) \\ \bar{y}(k) \in \overline{S}^F(k; \bar{e}(k)) \end{cases}$$

Le coût total d'alimentation de la phase k est

$$\bar{z}^F(k; \bar{e}(k)) = \overline{W}(k) \bar{z}_u^F(k; \bar{e}(k))$$

où $\overline{W}(k) = \frac{\overline{E}(k)}{\bar{e}(k)}$. Le coût total d'alimentation sur la période de croissance avec K phases est alors

$$\overline{Z}^F(K) = \sum_{k=1}^K \bar{z}^F(k; \bar{e}(k)).$$

Nous avons ainsi un problème global séparable.

Ce problème à K phases sur toute la période de croissance sera noté $\left(\overline{P}^F(K; \bar{e}) \right)$.

Notons que $\left(\overline{P}^F(T; \bar{e}) \right)$ coïncide avec $(P^F(e))$ lorsque $\bar{e} = e$.

1.4.4 Remarque

Supposons qu'il y ait une solution réalisable au problème de diète à énergie libre, c'est-à-dire qu'on a un $\bar{x}(k) \in \overline{S}^L(k)$. Le poids de cette diète est $\overline{W}(k) = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j(k)$ et son contenu en énergie est $\bar{e}(k) = \frac{\overline{E}(k)}{\overline{W}(k)}$. Ainsi, $\bar{y}(k) = \frac{1}{\overline{W}(k)} \bar{x}(k) \in \overline{S}^F(k; \bar{e}(k))$ et il existe un niveau de contenu en énergie pour lequel le problème de diète à énergie fixe est réalisable. Inversement, toute diète réalisable du problème de diète à énergie fixe donne une diète réalisable du problème de diète à énergie libre. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 2 Les problèmes d'alimentation par phases à énergie libre et fixe vérifient les relations suivantes :

(a) $\bar{S}^L(k)$ est non vide si et seulement si il existe un $\bar{e}(k)$ tel que $\bar{S}^F(k; \bar{e}(k))$ est non vide. Dans ce cas le problème $(\bar{P}^L(k))$ et les problèmes $(\bar{P}^F(k; \bar{e}(k)))$ vérifient l'égalité suivante

$$\bar{z}^L(k) = \min_{\bar{e}(k) \in \{\bar{e} \in \mathbb{R} \mid \bar{e} \geq \bar{e}^{\min}(k)\}} \bar{z}^F(k; \bar{e}(k)).$$

(b) Si pour tout $k = 1, \dots, K$, $\bar{S}^L(k)$ est non vide ou bien il existe un $e(t)$ tel que $\bar{S}^F(k; \bar{e}(k))$ est non vide, alors

$$\bar{Z}^L(K) \leq \bar{Z}^F(K).$$

1.5 Comparaison entre l'alimentation journalière et l'alimentation par phases

À partir des Théorèmes 1 et 2, nous pouvons déduire le prochain résultat.

Théorème 3 Les inégalités suivantes caractérisent les solutions optimales des problèmes (P^L) , $(P^F(e))$, $(P^L(K))$ et $(P^F(K; \bar{e}))$:

$$\begin{array}{ccc} & \bar{Z}^L(K) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ Z^L & & \bar{Z}^F(K) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & Z^F & \end{array}$$

sous la condition que $e(t) = \bar{e}(k)$ pour tout $t \in D_k$ pour les problèmes $(P^F(e))$ et $(P^F(K; \bar{e}))$.

Démonstration :

En effet, les inégalités $\bar{Z}^L \leq \bar{Z}^F$ et $\bar{Z}^L(K) \leq \bar{Z}^F(K)$ sont vérifiées aux Théorèmes 1 et 2. Les autres inégalités viennent du fait qu'une solution qui est optimale pour une alimentation par phases est une solution réalisable pour une alimentation à phases quotidiennes. Pour l'inégalité $\bar{Z}^F \leq \bar{Z}^F(K)$, nous devons toutefois supposer que $e(t) = \bar{e}(k)$ pour tout $t \in D_k$. ■

1.6 Contraintes linéaires équivalentes

Certaines contraintes s'expriment sous la forme de quotient de deux fonctions

$$\alpha \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \beta.$$

Si nous pouvons affirmer que $g(x) > 0$ pour toutes les solutions réalisables x alors nous pouvons remplacer ces contraintes par des contraintes linéaires

$$f(x) - \beta g(x) \leq 0$$

et

$$f(x) - \alpha g(x) \geq 0.$$

1.7 Modélisation avec prémélanges

Pour des raisons pratiques il est pertinent d'envisager d'utiliser des combinaisons de prémélanges (essentiellement deux diètes fixées) afin de satisfaire les besoins journaliers.

Pour des raisons pratiques, notamment concernant l'entreposage, nous en utiliserons deux.

1.7.1 Prémélange

On appelle **prémélange** un vecteur de proportions, connu (ou fixe) ou inconnu (ou libre), d'ingrédients servant à faire une unité de diète. Dans ce qui suit, nous considérons deux prémélanges A et B (connus ou inconnus) tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (A_1, \dots, A_n) \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n A_j = 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = (B_1, \dots, B_n) \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n B_j = 1 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que $A, B \in \Delta_n$. Notons que le coût unitaire de chacun des prémélanges est donné par

$$c_A = \sum_{j=1}^n c_j A_j \quad \text{et} \quad c_B = \sum_{j=1}^n c_j B_j.$$

De même le contenu en énergie est

$$e_A = \sum_{j=1}^n e_j A_j \quad \text{et} \quad e_B = \sum_{j=1}^n e_j B_j.$$

1.7.2 Problème à énergie libre

On cherche une combinaison des prémélanges de la forme

$$\bar{x}(k) = \alpha_k A + \beta_k B,$$

où $\alpha_k \geq 0$ et $\beta_k \geq 0$, et telle que $\bar{x}(k)$ soit une diète réalisable pour la phase k .

Pour une phase k , le poids est

$$\bar{W}(k) = \alpha_k + \beta_k$$

son énergie totale est

$$\bar{E}(k) = \alpha_k e_A + \beta_k e_B$$

et son contenu en énergie est

$$\bar{e}(k) = \frac{\bar{E}(k)}{\bar{W}(k)} = \frac{\alpha_k e_A + \beta_k e_B}{\alpha_k + \beta_k} \in [\min \{e_A, e_B\}, \max \{e_A, e_B\}].$$

À chaque jour $t \in D_k$, on donne la quantité $W(t) = \frac{E(t)}{\bar{e}(k)} = \frac{E(t)}{\bar{E}(k)} \bar{W}(k)$ de diète. Cette quantité $W(t) = \frac{E(t)}{\bar{e}(k)}$ est déterminée de manière à combler les besoins en énergie, ainsi que ceux en acides aminés et en minéraux. Ainsi la diète journalière est

$$x(t) = \frac{W(t)}{\bar{W}(k)} \bar{x}(k) = \frac{E(t)}{\bar{E}(k)} \bar{x}(k) = \frac{E(t)}{\bar{E}(k)} (\alpha_k A + \beta_k B).$$

Le coût d'une telle diète est donné par

$$\bar{z}^L(k; A, B) = \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j(k) = \sum_{j=1}^n c_j (\alpha_k A_j + \beta_k B_j) = \alpha_k \sum_{j=1}^n c_j A_j + \beta_k \sum_{j=1}^n c_j B_j = \alpha_k c_A + \beta_k c_B.$$

Finalement le coût total d'engraissement durant la période de croissance est donné par

$$\begin{aligned} \bar{Z}^L(K; A, B) &= \sum_{k=1}^K \bar{z}^L(k; A, B) \\ &= \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \right) c_A + \left(\sum_{k=1}^K \beta_k \right) c_B. \end{aligned}$$

Prémélanges connus : A^f et B^f

Si les prémélanges sont connus et fixés, nous avons un problème d'optimisation à chaque phase k donné par

$$\left(\bar{P}^L(k; A^f, B^f) \right) \left\{ \begin{array}{l} \bar{z}^L(k; A^f, B^f) = \min_{\alpha_k, \beta_k} \alpha_k c_{A^f} + \beta_k c_{B^f} \\ \text{sujet à} \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0 \\ \bar{x}(k) = \alpha_k A^f + \beta_k B^f \in \bar{S}^L(k). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour ce problème il faut se donner deux prémélanges A^f et B^f qui nous assurent que le problème a une solution pour chaque phase.

Notons également que le problème global est séparable. Sur toute la période d'engraissement, il sera noté $(\bar{P}^L(K; A^f, B^f))$.

Prémélanges inconnus : A^l et B^l

Dans ce cas, comme les prémélanges font partie du problème d'optimisation et qu'ils apparaissent à chaque phase, le problème n'est plus décomposable par phase, nous avons un problème global qui tient compte de toutes les phases à la fois. Notre problème est alors de trouver $A^l, B^l \in \Delta_n$ et les scalaires $\alpha_k \geq 0$ et $\beta_k \geq 0$ pour $k = 1, \dots, K$ qui donnent des diètes réalisables à chaque phase et qui minimisent le coût total d'engraissement sur toute la période de croissance. On a ainsi le problème d'optimisation suivant :

$$(\bar{P}_G^L(K; A^l, B^l)) \left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}_G^L(K; A^l, B^l) = \min_{\alpha, \beta, A^l, B^l} \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k \right) c_{A^l} + \left(\sum_{k=1}^K \beta_k \right) c_{B^l} \\ \text{sujet à} \\ \left\{ \begin{array}{l} A^l \in \Delta_n, B^l \in \Delta_n \\ \text{et pour } k = 1, \dots, K \\ \alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0 \\ \bar{x}(k) = \alpha_k A^l + \beta_k B^l \in \bar{S}^L(k). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarque 1 *En tenant compte de la remarque faite sur la linéarisation des contraintes de ratio, ce modèle d'alimentation avec prémélanges libres est un problème bi-linéaire et*

non-convexe du fait de l'optimisation simultanée des proportions α , β et des prémélanges A et B et n'est pas séparable. La résolution de tels problèmes posera certaines difficultés de convergence que nous expliquerons au Chapitre 4.

Comparaison des solutions optimales

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4 Si le problème $(\bar{P}^L(k; A^f, B^f))$ a une solution pour chaque phase, alors le problème $(\bar{P}_G^L(K; A^f, B^f))$ a une solution et on a

$$\bar{Z}_G^L(K; A^f, B^f) \leq \bar{Z}^L(K; A^f, B^f).$$

1.7.3 Problème à énergie fixe

On cherche des combinaisons des prémélanges de la forme

$$\bar{y}(k) = \alpha_k A + \beta_k B$$

avec $\alpha_k + \beta_k = 1$, $\alpha_k \geq 0$ et $\beta_k \geq 0$, de telle sorte que $\bar{y}(k)$ soit une proportion admissible à la phase k . Le contenu en énergie sera alors

$$\alpha_k e_A + \beta_k e_B = \bar{e}(k)$$

pour chaque phase k . Notons que si $e_A = e_B = e$, on doit avoir $\bar{e}(k) = e$ pour tout $k = 1, \dots, K$.

Remarque 2 Si $e_A \neq e_B$, on devra avoir

$$\bar{e}(k) = \alpha_k e_A + \beta_k e_B \in [\min \{e_A, e_B\}, \max \{e_A, e_B\}].$$

Dans ce cas, pour $\bar{e}(k)$ donné on aura directement

$$\alpha_k = \frac{\bar{e}(k) - e_B}{e_A - e_B},$$

ce qui détermine complètement la proportion $\bar{y}(k)$. Il restera seulement à vérifier que cette proportion est réalisable pour la phase. Il est peu probable que les proportions ainsi déterminées soient réalisables pour toutes les phases.

Le coût unitaire de la diète est

$$\bar{z}_u^F(k, A, B) = \alpha_k \sum_{j=1}^n c_j A_j + \beta_k \sum_{j=1}^n c_j B_j = \alpha_k c_A + \beta_k c_B$$

et le coût d'engraissement durant le phase est

$$\bar{z}^F(k; A, B) = \bar{W}(k) \bar{z}_u^F(k; A, B) = \bar{W}(k) (\alpha_k c_A + \beta_k c_B)$$

où $\bar{W}(k) = \frac{\bar{E}(k)}{\bar{e}(k)}$. Le coût total d'engraissement durant la période de croissance est donné par

$$\begin{aligned} \bar{Z}^F(K; A, B) &= \sum_{k=1}^K \bar{z}^F(k; A, B) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \bar{W}(k) \alpha_k \right) c_A + \left(\sum_{k=1}^n \bar{W}(k) \beta_k \right) c_B. \end{aligned}$$

Prémélanges connus : A^f et B^f

Si les prémélanges sont connus, nous avons un problème par phase de la forme

$$\left(\bar{P}^F(k; \bar{e}(k); A^f, B^f) \right) \begin{cases} \bar{z}_u^F(k; A^f, B^f) = \min_{\alpha_k, \beta_k} \alpha_k c_{A^f} + \beta_k c_{B^f} \\ \text{sujet à} \\ \begin{cases} \alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0, \alpha_k + \beta_k = 1 \\ \bar{y}(k) = \alpha_k A^f + \beta_k B^f \in \bar{S}^F(k, \bar{e}(k)). \end{cases} \end{cases}$$

Remarquons que ce problème est séparable. Sur toute la période d'engraissement il sera noté $(\bar{P}^F(K; \bar{e}; A^f, B^f))$.

Prémélanges inconnus : A^l et B^l

Dans ce cas, les prémélanges font partie du problème d'optimisation ils apparaissent à chaque phase, en conséquence le problème n'est plus décomposable par phase, nous avons un problème global qui tient compte de toutes les phases à la fois. Notre problème est alors de trouver $A^l, B^l \in \Delta_n$ et les scalaires $\alpha_k \geq 0$ et $\beta_k \geq 0$ tel que $\alpha_k + \beta_k = 1$ pour $k = 1, \dots, K$ qui donnent des proportions réalisables à chaque phase et qui minimisent le coût total d'engraissement sur toute la période de croissance. On considère alors le problème global suivant :

$$\left(\bar{P}_G^F(K; \bar{e}(k); A^l, B^l) \right) \left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}_G^F(K; A^l, B^l) = \min_{\alpha, \beta, A^l, B^l} \left(\sum_{k=1}^K \bar{W}(k) \alpha_k \right) c_{A^l} + \left(\sum_{k=1}^K \bar{W}(k) \beta_k \right) c_{B^l} \\ \text{sujet à} \\ \left\{ \begin{array}{l} A^l \in \Delta_n, B^l \in \Delta_n \\ \text{et pour } k = 1, \dots, K \\ \alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0, \alpha_k + \beta_k = 1, \\ \bar{y}(k) = \alpha_k A^l + \beta_k B^l \in \bar{S}^F(k, \bar{e}(k)). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarque 3 *La même remarque que pour le modèle à énergie libre et prémélanges libres peut être faite. Dans ce cas, le problème est bi-linéaire, non-convexe et ne peut pas être séparé. La résolution posera également quelques problèmes de convergence expliqués au Chapitre 4.*

Comparaison des solutions optimales

Théorème 5 *Supposons que nous ayons un ensemble de contenus en énergie $\{ \bar{e}(k) \mid k = 1, \dots, K \}$ tel que le problème $(\bar{P}^F(k; \bar{e}(k); A^f, B^f))$ ait des solutions. Alors le problème $(\bar{P}_G^F(K; \bar{e}(k)A^l, B^l))$ a aussi une solution. Nous avons donc*

$$\bar{Z}_G^F(K; A^l, B^l) \leq \bar{Z}^F(K; A^f, B^f).$$

1.7.4 Comparaison entre l'alimentation à prémélanges libres et prémélanges fixes

À partir des différents théorèmes que nous avons explicités précédemment, on peut déduire les inégalités suivantes :

Théorème 6 *Pour les problèmes avec prémélanges, nous avons :*

$$\begin{array}{ccc} & \bar{Z}^L(K; A^f, B^f) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \bar{Z}_G^L(K; A^l, B^l) & & \bar{Z}^F(K; A^f, B^f) \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & \bar{Z}_G^F(K; A^l, B^l) & \end{array}$$

Démonstration :

Nous avons déjà, à partir des Théorèmes 4 et 5, les inégalités suivantes :

$$\bar{Z}_G^L(K; A^l, B^l) \leq \bar{Z}^L(K; A^f, B^f)$$

et

$$\bar{Z}_G^F(K; A^l, B^l) \leq \bar{Z}^F(K; A^f, B^f).$$

Il est également clair que si $\{\bar{y}(k)\}_{k=1}^K$ est la solution du problème à énergie fixe $(\bar{P}_G^F(K; A^l, B^l))$, c'est une solution admissible du problème à énergie libre $(\bar{P}_G^L(K; A^l, B^l))$. Donc le coût de la solution de $(\bar{P}_G^L(K; A^l, B^l))$ sera moins élevé que $\bar{Z}_G^F(K; A^l, B^l)$, d'où l'inégalité

$$\bar{Z}_G^L(K; A^l, B^l) \leq \bar{Z}_G^F(K; A^l, B^l).$$

La même remarque peut être faite pour la seconde inégalité

$$\bar{Z}^L(K; A^f, B^f) \leq \bar{Z}^F(K; A^f, B^f).$$

■

1.8 Comparaison globale

Les Théorèmes 3 et 6 nous permettent de comparer d'une part les coûts d'alimentation des différentes formulations sans prémélanges et ceux des différentes formulations avec prémélanges d'autre part. Nous pouvons relier ces deux théorèmes. En effet, une alimentation à énergie fixe avec prémélanges, quels que soient ces prémélanges, ne pourra coûter moins cher qu'une alimentation à énergie fixe sans prémélanges, c'est-à-dire où des mélanges optimaux différents sont utilisés pour chaque phase. Cette solution optimale du problème avec prémélanges est une solution admissible du problème sans prémélanges. Nous avons donc l'inégalité suivante :

$$\bar{Z}^F(K) \leq \bar{Z}_G^F(K; A^l, B^l).$$

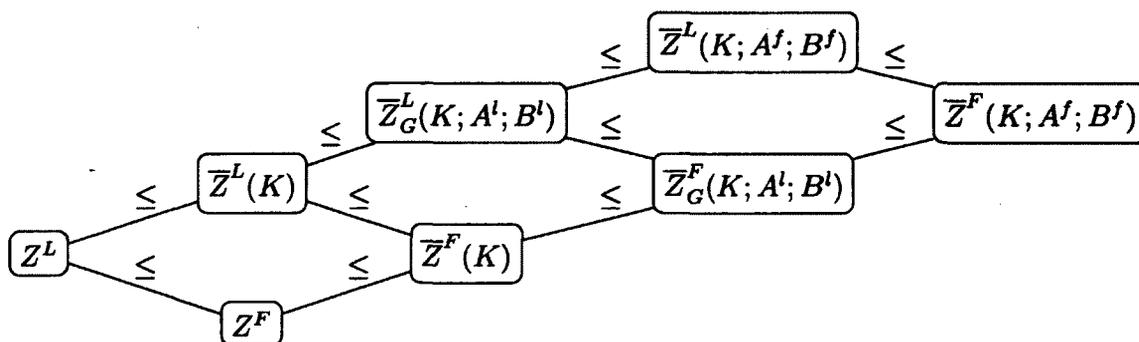
La même remarque sur les formulations à énergie libre peut être faite. Nous avons donc l'inégalité :

$$\bar{Z}^L(K) \leq \bar{Z}_G^L(K; A^l, B^l).$$

Rappelons que les coûts de fabrication, de transport et d'entreposage ne sont pas pris en compte.

Ainsi, nous pouvons regrouper tous ces résultats en un seul.

Théorème 7 Les relations entre les valeurs optimales des différents problèmes présentés dans le Chapitre 1 sont résumées par le graphe d'ordre partiel suivant :



CHAPITRE 2

Modélisation des besoins

2.1 Introduction

Nous allons maintenant passer à une modélisation dynamique de l'engraissement. Dans cette partie, nous allons donc voir l'évolution des besoins des porcs dans le temps. Dans l'industrie, en particulier au Québec, l'engraissement des porcs se fait typiquement sur $T = 111$ jours et le poids du porc passe de 20 kg à 130 kg environ durant cette période. L'ensemble D décrit dans le Chapitre 1 sera donc $D = \{1, \dots, 111\}$. Un animal a besoin à chaque jour d'une certaine quantité d'énergie. Il mangera jusqu'à satisfaire ses besoins en énergie [38] [35] et donc mangera plus d'une diète faible en énergie et moins d'un mélange riche en énergie. Dans cette étude l'alimentation a été formulée de façon à satisfaire ou à dépasser les besoins des animaux estimés par les nutritionnistes, ainsi la croissance des animaux ne devrait pas être affectée par l'alimentation de façon significative. En fait, dans le cadre de ce mémoire, on assure que les porcs auront une croissance optimale lorsqu'ils consomment un aliment dont la composition respecte les contraintes imposées dans la formulation. Autrement dit, toutes les diètes du domaine réalisable permettent

aux animaux d'exprimer leur plein potentiel de croissance.

2.2 Coût des ingrédients et coefficients techniques

Afin de comparer les coûts de l'alimentation des porcs dans des conditions commerciales, les formulations décrites dans les parties précédentes utilisent les ingrédients et la moyenne des prix enregistrés à chaque début de mois de Novembre 2010 à Octobre 2011 (Tableau 2.1), en \$CAD par un fabricant d'aliment (Aliments Breton, Inc, Saint-Bernard, Qc, Canada).

Variable associée	Ingrédient j	Coût unitaire c_j (\$/kg)
X1	DL-méthionine	5,750
X2	Blé dur	0,321
X3	Carbonate de calcium	0,080
X4	Chlorure de sodium	0,198
X5	Farine de viande	0,532
X6	Gras animal	1,236
X7	L-lysine HCl	2,808
X8	L-thréonine	3,750
X9	L-tryptophane	57,000
X10	Mais	0,320
X11	Orge	0,288
X12	Phosphate bicalcique	0,906
X13	Premix	5,269
X14	Gru de blé	0,242
X15	Tourteau de colza	0,317
X16	Tourteau de soja	0,455

Tableau 2.1 – Moyenne des coûts unitaires c_j des ingrédients sur 12 mois

Par la suite, nous associerons à chaque ingrédient la variable X qui lui correspond dans le

Tableau 2.1. La composition nutritionnelle des ingrédients utilisée dans cette étude vient de la base de données NRC (1988) [32]. Ces données sont rassemblées dans le Tableau 2.2.

Deux types de phosphore, le phosphore total et le phosphore disponible apparaissent dans le Tableau 2.2. Le phosphore disponible est une partie du phosphore total et nous servira pour les besoins minimums en minéraux. Le phosphore total nous servira pour la contrainte sur le ratio Calcium/Phosphore. Nous avons également l'inégalité suivante :

$$a_{P_{tot},j} \geq a_{P_{dispo},j} \quad (\forall j \in J).$$

2.3 Modèle de croissance

Les besoins journaliers sont donnés par les nutritionnistes et sont tirés de la base de données de NRC (1998) [32]. Ils représentent un individu moyen. Voici quelques exemples de courbes de ces besoins.

Commençons par les besoins en énergie par jour $E(t)$. Ces besoins sont croissants tout au long des 111 jours (Figure 2.2). On peut également voir la quantité maximale de diète $W^{max}(t)$ qu'un porc peut ingérer à chaque jour. Cette quantité est donnée par le maximum entre la quantité à donner avec un mélange à 3400 kcal au jour t , donnée par $\frac{E(t)}{3400}$ et la quantité donnée par la formule $0,111 \times p(t)^{0,803}$ [5], où $p(t)$ représente le poids du porc au jour t . Nous avons donc la formule suivante :

$$W^{max}(t) = \max \left\{ \frac{E(t)}{3400}; 0,111 \times p(t)^{0,803} \right\}.$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16
	e_j (kcal/kg)															
Énergie	5640	3310	0	0	2695	8281,25	2820	4780	4120	6570	3390	3070	0	0	2760	3520
	$aa_{i,j}^{dis}$ (g/kg)															
Lysine	0	2,5	0	0	25,5	0	7	798	0	0	1,9	2,8	0	0	13,6	24,9
Thréonine	0	2,7	0	0	16,2	0	5,7	0	990	0	2,5	2,6	0	0	10,8	15,3
Méthionine	990	1,5	0	0	7	0	2,5	0	0	0	1,5	1,4	0	0	6	5,9
Méthionine + cystine	990	3,7	0	0	10,4	0	5,3	0	0	0	3,3	3,4	0	0	12,6	11,6
Tryptophane	0	1,1	0	0	2,8	0	2,2	0	0	985	0,4	1	0	0	3,3	5,2
Isoleucine	0	3,4	0	0	13,4	0	5,8	0	0	0	2,7	2,9	0	0	10,6	18,7
Valine	0	4	0	0	21,3	0	8,7	0	0	0	3,6	4,1	0	0	13,1	19,3
Leucine	0	6,4	0	0	31,9	0	10,2	0	0	0	9,5	5,7	0	0	18,6	29,8
Phénylalanine	0	4,5	0	0	18,4	0	7	0	0	0	3,7	4,1	0	0	10,9	20,6
Phénylalanine + tyrosine	0	7,1	0	0	29,6	0	12,1	0	0	0	6,8	6,5	0	0	18,8	34,5
Histidine	0	2,2	0	0	9,5	0	4,3	0	0	0	2,1	1,8	0	0	7,4	10,9
Arginine	0	4,7	0	0	31	0	10,7	0	0	0	3,5	4	0	0	17,6	31,6
AANE	0	57,4	0	0	254,4	0	88	0	0	0	36,3	46,6	0	0	144,9	206,1
	$a_{i,j}$ (g/kg)															
Sodium	0	0,1	0,8	395	8	0	0	0	0	0,04	0,1	1,8	0	0,2	0,4	0,3
Calcium	0	0,8	385	3	76	0	0	0	0	0,4	0,7	220	0	0,9	8,3	3,4
Phosphore total	0	3,4	0,2	0	38,8	0	0	0	0	2,6	3,4	185	0	8,4	11,4	6,2
Phosphore disponible	0	1,7	0,2	0	31,4	0	0	0	0	0,364	1,02	180,4	0	3,44	2,394	1,922
Azote total	158,4	23,2	0	0	86,4	0	127,68	116,96	136,48	12,96	16,16	0	0	25,6	53,92	72,48

Tableau 2.2 – Apports nutritionnels des ingrédients.

Notons la décroissance du contenu en énergie minimal du mélange $e^{min}(t) = \frac{E(t)}{W^{max}(t)}$ au cours du temps.

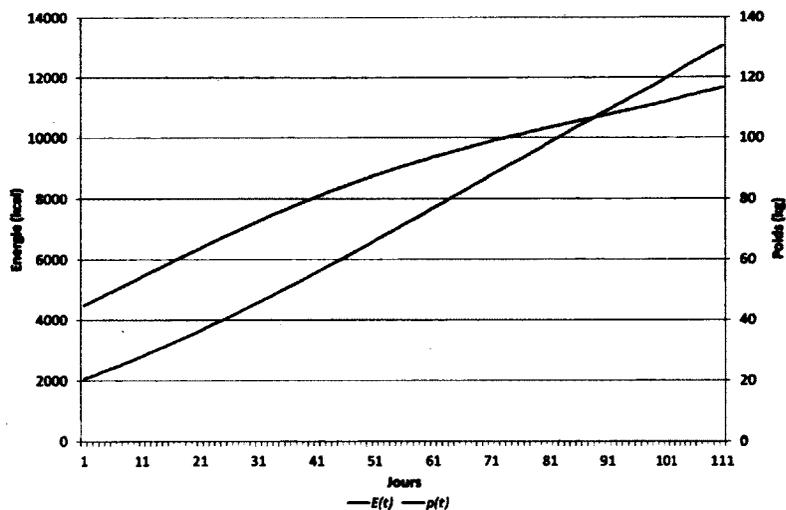


Figure 2.1 – Évolution des besoins en énergie $E(t)$ et du poids $p(t)$ d'un porc par jour.

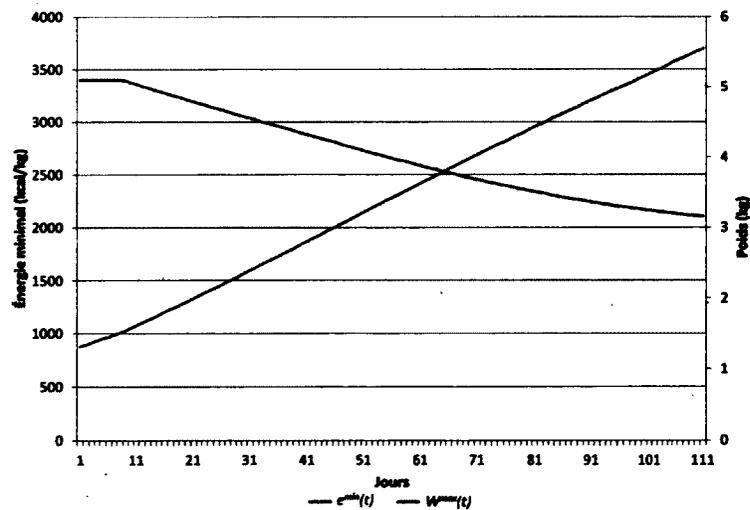


Figure 2.2 – Évolution de la quantité maximum que peut ingérer un porc $W^{max}(t)$ et du contenu en énergie minimum des mélanges $e^{min}(t)$ par jour.

Passons maintenant aux besoins en acides aminés. Le comportement des besoins par jour est croissant durant la première moitié de la période d'alimentation et décroissant par la suite (Figure 2.3).

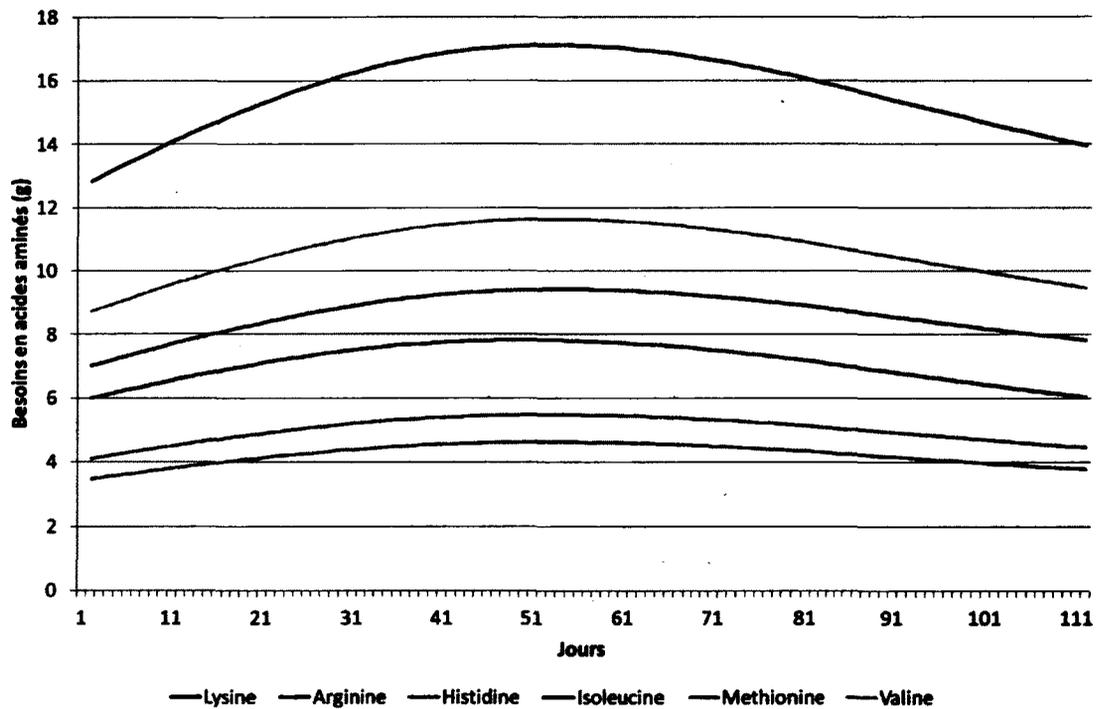


Figure 2.3 – Évolution du besoin $AA_i(t)$ en acides aminés i par jour pour quelques acides aminés.

Concernant les minéraux, on constate que les besoins minimums journaliers $B_i^{min}(t)$ sont croissants tout au long de la période d'alimentation (Figure 2.4).

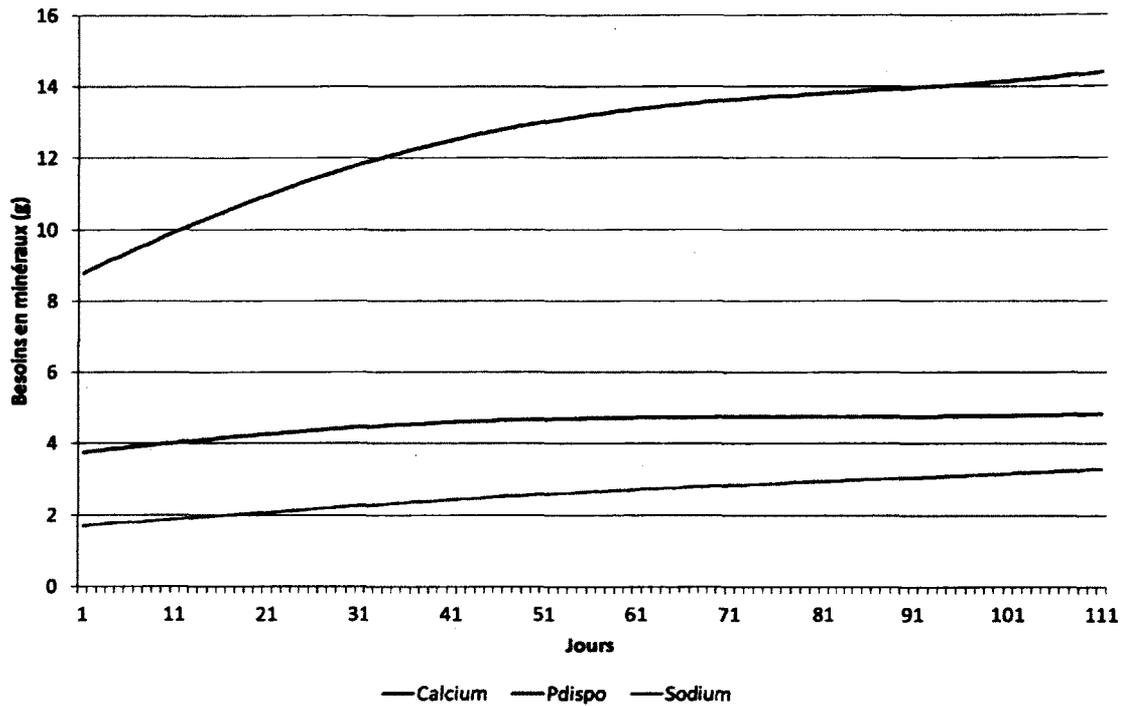


Figure 2.4 – Évolution des besoins minimaux en minéraux $B_i^{min}(t)$ par jour.

Un seul minéral est restreint et cette restriction porte sur la quantité maximale par kg de mélange. En effet, l'apport en sodium par kg de mélange ne doit pas dépasser 2,5 g. Les autres minéraux n'ont aucune restriction. Ainsi, nous avons

$$B_{Na}^{max}(t) = 2,5W(t)$$

$$B_{Pdispo}^{max}(t) = +\infty$$

$$B_{Ca}^{max}(t) = +\infty$$

Les autres bornes de proportions, $p_j^{min}(t)$ et $p_j^{max}(t)$, sont constantes tout au long de la période de croissance et sont données au Tableau 2.3. On a ainsi

$$p_j^{min}(t) = p_j^{min}$$

$$p_j^{max}(t) = p_j^{max}$$

Ingrédient j	p_j^{min}	p_j^{max}
X1	0	1
X2	0	0,40
X3	0	1
X4	0	1
X5	0	0,03
X6	0	0,05
X7	0	1
X8	0	1
X9	0	1
X10	0	0,60
X11	0	0,60
X12	0	1
X13	0,005	0,005
X14	0	0,25
X15	0	0,05
X16	0	1

Tableau 2.3 – Restrictions sur les ingrédients, p_j^{min} et p_j^{max}

Le type de contrainte sur des ratios ne concerne, dans le cas du porc, que le ratio Calcium/Phosphore total. Les valeurs minimales et maximales de ce ratio sont constantes pour toute la période de croissance. Ce ratio doit être compris entre 1 et 1,5. Nous avons donc

$$r_{Ca,Ptot}^{min}(t) = r_{Ca,Ptot}^{min} = 1$$

et

$$r_{Ca,Ptot}^{max}(t) = r_{Ca,Ptot}^{max} = 1,5$$

2.4 Besoins ou restrictions par kilocalorie

Dans cette section, nous allons étudier le comportement des besoins et des restrictions lorsque ceux-ci sont exprimés par kilocalorie. C'est sous cette forme qu'ils apparaissent dans les conditions que doivent vérifier les mélanges lorsqu'une alimentation par phases ou avec deux prémélanges est utilisée $(\bar{S}^L(k))$ et $(\bar{S}^F(k; \bar{e}(k)))$.

Lorsqu'on les exprime par kilocalorie, les besoins en acides aminés sont décroissants tout au long de la période de d'alimentation (Figure 2.5).

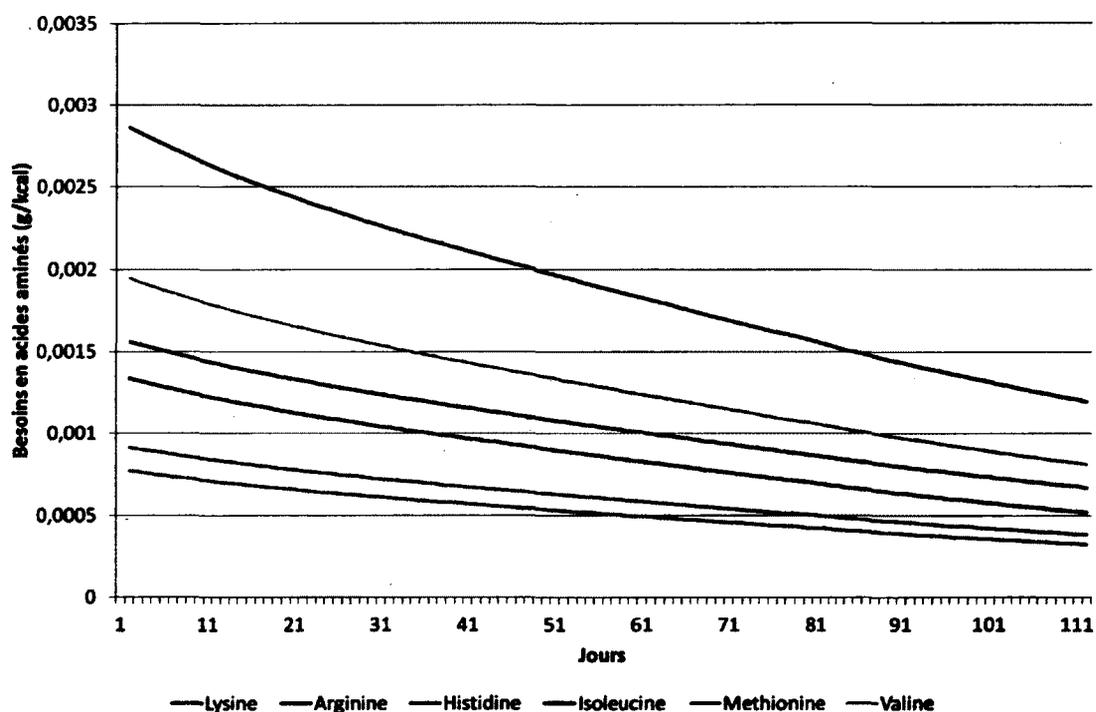


Figure 2.5 - Évolution du besoin $\frac{AA_i(t)}{E(t)}$ par kcal en acide aminé i .

La même constatation peut être faite pour les besoins en minéraux (Figure 2.6).

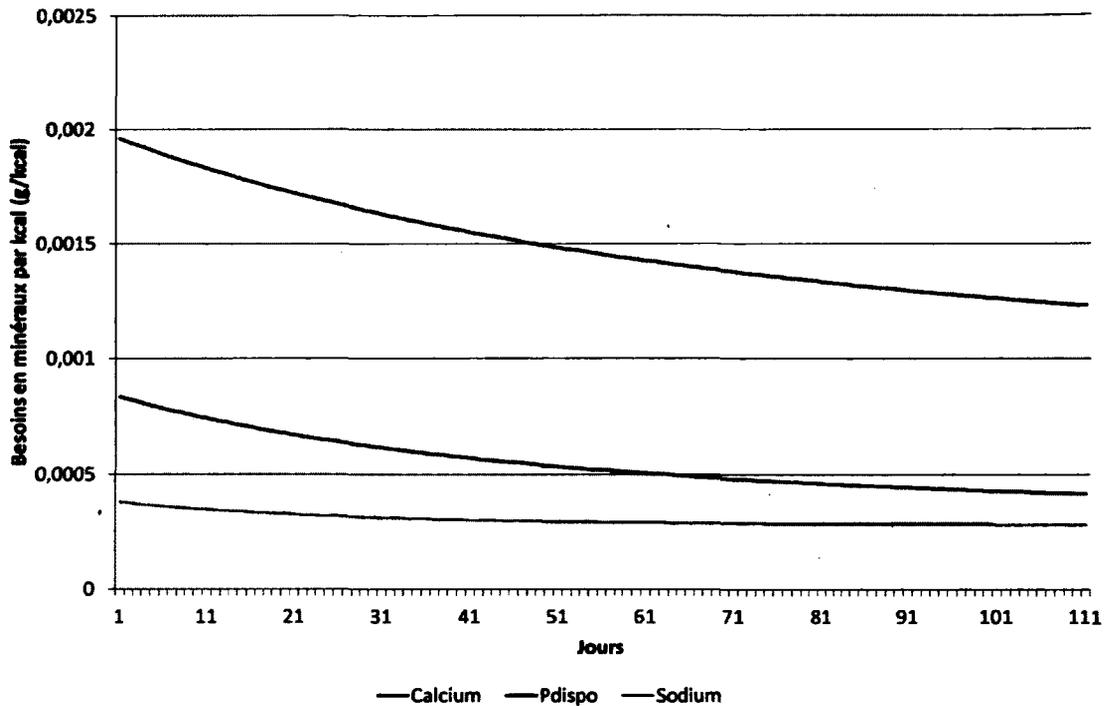


Figure 2.6 – Évolution du besoin $\frac{B_i^{min}(t)}{E(t)}$ en minéral i par kcal.

2.5 Modélisation par phase

Lorsque nous parlerons d'alimentation par phase, nous imposerons que toutes les phases d'un type d'alimentation aient une durée égale. Lorsque la durée d'alimentation de 111 jours ne se divise pas par le nombre de phase K , comme c'est le cas par exemple pour une alimentation en quatre phases, les phases les plus longues seront placées à la fin. Ainsi, pour une alimentation en quatre phases par exemple, nous pouvons découper les 111 jours de la période de croissance en une phase de 27 jours et trois phases de 28 jours. Ainsi, la

première phase durera 27 jours, et les trois suivantes 28 jours. Autre exemple, pour l'alimentation en 10 phases, les 111 jours peuvent être séparés en neuf phases de 11 jours et une phase de 12 jours. Les neuf premières phases seront donc de 11 jours et la dixième de 12 jours. Cette décision n'est pas optimale, mais est actuellement utilisée dans l'industrie.

Nous avons vu, au Chapitre 1, que pour alimenter un porc par phase, les mélanges utilisés devaient répondre aux besoins et restrictions les plus contraignants. Les modèles pour une alimentation par phases présentés dans le chapitre précédent utilisent les données des besoins exprimés par kilocalorie. Ce sont eux qui vont nous intéresser ici. Les besoins étant décroissants (Figure 2.5 et Figure 2.6), la journée d'une phase k où les besoins sont les plus élevés correspondent à la première journée de cette phase. Nous avons donc

$$\widetilde{aa}_i(k) = \max_{t \in D_k} \frac{AA_i(t)}{E(t)} = \frac{AA_i(t_{k-1} + 1)}{E(t_{k-1} + 1)}$$

et

$$\widetilde{b}_i^{min}(k) = \max_{t \in D_k} \frac{B_i^{min}(t)}{E(t)} = \frac{B_i^{min}(t_{k-1} + 1)}{E(t_{k-1} + 1)}.$$

Les restrictions étant quant à elles croissantes, la journée la plus contraignante d'une phase k correspond également à la première journée de la phase. Ainsi, nous avons

$$\widetilde{W}^{max}(k) = \min_{t \in D_k} \frac{W^{max}(t)}{E(t)} = \frac{W^{max}(t_{k-1} + 1)}{E(t_{k-1} + 1)}$$

et

$$\widetilde{b}_i^{max}(t) = \min_{t \in D_k} \frac{B_i^{max}(t)}{E(t)} = \frac{B_i^{max}(t_{k-1} + 1)}{E(t_{k-1} + 1)}.$$

Les autres restrictions étant constantes pour toute la période de croissance des porcs, nous pouvons ainsi prendre les valeurs de la première journée d'alimentation. Ainsi, nous

avons pour toutes les phases k :

$$\begin{aligned}\widehat{p}_j^{\min}(k) &= \max_{t \in D_k} p_j^{\min}(t) = p_j^{\min}, \\ \widehat{p}_j^{\max}(k) &= \min_{t \in D_k} p_j^{\max}(t) = p_j^{\max}, \\ \widehat{r}_{i_1, i_2}^{\min}(k) &= \max_{t \in D_k} r_{i_1, i_2}^{\min}(t) = r_{i_1, i_2}^{\min}, \\ \widehat{r}_{i_1, i_2}^{\max}(k) &= \min_{t \in D_k} r_{i_1, i_2}^{\max}(t) = r_{i_1, i_2}^{\max}.\end{aligned}$$

Nous avons vu dans le Chapitre 1 qu'il fallait prendre en compte les besoins les plus restrictifs en comptes. Dans notre cas, ces conditions correspondent toutes à la première journée de la phase. Nous avons donc les résultats suivants :

Théorème 8 *La diète optimale du problème $(P^L(t_{k-1} + 1))$ correspond à la diète optimale du problème d'alimentation pour la phase k , $(P^L(k))$ lorsque les conditions les plus restrictives correspondent à la première journée de la phase k , $t_{k-1} + 1$.*

Théorème 9 *La diète optimale du problème $(P^F(t_{k-1} + 1); e)$ correspond à la diète optimale du problème d'alimentation pour la phase k , $(P^F(k; \bar{e}))$ lorsque les conditions les plus restrictives correspondent à la première journée de la phase k , $t_{k-1} + 1$, à condition que $\bar{e} = e$.*

2.6 Modèles linéaires équivalents

Dans le cas du porc charcutier, le fait énoncé au Chapitre 1 Section 1.6 s'applique ici. Nous venons de voir qu'il existe un besoin minimum en phosphore disponible, et donc le dénominateur du quotient porte sur le phosphore total, qui est supérieur ou égal à l'apport en phosphore disponible, sera donc strictement positif. Nous pouvons donc écrire la contrainte de ratio en les deux contraintes linéaires suivantes :

$$\sum_{j=1}^n (a_{Ca,j} - \widehat{r}_{Ca, Ptot}^{\min} a_{Ptot,j}) \bar{x}_j(k) \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{Ca,j} - \widetilde{r}_{Ca, Ptot}^{max} a_{Ptot,j}) \bar{x}_j(k) \leq 0.$$

Il en va de même pour les contraintes de proportions

$$p_j^{min}(t) \leq \frac{x_j(t)}{W(t)} \leq p_j^{max}(t)$$

et

$$\widetilde{p}_j^{min}(t) \leq \frac{\bar{x}_j(t)}{\bar{W}(t)} \leq \widetilde{p}_j^{max}(t)$$

puisque $W(t) > 0$ ou $\bar{W}(t) > 0$.

CHAPITRE 3

Résultats : Comparaison et discussion

3.1 Introduction

Nous allons, dans ce chapitre, effectuer la comparaison des résultats obtenus à partir des différents modèles d'optimisation du Chapitre 1. L'impact environnemental de l'alimentation des porcs est important, c'est pourquoi, nous allons observer le comportement de la consommation et des rejets de phosphore (P) et d'azote (N), sans toutefois chercher à l'optimiser.

Il est à noter que les coûts présentés ici ne concernent que l'achat des matières premières et non la fabrication, le transport et l'entreposage des diètes.

Pour chaque série de résultats, nous afficherons les résultats en utilisant de trois à dix phases ($K = 3, \dots, 10$) et 111 phases d'alimentation ($K = 111$, c'est-à-dire à phases journalières). Pour tous les problèmes à énergie fixe, le contenu en énergie est de 3400 kcal/kg.

3.2 Alimentation sans prémélanges

L'alimentation sans prémélanges consiste à donner aux animaux un mélange à coût optimal différent à chaque phases. Les résultats apparaissent dans les Tableaux 3.1 et 3.2.

Problème solutionné	Nombre de phases K	Coût (\$/porc)	P ingéré (kg)	P excrété (kg)	N ingéré (kg)	N excrété (kg)
$\bar{P}^L(K)$	3	103,07	1,579	1,371	6,787	4,691
	4	102,31	1,578	1,370	6,614	4,518
	5	101,85	1,554	1,346	6,557	4,461
	6	101,59	1,549	1,341	6,535	4,439
	7	101,49	1,548	1,340	6,436	4,340
	8	101,38	1,544	1,336	6,428	4,332
	9	101,25	1,544	1,336	6,439	4,343
\bar{P}^L	111	100,62	1,526	1,318	6,313	4,217

Tableau 3.1 – Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie libre et sans prémélanges.

Problème solutionné	Nombre de phases K	Coût (\$/porc)	P ingéré (kg)	P excrété (kg)	N ingéré (kg)	N excrété (kg)
$\bar{P}^F(K; 3400)$	3*	108,68	1,445	1,237	6,462	4,366
	4	108,19	1,415	1,207	6,261	4,165
	5	107,92	1,398	1,190	6,141	4,045
	6	107,75	1,386	1,178	6,057	3,960
	7	107,64	1,379	1,171	6,008	3,912
	8	107,54	1,374	1,166	5,978	3,882
	9	107,42	1,366	1,158	5,909	3,813
$\bar{P}^F(3400)$	111	107,02	1,342	1,134	5,763	3,667

Tableau 3.2 – Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase avec un contenu en énergie fixé à 3400 kcal/kg et sans prémélanges, *Situation actuelle dans l'industrie.

Le type d'alimentation utilisée actuellement dans l'industrie est fréquemment une ali-

mentation en trois phases sans prémélanges à énergie fixe. Nous allons donc faire notre comparaison à partir de cette base. Avec cette formulation, le coût d'alimentation par porc est de 108,68\$, le phosphore consommé et excrété est respectivement de 1,445 kg et 1,237 kg et chaque porc consommera 6,462 kg et rejettera 4,366 kg d'azote. Les recherches actuelles tendent à privilégier une alimentation journalière, c'est-à-dire en 111 phases. Ce type d'alimentation nous intéressera donc principalement.

L'alimentation avec énergie libre n'est pas très répandue dans l'industrie porcine. Toutefois, une telle alimentation permettrait, en moyenne, une diminution des coûts d'alimentation de 6,15%. Malgré cette forte diminution de coût, ce type de formulation a un inconvénient : la consommation et les rejets d'azote et de phosphore augmentent par rapport à la formulation de référence. L'augmentation moyenne de consommation est respectivement de 7,96% et 1,76% pour le phosphore et l'azote et celle des rejets est respectivement de 9,30% et 2,47%.

En utilisant plus spécifiquement une alimentation à phases journalières, la réduction du coût d'alimentation est de 7,42% par rapport à l'alimentation en trois phases à énergie fixe utilisée aujourd'hui. La consommation et les rejets de phosphore seraient augmentés respectivement de 5,61% et 6,55%. La consommation et les rejets d'azote, quant à eux, diminueraient de 2,31% et 3,41%.

La diminution du coût d'alimentation est principalement due à la diminution du contenu en énergie (Figure 3.1) à compter du 9^{ième} jour de la période de croissance. Malgré l'augmentation de la consommation, due également à la baisse du contenu en énergie, le coût total de l'aliment consommé par jour est plus bas (Figure 3.2).

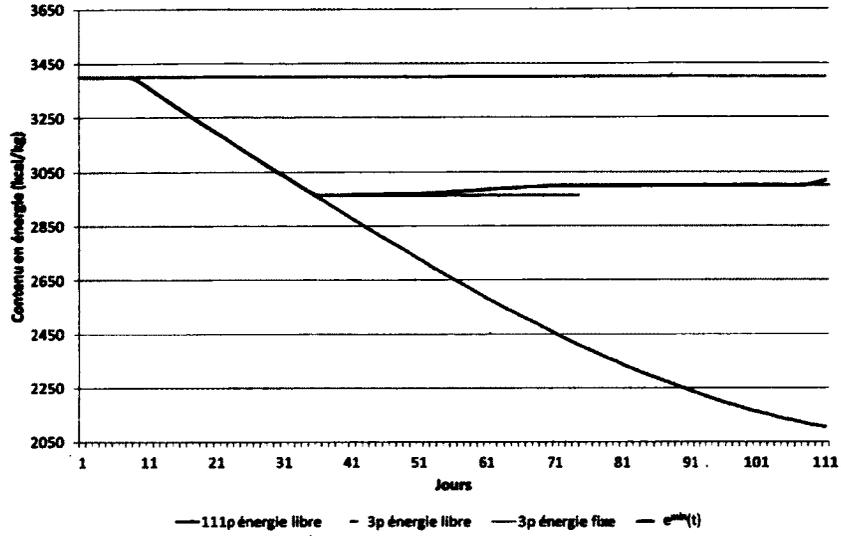


Figure 3.1 – Évolution du contenu en énergie $e(t)$ avec une alimentation à énergie libre à trois phases et phases journalières sans prémélanges et pour une alimentation à énergie fixe ainsi que le contenu minimal $e^{min}(t)$ en énergie des mélanges.

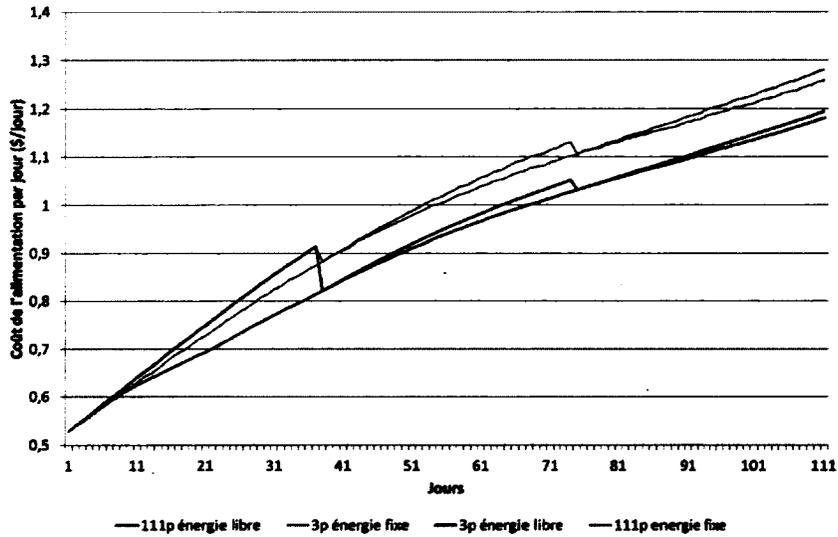


Figure 3.2 – Évolution du coût de l'alimentation par jour pour une alimentation à énergie libre à trois phases et à phases journalières et pour une alimentation à trois phases à énergie fixe.

Les résultats des Théorèmes 8 et 9 que nous avons énoncés au Chapitre 2 sont confirmés ici par la Figure 3.2. Le coût par kilogramme de diète utilisée pour l'alimentation en trois phases correspond à celui de l'alimentation journalière lors de la première journée de chaque phase.

Lorsqu'on regarde le prix du kilogramme de mélange pour une alimentation à phases quotidiennes et à énergie libre (Figure 3.3) on s'aperçoit, pour une alimentation en 111 phases, que le coût du kilogramme de mélange de la dernière journée est plus élevé que celui de la 107^{ième} journée par exemple. Cela est également dû au fait que l'énergie est libérée et que l'optimisation se fait sur la consommation totale de la journée. En étudiant de plus près, on se rend compte que le mélange utilisé au 107^{ième} jour contient 2998 kcal/kg et que le mélange de la dernière journée en contient 3019. Afin de combler les besoins énergétiques de la dernière journée, une plus grande quantité du mélange du 107^{ième} jour sera nécessaire qu'avec celui de la dernière journée et en regardant le coût total pour l'alimentation de la dernière journée, on s'aperçoit qu'utiliser le mélange au coût par kg un peu plus élevé revient moins cher que d'utiliser celui le moins cher à l'unité.

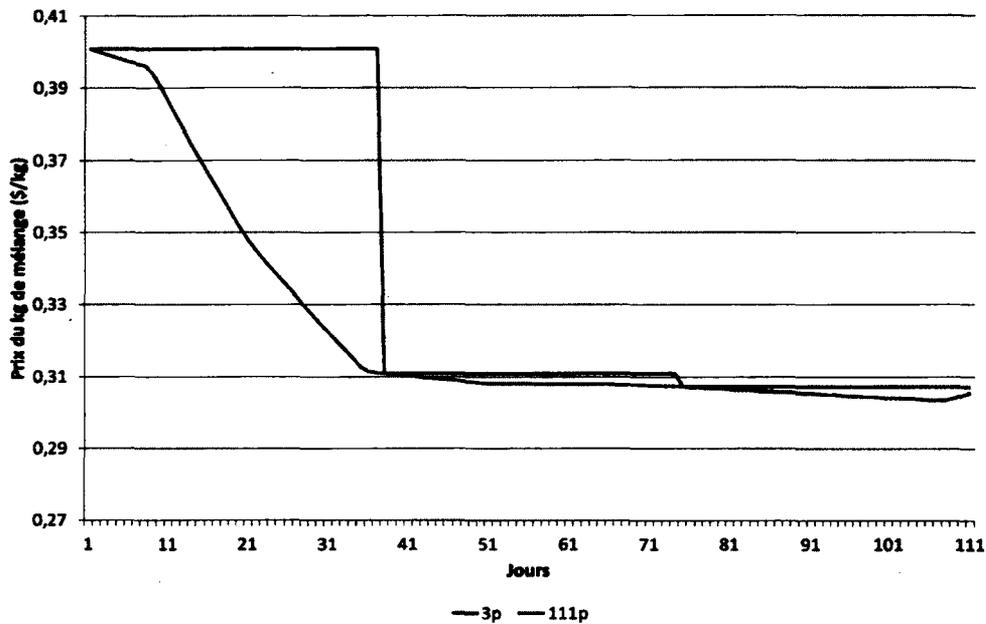


Figure 3.3 – Évolution du coût du kilogramme de mélange avec une alimentation à énergie libre en trois phases et à phases journalières.

En utilisant une alimentation à énergie fixe, mais en augmentant le nombre de phases, le coût d'alimentation par porc peut être diminué, tout comme les consommations et les rejets de phosphore et d'azote en se comparant à l'alimentation utilisée actuellement par les producteurs. Cette technique de formulation revient plus chère que de formuler à énergie libre mais est privilégiée par les formulateurs par simplicité. En effet, avec ce type de formulation, il suffit de minimiser le coût du kilogramme de mélange pour minimiser le coût total de l'alimentation.

Ainsi, en utilisant une alimentation à phase quotidienne, le coût d'alimentation pourrait être réduit de 1,53%. Les animaux consommeront 7,13% et rejeteront 8,33% moins de

phosphore. La même constatation est faite pour l'azote, avec une consommation diminuée de 10,82% et des rejets abaissés de 16,01% (Tableau 3.2).

La diminution des coûts d'alimentation est due au fait que les apports en nutriments se rapprochent plus des besoins en augmentant le nombre de phases. En effet, on peut constater, par la Figure 3.4 que le coût du kilogramme de mélange diminue dans le temps. Ainsi, utiliser un même mélange pour plusieurs jours, comme c'est le cas dès qu'on utilise un nombre de phases différent de 111, augmente le coût d'alimentation.

Les diminutions de consommation, et donc des rejets, d'azote et de phosphore sont également dues à l'augmentation du nombre de phases. En effet, les besoins diminuant au cours du temps, si un mélange répondant aux besoins de la première journée est utilisé pendant les 38 jours suivants, comme c'est le cas pour l'alimentation en trois phases, un surplus de phosphore et d'azote, ainsi que tous les autres nutriments, est donné aux porcs pendant 37 jours. Alors qu'en ajustant le mélange plus régulièrement, le contenu en phosphore et azote d'un kilogramme de mélange diminue plus souvent et donc diminue la consommation ainsi que les rejets.

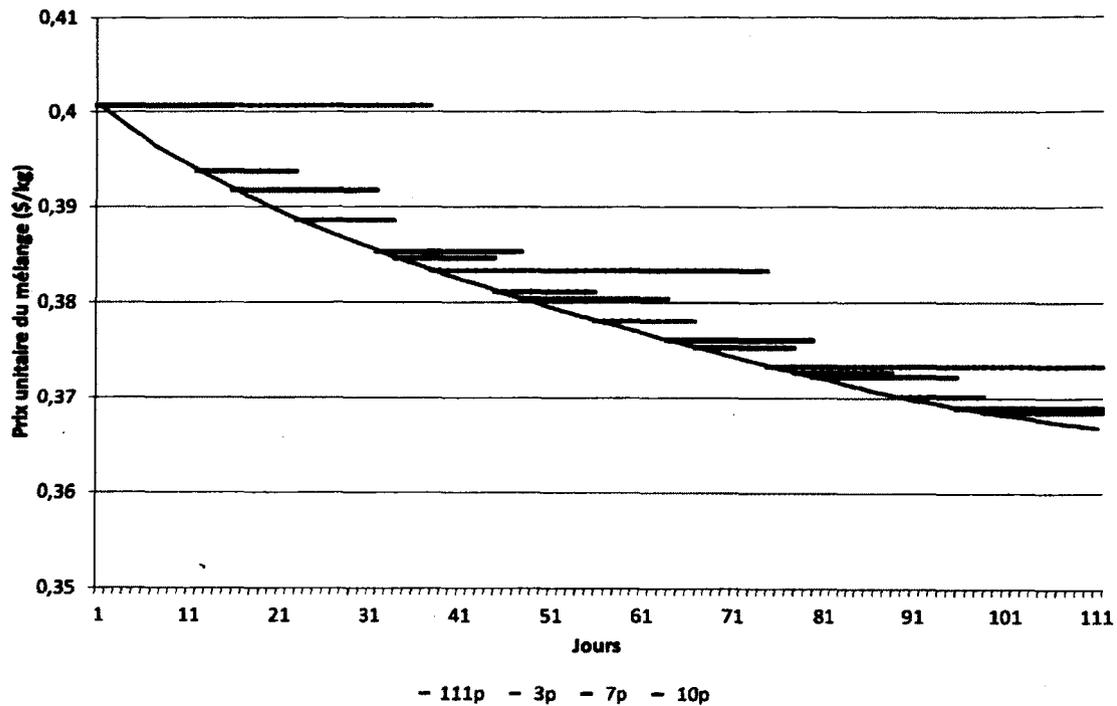


Figure 3.4 – Évolution du coût du kilogramme de mélange avec une alimentation en 3, 7, 10 et 111 phases sans prémélanges à énergie fixe (3400 kcal/kg).

En gardant le même nombre de phases et le même type d'alimentation (énergie fixe ou énergie libre), rien ne pourra battre, en coût, cette alimentation. Cependant, une telle alimentation est facile à mettre en place lorsque les animaux sont nourris en deux ou trois phases, mais un nombre plus élevé de phases poserait des problèmes d'entreposage et augmenterait énormément leurs coûts d'implantation. Par exemple, pour une alimentation à phase quotidienne, il faudrait pouvoir stocker 111 mélanges différents, ce qui est impensable. C'est pourquoi nous introduisons une alimentation utilisant deux prémélanges.

3.3 Alimentation avec prémélanges

Une alimentation avec prémélanges permet de nourrir les porcs avec un mélange différent à chaque jour, sans toutefois augmenter les coûts de fabrication, de transport et d'entreposage des aliments puisque seulement deux aliments sont fabriqués, transportés et entreposés.

3.3.1 Formulation à énergie libre

3.3.1.1 Prémélanges fixes

Une solution qui est intuitive après ce que l'on vient de voir avec une alimentation sans prémélanges serait de prendre comme prémélanges les diètes à coût optimal de la première et dernière phase d'alimentation. Ainsi, pour une alimentation à phase quotidienne, les prémélanges que nous prendrions seraient ceux de la première et dernière journée. Par contre, pour une alimentation en trois phases, les prémélanges utilisés seront ceux correspondant aux mélanges à coût optimaux du premier jour et du 75^{ième} jour, qui correspond à la première journée de la dernière phase. Comme nous connaissons a priori ces mélanges, cette alimentation sera dite à prémélanges fixes.

Dans notre cas, les prémélanges utilisés sont complets, c'est-à-dire réalisables, pour la première et dernière phases d'alimentation. Lorsque les prémélanges seront inconnus, nous parlerons de prémélanges libres. Lorsque les prémélanges sont libres, ceux-ci peuvent être incomplets pour chacune des phases, mais combinés ensemble en différentes proportions donne une diète complète et donc réalisable.

La restriction sur la capacité d'ingestion, forçant un des prémélanges à être riche en éner-

gie, donc normalement plus cher, fait que nourrir un porc avec une alimentation à énergie libre utilisant deux prémélanges fixés, correspondant aux mélanges à coût optimaux des premières journées de la première et de la dernière phase d'alimentation, revient, même en utilisant 111 phases, plus coûteux qu'une alimentation en trois phases à énergie libre sans prémélanges. Toutefois, son coût reste moins élevé que celui du système d'alimentation utilisé aujourd'hui par les producteurs.

Les résultats des simulations pour une alimentation à énergie libre et prémélanges fixes apparaissent dans le Tableau 3.3.

Problème solutionné	Nombre de phases K	Coût (\$/porc)	P ingéré (kg)	P excrété (kg)	N ingéré (kg)	N excrété (kg)
$\bar{P}^L(K; A^f; B^f)$	3	104,39	1,563	1,355	6,821	4,725
	4	104,08	1,561	1,353	6,795	4,699
	5	103,90	1,560	1,352	6,777	4,681
	6	103,82	1,561	1,353	6,775	4,679
	7	103,77	1,561	1,353	6,775	4,679
	8	103,73	1,561	1,353	6,772	4,676
	9	103,68	1,560	1,352	6,766	4,670
	10	103,66	1,560	1,352	6,765	4,669
	111	103,51	1,542	1,334	6,685	4,589

Tableau 3.3 – Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie libre et prémélanges fixes.

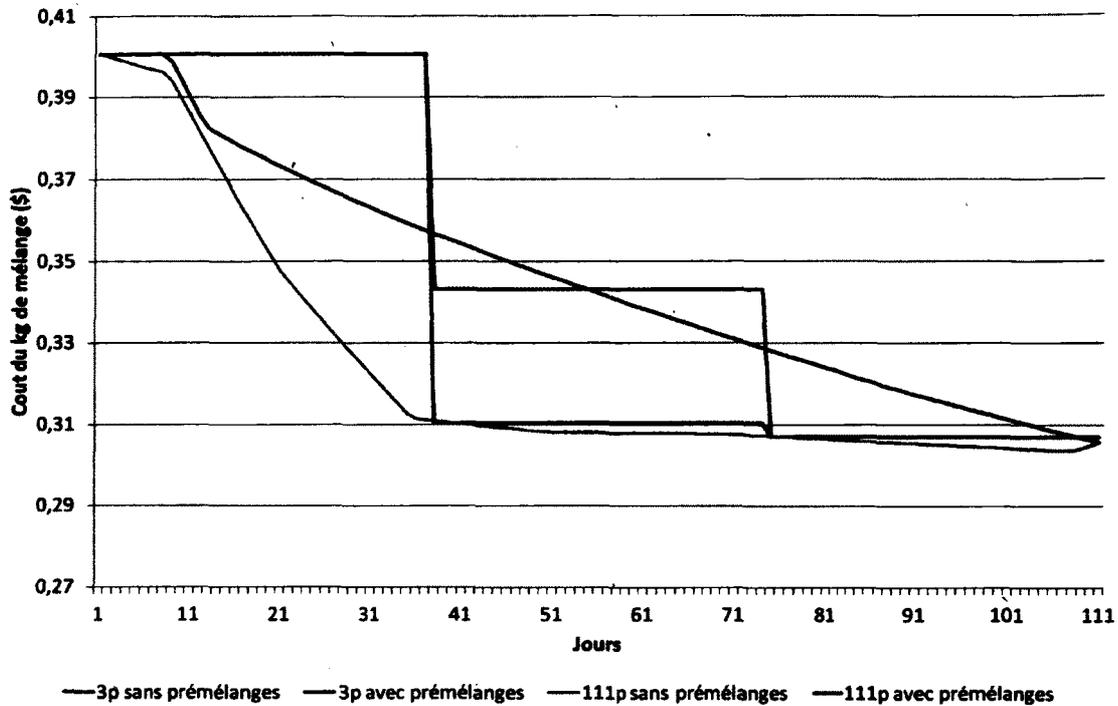


Figure 3.5 – Prix du kg de mélange pour une alimentation à 3 et 111 phases sans prémélanges et avec prémélanges fixes à énergie libre.

On peut un peu mieux comprendre pourquoi une alimentation à énergie libre en trois phases sans prémélanges coûte moins cher qu'une alimentation en 111 phases avec prémélanges grâce à la Figure 3.5. On peut en effet constater que le coût par kilogramme du mélange utilisé pour la deuxième phase d'une alimentation en trois phases sans prémélanges est beaucoup plus bas que ceux avec une alimentation avec prémélanges.

3.3.1.2 Prémélanges libres

Nous pouvons toutefois encore diminuer les coûts d'alimentation en libérant les prémélanges. Deux prémélanges qui ne sont pas complets pour un certain jour, mais qui,

combinés ensemble en différentes proportions sont complets pour tous les jours. En utilisant une alimentation à énergie libre à phases quotidiennes et avec des prémélanges dits libres permettrait de diminuer le coût d'alimentation des porcs de 5,80% par rapport à une alimentation en trois phases sans prémélanges et à énergie fixe, ce que les producteurs utilisent aujourd'hui. Cette forte diminution a tout de même un inconvénient : la consommation et le rejet de phosphore augmentent de 5,88% et 6,87% respectivement pour le phosphore et de 2% et 2,95% pour l'azote (Tableau 3.4).

Problème solutionné	Nombre de phases K	Coût (\$/porc)	P ingéré (kg)	P excrété (kkg)	N ingéré (kg)	N excrété (kg)
$\bar{P}_G^L(K; A^l; B^l)$	3	104,29	1,615	1,407	7,007	4,911
	4	103,60	1,560	1,352	6,914	4,818
	5	103,11	1,551	1,343	6,733	4,637
	6	103,05	1,532	1,324	6,764	4,668
	7	102,93	1,529	1,321	6,733	4,637
	8	102,77	1,529	1,321	6,693	4,597
	9	102,65	1,532	1,324	6,671	4,575
	10	102,59	1,522	1,314	6,651	4,555
	111	102,38	1,530	1,322	6,591	4,495

Tableau 3.4 – Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie libre et prémélanges libres.

La diminution de coût du kg de diète à énergie libre utilisant deux prémélanges libres est flagrante (Figure 3.6) en comparaison du coût du kg de diète utilisé actuellement dans industrie.

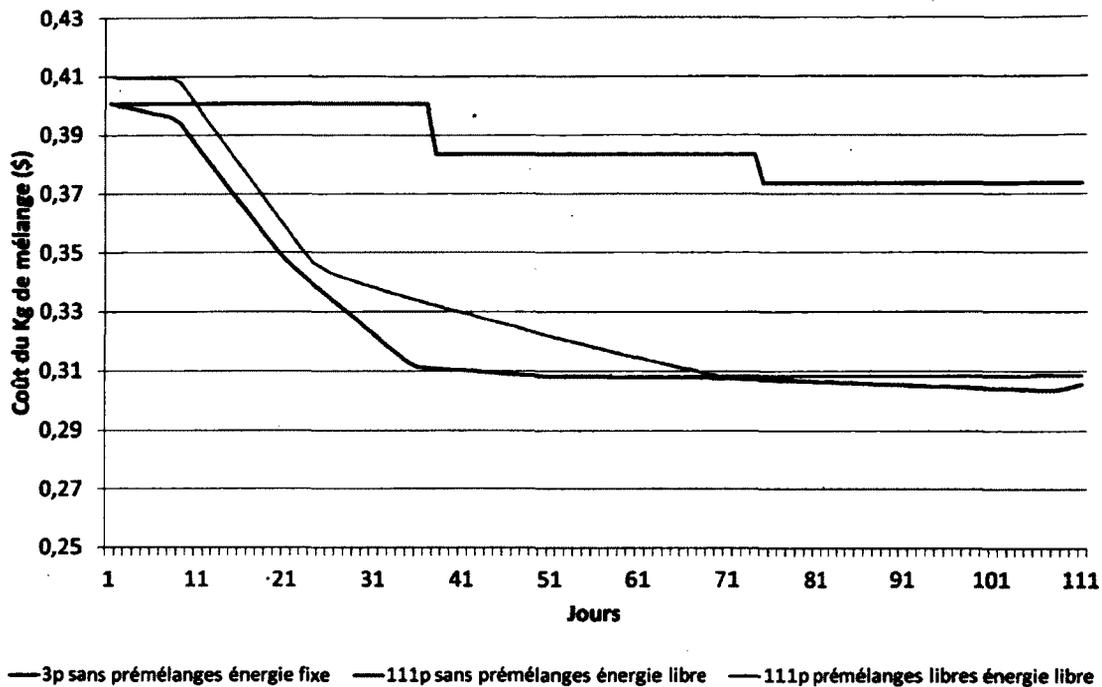


Figure 3.6 – Prix du kg de mélange pour une alimentation à 3 et 111 phases sans prémélanges et avec prémélanges fixes à énergie libre.

Ces augmentations sont dues à la baisse du taux d'énergie dans la formulation à énergie libre. En effet, le prémélange B ayant un taux d'énergie nettement inférieur (2889 kcal/kg contre 3406 à énergie fixe) et étant privilégié par rapport au prémélange A, car moins coûteux, la quantité d'aliment consommée est plus importante. De ce fait, malgré la concentration en phosphore ou en azote plus faible en général (Figure 3.7), la consommation par jour est largement plus importante dans les phases 2 et 3 (Figure 3.8).

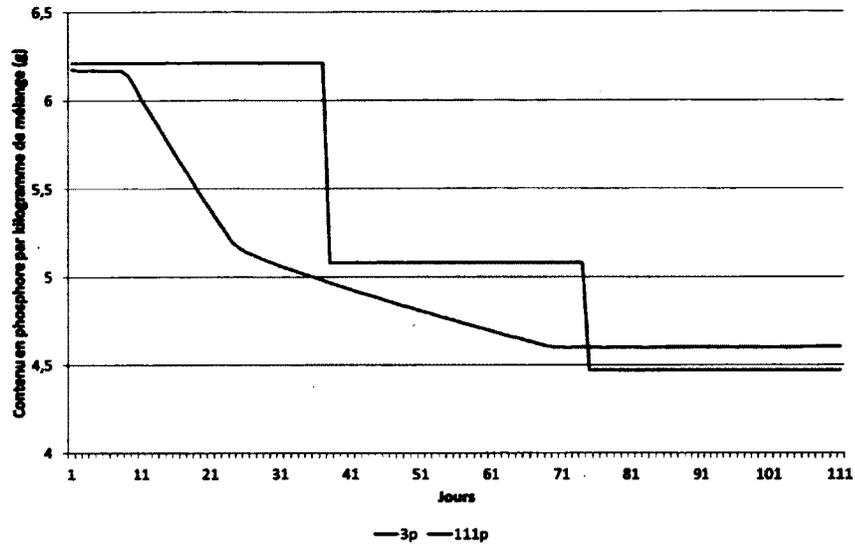


Figure 3.7 – Contenu en phosphore d'un kilogramme de mélange pour une alimentation à énergie et prémélanges libres en 111 phases et une alimentation en 3 phases à énergie fixe sans prémélanges.

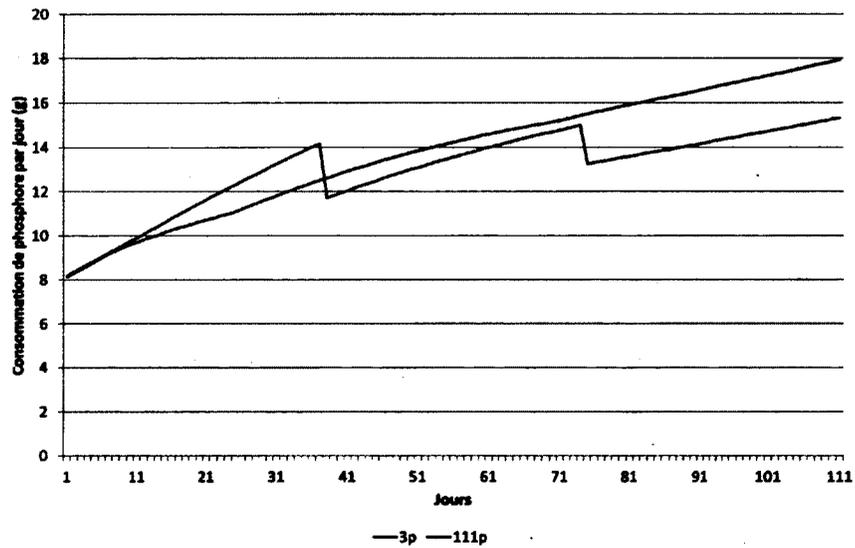


Figure 3.8 – Consommation de phosphore par jour pour une alimentation à énergie et prémélanges libres en 111 phases et une alimentation en 3 phases à énergie fixe sans prémélanges.

3.3.2 Formulation à énergie fixe

3.3.2.1 Prémélanges fixes

Ici également, les prémélanges utilisés correspondent aux prémélanges à coût optimal de la première et dernière phase, c'est-à-dire correspondant à la première journée de la première et de la dernière phase.

Les tableaux 3.5 et 3.6 rappellent les résultats d'une alimentation à énergie fixe avec prémélanges fixes et libres respectivement.

Problème solutionné	Nombre de phases K	Coût (\$/porc)	P ingéré (kg)	P excrété (kg)	N ingéré (kg)	N excrété (kg)
$\bar{P}^F(K; 3400; A^f; B^f)$	3	108,82	1,456	1,248	6,509	4,413
	4	108,41	1,433	1,225	6,325	4,229
	5	108,17	1,420	1,212	6,217	4,121
	6	108,06	1,410	1,202	6,125	4,029
	7	107,97	1,404	1,196	6,091	3,995
	8	107,90	1,402	1,194	6,088	3,992
	9	107,79	1,401	1,193	6,076	3,980
	10	107,81	1,397	1,189	6,069	3,973
	111	107,55	1,391	1,183	6,063	3,967

Tableau 3.5 – Coût de l'alimentation et P et N ingérés et excrétés par porc pour une alimentation multiphase à énergie fixe et avec prémélanges fixes.

Une alimentation en trois phases avec prémélanges n'est pas avantageuse. En effet, une telle alimentation augmente le coût de 0,13%, le phosphore consommé et excrété de 0,76% et 0,89% respectivement et l'azote ingéré et rejeté de 0,73% et 1,08%. L'augmentation des coûts est due à l'utilisation de prémélanges. Les prémélanges utilisés correspondent aux mélanges optimaux de la première et de la troisième phase. Le coût sur ces deux phases sera donc le même, que l'on utilise ou non des prémélanges. Par contre, pour la

deuxième phase, un mélange des deux prémélanges est utilisé. Le coût du kg de mélange utilisé ne peut donc être plus élevé (Figure 3.9).

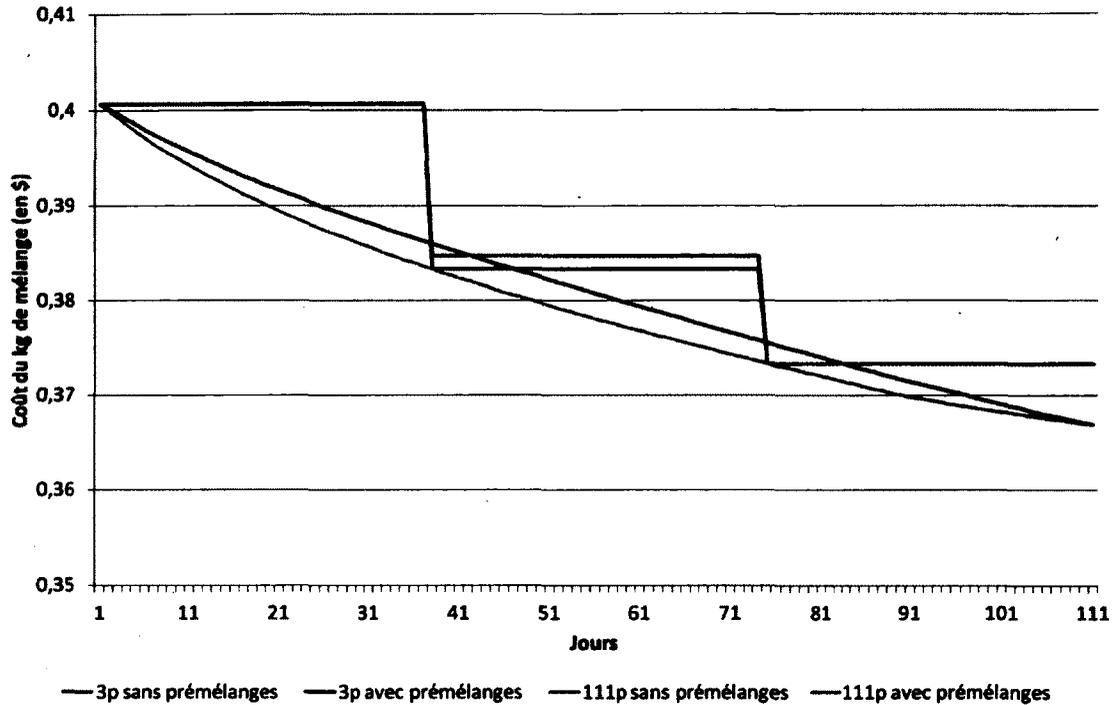


Figure 3.9 – Prix du kg de mélange pour une alimentation à 3 et 111 phases sans prémélanges et avec prémélanges fixes à énergie fixe.

À partir de quatre phases d'alimentation, le coût, l'ingestion et le rejet d'azote et de phosphore par porc diminuent. En utilisant une alimentation à phases quotidiennes, le coût a diminué de 1,04%. L'azote ingéré et excrété aura diminué de 6,17% et 9,14% respectivement, tout comme le phosphore qui lui diminue de 3,74% pour le consommé et 4,37% pour l'excrété. Ces diminutions sont dues au nombre de phases et à la composition des prémélanges. Les proportions de mélanges utilisées étant ajustées au jour le jour, une plus grande quantité du prémélange B, le moins cher des deux (A : 0,40062 \$; B :

0,36693 \$) et celui qui contient le moins d'azote (A : 30,0342 g/kg; B : 16,3614 g/kg) et de phosphore (A : 6,21226 g/kg; B : 4,14508 g/kg), est utilisé. Ainsi, excepté au moment des changements de phases (jours 38 à 47 et 75 à 83), nourrir un porc avec des phases quotidiennes coûte moins cher que de le nourrir en trois phases.

En comparaison avec une alimentation en 111 phases sans prémélanges, qui est l'optimal en terme de coût, le coût de l'alimentation avec prémélanges augmente de 0,5%. Le phosphore et l'azote consommés augmentent de 3,65% et 5,21% respectivement, tout comme les rejets qui augmentent de 4,32% et 8,18% respectivement. Comme pour la comparaison de l'alimentation en trois phases, avec et sans prémélanges, cette augmentation est due à l'utilisation de deux prémélanges. À l'exception de la première et dernière journée, où les coûts sont les mêmes puisque les prémélanges utilisés correspondent aux mélanges de ces deux journées, les coûts par kilogramme de mélange utilisé pour les autres phases sont plus élevés.

3.3.2.2 Prémélanges libres

Utiliser des prémélanges libres diminue, en moyenne, les coûts de 0,09%, la consommation de phosphore et d'azote de 1,04% et 0,97% et les rejets de 1,22% pour le phosphore et 1,48% pour l'azote. Nourrir les porcs avec deux ou trois phases avec des prémélanges libres revient au même que de les nourrir avec les prémélanges correspondant aux mélanges optimaux des premières journées de la première et de la dernière phase, c'est-à-dire une augmentation des coûts par rapport à une alimentation en trois phases sans prémélanges. Avec un nombre plus élevé de phases, les coûts, consommation et rejets d'azote et de phosphore diminuent. Avec une alimentation en 111 phases, l'économie réalisée est de 1,28%. Le phosphore et l'azote ingérés diminuent de 6,64% et 9,83% respectivement. Les

rejets sont également réduit de 7,76% pour le phosphore et 14,54% pour l'azote (tableau 3.6).

Pour une alimentation en 111 phases, la solution avec prémélanges libres est une solution intermédiaire. Elle est meilleure que la solution avec prémélanges fixes, mais moins bien que celle sans prémélanges.

Problème solutionné	Nombre de phases K	Coût (\$/porc)	P ingéré (kg)	P excrété (kg)	N ingéré (kg)	N excrété (kg)
$\bar{P}_G^F(K; 3400; A^i; B^i)$	3	108,82	1,456	1,248	6,503	4,407
	4	108,38	1,426	1,218	6,282	4,186
	5	108,13	1,411	1,203	6,164	4,068
	6	107,98	1,400	1,192	6,106	4,010
	7	107,85	1,391	1,183	6,059	3,963
	8	107,78	1,385	1,177	6,031	3,935
	9	107,65	1,377	1,169	5,997	3,901
	10	107,67	1,373	1,165	5,999	3,903
	111	107,29	1,349	1,141	5,827	3,731

Tableau 3.6 – Coût de l'alimentation et P et N ingéré et excrété par porc pour une alimentation multiphase à énergie fixe et prémélanges libres.

CHAPITRE 4

Solveurs et algorithmes

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les différents types de problèmes que nous avons été amenés à résoudre. Nous allons ensuite décrire les différents solveurs utilisés pour résoudre ces problèmes. Finalement, nous discuterons des difficultés que nous avons rencontrées lors des résolutions de certains problèmes et aux solutions que nous avons mises en place.

4.2 Nature des problèmes

Nous avons été confronté à deux types de problèmes :

- les problèmes linéaires ;
- les problèmes bi-linéaires.

Quatre des six problèmes que nous avons eu à résoudre utilisent des modèles linéaires. Il s'agit des modèles sans prémélanges à énergie libre ($PL(K)$) et sans prémélanges à

énergie fixe ($P^F(K, \bar{e})$) ainsi que des modèles à énergie libre utilisant des prémélanges fixes ($P^L(K; A^f, B^f)$) et à énergie fixe avec prémélanges fixes ($P^F(K; \bar{e}; A^f, B^f)$). Les deux modèles ($P_G^L(K; A^l, B^l)$) et ($P_G^F(K; \bar{e}; A^l, B^l)$) utilisant des prémélanges libres sont quant à eux bilinéaires du fait que les prémélanges sont optimisés en même temps que les proportions.

Quatre des six problèmes que nous avons présentés sont de petite taille. En effet, les problèmes sans prémélanges, $\bar{P}^L(K)$ et $\bar{P}^F(K; 3400)$, ainsi que ceux avec prémélanges fixes, $\bar{P}^L(K; A^f, B^f)$ et $\bar{P}^F(K; 3400; A^f, B^f)$, sont des problèmes séparables. Chacun d'eux peut être divisé en K sous-problèmes, un pour chaque phases. En revanche, les problèmes à prémélanges libres, $\bar{P}_G^L(K; A^l, B^l)$ et $\bar{P}_G^F(K; 3400; A^l, B^l)$, ne peuvent pas être séparés et doivent donc être traités en une seule fois, et donc de plus grosse taille. Ce sont des problèmes globaux. La complexité des différents problèmes est présentée dans le Tableau 4.1.

Problèmes séparables (K sous-problèmes)	Nombre de variables	Nombre de contraintes
$\bar{P}^L(K)$	$16K$	$27K$
$\bar{P}^F(K; 3400)$	$16K$	$20K$
$\bar{P}^L(K; A^f, B^f)$	$2K$	$(27+2)K$
$\bar{P}^F(K; 3400; A^f, B^f)$	K (ou $2K$)	$(20+1)K$
Problèmes globaux	Nombre de variables	Nombre de contraintes
$\bar{P}_G^L(K; A^l, B^l)$	$2 \times 16 + 2K$	$27K + 2K + 2$
$\bar{P}_G^F(K; 3400; A^l, B^l)$	$2 \times 16 + 2K$	$20K + K + 2$

Tableau 4.1 – Complexité des problèmes.

Pour le problème à énergie fixe et prémélanges fixes $\bar{P}^F(K; 3400; A^f, B^f)$, les variables sont uniquement les α_k et β_k qui représente les proportions respectives de prémélanges A et B utilisées à la phase k . Pour un problème à K phases, il y aura donc $2K$ variables.

Or ces variables étant des proportions, nous avons la relation suivante $\beta_k = 1 - \alpha_k$. Le nombre de variables de ce problème peut donc être réduit à K .

4.3 Solveurs utilisés

Les modèles mathématiques ont été programmés en AMPL [17]. Les problèmes ont été résolus à l'aide des solveurs LOQO [36], MINOS [25], KNITRO [8], Ipopt [37] et Snopt [19] disponibles sur NEOS Server [9][20][14].

Tous ces solveurs permettent de résoudre des problèmes d'optimisation linéaires ou non-linéaires, convexes ou non-convexes, avec contraintes ou sans contrainte. Dans le cas où le problème à résoudre contient des contraintes, celles-ci doivent être lisses. Ils nous garantissent de trouver un minimum local qui dépend du point de départ dans le cas non-convexe. Dans le cas convexe, c'est un minimum global qui est trouvé.

Le solveur LOQO est basé sur une méthode de points intérieurs primal dual. Dans le cas non-linéaire, c'est la méthode de points intérieurs primal dual qui est utilisée, combinée à une recherche linéaire.

La résolution des problèmes avec le solveur MINOS se fait grâce à l'algorithme du simplexe. Pour un problème linéaire, la résolution se fait grâce à l'algorithme du simplexe. Dans le cas de contraintes linéaire, c'est une méthode de gradient réduit avec des approximation quasi-Newton. Si les contraintes sont non-linéaires, MINOS implémente un algorithme SLC (Sequential Linearly Constrained) qui est une méthode de Lagrangien projeté et relié à la méthode de Robinson. Il résout une série des sous-problèmes dans

lesquels les contraintes sont linéarisées et l'objectif est un lagrangien augmenté. Il peut traiter les problèmes qui ne sont pas lisses, mais les résultats obtenus ne seront pas fiables.

Le solveur KNITRO est plus polyvalent que ceux précédemment cités. Il utilise trois algorithmes différents : de point intérieur direct, de point intérieur avec gradient conjugué et de contraintes actives. L'algorithme de contraintes actives utilisé par KNITRO est une mise en oeuvre de l'algorithme SLQP (Sequential Linear-Quadratic Programming) décrit par Byrd *et al.* [7]. C'est actuellement un des solveurs les plus puissants et polyvalents sur le marché.

Ipopt (Interior Point OPTimizer) est un solveur conçu pour trouver des solutions optimales locales. Comme son nom l'indique, ce solveur est basé sur une méthode de points intérieurs. Dans le cas non-linéaire, ce solveur utilise en plus un filtre de recherche linéaire.

SNOPT est un solveur utilisé principalement pour les problèmes non-linéaires dont les fonctions coûtent cher à évaluer. La fonction objectif et les fonctions contraintes doivent absolument être lisses, mais pas nécessairement convexes. Lorsqu'on l'utilise pour résoudre un problème linéaire, SNOPT utilise la méthode du simplexe et est équivalent à MINOS. Pour les problèmes non-linéaires, il utilise un algorithme SQP à approximation quasi-Newton.

4.4 Difficultés rencontrées et solutions

La résolution des problèmes de programmation linéaire s'est faite sans aucune difficulté. Tous les solveurs cités précédemment les traitent avec facilité et trouvent tous la même solution. Puisque les solveurs basés sur l'algorithme du simplexe et ceux basés sur un algorithme de points intérieurs trouvent les mêmes solutions aux programmes linéaires, ceux-ci ne présentent certainement pas de dégénérescence, d'où l'existence et l'unicité de la solution.

Par contre, des difficultés ont été rencontrées lors de la résolution des problèmes non-linéaires et non-convexes présentés dans les parties précédentes.

La principale difficulté rencontrée a été lors de la résolution du problème à prémélanges libres. En effet, les modèles à prémélanges libres sont des modèles bi-linéaires et non-convexes. Les prémélanges ainsi que les proportions (pour le modèle à énergie fixe) ou les quantités (pour le modèle à énergie libre) doivent être optimisés en même temps.

Les problèmes engendrés par la perte de linéarité du modèle peuvent être nombreux. Entre autre, alors que la linéarité de l'objectif et des contraintes nous assurait la convergence des algorithmes de résolution vers un minimum global, les algorithmes de résolution de problèmes non-linéaires ne nous l'assurent pas. Ils ont par contre une particularité que l'on peut utiliser. Ce sont des algorithmes itératifs de descente utilisant une solution initiale. Nous testerons donc ces modèles avec différentes solutions initiales.

On peut imaginer un algorithme qui convergerait vers un minimum global. La technique.

que nous avons utilisée consiste à prendre un nombre élevé de points de départ de façon à réduire au minimum les intervalles entre les solutions initiales et ainsi éviter de passer à côté d'un minimum global qui serait difficile à atteindre. Dans notre cas, nous prendrons 110 points initiaux. Ces points seront déterminés à partir des deux prémélanges que nous fixerons de la façon suivante :

- le prémélange A sera le mélange à coût minimal de la première journée
- le prémélange B sera le mélange à coût minimal d'un des autres journées.

L'algorithme ci-dessous nous a permis de résoudre ce problème :

Solution courante $(Z) \leftarrow \infty$

Fixer $A^{(0)}$ comme étant la solution à coût minimal du jour 1.

Répéter : Pour t allant de 2 à 111, fixer $A^{(0)}(t) = A^{(0)}$ et $B^{(0)}(t)$ comme étant la solution à coût minimal du jour t .

- Résoudre le programme linéaire des prémélanges à coût minimal pour les prémélanges fixés $A^{(0)}(t)$ et $B^{(0)}(t)$. *Obtention des proportions $\alpha^{(0)}(t), \beta^{(0)}(t)$.*
- Défixer les prémélanges et résoudre le programme non-linéaire avec cette solution initiale $(A^{(0)}(t), B^{(0)}(t), \alpha^{(0)}(t)$ et $\beta^{(0)}(t))$. *Obtention de la diète $(A(t), B(t), \alpha(t)$ et $\beta(t)$ et le coût $Z(t)$.*
- Si (solution trouvée $(Z(t)) <$ solution courante (Z)) alors (solution courante $(Z) \leftarrow$ solution trouvée $(Z(t))$).

fin de la boucle

Pour résoudre ces problèmes, les solveurs MINOS et LOQO se sont avérés inefficaces. En effet, ou bien ils trouvaient une solution extrêmement coûteuse (de l'ordre de 300\$ par porc contre 110\$ en temps normal), ou bien le nombre maximum d'itérations était atteint sans avoir trouvé de solution.

En revanche les solveurs KNITRO, Ipopt et SNOPT arrivaient, avec les différents points de départ donnés par l'algorithme décrit ci-dessus, à des solutions moins coûteuses que celles trouvées pour les problèmes à prémélanges fixes. Les trois solveurs arrivaient aux mêmes solutions.

CONCLUSION

L'alimentation utilisée actuellement consiste à nourrir les porcs en trois phases et en utilisant un mélange différent, contenant 3400 kcal/kg et à coût optimal, pour chaque phase. La solution optimale serait d'alimenter les animaux avec des phases quotidiennes et un mélange à coût optimal différent pour chaque jour. Or cela n'est pas réalisable dans la pratique. Nous avons donc inséré deux prémélanges. En comparant par rapport à l'alimentation utilisée actuellement par les producteurs, utiliser une alimentation à énergie fixe, c'est-à-dire que les prémélanges contiennent tous les deux le même taux d'énergie, dans notre cas 3400 kcal/kg, et à phase quotidienne, une faible économie est réalisée, si les prémélanges utilisés sont laissés libres lors de l'optimisation. En plus de cette diminution de coût, les porcs nourris de cette manière consommeraient et rejetteraient significativement moins de phosphore et d'azote.

On a pu remarquer lors des simulations que c'est l'énergie qui coûte le plus cher dans les mélanges. On a donc décidé de modéliser à énergie libre. Les modèles à énergie libre permettent de diminuer d'avantage les coûts d'alimentation. Toutefois, cette alimentation engendrerait une forte augmentation de la consommation de phosphore et d'azote et donc des rejets.

Une suite à donner à ce travail serait de diminuer les rejets de phosphore et d'azote dans les modèles à énergie libre présentés ici. Une solution serait de faire une modélisation multicritère qui permettrait de minimiser à la fois le coût, mais également les rejets, donc la consommation d'azote et de phosphore. Une autre possibilité serait de mettre en place un modèle qui prendrait en compte tous les individus d'un troupeau, avec chacun des besoins différents et non pas un individu moyen, comme c'est le cas dans notre étude. Une éventualité à envisager serait de mettre en carence certains animaux, c'est-à-dire de ne pas combler tous les besoins, en particulier les plus demandant, pendant quelques jours afin de diminuer le prix d'alimentation. Dans ce cas, il faudrait un modèle qui permettrait de simuler la perte de poids de la carcasse et qui aurait un impact direct sur le prix de vente et donc du revenu du producteur.

Bibliographie

- [1] I. BEAUDOIN : Méthodes d'optimisation du revenu net de l'engraissement porcin. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, 2001.
- [2] I. BEAUDOIN, F. DUBEAU et C. POMAR : Multi-objective optimization models for swine production system east-west journal of mathematics. *Computational Mathematics and modeling, Bangkok, Thailand, a special volume published by the East-West Journal of Mathematics*, pages 197–206, 2002.
- [3] H. BENCHAKROUN, F. DUBEAU, J.-P. DUSSAULT, P. Jean dit BAILLEUL et C. POMAR : Revision of the traditionnal diet formulation model. Rapport technique 184, Université de Sherbrooke, 1996.
- [4] D. BERTSIMAS et J.N. TSITSIKLIS : *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.
- [5] J.L. BLACK, R.G. CAMPBELL, I.H. WILLIAMS, K.J. JAMES et G.T. DAVIES : Simulation of energy and amino acid utilisation in the pig. *Research and Development in Agriculture*, 3:121–145, 1986.
- [6] D. BOURDON, J.Y. DOURMAD et Y. HENRY : Réduction des rejets azotés chez les porcs en croissance par la mise en oeuvre de l'alimentation multiphase, associée a l'abaissement du taux azoté. *Compte rendu des 27^{ème} Journées de la Recherche Porcine*, pages 269–278, 1995.

- [7] R. H. BYRD, N. I. M. GOULD, J. NOCEDAL et R. A. WALTZ : On the convergence of successive linear-quadratic programming algorithms. *SIAM J. on Optimization*, 16:471–489, 2005.
- [8] R. H. BYRD, J. NOCEDAL et R. A. WALTZ : KNITRO : An integrated package for nonlinear optimization. *In Large Scale Nonlinear Optimization*, pages 35–59. Springer Verlag, 2006.
- [9] J. CZYZYK, M. MESNIER et J. MORÉ : The NEOS server. *IEEE Journal on Computational Science and Engineering*, 5:68–75, 1998.
- [10] G.B. DANTZIG : *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963.
- [11] G.B. DANTZIG : The diet problem. *Interfaces*, 20:43–47, 1990.
- [12] P. Jean dit BAILLEUL : Modélisation et optimisation du revenu net de l’engraissement. Mémoire de maîtrise, Université Laval, 1998.
- [13] P. Jean dit BAILLEUL, J. RIVEST, F. DUBEAU et C. POMAR : Reducing nitrogen excretion in pigs by modifying the traditional least-cost formulation algorithm. *Livestock Production Science*, 72(3):199–211, 2001.
- [14] E. DOLAN : The NEOS server 4.0 administrative guide. Rapport technique, Technical Memorandum ANL/MCS-TM-250, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, May 2001.
- [15] F. DUBEAU, P.-O. JULIEN et C. POMAR : Étude de cas : un porc in dans un environnement sain. *INFOR*, 46(3):199–217, 2008.
- [16] F. DUBEAU, P.-O. JULIEN et C. POMAR : Formulating diets for growing pigs : economic and environmental considerations. *Annals of Operations Research*, 190: 239–269, 2009.

- [17] R. FOURER, D.M. GAY et B.W. KERNIGHAN : *AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming*. Brooks/Cole Publishing Company / Cengage Learning, 2002.
- [18] S.G. GARILLE et S.I. GASS : Stigler's diet problem revisited. *Operations Research*, 49:1–13, 2001.
- [19] P.E. GILL, W. MURRAY et M. SAUNDERS : SNOPT, Stanford Business Software, Inc., Mountain View, CA , USA.
- [20] W. GROPP et J. MORÉ : Optimization environments and the NEOS server. *Approximation Theory and Optimization*, pages 167–182, 1997.
- [21] J.P. IGNACIO et T.M. CAVALIER : *Linear programming*. Prentice-Hall international series in industrial and systems engineering. Prentice Hall, 1994.
- [22] L.M. LANCASTER : The evolution of the diet model in managing food systems. *Interfaces*, 22:59–68, 1992.
- [23] L.M. LANCASTER : The history of the application of mathematical programming to menu planning. *European Journal of Operational Research*, 57:339–347, 1992.
- [24] M.-P. LETOURNEAU-MONTMINY, C. BOUCHER, C. POMAR, F. DUBEAU et J.-P. DUSSAULT : Impact de la méthode de formulation et du nombre de phases d'alimentation sur le coût d'alimentation et les rejets d'azote et de phosphore chez le porc charcutier. In *Compte rendu des 37^{ème} Journées de la Recherche Porcine*, pages 25–32, 2005.
- [25] B. A. MURTAGH et M. SAUNDERS : MINOS, Stanford Business Software, Inc., Mountain View, CA , USA.
- [26] J.F. PATIENCE, C.F.M. De LANGE et P.A. THACKER : *Swine Nutrition Guide (2nd ed.)*. Prairie Swine Centre, University of Saskatchewan, 1995.

- [27] G.M. PESTI et B.R. MILLER : *Least-cost poultry feed formulation : principles, practices and a new microcomputer program*. Software series. Georgia Agricultural Experiment Stations, University of Georgia, 1988.
- [28] C. POMAR, F. DUBEAU, M.-P. LETOURNEAU-MONTMINY, C. BOUCHER et P.-O. JULIEN : Reducing phosphorus concentration in pig diets by adding an environmental objective to the traditional feed formulation algorithm. *Livestock Science*, 111(1-2):16-27, 2007.
- [29] C. POMAR, F. DUBEAU, M.-P. LETOURNEAU-MONTMINY, M. MAHÉ, P.-O. JULIEN et C. JONDREVILLE : Réduction de l'excrétion de phosphore et d'azote chez le porc charcutier par l'ajout d'un objectif environnemental dans l'algorithme traditionnel de formulation. *Compte rendu des 36^{ème} Journées de la Recherche Porcine*, pages 251-258, 2004.
- [30] R.E. STEUER : *Multiple Criteria Optimization*. New York : Wiley, 1986.
- [31] G.J. STIGLER : The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics*, 27:303-314, 1945.
- [32] National Research Council Subcommittee on SWINE NUTRITION, Committee on Animal Nutrition : *Nutrient Requirements of Swine : 10th Revised Edition*. The National Academies Press, 1998.
- [33] C.M.C. van der PEET-SCHWERING, A.W. JONGBLOED et A.J.A. AARNINK : Nitrogen and phosphorus consumption, utilisation and losses in pig production : The netherlands. *Livestock Production Science*, 58(3):213 - 224, 1999.
- [34] C.M.C. van der PEET-SCHWERING, N. VERDOES et G.M. BEELEN : Effect of feeding and housing on the ammonia emission of growing and finishing pig facilities. *Research Institute for Pig Husbandry*, 5.3:27-28, 1996.

- [35] J. van MILGEN, A. VALANCOGNE, S. DUBOIS, J.-Y. DOURMAD, B. SÈVE et J. NOBLET : Inraporc : A model and decision support tool for the nutrition of growing pigs. *Animal Feed Science and Technology*, 143(1-4):387 – 405, 2008.
- [36] R.J. VANDERBEI : Loqo user's manual-version 4.05. Rapport technique, Princeton University School of Engineering and Applied Science Department of Operations Research and Financial Engineering Princeton, New Jersey 08544, 2006.
- [37] A. WÄCHTER et L.T. BIEGLER : On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106:25–57, 2006.
- [38] C.T. WHITTEMORE et R.H. FAWCETT : Theoretical aspects of a flexible model to stimulate protein and lipid growth in pigs. *Animal Production*, 22:87–96, 1976.