Solutions périodiques d'une équation du premier degré avec retard et impulsions et solutions presque périodiques de l'équation de Duffing avec retard et impulsions

par

Sakina EL ALAOUI

thèse présentée au département de Mathématiques
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 21 novembre 2008

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-48548-4
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-48548-4

Le 5 décembre 2008

le jury a accepté la thèse de Mme Sakina El Alaoui dans sa version finale.

Membres du jury

M. Jean-Marc Belley
Directeur
Département de mathématiques

Mme Virginie Charette
Membre
Département de mathématiques

M. Jal Choksi
Membre externe
Département de mathématiques et statistiques - Université McGill

M. François Dubeau
Président-rapporteur
Département de mathématiques

À ma famille

Sommaire

Ce travail est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions, d'abord périodiques pour une équation périodique de premier degré avec retard et impulsions, ensuite presque périodiques pour l'équation de Duffing avec retard et impulsions.

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires. Dans le deuxième chapitre, à l'aide du théorème du point fixe de Banach et du principe d'approximation successive, on montre l'existence et l'unicité des solutions périodiques à variation bornée de l'équation périodique du premier degré avec retard et impulsions dans le cas où les impulsions dépendent de l'état et dans le cas où les impulsions ne dépendent pas de l'état. Dans le chapitre trois, on montre l'existence et l'unicité des solutions presque périodiques pour l'équation de Duffing avec retard et impulsions dépendant de la moyenne de l'état. À la fin de ces deux chapitres, on montre l'existence des bornes à priori comme condition supplémentaire d'existence de ces mêmes solutions.

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude particulièrement à mon directeur de recherche M. Jean-Marc Belley pour son aide, ses encouragements et les précieux conseils, ainsi que pour son soutien durant toute cette thèse.

Je tiens à remercier M. François Dubeau d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et d'avoir bien voulu rapporter sur ce travail, Virginie charette et Jal Choksi d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont également à tous mes collègues du département de mathématiques qui ont contribué à créer une ambiance cordiale, avec qui j'ai partagé des intérêts mathématiques et eu l'occasion de travailler, discuter et apprendre.

Ma gratitude va à mes parents et ma famille particulièrement Farid et Diego mon petit chat, qui m'ont soutenue et encouragée tout au long de ces années.

Table des matières

Sommaire **iii**

Remerciements **iv**

Table des Matières **vi**

Introduction **1**

Chapitre 1 — Préliminaires **3**

1.1 Généralités 3

1.2 Préliminaires sur l'équation périodique de premier degré avec retard et impulsions 6

1.3 Préliminaires sur l'équation de Duffing presque périodique avec retard et impulsions dépendant de la moyenne de l'état 7

Chapitre 2 — Équation périodique de premier degré avec retard et impulsions dépendant de l'état **13**

2.1 Cas où les instants d'impulsions ne dépendent pas de l'état 13

2.1.1 Principe de contraction sur $\widetilde{NBV}(T)$ 19

2.1.2 Bornes à priori pour $\overline{f}$ 21

2.1.3 Application 24

2.2 Cas où les instants d'impulsions dépendent de l'état 25

2.2.1 Principe de contraction sur $\widetilde{L^1}(T)$ 27

2.2.2 Bornes à priori pour $\overline{f}$ 29

2.2.3 Application 32

Chapitre 3 — Équations de Duffing avec retard et impulsions dépendant de la moyenne de l'état **36**

3.1 Un espace de Hilbert avec une inégalité de type Sobolev 36

3.2 Reformulation du problème 40

3.3 Principaux résultats 42

3.3.1 Principe de contraction sur $\widetilde{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 49

3.3.2 Bornes à priori pour $\overline{f}$ 52

3.3.3 Application 54

3.3.4 Cas particulier 56

Conclusion **58**

Bibliographie **58**

Introduction

Les processus d'évolution sous impulsions, comme rencontrés dans la théorie du contrôle et la dynamique de la population, provoquent souvent une équation avec retard de la forme

$$x'(t) + g(t-\tau, x(t-\tau)) = f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\delta_{t_j(x)}(t) \tag{1}$$

On peut trouver quelques résultats récents sur l'existence et la stabilité des solutions de cette équation dans [4] et [11,13], [17] et [28] dans le cas où les moments d'impulsions $t_j(x)$ sont indépendants de l'état x, tandis que dans [1] et [18], les résultats sont obtenus pour le cas où les impulsions dépendent de l'état. Les processus soumis aux influences T-périodiques pour $T > 0$ ont aussi été étudiés dans le cas où les $t_j(x)$ sont indépendants de l'état. Par exemple le comportement global d'un système logistique périodique avec des perturbations impulsives périodiques est analysé dans [19], tandis que dans [20] l'équation (1) est étudiée dans le contexte de conditions aux bornes périodiques.

Dans le premier chapitre, nous donnons dans la première partie des préliminaires sur l'équation périodique du premier degré avec retard et impulsions dépendant de l'état. Dans la seconde partie, nous commençons l'étude de l'équation de Duffing avec retard et impulsions dépendant de la moyenne de l'état.

Dans le second chapitre, nous montrons que sous certaines conditions, il existe une solution généralisée T-périodique de l'équation (1) et elle est à variation bornée sur $[0, T]$. L'équation logistique avec abattage périodique est donnée comme exemple. L'équation (1) peut être exprimée sans l'addition des impulsions pourvu que nous ajoutions la condition que la solution subit un saut d'amplitude $a_j(x)$ à l'instant $t_j(x)$ pour tout j. Cette notation alternative est souvent la plus utilisée dans la littérature et peut être trouvée dans [1] et [4]. Notre notation, qui est inspirée de celle trouvée dans [11], nous permet de manipuler (1) de façon plus concise par le biais des fonctions généralisées.

Dans le chapitre trois, nous obtenons, pour une constante $c \neq 0$ donnée, les conditions suffisantes pour l'existence d'une solution presque périodique $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (avec une valeur moyenne $\overline{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f$) de l'équation de Duffing :

$$x''(t) + 2cx'(t) + g(x(t-\tau)) = f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\overline{x})\, \delta_{t_j(\overline{x});T_j}(t) \tag{2}$$

avec retard $\tau \in \mathbb{R}$ et impulsions aux instants $t_j(\overline{x}) + kT_j$ ($k \in \mathbb{Z}$) pour $T_j > 0$ ($j = 1, 2, 3, ...$) d'amplitudes $a_j(\overline{x}) \in \mathbb{R}$ et dépendantes de la moyenne de l'état. C'est un important exemple, qui comprend le cas du pendule forcé, de processus dynamique soumis à un forcing impulsionnel presque périodique dépendant de l'état x.
Dans [2] et [23, 29], on peut trouver des résultats récents sur l'existence de solutions presque périodiques de réseaux de neurones et des systèmes d'équations différentielles impulsionnelles. Des résultats sur l'existence de solutions d'équations différentielles impliquant une infinité d'impulsions dépendant de l'état peuvent être trouvés dans [11, 13] par exemple. Ici, (2) implique nombreuses impulsions périodiques qui dépendent de l'état. La somme de ces impulsions donnent des impulsions presque périodiques tout comme la somme des fonctions périodiques qui ne sont pas nécessairement de la même période est presque périodique. La propriété la plus utile d'une fonction presque périodique est sans doute sa valeur moyenne. Ainsi, nous allons nous limiter à la situation où les impulsions dépendent seulement de la valeur moyenne de l'état. En conséquence, il ne sera pas nécessaire d'imposer des conditions de Lipschitz sur les fonctions a_j et t_j comme cela semble nécessaire dans le cas plus général où les impulsions dépendent de l'état. Ces conditions ont été imposées dans [11, 13], dans [7] pour l'équation de Duffing périodique impulsionnelle, dans [8] pour l'équation de Liénard périodique impulsionnelle et dans [5] pour l'équation logistique impulsionnelle périodique.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous ferons l'inventaire de quelques résultats élémentaires qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

1.1 Généralités

On notera $L^1(T)$ pour désigner l'ensemble des fonctions réelles $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles, intégrables au sens de Lebesgue et telles que $x(t+T) = x(t)$ presque partout sur $\mathbb{R}$. $L^1(T)$ sera muni de la norme

$$||x||_1 = \frac{1}{T}\int_0^T |x(s)|ds$$

et la moyenne $\overline{x}$ de $x \in L^1(T)$ s'écrira

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)ds.$$

Une fonction $x \in L^1(T)$ peut être identifiée à sa série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{x}(n)e^{in\omega t}$$

avec $w = \frac{2\pi}{T}$, $i = \sqrt{-1}$ et

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-in\omega t}dt.$$

Ainsi $\hat{x}(0) = \bar{x}$ et puisque x est à valeurs réelles, $\hat{x}(-n)$ est le conjugué complexe de $\hat{x}(n)$.

Deux fonctions T-périodiques sont égales au sens des fonctions généralisées si leurs séries de Fourier ont des coefficients identiques. De plus, la moyenne $\bar{x}$ d'une fonction généralisée T-périodique x est définie comme étant le terme constant dans sa série de Fourier et on écrit $\tilde{x} = x - \bar{x}$. En particulier, la série de Fourier de la fonction delta de Dirac T-périodique δ_{t_0} associée aux impulsions arrivant aux instants $\{t_0 + kT : k \in \mathbb{Z}\}$ pour $t_0 \in [0, T]$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ s'écrit

$$\delta_{t_0}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega(t-t_0)}$$

et donc $\overline{\delta_{t_0}} = 1$ et

$$\widetilde{\delta_{t_0}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\omega(t-t_0)}.$$

Une fonction est dite solution généralisée d'une équation différentielle si en substituant cette fonction dans l'équation, nous avons égalité au sens des fonctions généralisées. Ainsi, au sens des fonctions généralisées, $\widetilde{\delta_{t_0}}$ est la dérivée de la fonction Δ_{t_0} T-périodique définie par

$$\Delta_{t_0}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{in\omega(t-t_0)}}{in\omega} = \begin{cases} \frac{T - 2(t-t_0)}{2} & \text{si } t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \text{si } t = t_0 \text{ ou } t = t_0 + T. \end{cases} \tag{1.1}$$

L'ensemble des fonctions $x \in L^1(T)$ à variation totale $var(x) < \infty$ sur $[0, T]$ et normalisées dans le sens que

$$x(t) = \frac{1}{2}[x(t-) + x(t+)]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, est noté $NBV(T)$. D'après un résultat bien connu de Lebesgue (voir par exemple [15]), toute fonction $x \in NBV(T)$ admet, presque partout, une dérivée $x' \in L^1(T)$. On écrit $C(\mathbb{R}^2)$ pour noter l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues définies sur $\mathbb{R}^2$.

Pour un ensemble quelconque $S \subset L^1(T)$, on note par $\widetilde{S}$ le sous ensemble de $L^1(T)$

donné par $\widetilde{S} = \{x - \bar{x} : x \in S\}$. Tout $x \in NBV(T)$ admet, presque partout, une dérivée $x' \in L^1(T)$ telle que $in\omega\hat{x}(n) = \widehat{x'}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Muni de la variation totale $var(x)$, $\widetilde{NBV}(T)$ est un espace de Banach et tout $x \in \widetilde{NBV}(T)$ satisfait l'inégalité

$$|\hat{x}(n)| \leq \frac{var(x)}{2\pi n} \tag{1.2}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. (Voir par exemple [16].)

Remarque 1. *Pour tout $x \in \widetilde{NBV}(T)$, nous avons pour tout t,*

$$|x\,(t)| \leq \operatorname{var}(x)\,. \tag{1.3}$$

Pour montrer ceci, il suffit de considèrer le cas où $t \in [0, T]$. Puisque $\bar{x} = 0$, il existe $t' \in [0, T]$ tel que $x(t')$ a un signe opposé de $x(t)$ et donc

$$|x\,(t)| \leq |x\,(t) - x\,(t')| \leq \operatorname{var}(x)\,.$$

En général, on a

$$\int_0^T |x'\,(s)|\ ds \leq \operatorname{var}(x)$$

pour tout $x \in \widetilde{NBV}(T)$.

Soit $AC(T)$ la classe des fonctions absolument continues sur $[0, T]$. Une fonction x appartient à $\widetilde{AC}(T)$ (et donc à $\widetilde{NBV}(T)$) si et seulement si elle est l'unique primitive de moyenne nulle sur $[0, T]$ de sa dérivée x', et dans ce cas, on a

$$\int_0^T |x'\,(s)|\ ds = \operatorname{var}(x)\,.$$

(Voir par exemple [22] ou [3]). En particulier, si $\int^t y(s)ds$ désigne l'unique primitive de moyenne nulle de toute fonction $y \in \widetilde{L^1}(T)$ alors

$$\int_0^T |y\,(s)|\ ds = \operatorname{var}\left(\int^t y\,(s)\ ds\right). \tag{1.4}$$

Il suit alors que pour la fonction $f \in L^1(T)$ dans (1),

$$\varphi = \int^t \widetilde{f}(s)\, ds \in \widetilde{AC}(T).$$

Si on note $L^2(T)$ l'ensemble des fonctions de $L^1(T)$ telles que

$$\|x\|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x^2(s)\, ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

alors on a $\widetilde{NBV}(T) \subset L^2(T)$ puisque par (1.2),

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{x}(n)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\frac{\mathrm{var}(x)}{2\pi n}\right|^2 = \frac{\mathrm{var}^2(x)}{12} \tag{1.5}$$

pour tout $x \in NBV(T)$.

1.2 Préliminaires sur l'équation périodique de premier degré avec retard et impulsions

Nous considérons l'équation avec retard et impulsions

$$x'(t) + g(t-\tau, x(t-\tau)) = f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\,\delta_{t_j}(t) \tag{1.6}$$

Au sens des fonctions généralisées, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\widetilde{\delta_{t_j}}$ admet une unique primitive dans $\widetilde{NBV}(T)$ donnée par $\sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\Delta_{t_j}$ pour Δ_{t_j} comme dans (1.1), avec t_j à la place de t_0. Ainsi, pour obtenir une solution généralisée de (1.6) dans $NBV(T)$, il suffit de considérer, pour tous $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $r \in \mathbb{R}$ et $x \in \widetilde{NBV}(T)$ l'équation

$$\widehat{x}(n) = -\frac{\widehat{g_{\tau,r}[x]}(n)}{in\omega} + \widehat{\varphi}(n) + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,r}[x]\,\widehat{\Delta_{t_j}}(n)$$

avec la condition

$$\overline{g_{\tau,r}}[x] = \overline{f} + \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,r}[x]$$

où nous avons les notations abrégées suivantes

$$g_{\tau,r}[x](t) = g(t-\tau, r + x(t-\tau))$$

et

$$a_{j,r}[x] = a_j(r+x).$$

Pour alléger les notations, nous introduisons aussi la fonction suivante $J_{\tau,r}$ sur $\widetilde{NBV(T)}$ définie par

$$J_{\tau,r}(x)(t) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\widehat{g_{\tau,r}[x]}(n)}{in\omega} e^{in\omega t}. \tag{1.7}$$

Il est clair que

$$J_{\tau,r}(x) = -\Delta_0 * g_{\tau,r}[x] \tag{1.8}$$

où la convolution $*$ est définie par

$$(h_1 * h_2)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T h_1(s)\, h_2(t-s)\, ds$$

pour toutes fonctions $h_1, h_2 \in L^1(T)$.

1.3 Préliminaires sur l'équation de Duffing presque périodique avec retard et impulsions dépendant de la moyenne de l'état

Soit $AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la classe des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ presque périodiques au sens de Bohr [10]. Nous allons étudier (2) sous les hypothèses suivantes :

H_1 : $g(u)$ est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition de Lipschitz

$$|g(u_2) - g(u_1)| \leq \gamma\, |u_2 - u_1| \tag{1.9}$$

pour un $\gamma \in [0,\infty[$ fixe et pour tous $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

H_2 : $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de moyenne $\overline{f}$ est telle que l'équation

$$\varphi'' + 2c\varphi' = f - \overline{f} \tag{1.10}$$

admet une solution $\varphi \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ presque périodique, deux fois continûment différentiable et de moyenne $\overline{\varphi} = 0$.

H_3 : Pour chaque $j = 1, 2, 3, ...$ la fonction a_j est continue sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans le segment $[-\alpha_j, \alpha_j]$ où $\alpha_j > 0$ et tel que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < \infty. \tag{1.11}$$

H_4 : Pour chaque $j = 1, 2, 3, ...$ la fonction t_j est continue sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, T_j[$ où $T_j > 0$ et tel que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T_j^2 < \infty. \tag{1.12}$$

H_5 : Pour chaque $j = 1, 2, 3, ...$, $\delta_{t_j(r);T_j}$ la fonction de Dirac T_j-périodique associée aux impulsions T_j-périodiques d'amplitudes $a_j(r)$ arrivant aux instants $t_j(r) + kT_j$ pour tous $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Les propiétés des fonctions presque périodiques peuvent être trouvées dans la plupart des livres d'analyse harmonique (tels que [16], [14] ou [9]). Par la caractérisation de Bohr des fonctions presque périodiques [10], une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dans $AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon, h) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $N(\varepsilon, h)$ dans $\mathbb{R}$ contient une ε-presque période de h. Rappelons qu'une ε-presque période de h consiste en un nombre réel $\sigma_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t - \sigma_\varepsilon) - h(t)| < \varepsilon.$$

En vertu de (1.9) nous avons

$$g \circ h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R}) \tag{1.13}$$

pour tout $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Toute fonction $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ peut être identifiée à une unique série de Fourier

$$h(t) = \sum_{s \in \mathbb{R}} \widehat{h}(s) e^{ist}$$

où $i = \sqrt{-1}$,

$$\widehat{h}(s) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(t) e^{-ist} dt$$

et $\sum_{s \in \mathbb{R}} \left| \widehat{h}(s) \right|^2 < \infty$. De plus, $\widehat{h}(-s)$ est le complexe conjugué de $\widehat{h}(s)$ en vertu du fait que h est une valeur réelle.
Un polynôme trigonométrique réel $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de la forme

$$p(t) = \sum_{s \in \mathbb{R}} \widehat{p}(s) e^{ist}$$

où $\widehat{p}(s) = 0$ sauf pour un nombre fini de $s \in \mathbb{R}$ et $\widehat{p}(-s)$ est le complexe conjugué de $\widehat{p}(s)$. Par rapport à la norme uniforme $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$, la classe de tels polynômes est dense dans $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En outre, $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est complet par rapport à cette norme.

Une fonction généralisée réelle presque périodique q dans $\mathbb{R}$ peut être vue ici comme une série de Fourier $\sum_{s \in \mathbb{R}} \widehat{q}(s) e^{ist}$ telle que $\widehat{q}(s)$ est le complexe conjugué de $\widehat{q}(-s)$. La classe des fonctions généralisées réelles presque périodiques contient clairement $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Deux fonctions généralisées réelles presque périodiques q_1 et q_2 sont égales si

$$\sum_{s \in \mathbb{R}} \left(\widehat{q_2}(s) - \widehat{q_1}(s)\right) \widehat{p}(s) = 0$$

pour tout polynôme trigonométrique $p \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ceci est clairement équivalent à dire que q_1 et q_2 admettent le même développement en série de Fourier. La moyenne $\overline{q}$ d'une fonction généralisée réelle presque périodique q est le terme constant $\widehat{q}(0)$ dans son développement en série de Fourier et on écrit

$$\widetilde{q}(t) = q(t) - \overline{q}. \tag{1.14}$$

Clairement nous avons

$$\overline{q} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} q(t)\, dt$$

lorsque $q \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, le développement en série de Fourier de la fonction de Dirac delta $\delta_{t_j(r);T_j}$ associée aux impulsions arrivant aux instants $t_j(r) + kT_j$ où $k \in \mathbb{Z}$ pour $t_j(r) \in [0, T_j[$, est donné par

$$\delta_{t_j(r);T_j}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\omega_j(t-t_j(r))}$$

où

$$\omega_j = 2\pi/T_j.$$

Ainsi nous avons $\overline{\delta_{t_j(r);T_j}} = 1$ et

$$\widetilde{\delta_{t_j(r);T_j}}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{in\omega_j(t-t_j(r))}.$$

Comme pour une fonction généralisée réelle périodique, une fonction généralisée réelle presque périodique est une solution généralisée d'une équation différentielle si en substituant cette fonction dans l'équation, nous avons égalité au sens des fonctions généralisées. Ainsi, au sens des fonctions généralisées, $\widetilde{\delta_{t_j(r);T_j}}$ est la dérivée de la fonction $\Delta_{t_j(r);T_j}$ T_j-périodique définie par

$$\Delta_{t_j(r);T_j}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{in\omega_j(t-t_j(r))}}{in\omega_j}$$

ce qui est équivalent à

$$\Delta_{t_j(r);T_j}(t) = \begin{cases} [T_j - 2(t - t_j(r))]/2 & \text{si } t_j(r) < t < t_j(r) + T_j \\ 0 & \text{si } t = t_j(r) \text{ ou } t = t_j(r) + T_j. \end{cases}$$

À son tour, $\Delta_{t_j(r);T_j}$ est la dérivée généralisée de la fonction $D_{t_j(r);T_j} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{T_j}{2}, \frac{T_j}{2}\right[$ T_j-périodique donnée par

$$D_{t_j(r);T_j}(t) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{in\omega_j(t-t_j(r))}}{n^2\omega_j^2}$$

et donc

$$D_{t_j(r);T_j}(t) = \frac{6T_j(t - t_j(r)) - 6(t - t_j(r))^2 - T_j^2}{12}$$

pour tout $t \in [t_j(r), t_j(r) + T_j[$.
Soit $E_{t_j(r);T_j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue T_j-périodique donnée par

$$E_{t_j(r);T_j}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}} \frac{e^{in\omega_j(t - t_j(r))}}{in\omega_j(in\omega_j + 2c)} \tag{1.15}$$

qui peut s'écrire aussi

$$E_{t_j(r);T_j}(t) = \left(\frac{T_j e^{-2c(t - t_j(r))}}{2c(e^{-2cT_j} - 1)} + \frac{1}{4c^2} \right) - \frac{(t - t_j(r))}{2c} + \frac{T_j}{4c}$$

pour tout $t \in [t_j(r), t_j(r) + T_j[$. Nous avons

$$\left\| E_{t_j(r);T_j}(t) \right\|_\infty < 2\frac{T_j^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{T_j^2}{12} < \infty. \tag{1.16}$$

De (1.12) et (1.16) il suit que

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r) E_{t_j(r);T_j}(t) \right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left\| E_{t_j(r);T_j}(t) \right\|_\infty \leq \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T_j^2 < \infty \tag{1.17}$$

et donc

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{j=k}^{\infty} a_j(r) E_{t_j(r);T_j}(t) \right\|_\infty \leq \frac{1}{12} \lim_{k \to \infty} \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j T_j^2 = 0. \tag{1.18}$$

Si $E'_{t_j(r);T_j}$ désigne la fonction T_j-périodique définie par

$$E'_{t_j(r);T_j}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}} \frac{e^{in\omega_j(t - t_j(r))}}{(in\omega_j + 2c)}$$

qui est équivalente à

$$E'_{t_j(r);T_j}(t) = \begin{cases} \frac{T_j e^{-2c\left(t - t_j(r)\right)}}{\left(1 - e^{-2cT_j}\right)} - \frac{1}{2c} & \text{si } t_j(r) < t < t_j(r) + T_j \\ \frac{T_j\left(1 + e^{-2cT_j}\right)}{2\left(1 - e^{-2cT_j}\right)} - \frac{1}{2c} & \text{si } t = t_j(r) \ \text{ ou } t = t_j(r) + T_j \end{cases}$$

alors $E'_{t_j(r);T_j}$ est la dérivée généralisée de $E_{t_j(r);T_j}$ et satisfait

$$E'_{t_j(r);T_j}(t) + 2cE_{t_j(r);T_j}(t) = D'_{t_j(r);T_j}(t)$$

ponctulellement pour tout $t \neq t_j(r) + nT_j$ $(n \in \mathbb{Z})$. Ainsi en différenciant les deux côtés de l'égalité précédente, nous obtenons

$$E''_{t_j(r);T_j} + 2cE'_{t_j(r);T_j} = \widetilde{\delta_{t_j(r);T_j}}$$

au sens des fonctions généralisées.

Chapitre 2

Équation périodique de premier degré avec retard et impulsions dépendant de l'état

Dans ce chapitre nous montrons que sous certaines conditions, il existe une unique solution généralisée T-périodique de l'équation (1) et elle est à variation bornée sur $[0, T]$ dans le cas où les impulsions ne dépendent pas de l'état et dans le cas où les impulsions dépendent de l'état. Les résultats de ce chapitre sont parus dans [5].

2.1 Cas où les instants d'impulsions ne dépendent pas de l'état

Si les instants d'impulsions dans l'équation (1) ne dépendent pas de l'état, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2. *Soient $T > 0$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(t, x)$ est T-périodique par rapport à t pour tout $x \in \mathbb{R}$ et satisfait*

$$|g(t, x_2) - g(t, x_1)| \leq A\,|x_2 - x_1| \tag{2.1}$$

pour un $A \geq 0$ et tous $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \in L^1(T)$ et soient $a_j : NBV(T) \to \mathbb{R}$ telles que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x_0)| < \infty$ pour un $x_0 \in NBV(T)$ et satisfont pour tous $j = 1, 2, 3...$

et tous $x_1, x_2 \in NBV(T)$, *la condition*

$$|a_j(x_2) - a_j(x_1)| \leq \lambda_j \left[|\overline{x_2} - \overline{x_1}| + \text{var}(x_2 - x_1)\right] \tag{2.2}$$

où $\lambda_j \geq 0$ *sont des constantes telles que* $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$.
Si $\alpha < 1$ *où*

$$\alpha = T\left(\frac{A}{\sqrt{12}} + 2\Lambda\right) \tag{2.3}$$

alors, pour une suite donnée $\{t_j\}_1^\infty \subset [0, T[$, *il existe pour tous* $\tau, r \in \mathbb{R}$, *une constante* $k_{\tau,r}$ *et une unique fonction* $y_{\tau,r} \in NBV(T)$*de moyenne* $\overline{y_{\tau,r}} = r$, *telle que* $x = y_{\tau,r}$ *est une solution généralisée de l'équation avec retard*

$$x'(t) + g(t - \tau, x(t - \tau)) = f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\, \delta_{t_j}(t) + k_{\tau,r} \tag{2.4}$$

Avant de donner la démonstration de ce théorème qui commence à partir du lemme 5, nous discutons le cas où les fonctions a_j satisfont la condition de Lipshitz (2.2), puis nous donnons un exemple dans le cas où la fonction g ne satisfait pas la condition de Lipshitz (2.1).

Discussion autour du théorème 2

Trouver des fonctions a_j qui satisfont (2.2) est facile comme nous allons montrer maintenant. Pour tous $j = 1, 2, 3...$ et tous $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, soient des fonctions $b_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont la condition de Lipshitz

$$|b_j(r_2) - b_j(r_1)| \leq \lambda_j |r_2 - r_1|$$

où $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$. Soit une suite $\{t_j\}_1^\infty \subset [0, T[$, et définissons les fonctionnelles $a_j : NBV(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ par $a_j(x) = b_j(x(t_j))$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
|a_j(x_2) - a_j(x_1)| &= |b_j(x_2(t_j)) - b_j(x_1(t_j))| \\
&\leq \lambda_j \left[|\overline{x_2} - \overline{x_1}| + |\widetilde{x_2}(t_j) - \widetilde{x_1}(t_j)|\right] \\
&\leq \lambda_j \left[|\overline{x_2} - \overline{x_1}| + \text{var}(x_2 - x_1)\right]
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de

$$|\widetilde{x_2}(t_j) - \widetilde{x_1}(t_j)| \leq var(\widetilde{x_2} - \widetilde{x_1}) = var(x_2 - x_1)$$

d'après la remarque 1.

Habituellement, la fonction g dans (1) ne satisfait pas la condition de Lipshitz (2.1), mais dans le contexte de solutions périodiques, elle peut souvent être modifiée de manière à satisfaire (2.1) sans changer le problème.

Exemple 3. *Soit $a > 0$ une constante, et considèrons l'équation logistique*

$$x'(t) = (\rho(t) - ax(t))\, x(t) \tag{2.5}$$

avec un taux de croissance intrinsèque $\rho(t) > 0$, T-périodique et continue .
L'équation (2.5) est un cas particulier de (1) pour $\tau = 0$, $f = 0$, $a_j = 0$ $(j = 1, 2, 3...)$ et

$$g(t, x) = -(\rho(t) - ax)\, x.$$

Par le théorème de la valeur moyenne, nous avons

$$g(t, x_2) - g(t, x_1) = g_x(t, \theta(t))\,(x_2 - x_1) \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

pour un $\theta(t)$ entre x_1 et x_2, et donc

$$|g(t, x_2) - g(t, x_1)| = |\rho(t) - 2a\theta(t)|\, |x_2 - x_1|\,. \tag{2.6}$$

Soient $\rho_{\max}$ et $\rho_{\min}$ les valeurs maximale et minimale de $\rho(t)$ respectivement. Les équations

$$y'(t) = (\rho_{\max} - ay(t))\, y(t)$$

et

$$y'(t) = (\rho_{\min} - ay(t))\, y(t) \tag{2.7}$$

admettent, respectivement, les solutions

$$y_{\max}(t) = \frac{y_{\max}(0)\, K_{\max}}{y_{\max}(0) + (K_{\max} - y_{\max}(0))\, e^{-t\rho_{\max}}}$$

et

$$y_{\min}(t) = \frac{y_{\min}(0)\, K_{\min}}{y_{\min}(0) + (K_{\min} - y_{\min}(0))\, e^{-t\rho_{\min}}}$$

où

$$K_{\max} = \frac{\rho_{\max}}{a}$$

et

$$K_{\min} = \frac{\rho_{\min}}{a} > 0. \tag{2.8}$$

Mais l'inégalité

$$(\rho_{\min} - az)\, z \leq (\rho(t) - az)\, z \leq (\rho_{\max} - az)\, z \qquad \forall z \geq 0$$

(Avec le fait que $y_{\max}(t) \rightarrow K_{\max}$ et $y_{\min}(t) \rightarrow K_{\min}$ lorsque $t \rightarrow \infty$ indépendamment de $y_{\max}(0) > 0$ et de $y_{\min}(0) > 0$) implique que toute solution T-périodique $x(t)$ de (2.5) doit satisfaire

$$K_{\min} < x(t) < K_{\max} \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.9}$$

Ainsi, si nous cherchons une solution T-périodique non triviale de (2.5), alors nous devons juste étudier le cas

$$g(t,x) = \begin{cases} -(\rho(t) - aK_{\min})\, K_{\min} & \text{si } x < K_{\min} \\ -(\rho(t) - ax)\, x & \text{si } K_{\min} \leq x \leq K_{\max} \\ -(\rho(t) - aK_{\max})\, K_{\max} & \text{si } x > K_{\max} \end{cases}$$

qui par (2.6), satisfait (2.1) pour

$$A = 3\rho_{\max}.$$

Nous allons poursuivre cet exemple plus loin.

Si g satisfait

$$|g(t_2, x_2) - g(t_1, x_1)| \leq A\, |x_2 - x_1| + B\, |t_2 - t_1| \tag{2.10}$$

pour des constantes $A \geq 0, B \geq 0$ et tous $(t_2, x_2), (t_1, x_1) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\operatorname{var}(g(t-\tau, y_{\tau,r}(t-\tau))) \leq A \operatorname{var}(y_{\tau,r}) + BT < \infty.$$

Ainsi sous la condition (2.10) et en vertu de l'équation (2.4), $y'_{\tau,r} \in L^1(T)$ peut être exprimée comme somme de trois fonctions, la première f, la deuxième une fonction de $NBV(T)$ donnée par $-g(t-\tau, y_{\tau,r}(t-\tau))$ et la troisième de la forme $\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,\tau,r}\delta_{t_j}$ où $c_{j,\tau,r} = a_j(y_{\tau,r})$ pour tous $j = 1, 2, 3....$ Nous avons automatiquement (2.10) si simultanèment $g(t,x) = g(x)$ et (2.1) est satisfaite pour un $A \geq 0$ et pour tous $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Si $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x_0)| < \infty$ pour un $x_0 \in NBV(T)$ et si la condition de Lipshitz (2.2) est vérifiée pour des constantes $\lambda_j \geq 0$ telles que $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$, alors par l'inégalité du triangle, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)| < \infty$ pour tout $x \in NBV(T)$. De plus, la constante $k_{\tau,r}$ définie en (2.4), est donnée par

$$k_{\tau,r} = \frac{1}{T}\int_0^T g\left(t, y_{\tau,r}\left(t\right)\right)\ dt - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t\right)\ dt - \sum_{j=1}^{\infty} a_j\left(y_{\tau,r}\right) \tag{2.11}$$

où $x = y_{\tau,r}$ est une solution généralisée de

$$x'(t) + \widetilde{g}(t-\tau, x(t-\tau)) = \widetilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\widetilde{\delta}_{t_j}(t).$$

Pour $\tau \in \mathbb{R}$, nous pouvons éliminer $k_{\tau,r}$ dans (2.4) et obtenir la solution de (1.6) s'il existe un $r_\tau \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overline{g}\left(t, y_{\tau,r_\tau}\left(t\right)\right) = \overline{f}\left(t\right) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\left(y_{\tau,r_\tau}\right)\overline{\delta_{t_j}}\left(t\right)$$

(c-à-d tel que $k_{\tau,r_\tau} = 0$). Nous montrerons un peu plus loin que $\overline{g}(t, y_{\tau,r}(t))$ et $a_j\left(y_{\tau,r}\right)$ sont continues en r, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, une condition nécessaire et suffisante pour que $k_{\tau,r} = 0$ pour $r = r_\tau \in \mathbb{R}$ est d'avoir $\overline{f}$ bornée comme suit

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} \overline{\gamma_\tau}\left(t, y_{\tau,r}\left(t\right)\right) \leq \overline{f} \leq \sup_{r\in\mathbb{R}} \overline{\gamma_\tau}\left(t, y_{\tau,r}\left(t\right)\right) \tag{2.12}$$

où pour tout $x \in NBV(T)$,

$$\overline{\gamma_\tau}\left(t, x\left(t\right)\right) = \overline{g}\left(t-\tau, x\left(t-\tau\right)\right) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j\left(x\right). \tag{2.13}$$

Ceci mène au résultat suivant.

Corollaire 4. *Si dans le contexte du théorème 2, $\overline{f}$ est bornée comme dans (2.12) où $\overline{\gamma}_\tau$ est donnée par (2.13), alors l'équation (1.6) avec retard $\tau \in \mathbb{R}$ admet une solution* *généralisée* $y_\tau \in NBV(T)$.

Si l'inégalité (2.10) est satisfaite pour des constantes $A \geq 0, B \geq 0$ et tous $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $y_\tau' \in L^1(T)$ peut être exprimée comme somme de trois fonctions, la première f, la deuxième une fonction de $NBV(T)$ donnée par $-g(t-\tau, y_\tau(t-\tau))$ et la troisième une fonction de la forme $\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,\tau}\delta_{t_j}$ où $c_{j,\tau} = a_j(y_\tau)$ pour tous $j = 1, 2, 3....$

Dans ce qui suit, nous allons donner la démonstration du théorème 2.

Lemme 5. *Si* $g \in C(\mathbb{R}^2)$ *est* T*-périodique en* t *pour tout* x *et satisfait la condition de Lipshitz (2.1), alors* $J_{\tau,r}$ *est une application de* $\widetilde{NBV}(T)$ *dans* $\widetilde{AC}(T)$.

Preuve. Pour tout $x \in \widetilde{NBV}(T)$, nous avons par (1.8)

$$\operatorname{var}(J_{\tau,r}(x)) = \operatorname{var}(\Delta_0 * g_{\tau,r}[x]) \leq \frac{\operatorname{var}(\Delta_0)}{T}\int_0^T |g_{\tau,r}[x]| = 2\int_0^T |g_{\tau,r}[x]|.$$

Par (2.1) et le fait que $g_{\tau,r}[0] \in L^1(T)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^T |g_{\tau,r}[x]| &\leq \int_0^T (|g_{\tau,r}[x] - g_{\tau,r}[0]| + |g_{\tau,r}[0]|)\\ &\leq A\int_0^T |x - 0| + T\,\|g_{\tau,r}[0]\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Il suit alors que $-g_{\tau,r}[x] \in L^1(T)$ et donc, $var(J_{\tau,r}(x)) < \infty$ (c-à-d. $J_{\tau,r}(x) \in \widetilde{NBV}(T)$). Mais par (1.7), nous avons

$$J_{\tau,r}'(x) = -\widetilde{g_{\tau,r}[x]} \tag{2.14}$$

au sens des fonctions généralisées. (C-à-d. $J_{\tau,r}(x)$ est l'unique primitive de moyenne nulle de $-\widetilde{g_{\tau,r}[x]}$) et donc $J_{\tau,r}(x) \in \widetilde{AC}(T)$. ■

Lemme 6. *Si* $g \in C(\mathbb{R}^2)$ *est* T*-périodique en* t *pour tout* x *et satisfait la condition de Lipshitz (2.1), alors*

$$\operatorname{var}(J_{\tau,r}(y) - J_{\tau,r}(x)) \leq \frac{AT}{\sqrt{12}}\operatorname{var}(y - x) \tag{2.15}$$

pour tous $x, y \in \widetilde{NBV}(T)$.

Preuve. Par (1.4),(2.14) et l'inégalité de Holder, nous avons pour tous $x, y \in \widetilde{NBV}(T)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(J_{\tau,r}(y)-J_{\tau,r}(x)\right) &= \int_0^T \left|\widetilde{g_{\tau,r}[y]}(s)-\widetilde{g_{\tau,r}[x]}(s)\right| ds \\ &\leq T\left\|g_{\tau,r}[y]-g_{\tau,r}[x]\right\|_2 \\ &\leq AT\left\|y-x\right\|_2\end{aligned}$$

et ainsi, à partir de (1.5) nous avons le résultat. ■

2.1.1 Principe de contraction sur $\widetilde{NBV}(T)$

Soit $G_{\tau,r}$ définie dans $\widetilde{NBV}(T)$ par

$$G_{\tau,r}(x)(t) = J_{\tau,r}(x)(t) + \varphi(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,r}[x]\,\Delta_{t_j}(t). \tag{2.16}$$

Proposition 7. *Dans le contexte du théorème 2, si $\alpha < 1$ où α est donné par (2.3), alors $G_{\tau,r}$ est une contraction de $\widetilde{NBV}(T)$ dans lui même.*

Preuve. Pour tous $x, y \in \widetilde{NBV}(T)$, nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(G_{\tau,r}(y)-G_{\tau,r}(x)\right) &\leq \operatorname{var}\left(J_{\tau,r}(y)-J_{\tau,r}(x)\right) \\ &\quad + \operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_{j,r}[y]-a_{j,r}[x]\right)\Delta_{t_j}(t)\right)\end{aligned}$$

où par (2.2),

$$\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_{j,r}[y]-a_{j,r}[x]\right)\Delta_{t_j}\right) \leq 2T\Lambda\operatorname{var}(y-x).$$

Il suit de cette inégalité et de (2.15) que

$$\operatorname{var}\left(G_{\tau,r}(y)-G_{\tau,r}(x)\right) \leq \alpha\operatorname{var}(y-x) \tag{2.17}$$

avec α donné par (2.3). Ainsi $G_{\tau,r}$ est une contraction de $\widetilde{NBV}(T)$ si $\alpha < 1$. ■

Le principe de contraction fournit l'existence d'un unique point fixe $x_{\tau,r} \in \widetilde{NBV}(T)$ de $G_{\tau,r}$ si $\alpha < 1$. Maintenant, nous avons le théorème 2 en prenant $y_{\tau,r} = r + x_{\tau,r} \in NBV(T)$ et $k_{\tau,r}$ comme dans (2.11) cqfd.

Lemme 8. *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a $var(y_{\tau,r} - y_{\tau,\rho}) \to 0$ quand $r \to \rho$.*

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(y_{\tau,r}-y_{\tau,\rho}) &= \operatorname{var}(G_{\tau,r}(y_{\tau,r})-G_{\tau,\rho}(y_{\tau,\rho}))\\ &\le \operatorname{var}(J_{\tau,r}(y_{\tau,r})-J_{\tau,\rho}(y_{\tau,\rho}))\\ &+\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(a_{j,r}[y_{\tau,r}]-a_{j,\rho}[y_{\tau,\rho}])\Delta_{t_j}(t)\right).\end{aligned}$$

En répétant les étapes de la preuve du lemme 6 pour $y = y_{\tau,r}$ et $x = y_{\tau,\rho}$ nous obtenons

$$\operatorname{var}(J_{\tau,r}(y_{\tau,r})-J_{\tau,\rho}(y_{\tau,\rho})) \le AT(r-\rho)+\frac{AT}{\sqrt{12}}\operatorname{var}(y_{\tau,r}-y_{\tau,\rho})$$

et

$$\begin{aligned}&\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(a_{j,r}[y_{\tau,r}]-a_{j,\rho}[y_{\tau,\rho}])\Delta_{t_j}(t)\right)\\ &\le 2T\sum_{j=1}^{\infty}|a_{j,r}[y_{\tau,r}]-a_{j,\rho}[y_{\tau,\rho}]|\\ &\le 2T\Lambda|r-\rho|+2T\Lambda\operatorname{var}(y_{\tau,r}-y_{\tau,\rho}).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\operatorname{var}(y_{\tau,r}-y_{\tau,\rho}) \le \alpha\operatorname{var}(y_{\tau,r}-y_{\tau,\rho})+(AT+2T\Lambda)|r-\rho|$$

pour α donné par (2.3). D'où le résultat si $\alpha < 1$. ■

Par (2.2) et le lemme précédent $a_{j,r}[y_{\tau,r}]$ est continue en r. Il suit de (1.3) et du lemme ci-dessus que $y_{\tau,r} \to y_{\tau,\rho}$ uniformément si $r \to \rho$. Pour $r \in \mathbb{R}$ et $z \in \widetilde{NBV}(T)$, la substitusion de $r+\varphi+z$ à la place de x dans (1.6) fournit l'équation équivalente suivante :

$$z'(t)+g(t-\tau,r+\varphi(t-\tau)+z(t-\tau))=\overline{f}+\sum_{j=1}^{\infty}a_j(r+\varphi+z)\delta_{t_j}(t).$$

Pour résoudre cette équation, il suffit de résoudre simultanément les équations

$$z'(t) + \widetilde{g_{\tau,r}}[\varphi + z](t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,r}[\varphi + z]\widetilde{\delta_{t_j}}(t). \tag{2.18}$$

et

$$\overline{g_{\tau,r}}[\varphi + z] = \overline{f} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,r}[\varphi + z] \tag{2.19}$$

D'après ce qui précède, $z = z_{\tau,r}$ où $z_{\tau,r} = y_{\tau,r} - \varphi - r$ est l'unique solution de (2.18) et $z_{\tau,r} \to z_{\tau,\rho}$ uniformément quand $r \to \rho$. Puisque $g \in C(\mathbb{R}^2)$ alors $\overline{g_{\tau,r}}[\varphi + z_{\tau,r}] = \frac{1}{T}\int_0^T g_{\tau,r}[\varphi(t)+z_{\tau,r}(t)]\,dt$ est continue en $r \in \mathbb{R}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il est nécessaire et suffisant que (2.12) soit vérifiée pour qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $z_{\tau,r}$ est aussi solution de (2.19). Ce qui complète la démonstration du théorème 2.

2.1.2 Bornes à priori pour $\overline{f}$

Les bornes en (2.12) sont difficiles à calculer, il est utile d'avoir des bornes à priori plus pratiques qui impliquent celles de (2.12). Nous avons le théorème suivant.

Théorème 9. *Soient $T > 0$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique en t pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui satisfait la condition de Lipshitz (2.1) pour un certain $A \geq 0$ et pour tous $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \in L^1(T)$ et soient $a_j : NBV(T) \to \mathbb{R}$ telles que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x_0)| < \infty$ pour un $x_0 \in NBV(T)$ et satisfont pour tous $j = 1, 2, 3...$ et tous $x_1, x_2 \in NBV(T)$, la condition de Lipshitz (2.2) avec $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$.*
Si $\alpha < 1$ où α est donnée par (2.3) et si

$$\left.\begin{array}{l} inf_{r\in\mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_\tau}(t, r + \varphi) + 2T(\frac{A+\Lambda}{1-\alpha}) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(r)|\right] + \Omega \\ \leq \overline{f} \\ \leq sup_{r\in\mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_\tau}(t, r + \varphi) - 2T(\frac{A+\Lambda}{1-\alpha}) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(r)|\right] - \Omega \end{array}\right\} \tag{2.20}$$

où $\varphi \in NBV(T)$ est l'unique primitive de $(f - \overline{f})$ de moyenne zéro, $\overline{\gamma}_\tau$ est donnée par (2.13) et Ω par

$$\Omega = \alpha\,(\frac{A + \Lambda}{1 - \alpha})var(\varphi), \tag{2.21}$$

alors l'équation (1.6) avec retard $\tau \in \mathbb{R}$ admet une solution généralisée $y_\tau \in NBV(T)$.

Preuve. Soit $H_{\tau,r}$ la fonctionnelle définie sur $\widetilde{NBV}(T)$ par

$$H_{\tau,r}(z) = G_{\tau,r}(\varphi + z) - \varphi. \tag{2.22}$$

Nous avons par (2.17),

$$\operatorname{var}(H_{\tau,r}(z) - H_{\tau,r}(y)) \leq \alpha \operatorname{var}(z - y) \tag{2.23}$$

pour tous $y, z \in \widetilde{NBV}(T)$ et par suite si $\alpha < 1$, alors $H_{\tau,r}$ est une contraction sur $\widetilde{NBV}(T)$ avec un point fixe unique $z_{\tau,r}$ donné par les itérations de Banach-Picard :

$$z_{\tau,r} = \lim_{n\to\infty} H^n_{\tau,r}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \left(H^{m+1}_{\tau,r}(z) - H^m_{\tau,r}(z)\right) + H^n_{\tau,r}(z) \tag{2.24}$$

pour tout $z \in \widetilde{NBV}(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\operatorname{var}(z_{\tau,r}) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \operatorname{var}\left(H^{m+1}_{\tau,r}(z) - H^m_{\tau,r}(z)\right) + \operatorname{var}\left(H^n_{\tau,r}(z)\right)$$

et donc par (2.23)

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(z_{\tau,r}) &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \alpha^m \operatorname{var}(H_{\tau,r}(z) - z) + \operatorname{var}\left(H^n_{\tau,r}(z)\right) \\
&= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \operatorname{var}(H_{\tau,r}(z) - z) + \operatorname{var}\left(H^n_{\tau,r}(z)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, par (2.1) et (1.3),

$$\begin{aligned}
\overline{g_{\tau,r}}[\varphi + z_{\tau,r}] &\leq \overline{g_{\tau,r}}[\varphi] + A \operatorname{var}(z_{\tau,r}) \\
&\leq \overline{g_{\tau,r}}[\varphi] + A\frac{\alpha^n}{1-\alpha} \operatorname{var}(H_{\tau,r}(z) - z) + A \operatorname{var}\left(H^n_{\tau,r}(z)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{g_{\tau,r}}[\varphi + z_{\tau,r}] &\geq \overline{g_{\tau,r}}[\varphi] - A \operatorname{var}(z_{\tau,r}) \\
&\geq \overline{g_{\tau,r}}[\varphi] - A\frac{\alpha^n}{1-\alpha} \operatorname{var}(H_{\tau,r}(z) - z) - A \operatorname{var}\left(H^n_{\tau,r}(z)\right)
\end{aligned}$$

et par (2.2)

$$
\begin{aligned}
-a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right] &\leq -a_{j,r}\left[\varphi\right]+\lambda_j \operatorname{var}\left(z_{\tau,r}\right)\\
&\leq -a_{j,r}\left[\varphi\right]+\lambda_j \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\operatorname{var}(H_{\tau,r}\left(z\right)-z)+\lambda_j \operatorname{var}\bigl(H^n_{\tau,r}\left(z\right)\bigr)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right] &\geq -a_{j,r}\left[\varphi\right]-\lambda_j \operatorname{var}\left(z_{\tau,r}\right)\\
&\geq -a_{j,r}\left[\varphi\right]-\lambda_j \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\operatorname{var}(H_{\tau,r}\left(z\right)-z)-\lambda_j \operatorname{var}\bigl(H^n_{\tau,r}\left(z\right)\bigr).
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]\leq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi\right]+\Omega_{n,r}\left(z\right)
$$

et

$$
\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]\geq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi\right]-\Omega_{n,r}\left(z\right)
$$

où

$$
\Omega_{n,r}\left(z\right)=\left(A+\Lambda\right)\left[\left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right)\operatorname{var}\left(H_{\tau,r}\left(z\right)-z\right)+\operatorname{var}\left(H^n_{\tau,r}\left(z\right)\right)\right].
$$

ainsi, si

$$
\begin{aligned}
&\inf\nolimits_{r\in\mathbb{R}}\left[\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi\right]+\Omega_{n,r}\left(z\right)\right]\\
&\leq \overline{f}\\
&\leq \sup\nolimits_{r\in\mathbb{R}}\left[\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi\right]-\Omega_{n,r}\left(z\right)\right]
\end{aligned}
$$

pour un $z\in\widetilde{NBV}\left(T\right)$ et un $n\in\mathbb{N}$ alors (2.12) est satisfaite. Puisque $H_{\tau,r}\left(-\varphi\right)=\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[0\right]\Delta_{t_j}$, alors $\Omega_{n,r}\left(z\right)$ devient pour $z=-\varphi$ and $n=1$,

$$
\begin{aligned}
\Omega_{1,r}\left(-\varphi\right)&=\left(A+\Lambda\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}\operatorname{var}\left(\varphi+\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[0\right]\Delta_{t_j}\right)\\
&\quad+\left(A+\Lambda\right)\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[0\right]\Delta_{t_j}\right)\\
&\leq \left(A+\Lambda\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\operatorname{var}\left(\varphi\right)\\
&\quad+2T\left(A+\Lambda\right)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{j,r}\left[0\right]\right|.
\end{aligned}
$$

Ainsi (2.12) est satisfaite si nous avons (2.20) avec Ω donné par (2.21).

2.1.3 Application

Dans le contexte de l'équation logistique, nous avons ce qui suit.

Exemple 10. *Soit $a > 0$ une constante. Considérons l'équation logistique*

$$x'(t) = (\rho(t) - ax(t))\, x(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\, \delta_{t_j}(t) \tag{2.25}$$

régissant une population avec un taux de croissance intrinsèque $\rho(t) > 0$ continue et T-périodique, et des abattages T-périodiques aux instants $t_j \in]0, T[$ ($t_j < t_k$ si $j < k$) d'amplitudes $a_j(x)$ dépendant de l'état définies par

$$a_j(x) = -\lambda_j \left[x(t_j-) - K_{\min}\right]_+ \qquad \forall x \in NBV(T) \tag{2.26}$$

pour des $t_j \in]0, T[$ fixes et $\lambda_j \in [0, 1[$. De l'exemple 3 et par (2.26), il suit que toute solution $x(t)$ de (2.25) T-périodique satisfait (2.9) et par suite, puisque nous voulons $r = \overline{x}(t)$, il suffit de considérer $K_{\min} \leq r \leq K_{\max}$ dans (2.20). De plus, (2.2) est satisfaite d'après la remarque 1, $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ que nous supposons finies, $\alpha = T(2\Lambda + A/\sqrt{12})$, $\tau = 0$, $x_0 = K_{\min}$, $A = 3\rho_{\max}$ et puisque $f = 0$, nous avons $\varphi = 0$, $\Omega = 0$, et

$$\overline{\gamma_\tau}(t, r + \varphi) = -(\overline{\rho} - ar)\, r + \Lambda r - \Lambda K_{\min} = -\left[(\overline{\rho} - \Lambda) - ar\right] r - \Lambda K_{\min}$$

pour tout $r \in [K_{\min}, K_{\max}]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\inf_{r \in \mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_\tau}(t, r + \varphi) + 2T\left(\frac{A + \Lambda}{1 - \alpha}\right) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(r)|\right] + \Omega \\
&\leq \inf_{K_{\min} \leq r \leq K_{\max}} \left[-\left[(\overline{\rho} - \Lambda) - ar\right] r + 2T\left(\frac{3\rho_{\max} + \Lambda}{1 - \alpha}\right) \Lambda r\right] \\
&- \Lambda K_{\min}\left(1 + 2T\left(\frac{A + \Lambda}{1 - \alpha}\right)\right) \\
&= \inf_{K_{\min} \leq r \leq K_{\max}} -\left[\left(\overline{\rho} - \left(1 + 2T\frac{3\rho_{\max} + \Lambda}{1 - \alpha}\right)\Lambda\right) - ar\right] r \\
&- \Lambda K_{\min}\left(1 + 2T\left(\frac{A + \Lambda}{1 - \alpha}\right)\right)
\end{aligned}$$

et donc, puisque $0 < aK_{\min} = \rho_{\min} \leq \overline{\rho} \leq \rho_{\max} = aK_{\max}$*, nous avons :*

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_{\tau}}\left(t, r+\varphi\right) + 2T\left(\frac{A+\Lambda}{1-\alpha}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_j\left(r\right)\right| \right] + \Omega \leq 0$$

si Λ *est assez petit. De même*

$$\begin{aligned}
&\sup_{r\in\mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_{\tau}}\left(t, r+\varphi\right) - 2T\left(\frac{A+\Lambda}{1-\alpha}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_j\left(r\right)\right| \right] - \Omega \\
&\geq \sup_{K_{\min}\leq r\leq K_{\max}} - \left[\left(\overline{\rho} - \left(1 - 2T\frac{3\rho_{\max}+\Lambda}{1-\alpha}\right)\Lambda\right) - ar \right] r \\
&- \Lambda K_{\min}\left(1 - 2T\left(\frac{A+\Lambda}{1-\alpha}\right)\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{r\in\mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_{\tau}}\left(t, r+\varphi\right) - 2T\left(\frac{A+\Lambda}{1-\alpha}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_j\left(r\right)\right| \right] + \Omega \geq 0$$

si Λ *est assez petit. Puisque* $\overline{f} = 0$*, il suit que si* $\alpha < 1$ *et si* Λ *est assez petit alors l'équation logistique (2.25) admet une solution généralisée* T*-périodique dans* $NBV(T)$*.*

2.2 Cas où les instants d'impulsions dépendent de l'état

On considère maintenant le cas le plus difficile où, pour tout j, les instants d'impulsions sont fonctions de l'état x. Des résultats similaires à ceux ci-dessous sont obtenus en cherchant des solutions non dans $NBV(T)$ mais dans $L^1(T)$.

Théorème 11. *Soient* $T > 0$ *et* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $g(t,x)$ *est* T*-périodique par rapport à* t *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et telle que la condition de Lipschitz (2.1) est satisfaite pour un certain* $A > 0$ *et pour tous* $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*. On suppose que* $f \in L^1(T)$ *et pour tous* $j = 1, 2, 3...$*, soient les fonctionnelles* $a_j : L^1(T) \to [-A_j, A_j]$ *pour un certain* $A_j \geq 0$ *tel que* $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < \infty$ *et* $t_j : L^1(T) \to [0, T[$ *sont telles que*

$$|a_j(y) - a_j(x)| \leq \mu_j \parallel y - x \parallel_1 \tag{2.27}$$

et
$$|t_j(y) - t_j(x)| \leq \nu_j \parallel y - x \parallel_1 \tag{2.28}$$
pour tous $x, y \in L^1(T)$ et des constantes $\mu_j, \nu_j \in [0, \infty[$.
Si $\Lambda' < \infty$ et $\alpha' < 1$ où
$$\Lambda' = \sum_{j=1}^{\infty}(\frac{\mu_j T}{4} + 2A_j\nu_j) \tag{2.29}$$
et
$$\alpha' = \frac{AT}{4} + \Lambda' \tag{2.30}$$
alors il existe pour tous $\tau, r \in \mathbb{R}$, une constante $k_{\tau,r}$ et une unique fonction $y_{\tau,r} \in NBV(T)$ de moyenne $\overline{y_{\tau,r}} = r$, telle que $x = y_{\tau,r}$ est une solution pour l'équation avec retard
$$x'(t) + g(t - \tau, x(t - \tau)) = f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)\delta_{t_j(x)}(t) + k_{\tau,r} \tag{2.31}$$

Preuve. Nous supposons que les fonctionnelles $a_j : L^1(T) \to [-A_j, A_j]$ pour un $A_j \geq 0$ tel que $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < \infty$ et $t_j : L^1(T) \to [0, T[$ satisfont les conditions de Lipschitz (2.27) et (2.28) pour tous $x, y \in L^1(T)$ et des constantes $\mu_j, \nu_j \in [0, \infty[$ telles que $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j < \infty$ et $\sum_{j=1}^{\infty} A_j\nu_j < \infty$. Alors
$$\left\| a_j(y)\Delta_{t_j(y)} - a_j(x)\Delta_{t_j(x)} \right\|_1 \leq \lambda_j' \|y - x\|_1 \tag{2.32}$$
pour tous $x, y \in NBV(T)$ et $\lambda_j' \geq 0$ tel que $\Lambda' = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j' < \infty$, comme nous allons montrer.
Sans perte de généralité, nous supposons que $0 \leq t_j(x) \leq t_j(y) < T$. Puisque $\left|\Delta_{t_j}\right| \leq T/2$, nous avons (par l'inégalité du triangle)
$$\left| a_j(y)\Delta_{t_j(y)} - a_j(x)\Delta_{t_j(x)} \right| \leq A_j T$$
et donc
$$\begin{aligned}\int_{t_j(x)}^{t_j(y)} \left| a_j(y)\Delta_{t_j(y)}(s) - a_j(x)\Delta_{t_j(x)}(s) \right| ds &\leq A_j T \left| t_j(y) - t_j(x) \right| \\ &\leq A_j\nu_j T \|y - x\|_1 .\end{aligned}$$

De plus, sur $]t_j(y), t_j(x)+T[$ nous avons par (1.1)

$$\begin{aligned}
&\left|a_j(y)\Delta_{t_j(y)} - a_j(x)\Delta_{t_j(x)}\right| \\
&\leq \left|(a_j(y) - a_j(x))\Delta_{t_j(y)}\right| + \left|a_j(x)\left(\Delta_{t_j(y)} - \Delta_{t_j(x)}\right)\right| \\
&\leq \mu_j \|y-x\|_1 \left|\Delta_{t_j(y)}\right| + A_j\left|t_j(y) - t_j(x)\right| \\
&\leq \left(\mu_j\left|\Delta_{t_j(y)}\right| + A_j\nu_j\right)\|y-x\|_1
\end{aligned}$$

ainsi, puisque

$$\int_{t_j(x)}^{t_j(x)+T}\left|\Delta_{t_j(x)}\right| = \frac{T^2}{4}$$

nous avons

$$\int_{t_j(y)}^{t_j(x)+T}\left|a_j(y)\Delta_{t_j(y)}(s) - a_j(x)\Delta_{t_j(x)}(s)\right| ds \leq T\left(\frac{\mu_j T}{4} + A_j\nu_j\right)\|y-x\|_1 .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\left\|a_j(y)\Delta_{t_j(y)} - a_j(x)\Delta_{t_j(x)}\right\|_1 \\
&\leq \frac{1}{T}\int_{t_j(x)}^{t_j(y)}\left|a_j(y)\Delta_{t_j(y)}(s) - a_j(x)\Delta_{t_j(x)}(s)\right| ds \\
&+ \frac{1}{T}\int_{t_j(y)}^{t_j(x)+T}\left|a_j(y)\Delta_{t_j(y)}(s) - a_j(x)\Delta_{t_j(x)}(s)\right| ds \\
&\leq \left(\frac{\mu_j T}{4} + 2A_j\nu_j\right)\|y-x\|_1
\end{aligned}$$

et nous avons (2.32) pour

$$\lambda_j' = \frac{\mu_j T}{4} + 2A_j\nu_j.$$

Pour finir la preuve du théorème 11, nous avons besoin du principe de contraction pour montrer l'existence d'un point fixe de $H_{\tau,r}$.

2.2.1 Principe de contraction sur $\widetilde{L^1}(T)$

Proposition 12. *$H_{\tau,r}$ est une fonctionnelle de $\widetilde{L^1}(T)$ dans lui même et telle que*

$$\left\|H_{\tau,r}(y) - H_{\tau,r}(x)\right\|_1 \leq \alpha' \|y-x\|_1 \tag{2.33}$$

pour α' donné par (2.30) et tous $x, y \in \widetilde{L^1}(T)$.

Preuve. La substitution de tous $x, y \in \widetilde{L^1}(T)$ dans (2.16) donne pour $H_{\tau,r}$ donnée par (2.22)

$$\begin{aligned}\|H_{\tau,r}(y) - H_{\tau,r}(x)\|_1 &\leq \|J_{\tau,r}(\varphi + y) - J_{\tau,r}(\varphi + x)\|_1 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|a_{j,r}[\varphi + y]\,\Delta_{t_{j,r}[\varphi+y]} - a_{j,r}[\varphi + x]\,\Delta_{t_{j,r}[\varphi+x]}\right\|_1\end{aligned}$$

où $t_{j,r}[z] = t_j(r + z)$ pour tous $z \in \widetilde{L^1}(T)$. Nous avons par (1.1) et (2.1),

$$\begin{aligned}\|J_{\tau,r}(\varphi + y) - J_{\tau,r}(\varphi + x)\|_1 &= \|\Delta_0 * (g_{\tau,r}[\varphi + y] - g_{\tau,r}[\varphi + x])\|_1 \\ &\leq \|\Delta_0\|_1 \|g_{\tau,r}[\varphi + y] - g_{\tau,r}[\varphi + x]\|_1 \\ &= \frac{T}{4} \|g_{\tau,r}[\varphi + y] - g_{\tau,r}[\varphi + x]\|_1 \\ &\leq \frac{AT}{4} \|y - x\|_1\end{aligned}$$

et cette inégalité en conjonction avec (2.32) fournit (2.33) pour α' donné par (2.30). Il en découle que $H_{\tau,r}$ est une application de $\widetilde{L^1}(T)$ dans lui même.

Si nous avons $\alpha' < 1$ alors (2.33) implique que $H_{\tau,r}$ est une contraction sur $\widetilde{L^1}(T)$ elle admet un point fixe unique $z_{\tau,r} \in \widetilde{L^1}(T)$. Ainsi, nous avons le théorème 11 en prenant $y_{\tau,r} = r + \varphi + z_{\tau,r}$ et $k_{\tau,r}$ comme dans (2.11), et en observant qu'à partir du (2.16) (avec t_j dépendent de l'état) nous avons $y_{\tau,r} = G_{\tau,r}(y_{\tau,r}) \in \widetilde{NBV}(T)$ et par suite $y'_{\tau,r} \in \widetilde{L^1}(T)$. Ce qui complète la preuve du théorème 11.

Remarque 13. *Dans le contexte du théorème 11, la dérivée généralisée $y'_{\tau,r}$ peut être exprimée comme somme de fonctions dans $L^1(T)$ données par $f(t) - g(t - \tau, y_{\tau,r}(t - \tau))$ et en terme de $\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,\tau,r}\delta_{t_{j,\tau,r}} + k_{\tau,r}$ où $c_{j,\tau,r} = a_j(y_{\tau,r})$ et $t_{j,\tau,r} = t_j(y_{\tau,r})$ pour tous $j = 1, 2, 3, \cdots$. Encore $k_{\tau,r}$ de (2.31) est donnée par (2.11) et $\sum_{j=1}^{\infty} |c_{j,\tau,r}| < \infty$.*

Par un argument similaire à celui ci-dessus, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 14. *Si dans le contexte du théorème 11, l'inégalité (2.12) est vérifiée avec $\overline{\gamma_\tau}$ donné par (2.13), alors l'équation (1) avec retard $\tau \in \mathbb{R}$ admet une solution généralisée $y_\tau \in NBV(T)$.*

La dérivée généralisée $y'_{\tau,r}$ dans le corollaire ci-dessus peut être exprimée comme somme de fonctions dans $L^1(T)$ données par $f(t) - g(t-\tau, y_\tau(t-\tau))$ et en terme de $\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,\tau}\delta_{t_{j,\tau}}$ où $c_{j,\tau} = a_j(y_\tau)$ et $t_{j,\tau} = t_j(y_\tau)$ pour tous $j = 1, 2, 3, \cdots$.

2.2.2 Bornes à priori pour $\overline{f}$

L'évalution des bornes dans (2.12) étant en général très difficle, nous pouvons obtenir des bornes à priori pour $\overline{f}$ qui impliquent la condition (2.12). Nous avons le théorème suivant comme résultat.

Théorème 15. *Soient $T > 0$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $g(t,x)$ est une fonction continue T-périodique en t pour tout $x \in \mathbb{R}$ et telle que la condition de Lischitz (2.1) est satisfaite pour un $A \geq 0$ et tous $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \in L^1(T)$ et, pour $j = 1, 2, 3, \cdots$, soient les fonctionnelles $a_j : L^1(T) \to [-A_j, A_j]$ pour un $A_j \geq 0$ tel que $\sum_{j=1}^{\infty} A_j < \infty$, et $t_j : L^1(T) \to [0, T[$ satisfont les conditions (2.27) et (2.28) pour tous $x, y \in L^1(T)$ et des constantes $\mu_j \geq 0$ et $\nu_j \geq 0$. Si $\Lambda' < \infty$ et $\alpha' < 1$ où Λ' et α' sont donnés par (2.29) et (2.31) et si*

$$\left.\begin{array}{l} \inf_{r\in\mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_\tau}(t, r+\varphi) + \frac{T}{4}\left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right)\sum_{j=1}^{\infty}|a_j(r)|\right] + \Omega' \\ \leq \overline{f} \\ \leq \sup_{r\in\mathbb{R}} \left[\overline{\gamma_\tau}(t, r+\varphi) - \frac{T}{4}\left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right)\sum_{j=1}^{\infty}|a_j(r)|\right] - \Omega' \end{array}\right\} \tag{2.34}$$

où φ est l'unique primitive de $\left(f - \overline{f}\right)$ de moyenne nulle, $\overline{\gamma_\tau}$ est donnée par (2.13), Γ par

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \tag{2.35}$$

et Ω' par

$$\Omega' = \alpha' \left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right) \|\varphi\|_1, \tag{2.36}$$

alors l'équation (1) avec retard $\tau \in \mathbb{R}$ admet une solution généralisée $y_\tau \in NBV(T)$.

Pour la preuve, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 16. *Si $\alpha' < 1$ alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\|z_{\tau,r} - z_{\tau,\rho}\|_1 \to 0$ lorsque $r \to \rho$.*

Preuve. En procédant de la même manière que dans la preuve de la Proposition 12, nous avons pour $\varphi + z_{\tau,\rho} = x_{\tau,\rho}$

$$\begin{aligned}
\|z_{\tau,r} - z_{\tau,\rho}\|_1 &= \|H_{\tau,r}(z_{\tau,r}) - H_{\tau,\rho}(z_{\tau,\rho})\|_1 \\
&\leq \|\Delta_0 * (g_{\tau,r}[x_{\tau,r}] - g_{\tau,\rho}[x_{\tau,\rho}])\|_1 \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \left\| a_{j,r}[x_{\tau,r}] \Delta_{t_{j,r}[x_{\tau,r}]} - a_{j,\rho}[x_{\tau,\rho}] \Delta_{t_{j,\rho}[x_{\tau,\rho}]} \right\|_1 \\
&\leq \alpha' \|(r + x_{\tau,r}) - (\rho + x_{\tau,\rho})\|_1 \\
&\leq \alpha' \|z_{\tau,r} - z_{\tau,\rho}\|_1 + \alpha' |r - \rho|
\end{aligned}$$

et par suite $\|z_{\tau,r} - z_{\tau,\rho}\|_1 \to 0$ quand $r \to \rho$ si $\alpha' < 1$. ■

Par le lemme 16 et (2.1), si $\alpha' < 1$ alors $\overline{g_{\tau,r}}[\varphi + z_{\tau,r}]$ est continue en $r \in \mathbb{R}$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédaires, il faut et il suffit que (2.12) soit vérifiée pour qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $z = z_{\tau,r}$ est aussi une solution de (2.19).

Nous remplaçons maintenant les bornes en (2.12) (avec $r + \varphi + z_{\tau,r}$ à la place de $y_{\tau,r}$) par des bornes à priori plus pratiques.

Si nous supposons que $\alpha' < 1$ alors $H_{\tau,r}$ est une contraction sur $\widetilde{L^1}(T)$ avec un point fixe unique $z_{\tau,r}$ donné par les itérations de Banach-Picard (2.24) pour tout $z \in \widetilde{L^1}(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|z_{\tau,r}\|_1 &= \left\| \sum_{m=n}^{\infty} \left(H_{\tau,r}^{m+1}(z) - H_{\tau,r}^{m}(z) \right) + H_{\tau,r}^{n}(z) \right\|_1 \\
&\leq \sum_{m=n}^{\infty} \left\| H_{\tau,r}^{m+1}(z) - H_{\tau,r}^{m}(z) \right\|_1 + \left\| H_{\tau,r}^{n}(z) \right\|_1
\end{aligned}$$

et donc par (2.33)

$$\begin{aligned}
\|z_{\tau,r}\|_1 &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \alpha'^m \|H_{\tau,r}(z) - z\|_1 + \left\| H_{\tau,r}^{n}(z) \right\|_1 \\
&= \frac{\alpha'^n}{1 - \alpha'} \|H_{\tau,r}(z) - z\|_1 + \left\| H_{\tau,r}^{n}(z) \right\|_1 .
\end{aligned}$$

Alors par (2.1),

$$\begin{aligned}\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right] &\leq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]+A\left\|z_{\tau,r}\right\|_1\\ &\leq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]+A\frac{\alpha'^n}{1-\alpha'}\left\|H_{\tau,r}\left(z\right)-z\right\|_1+A\left\|H^n_{\tau,r}\left(z\right)\right\|_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right] &\geq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-A\left\|z_{\tau,r}\right\|_1\\ &\geq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-A\frac{\alpha'^n}{1-\alpha'}\left\|H_{\tau,r}\left(z\right)-z\right\|_1-A\left\|H^n_{\tau,r}\left(z\right)\right\|_1\end{aligned}$$

et par (2.27)

$$\begin{aligned}-a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right] &\leq -a_{j,r}\left[\varphi\right]+\mu_j\left\|z_{\tau,r}\right\|_1\\ &\leq -a_{j,r}\left[\varphi\right]+\mu_j\frac{\alpha'^n}{1-\alpha'}\left\|H_{\tau,r}\left(z\right)-z\right\|_1+\mu_j\left\|H^n_{\tau,r}\left(z\right)\right\|_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right] &\geq -a_{j,r}\left[\varphi\right]-\mu_j\left\|z_{\tau,r}\right\|_1\\ &\geq -a_{j,r}\left[\varphi\right]-\mu_j\frac{\alpha'^n}{1-\alpha'}\left\|H_{\tau,r}\left(z\right)-z\right\|_1-\mu_j\left\|H^n_{\tau,r}\left(z\right)\right\|_1.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]\leq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi\right]+\Omega'_{n,r}\left(z\right)$$

et

$$\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi+z_{\tau,r}\right]\geq \overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left(\varphi\right)-\Omega'_{n,r}\left(z\right)$$

où

$$\Omega'_{n,r}\left(z\right)=\left(A+\Gamma\right)\left[\left(\frac{\alpha'^n}{1-\alpha'}\right)\left\|H_{\tau,r}\left(z\right)-z\right\|_1+\left\|H^n_{\tau,r}\left(z\right)\right\|_1\right]$$

avec Γ donné par (2.35). Ainsi, si

$$\begin{aligned}&\inf\nolimits_{r\in\mathbb{R}}\left[\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi\right]+\Omega'_{n,r}\left(z\right)\right]\\ &\leq\overline{f}\\ &\leq\sup\nolimits_{r\in\mathbb{R}}\left[\overline{g_{\tau,r}}\left[\varphi\right]-\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,r}\left[\varphi\right]-\Omega'_{n,r}\left(z\right)\right]\end{aligned}$$

pour un $z \in \widetilde{NBV}(T)$ et un $n \in \mathbb{N}$ alors (2.12) (avec $r + \varphi + z_{\tau,r}$ à la place de $y_{\tau,r}$ et t_j dépendent de l'état) est satisfaite. Puisque $H_{\tau,r}(-\varphi) = \sum a_{j,r}[0]\,\Delta_{t_{j,r}[0]}$, alors $\Omega'_{n,r}(z)$ devient, pour $z = -\varphi$ et $n = 1$,

$$
\begin{aligned}
\Omega'_{1,r}(-\varphi) = \alpha' \left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right) & \left\| \varphi + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,r}[0]\,\Delta_{t_{j,r}[0]} \right\|_1 \\
& + (A+\Gamma) \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,r}[0]\,\Delta_{t_{j,r}[0]} \right\|_1 \\
& \leq \alpha' \left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right) \|\varphi\|_1 \\
& + \left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right) \sum_{j=1}^{\infty} |a_{j,r}[0]| \left\|\Delta_{t_{j,r}[0]}\right\|_1
\end{aligned}
$$

et donc puisque $\left\|\Delta_{t_{j,r}[0]}\right\|_1 = T/4$,

$$
\Omega'_{1,r}(-\varphi) = \alpha' \left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right) \|\varphi\|_1 + \frac{T}{4}\left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'}\right) \sum_{j=1}^{\infty} |a_{j,r}[0]|\,.
$$

Alors (2.12) est satisfaite si nous avons (2.34) avec Ω' donné par (2.36). Ce qui démontre le théorème 15.

2.2.3 Application

Exemple 17. *Soient $a > 0$ une constante et $x \in NBV(T)$ une solution périodique de (2.5), la solution de (2.7) avec la condition initiale*

$$
y_{\min}(0) = \overline{x}
$$

est donnée par

$$
y_{\min}(t) = \frac{\overline{x}K_{\min}}{\overline{x} + (K_{\min} - \overline{x})\,e^{-t\rho_{\min}}}
$$

et puisque

$$
y_{\min}(2T) \leq x(t) \qquad \forall t \geq 0.
$$

(par le fait que $x(t)$ va prendre des valeurs plus grandes que $\overline{x}$ en certains points sur $[0,T]$) et

$$K_{\min} < y_{\min}(2T) \leq x(t)$$

nous obtenons par (2.8)

$$0 < K_{\min} < \frac{\overline{x} K_{\min}}{\overline{x} + (K_{\min} - \overline{x}) e^{-2T\rho_{\min}}} \leq x(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, si à l'instant $t_1(x)$ la population subit un abattage d'amplitude

$$a_1(x) = -\mu \left[\frac{\overline{x} K_{\min}}{\overline{x} + (K_{\min} - \overline{x}) e^{-2T\rho_{\min}}} - K_{\min} \right]$$

pour un $\mu \in]0,1[$ alors, puisque la nouvelle solution $x \in NBV(T)$ T-périodique doit encore satisfaire

$$K_{\min} < y_{\min}(t) \leq x(t) \leq y_{\max}(t) < K_{\max} \qquad t > t_1(x)$$

pour $y_{\max}$ et $y_{\min}$ tels que

$$y_{\max}(t_1(x)+) = y_{\min}(t_1(x)+) = x(t_1(x)-) - a_1(x),$$

nous obtenons que toute solution T-périodique de

$$x'(t) = (\rho(t) - ax(t))\, x(t) + a_1(x)\, \delta_{t_1(x)}(t) \tag{2.37}$$

satisfait (2.9). Nous notons que dans (2.37) nous avons $f = 0$ et donc $\varphi = 0$. Si nous définissons $t_1(x)$ la fonctionnelle sur $L^1(T)$ donnée par

$$t_1(x) = \frac{1}{2} T (1 - \nu \sin \overline{x})$$

pour un $\nu \in]0,1[$ alors pour tous $x_1, x_2 \in NBV(T)$ nous avons

$$|t_1(x_2) - t_1(x_1)| \leq \frac{\nu T}{2} |\overline{x_2} - \overline{x_1}| \leq \frac{\nu T}{2} \|x_2 - x_1\|_1 .$$

Nous avons aussi, si x_1 et x_2 satisfont (2.9),

$$|a_1(x_2) - a_1(x_1)| \leq \mu e^{2T\rho_{\min}} |\overline{x_2} - \overline{x_1}| \leq \mu e^{2T\rho_{\min}} \|x_2 - x_1\|_1$$

par suite les conditions (2.27) et (2.28) sont satisfaites pour $\mu_1 = \mu e^{2T\rho_{\min}}$, $\nu_1 = \nu T/2$, $A_1 = \mu(K_{\max} - K_{\min})$ et $\tau = \mu_j = \nu_j = A_j = 0$ pour tous $j = 2, 3, 4, \ldots$. De plus, nous avons $\varphi = 0$, $\Omega' = 0$,

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma_\tau}(t, r+\varphi) &= -(\overline{\rho} - ar) r + \mu \left[\frac{rK_{\min}}{r + (K_{\min} - r) e^{-2T\rho_{\min}}} - K_{\min} \right] \\
&= -\left[\overline{\rho} - \left(ar + \frac{\mu K_{\min}}{r + (K_{\min} - r) e^{-2T\rho_{\min}}} \right) \right] r - \mu K_{\min}
\end{aligned}$$

pour $K_{\min} < r < K_{\max}$,

$$\Lambda' = \frac{\mu_1 T}{4} + 2A_1\nu_1 = \frac{\mu T e^{2T\rho_{\min}}}{4} + \mu\nu T (K_{\max} - K_{\min})$$

et

$$\alpha' = \frac{AT}{4} + \Lambda' = \frac{3T\rho_{\max}}{4} + \frac{\mu T e^{2T\rho_{\min}}}{4} + \mu\nu T (K_{\max} - K_{\min}).$$

Ainsi, nous obtenons pour $K_{\min} < r < K_{\max}$ et Γ donnée par (2.35),

$$\begin{aligned}
&\left[\overline{\gamma_\tau}(t, r+\varphi) + \frac{T}{4} \left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'} \right) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(r)| \right] + \Omega' \\
&= -\left[\overline{\rho} - \left(ar + \frac{\mu K_{\min}}{r + (K_{\min} - r) e^{-2T\rho_{\min}}} \right) \right] r - \mu K_{\min} \\
&+ \frac{T}{4} \left(\frac{A+\mu}{1-\alpha'} \right) |a_1(r)|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left[\overline{\gamma_\tau}(t, r+\varphi) - \frac{T}{4} \left(\frac{A+\Gamma}{1-\alpha'} \right) \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(r)| \right] - \Omega' \\
&= -\left[\overline{\rho} - \left(ar + \frac{\mu K_{\min}}{r + (K_{\min} - r) e^{-2T\rho_{\min}}} \right) \right] r - \mu K_{\min} \\
&- \frac{T}{4} \left(\frac{A+\mu}{1-\alpha'} \right) |a_1(r)|
\end{aligned}$$

et par suite, puisque $K_{\min} < \overline{\rho}/a < K_{\max}$*, nous obtenons (2.34) pour tout* μ *assez petit, et par conséquent l'existence d'une solution* T*-périodique à variation bornée de (2.37).*

Chapitre 3

Équations de Duffing avec retard et impulsions dépendant de la moyenne de l'état

Dans ce chapitre, nous obtenons pour une constante $c \neq 0$ donnée des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution presque périodique $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation de Duffing (2) avec retard et impulsions dépendant de la moyenne de l'état.

3.1 Un espace de Hilbert avec une inégalité de type Sobolev

Dans [6], les espaces de Hilbert introduits étaient utiles pour justifier l'existence de solutions presque périodiques de l'équation Josephson sous des conditions naturelles. Dans cette section, nous construirons un espace de Hilbert, qui contient ceux trouvés dans [6], pour démontrer l'existence de solutions presque périodiques de l'équation de Duffing presque périodique (2). L'approche trouvée ici est plus intuitive que celle donnée dans [6].

Une classe de fonctions utiles dans la théorie des équations différentielles ordinaires est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de fonctions à valeurs réelles et de carré intégrables au sens Lebesgue sur $\mathbb{R}$ avec le produit scalaire

$$\langle x,y\rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\ dt$$

et la norme associée

$$\|x\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\ dt\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1}$$

$C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne la classe de toute les fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ et $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la classe de toutes les fonctions continûment différentiables dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Sur l'ensemble

$$S(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : x, x' \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0\right\}$$

nous introduisons, pour $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ donné, le produit scalaire

$$\langle x,y\rangle_c = \langle x' + cx, y' + cy\rangle_2 = \langle x', y'\rangle_2 + c^2\langle x,y\rangle_2 \tag{3.2}$$

et la norme associée

$$\|x\|_c = \|x' + cx\|_2 = \sqrt{\|x'\|_2^2 + c^2\|x\|_2^2}. \tag{3.3}$$

L'inégalité de type Sobolev

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2|c|}}\|x\|_c \tag{3.4}$$

est vérifiée dans $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\left|e^{|c|t}x(t)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{t} \left(e^{|c|s}x(s)\right)'\ ds\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{t} e^{|c|s}\left(|c|\,x(s) + x'(s)\right)\ ds\right| \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{t} e^{2|c|s}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{t} \left(|c|\,x(s) + x'(s)\right)^2\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{e^{2|c|t}}{2|c|}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|x'\|_2^2 + c^2\|x\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

d'où (3.4).

Pour une fonction $x \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, s'il existe $y \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $\langle x,z'\rangle_2 = -\langle y,z\rangle_2$ pour tout $z \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors y est la *dérivée faible* de x dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et notée par x'.

Puisque l'ensemble $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la dérivée faible de la fonction dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est nécéssairement unique.

Lemme 18. *Si une suite $\{x_n\} \subset L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec une dérivée faible $\{x_n'\} \subset L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est telle que $x_n \to x$ et $x_n' \to y$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors y est la dérivée faible de x dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Preuve. Pour tout $z \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nous avons

$$\langle x, z'\rangle_2 = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, z'\rangle_2 = -\lim_{n\to\infty} \langle x_n', z\rangle_2 = -\langle y, z\rangle_2$$

et donc nous obtenons le résultat. ■

Soit $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la complétion de $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par rapport à la norme (3.3). (Il est clair que $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est indépendent de $c \neq 0$.)

Proposition 19. *Tout $x \in H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une fonction continue bornée dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et admet une dérivée faible unique $x' \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et satisfait*

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0.$$

Preuve. Puisque $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est la complétion de $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par rapport à la norme (3.3), tout élément de $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ peut être vu comme une suite de Cauchy $\{x_n\} \subset S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par rapport à la même norme. Par (3.4) nous avons

$$\|x_n - x_m\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2|c|}} \|x_n - x_m\|_c$$

pour tous m, n. Ainsi, $\{x_n\}$ converge uniformément vers une fonction continue bornée $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{t\to\pm\infty} x_n(t) = 0$ pour tout n, l'uniforme convergence de la suite donne $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$. Nous avons aussi $|c| \|x_n - x_m\|_2 \leq \|x_n - x_m\|_c$ pour tous m, n et donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui converge nécéssairement fortement (et donc faiblement) vers une fonction unique $z \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mais, il existe une sous suite $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ qui converge presque partout vers z. (Voir, par exemple [21].) Ainsi $x = z$ presque partout et donc $x \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, nous avons $\|x_n' - x_m'\|_2 \leq \|x_n - x_m\|_c$ pour tous m, n et donc la suite $\{x_n'\}$ converge fortement (et donc faiblement) dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vers une fonction y. Par le lemme précédent, nous obtenons $x' = y$ dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ■

Nous utilisons les mêmes notations que (3.2) et (3.3) pour désigner le prolongement continu du produit scalaire et de la norme de $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La proposition précédente nous donne le résultat suivant.

Corollaire 20. *L'ensemble $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni du produit scalaire (3.2) (et la norme (3.3)) est un espace de Hilbert dans lequel l'inégalité (3.4) est vérifiée.*

Une fonction presque périodique est entièrement déterminée par ses valeurs dans les intervalles $]-\infty,l]$ et $[l,\infty[$ pour tout $l\in\mathbb{R}$. Ce fait que nous n'allons pas utiliser, néanmoins motive la discussion qui va suivre. On note la classe des fonctions deux fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}$ par $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $l\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, nous choisissons une fonction positive arbitraire $\varepsilon_l\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varepsilon_l,\varepsilon_l'\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\lim_{t\to\pm\infty}\varepsilon_l(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\varepsilon_l'(t)=0$$

et $\varepsilon_l=e^{ct}$ pour tout $t\le l$ lorsque $c>0$, ou pour tout $t\ge l$ lorsque $c<0$. Soient

$$\widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}=\left\{h\in AP(\mathbb{R},\mathbb{R}):\overline{h}=0\right\},$$

$$S_l(\mathbb{R},\mathbb{R})=\left\{\varepsilon_l h:h\in\widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}$$

(qui est contenu dans $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$) et soient $H_l(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la complétion de $S_l(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par rapport (3.3) et $L_l^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ celle par rapport à la norme (3.1). Clairement, nous avons

$$H_l(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset L_l^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Nous avons aussi

$$H_l(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset H(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

de laquelle nous obtenons la conséqence immédiate du corollaire précédent.

Corollaire 21. *L'ensemble $H_l(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec le produit scalaire (3.2) est un espace de Hilbert dans lequel l'inégalité de Sobolev (3.4) est vérifiée.*

Si $z\in H_l(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors il existe une suite de Cauchy $\{z_n\}\subset S_l(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui converge vers z par rapport à la norme (3.3). En vertu de (1.9) nous avons pour tout $r\in\mathbb{R}$ fixé,

$$\|\varepsilon_l g(r+z_m/\varepsilon_l)-\varepsilon_l g(r+z_n/\varepsilon_l)\|_\infty\le\gamma\|z_m-z_n\|_\infty$$

et donc il suit par (3.4) que $\varepsilon_l g(t, r + z_n/\varepsilon_l)$ converge (uniformément sur $\mathbb{R}$) lorsque $n \to \infty$ vers une fonction notée par $\varepsilon_l g(r + z/\varepsilon_l)$. Cette fonction est bien définie dans le sens qu'elle est indépendante de la suite $\{z_n\} \subset S_l(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui converge vers z par rapport à la norme (3.3). Ainsi, nous avons étendu $g(r + z/\varepsilon_l)$ pour $z \in S_l(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, au cas où $z \in H_l(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, nous avons

$$\varepsilon_l g(r + z/\varepsilon_l) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad \forall z \in H_l(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Ceci suit de

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_l g(r + z/\varepsilon_l)\|_2 &\leq \|\varepsilon_l g(r + z/\varepsilon_l) - \varepsilon_l g(r)\|_2 + \|\varepsilon_l g(r)\|_2 \\ &\leq \gamma \|z\|_2 + \|\varepsilon_l g(r)\|_2 \end{aligned}$$

où la seconde inégalité est une conséquence de (1.9). Notons que $\|\varepsilon_l g(r)\|_2 < \infty$ puisque $g(r)$ est constante dans t.

3.2 Reformulation du problème

L'existence d'une solution $x \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (2) est trivialement équivalente à l'existence d'une constante $r \in \mathbb{R}$ et d'une fonction $x \in \widetilde{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$x''(t) + 2cx'(t) + g_\tau[r + x](t) = f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r)\, \delta_{t_j(r);T_j}(t) \tag{3.5}$$

où

$$g_\tau[r + x](t) = g(r + x(t - \tau)). \tag{3.6}$$

Puisque φ est l'unique solution dans $\widetilde{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (1.10), la fonction

$$\psi[r](t) = \varphi(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r)\, E_{t_j(r);T_j}(t) \tag{3.7}$$

est l'unique élément de $\widetilde{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (par (1.17) et (1.18)) qui satisfait

$$\psi''[r](t) + 2c\psi'[r](t) = \widetilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r)\, \widetilde{\delta_{t_j(r);T_j}}(t)$$

au sens des fonctions généralisées.

Lemme 22. *La limite*

$$\lim_{r \to \rho} \|\psi[r] - \psi[\rho]\|_\infty = 0 \tag{3.8}$$

est vérifiée pour tout $\rho \in \mathbb{R}$.

Preuve. Par (1.18) nous pouvons rendre

$$\sup_{r \in \mathbb{R}} \left\| \left(\sum_{j=1}^{k} a_j(r) E_{t_j(r);T_j} - \sum_{j=1}^{k} a_j(\rho) E_{t_j(\rho);T_j} \right) - (\psi[r] - \psi[\rho]) \right\|_\infty$$

arbitrairement petit en choisissant $k \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand. De plus, par (1.15) nous avons

$$\lim_{r \to \rho} \left\| a_j(r) E_{t_j(r);T_j} - a_j(\rho) E_{t_j(\rho);T_j} \right\|_\infty = 0$$

pour tous $j = 1, ..., k$ et donc nous avons le résultat. ■

L'équation (3.5) peut être écrite comme

$$(x - \psi[r])'' + 2c(x - \psi[r])' + g_\tau[r + x] = \overline{f} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r)$$

et par suite, en substituant $y = x - \psi[r]$, (3.5) devient

$$y'' + 2cy' + g_\tau[r + y + \psi[r]] = \overline{f} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r)$$

qui est équivalente à

$$y'' + 2cy' + \widetilde{g_\tau}[r + y + \psi[r]] + \overline{g_\tau}[r + y + \psi[r]] = \overline{f} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r)$$

pour tous $r \in \mathbb{R}$ et $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ puisque $g_\tau[r + y + \psi[r]] \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir (1.13)), ce qui nous permet d'écrire

$$g_\tau[r + y + \psi[r]] = \overline{g_\tau}[r + y + \psi[r]] + \widetilde{g_\tau}[r + y + \psi[r]].$$

Ainsi, il suffit de trouver $y_r \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ (pour tout $r \in \mathbb{R}$) tel que $y = y_r$ est une solution de

$$y'' + 2cy' + \widetilde{g_\tau}\left[r + y + \psi\left[r\right]\right] = 0 \tag{3.9}$$

et après trouver $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overline{g_\tau}\left[r + y_r + \psi\left[r\right]\right] = \overline{f} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\left(r\right). \tag{3.10}$$

3.3 Principaux résultats

Pour le moment, nous fixons $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Si nous multiplions (3.9) par ε_l nous obtenons

$$\left(\varepsilon_l y\right)'' - c^2\left(\varepsilon_l y\right) + \varepsilon_l \widetilde{g_\tau}\left[r + y + \psi\left[r\right]\right] = 0$$

sur $]-\infty, l]$ lorsque $c > 0$ et sur $[l, \infty[$ lorsque $c < 0$. Cette équation est un cas particulier de

$$\left\langle z'' - c^2 z + \varepsilon_l \widetilde{g_\tau}\left[r + y + \psi\left[r\right]\right], v\right\rangle_2 = 0 \tag{3.11}$$

pour un $z \in S_l\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ et tout $v \in H\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$. Pour établir nos résultats, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\langle z, v\right\rangle_2 \leq \left\|z\right\|_2 \left\|v\right\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{c^2}} \left\|z\right\|_2 \left\|v\right\|_c \tag{3.12}$$

pour tous $v, z \in H\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$. L'équation (3.11) pour tout $z \in S_l\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ et tout $v \in H\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ est équivalente à

$$\left\langle z' + cz, v' + cv\right\rangle_2 = \left\langle \varepsilon_l \widetilde{g_\tau}\left[r + y + \psi\left[r\right]\right], v\right\rangle_2.$$

Soient $r \in \mathbb{R}$, $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et $\Lambda_{lr}\left[y\right]$ la fonction dans $L^2\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ définie par

$$\Lambda_{lr}\left[y\right] = \varepsilon_l \widetilde{g_\tau}\left[r + y + \psi\left[r\right]\right].$$

Nous introduisons la fonctionnelle linéaire $\Lambda_{lr}\left[y\right]\left(v\right)$ sur $L^2\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ donnée par

$$\Lambda_{lr}\left[y\right]\left(v\right) = \left\langle \Lambda_{lr}\left[y\right], v\right\rangle_2$$

(pour tout $v \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Par (3.12) nous avons

$$|\langle \Lambda_{lr}[y], v\rangle_2| \leq \|\Lambda_{lr}[y]\|_2 \|v\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{c^2}} \|\Lambda_{lr}[y]\|_2 \|v\|_c$$

pour tout $v \in H(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ce que implique que $\Lambda_{lr}[y](v)$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc par le théorème de Riesz-Fréchet, pour tout $y \in \widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donné, il existe un unique $w_{lr}[y] \in H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que

$$\langle w_{lr}[y], v\rangle_c = \langle \Lambda_{lr}[y], v\rangle_2 \tag{3.13}$$

pour tout $v \in H(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il suit maintenant de (3.13) que

$$\langle w'_{lr}[y], v'\rangle_2 = \left\langle \Lambda_{lr}[y] - c^2 w_{lr}[y], v\right\rangle_2$$

pour tout v dans $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (qui est dense dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$), et donc $-\Lambda_{lr}[y] + c^2 w_{lr}[y] \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est la dérivée faible de $w'_{lr}[y]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ notée $w''_{lr}[y]$, et par suite

$$w''_{lr}[y] = c^2 w_{lr}[y] - \Lambda_{lr}[y]. \tag{3.14}$$

dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Remarque 23. *La seule solution dans $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de l'équation homogène $z'' - c^2 z = 0$ est la solution triviale $z = 0$. Pour cette raison $w_{lr}[y]$ est unique dans $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, pour tout $y \in \widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donné, et $l, l' \in \mathbb{R}$, nous avons $w_{lr}[y] = w_{l'r}[y]$ sur $]-\infty, l \wedge l']$ lorsque $c > 0$, comme suit à partir de (3.13) en prenant des fonctions arbitraires v dans $H(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec support dans $]-\infty, l \wedge l']$ en conjonction avec le fait que $\varepsilon_l(t) = \varepsilon_{l'}(t) = e^{ct}$ dans $]-\infty, l \wedge l']$. De même, nous avons $w_{lr}[y] = w_{l'r}[y]$ dans $[l \vee l', \infty[$ lorsque $c < 0$. Ce qui nous permet de définir, pour tout $y \in \widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction*

$$w_r[y](t) = \begin{cases} \lim\limits_{l\to\infty} w_{lr}[y](t)/\varepsilon_l(t) & \textit{lorsque } c > 0 \\ \lim\limits_{l\to-\infty} w_{lr}[y](t)/\varepsilon_l(t) & \textit{lorsque } c < 0 \end{cases}$$

puisque, d'après ce que nous venons de démontrer, la limite existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 24. *Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $w_r[y] \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour tout $y \in \widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (et par suite $\widetilde{w_r} : \widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).*

Preuve. Sans perte de généralité, nous donnons la preuve dans le cas où $c > 0$. Pour tous $l, \sigma, r \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned}
&e^{cl}\left|w_r[y](l-\sigma) - w_r[y](l)\right| \\
&\qquad = \left|e^{c\sigma}\varepsilon_{l-\sigma}(l-\sigma)\, w_r[y](l-\sigma) - \varepsilon_l(l)\, w_r[y](l)\right| \\
&\qquad = \left|e^{c\sigma} w_{(l-\sigma)r}[y](l-\sigma) - w_{lr}[y](l)\right|
\end{aligned}$$

ce qui par (3.4) donne

$$\begin{aligned}
&e^{cl}\left|w_r[y](l-\sigma) - w_r[y](l)\right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\sqrt{2c}}\left\|e^{c\sigma} w_{(l-\sigma)r}[y](t-\sigma) - w_{lr}[y](t)\right\|_c \\
&\qquad \leq \frac{1}{\sqrt{2c}} \sup_{\substack{\|v\|_c \leq 1 \\ v \in H}} \left\langle e^{c\sigma} w_{(l-\sigma)r}[y](t-\sigma) - w_{lr}[y](t), v\right\rangle_c
\end{aligned}$$

et donc, par (3.13),

$$\begin{aligned}
&e^{cl}\left|w_r[y](l-\sigma) - w_r[y](l)\right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\sqrt{2c}} \sup_{\substack{\|v\|_c \leq 1 \\ v \in H}} \left\langle e^{c\sigma} \Lambda_{(l-\sigma)r}[y](t-\sigma) - \Lambda_{lr}[y](t), v\right\rangle_2 .
\end{aligned}$$

L'inégalité du triangle, (3.12), (1.14) et (1.11) donnent maintenant

$$\begin{aligned}
&e^{cl}\left|w_r[y](l-\sigma) - w_r[y](l)\right| \\
&\quad \leq \frac{1}{\sqrt{2c}} \sup_{\substack{\|v\|_c \leq 1 \\ v \in H}} \left\langle e^{c\sigma}\left(\varepsilon_{l-\sigma}\widetilde{g_\tau}[r+y+\psi[r]]\right)(t-\sigma) - \left(\varepsilon_l \widetilde{g_\tau}[r+y+\psi[r]]\right)(t), v\right\rangle_2 \\
&\quad \leq \frac{1}{c\sqrt{2c}}\left\|e^{c\sigma}\left(\varepsilon_{l-\sigma} g_\tau[r+y+\psi[r]]\right)(t-\sigma) - \left(\varepsilon_l g_\tau[r+y+\psi[r]]\right)(t)\right\|_2 \\
&\quad + \frac{1}{c\sqrt{2c}}\left\|\left(e^{c\sigma}\varepsilon_{l-\sigma}(t-\sigma) - \varepsilon_l(t)\right)\right\|_2 \left|\overline{g_\tau}[r+y+\psi[r]]\right| .
\end{aligned}$$

Les fonctions $\varepsilon_{l-\sigma}$ et ε_l peuvent être choisies telles que les intégrales $\int_l^\infty \varepsilon_{l-\sigma}^2(t-\sigma)\, dt$ et $\int_l^\infty \varepsilon_l^2(t)\, dt$ soient arbitrairement petites et donc

$$\left\|e^{c\sigma}\varepsilon_{l-\sigma}(t-\sigma) - \varepsilon_l(t)\right\|_2$$

peut être rendue arbitrairement petite et

$$\left\| e^{c\sigma} \left(\varepsilon_{l-\sigma} g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] \right) (t - \sigma) - \left(\varepsilon_l g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] \right) (t) \right\|_2$$

peut être rendue arbitrairement proche de

$$\left(\int_{-\infty}^{l} e^{2ct} \left(g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] (t - \sigma) - g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] (t) \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui à son tour est bornée par

$$\frac{e^{cl}}{\sqrt{2c}} \left\| g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] (t - \sigma) - g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] (t) \right\|_\infty .$$

Par (1.9) et (3.6), nous avons

$$\begin{aligned} &\left\| g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] (t - \sigma) - g_\tau \left[r + y + \psi \left[r \right] \right] (t) \right\|_\infty \\ &\qquad \leq \gamma \left\| \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \sigma - \tau) - \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \tau) \right\|_\infty \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\left| w_r \left[y \right] (l - \sigma) - w_r \left[y \right] (l) \right| \\ &\qquad \leq \frac{\gamma}{2c^2} \left\| \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \sigma - \tau) - \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \tau) \right\|_\infty \end{aligned}$$

pour tout $l \in \mathbb{R}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\left\| w_r \left[y \right] (t - \sigma) - w_r \left[y \right] (t) \right\|_\infty \\ &\qquad \leq \frac{\gamma}{2c^2} \left\| \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \sigma - \tau) - \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \tau) \right\|_\infty . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Mais la fonction $y + \psi [r]$ est presque périodique par rapport à t. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N (\varepsilon, y + \psi [r]) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $N (\varepsilon, y + \psi_\tau [r])$ contient un point σ_ε pour lequel

$$\left\| \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \sigma_\varepsilon - \tau) - \left(y + \psi \left[r \right] \right) (t - \tau) \right\|_\infty < \varepsilon.$$

Ceci implique, si nous avions pris $\sigma = \sigma_\varepsilon$ pour commencer, nous aurions

$$\|w_r[y](t-\sigma_\varepsilon) - w_r[y](t)\|_\infty \leq \frac{\gamma}{2c^2}\varepsilon$$

pour le point σ_ε dans l'intervalle de longueur $N(\varepsilon, y + \widetilde{\psi_r}[r])$, ce qui prouve que $w_r[y] \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi $\widetilde{w_r}[y] \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ pour tout $y \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ■

Soient $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, $l \in \mathbb{R}$ et $c > 0$, nous avons par (3.14)

$$\left(e^{ct}w_r[y]\right)'' = c^2e^{ct}w_r[y] - \Lambda_{lr}[y], \qquad -\infty < t \leq l \tag{3.16}$$

et donc $w = \widetilde{w_r}[y]$ est l'unique solution dans $\widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ de l'équation

$$w'' + 2cw' = -\widetilde{g_r}[r + y + \psi[r]] \tag{3.17}$$

sur $]-\infty, l]$. Le terme à droite de (3.16) est continu et donc $(e^{ct}w_r[y])''$ est continue sur $]-\infty, l]$. Puisque $w_r[y] \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ implique que $w_r[y]$ est bornée, nous pouvons prendre

$$\left(e^{ct}w_r[y](t)\right)' = \int_{-\infty}^{t} \left(c^2e^{ct}w_r[y] - \Lambda_{lr}[y]\right)$$

pour tout $t < l$, ce qui rend $w_r'[y]$ (et donc $w_r''[y]$ par (3.17)) continue sur $]-\infty, l]$, et donc sur tout $\mathbb{R}$ (puisque l est arbitraire. Ce qui prouve le résultat suivant.

Corollaire 25. *Pour tous $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et $r \in \mathbb{R}$, la fonction $w = \widetilde{w_r}[y]$ est l'unique solution deux fois continûment différentiable dans $\widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ de (3.17), où g_r est définie par (3.6).*

Lemme 26. *Pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'inégalité*

$$\|w_r[y_2] - w_r[y_1]\|_\infty \leq \frac{\gamma}{c^2}\|y_2 - y_1\|_\infty$$

est vérifiée pour tous $y_1, y_2 \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Preuve. Sans perte de généralité, nous considérons le cas où $c > 0$. En procédant comme dans la preuve de la proposition précédente, nous avons pour tous $y_1, y_2 \in \widetilde{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
& e^{cl} \left| w_r [y_2] (l) - w_r [y_1] (l) \right| \\
& \quad \leq \frac{1}{\sqrt{2c}} \sup_{\substack{\|v\|_c \leq 1 \\ v \in H}} \langle \Lambda_{lr} [y_2] - \Lambda_{lr} [y_1] , v \rangle_2 \\
& \quad = \frac{1}{\sqrt{2c}} \sup_{\substack{\|v\|_c \leq 1 \\ v \in H}} \langle \varepsilon_l \widetilde{g_\tau} [r + y_2 + \psi [r]] - \varepsilon_l \widetilde{g_\tau} [r + y_1 + \psi [r]] , v \rangle_2 \\
& \quad \leq \frac{1}{c\sqrt{2c}} \left\| \varepsilon_l \widetilde{g_\tau} [r + y_2 + \psi [r]] - \varepsilon_l \widetilde{g_\tau} [r + y_1 + \psi [r]] \right\|_2 \\
& \quad \leq \frac{1}{c\sqrt{2c}} \|\varepsilon_l\|_2 \left\| \widetilde{g_\tau} [r + y_2 + \psi [r]] - \widetilde{g_\tau} [r + y_1 + \psi [r]] \right\|_\infty
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
& \left\| \widetilde{g_\tau} [r + y_2 + \psi [r]] - \widetilde{g_\tau} [r + y_1 + \psi [r]] \right\|_\infty \\
& \qquad \leq \left\| g_\tau [r + y_2 + \psi [r]] - g_\tau [r + y_1 + \psi [r]] \right\|_\infty \\
& \qquad + \left| \overline{g_\tau} [r + y_2 + \psi [r]] - \overline{g_\tau} [r + y_1 + \psi [r]] \right| \\
& \qquad \leq 2\gamma \|y_2 - y_1\|_\infty
\end{aligned}$$

et ε_l peut être choisi tel que $\|\varepsilon_l\|_2$ est arbitrairement proche de sa borne inférieure

$$\inf \left\{ \|\varepsilon_l\|_2 : \text{tous les } \varepsilon_l \text{ admissibles pour } l \text{ donné} \right\} = e^{cl} / \sqrt{2c}.$$

Ainsi, nous avons

$$e^{cl} \left| w_r [y_2] (l) - w_r [y_1] (l) \right| \leq \frac{\gamma e^{cl}}{c^2} \|y_2 - y_1\|_\infty$$

pour tout $l \in \mathbb{R}$ et donc

$$\|w_r [y_2] - w_r [y_1]\|_\infty \leq \frac{\gamma}{c^2} \|y_2 - y_1\|_\infty$$

qui est le résultat désiré. ■

Remarque 27. *Supposons que g satisfait aussi*

$$|g(u)| \leq \gamma_0 |u| \tag{3.18}$$

pour un $\gamma_0 > 0$ *et tout* $u \in \mathbb{R}$. *Si dans la preuve de la proposition précédente, nous commençons avec* $e^{cl} |w_r[y](l)|$ *à la place de* $e^{cl} |w_r[y](l-\sigma) - w_r[y](l)|$ *alors nous finirons avec*

$$\|w_r[y]\|_\infty \leq \frac{\gamma_0}{2c^2} \|y + \psi[r]\|_\infty$$

à la place de (3.15). Ainsi, en vertu de

$$\|\widetilde{w_r}[y]\|_\infty = \|w_r[y] - \overline{w_r}[y]\|_\infty \leq \|w_r[y]\|_\infty + \|\overline{w_r}[y]\|_\infty$$

nous obtenons

$$\|\widetilde{w_r}[y]\|_\infty \leq \frac{\gamma_0}{c^2} \|y + \psi[r]\|_\infty \tag{3.19}$$

pour tout $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

Dans la section suivante, nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 28. *Nous supposons que suppose les hypothèses* $H_1 - H_5$ *et la condition* $0 < \lambda < 1$ *où*

$$\lambda = \frac{2\gamma}{c^2}. \tag{3.20}$$

sont vérifiées. Alors pour tout $r \in \mathbb{R}$ *donné, il existe une unique fonction réelle* y_r *presque périodique, deux fois continûment différentiable et de moyenne nulle telle que* $y = y_r$ *est une solution de (3.9). De plus, si les deux inégalités*

$$\inf_{r \in \mathbb{R}} \left\{ \overline{g}(x_r(t-\tau)) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r) \right\} < \overline{f} \tag{3.21}$$

et

$$\sup_{r \in \mathbb{R}} \left\{ \overline{g}(x_r(t-\tau)) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r) \right\} > \overline{f} \tag{3.22}$$

sont vérifiées, où

$$x_r = r + y_r + \varphi + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r) E_{t_j(r);T_j} \tag{3.23}$$

pour φ *définie dans* H_2, a_j *dans* H_3, t_j *et* T_j *dans* H_4 *et* $E_{t_j(r);T_j}$ *est donné par (1.15) avec* $\omega_j = 2\pi/T_j$, *alors il existe* $r_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* y_r *est une solution réelle presque périodique de (3.10) pour* $r = r_0$.

Comme conséquence du théorème 28, nous avons ce qui suit.

Corollaire 29. *Dans le contexte du théorème 28, $x = x_{r_0}$ est une solution généralisée presque périodique de (2).*

3.3.1 Principe de contraction sur $\widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Nous procèdons maintenant à la démonstration du théorème. En vertu du lemme précédent, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{w_r}[y_2]-\widetilde{w_r}[y_1]\right\|_\infty &\leq \left\|w_r[y_2]-w_r[y_1]\right\|_\infty+\left|\overline{w_r}[y_2]-\overline{w_r}[y_1]\right| \\ &\leq 2\left\|w_r[y_2]-w_r[y_1]\right\|_\infty \\ &\leq \frac{2\gamma}{c^2}\left\|y_2-y_1\right\|_\infty\end{aligned}$$

et par suite, lorsque $0 < \lambda < 1$, le principe de contraction de Banach implique l'existence d'un point fixe $y_r = \widetilde{w_r}[y_r] \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Maintenant, nous introduisons la fonction réelle

$$\Gamma(r) = \overline{g_r}[r+y_r] - \overline{f} - \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r).$$

Le résultat suivant est la première étape pour montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}$.

Lemme 30. *Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{r\to\rho}\left\|w_r[y]-w_\rho[y]\right\|_\infty = 0$$

est vérifiée pour tout $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Preuve. Sans perte de généralité, nous considérons le cas où $c > 0$. En procédant encore comme dans la preuve de la proposition précédente, pour tout $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ nous avons

$$\begin{aligned}
&e^{cl}\left|w_r[y](l) - w_\rho[y](l)\right| \\
&\quad\le \frac{1}{\sqrt{2c}} \sup_{\substack{\|v\|_c \le 1 \\ v\in H}} \left\langle \Lambda_{lr}[y] - \Lambda_{l\rho}[y], v\right\rangle_2 \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2c}} \sup_{\substack{\|v\|_c \le 1 \\ v\in H}} \left\langle \varepsilon_l \widetilde{g_\tau}[r + y + \psi[r]] - \varepsilon_l \widetilde{g_\tau}[\rho + y + \psi[\rho]], v\right\rangle_2 \\
&\quad\le \frac{1}{c\sqrt{2c}} \left\|\varepsilon_l \widetilde{g_\tau}[r + y + \psi[r]] - \varepsilon_l \widetilde{g_\tau}[\rho + y + \psi[\rho]]\right\|_2 \\
&\quad\le \frac{1}{c\sqrt{2c}} \|\varepsilon_l\|_2 \left\|\widetilde{g_\tau}[r + y + \psi[r]] - \widetilde{g_\tau}[\rho + y + \psi[\rho]]\right\|_\infty
\end{aligned}$$

où, par (1.9),

$$\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{g_\tau}[r + y + \psi[r]] - \widetilde{g_\tau}[\rho + y + \psi[\rho]]\right\|_\infty \\
&\quad\le \left\|g_\tau[r + y + \psi[r]] - g_\tau[\rho + y + \psi[\rho]]\right\|_\infty \\
&\quad+ \left|\overline{g_\tau}[r + y + \psi[r]] - \overline{g_\tau}[\rho + y + \psi[\rho]]\right| \\
&\quad\le 2\left\|g_\tau[r + y + \psi[r]] - g_\tau[\rho + y + \psi[\rho]]\right\|_\infty \\
&\quad\le 2\gamma\left(|r-\rho| + \|\psi[r] - \psi[\rho]\|_\infty\right)
\end{aligned}$$

et ε_l peut être choisi tel que $\|\varepsilon_l\|_2$ est arbitrairement proche de $e^{cl}/\sqrt{2c}$. Ainsi

$$e^{cl}\left|w_r[y](l) - w_\rho[y](l)\right| \le \frac{\gamma e^{cl}}{c^2}\left(|r-\rho| + \|\psi[r] - \psi[\rho]\|_\infty\right)$$

est vérifiée pour $l \in \mathbb{R}$ et donc, nous avons

$$\|w_r[y] - w_\rho[y]\|_\infty \le \frac{\gamma}{c^2}\left(|(r-\rho)| + \|(\psi[r] - \psi[\rho])\|_\infty\right).$$

Le résultat suit maintenant par (3.8). ■

Maintenant, nous allons exploiter ce lemme pour établir le résultat suivant.

Proposition 31. *Si* $0 < \lambda < 1$ *alors pour tout* $\rho \in \mathbb{R}$*, l'égalité*

$$\lim_{r\to\rho} \|y_r - y_\rho\|_\infty = 0$$

est vérifiée et donc Γ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Par l'inégalité du triangle et la preuve du lemme précédent, nous avons

$$\begin{aligned}\|y_r - y_\rho\|_\infty &= \|w_r[y_r] - w_\rho[y_\rho]\|_\infty \\ &\leq \|w_r[y_r] - w_r[y_\rho]\|_\infty + \|w_r[y_\rho] - w_\rho[y_\rho]\|_\infty \\ &\leq \frac{\gamma}{c^2}\|y_r - y_\rho\|_\infty + \|w_r[y_\rho] - w_\rho[y_\rho]\|_\infty\end{aligned}$$

et donc

$$0 \leq \left(1 - \frac{\gamma}{c^2}\right)\lim_{r\to\rho}\|y_r - y_\rho\|_\infty \leq \lim_{r\to\rho}\|w_r[y_\rho] - w_\rho[y_\rho]\|_\infty.$$

Le résultat suit maintenant du lemme précédent. ■

Par le théorème des valeurs intérmédiaires, si

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\Gamma(r) < 0 < \sup_{r\in\mathbb{R}}\Gamma(r)$$

alors il existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Gamma(r_0) = 0.$$

Ainsi l'équation

$$y'' + 2cy' + \widetilde{g_\tau}[r_0 + y + \psi[r_0]] = -\overline{g_\tau}[r_0 + y + \psi[r_0]] + \overline{f} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(r_0) \tag{3.24}$$

admet une solution généralisée $y = y_{r_0}$ si (3.21) et (3.22) sont vérifiées. De plus, puisque

$$\left(e^{ct}y_{r_0}\right)'' = c^2\left(e^{ct}y_{r_0}\right) - e^{ct}\widetilde{g_\tau}[r_0 + y_0]$$

et puisque les fonctions presque périodiques y_{r_0} et $\widetilde{g_\tau}[r_0 + y_0]$ sont nécessairement bornées, alors en supposant que $c > 0$, nous avons

$$\left(e^{ct}y_{r_0}(t)\right)' = \int_{-\infty}^{t}\left[c^2\left(e^{ct}y_{r_0}\right) - e^{ct}\widetilde{g_\tau}[r_0 + y_{r_0}]\right]$$

ce qui implique que $\left(e^{ct}y_{r_0}(t)\right)'$ est continue, et donc $y'_{r_0}(t)$ est nécessairement continue aussi. Par (3.24), il suit maintenant que $y''_{r_0}(t)$ est continue. Nous avons la même conclusions si $c < 0$. Ce qui complète la preuve du théorème.

3.3.2 Bornes à priori pour $\overline{f}$

Dans cette section nous obtenons des bornes à priori pour $\overline{f}$ qui sont relativement faciles à vérifier et impliquent les inégalités (3.21) et (3.22). Si nous écrivons

$$\overline{g_\tau}\left[r+y_r+\psi\left[r\right]\right]=\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]+\left(\overline{g_\tau}\left[r+y_r+\psi\left[r\right]\right]-\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]\right)$$

alors

$$\begin{aligned}
&\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+y_r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}\\
&\quad\leq\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}\\
&\quad+\sup_{r\in\mathbb{R}}\left|\overline{g_\tau}\left[r+y_r+\psi\left[r\right]\right]-\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]\right|\\
&\quad\leq\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}+\gamma\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\|y_r\right\|_\infty
\end{aligned}$$

où, pour tout $y\in\widetilde{AP\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)}$, nous avons par le principe de contraction

$$\begin{aligned}
\left\|y_r\right\|_\infty&\leq\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{w_r}^n\left[y\right]\right\|_\infty\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{w_r}\left[y\right]+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\widetilde{w_r}^{k+1}\left[y\right]-\widetilde{w_r}^k\left[y\right]\right)\right\|_\infty\\
&\leq\left\|\widetilde{w_r}\left[y\right]\right\|_\infty+\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\widetilde{w_r}^{k+1}\left[y\right]-\widetilde{w_r}^k\left[y\right]\right\|_\infty\\
&\leq\left\|\widetilde{w_r}\left[y\right]\right\|_\infty+\frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|\widetilde{w_r}\left[y\right]-y\right\|_\infty\\
&\leq\frac{1}{1-\lambda}\left\|\widetilde{w_r}\left[y\right]\right\|_\infty+\frac{\lambda}{1-\lambda}\left\|y\right\|_\infty
\end{aligned}$$

et donc (3.21) est vérifiée si

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}+\frac{\gamma}{1-\lambda}\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\|\widetilde{w_r}\left[y\right]\right\|_\infty+\frac{\gamma\lambda}{1-\lambda}\left\|y\right\|_\infty<\overline{f}\qquad(3.25)$$

est vérifiée pour un $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. De même, (3.22) a lieu si

$$\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}-\frac{\gamma}{1-\lambda}\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\|\widetilde{w_r}\left[y\right]\right\|_\infty-\frac{\gamma\lambda}{1-\lambda}\left\|y\right\|_\infty>\overline{f} \qquad (3.26)$$

est vérifié pour un $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Le théorème précédent fournit le résultat suivant.

Théorème 32. *Supposons que les hypothèses $H_1 - H_5$ sont vérifiées et que $0 < \lambda < 1$ où λ est donnée par (3.20). Encore, pour tout $r \in \mathbb{R}$, soit y_r l'unique solution réelle deux fois continûment différentiable presque périodique, de moyenne nulle de (3.9) avec $\psi\left[r\right]$ donnée par (3.7). Si (3.25) est vérifiée pour un $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et si (3.26) est aussi vérifiée pour un $y \in \widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ alors, il existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tel que x_{r_0} dérivée de y_{r_0} par (3.23) est une solution généralisée réelle presque périodique de (2).*

Si nous prenons $y = -\psi\left[r\right]$ (qui est dans $\widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ par (1.15)), alors

$$\widetilde{g_\tau}\left[r+y+\psi\left[r\right]\right]=\widetilde{g_\tau}\left[r\right]=\widetilde{g}\left(r\right)=0$$

et donc $\widetilde{w_r}\left[y\right]=0$ puisque $w=\widetilde{w_r}\left[y\right]$ est l'unique solution de (3.17) dans $\widetilde{AP(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. De plus, par (1.17) et (3.7) nous obtenons

$$\left\|y\right\|_\infty\leq\left\|\varphi\right\|_\infty+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jT_j^2.$$

Ainsi (3.25) et (3.26) sont vérifiées lorsque

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}+\frac{\gamma\lambda}{1-\lambda}\left(\left\|\varphi\right\|_\infty+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jT_j^2\right)<\overline{f} \qquad (3.27)$$

et

$$\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}-\frac{\gamma\lambda}{1-\lambda}\left(\left\|\varphi\right\|_\infty+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jT_j^2\right)>\overline{f} \qquad (3.28)$$

(respectivement). Ceci montre le résultat suivant.

Corollaire 33. *Supposons que les hypothèses $H_1 - H_5$ sont vérifiées et que $0 < \lambda < 1$ où λ est donnée par (3.20). Pour tout $r \in \mathbb{R}$, soit y_r l'unique solution réelle deux fois continûment différientiable presque périodique de moyenne nulle de (3.9) avec $\psi\left[r\right]$*

donnée par (3.7). Si (3.27) et (3.28) sont vérifiés, alors il existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tel que x_{r_0} dérivé de y_{r_0} par (3.23) est une solution généralisée presque périodique de (2).

3.3.3 Application

Exemple 34. *Soient $A, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ des constantes. Nous considérons l'équation du pendule forcé*

$$x''(t) + 2cx'(t) + A\sin(x(t-\tau)) = \theta_1 \sin(\overline{x})\, \delta_{\frac{1}{2}\sin^2(\overline{x});1}(t) + \theta_2 \cos(\overline{x})\, \delta_{\frac{1}{2}\cos^2(\overline{x});2\pi}(t) \tag{3.29}$$

avec retard $\tau > 0$ et impulsions dépendant de la moyenne de l'état et d'amplitudes $\theta_1 \sin(\overline{x})$ et $\theta_2 \cos(\overline{x})$ en tous instants $\frac{1}{2}\sin^2(\overline{x}) + k$ et $\frac{1}{2}\cos^2(\overline{x}) + 2\pi k$ respectivement $(k \in \mathbb{Z})$. (Ici, les impulsions périodiques sont respectivement de période 1 et 2π et donc les impulsions résultantes de la somme dans le terme à doite de (3.29) ne sont pas périodiques puisque $2\pi\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$.)
Nous avons

$$g(x) = A\sin(x(t-\tau))$$

(et donc $\gamma = |A|$), $f(x) = 0$ (et donc $\overline{f} = 0$ et $\widetilde{f} = 0$), $T_1 = 1$, et $T_2 = 2\pi$. De plus, pour tout $r \in \mathbb{R}$, nous avons $t_1(r) = \frac{1}{2}\sin^2 r$, $t_2(r) = \frac{1}{2}\cos^2 r$, $a_1(r) = \theta_1 \sin r$, $a_2(r) = \theta_2 \cos r$ et $\lambda = 2A/c^2$. L'unique solution presque périodique de (1.10) de moyenne nulle est donnée par

$$\varphi(t) = 0 \tag{3.30}$$

et donc par (3.7) nous obtenons

$$\psi[r](t) = \theta_1 (\sin r)\, E_{t_1(r);1}(t) + \theta_2 (\cos r)\, E_{t_2(r);2\pi}(t) \tag{3.31}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$, où par (1.15),

$$E_{t_1(r);1}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{i2n\pi\left(t - \frac{1}{2}\sin^2 r\right)}}{i2n\pi\,(i2n\pi + 2c)}, \quad E_{t_2(r);2\pi}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{in\left(t - \frac{1}{2}\cos^2 r\right)}}{in\,(in + 2c)}$$

et donc

$$\overline{E^j_{t_1(r);1}(t)\, E^k_{t_2(r);2\pi}(t)} = 0 \quad \forall j \neq k,\ j, k \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

En outre

$$\begin{aligned}\cos\left(\psi\left[r\right]\left(t\right)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\psi^{2k}\left[r\right]\left(t\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left[\theta_1\sin rE_{t_1(r);1}+\theta_2\cos rE_{t_2(r);2\pi}\right]^{2k}\end{aligned}$$

et donc par (3.32) nous avons

$$\begin{aligned}\overline{\cos}\left(\psi\left[r\right]\left(t\right)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left[\overline{\left(\theta_1\sin rE_{t_1(r);1}\right)^{2k}}+\overline{\left(\theta_2\cos rE_{t_2(r);2\pi}\right)^{2k}}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left[\overline{\left(\theta_1\sin rE_{0;1}\right)^{2k}}+\overline{\left(\theta_2\cos rE_{0;2\pi}\right)^{2k}}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\overline{\left[\theta_1\sin rE_{0;1}+\theta_2\cos rE_{0;2\pi}\right]^{2k}} \\ &= \overline{\cos}\left(\theta_1\sin rE_{0;1}+\theta_2\cos rE_{0;2\pi}\right).\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\overline{\sin}\left(\psi\left[r\right]\left(t\right)\right)=\overline{\sin}\left(\theta_1\sin rE_{0;1}+\theta_2\cos rE_{0;2\pi}\right).$$

Nous avons également

$$\begin{aligned}\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right] &= A\overline{\sin}\left(r+\psi\left[r\right]\right) \\ &= A\left(\sin r\right)\overline{\cos}\psi\left[r\right]+A\left(\cos r\right)\overline{\sin}\psi\left[r\right]\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right] &= A\left(\sin r\right)\overline{\cos}\left(\theta_1\sin rE_{0;1}+\theta_2\cos rE_{0;2\pi}\right) \\ &\quad + A\left(\cos r\right)\overline{\sin}\left(\theta_1\sin rE_{0;1}+\theta_2\cos rE_{0;2\pi}\right) \\ &= A\overline{\sin}\left(r+\theta_1\sin rE_{0;1}+\theta_2\cos rE_{0;2\pi}\right)\end{aligned}$$

où par (1.16), $|E_{0;1}|$ et $|E_{0;2\pi}|$ sont uniformément bornées par $1/12$ et $\pi^2/3$ respectivement. À partir de

$$\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\theta_1\sin r-\theta_2\cos r\leq\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]+|\theta_1|+|\theta_2|$$

nous obtenons

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\theta_1\sin r-\theta_2\cos r\right\}\leq\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]\right\}+|\theta_1|+|\theta_2|$$

et donc

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\theta_1\sin r-\theta_2\cos r\right\}\leq-|A|+|\theta_1|+|\theta_2|. \tag{3.33}$$

De même, nous avons

$$\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\theta_1\sin r-\theta_2\cos r\right\}\geq\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]\right\}-|\theta_1|-|\theta_2|$$

et donc

$$\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\theta_1\sin r-\theta_2\cos r\right\}\geq|A|-|\theta_1|-|\theta_2|. \tag{3.34}$$

Par suite maintenant (3.27) et (3.28) sont vérifiées si

$$|\theta_1|+|\theta_2|+\frac{2A^2}{c^2-2|A|}\left(\frac{|\theta_1|}{12}+\frac{|\theta_2|\pi^2}{3}\right)<|A|. \tag{3.35}$$

Donc, si $2|A|<c^2$ et si θ_1 et θ_2 sont suffisamment petites pour que (3.35) soit vérifiée, alors, il existe une solution généralisée réelle presque périodique de (3.29).

3.3.4 Cas particulier

Pour $y=0$, (3.17) devient

$$w''(t)+2cw'(t)=-\widetilde{g}\left(r+\psi\left[r\right](t-\tau)\right) \tag{3.36}$$

et son unique solution dans $\widetilde{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est donnée par $w=\widetilde{w_r}[0]$. Dans ce cas (3.25) et (3.26) deviennent

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_\tau}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left(r\right)\right\}+\frac{\gamma}{1-\lambda}\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\|\widetilde{w_r}\left[0\right]\right\|_\infty<\overline{f} \tag{3.37}$$

et

$$\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_{\tau}}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j}\left(r\right)\right\}-\frac{\gamma}{1-\lambda}\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\|\widetilde{w_{r}}\left[0\right]\right\|_{\infty}>\overline{f} \tag{3.38}$$

(respectivement) et donc nous avons montré le résultat suivant.

Corollaire 35. *Supposons que (3.37) et (3.38) sont vérifiés où* $\widetilde{w_r}\left[0\right]$ *est l'unique solution réelle presque périodique de moyenne nulle de (3.36) avec* $\psi\left[r\right]$ *donnée par (3.7). Alors, sous les hypothèses* H_1-H_5 *et la condition* $0<\lambda<1$ *où* λ *est donnée par (3.20), il existe pour un* $r_0\in\mathbb{R}$ *une unique fonction réelle* y_{r_0} *deux fois continûment différentiable presque périodique de moyenne nulle telle que* x_{r_0} *dérivée de* y_{r_0} *par (3.23) est une solution réelle presque périodique de (2) au sens des fonctions généralisées.*

Quand g satisfait aussi (3.18) pour un $\gamma_0>0$, alors par (3.19) nous avons

$$\left\|\widetilde{w_{r}}\left[0\right]\right\|_{\infty}\leq\frac{\gamma_{0}}{c^{2}}\left\|\psi\left[r\right]\right\|_{\infty}\leq\frac{\gamma_{0}}{c^{2}}\left(\left\|\varphi\right\|_{\infty}+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j}T_{j}^{2}\right).$$

Il suit maintenant par (3.37) et (3.38) que (3.25) et (3.26) sont vérifiées si nous avons

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_{\tau}}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j}\left(r\right)\right\}+\frac{\gamma\gamma_{0}}{\left(1-\lambda\right)c^{2}}\left(\left\|\varphi\right\|_{\infty}+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j}T_{j}^{2}\right)<\overline{f} \tag{3.39}$$

et

$$\sup_{r\in\mathbb{R}}\left\{\overline{g_{\tau}}\left[r+\psi\left[r\right]\right]-\sum_{j=1}^{\infty}a_{j}\left(r\right)\right\}-\frac{\gamma\gamma_{0}}{\left(1-\lambda\right)c^{2}}\left(\left\|\varphi\right\|_{\infty}+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j}T_{j}^{2}\right)>\overline{f} \tag{3.40}$$

Exemple 36. *Considérons l'équation (3.29). Alors* $\gamma_0=\left|A\right|$ *et nous avons (3.30), (3.31), (3.33), (3.34) et donc, pour* $y=0$*, (3.39) et (3.40) sont satisfaites si*

$$\left|\theta_{1}\right|+\left|\theta_{2}\right|+\frac{A^{2}}{c^{2}-2\left|A\right|}\left(\frac{\left|\theta_{1}\right|}{12}+\frac{\left|\theta_{2}\right|\pi^{2}}{3}\right)<\left|A\right|.$$

C'est une amélioration par rapport à (3.35).

Conclusion

Cette thèse a porté sur l'étude de l'existence de solutions de deux types d'équations différentielles. La première une équation de premier degré périodique avec retard et impulsions. La seconde est l'équation de Duffing avec retard et impulsions presque périodiques dépendant de la moyenne de l'état.

On a montré à l'aide du théorème du point fixe de Banach, du principe d'approximation successive et du théorème des valeurs intermédiaires, que la solution est à variation bornée dans le cas de l'équation du premier degré avec retard et impulsions dépendent de l'état et intégrable au sens de Lebesgue pour la même équation mais dans le cas où les impulsions ne dépendent pas de l'état.

Pour l'équation de Duffing avec retard et impulsions presque périodiques dépendant de la moyenne de l'état, on a construit un espace de Hilbert qui nous a permis d'obtenir des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution presque périodique. Pour toutes ces solutions on a montré l'existence de bornes à priori comme condition supplémentaire d'existence des solutions.

Les résultats de cette thèse sont nouveaux et originaux. L'existence de solutions presque périodiques dans le cas de l'équation du premier degré avec retard et impulsions, et presque périodique dans le cas de l'équation de Duffing avec retard et impulsions presque périodiques dans le cas général (cas où les impulsions ne dépendent pas nécessairement de la moyenne de l'état), reste un problème ouvert.

Bibliographie

[1] M. U. Akhmet, On the general problem of stability for impulsive differential equations, *J. Math. Anal. Appl.,* **288** (2003), no. 1, 182-196.

[2] M. U. Akhmet et M. Turan, The differential equation on time scales through impulsive differential equations, *Nonlinear Anal.,* **65** (2006), no. 11, 2043-2060.

[3] C. D. Aliprentis et O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis.* Second edition. Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.

[4] G. Ballinger et X. Liu, Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Systems,* **5** (1999), no. 1-4, 579-591.

[5] J.-M. Belley et S. El Alaoui, Periodic First order delay equations with state dependent impulses, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A, Math. Anal.,* **14** (2007), 363-385.

[6] J.-M. Belley et K. Saadi Drissi, Almost periodic solutions to Josephson's equation, *Nonlinearity,* **16** (2003), 35-47.

[7] J.-M. Belley et M. Virgilio, Periodic Duffing delay equations with state dependent impulses, *J. Math. Anal. Appl.,* **306** (2005), 646-662.

[8] J.-M. Belley et M. Virgilio, Periodic Liénard-type delay equations with state-dependent impulses, *Nonlinear Anal.,* **64** (2006), no. 3, 568-589.

[9] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions,* New York : Dover Publications, 1954.

[10] H. A. Bohr, *Almost Periodic Functions,* New York : Chelsea, 1951.

[11] F. Dubeau, On first order ordinary differential equations with infinitely many state dependent impulses, *Differential Equations Dynam. Systems,* **5** (1997), no. 1, 85-89.

[12] F. Dubeau et J. Karrakchou, State-dependent impulsive delay-differential equations, *Appl. Math. Lett.,* **15** (2002), no. 3, 333-339.

[13] F. Dubeau, A. Ouansafi et A. Sakat, Approximation of ordinary differential equations with impulses. Second International Conference on Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (London, ON, 2001), *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A, Math. Anal.,* **10** (2003), no. 1-3, 275-287.

[14] A.M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations,* Berlin, Springer-Verlag, 1974.

[15] R. A. Gordan, *The integrals or Lebesgue, Denjoy, Perron et Henstock,* Graduate studies in Mathematics, 4. American Mathematical society, Providence, RI, 1994.

[16] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis,* John Wiley & Sons, Inc, New York-London-Sydney, 1968.

[17] C. Kou, S. Zhang et Y. Duan, Variational Lyapunov method and stability analysis for impulsive delay differential equations, *Comput. Math. Appl.,* **46** (2003), no. 12, 1761-1777.

[18] X. Liu et G. Ballinger, Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses, *Nonlinear Anal.,* Ser. A : Theory Methods, **51** (2002), 633-647.

[19] X. Liu et L. Chen, Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, *J. Math. Anal. Appl.,* **289** (2004), 279-291.

[20] J. J. Nieto, Periodic boundary value problems for first-order impulsive ordinary differential equations, *Nonlinear Anal.,* **51** (2002), no. 7, 1223-1232.

[21] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1974.

[22] H. L. Royden, *Real Analysis*, 3rd edition. Macmillan Publishing Compagny, New York, 1988.

[23] G. Tr. Stamov, Almost periodic solutions of impulsive differential equations with time-varying delay on the PC-Space, *Nonlinear Stud.,* **14** (2007), no. 3, 269-279.

[24] G. Tr. Stamov, Asymptotic stability in the large of the solutions of almost periodic impulsive differential equations, *Note Mat.,* **24** (2005), no. 2, 75-83.

[25] G. Tr. Stamov, Impulsive cellular neural networks and almost periodicity, *Proc. Japan Acad. Ser. A math. Sci.,* **80** (2004), no. 10, 198-203.

[26] G. Tr. Stamov, Lyapunov's functions for existence of almost periodic solutions of impulsive differential equations, *Adv. Stud. Contemp. Math., (Kyungshang),* **8** (2004), no. 1, 35-46.

[27] Y. Xia, J. Cao et M. Lin, Existence and exponential stability of almost periodic solutions for BAM neural networks with impulses, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.,* **13A** (2006), Part 1, suppl., 248-255.

[28] F. Zhang, Z. Ma et J. Yan, Boundary value problems for first order impulsive delay differential equations with a parameter, *J. Math. Anal. Appl.,* **290** (2004), 213-223.

[29] G. Zheng, Periodic and almost periodic solutions of discrete CNNs with delays, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.,* **13A** (2006), 1102-1112.