

# Couplage ultra-fort et dissipation en électrodynamique quantique en circuit

par

Félix Beaudoin

mémoire présenté au département de physique  
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 28 novembre 2011



**Library and Archives  
Canada**

**Published Heritage  
Branch**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque et  
Archives Canada**

**Direction du  
Patrimoine de l'édition**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Your file Votre référence  
ISBN: 978-0-494-83669-9**

**Our file Notre référence  
ISBN: 978-0-494-83669-9**

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

**Canada**

**Le 1<sup>er</sup> décembre 2011**

*le jury a accepté le mémoire de Monsieur Félix Beaudoin  
dans sa version finale.*

**Membres du jury**

**Professeur Alexandre Blais  
Directeur de recherche  
Département de physique**

**Professeur Mario Poirier  
Évaluateur internet au programme  
Département de physique**

**Professeur André-Marie Tremblay  
Président rapporteur  
Département de physique**

*À tous ceux qui aiment*



# Sommaire

L'électrodynamique quantique en cavité et en circuit étudie l'interaction lumière-matière à son stade le plus fondamental, dans lequel un atome unique, qu'il soit naturel ou artificiel, interagit avec un seul mode du champ électromagnétique. Dans ce système, le confinement du champ augmente l'intensité de l'interaction jusqu'à permettre d'observer l'échange cohérent de quanta entre lumière et matière [1, 2, 3]. Récemment, des expériences réalisées à l'aide de qubits supraconducteurs ont démontré des couplages record caractéristiques d'un nouveau régime, dit ultra-fort, dans lequel l'état fondamental n'est plus le vide, mais un état fortement intriqué entre l'atome et le champ [4, 5].

Malgré cet accroissement gigantesque du couplage lumière-matière, ce dernier est le plus souvent négligé lorsqu'on considère l'interaction de ce système avec son environnement. En effet, la plupart des travaux théoriques publiés récemment décrivent la dynamique dissipative du système atome-cavité en se basant sur l'équation maîtresse de l'optique quantique, un modèle valide seulement dans le cas de l'atome ou du résonateur séparés [6, 7, 8, 9].

Dans ce travail, on démontre qu'employer l'équation maîtresse de l'optique quantique en couplage ultra-fort mène à des prédictions qui violent la conservation de l'énergie. Pour pallier à ce problème, on établit un modèle de la dissipation qui inclut le couplage atome-champ. On montre en particulier que des fluctuations aléatoires dans la fréquence de l'atome artificiel peuvent générer des excitations dans le système à des fréquences précises. On indique aussi que des oscillations cohérentes à ces fréquences dans l'espacement des niveaux de l'atome pourraient être utiles pour accélérer le contrôle cohérent du système quantique. Notre modèle prédit finalement une asymétrie dans les raies de spectroscopie du système atome-cavité qui pourrait être exploitée pour sonder la densité spectrale de bruit de l'environnement à des fréquences jusqu'à ce jour inexplorées.

Mots-clés: Qubits supraconducteurs ; électrodynamique quantique en circuit ; interaction lumière-matière ; systèmes quantiques ouverts ; bruit quantique ; couplage ultra-fort



# Remerciements

Il n'y a peut-être qu'un auteur sur la page-titre de ce mémoire, mais bien plus d'une personne a, par ses conseils, ses encouragements ou simplement sa bonne humeur, contribué à ce que mon travail aboutisse à un produit fini. Tous ces gens, qu'ils soient nommés ou non dans cette section, ont ma plus sincère reconnaissance.

Mes premiers remerciements doivent bien sûr aller à Alexandre Blais, mon superviseur de recherche. Il va sans dire que sans cette source intarissable d'idées de projets et de questions nouvelles, je n'aurais jamais abouti aux résultats qui sont présentés ici. Alexandre est un professeur qui a su en tout temps me pousser à aller plus loin dans ma compréhension de la physique et dans mon travail sans jamais ce faisant miner mon moral. C'est sans doute une des plus grandes qualités que peut avoir un directeur de recherche. Je tiens par ailleurs à souligner que c'est en partie sa faute si j'ai finalement choisi de me lancer dans la théorie plutôt que l'expérience. Je le remercie pour cette gaffe, car j'adore ce que je fais.

J'ai eu la chance de faire mon travail de maîtrise avec plusieurs collègues toujours prêts à apporter leur aide. Ils ont également su m'endurer lors de quelques inévitables épisodes de frustration à l'égard des obstacles habituels de la recherche sans m'en vouloir par la suite. Je parle bien sûr de Maxime Boissonneault, avec sa rigueur implacable et ses impressionnants talents de programmation dont il a la générosité de faire bénéficier à tous. Je parle aussi de Jérôme Bourassa, avec qui j'ai eu la chance de travailler sur les états chats de Schrödinger. Jérôme a toujours à la fois la bonne intuition physique et le bon mot pour rire. Je le remercie également pour son aide et ses encouragements à ma première conférence, celle de l'APS à Dallas. Mes remerciements vont aussi à Kevin Lalumière, toujours prêt à saisir le marqueur pour « gossier » la solution à un problème au tableau blanc, et Adam Bolduc, qui pose les bonnes questions. Enfin, je tiens à remercier tous les étudiants et anciens étudiants de David Poulin avec lesquels j'ai partagé mon bureau, soit Olivier Landon-Cardinal (l'un des meilleurs étudiants au monde), Émilie Pelchat,



Gabrielle Denhez et bien sûr Guillaume Duclos-Cianci. Je remercie aussi chaleureusement Marcus Da Silva, qui a fait un stage postdoctoral à Sherbrooke avec Alexandre et David et m'a accueilli à Boston pour un stage de deux mois chez BBN Technologies.

Ma vie d'étudiant aurait été bien morne sans ces gens formidables que j'ai rencontrés à l'université et qui sont devenus mes amis. Vous êtes nombreux et je me contenterai donc de ne nommer que quelques-uns d'entre vous en espérant que vous ne m'en tiendrez pas rigueur. Je parle ici de Julien (toujours prêt pour un lunch), Sam et Félix (les meilleurs colocs de tout Sherbrooke), Alf et ses horribles cheveux, Branko, Ben, Poisson, Gizmo, Pat, Chloé, David Roy-Guay (qui brasse d'excellentes bières avec Guegui), Maxime Charlebois, Patrick Sémon et bien d'autres.

J'aimerais aussi bien sûr remercier ma famille pour son soutien constant. Mireille et Guy, merci beaucoup de vous intéresser autant à ce que je fais en allant jusqu'à demander à voir mon article et mon mémoire, même si je sais que vous ne comprenez pas grand chose. Avec mes deux couillons de frères, vous savez me remonter le moral!

Finalement, un tendre merci à Brigitte, la dernière mais non la moindre, qui a patienté pendant mes deux mois à Boston. Je pense très fort à toi.

# Table des matières

<b>Sommaire</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>ix</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 L'électrodynamique quantique en circuit et le couplage ultra-fort</b>	<b>5</b>
1.1 L'interaction lumière-matière et l'hamiltonien de Rabi . . . . .	5
1.2 L'approximation séculaire et le couplage ultra-fort . . . . .	9
1.2.1 Conditions pour négliger les termes non séculaires . . . . .	9
1.2.2 L'état fondamental . . . . .	10
1.2.3 Les états excités . . . . .	11
1.2.4 Au-delà du régime Bloch-Siegert . . . . .	15
1.2.5 Les approximations adiabatiques . . . . .	17
1.2.6 Les états non classiques . . . . .	18
1.2.7 Le régime de l'atome rapide . . . . .	21
1.2.8 Le régime de l'oscillateur rapide . . . . .	22
1.3 La réalisation du couplage ultra-fort . . . . .	25
1.3.1 Le rôle de la constante de structure fine en EDQ-cavité . . . . .	25
1.3.2 La réalisation du couplage ultra-fort en EDQ-circuit . . . . .	26
1.4 Quelques applications possibles du couplage ultra-fort en EDQ-circuit . . . . .	29
<b>2 Relaxation et déphasage pour un atome et un résonateur découplés</b>	<b>33</b>
2.1 Le modèle de Caldeira-Leggett . . . . .	34
2.2 L'oscillateur amorti dans les limites de Redfield et de l'optique quantique . . . . .	36

2.3	La relaxation dans un système à deux niveaux . . . . .	44
2.4	Le déphasage pur dans un système à deux niveaux . . . . .	44
2.5	Exemple : le système à deux niveaux amorti et soumis au déphasage pur .	46
2.6	Le déphasage pur dans un système à $N$ niveaux . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Relaxation et déphasage pour un atome et un résonateur couplés</b>	<b>49</b>
3.1	Les échecs de l'équation maîtresse de l'optique quantique . . . . .	49
3.1.1	Le déphasage habillé et l'effet Purcell . . . . .	50
3.1.2	L'effet Casimir dynamique . . . . .	51
3.1.3	La génération d'excitations parasites . . . . .	52
3.2	La dissipation dans le système atome-résonateur en couplage fort et ultra-fort	53
3.2.1	Présentation générale du modèle . . . . .	55
3.2.2	Les problèmes réglés par l'équation de Redfield . . . . .	58
3.2.3	Modèle semi-classique de l'effet Casimir dynamique . . . . .	59
3.2.4	L'effet Casimir dynamique dans le formalisme de l'équation de Redfield . . . . .	65
3.2.5	La dissipation dans le modèle de Jaynes-Cummings . . . . .	66
3.2.6	Une application de l'équation habillée : l'étude du bruit selon $\sigma_z$ . .	69
	<b>Conclusion</b>	<b>75</b>
	<b>A Approximation adiabatique avec un résonateur multi-modes rapide</b>	<b>77</b>
	<b>B Introduction à l'électrodynamique quantique en circuit</b>	<b>81</b>
	<b>C Dissipateurs pour les bains en <math>X</math> et en <math>\sigma_x</math></b>	<b>85</b>
	<b>D Dissipateurs pour le bain en <math>\sigma_z</math></b>	<b>89</b>
	D.1 Le modèle classique . . . . .	89
	D.2 Le modèle quantique . . . . .	91
	<b>E Conditions auxquelles l'équation de Redfield est applicable</b>	<b>95</b>
	<b>F Éléments de matrice apparaissant dans l'équation de Redfield</b>	<b>99</b>
	<b>G Taux de création de photons sous du bruit en <math>\sigma_z</math></b>	<b>103</b>

<i>Table des matières</i>	xi
<b>H Calcul du spectre de séparation de Rabi</b>	<b>105</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>118</b>



# Table des figures

1.1	Atome de Rydberg . . . . .	6
1.2	Électrodynamique quantique en cavité et en circuit . . . . .	8
1.3	Diagonalisation des hamiltoniens de Bloch-Siegert et de Jaynes-Cummings	13
1.4	Spectre de l'hamiltonien de Rabi . . . . .	16
1.5	Deux approches adiabatiques pour la diagonalisation de l'hamiltonien de Rabi . . . . .	18
1.6	Représentation d'états classiques et non classiques dans l'espace des phases	19
1.7	Compression de l'état fondamental dans la limite de l'atome rapide . . . . .	23
1.8	Un atome dans une cavité Fabry-Pérot . . . . .	25
1.9	Couplages capacitif et inductif . . . . .	27
1.10	Proposition pour la réalisation du couplage ultra-fort en EDQ-circuit . . . . .	28
2.1	Modèle de Caldeira-Leggett . . . . .	35
2.2	Régimes de Redfield et de l'optique quantique . . . . .	42
3.1	Excitations parasites induites par l'équation maîtresse de l'optique quantique	54
3.2	Transitions induites par l'environnement . . . . .	57
3.3	Effet d'une modulation cohérente de la fréquence du qubit sur le système qubit-résonateur . . . . .	62
3.4	Génération de photons due au bruit en $\sigma_z$ . . . . .	65
3.5	Représentation géométrique des éléments de matrice impliqués dans la relaxation . . . . .	67
3.6	Séparation de Rabi . . . . .	70
3.7	Asymétrie du spectre de transmission de Rabi en couplage ultra-fort. . . . .	73
A.1	Fidélité des états chats enchevêtrés . . . . .	79

B.1	Circuits linéaires et non linéaires . . . . .	83
E.1	Transitions permises dans le régime de Bloch-Siegert. . . . .	96
F.1	Comparaison de quelques éléments de matrice analytiques et numériques. .	101

# Introduction

**L**A mécanique quantique enseigne que tout système physique fermé évolue de manière réversible. Connaissant l'hamiltonien et l'état au temps  $t$  d'un tel système, son état en tout temps antérieur peut être déduit.

Cependant, même s'ils existaient dans la nature, de tels systèmes fermés ne pourraient pas en toute rigueur être observés. En effet, le contrôle et la mesure nécessitent un couplage du système quantique au monde extérieur, ce qui le rend sujet à la relaxation et à la décohérence. Autrement dit, une fois couplé à son environnement, le système tombe dans son état fondamental et toute superposition d'états qu'il contient est transformée en mélange statistique.

Cette dynamique irréversible, bien comprise d'un point de vue théorique, a aussi été étudiée expérimentalement dans le contexte de l'électrodynamique quantique en cavité (EDQ-cavité) [1]. Dans ce contexte, en exploitant le couplage fort d'un atome unique avec un seul mode du champ électromagnétique, des superpositions macroscopiques d'états quantiques de la lumière ont été construites et leur destruction due à leur interaction avec un réservoir a été observée par le groupe de Serge Haroche à l'École Normale Supérieure [10]. Ce même groupe a également pu contempler en laboratoire la naissance de photons uniques et leur fuite dans l'environnement [11, 12].

L'électrodynamique quantique en circuit (EDQ-circuit), un analogue de l'EDQ-cavité basé sur des circuits supraconducteurs [3, 13], offre aussi une compréhension détaillée des phénomènes de relaxation et de décohérence. L'émission spontanée d'un atome artificiel, ou qubit, a été caractérisée en tenant compte de l'influence de plusieurs modes de la cavité [14]. De plus, l'impact de la mesure sur la cohérence de l'atome est bien compris [15, 16], en particulier dans le régime dispersif, dans lequel l'atome et la cavité sont à des fréquences très séparées, rendant l'échange de quanta difficile [17]. La mesure à bifurcation, qui exploite l'effet Kerr dans une cavité non linéaire pour augmenter dramatiquement le rapport signal sur bruit, a également une influence bien connue sur l'état



de l'atome artificiel [18].

Bien que l'EDQ-cavité et l'EDQ-circuit permettent tous deux d'étudier la dissipation, les dispositifs de l'état solide ont typiquement des taux d'interaction lumière-matière beaucoup plus élevés. Par exemple, le couplage par le courant d'un qubit de flux [19] à une jonction Josephson placée dans un résonateur peut accentuer ce taux d'échange jusqu'à ce qu'il devienne de l'ordre des fréquences naturelles du qubit et du résonateur [20]. Ce couplage ultra-fort, pour lequel l'approximation dite séculaire est brisée, a été obtenu expérimentalement en utilisant pour résonateur un guide d'ondes coplanaire [5] et un circuit  $LC$  [21]. Parallèlement à ces efforts expérimentaux, la dynamique des états purs a été étudiée théoriquement dans ce régime [22, 23, 24, 25]. Par ailleurs, un modèle rigoureux décrivant la dissipation du système due à l'amortissement du résonateur en couplage ultra-fort a été élaboré par Hausinger et Grifoni [26]. Néanmoins, une description complète de la dissipation incluant la relaxation du qubit ainsi que les phénomènes de décohérence qui lui sont intrinsèques manque toujours à l'appel.

Le couplage atome-cavité est au coeur du problème de la dissipation en couplage ultra-fort. Lorsque le couplage entre ces deux sous-systèmes est faible, l'interaction avec l'environnement peut être traitée séparément pour le qubit et pour le résonateur [1]. Cependant, lorsque le taux d'échange entre l'atome et l'oscillateur est suffisant pour briser l'approximation séculaire, cette approche mène à des prédictions non physiques. Par exemple, tel qu'il le sera illustré plus tard à la figure 3.1, l'environnement peut sortir le système de son fondamental même à température nulle, ce qui est en contradiction évidente avec la conservation de l'énergie. En outre, en présence de couplage fort entre atome et cavité, des transitions à des fréquences très détachées l'une de l'autre apparaissent, ce qui brise l'approximation du bruit blanc, coutumière dans un tel système. Pour éviter ces ennuis, le couplage qubit-résonateur doit être inclus dans le traitement de la dissipation.

Dans ce travail, on obtient une équation du mouvement à température finie pour le système qubit-résonateur dans le contexte de l'EDQ-circuit. Cette équation tient compte des trois principaux phénomènes irréversibles qui sont connus dans ces dispositifs : la relaxation du qubit, l'amortissement de la cavité et le déphasage pur de l'atome artificiel. Elle tient également compte de l'interaction atome-cavité, ce qui permet de l'employer même en régime de couplage ultra-fort.

Dans le chapitre 1, on introduit l'hamiltonien du système par analogie avec le cas de l'interaction lumière-matière en EDQ-cavité. Le régime de couplage ultra-fort est en-

suite défini comme brisant l'approximation séculaire. On définit également le régime de Bloch-Siegert, pour lequel les termes qui rendent cette approximation caduque peuvent être inclus dans une théorie de perturbation au deuxième ordre. Les états fondamental et excités sont par la suite présentés à l'intérieur de ce cadre, puis on survole quelques méthodes approximatives permettant d'étudier le système qubit-résonateur au-delà de l'approximation de Bloch-Siegert. Après avoir expliqué comment l'interaction lumière-matière peut en pratique être rendue ultra-forte, on suggère quelques applications possibles pour un tel système dans le contexte de la physique du solide et de l'information quantique.

Alors qu'au chapitre 1, le système qubit-résonateur isolé était considéré, au chapitre 2, on couple séparément chacun des sous-systèmes à un environnement. On présente d'abord le modèle de Caldeira-Leggett, qui permet d'introduire l'irréversibilité dans la mécanique quantique. On exploite ensuite ce dernier pour obtenir l'équation du mouvement d'un oscillateur anharmonique amorti, puis d'un système à deux niveaux soumis à la relaxation. On introduit ensuite la notion de déphasage pur dans un tel système, puis on la généralise à  $N$  niveaux.

Le troisième chapitre regroupe l'essentiel des résultats originaux de ce travail. On explique d'abord comment l'approche du chapitre précédent, valide pour le qubit et le résonateur séparés, échoue lorsqu'une interaction est introduite entre les deux sous-systèmes. Puis, on présente l'équation maîtresse obtenue ici pour le système qubit-résonateur couplé. Différents phénomènes sont ensuite analysés à la lumière de cette équation du mouvement. Premièrement, on décrit comment ce modèle éclaircit notre compréhension d'un analogue de l'effet Casimir dynamique prédit dans un tel système. Subséquemment, on propose une expérience qui, sous certaines approximations, permettrait d'étudier le spectre du bruit qui constitue une source intrinsèque de décohérence pour le qubit en EDQ-circuit.



# Chapitre 1

## L'électrodynamique quantique en circuit et le couplage ultra-fort

Dans ce chapitre, on présente l'hamiltonien du système atome-cavité : l'hamiltonien de Rabi. En EDQ-circuit, il existe plusieurs variétés de qubits dont l'interaction avec le résonateur est décrite par cet hamiltonien. On introduit donc ce dernier dans le contexte plus facile d'approche de l'EDQ-cavité. On définit ensuite l'approximation séculaire ainsi que le régime de couplage ultra-fort. Après avoir introduit des méthodes approximatives pour obtenir les états propres de l'hamiltonien de Rabi dans ce régime, on explique qu'il est fondamentalement impossible d'atteindre le couplage ultra-fort en EDQ-cavité et comment l'EDQ-circuit l'autorise. Après avoir expliqué la technique employée jusqu'à ce jour pour rendre le taux d'interaction qubit-résonateur comparable aux fréquences de résonance du système, on s'attaque aux applications possibles de ce nouveau régime.

### 1.1 L'interaction lumière-matière et l'hamiltonien de Rabi

En EDQ-cavité tout comme en EDQ-circuit, l'interaction d'un atome à deux niveaux avec un mode du champ électromagnétique est décrite par l'hamiltonien de Rabi. Ce modèle quantique est d'un intérêt fondamental pour l'étude microscopique du couplage atome-champ, mais également d'un intérêt pratique sans équivoque, puisqu'il est à la base d'une des architectures les plus prometteuses pour la réalisation d'un ordinateur quantique [3, 13]. Que l'on traite l'interaction d'un atome naturel ou artificiel avec la

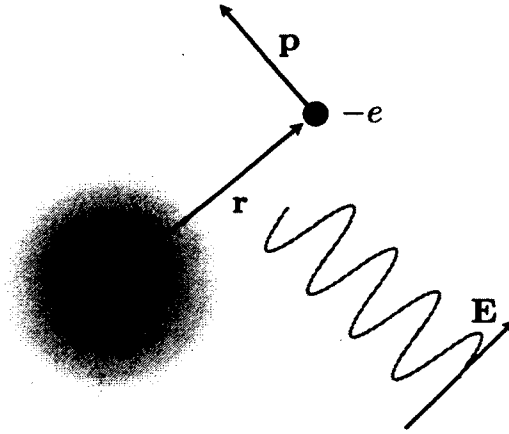


FIGURE 1.1 – Atome de Rydberg. Un tel atome est préparé dans un état hautement excité de façon à maximiser le rayon des orbites électroniques et donc le dipôle électrique. Typiquement, les expériences d'EDQ-cavité se font avec des atomes de césium ou de rubidium préparés dans un état pour lequel le nombre quantique principal  $n$  est de l'ordre de 50. Dans le traitement théorique fait ici, on suppose que, dans cet état, l'orbite d'un des électrons est tellement éloignée du reste du nuage électronique que l'atome devient effectivement monoélectronique.

lumière, on obtient le même hamiltonien. Nous justifierons donc ce modèle dans le cas plus simple de l'atome naturel. L'essentiel de la discussion s'inspire de la référence [27].

Tel qu'illustré à la figure 1.1, dans l'approximation dipolaire et en considérant un atome monoélectronique, l'hamiltonien du système atome-champ est

$$H = H_A + H_C - er \cdot \mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Ici,  $\mathbf{E}$  est le champ électrique,  $e$  la charge électronique et  $\mathbf{r}$  l'opérateur position. On entend par atome un système à  $N$  niveaux caractérisé par l'hamiltonien

$$H_A = \sum_i E_i |i\rangle \langle i|. \quad (1.2)$$

Quant au champ électromagnétique, il est modélisé par un ensemble de modes harmoniques, donc par  $[\hbar = 1]$

$$H_C = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (1.3)$$

où les  $a_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}$  sont les opérateurs d'échelle pour le mode  $\mathbf{k}$ . Dans l'hamiltonien ci-dessus, on

ignore l'énergie du point zéro, qui ne fait ici qu'ajouter une constante non pertinente à tous les niveaux d'énergie. En optique quantique [27], on décrit le champ électrique par

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger}), \quad (1.4)$$

où  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  est un vecteur unitaire dans la direction de  $\mathbf{k}$  et  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = (\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2}$ , avec  $V$  le volume occupé par le champ et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. Cela constitue la quantification du champ électrique. Enfin, on peut réécrire l'opérateur moment dipolaire électrique en employant la relation de fermeture de l'espace de Hilbert de l'atome

$$-e\mathbf{r} = -\sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|r|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \hat{\mathbf{r}} \wp_{i,j} |i\rangle\langle j|, \quad (1.5)$$

où  $\wp_{i,j} = -e\langle i|r|j\rangle$ . En injectant les équations (1.2) à (1.5) dans l'équation (1.1), on obtient l'hamiltonien suivant pour l'interaction dipolaire entre un atome et le champ électrique

$$H = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{i,j} \hat{\mathbf{r}} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}} \wp_{i,j} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} |i\rangle\langle j| (a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger}). \quad (1.6)$$

L'hamiltonien ci-dessus, quoique général, est peu satisfaisant du fait de sa complexité. Pour simplifier le tout, on imagine un atome à seulement deux niveaux couplé à un seul mode du champ électrique. C'est la situation standard en EDQ-cavité [1] et en EDQ-circuit [13] (voir figure 1.2), où la présence d'un résonateur de très haute qualité permet d'obtenir un espacement entre les raies spectrales de chacun des modes du champ électromagnétique qui est très grand devant leur largeur ainsi que devant la fréquence du couplage lumière-matière. Dans ce cas, l'atome n'interagit effectivement qu'avec un de ces modes. On introduit alors la base dite *nue*, engendrée par l'ensemble des produits tensoriels possibles entre les états de Fock  $|n\rangle$  du mode pertinent du champ électromagnétique et les états fondamental  $|\downarrow\rangle$  et excité  $|\uparrow\rangle$  de l'atome à deux niveaux. On définit également les opérateurs d'échelle  $\sigma_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$  et  $\sigma_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$  de l'atome, ainsi que les matrices de Pauli  $\sigma_x = \sigma_- + \sigma_+$ ,  $\sigma_y = i(\sigma_- - \sigma_+)$  et  $\sigma_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ . Dans cette base, l'hamiltonien ci-dessus se réduit à l'expression

$$H_R = \omega_r a^{\dagger} a + \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + g(\sigma_- + \sigma_+)(a + a^{\dagger}), \quad (1.7)$$

qu'on appelle l'hamiltonien de Rabi. Dans cette équation,  $\omega_r$  est la fréquence du mode

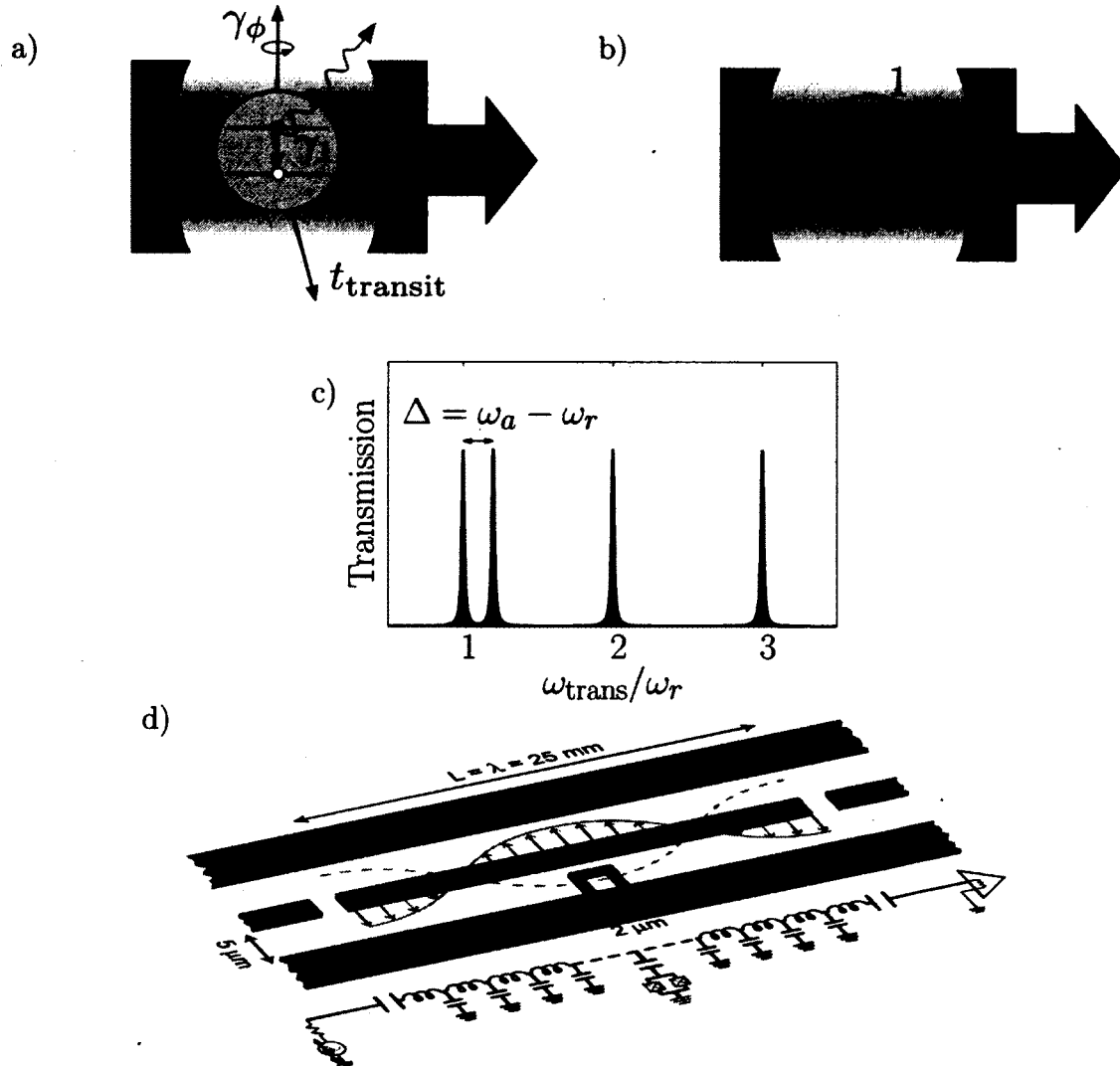


FIGURE 1.2 – Électrodynamique quantique en cavité et en circuit. a) Un atome de Rydberg à deux niveaux traverse une cavité supraconductrice en un temps  $t_{\text{transit}}$ . Il échange des photons avec la cavité à un taux  $g$ . Dans le cadre de l'équation maîtresse de l'optique quantique, expliquée au chapitre 2, la cavité fuit à un taux  $\kappa$ , l'atome relaxe à un taux  $\gamma_1$  et perd sa cohérence à un taux  $\gamma_\phi$ . b) Amplitude du champ électrique pour les trois modes de plus basse fréquence dans la cavité. c) Spectre de transmission correspondant, avec les fréquences normalisées par rapport à celle du premier mode du résonateur. Les modes de la cavité sont en vert, alors que la raie de transmission de l'atome est en bleu. Si cette raie est suffisamment proche du premier mode ( $\Delta \ll \omega_r$ ), où  $\omega_r$  est l'intervalle de fréquence entre les modes et si  $g, \kappa, \gamma_1, \gamma_\phi \ll \omega_r$ , on peut garder seulement ce premier mode dans l'hamiltonien. d) Électrodynamique quantique en circuit. Un qubit supraconducteur fait office d'atome artificiel et est placé dans un guide d'ondes coplanaire qui, lui, joue le rôle de la cavité.

pertinent du résonateur,  $\omega_a$  est la fréquence de séparation des deux niveaux de l'atome et  $g = \rho_{\uparrow\downarrow} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ . On suppose ici que  $\rho_{\uparrow\downarrow} = \rho_{\uparrow\downarrow} \in \mathbb{R}^3$  afin de simplifier la discussion.

On peut mettre deux processus en évidence en réécrivant le terme d'interaction atome-champ dans l'équation (1.7) comme

$$H_{AC} = g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) + g(a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+). \quad (1.8)$$

Le premier, représenté par un terme en  $g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$ , est l'échange cohérent d'une excitation entre l'atome et le champ à la fréquence  $g$ . C'est le terme dit *séculaire* ou *rotatif*. Le second, qui correspond à  $g(a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+)$ , est la création ou la destruction simultanée d'excitations virtuelles dans les deux sous-systèmes. C'est le terme *non séculaire* ou *contre-rotatif*. La prochaine section précise l'importance relative de ces deux processus en fonction du couplage.

## 1.2 L'approximation séculaire et le couplage ultra-fort

Bien que l'hamiltonien de Rabi ait une forme très simple, sa forme diagonale, découverte récemment par Braak [28] est très complexe. En effet, les niveaux d'énergie correspondants se définissent par la solution en séries d'équations transcendantes. Cependant, pour de faibles valeurs de  $g$  devant  $\omega_r$  et  $\omega_a$ , il est possible de négliger les termes non séculaires pour le ramener à un hamiltonien simplifié, celui de Jaynes-Cummings. Dans cette section, on obtient d'abord les critères pour lesquels l'hamiltonien de Jaynes-Cummings peut être employé au lieu de celui de Rabi. On décrit ensuite les principales différences entre l'état fondamental Jaynes-Cummings et l'état fondamental Rabi dans la limite  $g \ll \omega_r + \omega_a$ . On explore ensuite quelques propriétés de ce fondamental au-delà de cette limite.

### 1.2.1 Conditions pour négliger les termes non séculaires

Afin de simplifier le traitement de l'hamiltonien de Rabi et de mettre en lumière les limites à l'intérieur desquelles on peut négliger les termes non séculaires, on applique la transformation unitaire suivante, apportée par Hausinger et Grifoni [29, 26, 21]

$$U = \exp \{ \Lambda(a\sigma_- - a^\dagger\sigma_+) + \xi(a^2 - a^{\dagger 2})\sigma_z \}, \quad (1.9)$$



où  $\Lambda = g/\Sigma$ ,  $\xi = g\Lambda/2\omega_r$  et  $\Sigma = \omega_r + \omega_a$ . On emploie la formule de Campbell-Baker-Hausdorff

$$e^{-\lambda X} H e^{\lambda X} = H + \lambda [H, X] + \frac{\lambda^2}{2!} [[H, X], X], \quad (1.10)$$

au deuxième ordre en  $g$ , ce qui suppose  $g \ll \Sigma$ . On obtient alors l'hamiltonien efficace de Bloch-Siegert

$$U^\dagger H_R U \simeq H_{BS} = (\omega_r + \mu \sigma_z) a^\dagger a + \frac{\tilde{\omega}_a}{2} \sigma_z + g(a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-), \quad (1.11)$$

où  $\tilde{\omega}_a = \omega_a + \mu$  et  $\mu = g^2/\Sigma$ .

Pour  $g \ll \Sigma$ , l'impact des termes non séculaires est donc de déplacer les fréquences de l'atome et du mode du champ électromagnétique par  $\mu$ , le décalage de Bloch-Siegert. En effet, poser  $\mu = 0$  revient à négliger complètement les termes non séculaires dans l'hamiltonien de Rabi pour obtenir l'hamiltonien de Jaynes-Cummings

$$H_{JC} = \omega_r a^\dagger a + \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + g(a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-). \quad (1.12)$$

Dans cette situation, on dit que l'*approximation séculaire* a été réalisée.

Le plus souvent, c'est l'hamiltonien de Jaynes-Cummings qui est utilisé. Typiquement, en EDQ-cavité [30, 11],  $g/\omega_r \sim 10^{-6}$ . Dans ce cas, prendre  $\omega_r/2\pi = \omega_a/2\pi = 50$  GHz mène à  $\mu/2\pi \sim 10^{-2}$  Hz, ce qui est complètement négligeable devant la largeur des raies spectrales reliées aux transitions du système. On peut alors négliger complètement les termes contre-rotatifs et on appellera par la suite cette situation *régime séculaire*.

Dans les expériences habituelles d'EDQ-circuit [3, 31], on a plutôt  $g/\omega_r \sim 10^{-2}$ . Prendre des paramètres typiques comme  $g/2\pi = 100$  MHz et  $\omega_r/2\pi = \omega_a/2\pi = 6$  GHz mène à  $\mu/2\pi \simeq 0.8$  MHz. Cette valeur est très proche de la largeur des raies en EDQ-circuit. Même si l'approximation séculaire donne en pratique des prédictions comparables aux résultats expérimentaux, il suffit d'augmenter  $g$  d'un ordre de grandeur pour que  $\mu$  devienne beaucoup plus grand que la largeur des raies et que des effets des termes contre-rotatifs deviennent évidents. On dit alors du couplage qu'il est *ultra-fort* et on appelle cette situation *régime non séculaire*.

## 1.2.2 L'état fondamental

On s'attarde maintenant à une des différences les plus évidentes entre les régimes séculaire et non séculaire : l'état fondamental du système. Pour simplifier le traitement,

on choisit  $g \ll \Sigma$  de façon à utiliser la transformation (1.9). Le cas séculaire est par la suite obtenu simplement en posant  $\Lambda = \xi = 0$ .

Dans la base de l'hamiltonien transformé donné par l'équation (1.11), l'état fondamental est le vide, qu'on écrit  $|\downarrow, 0\rangle$ . Si on revient dans la base nue, soit celle de l'hamiltonien de Rabi, on obtient l'expression suivante pour le fondamental au deuxième ordre en  $g$

$$|\widetilde{\downarrow}, 0\rangle \simeq U|\downarrow, 0\rangle \simeq \left(1 - \frac{\Lambda^2}{2}\right)|\downarrow, 0\rangle - \Lambda|\uparrow, 1\rangle + \xi\sqrt{2}|\downarrow, 2\rangle. \quad (1.13)$$

La différence la plus marquée entre cet état fondamental et celui de Jaynes-Cummings, qui se réduit à  $|\downarrow, 0\rangle$ , est la présence d'excitations virtuelles dans l'atome et dans le champ. En moyenne, le nombre de photons virtuels et la population de l'état excité de l'atome sont donnés par

$$\langle a^\dagger a \rangle \simeq \langle P_\uparrow \rangle \simeq \Lambda^2 = \left(\frac{g}{\omega_r + \omega_a}\right)^2. \quad (1.14)$$

Ce nombre donne aussi approximativement  $1 - |\langle \widetilde{\downarrow}, 0 | \downarrow, 0 \rangle|^2$  et est donc relié au recouvrement des états fondamentaux Jaynes-Cummings et Bloch-Siegert.

Il serait tentant de proposer une expérience où l'on observerait ces populations dues aux termes contre-rotatifs [32], par exemple par une mesure dispersive sur le qubit [3, 13] ou sur le résonateur [33, 16]. Ce serait oublier le caractère virtuel de ces excitations. En effet, puisque ces mesures se font par spectroscopie, elles donnent des résultats qui dépendent des niveaux d'énergie du système et se comprennent donc dans la base *habillée*, soit celle dans laquelle l'hamiltonien est diagonal. Dans cette base, il n'y a évidemment pas d'excitations dans le fondamental, qui s'écrit  $|\downarrow, 0\rangle$  dans le régime Bloch-Siegert. Il n'est pas trivial de mesurer séparément l'état du qubit ou du résonateur en couplage ultra-fort, car dans ce régime, ces deux systèmes sont enchevêtrés.

En plus d'exhiber des excitations virtuelles, l'état fondamental de l'hamiltonien de Rabi exprimé dans la base nue manifeste de l'intrication entre l'atome et le champ. Nous verrons plus loin qu'à de très fortes valeurs de  $g$ , cette intrication peut être exploitée pour générer des états non classiques du champ électromagnétique.

### 1.2.3 Les états excités

On donne ici la forme des états et énergies propres excités pour les hamiltoniens de Jaynes-Cummings et de Bloch-Siegert. Commençons par définir l'opérateur nombre total

de quanta comme

$$N_q = a^\dagger a + |\uparrow\rangle\langle\uparrow|. \quad (1.15)$$

On obtient facilement  $[H_{\text{BS}}, N_q] = [H_{\text{JC}}, N_q] = 0$ . Cela signifie que ces opérateurs ont une base de vecteurs propres communs. Cette base est donnée par les paires d'états comprenant le même nombre total d'excitations  $n$ , soit  $\{|\downarrow, n\rangle, |\uparrow, n-1\rangle\}$ . En effet, ces états sont des états propres de  $N_q$ . Cependant, comme chacun de ces doublets est dégénéré par rapport à  $N_q$ , il reste à diagonaliser l'hamiltonien à l'intérieur des sous-espaces associés à chacun d'eux pour obtenir le spectre de  $H_{\text{BS}}$  et donc aussi de  $H_{\text{JC}}$ .

Dans la base du doublet  $\{|\downarrow, n\rangle, |\uparrow, n-1\rangle\}$ , l'hamiltonien de Bloch-Siegert s'écrit

$$H_{\text{BS}}^n = \begin{pmatrix} \langle\downarrow, n|H_{\text{BS}}|\downarrow, n\rangle & \langle\downarrow, n|H_{\text{BS}}|\uparrow, n-1\rangle \\ \langle\uparrow, n-1|H_{\text{BS}}|\downarrow, n\rangle & \langle\uparrow, n-1|H_{\text{BS}}|\uparrow, n-1\rangle \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$= \begin{pmatrix} (\omega_r - \mu)n - (\omega_a + \mu)/2 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & (\omega_r + \mu)n + (\omega_a + \mu)/2 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

En diagonalisant cette matrice, on trouve les énergies et les états propres de l'hamiltonien efficace

$$E_{n\pm} = n\omega_r \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta_n^{\text{BS}})^2 + 4g^2n}, \quad (1.18)$$

$$|n, +\rangle = -\sin\theta_n|\uparrow, n-1\rangle + \cos\theta_n|\downarrow, n\rangle, \quad (1.19)$$

$$|n, -\rangle = \cos\theta_n|\uparrow, n-1\rangle + \sin\theta_n|\downarrow, n\rangle, \quad (1.20)$$

où  $\Delta_n^{\text{BS}} = \Delta + 2\mu n$ . Sont également définis le désaccord en fréquence  $\Delta = \omega_a - \omega_r$  et l'angle de mélange

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{\Delta_n^{\text{BS}} - \sqrt{(\Delta_n^{\text{BS}})^2 + 4g^2n}}{2g\sqrt{n}}\right). \quad (1.21)$$

La figure 1.3a) illustre la signification physique des états propres obtenus ci-dessus. Comme l'indiquent les équations (1.19) et (1.20), dans la base de l'hamiltonien efficace, les états propres sont une superposition des états  $|\uparrow, n-1\rangle$  et  $|\downarrow, n\rangle$  ayant le même nombre total d'excitations. La contribution de chaque état dans cette superposition est donnée par l'angle  $\theta_n$ , lui-même déterminé par  $n$ ,  $g$  et  $\Delta_n^{\text{BS}}$ . Pour  $g/\Delta_n^{\text{BS}} \rightarrow 0$ , l'atome et le champ sont découplés et les états propres sont les états produit tensoriel  $|\uparrow/\downarrow\rangle \otimes |n\rangle$ . Pour des valeurs finies de ce rapport, l'atome devient en partie champ et le champ en partie atome.

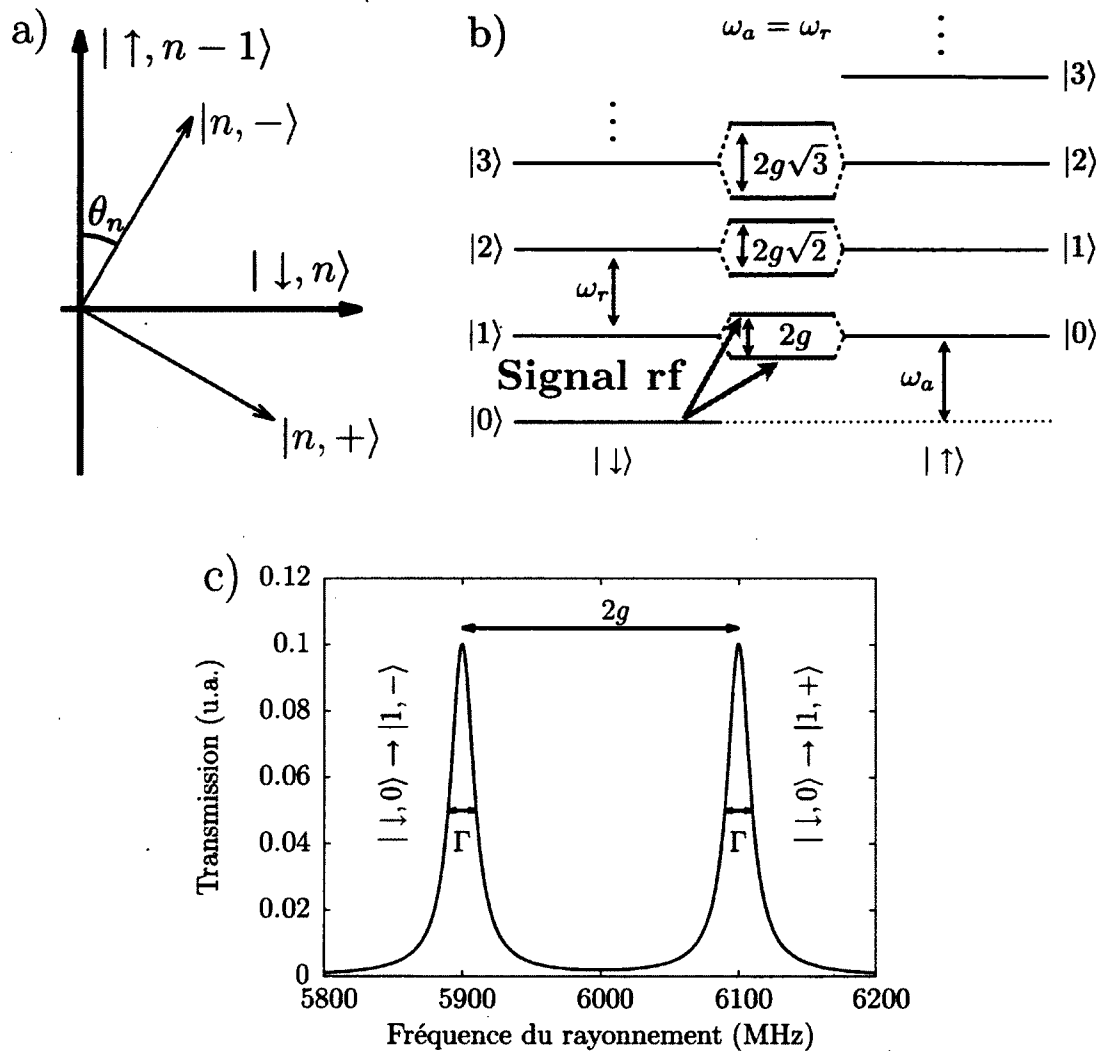


FIGURE 1.3 – Diagonalisation des hamiltoniens de Bloch-Siegert et de Jaynes-Cummings. a) Signification de l'angle de mélange dans ces deux hamiltoniens. Pour un doublet de nombre d'excitations  $n$ , les états propres sont une superposition des états orthogonaux  $|\uparrow, n-1\rangle$  et  $|\downarrow, n\rangle$ . La contribution de chacun de ces états de la base nue est déterminée par l'angle  $\theta_n$ . b) Structure des niveaux d'énergie de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings pour un atome en résonance avec le mode du champ électromagnétique. Le couplage lève la dégénérescence des niveaux  $|\uparrow, n-1\rangle$  et  $|\downarrow, n\rangle$ . Se forment alors des doublets dont la séparation est  $2g\sqrt{n}$ . Cette structure peut être sondée spectroscopiquement en mesurant la transmission d'un signal rf. c) Représentation schématisée des résultats attendus pour la spectroscopie du premier doublet Jaynes-Cummings pour  $\omega_a/2\pi = \omega_r/2\pi = 6$  GHz et  $g/2\pi = 100$  MHz.

Dans le cas extrême pour lequel  $\Delta_n^{\text{BS}} = 0$ ,  $\theta_n = -\pi/4$  et les états propres deviennent

$$|n, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, n-1\rangle + |\downarrow, n\rangle), \quad (1.22)$$

$$|n, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, n-1\rangle - |\downarrow, n\rangle). \quad (1.23)$$

L'atome et le mode du champ électromagnétique sont alors dits en résonance. Dans ce contexte, il devient impossible d'associer une excitation purement à l'atome ou au champ, les deux systèmes étant maximalelement intriqués. Pour cette raison, on parle alors d'une « molécule lumière-matière ». Une telle interaction de la lumière peut aussi survenir en physique du solide, par exemple avec des modes phononiques ou plasmoniques. Cet objet fortement couplé porte alors le nom de « polariton » [34, 35].

Il vaut la peine de s'attarder un peu sur l'influence des termes non séculaires sur la condition de résonance. Sous l'approximation séculaire, c'est-à-dire lorsque les décalages de Bloch-Siegert sont négligeables, cette condition se réduit à  $\Delta_n^{\text{BS}} = \Delta = 0$ . Autrement dit, l'atome et le mode du champ électromagnétique doivent avoir la même fréquence. Cependant, dans le régime où les termes non séculaires sont inclus de manière perturbative, les fréquences du qubit et du résonateur sont changées par le couplage. Pour avoir résonance, et donc  $\theta_n = -\pi/4$ , il faut donc tenir en compte ce décalage de Bloch-Siegert. La condition de résonance se réécrit alors

$$\omega_a^{(\text{res.})} = \omega_r \sqrt{1 - 2n \left(\frac{g}{\omega_r}\right)^2}. \quad (1.24)$$

Puisque, dans le régime séculaire,  $g/\omega_r \rightarrow 0$ , les termes non séculaires ont pour effet de décaler la fréquence de résonance d'une quantité différente pour chaque doublet. Il est donc impossible d'avoir chaque doublet simultanément en résonance en dehors de l'approximation séculaire, c'est-à-dire qu'un seul des doublets à la fois peut présenter un mélange maximal entre l'atome et le champ.

Lorsqu'il y a résonance dans un doublet de même nombre d'excitations dans l'hamiltonien efficace de Bloch-Siegert, les énergies associées aux états  $|n, \pm\rangle$  sont simplement  $E_{n,\pm} = n\omega_r \pm g\sqrt{n}$ . La figure 1.3b) illustre ce phénomène dans le régime séculaire. Sans interaction atome-champ, pour  $\omega_a = \omega_r$ , les états à l'intérieur d'un même doublet ont la même énergie  $n\omega_r$  et sont donc dégénérés. Le couplage vient lever cette dégénérescence par la formation d'une paire de niveaux séparés par l'énergie  $2g\sqrt{n}$ . Tel qu'illustré à

la figure 1.3c), cette levée de dégénérescence peut être observée expérimentalement par spectroscopie si  $g \gg \Gamma$ , où  $\Gamma$  est la largeur des raies spectrales due à la relaxation et au déphasage du système. Ce régime porte le nom de *couplage fort*. Il est couramment obtenu expérimentalement avec des atomes de Rydberg dans des cavités supraconductrices [30, 11, 12, 10] ainsi qu'avec des qubits supraconducteurs dans des résonateurs coplanaires [31, 3]. Il vaut cependant la peine de préciser qu'en régime de Bloch-Siegert, cette description n'est plus aussi simple, puisqu'il est impossible d'y avoir résonance pour plus d'un doublet à la fois. Par exemple, s'il y a résonance pour le premier doublet, l'espacement entre les niveaux des doublets supérieurs n'est plus strictement  $2g\sqrt{n}$ , mais approximativement  $2g\sqrt{n}(1 + \Lambda^2(n-1)/2n)$ .

### 1.2.4 Au-delà du régime Bloch-Siegert

Dans la section précédente, l'influence des termes non séculaires est incluse de manière perturbative, ce qui permet de se placer dans la base d'un hamiltonien efficace qui conserve  $N_q$ . Cependant, si la condition  $g \ll \omega_a + \omega_r$  n'est pas remplie, il n'est plus possible de se placer dans la base de Bloch-Siegert. Puisque  $[N_q, H_R] \neq 0$ , la structure des doublets décrite ci-dessus est perdue, car alors une interaction apparaît entre les paires d'états de même nombre total d'excitations. Il reste cependant possible d'énoncer quelques caractéristiques générales des états propres de l'hamiltonien de Rabi. Ces vecteurs et énergies propres peuvent aussi être écrits analytiquement sous certaines approximations ou obtenus numériquement.

Définissons d'abord l'opérateur *parité du nombre d'excitations*

$$\Pi = (-1)^{a^\dagger a + |\uparrow\rangle\langle\uparrow|} = (-1)^{N_q}. \quad (1.25)$$

Il est facile de constater que  $[H_R, \Pi] = 0$ . En effet, les termes séculaires préservent trivialement la parité, puisqu'ils préservent le nombre total d'excitations. Par ailleurs, les termes non séculaires créent ou détruisent des excitations par paires, de sorte qu'ils ne peuvent changer  $\Pi$ . Cela permet de définir les chaînes d'états de parité paire (+1) ou impaire (-1) [23]

$$\begin{aligned} +1: & \quad |\downarrow, 0\rangle \leftrightarrow |\uparrow, 1\rangle \leftrightarrow |\downarrow, 2\rangle \leftrightarrow |\uparrow, 3\rangle \leftrightarrow |\downarrow, 4\rangle \\ -1: & \quad |\uparrow, 0\rangle \leftrightarrow |\downarrow, 1\rangle \leftrightarrow |\uparrow, 2\rangle \leftrightarrow |\downarrow, 3\rangle \leftrightarrow |\uparrow, 4\rangle. \end{aligned}$$

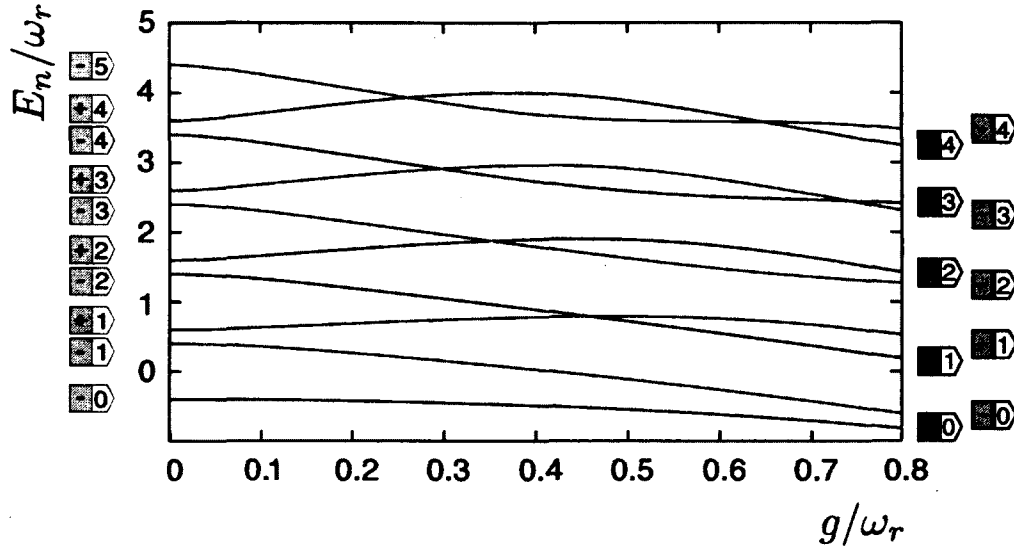


FIGURE 1.4 – Spectre de l'hamiltonien de Rabi. Les lignes bleues représentent les états propres pairs ( $\Pi = +1$ ), alors que les lignes rouges représentent les états impairs ( $\Pi = -1$ ). À faible couplage, ces états sont bien décrits dans la base de Bloch-Siegert par des kets  $|n, q\rangle$ , où  $n$  est le nombre total d'excitations et  $q = \pm$ . À fort couplage, cependant, ce modèle n'est plus valide. Pourtant, la parité reste un bon nombre quantique. Puisque seuls les niveaux d'énergie de parité distincte peuvent se croiser, les états propres de l'hamiltonien de Rabi peuvent s'écrire comme  $|\pi, n_1\rangle$ , où  $\pi$  est la valeur propre de  $\Pi$  et  $n_1$  est un second nombre quantique permettant d'identifier les états propres pour chaque valeur de la parité. La figure est tirée de la référence [28].

Dans ce schéma, les flèches noires représentent le couplage par les termes séculaires et les flèches rouges celui par les termes non séculaires. Ainsi, si un système décrit entièrement par  $H_R$  est placé dans une superposition arbitraire d'états de même parité, il restera dans cette chaîne. Dans cette optique, le régime séculaire est caractérisé par la brisure des chaînes de parité entre les doublets de même nombre total d'excitations, c'est-à-dire par la disparition des flèches rouges dans le schéma ci-dessus.

L'idée de la conservation de la parité met en évidence une propriété importante de l'hamiltonien de Bloch-Siegert. Puisque, dans la base de l'hamiltonien efficace, les états appartenant à un même doublet ont le même nombre d'excitations, ils ont aussi trivialement la même parité. Cette propriété sera exploitée à la section 3.2 pour traiter la dissipation dans ce régime.

En plus d'être utile d'un point de vue strictement intuitif, la conservation de la parité est au coeur de la solution analytique de l'hamiltonien de Rabi obtenue par Braak [28].

En effet, ce dernier introduit le nombre quantique  $\pi$ , correspondant à la parité  $+1$  ou  $-1$ . Fixer la parité du système atome-champ permet de le réduire à deux sous-systèmes dans lesquels il est alors possible de définir un nombre quantique  $n_1$  qui numérote chacun des états propres. Cette idée est motivée par le fait que, si on trace le spectre de  $H_R$  en fonction de  $g$ , les états propres de même parité ne se croisent jamais, tel qu'illustré à la figure 1.4. Les énergies propres correspondant aux états sont alors obtenues en trouvant le  $n_1$ -ième zéro d'une fonction spéciale  $G_{n_0}(x)$ . Ce résultat est majeur, car il prouve que l'hamiltonien de Rabi est intégrable, alors que la communauté scientifique a cru le contraire pendant des décennies. Cependant, une question reste ouverte : celle d'exprimer ces états propres dans la base nue. Une telle démarche permettrait par exemple de mieux comprendre comment la molécule lumière-matière se couple à son environnement.

Bien que la solution analytique de Braak ne donne pas directement les états propres de l'hamiltonien de Rabi dans la base nue, plusieurs techniques analytiques précises ont été développées pour diagonaliser approximativement  $H_R$  et exprimer la solution en fonction des états propres sans couplage. En premier lieu, des méthodes variationnelles ont été élaborées pour obtenir un état fondamental approximatif. Dans la référence [36], les auteurs obtiennent un estimé du fondamental en prenant pour ket d'essai une superposition de deux états déplacés et comprimés. D'autres auteurs [37] choisissent une combinaison de méthodes perturbatives et variationnelles pour arriver à un fondamental approximatif qui reste passablement près du résultat numérique pour  $g \lesssim 0.7\omega_r$ . Ils utilisent ensuite cette méthode pour estimer  $\langle a^\dagger a \rangle$  dans l'état de plus basse énergie. En appliquant un opérateur déplacement [27, 38] ainsi que la théorie de perturbation de Van Vleck [29], Hausinger et Grifoni [25] obtiennent une expression pour tous les états propres de  $H_R$  pour  $g$  arbitrairement grand, mais valide seulement dans la limite  $\omega_a \ll \omega_r$ . Enfin, Zueco et al [39] lèvent également la contrainte  $g \ll \omega_a + \omega_r$  dans le cadre d'un régime dispersif généralisé, donc pour  $g \ll \omega_a - \omega_r$ .

### 1.2.5 Les approximations adiabatiques

Pour décrire sommairement les phénomènes qui apparaissent lorsque  $g$  devient de l'ordre de  $\omega_a$  et  $\omega_r$ , nous allons favoriser ici deux approches adiabatiques [40, 41, 42, 43], qui permettent d'explorer les deux régimes extrêmes  $\omega_a \ll \omega_r$  et  $\omega_r \ll \omega_a$ . Certaines approches mentionnées ci-dessus sont plus précises, mais les méthodes adiabatiques sont utiles pour développer une intuition physique. La discussion est similaire dans son contenu



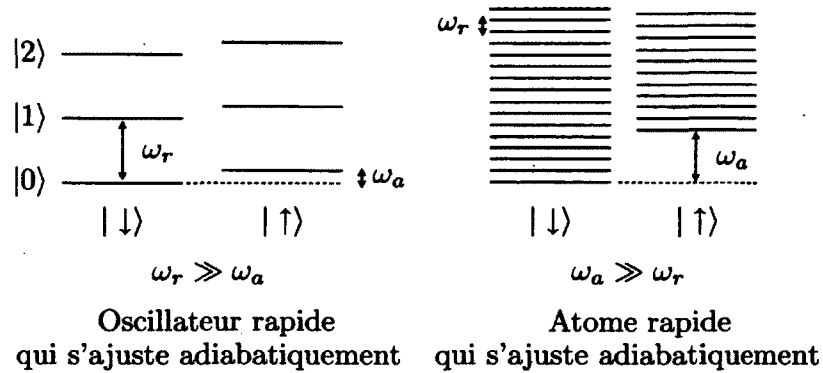


FIGURE 1.5 – Deux approches adiabatiques pour la diagonalisation de l'hamiltonien de Rabi. Dans les deux figures,  $g = 0$ . Pour  $g \sim \omega_r, \omega_a$ , l'oscillateur rapide favorise la formation d'états chats de Schrödinger alors que l'atome rapide favorise la compression.

à celle donnée dans la référence [40].

L'essence de l'approximation adiabatique est de supposer qu'un système a une fréquence caractéristique beaucoup plus rapide qu'un autre. Cela signifie que la dynamique du système rapide peut toujours s'ajuster à celle du système lent. Autrement dit, du point de vue du système rapide, le système lent a un état toujours bien défini, ce qui permet d'éliminer certains degrés de liberté dans l'hamiltonien total.

La figure 1.5 illustre les niveaux d'énergie du système atome-champ dans deux régimes extrêmes pour  $g = 0$  : l'oscillateur rapide et l'atome rapide. La question est de savoir comment ces niveaux se couplent lorsque  $g > 0$  et quelles sont les propriétés générales des états correspondants. Nous verrons que le régime de l'oscillateur rapide favorise des états non classiques nommés chats de Schrödinger, alors que l'atome rapide est favorable aux états comprimés. Pour bien comprendre la suite, nous allons commencer par introduire ces états non classiques.

## 1.2.6 Les états non classiques

Les états non classiques mentionnés à la section 1.2.5 se comprennent par comparaison avec un état cohérent ou semi-classique [27, 38]

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad (1.26)$$

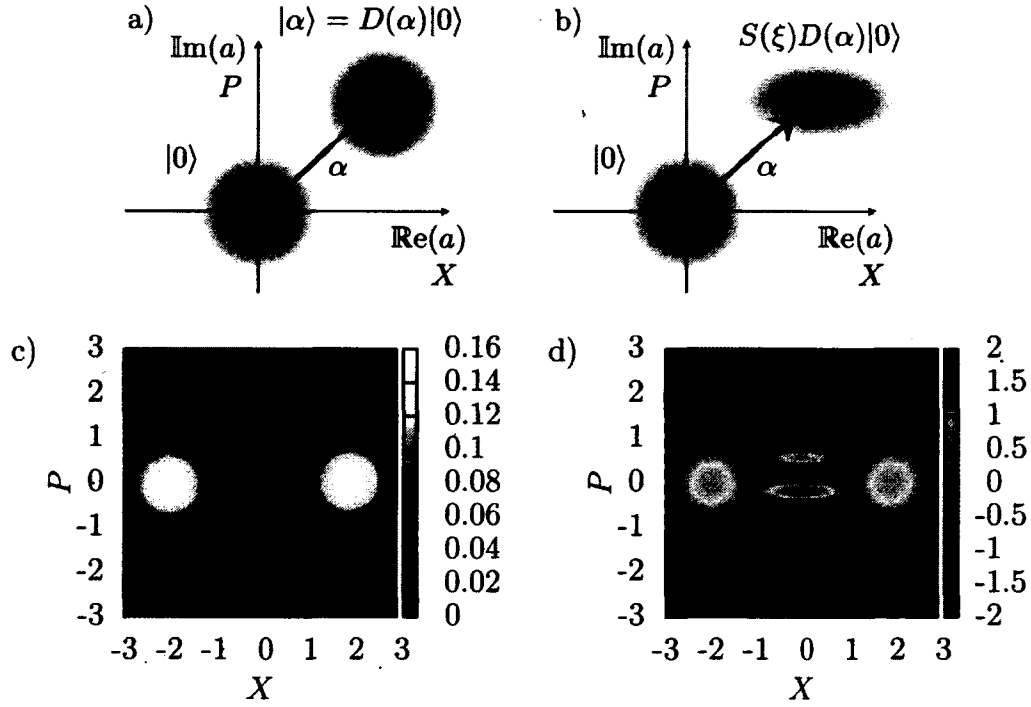


FIGURE 1.6 – Représentation d'états classiques et non classiques dans l'espace des phases. a) Déplacer le vide par un nombre complexe  $\alpha$  crée un état cohérent ou semi-classique. b) L'opérateur compression diminue l'incertitude dans une quadrature au prix d'un gain d'incertitude dans l'autre. Un tel état est dit comprimé. c) Fonction  $Q$  d'un état chat. d) Fonction de Wigner d'un état chat. Les franges négatives proviennent du caractère quantique de la superposition. Voir les références [27, 38] pour une description détaillée des distributions quasi-classiques.

où  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$  est l'opérateur déplacement. Cet opérateur déplace les états cohérents dans l'espace des phases, tel qu'illustré à la figure 1.6. Cette action se décrit mathématiquement par  $D(\alpha')|\alpha\rangle = |\alpha + \alpha'\rangle$ . L'état cohérent  $|\alpha\rangle$  est donc le vide déplacé. Une propriété importante de cet état est que sa variance selon les quadratures  $X$  et  $P$  est égale tout en ayant le produit minimal permis par la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta X \Delta P = \frac{1}{4}, \quad (1.27)$$

où  $X = (a + a^\dagger)/2 = \text{Re}(a)$  et  $P = (a - a^\dagger)/2i = \text{Im}(a)$ .

On définit un état *comprimé* comme un état pour lequel  $\Delta X < 1/4$  ou  $\Delta P < 1/4$ . L'état comprimé est dit *idéal* si en plus  $\Delta X \Delta P = 1/4$ . Ces états sont utiles en métrologie [44, 45, 46], car si une quadrature en particulier est d'intérêt, on peut diminuer grandement

l'incertitude sur cette dernière au prix d'une erreur plus grande dans l'autre axe.

Un état comprimé est obtenu mathématiquement en appliquant l'opérateur unitaire

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 + \frac{1}{2}\xi a^{\dagger 2}\right) \quad (1.28)$$

sur un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , tel qu'illustré à la figure 1.6b). Physiquement, ce résultat est obtenu en diagonalisant l'hamiltonien d'un oscillateur paramétrique dégénéré

$$H_{\text{OPD}} = \omega_r a^\dagger a + \epsilon a^2 + \epsilon^* a^{\dagger 2}, \quad (1.29)$$

où  $\epsilon = |\epsilon|e^{i\varphi}$ . En effet, si on prend  $\xi = re^{-i\varphi}$ , avec

$$r = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{2|\epsilon|}{\omega_r}\right), \quad (1.30)$$

on obtient, à une constante près [47]

$$S^\dagger(\xi)H_{\text{OPD}}S(\xi) = \sqrt{\omega_r^2 - 4|\epsilon|^2} a^\dagger a. \quad (1.31)$$

L'opérateur de compression ramène donc l'hamiltonien de l'oscillateur paramétrique à celui d'un oscillateur harmonique. Cela permet de déduire que l'état fondamental de l'oscillateur paramétrique est le vide comprimé, soit  $S(\xi)|0\rangle$ . Par inspection de l'équation (1.29), on conclut également que la compression est obtenue en ajoutant un terme en  $kX^2$  à l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique  $H_{\text{OH}}$ , où  $k$  est une constante arbitraire. Dans la base des états propres de  $H_{\text{OH}}$ , les kets propres de  $H_{\text{OH}} + kX^2$  sont des états de Fock comprimés.

Un autre état non classique pertinent est l'état *chat de Schrödinger*

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} (e^{i\phi}|\alpha\rangle + e^{-i\phi}|-\alpha\rangle), \quad (1.32)$$

où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation. Tel qu'illustré à la figure 1.6, il s'agit d'une superposition de deux états quasi-classiques. En ce sens, il s'agit d'une superposition quantique d'états macroscopiques, d'où le nom de chat tiré du célèbre paradoxe.

On distingue deux exemples importants de chats. Il s'agit des chats pair  $|P_+\rangle$  et impair

$|P_{\pm}\rangle$  [48, 49]

$$|P_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_{\pm}}} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) \quad (1.33)$$

où  $\mathcal{N}_{\pm} = 2(1 \pm \exp[-2|\alpha|^2])$ . On comprend rapidement le nom donné à ces états en développant les états cohérents en série

$$|P_{+}\rangle = 2\mathcal{N}_{+} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle \quad (1.34)$$

$$|P_{-}\rangle = 2\mathcal{N}_{-} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle. \quad (1.35)$$

Le chat pair est une superposition d'états de Fock contenant un nombre pair de photons, alors que le chat impair contient seulement des états de Fock impairs.

Tout comme les états comprimés, les états chats sont cruciaux pour le traitement quantique de l'information avec des variables continues [50, 48]. Cette branche de l'information quantique s'est développée quand Knill, Laflamme et Milburn ont découvert que le calcul quantique peut être réalisé avec seulement les outils de l'optique linéaire [51], à condition de disposer d'états non classiques comme des états de Fock et de pouvoir mesurer l'opérateur nombre. Il s'avère que les états comprimés et les états chats [52] permettent de réduire le nombre de portes logiques nécessaires aux opérations par rapport à cette proposition originale [51]. Le Saint-Graal de cette discipline est donc de trouver comment produire efficacement ces configurations exotiques de la lumière.

Les prochaines sections expliquent comment ces états non classiques apparaissent naturellement dans l'état fondamental de l'hamiltonien de Rabi.

### 1.2.7 Le régime de l'atome rapide

Dans le régime, de l'atome rapide,  $\omega_a \gg \omega_r$ . On écrit d'abord l'hamiltonien de Rabi en utilisant les opérateurs  $X$  et  $P$  et en faisant une rotation de 90 degrés autour de l'axe des  $y$  des opérateurs de Pauli de l'atome

$$H_R = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_r^2 X^2 - \frac{\omega_a}{2}\sigma_x + gX\sigma_z, \quad (1.36)$$

avec  $m$  une masse effective pour l'oscillateur. Pour représenter le fait que, dans l'approximation adiabatique, l'oscillateur a toujours un état bien défini, on remplace l'opérateur

$X$  par une variable classique  $x$ . L'hamiltonien de l'atome et de l'interaction atome-champ est alors

$$H_{a,ar} = -\frac{\omega_a}{2}\sigma_x + gx\sigma_z, \quad (1.37)$$

ce qui, une fois diagonalisé, donne les états et énergies propres [40]

$$E_{a,\pm|x} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega_a^2 + 4g^2x^2} \quad (1.38)$$

$$|+_x\rangle = \sin \varphi |\uparrow\rangle - \cos \varphi |\downarrow\rangle \quad (1.39)$$

$$|-_x\rangle = \cos \varphi |\uparrow\rangle + \sin \varphi |\downarrow\rangle \quad (1.40)$$

$$\tan 2\varphi = -\frac{\omega_a}{2gx}. \quad (1.41)$$

Cela permet de définir un potentiel effectif pour l'oscillateur qui dépend de l'état de l'atome

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{2}m\omega_r^2x^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega_a^2 + 4g^2x^2}. \quad (1.42)$$

Dans la limite où  $2g|x| \ll \omega_a$ , on peut écrire [40]

$$V_{\text{eff}}(x) \simeq \frac{1}{2}m\omega_r^2x^2 \pm \frac{1}{2}\omega_a \left(1 + 2\frac{g^2x^2}{\omega_a^2}\right). \quad (1.43)$$

Il s'agit donc du potentiel d'un oscillateur harmonique avec en plus un terme en  $X^2$ . Selon la discussion de la section 1.2.6, l'état fondamental doit donc être comprimé. Cette compression est d'autant plus forte que le rapport  $g/\omega_a$  est grand. Cependant, cette approximation se brise pour des rapports  $g/\omega_a$  trop élevés, de sorte qu'alors des phénomènes apparaissent qui ne sont pas simplement pris en compte par une compression. Des exemples de résultats dans l'espace des phases sont donnés à la figure 1.7.

Noter que ce résultat peut être prédit plus grossièrement à l'aide de la transformation de l'équation (1.9). En effet, si on remplace  $\xi\sigma_z \rightarrow \frac{1}{2}\xi$  et  $\sigma_{\pm} \rightarrow 1$ , il s'agit d'un opérateur de déplacement et de compression. Puisque, dans le régime Bloch-Siegert,  $\xi = g^2/[2\omega_r(\omega_r + \omega_a)]$ , on s'attend à voir une compression dans l'état fondamental qui est surtout importante dans le régime  $\omega_a \gg \omega_r$ , c'est-à-dire le régime de l'atome rapide.

### 1.2.8 Le régime de l'oscillateur rapide

On donne ici un aperçu de la méthode adiabatique très précise élaborée par Irish et al [42] pour diagonaliser l'hamiltonien de Rabi dans le régime de l'oscillateur rapide, soit

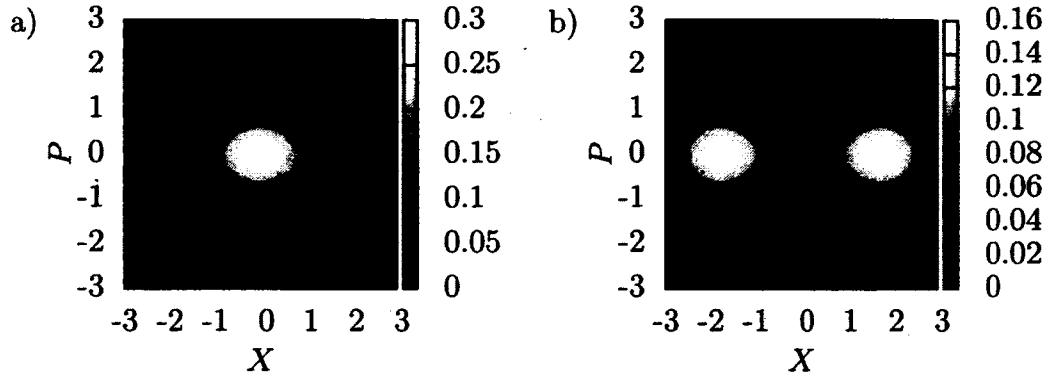


FIGURE 1.7 – Compression de l'état fondamental dans la limite de l'atome rapide. Dans les deux cas,  $\omega_a = 11$  GHz et  $\omega_r = 1$  GHz. La fonction  $Q$  du résonateur est tracée et obtenue par diagonalisation numérique. a)  $g = 1.5$  GHz. b)  $g = 2.25$  GHz. La compression n'est clairement pas suffisante pour décrire l'état du résonateur. Par ailleurs, même si l'état ressemble à un chat, il est plus complexe, car dans ce régime, l'intrication entre l'atome et l'oscillateur est très importante [40].

$\omega_r \gg \omega_a$ . Après une rotation appropriée des matrices de Pauli, l'hamiltonien de Rabi s'écrit

$$H_R = \omega_r a^\dagger a + \frac{1}{2} \omega_a \sigma_x + g(a + a^\dagger) \sigma_z. \quad (1.44)$$

Dans le régime de l'oscillateur rapide, l'atome est toujours dans un état bien défini. On remplace donc  $\sigma_z \rightarrow \pm 1$ . Si on se concentre sur la partie de l'hamiltonien qui implique seulement les opérateurs de l'oscillateur, on obtient

$$H_O \simeq \omega_r a^\dagger a \pm g(a + a^\dagger), \quad (1.45)$$

ce qui peut être réécrit

$$H_O = \omega_r D(\mp \alpha) a^\dagger a D^\dagger(\mp \alpha), \quad (1.46)$$

où  $\alpha = g/\omega_r$ . Les états propres de cet hamiltonien sont donc des états de Fock déplacés

$$|n_\pm\rangle = D(\mp \alpha) |n\rangle. \quad (1.47)$$

Le signe du déplacement dépend de l'état du qubit. Si  $\alpha > 0$ , ces états déplacés forment une base quasi-orthogonale sur laquelle on peut réécrire l'hamiltonien de Rabi, sachant

que

$$\langle m_{\pm} | n_{\pm} \rangle = \delta_{mn} \quad (1.48)$$

$$\langle m_{-} | n_{+} \rangle = \begin{cases} e^{-2\alpha^2} (-2\alpha)^{m-n} \sqrt{n!/m!} L_n^{m-n}[(2\alpha)^2], & m \geq n \\ e^{-2\alpha^2} (2\alpha)^{n-m} \sqrt{m!/n!} L_m^{n-m}[(2\alpha)^2], & m < n, \end{cases} \quad (1.49)$$

où les  $L_i^j$  sont des polynômes de Laguerre associés. Une approximation supplémentaire est ensuite faite : celle de négliger les termes qui ne sont pas diagonaux par blocs dans l'hamiltonien de Rabi exprimé dans la base déplacée. Les états propres obtenus sont alors

$$|\Psi_{\pm, n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, n_{+}\rangle \pm |- , n_{-}\rangle), \quad (1.50)$$

avec les énergies propres correspondantes

$$E_{\pm, n} = n\omega_r \pm \omega_a \langle n_{-} | n_{+} \rangle. \quad (1.51)$$

En particulier, les deux états de plus basse énergie forment un doublet qui, dans la base originale de l'équation (1.7), s'écrit

$$|\Psi_{\pm, 0}\rangle = \frac{1}{2} \{ \pm | \uparrow \rangle \otimes (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) \mp | \downarrow \rangle \otimes (|\alpha\rangle \mp |-\alpha\rangle) \}. \quad (1.52)$$

Il s'agit donc d'états intriqués entre l'atome et l'oscillateur. Plus précisément, l'oscillateur est dans un état chat dont la parité (voir la section 1.2.6 ou la référence [48]) est déterminée par l'état du qubit. Tel qu'attendu, dans l'état fondamental, le nombre total d'excitations est bien toujours pair. Par ailleurs, le premier état excité a un nombre impair d'excitations. Enfin, la séparation en énergie du doublet est  $E_{+,0} - E_{-,0} \simeq \omega_a e^{-2g^2/\omega_r^2}$ , de sorte que le fondamental devient de plus en plus près d'être dégénéré lorsque  $g$  augmente.

Contrairement au cas de l'atome rapide, ici l'approximation adiabatique s'améliore lorsque  $g$  augmente. Pour des rapports  $g/\omega_r > 1$ , la différence entre les niveaux d'énergie approchés et le résultat numérique devient très faible [42], sauf lorsque  $\omega_a > \omega_r$ .

Advenant la conception en laboratoire d'un système physique adéquat, le couplage ultra-fort permettrait donc naturellement l'observation d'états non-classiques. Loin d'être difficile à produire, comme c'est la norme en optique quantique, ces états apparaîtraient comme l'état fondamental du système.

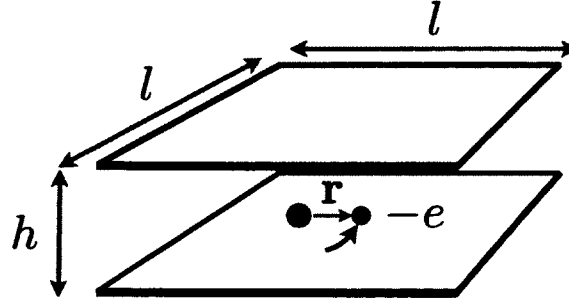


FIGURE 1.8 – Un atome dans une cavité Fabry-Pérot.

### 1.3 La réalisation du couplage ultra-fort

La section précédente donne un aperçu des états exotiques qui pourraient être générés par le couplage ultra-fort. Ici, on mentionne d'abord l'impossibilité de ce régime en EDQ-cavité, puis on explique sommairement comment le couplage peut atteindre une fraction importante de  $\omega_r$  en EDQ-circuit.

#### 1.3.1 Le rôle de la constante de structure fine en EDQ-cavité

Soit un atome monoélectronique à deux niveaux dans une cavité Fabry-Pérot de volume  $V = hl^2$ , tel qu'illustré à la figure 1.8. Dans cette situation, avec  $\omega_r \sim \omega_a$ , le couplage relatif de l'atome au premier mode du champ électromagnétique est [53]

$$\frac{g}{\omega_r} \simeq \frac{\alpha^{3/2}}{n} \frac{1}{\tilde{V}}, \quad (1.53)$$

où  $\alpha$  est la constante de structure fine,  $n$  est le nombre quantique principal de l'atome et où l'on a défini le volume modal relatif

$$\tilde{V} = \frac{hl^2}{(\lambda/2)^3}. \quad (1.54)$$

Évidemment,  $\lambda$  représente ici la longueur d'onde des photons. Le couplage relatif est optimal pour  $n = 1$  avec  $\tilde{V}$  le plus petit possible. Or, la longueur d'onde émise par l'atome doit être de l'ordre de grandeur du rayon de l'orbite électronique. Puisqu'il est impossible de fabriquer une cavité plus petite que l'atome lui-même, on a au minimum  $\tilde{V} \sim 1$ . Même dans cette situation absurde, on a  $g/\omega_r \sim \alpha^{3/2}$ . Puisqu'il s'agit d'une puissance positive



de la constante de structure fine, elle même un très petit nombre  $\sim 1/137$ ,  $g$  ne peut en aucun cas être de l'ordre de  $\omega_r$ . Il y a donc une contrainte fondamentale qui empêche la réalisation du couplage ultra-fort avec un seul atome en EDQ-cavité.

### 1.3.2 La réalisation du couplage ultra-fort en EDQ-circuit

Tel qu'expliqué à l'annexe B, en EDQ-circuit, on couple un atome artificiel à un résonateur coplanaire. Pour la simplicité, on représente ici l'atome artificiel par une jonction Josephson en parallèle avec une capacité, ce qui est valide pour un qubit de charge [54]. Comme le montre la figure 1.9, il est possible de coupler l'atome au résonateur de manière soit capacitive, soit inductive. Le cas capacitif correspond à la figure 1.2d); le qubit est connecté à la masse, où le courant est nul, à travers une capacité. Dans cette situation, ce sont les fluctuations du point zéro du voltage qui sont responsables de l'interaction atome-champ. La valeur relative de ce couplage est alors [53]

$$\frac{g}{\omega_r} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi^3}} \left(\frac{2E_J}{E_C}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{Z_0}{Z_{\text{vide}}}} \frac{C_g}{C_g + C_J} \alpha^{1/2}, \quad (1.55)$$

où  $E_J$  est l'énergie Josephson de la jonction,  $E_C = (2e)^2/2C_J$  est l'énergie capacitive du qubit,  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  est l'impédance de la ligne à transmission et  $Z_{\text{vide}} = 377 \Omega$ . En général<sup>1</sup>,  $Z_0/Z_{\text{vide}} < 1$ . Puisque la puissance de  $\alpha$  est positive, le couplage relatif est ici relativement faible, même si l'amélioration par rapport au cas de l'EDQ-cavité est considérable [31, 3].

La deuxième technique de couplage, illustrée à la figure 1.9b), correspond à brancher le qubit sur le conducteur central du guide d'onde. L'interaction atome-champ provient alors des fluctuations du point zéro du courant et sa grandeur relative est [53]

$$\frac{g}{\omega_r} \simeq \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \left(\frac{E_C}{2E_J}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{Z_{\text{vide}}}{Z_0}} \alpha^{-1/2}. \quad (1.57)$$

Puisque, dans l'expression ci-dessus,  $\alpha$  est élevé à une puissance négative, le couplage

---

1. En effet,  $Z_{\text{vide}} \propto \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  et  $Z_0 \propto \sqrt{\mu_r \mu_0/\epsilon_r \epsilon_0}$ , d'où

$$\frac{Z_0}{Z_{\text{vide}}} \propto \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}. \quad (1.56)$$

Comme les guides d'onde sont faits de matériaux métalliques non magnétiques, en général  $\mu_r = 1$  et  $\epsilon_r \sim 10$ , d'où  $Z_0/Z_{\text{vide}} < 1$ .

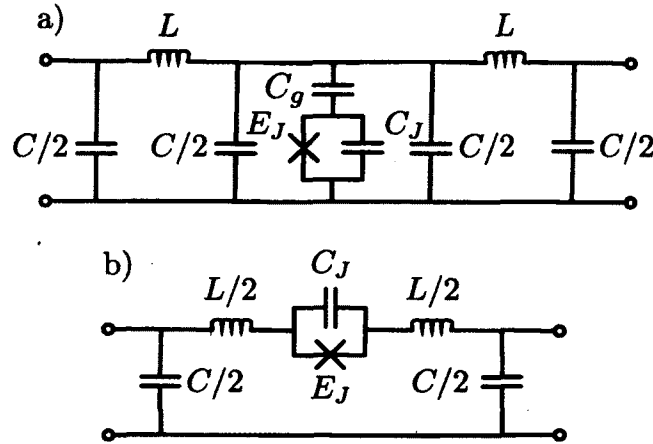


FIGURE 1.9 – Couplages a) capacitif et b) inductif.

relatif peut atteindre ici des valeurs beaucoup plus grandes que par couplage capacitif. En prenant les paramètres réalistes  $Z_0 = 50 \Omega$  et  $E_C/2E_J = 100$ , on obtient  $g/\omega_r \approx 20$ . Le couplage ultra-fort semble donc réalisable en EDQ-circuit. Cependant, un calcul plus rigoureux [55] permet de montrer que dans cette configuration, le rapport  $g/\omega_a$  est quant à lui limité à environ 20%. Cette limitation provient du fait que l'élément de circuit qui est responsable du couplage lumière-matière, ici la jonction Josephson, détermine aussi la fréquence de l'atome artificiel. Par ailleurs, la condition  $E_C \gg 2E_J$ , nécessaire ici pour un fort couplage, n'est pas désirable en pratique, car elle maximise la sensibilité au bruit de charge qui détruit les superpositions d'états quantiques. Ainsi, même si de très forts couplages brisant l'approximation séculaire seraient réalisables avec cette méthode, il est impossible de l'exploiter pour obtenir des valeurs de  $g$  à la fois du même ordre de grandeur que  $\omega_r$  et  $\omega_a$ .

Une façon d'augmenter le couplage sans être limité ni par  $\omega_a$  ni par  $\alpha$  est de maximiser le courant du point zéro qui circule à travers le qubit. Dans la référence [20], Jérôme Bourassa *et al* proposent d'augmenter cette quantité en insérant une jonction Josephson dans le résonateur. Le courant à l'emplacement  $x_1$  de la jonction Josephson est

$$I(x_1) = - \frac{1}{L_0(x)} \left. \frac{d\Phi(x)}{dx} \right|_{x_1}, \quad (1.58)$$

où  $L_0(x)$  est l'inductance par unité de longueur et  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^t dt' V(x, t')$ , avec  $V(x, t)$  le potentiel électrique au point  $x$  au temps  $t$ . Le couplage augmente donc avec la pente

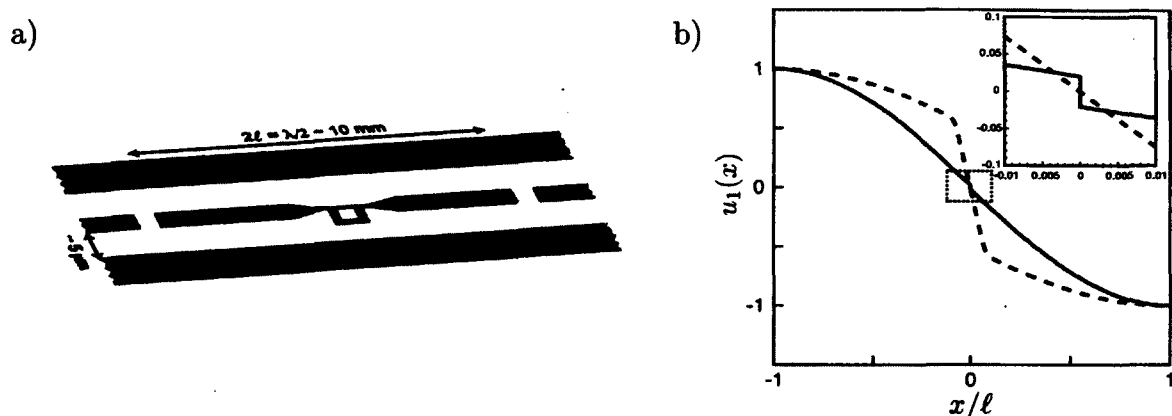


FIGURE 1.10 – Proposition pour la réalisation du couplage ultra-fort en EDQ-circuit. Figures tirées de la référence [20]. a) Un qubit de flux [19] est branché sur une non-linéarité introduite au centre du résonateur. b) Amplitude (normalisée à un) du flux dans le premier mode d'une ligne à transmission en niobium (ligne pointillée noire) ou en aluminium (ligne pleine bleue) intersectée par une jonction Josephson. En encadré figure une vue agrandie du mode à proximité de la jonction. La variation abrupte de ce mode rend le couplage atome-champ significativement plus grand.

de  $\Phi(x)$  en  $x_1$ . Comme le montre la figure 1.10, la présence de la jonction Josephson rend cette pente dramatiquement plus abrupte. Les couplages obtenus peuvent alors être en principe de l'ordre de plusieurs dizaines de % de  $\omega_r$ . Cette idée est appliquée expérimentalement dans la référence [5], où un couplage relatif de l'ordre de 12 % est obtenu. Le principal défaut de cette méthode est qu'à ces valeurs de  $g$ , le qubit se couple à plusieurs modes du résonateur. Le traitement théorique est alors plus complexe et d'éventuelles opérations cohérentes sur le système en seraient rendues plus difficiles. Pour éviter ce problème, il est possible d'employer un résonateur  $LC$  monomode à la place du résonateur coplanaire. Par couplage inductif à un qubit de flux, le décalage de Bloch-Siegert a été observé avec ce type de dispositif [4]. Enfin, une amélioration peut être apportée à cette technique en remplaçant la jonction Josephson par un SQUID. Un tel dispositif, composé de deux jonctions, agit exactement comme une jonction Josephson dont l'énergie est contrôlée par un flux externe. Avec un tel circuit, le couplage atome-champ deviendrait modulable [24].

Le couplage ultra-fort fait donc maintenant partie de la boîte à outils de l'EDQ-circuit. La question est alors la suivante : comment exploiter au mieux cette nouvelle technologie et que peut-elle nous apprendre de fondamental sur la physique ?

## 1.4 Quelques applications possibles du couplage ultra-fort en EDQ-circuit

L'idée d'application la plus immédiate pour le couplage ultra-fort vient en constatant les propriétés décidément non classiques du fondamental de l'hamiltonien de Rabi. Par exemple, tel que suggéré à la section 1.2.8, ce fondamental est un état chat enchevêtré avec l'atome dans la limite où  $\omega_r \gg \omega_a$ . Plus généralement, tel que démontré à l'annexe A, pour un atome couplé à  $N$  modes du champ électromagnétique, ce qui correspond à l'hamiltonien

$$H_R^{(N)} = \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + \sum_{j=1}^N [\omega_r^j a_j^\dagger a_j + g_j (a_j + a_j^\dagger) (\sigma_- + \sigma_+)], \quad (1.59)$$

l'état fondamental est approximativement

$$|\Psi_{-,0}\rangle = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle (\prod_{j=1}^N |\alpha_j\rangle - \prod_{j=1}^N |-\alpha_j\rangle) - |\downarrow\rangle (\prod_{j=1}^N |\alpha_j\rangle + \prod_{j=1}^N |-\alpha_j\rangle)], \quad (1.60)$$

où  $\alpha_j = g_j/\omega_r^j$ . Dans l'expression ci-dessus,  $\omega_r^j$ ,  $g_j$  et  $a_j$  sont respectivement la fréquence, le couplage à l'atome et l'opérateur d'annihilation du mode  $j$ . Les états des modes électromagnétiques forment donc des chats enchevêtrés avec l'atome. Comme il s'agit de l'état fondamental du système, un tel chat est robuste face à la relaxation et à la décohérence, contrairement au cas habituel où le chat est formé d'une superposition d'états de Fock excités [10, 56]. Cependant, justement parce qu'il s'agit de l'état fondamental, l'étude expérimentale de ce dernier devient très difficile, puisque les photons qu'il contient sont virtuels. Ils restent donc en quelque sorte attachés au circuit et il ne faut pas s'attendre à avoir émission de photons dans de tels états du résonateur. Pour pouvoir manipuler et observer cet état, il faut ramener les couplages à 0 de manière non adiabatique par rapport à  $g$ . Alors, le système est décrit par l'état  $|\Psi_{-,0}\rangle$  dans la base *nue*, ce qui permet de faire une mesure sur le qubit ou les résonateurs. Dans une série d'expériences, le qubit pourrait être mesuré dispersivement [57, 58] ou par bifurcation [59, 60, 18], alors qu'une tomographie des résonateurs pourrait être réalisée [56]. Une telle expérience montrerait que des chats enchevêtrés pairs ou impairs sont créés dans les modes du champ électromagnétique de manière corrélée à l'état du qubit. Si le qubit est  $|\uparrow\rangle$ , les chats sont impairs. S'il est  $|\downarrow\rangle$ , ils sont pairs. Quoique simple en principe, une telle technique serait extrêmement ardue en pratique, car elle nécessiterait de passer de  $g \sim 10$  GHz à  $g = 0$  en un temps beaucoup plus court que  $1/g_{\text{moy}}$ , où  $g_{\text{moy}}$  est la valeur moyenne de  $g$  durant

l'opération. Cela signifie un temps d'opération inférieur à la nanoseconde. Non seulement ce temps d'opération très court est-il en soi un très grand défi expérimental, il faudrait également choisir très précautionneusement la forme de l'impulsion dans le couplage pour éviter d'exciter le système en générant des fréquences trop élevées. Cependant, dans la référence [24], les auteurs font une proposition qui selon eux permettrait d'atteindre une telle rapidité d'exécution.

En augmentant le couplage jusqu'à ce qu'il devienne la fréquence dominante, ou en ajoutant des atomes artificiels dans le circuit, on finit par atteindre un régime qui rappelle celui des systèmes de la matière condensée. Jonas Larson propose d'utiliser le système qubit-résonateur en couplage ultra-fort pour obtenir, dans différents jeux de paramètres, divers hamiltoniens tels que les modèles Jahn-Teller  $\beta \times E$  et  $\varepsilon \times E$ , le modèle Renner-Teller, ainsi que des potentiels de jauge abéliens et non-abéliens, ou même l'effet Hall anormal [61, 62, 63, 43]. Dans cette optique, une des prédictions les plus surprenantes est celle par Nataf et Ciuti [64] d'une transition de phase quantique superradiante rappelant celle obtenue avec l'hamiltonien de Dicke [65, 66]. Pour obtenir ce résultat, les auteurs font un traitement théorique de  $N$  atomes artificiels de fréquence identique  $\omega_a$  interagissant avec  $K$  modes. L'architecture choisie pour les atomes est celle du fluxonium [67, 68, 69, 70] pour éviter le bruit de charge. L'interaction avec les résonateurs est inductive, de manière à maximiser sa valeur jusqu'à atteindre le régime du couplage dominant :  $g/\omega_a \gg 1$ . En supposant  $N \gg 1$ , un hamiltonien effectif est obtenu dans la base des opérateurs bosoniques collectifs  $b_k = \sum_{j=1}^k (-1)^j \sigma_+^j / \sqrt{k}$ , où l'indice  $j$  numérote les atomes artificiels. Cet hamiltonien manifeste une transition de phase quantique lorsque le couplage  $g_k$  atteint un point critique  $g_k^{\text{crit}} = \sqrt{\omega_r^k \omega_a} / 2$ . Après cette transition, le spectre révèle une excitation bosonique collective sans gap : le fondamental devient un doublet quasi-dégénéré dont l'espacement  $\delta$  en énergie décroît comme  $\omega_a \exp(-2Ng_k^2/(\omega_r^k)^2)$ . Ce comportement est typique de la transition superradiante des hamiltoniens de Dicke. Cependant, ces hamiltoniens sont obtenus en négligeant un terme en  $A^2$  dans l'interaction lumière-matière, où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur [71, 72, 73]. L'apparition de la transition superradiante ne survient habituellement que sous cette approximation. Le grand mérite du traitement de Nataf et Ciuti est qu'il *inclut* l'équivalent du terme en  $A^2$  et que ce dernier participe à la transition de phase. Le couplage ultra-fort promet donc d'être un outil intéressant pour étudier les transitions de phase quantique dans les systèmes de la matière condensée.

Accessoirement, le mode collectif introduit par Nataf et Ciuti pourrait aussi trouver

une application intéressante du point de vue du traitement quantique de l'information. En effet, pour  $N$  atomes artificiels couplés à un mode du champ électromagnétique, le doublet quasi-dégénéré de plus basse énergie dans le régime du couplage dominant est, approximativement

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha_N\rangle \Pi_{j=1}^N |+\rangle_j \mp |-\alpha_N\rangle \Pi_{j=1}^N |-\rangle_j), \quad (1.61)$$

où  $\alpha_N \simeq \sqrt{N}g/\omega_r$  et  $|\pm\rangle = (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ . Nous verrons à la section 2.4 que les sources intrinsèques de décohérence en EDQ-circuit peuvent être modélisées par des fluctuations aléatoires dans la fréquence du qubit et donc par des hamiltoniens de la forme  $f_j(t)\sigma_z^j$ , où  $f_j(t)$  est une fonction aléatoire du temps. Selon la règle d'or de Fermi, de telles fluctuations induisent des transitions entre des états propres  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  à un taux proportionnel à  $|\langle i|\sigma_z|f\rangle|^2$  ainsi que de la décohérence à un taux relié aux éléments de matrice diagonaux de  $\sigma_z$  dans la base diagonale du système. Comme les deux états du doublet donné à l'équation (1.61) ont des parités différentes,  $\langle \Psi_{\pm}|\sigma_z^j|\Psi_{\mp}\rangle = 0$ . Par ailleurs,  $\langle \Psi_{\pm}|\sigma_z^j|\Psi_{\pm}\rangle = 2 \exp(-2\alpha_N^2)$ , de sorte que pour  $\alpha_N \gg 1$ , le doublet est insensible au bruit en  $\sigma_z$  dans les qubits. Ainsi, pour un système pour lequel cette source de bruit domine, ce qui est le cas du fluxonium, travailler dans cette base pourrait augmenter dramatiquement le temps de cohérence. Le défi est de choisir un ensemble de paramètres qui permet d'atteindre ce régime tout en gardant l'espacement  $\delta \gg k_B T$ . Ce travail est fait par Nataf et Ciuti dans la référence [74].

La discussion faite ci-dessus permet d'entrevoir quelques applications possibles au couplage ultra-fort. Cependant, pour passer à des prédictions quantitatives sur des résultats expérimentaux, une bonne compréhension de la dissipation dans ce régime est nécessaire. Les prochains chapitres s'attardent d'abord sur le sujet du comportement du qubit et du résonateur séparés en présence de leur environnement respectif, puis sur celui de l'interaction de la molécule lumière-matière avec son milieu extérieur.



## Chapitre 2

# Relaxation et déphasage pour un atome et un résonateur découplés

Le premier postulat de la mécanique quantique stipule qu'à un instant  $t$ , toute l'information accessible sur un système physique est contenue dans un ket  $|\psi(t)\rangle$ . Cette affirmation n'est valide que si le système d'intérêt est isolé ; si ce dernier est en interaction avec un milieu extérieur, il faut en principe connaître le vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle$  du système et de l'environnement couplés. Une telle description devient vite intraitable, de sorte qu'un arsenal de méthodes théoriques a été développé pour décrire le comportement du système seul, connaissant les paramètres de son couplage au milieu externe. Dans ce chapitre, on évacue temporairement tout couplage entre atome et champ pour expliquer comment, dans le cadre du modèle de Caldeira-Leggett, on peut obtenir une dynamique irréversible emblématique des systèmes quantiques ouverts en traitant l'environnement comme un bain infini d'oscillateurs harmoniques. On trouve ensuite l'équation d'évolution, dite équation maîtresse, d'un oscillateur interagissant avec un tel environnement. Pour des raisons de généralité, on inclut une non linéarité dans l'hamiltonien de l'oscillateur, ce qui permet d'explorer deux régimes : celui de l'oscillateur harmonique, pour lequel on obtient l'équation maîtresse de l'optique quantique, ainsi que celui de l'oscillateur fortement anharmonique, pour lequel toutes les transitions se produisent à des fréquences distinctes, de manière incohérente. Enfin, on décrit comment un atome à deux niveaux s'amortit et comment les superpositions quantiques s'estompent en présence d'un environnement.



## 2.1 Le modèle de Caldeira-Leggett

Connaissant l'hamiltonien  $H$  d'un système quantique, l'évolution temporelle de son état  $|\psi(t)\rangle$  est obtenue en résolvant l'équation de Schrödinger

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

De manière tout à fait générale, on peut écrire la solution de cette équation différentielle comme

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (2.2)$$

où  $U(t, t_0) = T \exp[-i \int_{t_0}^t dt' H(t')]$  est l'opérateur unitaire d'évolution du système et  $T$  est l'opérateur de produit chronologique, tel que

$$T H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n) = H(t'_1)H(t'_2)\dots H(t'_n). \quad (2.3)$$

Dans le membre de gauche, les hamiltoniens sont évalués à des temps quelconques alors que, dans le membre de droite, ils sont placés selon la permutation telle que  $t'_1 \geq t'_2 \geq t'_3 \geq \dots \geq t'_n$ .

L'opérateur d'évolution étant unitaire, il admet un inverse  $U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)$ . Autrement dit, si l'hamiltonien du système est connu, sachant l'état du système au temps  $t$ , il est toujours possible de reconstruire son état en tout temps antérieur  $t_0$  en appliquant  $U^\dagger(t, t_0)$ . En ce sens, l'équation de Schrödinger est dite *réversible*, tout comme la mécanique classique de Newton.

Dans la plupart des systèmes réels, cependant, on observe une dynamique irréversible. Par exemple, prenons un atome à deux niveaux dans le vide et initialement dans l'état  $|\uparrow\rangle$ . Son hamiltonien, comme celui de l'atome d'hydrogène, est indépendant du temps. Pourtant, l'observation montre qu'un tel atome tombe spontanément dans son état fondamental  $|\downarrow\rangle$  après un certain temps caractéristique  $\tau$ . Connaître l'état de l'atome à un temps  $t \gg \tau$  ne renseigne alors en rien sur son état initial : il aurait tout aussi bien pu être au départ dans l'état  $|\downarrow\rangle$ . Ce phénomène est donc en totale contradiction avec l'équation de Schrödinger. Comment donc peut-on concilier cette observation avec la théorie ?

Le problème vient du fait que l'atome n'est jamais un système isolé, puisqu'il interagit en tout temps avec le champ électromagnétique qui l'entoure. Cet environnement électromagnétique se décrit comme un ensemble infini d'oscillateurs harmoniques, ce qui

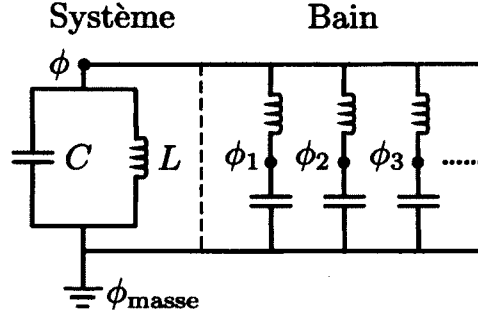


FIGURE 2.1 – Modèle de Caldeira-Leggett.

s'exprime mathématiquement par l'équation (1.6), à la condition de prendre la limite continue pour le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . L'atome peut alors émettre son excitation sous la forme d'un photon qui se propage dans ce bain, de sorte qu'un observateur qui mesure l'état du système à deux niveaux sans compter les photons dans le champ électromagnétique croit à tort observer une dynamique irréversible.

Cette description peut se généraliser à tout système quantique en interaction avec le champ électromagnétique et prend alors le nom de *modèle de Caldeira-Leggett* [75]. En particulier, ce modèle décrit bien la situation standard en EDQ-cavité et en EDQ-circuit, où atome et résonateur sont en interaction avec leur environnement. La figure 2.1 illustre la situation d'un circuit supraconducteur, ici décrit par un oscillateur  $LC$ , en interaction avec un milieu externe constitué d'une infinité d'autres résonateurs  $LC$ , dont les inductances et les capacités sont notées respectivement  $L_m$  et  $C_m$ . Si on note l'hamiltonien du système d'intérêt  $H_S$  ainsi que les opérateurs charge et flux  $Q_m$  et  $\phi_m = \int_{-\infty}^t dt' V_m(t')$ , l'hamiltonien total  $H$  du système et de l'environnement se réduit à

$$H = H_S + \sum_m \left\{ \frac{Q_m^2}{2C_m} + \frac{(\phi_m - \phi)^2}{2L_m} \right\} \quad (2.4)$$

$$= \left( H_S + \sum_m \frac{\phi^2}{2L_m} \right) + \sum_m \left\{ \frac{Q_m^2}{2C_m} + \frac{\phi_m^2}{2L_m} \right\} - \phi \sum_m \frac{\phi_m}{L_m} \quad (2.5)$$

$$= H'_S + H_B + H_{SB}. \quad (2.6)$$

On a défini ci-dessus l'hamiltonien du système ayant subi un décalage de Lamb dû à son milieu

$$H'_S = H_S + \sum_m \frac{\phi^2}{2L_m}. \quad (2.7)$$

Par ailleurs, tel qu'expliqué à l'annexe B, un résonateur  $LC$  correspond à un oscillateur harmonique quantique. L'hamiltonien de chaque mode du bain s'exprime donc sous la forme diagonale

$$H_B = \sum_m \nu_m b_m^\dagger b_m, \quad (2.8)$$

où  $\nu_m$ ,  $b_m$  et  $b_m^\dagger$  sont la fréquence de résonance et les opérateurs d'échelle du mode  $m$  de l'environnement. Enfin, l'interaction système-bain est

$$H_{SB} = -\phi \sum_m \frac{\phi_m}{L_m}. \quad (2.9)$$

Si le système est un oscillateur harmonique, le flux  $\phi$  correspondant se quantifie à l'aide de l'équation (B.2), ce qui donne l'hamiltonien d'interaction

$$H_{SB} = \sum_m \alpha_m (a + a^\dagger) (b_m + b_m^\dagger), \quad (2.10)$$

avec  $\alpha_m = -\sqrt{Z_0 Z_m}/2$ ,  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  et  $Z_m = \sqrt{L_m/C_m}$ . Cet hamiltonien permet au système d'échanger des quanta avec son environnement. Dans la limite où ce dernier comprend un nombre infini d'oscillateurs harmoniques, un quantum relâché dans le bain ne revient jamais dans le système qui affiche alors une dynamique irréversible. Ce comportement est décrit en détail dans la prochaine section.

## 2.2 L'oscillateur anharmonique amorti dans les limites de Redfield et de l'optique quantique

Le modèle de Caldeira-Leggett est appliqué ici pour obtenir l'équation du mouvement d'un oscillateur amorti. Puisqu'un oscillateur harmonique a une structure atypique, avec des niveaux d'énergie également espacés, ce système présente des caractéristiques qui lui sont uniques. Pour inclure également des effets qui apparaissent lorsque les transitions possibles dans le système n'ont pas toutes la même fréquence, on ajoute un terme en  $(a^\dagger a)^2$ , dit *non linéaire*, dans l'hamiltonien du système

$$H_S = \omega_r a^\dagger a + K (a^\dagger a)^2. \quad (2.11)$$

Cet hamiltonien est celui d'un *oscillateur de Duffing*. L'environnement est représenté par un bain d'oscillateurs harmoniques et son hamiltonien ainsi que celui de son interaction avec le système sont donnés par les équations (2.8) et (2.10). L'approche choisie ici est proche de celle employée dans la référence [76] pour obtenir l'équation maîtresse de l'optique quantique pour un oscillateur harmonique, mais nous allons au-delà de cette démarche en incluant la non linéarité. Cette approche originale nous permet de distinguer deux régimes d'amortissement selon la grandeur de  $K$ .

Tel que le démontre la référence [76], dans l'approximation où le couplage entre le système et l'environnement est faible, l'évolution du système d'intérêt est donnée par l'équation maîtresse de Born, qui s'exprime dans la représentation d'interaction par rapport à  $H_0 = H_S + H_B$ . En passant dans cette représentation, on obtient, puisque  $[H_S, H_B] = 0$ ,

$$H_{SB}^I(t) = e^{iH_0 t} H_{SB} e^{-iH_0 t} = \sum_m \alpha_m e^{iH_S t} X e^{-iH_S t} e^{iH_B t} (b_m + b_m^\dagger) e^{-iH_B t}, \quad (2.12)$$

où l'on a défini  $X = a + a^\dagger$ . Nous allons donc commencer par obtenir les opérateurs  $X$ ,  $b_m$  et  $b_m^\dagger$  dans ce référentiel.

Pour simplifier le calcul de  $e^{iH_S t} X e^{-iH_S t}$ , on écrit l'hamiltonien libre  $H_S$  comme sa décomposition spectrale

$$H_S = \sum_j^\infty E_j |j\rangle \langle j|, \quad (2.13)$$

où les  $E_j$  et les  $|j\rangle$  sont respectivement les énergies et les vecteurs propres de  $H_S$ . Dans cette situation, on obtient l'identité suivante, valide pour tout hamiltonien diagonal<sup>1</sup>

$$e^{iH_S t} = \sum_j e^{iE_j t} |j\rangle \langle j|. \quad (2.14)$$

---

1. La preuve se fait en introduisant la relation de fermeture des deux côtés de l'exponentielle

$$\begin{aligned} e^{iH_S t} &= \sum_{kl} |k\rangle \langle k| \exp\left(i \sum_j E_j |j\rangle \langle j| t\right) |l\rangle \langle l| \\ &= \sum_{jkl} \delta_{jk} \delta_{jl} e^{iE_j t} |k\rangle \langle l| \\ &= \sum_j e^{iE_j t} |j\rangle \langle j|. \end{aligned}$$

■

Avec cette formule, on obtient

$$X^I(t) = e^{iH_S t} X e^{-iH_S t} = \sum_{jk} X^{jk} |j\rangle \langle k| e^{i\Delta_{jk} t}, \quad (2.15)$$

où  $\Delta_{jk} = E_j - E_k$  et  $X^{jk} = \langle j|X|k\rangle$  est l'élément de matrice qui représente le recouvrement des états  $j$  et  $k$  dû à l'interaction avec l'environnement. De manière analogue à la règle d'or de Fermi, cet élément de matrice intervient dans le calcul de la probabilité de transition entre les états  $j$  et  $k$  et peut dépendre de manière complexe des paramètres du système, comme on le verra à la section 3.2.1. Ici, cependant, les états propres de l'hamiltonien sont simplement les états de Fock  $|n\rangle$ , tels que  $H_S|n\rangle = n(\omega_r + nK)|n\rangle$ . On déduit que

$$X^{jk} = \langle j|X|k\rangle = \sqrt{k} \delta_{j,k-1} + \sqrt{k+1} \delta_{j,k+1}, \quad (2.16)$$

et donc que seules les transitions de la forme  $|n\rangle \leftrightarrow |n+1\rangle$  sont permises par l'hamiltonien d'interaction (2.12) dans le cas de l'oscillateur de Duffing. Il s'agit d'un premier exemple de règle de sélection. Dans ces conditions,  $X$  s'écrit, dans la représentation d'interaction

$$X^I(t) = \sum_j X^{j,j+1} |j\rangle \langle j+1| e^{-i\Delta_j t} + \text{c.h.}, \quad (2.17)$$

où l'on a  $E_n = n(\omega_r + nK)$  et donc  $\Delta_j = E_{j+1} - E_j = \omega_r + (2j+1)K$ . Évidemment,  $X^{j,j+1} = \sqrt{j+1}$ , mais la notation est choisie ici de manière à rendre le rôle de l'élément de matrice plus transparent pour une meilleure compréhension des sections suivantes.

Sachant que  $e^{iH_B t} b_m e^{-iH_B t} = b_m e^{-i\nu_m t}$ , l'hamiltonien d'interaction de l'équation (2.12) s'écrit

$$\begin{aligned} H_{SB}^I(t) = \sum_{jm} \alpha_m \left( b_m X^{j,j+1} |j\rangle \langle j+1| e^{-i(\Delta_j + \nu_m)t} + b_m^\dagger X^{j,j+1} |j\rangle \langle j+1| e^{-i(\Delta_j - \nu_m)t} \right. \\ \left. + b_m (X^{j,j+1})^* |j+1\rangle \langle j| e^{i(\Delta_j - \nu_m)t} + b_m^\dagger (X^{j,j+1})^* |j+1\rangle \langle j| e^{i(\Delta_j + \nu_m)t} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

En supposant un hamiltonien d'interaction de la forme

$$H_{\text{int}}(t) = \sum_i S_i(t) B_i(t), \quad (2.19)$$

ce qui est le cas ici, l'équation maîtresse de Born<sup>2</sup>, qui décrit l'évolution de la matrice

---

2. L'équation maîtresse de Born est obtenue à partir de l'équation de Schrödinger pour  $H_{\text{tot}} =$

densité  $\rho_1(t)$  du système dans la représentation d'interaction, s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(t) = \sum_{ij} \int_0^t dt' \{ [S_i(t)S_j(t')\rho_1(t') - S_j(t')\rho_1(t')S_i(t)] \langle B_i(t)B_j(t') \rangle \\ + [\rho_1(t')S_j(t')S_i(t) - S_i(t)\rho_1(t')S_j(t')] \langle B_j(t')B_i(t) \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

tel que démontré dans la référence [76]. On définit ici

$$S(t) = \sum_j X^{jj+1} |j\rangle\langle j+1| e^{-i\Delta_j t}, \quad (2.21)$$

$$B(t) = \sum_m \alpha_m b_m e^{-i\nu_m t}, \quad (2.22)$$

et on prend

$$S_1(t) = S(t), \quad B_1(t) = B^\dagger(t), \quad (2.23)$$

$$S_2(t) = S^\dagger(t), \quad B_2(t) = B(t). \quad (2.24)$$

Si le bain contient beaucoup plus de degrés de liberté que le système, on peut supposer qu'il reste toujours à l'équilibre dans un état thermique, de sorte que les corrélateurs  $\langle B^\dagger(t)B^\dagger(t') \rangle$  et  $\langle B(t)B(t') \rangle$  sont trivialement nuls. L'équation maîtresse de Born se réduit alors à

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(t) = \int_0^t dt' \{ [S(t)S^\dagger(t')\rho_1(t') - S^\dagger(t')\rho_1(t')S(t)] \langle B^\dagger(t)B(t') \rangle \\ + [S^\dagger(t)S(t')\rho_1(t') - S(t')\rho_1(t')S^\dagger(t)] \langle B(t)B^\dagger(t') \rangle \} + \text{c.h.} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Les corrélateurs restants pour un état thermique du bain sont

$$\langle B^\dagger(t)B(t') \rangle = \sum_m \alpha_m^2 \bar{n}_m e^{i\nu_m(t-t')}, \quad (2.26)$$

$$\langle B(t)B^\dagger(t') \rangle = \sum_m \alpha_m^2 (1 + \bar{n}_m) e^{-i\nu_m(t-t')}, \quad (2.27)$$

où  $\bar{n}_l$  est le nombre moyen d'excitations dans le mode  $l$  du bain à la température  $T$ .

---

$H_S + H_B + H_{SB}$  grâce à trois approximations. Premièrement, on suppose que l'interaction entre le système et le bain est allumée à  $t = 0$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de corrélations entre eux pour  $t < 0$ . Ensuite, on considère que le bain est tellement gros que son état reste constant. Autrement dit, il n'est jamais affecté par l'état du système. Enfin, l'approximation la plus importante est l'*approximation de Born*. Il s'agit de négliger les termes d'ordre supérieur à deux en  $H_{SB}$  dans l'équation du mouvement [76].

Dans l'hypothèse où le nombre de modes dans le bain tend vers l'infini, on fait la conversion

$$\sum_m \rightarrow \int_0^\infty d\nu d(\nu), \quad \nu_m \rightarrow \nu, \quad \alpha_m \rightarrow \alpha(\nu), \quad \bar{n}_m \rightarrow \bar{n}(\nu), \quad (2.28)$$

où l'on a défini la densité d'états  $d(\nu)$  de l'environnement. Si l'environnement est tellement grand par rapport au système qu'il agit comme un réservoir thermique, il ne doit pas être affecté par l'état de l'oscillateur de Duffing. Cet état d'équilibre thermique se traduit en termes temporels par des fonctions de corrélation du bain très courtes par rapport à l'évolution du système. Autrement dit,  $\rho(t')$  varie de manière insignifiante sur le très petit intervalle de temps nécessaire aux fonctions de corrélation du bain pour s'annuler. Dans ces conditions, on peut faire l'*approximation de Markov* [76], c'est-à-dire approximer  $\rho(t')$  par  $\rho(t)$  et prendre  $t \rightarrow \infty$  dans la borne supérieure de l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(t) = & - \int_0^\infty d\tau \left[ \sum_m |X^{m,m+1}|^2 |m\rangle \langle m| \rho_1(t) - \sum_{mn} Z_{mn}(t) \right] e^{-i\Delta_m \tau} \langle B^\dagger(t) B(t-\tau) \rangle \\ & - \int_0^\infty d\tau \left[ \sum_m |X^{m,m+1}|^2 |m+1\rangle \langle m+1| \rho_1(t) - \sum_{mn} Z'_{mn}(t) \right] e^{i\Delta_m \tau} \langle B(t) B^\dagger(t-\tau) \rangle \\ & + \text{c.h.}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

où l'on a défini  $\tau = t - t'$  et

$$Z_{mn}(t) = (X^{m,m+1})^* X^{n,n+1} |m+1\rangle \langle m| \rho_1(t) |n\rangle \langle n+1| e^{i(\Delta_m - \Delta_n)t}, \quad (2.30)$$

$$Z'_{mn}(t) = X^{m,m+1} (X^{n,n+1})^* |m\rangle \langle m+1| \rho_1(t) |n+1\rangle \langle n| e^{i(\Delta_n - \Delta_m)t}. \quad (2.31)$$

L'intégration sur  $\tau$  donne alors

$$\int_0^\infty d\tau e^{-i\Delta_m \tau} \langle B^\dagger(t) B(t-\tau) \rangle \simeq \frac{1}{2} \bar{n}(\Delta_m) \kappa(\Delta_m) + iL'_m, \quad (2.32)$$

$$\int_0^\infty d\tau e^{i\Delta_m \tau} \langle B(t) B^\dagger(t-\tau) \rangle \simeq \frac{1}{2} [1 + \bar{n}(\Delta_m)] \kappa(\Delta_m) + i(L_m + L'_m). \quad (2.33)$$

On a défini ci-dessus le taux de relaxation

$$\kappa(\omega) = 2\pi\alpha^2(\omega)d(\omega), \quad (2.34)$$

ainsi que les décalages de Lamb

$$L_m = \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \int_0^\infty d\nu \frac{\kappa(\nu)}{\nu - \Delta_m}, \quad (2.35)$$

$$L'_m = \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \int_0^\infty d\nu \frac{\bar{n}(\nu)\kappa(\nu)}{\nu - \Delta_m}, \quad (2.36)$$

où  $\mathcal{P}$  représente la partie principale de Cauchy. Les termes qui impliquent les décalages de Lamb peuvent tous se réécrire comme  $-i[H_{\text{déc.}}, \rho_1(t)]$ , où

$$H_{\text{déc.}} = \sum_m |X^{m,m+1}|^2 [(L_m + L'_m) |m+1\rangle\langle m+1| + L'_m |m\rangle\langle m|]. \quad (2.37)$$

Ces termes agissent donc simplement comme un hamiltonien supplémentaire qui peut être inclus dans la description du système par des changements appropriés dans ses énergies et états propres. On se concentre ici sur la dissipation et on laisse donc tomber ces décalages de Lamb, ce qui permet de réécrire l'équation maîtresse dans la représentation d'interaction comme

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(t) = \sum_m \kappa(\Delta_m) \left\{ \bar{n}(\Delta_m) \left[ |X^{m,m+1}|^2 \mathcal{D}[|m+1\rangle\langle m|] \rho_1(t) + \sum_{n \neq m} Z_{mn}(t) \right] \right. \\ \left. + [1 + \bar{n}(\Delta_m)] \left[ |X^{m,m+1}|^2 \mathcal{D}[|m\rangle\langle m+1|] \rho_1(t) + \sum_{n \neq m} Z'_{mn}(t) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où  $\mathcal{D}[\hat{O}]\rho = \frac{1}{2} (2\hat{O}\rho\hat{O}^\dagger - \hat{O}^\dagger\hat{O}\rho - \rho\hat{O}^\dagger\hat{O})$  est un *superopérateur* appelé *dissipateur*. Un superopérateur est une transformation qui agit sur un opérateur par la gauche et par la droite pour donner un autre opérateur.

L'équation maîtresse obtenue ci-dessus peut se simplifier davantage dans les deux situations limites illustrées à la figure 2.2. En effet, les termes en  $Z_{mn}(t)$  et en  $Z'_{mn}(t)$  tels que  $m \neq n$  oscillent à une fréquence dont la valeur absolue est  $\Delta_m - \Delta_n$ . Il s'agit donc de la différence de fréquence entre deux transitions dans l'oscillateur. Dans la limite où  $K \gg \kappa(\Delta_m) \forall m$ , toutes ces fréquences sont beaucoup plus grandes que  $\kappa(\Delta_m)$ , de sorte que ces termes se moyennent temporellement approximativement à zéro et ils peuvent être négligés. Cette situation est représentée à la figure 2.2a) et mène à l'équation maîtresse

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(t) = \sum_m \bar{n}(\Delta_m) \Gamma_{m,m+1} \mathcal{D}[|m+1\rangle\langle m|] \rho_1(t) \\ + \sum_m [1 + \bar{n}(\Delta_m)] \Gamma_{m,m+1} \mathcal{D}[|m\rangle\langle m+1|] \rho_1(t), \end{aligned} \quad (2.39)$$



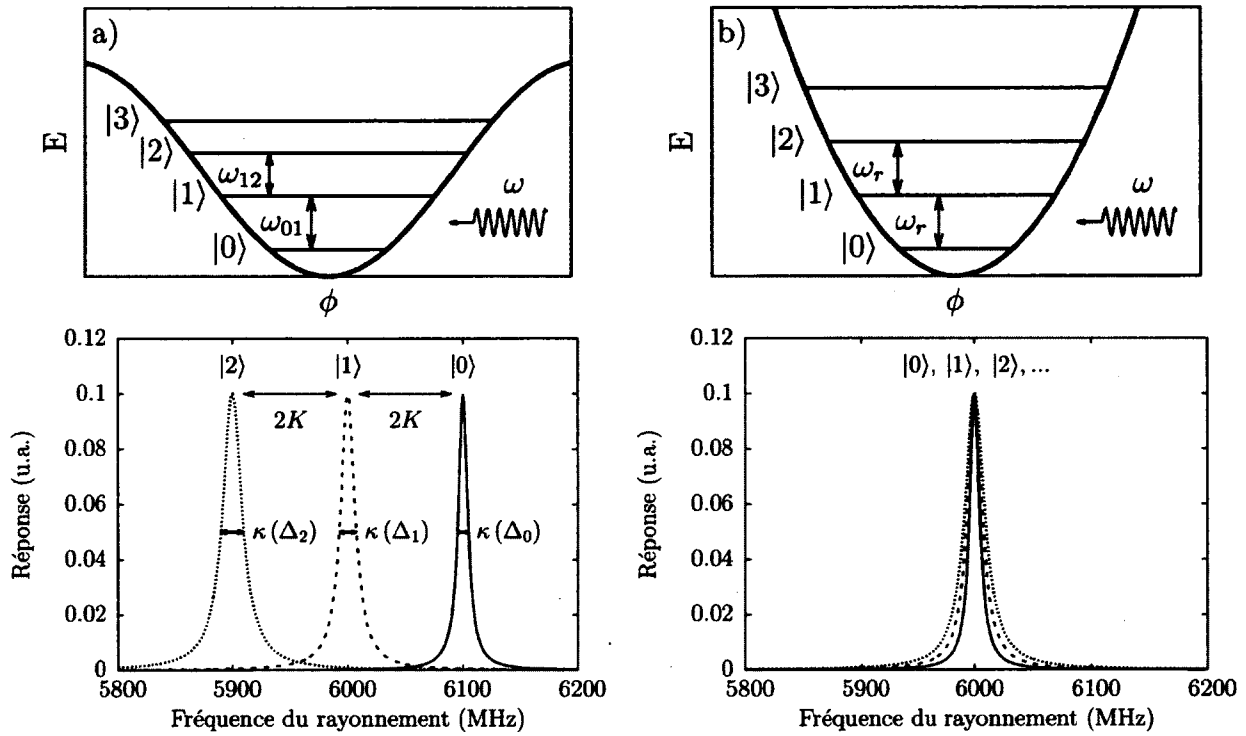


FIGURE 2.2 – Régimes de Redfield et de l’optique quantique, correspondant respectivement à  $|\Delta_m - \Delta_n| \gg \kappa(\Delta_m)$  et  $|\Delta_m - \Delta_n| \ll \kappa(\Delta_m) \forall m, n$ . Les deux graphiques du haut illustrent les niveaux d’énergie dans les deux régimes, alors que les deux graphiques du bas schématisent la réponse du système à un rayonnement externe selon qu’il est initialement dans l’état  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  ou  $|2\rangle$ . a) Dans le cas d’un oscillateur très anharmonique, les transitions se produisent toutes à des fréquences différentes. Elles peuvent alors être vues comme des processus indépendants qui n’ont pas de cohérence entre eux et donc se décrivent par l’équation de Redfield. b) Dans le cas d’un oscillateur harmonique, les transitions se produisent toutes à la même fréquence et sont donc corrélées. Les cohérences entre ces transitions sont décrites correctement dans le cadre de l’équation maîtresse de l’optique quantique.

où  $\Gamma_{m,m+1} = |X^{m,m+1}|^2 \kappa(\Delta_m)$  est le taux de transition de  $|m+1\rangle$  à  $|m\rangle$  à température nulle. Nous appellerons par la suite toute expression ayant cette forme *équation maîtresse de Redfield*. Dans ce régime, les termes hors diagonaux de la matrice densité sont absents dans la représentation d'interaction. Autrement dit, la dissipation ne présente pas de cohérences entre les transitions qui se produisent simplement à un taux donné par la règle d'or de Fermi. Un résultat important dans ce régime est le fait que le taux de transition dépend de la fréquence du couplage système-environnement à la fréquence de cette transition. Ainsi, si ce couplage n'est pas constant en fonction de la fréquence, les taux de transition varient selon l'état du système.

Dans la limite opposée,  $\Delta_m - \Delta_n \ll \kappa(\Delta_m) \forall m$ . Cela signifie que toutes les transitions se font à la même fréquence. On dit alors qu'il y a *dégénérescence de Liouville* entre toutes les transitions du système [77]. Les termes en  $Z_{mn}(t)$  et en  $Z'_{mn}(t)$  deviennent donc à toutes fins pratiques indépendants du temps. En réorganisant les termes de l'équation (2.38), on obtient

$$\dot{\rho}_I(t) = \bar{n}(\omega_r) \kappa(\omega_r) \mathcal{D}[a^\dagger] \rho_I(t) + [1 + \bar{n}(\omega_r)] \kappa(\omega_r) \mathcal{D}[a] \rho_I(t). \quad (2.40)$$

Il s'agit de l'*équation maîtresse de l'optique quantique*, valide pour un oscillateur harmonique. Contrairement au cas précédent, ici les cohérences jouent un rôle important dans la dissipation qui est pris en compte par le fait que ce sont les opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  qui apparaissent dans les dissipateurs. Par ailleurs, puisque toutes les transitions se produisent à la même fréquence, il suffit d'un seul taux de relaxation  $\kappa(\omega_r)$  pour décrire la relaxation. Cette équation est couramment utilisée en EDQ-cavité et en EDQ-circuit pour décrire la relaxation d'une cavité résonante [1, 78, 13]. Nous verrons au chapitre 3 qu'en couplant fortement un atome au résonateur, on peut rendre cette équation maîtresse inapplicable.

Autant dans le cas de l'équation de Redfield que dans celui de l'équation de l'optique quantique, si la température est nulle, seules les transitions vers les niveaux d'énergie inférieurs sont permises. Cela vient simplement du fait que si le bain est dans son état fondamental, il ne peut transférer d'énergie au système.

Une description intuitive de la dissipation dans le cas optique quantique est donnée dans le mémoire de M. Boissonneault [79]. Par ailleurs, l'équation maîtresse de l'oscillateur harmonique amorti est discutée en profondeur dans les références [1, 80, 76].

### 2.3 La relaxation dans un système à deux niveaux

La détermination de l'équation maîtresse pour un système à deux niveaux est évidemment le cas le plus simple, car une seule paire de transitions est possible :  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ . En prenant pour hamiltonien du système

$$H_S = \frac{\omega_a}{2} \sigma_z \quad (2.41)$$

et en supposant une interaction système-bain de la forme

$$H_{SB} = \sum_m \alpha_m (\sigma_- + \sigma_+) (b_m + b_m^\dagger), \quad (2.42)$$

qui correspond simplement à un couplage dipolaire, on obtient, en utilisant exactement les mêmes approximations que dans la section précédente, l'équation maîtresse qui suit dans la représentation d'interaction

$$\dot{\rho}_I(t) = \bar{n}(\omega_a) \gamma_1(\omega_a) \mathcal{D}[\sigma_+] \rho_I(t) + [1 + \bar{n}(\omega_a)] \gamma_1(\omega_a) \mathcal{D}[\sigma_-] \rho_I(t). \quad (2.43)$$

Ici, le taux de relaxation est  $\gamma_1(\nu) = 2\pi |\alpha(\nu)|^2 d(\nu)$  et est évalué à la fréquence de séparation des deux niveaux.

### 2.4 Le déphasage pur dans un système à deux niveaux

Lorsqu'ils interagissent avec leur environnement, les systèmes quantiques ne font pas que relaxer dans leur état fondamental. Ils ont aussi tendance à perdre leur caractère quantique : s'ils sont initialement dans une superposition d'états, l'interaction avec le bain les fait évoluer vers un mélange statistique. Ce phénomène porte le nom de *décohérence* et est caractérisé par la disparition des termes hors-diagonaux de la matrice densité du système.

Une telle évolution a nécessairement lieu lorsqu'un système quantique est soumis à de la relaxation, car de tels processus finissent par annuler les cohérences dans la matrice densité. Cependant, dans plusieurs systèmes, cette description n'est pas suffisante, car un système peut aussi interagir avec son environnement de manière non radiative. Dans cette situation, l'interaction avec le bain ne doit pas affecter les populations, mais peut

quand même détruire les superpositions quantiques. On parle alors de *déphasage pur*.

Dans un système à deux niveaux, une telle interaction se modélise bien par une source de bruit classique

$$H_{\text{deph}} = f(t)\sigma_z, \quad (2.44)$$

où  $f(t)$  est une fonction aléatoire du temps. Avec une méthode similaire à celle employée à l'annexe D.1, on peut démontrer que l'ajout de cet hamiltonien mène à une équation maîtresse de la forme [81]

$$\dot{\rho}_1(t) = \frac{\gamma_\phi}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho_1(t), \quad (2.45)$$

dans la représentation d'interaction. On a défini ici le taux de déphasage pur  $\gamma_\phi = 2S_f(0)$ , où  $S_f(\nu)$  est la densité spectrale de bruit provenant de la fonction aléatoire  $f(t)$

$$S_f(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\nu\tau} E[f(t)f(t+\tau)], \quad (2.46)$$

avec  $E[\cdot]$  l'espérance mathématique. Pour arriver à un tel résultat, il faut supposer que  $S(\nu)$  est blanche autour de la fréquence pertinente, c'est-à-dire ici la fréquence nulle.

Ce modèle semi-classique, où les niveaux d'énergie du qubit fluctuent aléatoirement, permet de décrire efficacement le déphasage pur tel qu'observé expérimentalement en EDQ-circuit [82]. Ceci porte à croire que la décohérence dans de tels systèmes provient réellement de fluctuations dans les paramètres. Dans le cas du qubit présenté à l'annexe B, les paramètres qui peuvent fluctuer sont  $E_C$  et  $E_J$ , ce qui correspondrait respectivement à du bruit de charge et à des fluctuations de courant critique. Par ailleurs, dans certains cas, comme lorsqu'une jonction Josephson est remplacée par un SQUID,  $E_J$  dépend du flux magnétique externe  $\varphi$ . Des fluctuations de  $\varphi$  modifient donc la fréquence du qubit, ce qui correspond à du bruit de flux.

Le bruit de charge provient d'électrons piégés à la surface du substrat ou du film supraconducteur du qubit qui sautent aléatoirement d'un défaut à l'autre [83]. Ce problème est largement éliminé dans le cas du transmon [84, 85], un type de qubit supraconducteur qui est insensible à cette source de bruit. Du déphasage pur peut également être induit par des fluctuations dans le courant critique des jonctions Josephson. Plusieurs phénomènes peuvent provoquer ces fluctuations, comme du bruit en crénaux provenant du piégeage et du dépiégeage d'électrons dans la barrière isolante des jonctions [86, 87, 88, 89] ou encore des électrons subissant de l'effet tunnel entre des états de Kondo [90]. Enfin, dans le cas de qubits de flux [19], du bruit dans le flux magnétique provenant de fluctuations dans

les spins d'électrons non appariés à la surface du supraconducteur peut aussi provoquer du déphasage pur [91, 92].

Un modèle moins bien connu qui mène aussi exactement à l'équation (2.45) se base sur une interaction non radiative avec un bain quantique [76]. Comme dans le modèle de Caldeira-Leggett, le bain est un ensemble d'oscillateurs harmoniques, mais le couplage système-environnement est

$$H_{\text{SB}} = \sum_{jk} \alpha_{jk} b_j^\dagger b_k \sigma_+ \sigma_- . \quad (2.47)$$

Il s'agit donc du transfert d'un quantum d'énergie d'un mode du bain à un autre à travers une désexcitation et une excitation virtuelle du qubit. Comme l'équation maîtresse obtenue est exactement la même, il n'y a pas de différence observable entre les modèles quantique et classique dans le cas d'un qubit seul. Nous verrons cependant à la section 3.2.2 que cette équivalence disparaît pour un qubit couplé fortement à un résonateur.

## 2.5 Exemple : le système à deux niveaux amorti et soumis au déphasage pur

Pour fixer les idées, on calcule ici la dynamique d'un système quantique soumis à la relaxation et au déphasage pur dans le cas le plus simple : celui du système à deux niveaux à température nulle. Dans la représentation de Schrödinger, l'équation maîtresse d'un tel système est

$$\dot{\rho}(t) = i[H, \rho(t)] + \gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_-] \rho(t) + \frac{\gamma_\phi}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho(t), \quad (2.48)$$

où  $H = \omega_a \sigma_z / 2$ . En écrivant la matrice densité comme

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow}(t) & \rho_{\uparrow\downarrow}(t) \\ \rho_{\downarrow\uparrow}(t) & \rho_{\downarrow\downarrow}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

on obtient l'ensemble d'équations différentielles qui suit pour chacune des composantes de la matrice densité

$$\dot{\rho}_{\uparrow\uparrow}(t) = -\gamma_1 \rho_{\uparrow\uparrow}(t), \quad (2.50)$$

$$\dot{\rho}_{\downarrow\downarrow}(t) = \gamma_1 \rho_{\downarrow\downarrow}(t), \quad (2.51)$$

$$\dot{\rho}_{\uparrow\downarrow}(t) = \left( i\omega_a - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_\phi \right) \rho_{\uparrow\downarrow}, \quad (2.52)$$

$$\dot{\rho}_{\downarrow\uparrow}(t) = \left( i\omega_a - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_\phi \right) \rho_{\downarrow\uparrow}. \quad (2.53)$$

La solution est

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow}(0) e^{-\gamma_1 t} & \rho_{\uparrow\downarrow}(0) e^{i\omega_a t} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_1}{2} + \gamma_\phi\right)t\right] \\ \rho_{\downarrow\uparrow}(0) e^{-i\omega_a t} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_1}{2} + \gamma_\phi\right)t\right] & 1 - \rho_{\uparrow\uparrow}(0) e^{-\gamma_1 t} \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Le taux de relaxation intervient partout dans la matrice densité. Il fait tomber exponentiellement la population de l'état excité vers 0 et détruit exponentiellement les cohérences à un taux deux fois plus lent. Quant au déphasage pur, il n'affecte que les cohérences, les faisant disparaître au taux  $\gamma_\phi$ . Ceci permet de définir deux temps caractéristiques pour un qubit. Le premier est le temps de relaxation  $T_1 = 1/\gamma_1$ , c'est-à-dire le temps nécessaire à un qubit initialement dans l'état  $|\uparrow\rangle$  pour que la population de l'état excité soit  $1/e$ . Le deuxième est le temps de déphasage  $T_2 = 1/(\gamma_1/2 + \gamma_\phi)$ , c'est-à-dire le temps caractéristique de disparition des cohérences. En définissant aussi  $\tau_\phi = 1/\gamma_\phi$ , on obtient une relation fondamentale entre  $T_1$  et  $T_2$

$$\frac{1}{2T_1} + \frac{1}{\tau_\phi} = \frac{1}{T_2}. \quad (2.55)$$

Ainsi, même si  $\tau_\phi \rightarrow \infty$ , il faut que  $T_2 = 2T_1$ . On dit alors que le temps de cohérence du qubit est limité par  $T_1$ .

## 2.6 Le déphasage pur dans un système à $N$ niveaux

Bien souvent, comme dans le cas du transmon, les systèmes quantiques d'intérêt ont plusieurs niveaux. Dans cette situation, le déphasage n'est plus simplement décrit par un dissipateur de  $\sigma_z$ , mais par le dissipateur d'un opérateur hermitique  $\mathcal{O}$  qui contient des

projecteurs sur tous les niveaux du système. De manière générale, cet opérateur s'écrit

$$\mathcal{O} = \sum_i \alpha_i |i\rangle\langle i|, \quad (2.56)$$

où  $\alpha_i$  est un paramètre réel. Dans cette section, on montre qu'un terme de dissipation ayant cette forme mène nécessairement à du déphasage pur. Ce résultat sera utile à la section 3.2, où l'on obtient une équation maîtresse pour un système atome-résonateur en interaction forte, ce qui correspond à un système à plusieurs niveaux.

Pour qu'un terme d'une équation maîtresse mène à du déphasage pur, il doit faire décroître les cohérences sans affecter les populations. Pour prouver que c'est bien le cas pour  $\mathcal{D}[\mathcal{O}]$ , on écrit l'équation maîtresse correspondante dans la représentation d'interaction

$$\dot{\rho}_I(t) = \mathcal{D}[\mathcal{O}] \rho_I(t). \quad (2.57)$$

Avec  $\rho_I(t) = \sum_{mn} \rho_{mn}(t) |m\rangle\langle n|$ , on obtient, en développant le dissipateur et en égalant terme à terme les coefficients devant les opérateurs de base  $|m\rangle\langle n|$

$$\dot{\rho}_{mn}(t) = \left[ \alpha_m \alpha_n - \frac{1}{2} (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \right] \rho_{mn}(t) \quad (2.58)$$

$$= -\frac{1}{2} (\alpha_m - \alpha_n)^2 \rho_{mn}(t). \quad (2.59)$$

La solution pour chacune des composantes de la matrice densité est alors

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\alpha_m - \alpha_n)^2 t \right]. \quad (2.60)$$

Alors que les cohérences décroissent exponentiellement, les populations, qui correspondent aux éléments de  $\rho$  tels que  $m = n$ , ne sont évidemment pas affectées. Le dissipateur d'un opérateur de la forme donnée par l'équation (2.56) mène donc nécessairement à du déphasage pur.

# Chapitre 3

## Relaxation et déphasage pour un atome et un résonateur couplés

Dans le dernier chapitre, la relaxation et le déphasage pur ont été considérés séparément pour l'atome et la cavité, ce qui a mené à l'équation maîtresse de l'optique quantique. Cette approche ne convient pas lorsqu'une interaction importante est introduite entre le qubit et le résonateur. Dans ce chapitre, qui contient la plupart des résultats originaux de ce travail, on présente d'abord quatre prédictions non physiques découlant de l'équation de l'optique quantique dans le contexte de l'interaction lumière-matière. On présente ensuite l'équation du mouvement du système qubit-résonateur couplé dans la base qui diagonalise l'hamiltonien de Rabi et on explique pourquoi ce modèle ne souffre pas des maux qui affligent l'équation maîtresse de l'optique quantique. Puis, on revisite l'effet Casimir dynamique dû au bruit en  $\sigma_z$  et on applique le nouveau modèle dans les régimes séculaire et non séculaire. En particulier, à la lumière de la nouvelle équation maîtresse, on calcule le spectre de séparation de Rabi et on explique comment une expérience de spectroscopie pourrait être employée pour étudier le spectre du bruit en  $\sigma_z$ .

### 3.1 Les échecs de l'équation maîtresse de l'optique quantique

Dans cette section, on montre que les fréquences des transitions causées par le couplage à l'environnement sont mal évaluées par le modèle de l'optique quantique dans le cadre de trois phénomènes bien connus en EDQ-circuit : le déphasage habillé, l'effet Purcell



et l'effet Casimir dynamique. On mentionne également qu'en couplage ultra-fort, des excitations sont générées même par un bain de relaxation à température nulle, ce qui viole la conservation de l'énergie.

### 3.1.1 Le déphasage habillé et l'effet Purcell

L'équation maîtresse obtenue à la section 2.4 pour le déphasage pur dans un qubit tient seulement à condition de faire l'approximation du bruit blanc. Cela revient à supposer que la densité spectrale de bruit est constante autour de la fréquence nulle. Cette approximation ne peut tenir que lorsque le bruit en  $\sigma_z$  n'est sondé qu'à une seule fréquence par l'équation maîtresse, ici par le taux de déphasage  $\gamma_\phi = 2S_f(0)$ . Puisque le bruit en  $\sigma_z$  est souvent en  $1/f$  [93, 87, 94, 95], c'est bien la fréquence nulle qui domine sur tous les autres processus. Cependant, puisque, dans le cadre de l'équation standard, tous les phénomènes dus au bruit en  $\sigma_z$  sont pris au taux relié à la contribution à  $\omega = 0$ , d'éventuels processus dépendant en réalité de fluctuations de fréquence du qubit à des fréquences élevées sont surestimés. C'est le cas dans le modèle du déphasage habillé [81, 96].

Le modèle du déphasage habillé est valide dans le cadre du régime dispersif, dans lequel  $|\Delta| \gg g$ . Dans ces conditions et en régime séculaire, on peut appliquer la transformation suivante

$$U_D = \exp[\lambda (a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+)] \quad (3.1)$$

sur l'hamiltonien de Jaynes-Cummings, donné à l'équation (1.12), pour obtenir, au quatrième ordre en  $\lambda = g/\Delta$

$$H_D = U_D^\dagger H_{JC} U_D \simeq (\omega_r + \chi \sigma_z + \zeta) a^\dagger a + \frac{\omega_a + \chi}{2} \sigma_z + \zeta \sigma_z (a^\dagger a)^2. \quad (3.2)$$

Cet hamiltonien diagonal inclut un couplage effectif dispersif entre le qubit et le résonateur  $\chi = g^2/\Delta$ , ainsi qu'une petite non linéarité Kerr  $\zeta = g^4/\Delta^3$ , habituellement négligée. Alors que, dans la base dispersive, les états propres sont simplement  $|\uparrow / \downarrow, n\rangle$ , dans la base nue, ils sont, au deuxième ordre en  $g$ ,

$$|\overline{\uparrow}, n-1\rangle \simeq \left(1 - \frac{g^2 n}{2\Delta^2}\right) |\uparrow, n-1\rangle + \frac{g\sqrt{n}}{\Delta} |\downarrow, n\rangle, \quad (3.3)$$

$$|\overline{\downarrow}, n\rangle \simeq \left(1 - \frac{g^2 n}{2\Delta^2}\right) |\downarrow, n\rangle - \frac{g\sqrt{n}}{\Delta} |\uparrow, n-1\rangle, \quad (3.4)$$

où  $|\overline{\psi}\rangle = U_D |\psi\rangle$ . L'interprétation physique de ces états est essentiellement la même que

celle donnée à la figure 1.3 ; les états du qubit et du résonateur sont mélangés. Le cas du couplage dispersif correspond cependant à un angle de mélange  $\theta_n \ll 1$ , de sorte que l'interaction n'agit que comme une correction.

Si on ajoute une source de bruit classique de la forme  $f(t)\sigma_z$  dans l'hamiltonien de Jaynes-Cummings pour décrire le déphasage pur du qubit et qu'on passe dans la base dispersive, on obtient l'hamiltonien de déphasage transformé qui suit

$$H_{\text{dep}}^{\text{D}}(t) = f(t) [\sigma_z - \lambda (a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+)]. \quad (3.5)$$

Il apparaît donc un terme qui échange des excitations entre le qubit et le résonateur. Tel que démontré dans la référence [81], pour  $f(t)$  représentant une source de bruit incohérent, cette interaction se produit à un taux  $\gamma_{\pm\Delta} = 4\lambda^2 S_f(\pm\Delta)$ , où le signe « + » correspond à la désexcitation du qubit et le signe « - » à son excitation. Ce processus est décrit dans le cadre d'une équation maîtresse exprimée dans la base dispersive qui comprend les dissipateurs  $\mathcal{D}[a^\dagger \sigma_-]$  et  $\mathcal{D}[a \sigma_+]$ . En appliquant directement la transformation dispersive sur l'équation maîtresse (2.45), obtenue pour un qubit seul, on obtient les mêmes processus, mais ils se produisent tous au taux  $\gamma_\phi = 2S_f(0)$ . Utiliser cette équation maîtresse revient donc à supposer que le bruit en  $\sigma_z$  est blanc et mène à une surestimation des taux de renversement du qubit. Cette erreur provient du fait que le couplage dispersif est ignoré dans le développement menant à l'équation (2.45).

Une autre conséquence importante du couplage dispersif qui est ignorée dans le traitement standard est l'effet Purcell. Ce phénomène correspond à la relaxation du qubit par émission d'un photon à l'extérieur de la cavité. Le taux associé à ce processus est

$$\Gamma_{\kappa}^{\bar{1}0, \bar{1}0} = \left(\frac{g}{\Delta}\right)^2 \kappa (\omega_a + \chi). \quad (3.6)$$

Alors que ce résultat dépend du taux de relaxation de la cavité à la fréquence du qubit, le résultat obtenu avec l'équation (2.40) évalue plutôt l'amortissement à la fréquence du résonateur. Cette distinction est importante dans plusieurs expériences d'EDQ-circuit [97, 98, 2].

### 3.1.2 L'effet Casimir dynamique

En plus d'accentuer le taux de renversement du qubit et de mal évaluer l'effet Purcell, l'équation maîtresse standard amplifie un processus caractéristique du bruit en  $\sigma_z$

en régime non séculaire : l'effet Casimir dynamique. À ma connaissance, cet effet est mentionné pour la première fois dans ce contexte dissipatif par Werlang *et al* [8], où les auteurs calculent numériquement l'évolution du système qubit-résonateur en interaction sous l'équation maîtresse

$$\dot{\rho}(t) = i[H_R, \rho(t)] + \frac{\gamma_\phi}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho(t). \quad (3.7)$$

Il s'agit de l'hamiltonien de Rabi avec une contribution de déphasage pur. En prenant initialement le système dans son état fondamental, les auteurs calculent numériquement le nombre moyen de photons en fonction du temps sous l'action du déphasage pur et constatent que cette quantité augmente au taux constant

$$\beta \propto \gamma_\phi \left( \frac{g}{\omega_a + \omega_r} \right)^2, \quad (3.8)$$

avec  $\omega_a = \omega_r$ .

Dans le modèle de l'optique quantique,  $\gamma_\phi = 2S_f(0)$ . Autrement dit, les auteurs obtiennent un processus radiatif à partir de bruit à fréquence nulle. Dans un traitement correct, de tels processus radiatifs devraient dépendre du bruit à une fréquence comparable à celle des photons émis dans le résonateur. Comme dans le cas du déphasage habillé, sous le modèle de l'optique quantique, ce bruit est blanc, ce qui fait en sorte que les processus radiatifs sont fautiveusement évalués à la fréquence nulle. Comme le bruit en  $\sigma_z$  est le plus souvent décrit comme étant en  $1/f$ , le traitement standard fait par Werlang *et al* accentue sans doute ce phénomène bien au-delà du raisonnable.

### 3.1.3 La génération d'excitations parasites

Dans les sections précédentes, on a montré que, dans les régimes dispersif et ultra-fort, le modèle de l'optique quantique surestime certains processus qui dépendent du bruit à haute fréquence en  $\sigma_z$ . On montre maintenant qu'en plus d'exagérer des mécanismes néanmoins possibles, l'équation maîtresse standard prédit un phénomène non physique : l'excitation du système par un environnement à température nulle.

Si on inclut seulement les processus de relaxation, l'équation maîtresse standard s'écrit, à  $T = 0$ ,

$$\dot{\rho}(t) = i[H_R, \rho(t)] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho(t) + \gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_-] \rho(t). \quad (3.9)$$

En régime séculaire, cette expression, même si elle n'est pas rigoureuse [99, 100] décrit néanmoins avec précision plusieurs expériences d'EDQ-cavité et d'EDQ-circuit [3, 1]. En effet, les termes  $\mathcal{D}[a]$  et  $\mathcal{D}[\sigma_-]$  tendent correctement à ramener le système dans le fondamental  $|\downarrow, 0\rangle$  de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings.

En régime non séculaire, cependant,  $|\downarrow, 0\rangle$  n'est plus l'état fondamental et l'équation (3.9) emmène le système qubit-résonateur ultra-fortement couplé en dehors de son vrai fondamental  $|\widetilde{\downarrow}, 0\rangle$ . Ainsi, même à  $T = 0$ , alors qu'aucune énergie ne devrait pouvoir être ajoutée au système, la relaxation génère des photons réels en plus des photons virtuels déjà présents dans le fondamental. Pour tester cette prédiction, on simule l'évolution temporelle de la matrice densité correspondant à l'état initial  $|\widetilde{\downarrow}, 0\rangle$  sous l'équation maîtresse (3.9)<sup>1</sup>. Les excitations additionnelles obtenues sont représentées en fonction de  $g$  à la figure 3.1 par le trait noir plein. Cette courbe suit de près le comportement de l'erreur faite en estimant l'état fondamental Rabi par le vide, représentée par les points rouges. Il est important de souligner que ces résultats sont obtenus simplement en calculant la dynamique dissipative du système en l'absence d'excitation externe.

Une théorie satisfaisante de la dissipation devrait ramener le système dans son état fondamental à température nulle. Or, ce critère n'est pas rempli par l'équation maîtresse standard. Par contre, une équation maîtresse ayant cette propriété essentielle peut être obtenue à condition de ne pas négliger le couplage qubit-résonateur dans le traitement de la dissipation. Ce modèle plus réaliste est présenté à la section suivante.

## 3.2 La dissipation dans le système atome-résonateur en couplage fort et ultra-fort

On introduit ici une équation maîtresse prenant en compte l'interaction lumière-matière. À la lumière de ce nouveau résultat, on revisite l'effet Casimir dynamique dû au bruit en  $\sigma_z$  à l'aide d'un modèle semi-classique permettant de s'en faire une intuition physique, pour ensuite utiliser notre équation du mouvement pour faire des prédictions plus exactes. Enfin, après avoir employé l'exemple intuitif du modèle de Jaynes-Cummings pour illustrer la physique de cette équation maîtresse, on applique le modèle au phéno-

---

1. Pour ce faire, on utilise SQUACK (Sherbrooke QUantum pACKage), la bibliothèque de calcul conçue par Maxime Boissonneault et Steve Allen. Cet outil permet de définir l'hamiltonien et les dissipateurs d'un système quantique et de calculer son évolution par solution numérique de l'ensemble d'équations différentielles correspondant [101].

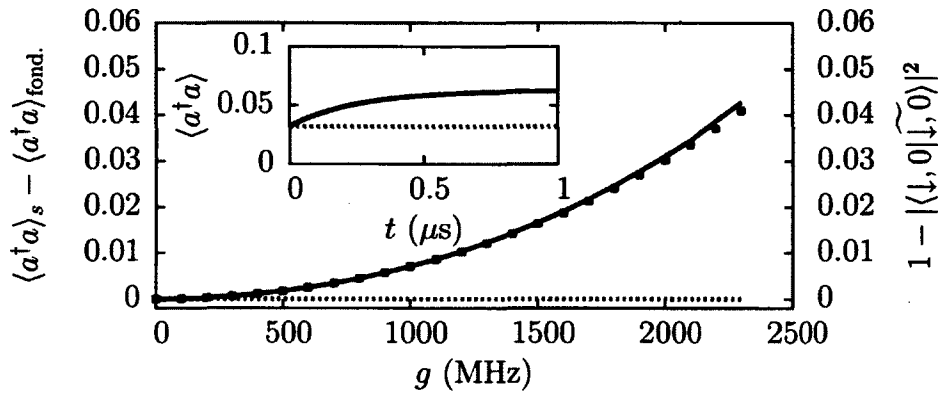


FIGURE 3.1 – Excès dans le nombre de photons moyen dû à la relaxation dans l'état stationnaire du système qubit-résonateur en couplage ultra-fort. Initialement, le système est dans son vrai fondamental  $|\downarrow, 0\rangle$ , mais, sous l'équation maîtresse (3.9), le bain l'excite de manière non physique même à  $T = 0$ . La ligne noire, qui correspond à l'axe de gauche, représente le nombre de photons additionnel introduit par la dissipation dans l'état stationnaire. Les points rouges, associés à l'axe de droite, désignent l'erreur faite en approximant l'état fondamental de Rabi  $|\widetilde{\downarrow}, 0\rangle$  par le vide  $|\downarrow, 0\rangle$ . Les paramètres sont  $\omega_a/2\pi = \omega_r/2\pi = 6 \text{ GHz}$  et  $\kappa/2\pi = \gamma_1/2\pi = 0.1 \text{ MHz}$ . En encadré, on trouve le nombre de photons moyen en fonction du temps pour le système initialement dans son fondamental avec  $g = 2 \text{ GHz}$ . Dans les graphiques principal et secondaire, la ligne bleue pointillée indique les résultats de l'équation maîtresse présentée à la section 3.2.1 pour le nombre de photons.

mène de séparation de Rabi. On montre qu'une signature non séculaire apparaît dans le spectre de transmission de la molécule lumière-matière et on explique comment une telle expérience de spectroscopie pourrait servir à étudier le spectre du bruit en  $\sigma_z$ .

### 3.2.1 Présentation générale du modèle

On prend maintenant en compte le couplage qubit-résonateur dans les étapes menant à l'équation maîtresse du système. La démarche est essentiellement la même que pour celle présentée au chapitre 2 pour le calcul de l'équation maîtresse standard. Le qubit et le résonateur sont chacun couplés à leur propre environnement. Ces environnements sont indépendants et sont tous deux représentés par un bain d'oscillateurs harmoniques

$$H_B = \sum_m \nu_m b_m^\dagger b_m. \quad (3.10)$$

Les interactions qubit-bain et résonateur-bain ont la forme

$$H_{SB} = \sum_m \alpha_m (c + c^\dagger) (b_m + b_m^\dagger), \quad (3.11)$$

Pour le qubit,  $c \rightarrow \sigma_-$ , alors que pour le résonateur,  $c \rightarrow a$ . Finalement, le déphasage est représenté classiquement par

$$H_{\text{dep}} = f(t)\sigma_z, \quad (3.12)$$

où  $f(t)$  est une fonction aléatoire du temps, ou par le modèle quantique de l'équation (2.47). La différence fondamentale avec le chapitre précédent est dans le choix de l'hamiltonien du système. Alors que, précédemment, on choisissait séparément le qubit ou le résonateur, ici, on considère l'hamiltonien de Rabi dans l'interaction avec chacun des bains mentionnés ci-dessus. Ainsi, tandis que dans le traitement standard, on obtient des transitions entre les états propres de l'hamiltonien libre  $H_0 = \omega_r a^\dagger a + \omega_a \sigma_z / 2$ , inclure le terme d'interaction qubit-résonateur fait en sorte que les transitions ont maintenant lieu entre les états propres  $\{|\widetilde{n}, \pm\rangle, |\widetilde{0}, 0\rangle\}$  de l'hamiltonien de Rabi. Ces états propres peuvent être estimés analytiquement, comme expliqué à la section 1.2, ou trouvés numériquement.

La démarche à faire pour obtenir l'équation maîtresse dans cette situation ressemble énormément à celle présentée à la section 2.2. En effet, tel qu'illustré à la figure 1.3b), le couplage avec le qubit introduit une non linéarité dans l'hamiltonien. Cette non linéarité correspond dans le régime dispersif au terme en  $\zeta (a^\dagger a)^2$  dans l'équation (3.2), où  $\zeta =$

$g^4/\Delta^3$ . Dans le régime où cette non linéarité est beaucoup plus forte que le couplage avec l'environnement, toutes les transitions entre les états propres du système induites par la dissipation peuvent être traitées comme étant incohérentes. Cette situation correspond au cas où  $g$  est une fraction significative de  $\Delta$  et donc au bris de l'approximation dispersive. Tel que démontré aux annexes C et D, cette approche mène, à  $T = 0$ , à une équation maîtresse de type Redfield

$$\dot{\rho}_I(t) = \mathcal{L}_{\text{hab}}\rho_I(t), \quad (3.13)$$

$$\mathcal{L}_{\text{hab}} = \mathcal{D} \left[ \sum_j \Phi_j |j\rangle\langle j| \right] + \sum_{j,k+j} \Gamma_\phi^{jk} \mathcal{D}[|j\rangle\langle k|] + \sum_{j,k>j} (\Gamma_\kappa^{jk} + \Gamma_\gamma^{jk}) \mathcal{D}[|j\rangle\langle k|], \quad (3.14)$$

où les  $|j\rangle$  et les  $|k\rangle$  sont les états propres de l'hamiltonien de Rabi. On appellera par la suite cette formule l'équation de Redfield ou l'*équation maîtresse habillée*. La dépendance en température est laissée de côté ici pour simplifier la discussion, mais se trouve dans les annexes C et D. Les deux premiers termes de cette équation sont les contributions du bruit en  $\sigma_z$  qui ne causaient que du déphasage dans l'équation maîtresse standard. Ici, comme démontré à la section 2.6, le premier terme correspond à du déphasage pur dans la base des états propres avec

$$\Phi_j = \sqrt{\frac{\gamma_\phi(0)}{2}} \sigma_z^{jj}, \quad (3.15)$$

où  $\gamma_\phi(\omega) = 2S_f(\omega)$  est le taux correspondant à la densité spectrale de bruit à la fréquence  $\omega$  et

$$\sigma_z^{jk} = \langle j | \sigma_z | k \rangle. \quad (3.16)$$

Puisque  $\sigma_z$  n'est pas diagonal dans la base des états propres de l'hamiltonien de Rabi, le bruit selon cette composante induit aussi des transitions parasites entre les niveaux  $j$  et  $k$  au taux

$$\Gamma_\phi^{jk} = \frac{\gamma_\phi(\Delta_{kj})}{2} \times |\sigma_z^{jk}|^2, \quad (3.17)$$

où  $\Delta_{kj} = E_k - E_j$ . Cette contribution n'est donc importante que si le bruit en  $\sigma_z$  a un poids spectral aux fréquences potentiellement hautes  $\Delta_{kj}$ . Finalement, le dernier terme de l'équation (3.14) est la contribution des bains du qubit et du résonateur qui était entièrement responsable de la relaxation dans le traitement standard. Ils causent maintenant

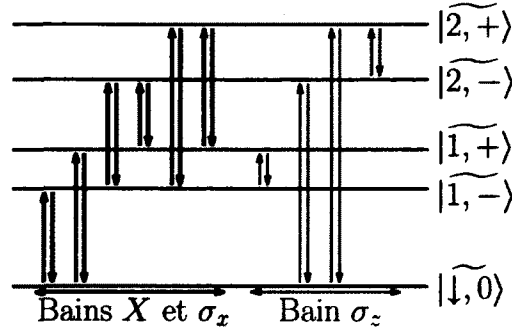


FIGURE 3.2 – Règles de sélection sur les transitions induites par l’environnement entre les états propres de l’hamiltonien de Rabi. Les bains de relaxation du qubit et du résonateur peuvent seulement générer des transitions entre états de parité différente. Le bruit en  $\sigma_z$  peut provoquer des transitions entre n’importe quelle paire de niveaux de même parité.

des transitions entre les états propres aux taux

$$\Gamma_{\kappa}^{jk} = \kappa(\Delta_{kj}) \times |X^{jk}|^2 \quad (3.18)$$

$$\Gamma_{\gamma}^{jk} = \gamma(\Delta_{kj}) \times |\sigma_x^{jk}|^2, \quad (3.19)$$

où

$$X^{jk} = \langle j|X|k\rangle \quad (3.20)$$

$$\sigma_x^{jk} = \langle j|\sigma_x|k\rangle. \quad (3.21)$$

Ici,  $\kappa(\omega) = 2\pi |\alpha_{\kappa}(\omega)|^2 d_{\kappa}(\omega)$  et  $\gamma(\omega) = 2\pi |\alpha_{\gamma}(\omega)|^2 d_{\gamma}(\omega)$ , où  $\alpha_{\kappa}(\omega)$  et  $\alpha_{\gamma}(\omega)$  sont respectivement les constantes de couplage à l’environnement du résonateur et du qubit, alors que les  $d_i(\omega)$  sont les densités d’états des bains correspondants. Des formules analytiques pour les éléments de matrice dans le régime Bloch-Siegert sont données à l’annexe F.

La figure 3.2 illustre les transitions permises par les symétries de l’hamiltonien de Rabi. Tel qu’expliqué à la section 1.2.4, l’hamiltonien de Rabi préserve la parité du nombre total d’excitations. Comme le décrit plus en détail l’annexe C, les états propres de l’hamiltonien de Rabi changent de parité sous l’application des opérateurs  $X$  et  $\sigma_x$ . Ainsi,  $X^{jk} = \sigma_x^{jk} = 0$  pour des états  $|j\rangle$  et  $|k\rangle$  de même parité. De la même façon, la matrice  $\sigma_z$  préserve la parité, de sorte que le bruit en  $\sigma_z$  ne peut pas induire de transitions entre états de parité distincte.

En permettant des transitions entre états propres de même parité, l’équation maîtresse



obtenue ici rappelle le modèle du déphasage habillé, où le bruit en  $\sigma_z$  induit des transitions de la forme  $|\uparrow, n-1\rangle \leftrightarrow |\downarrow, n\rangle$ . Cependant, les deux équations diffèrent dans leur régime d'applicabilité. Dans le modèle du déphasage habillé, le terme non linéaire proportionnel à  $\zeta$  est négligé dans la dérivation de l'équation maîtresse. Cette approximation se brise lorsque  $\zeta > \max\{\kappa(\omega_r), \gamma(\omega_a)\}$ . Dans ce cas, le modèle développé ici est plus approprié. Cependant, lorsque  $\kappa < \min\{\kappa(\omega_r), \gamma(\omega_a)\}$ , les différentes transitions du résonateur se produisent toutes à la même fréquence et leur interaction avec l'environnement ne peut être traitée comme incohérente. C'est alors l'approche du déphasage habillé qui doit être utilisée [81, 96]. Le régime de validité de l'équation maîtresse de Redfield est discuté plus en détails à l'annexe E.

### 3.2.2 Les problèmes réglés par l'équation de Redfield

Différents problèmes inhérents à l'utilisation de l'équation maîtresse standard ont été présentées à la section 3.1. Les principales difficultés surviennent lorsque la dynamique du système est évaluée en couplage ultra-fort. Dans ces conditions, les transitions générées par le bruit en  $\sigma_z$  représentées à la figure 3.2 sont évaluées à la mauvaise fréquence et la relaxation ne ramène pas le système dans son fondamental à  $T = 0$ . Ces obstacles sont surmontés par l'équation maîtresse habillée.

Selon l'équation (3.17), le taux de transition entre deux états  $|j\rangle$  et  $|k\rangle$  de même parité dépend du bruit à la fréquence  $\Delta_{kj} = E_k - E_j$ , c'est-à-dire la séparation entre les niveaux d'énergie  $E_j$  et  $E_k$ . Ce résultat correspond bien à l'intuition physique derrière un phénomène radiatif. Des fréquences élevées doivent donc être présentes dans le spectre du bruit en  $\sigma_z$  pour que ces transitions soient observées. Par ailleurs, les transitions de la forme  $|k\rangle \rightarrow |j\rangle$  telles que  $j > k$  requièrent une fréquence  $\Delta_{kj} < 0$ . La signification de telles fréquences est discutée, par exemple, dans la référence [102]. Essentiellement, les fréquences positives correspondent à des processus d'émission par le système vers le bain, alors que les fréquences négatives sont associées à de l'absorption par le système d'énergie provenant du bain. Dans le modèle classique du bruit présenté à l'équation (3.12), ces fréquences négatives existent toujours. En effet, le bruit classique, qui peut être décrit par une fonction scalaire aléatoire, a toujours une densité spectrale  $S(\omega)$  telle que  $S(\omega) = S(-\omega)$  [102]. Ainsi, il est impossible dans ce modèle que le bruit en  $\sigma_z$  provoque de la relaxation sans en même temps exciter le système. Alors que la relaxation est un phénomène tout à fait raisonnable à température nulle, c'est loin d'être le cas de l'ab-

sorption. Pour pallier à ce défaut, un modèle quantique, basé sur une interaction avec un bain d'oscillateurs harmoniques donnée par l'équation (2.47), est présenté à l'annexe D. Dans un tel modèle quantique, il est possible que  $S(\omega) \neq S(-\omega)$ . Puisque le bain employé ici est supposé être toujours à l'équilibre thermique, les fréquences positives et négatives du bruit quantique sont reliées par le principe du bilan détaillé

$$\gamma_\phi(-\omega) = e^{-\omega/k_B T} \gamma_\phi(\omega). \quad (3.22)$$

Ainsi, alors que le cas du bruit classique est retrouvé lorsque  $T \rightarrow \infty$ , lorsque  $T \rightarrow 0$ , le bruit à fréquence négative, et donc l'absorption, disparaît. Ainsi, dans un tel modèle quantique, la génération de photons par le bruit en  $\sigma_z$  telle que présentée dans la référence [8] est un effet intrinsèquement thermique.

Non seulement l'équation maîtresse permet-elle de comprendre l'influence thermique de la génération de photons par le bruit en  $\sigma_z$ , elle permet aussi d'obtenir analytiquement la dépendance en  $g^2/\Sigma^2$  obtenue numériquement par Werlang *et al.* Le calcul correspondant est présenté à l'annexe G et le résultat est donné à l'équation (3.36).

Enfin, l'équation maîtresse (3.14) ramène effectivement le système dans son état fondamental à la température nulle. En effet, si un modèle quantique est pris pour le bruit en  $\sigma_z$ , tous les dissipateurs impliquant des transitions sont dans cette situation de la forme  $\mathcal{D}[|j\rangle\langle k|]$ , avec  $k > j$ . Une telle équation maîtresse ramène explicitement dans l'état fondamental, car chaque dissipateur ne peut que faire descendre le système dans son échelle de niveaux d'énergie. Ce résultat a été vérifié en résolvant numériquement l'équation maîtresse dans un espace de Hilbert tronqué au 16<sup>e</sup> niveau d'énergie de l'hamiltonien de Rabi. Comme le montre la figure 3.1, si le système est initialement dans son état fondamental, il reste dans ce dernier à  $T = 0$ , contrairement au cas de l'équation maîtresse de l'optique quantique. L'équation maîtresse habillée permet donc bien de panser les plaies de l'équation maîtresse de l'optique quantique en couplage ultra-fort.

### 3.2.3 Modèle semi-classique de l'effet Casimir dynamique

Même si le modèle semi-classique du bruit en  $\sigma_z$  présenté à l'équation (3.12) suppose  $k_B T \gg \Delta_{jk} \forall j, k$ , il permet d'identifier une éventuelle génération de photons par des fluctuations aléatoires dans la fréquence du qubit à l'effet Casimir dynamique [103, 104]. Pour simplifier la discussion, on considère d'abord le cas où  $f(t)$  est une modulation contrôlée de la fréquence du qubit (par exemple, à l'aide d'un flux magnétique externe)

avant de se pencher sur la situation où  $f(t)$  représente un bruit incohérent.

L'hamiltonien du système total est ici  $H(t) = H_R + f(t)\sigma_z$ . En supposant que  $g \ll \Sigma$  et  $g \ll \Delta$ , on applique sur cet hamiltonien la transformation dispersive [1], généralisée ici pour tenir compte des termes non séculaires

$$U_D = \exp \{ \lambda (a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+) + \Lambda (a \sigma_- - \sigma_+ a^\dagger) \}. \quad (3.23)$$

Au deuxième ordre en  $g$ , on trouve

$$\begin{aligned} H_D(t) \simeq H'_0 + \chi'(t) a^\dagger a \sigma_z + f(t) \sigma_z - 2f(t) (\lambda I_+ + \Lambda I_{CR}) \\ - 2f(t) \lambda \Lambda \sigma_z (a^2 + a^{\dagger 2}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

où  $\chi'(t) = -2(\lambda^2 + \Lambda^2)f(t)$  et  $H'_0 = [\omega_r + (\chi + \mu)\sigma_z] a^\dagger a + [\omega_a + \chi + \mu]\sigma_z/2$  est l'hamiltonien libre, mais ayant subi des décalages de Lamb et de Bloch-Siegert. Par ailleurs,  $I_+ = a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-$  et  $I_{CR} = a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+$ . On veut maintenant trouver pour quelles fréquences d'oscillation de  $f(t)$ . Pour ce faire, on applique la transformation unitaire suivante sur  $H_D(t)$

$$V(t) = \exp \left\{ -i \left[ \omega_r a^\dagger a + \frac{\omega_a + (\chi + \mu)(2a^\dagger a + 1)}{2} \sigma_z \right] t \right\}. \quad (3.25)$$

L'hamiltonien qui en résulte est, sans aucune approximation,

$$\begin{aligned} H'_D(t) = \chi'(t) a^\dagger a \sigma_z + f(t) \sigma_z \\ - 2f(t) \lambda \left[ a \sigma_+ \exp \{ i [\Delta + (\chi + \mu)(2a^\dagger a - \sigma_z - 1)] t \} + \text{c.h.} \right] \\ - 2f(t) \Lambda \left[ a \sigma_- \exp \{ -i [\Sigma + (\chi + \mu)(2a^\dagger a + \sigma_z - 1)] t \} + \text{c.h.} \right] \\ - 2f(t) \lambda \Lambda \sigma_z \left[ a^2 \exp \{ -2i [\omega_r + (\chi + \mu) \sigma_z] t \} + \text{c.h.} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En supposant un signal cohérent de la forme

$$f(t) = \varepsilon_z \cos(\omega_{rf} t) = \frac{\varepsilon_z}{2} (e^{i\omega_{rf} t} + e^{-i\omega_{rf} t}), \quad (3.27)$$

on obtient dans l'équation (3.26) des termes qui oscillent aux fréquences  $\omega_{rf}$ ,  $\omega_{rf} + \omega_i$  et  $|\omega_{rf} - \omega_i|$ , où les  $\omega_i$  peuvent être  $\Delta$ ,  $\Sigma$  ou  $2\omega_r$ . Lorsque  $\omega_{rf} \sim \omega_i$ , il y a résonance, car les termes oscillant à la fréquence  $|\omega_{rf} - \omega_i|$  deviennent indépendants du temps alors que tous les autres oscillent rapidement. Dans la limite où  $\varepsilon_z$  est beaucoup plus petit que

ces fréquences d'oscillation rapides, on peut faire l'approximation séculaire et conserver seulement le terme constant. Ainsi, on peut réécrire l'hamiltonien ci-dessus en gardant seulement les termes pertinents, c'est-à-dire ceux qui oscillent aux fréquences  $|\omega_{\text{rf}} - \omega_i|$

$$\begin{aligned}
 H'_D(t) \simeq & -\varepsilon_z \lambda [a\sigma_+ \exp \{i[\Delta + (\chi + \mu)(2a^\dagger a - \sigma_z - 1) - \omega_{\text{rf}}]t\} + \text{c.h.}] \\
 & -\varepsilon_z \Lambda [a\sigma_- \exp \{-i[\Sigma + (\chi + \mu)(2a^\dagger a + \sigma_z - 1) - \omega_{\text{rf}}]t\} + \text{c.h.}] \\
 & -\varepsilon_z \Lambda \sigma_z [a^2 \exp \{-2i[\omega_r + (\chi + \mu)\sigma_z - \omega_{\text{rf}}]t\} + \text{c.h.}].
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ainsi, dépendamment du choix de la fréquence de modulation  $\omega_{\text{rf}}$ , il est possible de sélectionner un terme de l'hamiltonien ci-dessus en laissant tomber les autres. Ce résultat est représenté schématiquement à la figure 3.3a), où la réponse attendue pour chaque choix de  $\omega_{\text{rf}}$  est illustrée. Premièrement, pour  $\omega_{\text{rf}} \simeq \Delta$ , on a  $H_D(t) \simeq H'_0 - \varepsilon_z \lambda I_+$ , ce qui correspond à une transition de bande latérale rouge, processus représenté à la figure 3.3b). Pour  $\omega_{\text{rf}} \simeq \Sigma$ , on a plutôt  $H_D(t) \simeq H'_0 - \varepsilon_z \Lambda I_{\text{CR}}$ , associé à une bande latérale bleue. Enfin, pour  $\omega_{\text{rf}} \simeq 2\omega_r$ , l'hamiltonien se réduit à  $H_D(t) \simeq H'_0 - \varepsilon_z \Lambda \sigma_z (a^2 + a^{\dagger 2})$ , soit celui d'un oscillateur paramétrique dégénéré [38]. Cet hamiltonien correspond à celui donné à l'équation (1.29) et mène donc à de la compression dans l'état propre de l'oscillateur. Contrairement au design habituel, où c'est la fréquence du résonateur qui est modulée dans le temps [105], ici, c'est le qubit qui agit comme une condition de frontière fluctuante. Dans la référence [7], cet hamiltonien est aussi relié à l'effet Casimir dynamique.

En plus de pouvoir choisir le processus à stimuler avec le choix de la fréquence du signal, il est possible d'inhiber certains processus en changeant l'état du qubit ou du résonateur de manière appropriée. Cela provient du fait que l'argument des exponentielles dans l'hamiltonien donné à l'équation (3.28) est sensible à l'état du qubit et au nombre de photons. Autrement dit, la fréquence  $\omega_{\text{rf}}$  à choisir pour induire les processus décrits ci-dessus change selon l'état du système. Pour illustrer ce phénomène, concentrons nous d'abord sur la bande latérale rouge, tout en gardant en tête que les mêmes résultats sont obtenus pour la bande bleue à condition de remplacer  $\Delta \rightarrow \Sigma$  et  $\lambda \rightarrow \Lambda$ . Puisque cette transition conserve le nombre total d'excitations, si l'on ignore d'abord la dissipation, on peut en tout temps écrire l'état du système comme

$$|\psi(t)\rangle = c_\uparrow(t)|\uparrow, n-1\rangle + c_\downarrow(t)|\downarrow, n\rangle. \tag{3.29}$$

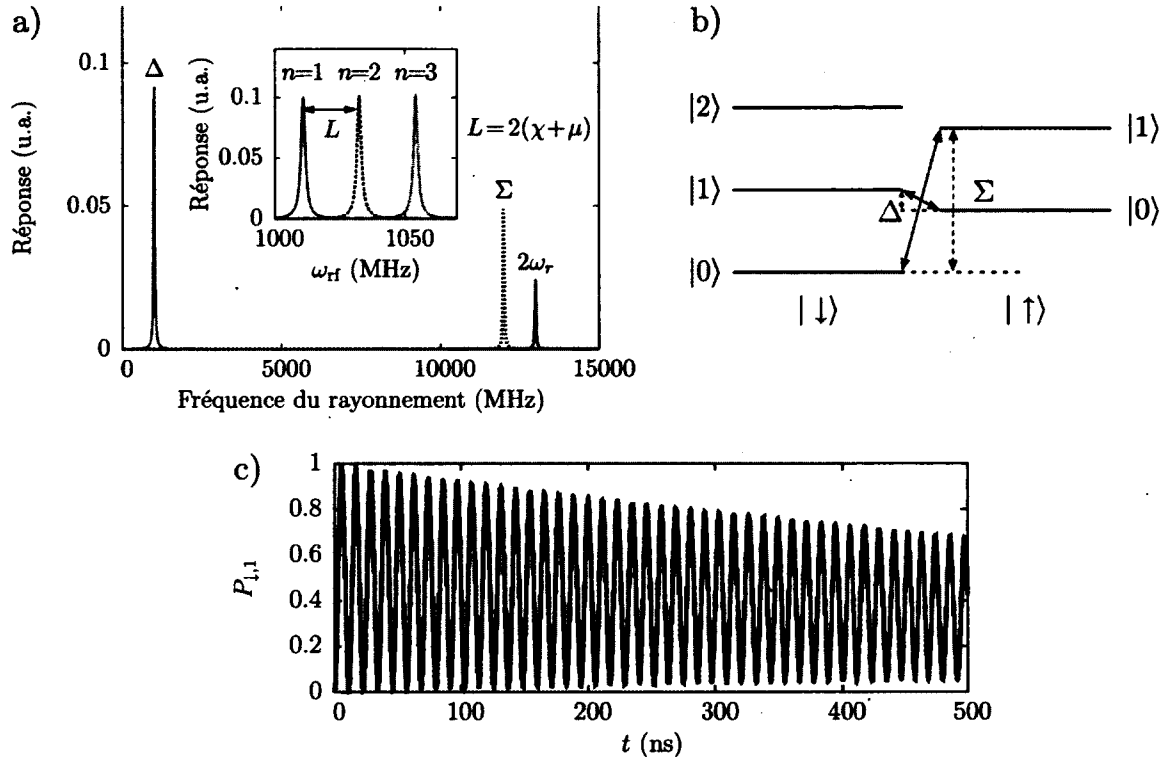


FIGURE 3.3 – Effet d’une modulation cohérente de la fréquence du qubit sur le système qubit-résonateur en régime dispersif. a) Processus pouvant être stimulés selon la fréquence  $\omega_{\text{rf}}$  du flux externe. Le graphique est une représentation schématique de la réponse attendue en vertu de l’hamiltonien donné à l’équation (3.28). Si  $\omega_{\text{rf}} \approx |\omega_a \pm \omega_r|$  la bande latérale rouge ou bleue est excitée. Si  $\omega_{\text{rf}} \approx 2\omega_r$ , il y a oscillations paramétriques dégénérées. Encadré : fréquence de la bande latérale rouge selon l’état initial du système. Les transitions de type  $|\uparrow, n-1\rangle \leftrightarrow |\downarrow, n\rangle$  et  $|\uparrow, n\rangle \leftrightarrow |\downarrow, n+1\rangle$  sont séparées par  $2(\chi + \mu)$ . b) Illustration des bandes latérales rouge et bleue. La bande rouge correspond à l’échange d’un quantum entre le qubit et le résonateur. La bande bleue correspond à la création ou à la destruction simultanée d’une excitation dans le qubit et dans le résonateur. c) Simulation numérique de la transition de bande latérale rouge. Initialement, le système est dans l’état  $|\uparrow, 0\rangle$ . On calcule la probabilité de transfert de l’excitation du qubit au résonateur en fonction du temps. Pour simplifier, les calculs sont faits avec l’équation maîtresse de l’optique quantique, car elle donne de bons résultats dans ce contexte pour  $g$  tel que l’approximation séculaire est valide. Les paramètres sont :  $\varepsilon_z/2\pi = 500$  MHz,  $\omega_{\text{rf}}/2\pi = 1010.83$  MHz,  $g/2\pi = 100$  MHz,  $\omega_r/2\pi = 6.5$  GHz,  $\omega_a/2\pi = 5.5$  GHz et  $\kappa/2\pi = \gamma_1/2\pi = \gamma_\phi/2\pi = 0.1$  MHz. L’inversion de population est obtenue en environ 5 ns, ce qui correspond au résultat analytique pour une fréquence de Rabi  $\Omega = 2\varepsilon_z\lambda$ .

À l'aide de l'équation de Schrödinger

$$H'_D(t)|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle, \quad (3.30)$$

on trouve les équations du mouvement

$$\dot{c}_\uparrow(t) = i\varepsilon_z\lambda\sqrt{n}\exp\{i[\Delta + 2(\chi + \mu)n - \omega_{\text{rf}}]t\}c_\downarrow(t) \quad (3.31)$$

$$\dot{c}_\downarrow(t) = i\varepsilon_z\lambda\sqrt{n}\exp\{-i[\Delta + 2(\chi + \mu)n - \omega_{\text{rf}}]t\}c_\uparrow(t). \quad (3.32)$$

Une solution simple est obtenue pour ces équations couplées lorsque  $\omega_{\text{rf}} = \Delta + 2(\chi + \mu)n$

$$c_\uparrow(t) = \cos(Gt), \quad (3.33)$$

$$c_\downarrow(t) = i \sin(Gt) \quad (3.34)$$

où l'on a choisi pour conditions initiales  $c_\uparrow(0) = 1$  et  $c_\downarrow(0) = 0$ . Le système oscille donc entre les deux états  $|\uparrow, n-1\rangle$  et  $|\downarrow, n\rangle$  à la fréquence de Rabi  $\Omega = 2G = 2\varepsilon_z\lambda\sqrt{n}$ . Une conclusion importante à tirer du résultat ci-dessus est que la fréquence à choisir pour le signal rf est déterminée par le nombre de photons dans le résonateur. Ainsi, si la largeur  $\sim \max\{\kappa, \gamma_1, \gamma_\phi\}$  des raies spectrales du système est inférieure à  $2(\chi + \mu)$ , il est possible de résoudre les états de Fock avec cette transition, tel que représenté dans l'encadré de la figure 3.3a). Cette sensibilité au nombre de photons de la fréquence de la bande latérale pourrait être exploitée pour implémenter des portes conditionnelles à deux qubits ou plus encore. Il convient également de noter que ce système constitue une source de photons uniques. En effet, si on prépare initialement le qubit dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , il est possible de transférer l'excitation de l'atome artificiel au résonateur en appliquant une impulsion de durée  $t = \pi/2G$  à la fréquence de la bande latérale rouge. Cette idée est testée numériquement à la figure 3.3c). Enfin, la fréquence d'oscillation paramétrique dépend quant à elle de l'état du qubit, valant  $2[\omega_r \pm (\chi + \mu)]$  selon que ce dernier est dans l'état  $|\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$ . En principe, on peut alors mettre le résonateur dans un état comprimé de manière conditionnelle à l'état du qubit. Malheureusement, le taux de compression obtenu dans ce système est trop faible pour espérer utiliser ce phénomène en pratique<sup>2</sup>.

2. En effet, l'écart type de la quadrature  $X$  dans l'oscillateur paramétrique dégénéré lorsque  $\omega_{\text{rf}} = 2[\omega_r \pm (\chi + \mu)]$  est donné par  $\Delta X = \frac{1}{4}e^{-2r}$  [38], où

$$r = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left[ \frac{4\varepsilon_z\lambda\Lambda}{\omega_r} \right]. \quad (3.35)$$

Un des aspects les plus intéressants des résultats mentionnés ci-dessus est que, autant pour la bande latérale rouge que pour la bande latérale bleue, la fréquence de Rabi est du premier ordre en  $g$ . Cela contraste avantageusement avec les autres méthodes employées jusqu'ici pour générer expérimentalement des transitions de bande latérale, qui sont des processus de deuxième ordre, donc nécessairement plus lents [106, 107]. En effet, dans ces expériences, au lieu de coupler leurs modulations externes par le flux, les auteurs contrôlent le résonateur ou le qubit avec un voltage externe. Ces modulations se traduisent par des hamiltoniens de la forme  $ae^{i\omega_r t} + \text{c.h.}$  ou  $\sigma_- e^{i\omega_r t} + \text{c.h.}$ . Ces perturbations ne préservent pas la parité du nombre d'excitations, alors que les bandes latérales sont des processus qui préservent cette parité. Un mécanisme à deux photons est donc nécessaire pour arriver à exciter des bandes latérales avec de telles modulations, ce qui rend le temps d'opération plus long. Avec l'approche présentée ici, la modulation est en  $\sigma_z$ , ce qui a la même parité que les bandes latérales, permettant en principe d'atteindre des temps d'opération aussi petits que 5 ns, tel que le montre la figure 3.3c). Ceci correspond à un gain d'un ordre de grandeur par rapport aux techniques employées jusqu'à aujourd'hui. Cependant, ce temps d'exécution rapide n'est pas facilement compatible avec la sélectivité mentionnée ci-dessus, qui requiert une résolution en fréquence très fine. En effet, typiquement, dans les systèmes expérimentaux en EDQ-circuit,  $\mu \ll \chi$  et donc le décalage entre les états de Fock distincts est environ  $2\chi \sim 20$  MHz. Or, si  $\Omega$  est plus grand ou de l'ordre de cette quantité, ce qui est le cas à la figure 3.3c), la modulation est assez forte pour exciter une transition de la forme  $|\uparrow, n-1\rangle \rightarrow |\downarrow, n\rangle$  même si elle est à la fréquence  $\Delta + 2(\chi + \mu)(n-1)$ , qui correspond plutôt à  $|\uparrow, n-2\rangle \rightarrow |\downarrow, n-1\rangle$ . Pour pallier à cette difficulté, il faudrait augmenter  $g$  de manière à rendre  $|\chi + \mu|$  assez grand pour permettre des fréquences de Rabi élevées tout en gardant  $\Omega \ll |\chi + \mu|$ . Dans cette optique, les récents développements permettant d'atteindre des couplages de l'ordre du GHz pourraient être utiles [4, 5].

Enfin, dans le cas où  $f(t)$  n'est pas une perturbation cohérente contrôlée mais bien une fonction aléatoire représentant un bain classique, le contenu spectral de la modulation peut contenir une ou plus des fréquences pertinentes mentionnées ci-dessus. Si ce contenu spectral s'étend jusqu'à de très hautes fréquences, il peut agir sur le système à travers une combinaison de bandes latérales rouges et bleues ainsi qu'à travers des oscillations paramétriques, l'emmenant dans un état excité qui peut manifester une légère

---

Puisque, pour que le modèle décrit ci-dessus soit valide, il faut avoir  $\lambda, \Lambda \ll 1$ , il faut que  $\varepsilon_z \gg \omega_r$  pour que  $r \gtrsim 1$ . Or, une telle condition est incompatible avec l'approximation séculaire faite ci-dessus.

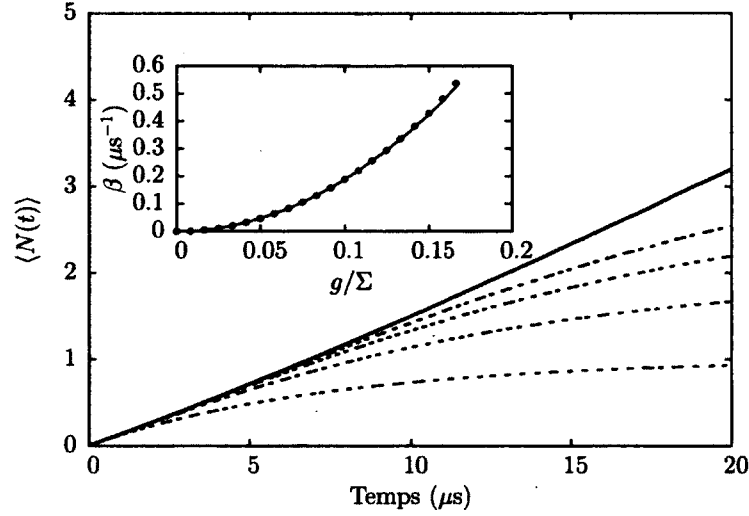


FIGURE 3.4 – Génération de photons due au terme de dissipation en  $\sigma_z$  dans l'équation (3.14). Ligne pleine : bruit blanc. Lignes pointillées : bruit blanc coupé à une fréquence  $\omega_i$  telle que seules les transitions jusqu'à  $|\widetilde{i}, \pm\rangle$  sont stimulées. Pour la courbe du haut, les transitions de  $|\widetilde{\downarrow}, 0\rangle$  à  $|\widetilde{8}, \pm\rangle$  sont incluses. Encadré : taux de génération de photons  $\beta$  en fonction de  $g$  pour du bruit blanc. Points : résultat numérique. Lignes : équation (3.36).

compression. Même si cette discussion n'est valide que dans le régime dispersif, elle peut être généralisée à des ratios  $g/\Delta$  arbitraires en employant le formalisme développé à la section 3.2.1. C'est ce qui est fait à la prochaine section.

### 3.2.4 L'effet Casimir dynamique dans le formalisme de l'équation de Redfield

En général, le bain en  $\sigma_z$  peut provoquer n'importe quelle transition entre les états propres de l'hamiltonien de Rabi de même parité, tel qu'illustré à la figure 3.2. Si les fréquences correspondantes sont présentes dans la transformée de Fourier de  $f(t)$ , des combinaisons d'excitations photoniques et atomiques voient le jour. Dans le cas le plus simple, dans lequel les bains en  $X$  et en  $\sigma_x$  sont négligés et le bruit en  $\sigma_z$  est blanc, cela mène à un taux de création de photons constant  $\beta$ . Tel que démontré à l'annexe G, au deuxième ordre en  $g$

$$\beta = 2\gamma_\phi \Lambda^2 T(\theta_2), \quad (3.36)$$



où l'on a défini  $T(\theta_2) = 1 + 2 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_2$ . Cette expression est comparée aux résultats numériques dans l'encadré de la figure 3.4. Elle explique analytiquement le taux observé numériquement dans le cas spécial où  $\omega_a = \omega_r$  par Werlang et al [8]. Dans cette étude, les auteurs ont employé l'équation maîtresse de l'optique quantique, qui suppose du bruit blanc, et qui correspond à la ligne pleine dans la figure 3.4. Comme l'indique la section 3.1.2, si le bruit qui cause le déphasage a un spectre en  $1/f$ , l'équation standard surestime de beaucoup ce processus. Par ailleurs, si le bruit décroît à haute fréquence, la génération de photons est plus lente, mais doit aussi saturer, tel qu'illustré par les lignes pointillées à la figure 3.4. Cela constitue une autre démonstration claire de l'échec de l'approche standard pour le traitement de la dissipation en présence des termes non séculaires.

Finalement, puisque l'équation maîtresse est exactement la même pour le traitement quantique du bruit en  $\sigma_z$  montré à l'annexe D, les résultats ci-dessus sont également valides dans ce cas. Cependant, l'approche quantique inclut la température d'une manière qui respecte le principe du bilan détaillé. Cela implique qu'à  $T = 0$ ,  $\gamma_\phi(\omega) = 0$  si  $\omega < 0$ . Puisque, tel que démontré à l'annexe G, cette génération de photons à la Casimir requiert ces fréquences négatives, un bain quantique ne peut générer d'excitations à  $T = 0$ . Dans ce modèle, la production de photons à travers le déphasage est donc intrinsèquement un effet thermique.

### 3.2.5 La dissipation dans le modèle de Jaynes-Cummings

Dans cette section, on considère la situation dans laquelle l'approximation dispersive ne tient pas, mais l'approximation séculaire est toujours valide. Ceci généralise essentiellement les résultats du modèle du déphasage habillé [81, 96]. Sous l'approximation séculaire, le fondamental est simplement  $|\downarrow, 0\rangle$ . Les états excités sont donnés par les équations (1.19) et (1.20), avec l'angle de mélange  $\theta_n$  défini par l'équation (1.21), où l'on choisit  $\mu = 0$ , de sorte que  $\Delta_n^{\text{BS}} = \Delta$ .

On considère d'abord les matrices  $X$  et  $\sigma_x$ , dont les éléments sont impliqués dans les taux de relaxation donnés aux équations (3.18) et (3.19). Pour garder la discussion simple, on se limite ici au sous-espace  $\{|\downarrow, 0\rangle, |1, -\rangle, |1, +\rangle\}$ . Les résultats complets sont donnés à l'annexe F. Puisque les états propres Jaynes-Cummings ont un nombre total d'excitations bien défini, seules les transitions qui impliquent le gain ou la perte d'exactly un

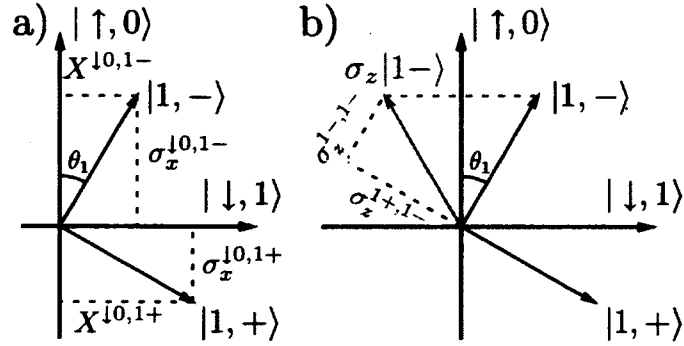


FIGURE 3.5 – Représentation géométrique des éléments de matrice impliqués dans la relaxation dans l'équation de Redfield sous l'approximation séculaire et dans le sous-espace  $\{|\downarrow, 0\rangle, |1, -\rangle, |1, +\rangle\}$ . a) Éléments de matrice reliés aux bains de relaxation du qubit et du résonateur. Les états propres sont un mélange d'excitations purement photoniques et purement atomiques, avec un angle  $\theta_1$ . La fraction du taux de relaxation qui provient du bain du résonateur ou du qubit est déterminée respectivement par la projection de l'état propre sur l'axe du qubit  $|\uparrow, 0\rangle$  ou du résonateur  $|\downarrow, 1\rangle$ . b) Éléments de matrice reliés au bruit en  $\sigma_z$ . Appliquer  $\sigma_z$  tourne les vecteurs d'état autour de l'axe  $|\uparrow, 0\rangle$ . Les vecteurs résultants ont une projection sur l'état propre orthogonal à l'état initial, ce qui génère des transitions entre  $|1, +\rangle$  et  $|1, -\rangle$  si  $\theta_1 > 0$ .

quantum sont permises, ce qui interdit toute transition entre  $|1, +\rangle$  et  $|1, -\rangle$ . Il en résulte

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \cos \theta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

En variant  $\theta_1$ , on change le caractère des états propres du système entre principalement photonique et principalement atomique. Les éléments de matrice ci-dessus suivent cette même tendance, tel que représenté géométriquement à la figure 3.5a). En particulier, lorsque le qubit et le résonateur sont en résonance, les contributions de leurs bains de relaxation respectifs ont exactement le même poids. Par exemple, les éléments de matrice

de  $X$  se réduisent à

$$X^{\downarrow,0;1,\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.39)$$

$$X^{n,+;n+1,+} = X^{n,-;n+1,-} = \frac{1}{2} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}), \quad (3.40)$$

$$X^{n,+;n+1,-} = X^{n,-;n+1,+} = \frac{1}{2} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}), \quad (3.41)$$

ce qui mène exactement à l'équation maîtresse donnée dans la référence [99] et trouvée dans le cas limité aux seules pertes photoniques avec  $\omega_a = \omega_r$ .

Sous l'approximation séculaire,  $\sigma_z^{jk}$  peut seulement être non nul pour des états qui impliquent le même nombre total d'excitations, c'est-à-dire qui sont dans le même doublet. Les éléments de matrice résultants sont

$$\sigma_z^{g^0;g^0} = -1 \quad (3.42)$$

$$\sigma_z^{n\pm;n\pm} = \mp \cos(2\theta_n) \quad (3.43)$$

$$\sigma_z^{n\mp;n\pm} = -2 \cos \theta_n \sin \theta_n. \quad (3.44)$$

Généralisant le modèle du déphasage habillé, les formules ci-dessus montrent que le bruit en  $\sigma_z$  induit des transitions entre les états dans le même doublet Jaynes-Cummings. Tel qu'illustré à la figure 3.5b), ceci survient seulement lorsqu'il y a un mélange non nul entre le qubit et le résonateur. En particulier, à la résonance,  $\sigma_z^{n\pm;n\pm} = 0$  et  $\sigma_z^{n\mp;n\pm} = 1$ . Autrement dit, les éléments de matrice impliqués dans le calcul du taux de déphasage pur selon les équations (3.14) et (3.15) s'annulent. Ainsi, les processus de déphasage pour les états qui n'impliquent pas  $|\downarrow, 0\rangle$  sont entièrement dus aux transitions à l'intérieur des doublets causées par le bruit en  $\sigma_z$  à la fréquence de séparation  $2g\sqrt{n}$ . Puisque ce sont des fréquences potentiellement très hautes et que le bruit de déphasage est souvent en  $1/f$  [94], on s'attend à ce que les taux de transitions à l'intérieur des doublets soient faibles. Ainsi, en résonance, les états qui ne contiennent pas  $|\downarrow, 0\rangle$  devraient être peu ou prou immunisés au déphasage pur.

### 3.2.6 Une application de l'équation habillée : l'étude du bruit selon $\sigma_z$

Tel qu'expliqué à la section 1.2.3, il est possible de caractériser expérimentalement l'échelle des niveaux d'énergie de l'hamiltonien de Rabi par spectroscopie. En résonance, le couplage qubit-résonateur se traduit par une séparation en deux de la raie de transmission de la cavité portant le nom de *séparation de Rabi*<sup>3</sup>. En laboratoire, les quantités physiques obtenues par mesure homodyne [38] sont les valeurs moyennes des quadratures du champ électrique, c'est-à-dire  $\text{Re}\langle a \rangle$  et  $\text{Im}\langle a \rangle$ . On s'intéresse ici au signal obtenu dans le régime de Bloch-Siegert. En présence d'un signal rf, l'hamiltonien du système est

$$H_{\text{rf}}(t) = H_{\text{R}} + \epsilon a e^{i\omega_{\text{rf}}t} + \epsilon^* a^\dagger e^{-i\omega_{\text{rf}}t}, \quad (3.45)$$

où  $\epsilon$  est l'amplitude du signal et  $\omega_{\text{rf}}$  sa fréquence. En supposant que  $g \ll \Sigma$ , on trouve dans l'annexe H sous une approximation à trois niveaux que, dans l'état stationnaire et à la résonance  $\Delta^{\text{BS}} = 0$ ,

$$\text{Im}\langle a \rangle_s = -\frac{\epsilon \Gamma_1/2}{\Gamma_1^2 + (\Delta^{\text{BS}} + g)^2} - \frac{\epsilon \Gamma_2/2}{\Gamma_2^2 + (\Delta^{\text{BS}} - g)^2}, \quad (3.46)$$

où

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} (\gamma_- + \gamma_\phi^\dagger + \gamma_\phi^-) \quad (3.47)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} (\gamma_+ + \gamma_\phi^\dagger + \gamma_\phi^+). \quad (3.48)$$

Les divers taux entrant dans cette expression sont illustrés à la figure 3.6a) et sont donnés à l'annexe H. Comme dans le cas standard, c'est-à-dire sous l'approximation séculaire et avec l'équation maîtresse de l'optique quantique [1], la transmission est composée de deux raies lorentziennes séparées par  $2g$ . Cependant, ici, deux taux distincts  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  dictent la largeur et la hauteur de ces raies. Il en résulte un spectre de séparation de Rabi qui peut être asymétrique, même lorsque le qubit et le résonateur sont en résonance. Une asymétrie en présence des termes contre-rotatifs est aussi rapportée dans la littérature en considérant uniquement l'amortissement de la cavité dans le spectre de fluorescence du qubit [108], ainsi que dans la transformée de Fourier de  $\langle \sigma_z(t) \rangle$ , c'est-à-dire de l'évolution

---

3. En anglais, *vacuum Rabi splitting*.

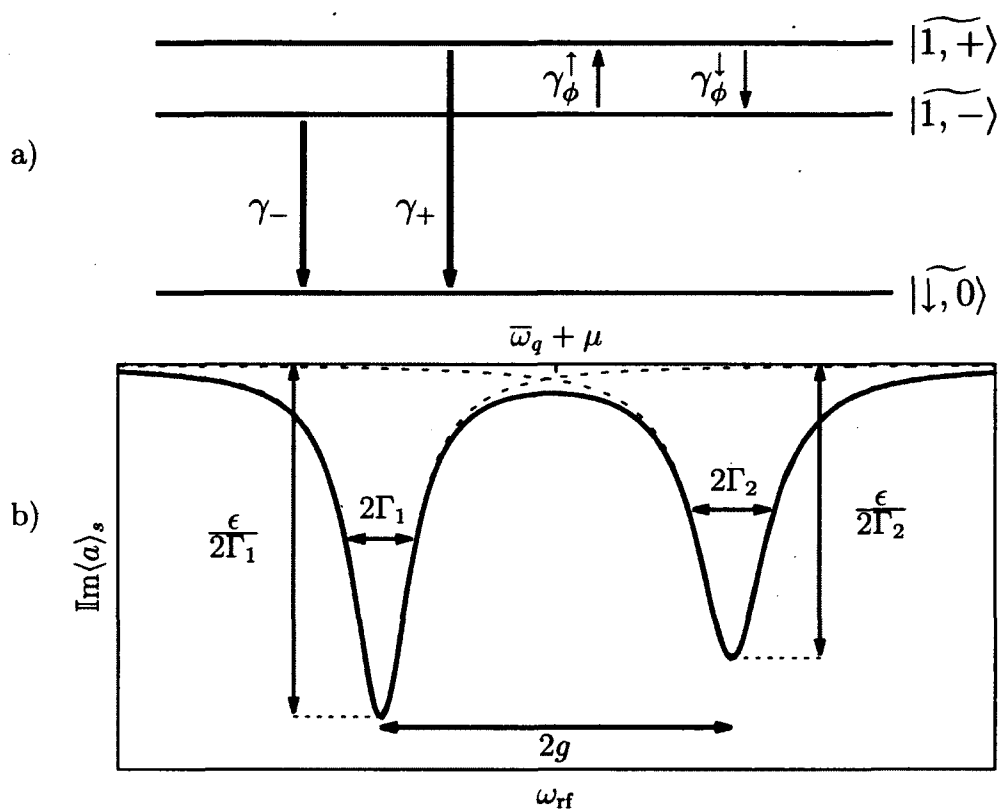


FIGURE 3.6 – Séparation de Rabi. a) Taux de transition impliqués dans le calcul perturbatif dans l'approximation à trois niveaux. b) Représentation schématique de  $\text{Im}\langle a \rangle_s$  en fonction de  $\omega_{\text{rf}}$ . En général, le résultat n'est pas symétrique.

temporelle moyenne du qubit initialement dans l'état  $|\uparrow\rangle$  [26].

Ici, trois situations peuvent mener à une asymétrie :

1. Le bruit de relaxation n'est pas égal aux fréquences correspondant aux deux transitions  $|\widetilde{1}, \pm\rangle \leftrightarrow |\widetilde{\downarrow}, 0\rangle$ . Cette situation est baptisée *taux de relaxation non constant*.
2. Le bruit en  $\sigma_z$  n'est pas égal aux fréquences  $\Delta_{1\pm, 1\mp}$ . Puisque le bruit classique est toujours symétrique en fréquence [102], nous appellerons cette situation *bruit quantique*.
3. En gardant les termes contre-rotatifs, c'est-à-dire en prenant  $\Lambda \neq 0$ , les éléments de matrice pour les transitions  $|\widetilde{1}, \pm\rangle \leftrightarrow |\widetilde{\downarrow}, 0\rangle$  ne sont pas égaux, tel que démontré à l'annexe F. C'est le cas *ultra-fort*. Cette situation est illustrée à la figure 3.7.

Pour représenter cette asymétrie, on définit le paramètre  $\eta = \Gamma_1 - \Gamma_2$ . Il s'agit simplement de la différence entre la largeur des deux raies spectrales illustrées à la figure 3.6. À partir des considérations du paragraphe ci-dessus, on déduit que pour caractériser  $\eta$  en résonance à mesure que le couplage  $g$  augmente, il faut connaître le spectre du bruit. Nous allons donc faire quelques hypothèses sur ce dernier et en étudier les conséquences. Premièrement, on isole l'influence des termes contre-rotatifs en choisissant du bruit ohmique en  $X$  et en  $\sigma_x$ . Le choix d'une telle densité spectrale de bruit correspond à un taux de relaxation constant à toutes les fréquences et garantit donc que les taux de relaxation des transitions  $|\widetilde{1}, \pm\rangle \leftrightarrow |\widetilde{\downarrow}, 0\rangle$  sont les mêmes [80]. Ce choix correspond également à peu près aux observations faites à ce jour [109]. On commence également par négliger le bruit en  $\sigma_z$ . Dans ces conditions, la contribution du deuxième ordre dans l'asymétrie  $\eta = \Gamma_1 - \Gamma_2$  s'annule et on obtient pour cette dernière une augmentation linéaire avec  $g$

$$\eta_{\text{UF}} = \frac{\Lambda}{2}(\kappa + \gamma_1), \quad (3.49)$$

où  $\kappa = \kappa(\Delta_{1\pm, \downarrow 0})$  et  $\gamma_1 = \gamma(\Delta_{1\pm, \downarrow 0})$ . Avec les paramètres réalisés expérimentalement dans la référence [5], c'est-à-dire  $g/2\pi = 636$  MHz,  $\omega_r/2\pi = 5.357$  GHz et  $\kappa/2\pi = 3.7$  MHz, on obtient, en choisissant  $\gamma_1/2\pi = 0.1$  MHz, une asymétrie  $\eta/2\pi \simeq 0.11$  MHz. Cela revient à une asymétrie relative de  $\sim 6\%$  dans l'amplitude des raies de transmission. Tel qu'illustré à la figure 3.7, il en résulte que, dans le régime non séculaire, il est impossible de trouver expérimentalement la résonance qubit-résonateur en variant la fréquence du qubit jusqu'à ce que les raies de transmissions soient identiques, comme c'est coutume jusqu'à maintenant [3]. Un meilleur critère serait de chercher à trouver la fréquence  $\omega_a$  telle que la distance entre les raies de transmission soit minimale. Alors, le qubit et le résonateur

sont en résonance en tenant compte du décalage de Bloch-Siegert, et une asymétrie dans le spectre de transmission devrait être observée.

En général, cependant, il peut y avoir du bruit en  $\sigma_z$ . Dans cette situation, l'asymétrie totale devient

$$\eta = \eta_{UF} + \eta_\phi, \quad (3.50)$$

où

$$\eta_\phi = \frac{1 - 4\Lambda^2}{8} [\gamma_\phi(\Delta_{1-,1+}) - \gamma_\phi(\Delta_{1+,1-})]. \quad (3.51)$$

Tel que discuté à la section 3.2.2 et à l'annexe D, dans un modèle quantique, le bruit en  $\sigma_z$  à fréquence négative n'apparaît qu'à des valeurs non nulles de température effective du bain. Autrement dit, les taux respectent le principe du bilan détaillé. Pour  $\Delta_{1\pm,1\mp} = \pm 2g$ , on obtient alors

$$\gamma_\phi(-2g) = \exp\left(-\frac{2g}{k_B T}\right) \gamma_\phi(2g), \quad (3.52)$$

d'où la contribution du bruit quantique en  $\sigma_z$  à l'asymétrie

$$\frac{1 - 4\Lambda^2}{8} \left[ \exp\left(-\frac{2g}{k_B T}\right) - 1 \right] \gamma_\phi(2g). \quad (3.53)$$

On distingue maintenant deux limites. Si  $k_B T \gg 2g$ ,  $\eta_\phi \rightarrow 0$  et on retrouve la limite du bruit classique. L'asymétrie est alors entièrement due au couplage ultra-fort. Il est donc possible d'isoler la contribution ultra-forte en augmentant la température effective du bain, par exemple en injectant un fort bruit classique dans  $\omega_a$  à la fréquence  $2g$  à l'aide d'une ligne de flux. À l'inverse, si  $k_B T \lesssim 2g$ , la contribution  $\eta_\phi$  du bruit en  $\sigma_z$  devient importante. En particulier, si  $T \rightarrow 0$ , elle prend sa valeur maximale

$$\eta_\phi \simeq \frac{1 - 4\Lambda^2}{8} \gamma_\phi(2g). \quad (3.54)$$

Connaissant la contribution ultra-forte de l'asymétrie, calculée avec l'équation (3.49) ou mesurée expérimentalement, on peut isoler l'effet du bruit quantique en prenant  $\eta_\phi = \eta - \eta_{UF}$ . La valeur de  $\eta_\phi$  devient alors une sonde pour le bruit en  $\sigma_z$  à la fréquence  $2g$ . Le couplage ultra-fort élargit le spectre des valeurs accessibles de couplage qubit-résonateur. Ainsi, le spectre du bruit qui apparaît dans le taux  $\gamma_\phi(\omega)$  pourrait réalistement être investigué jusqu'à des fréquences  $\sim 2$  GHz, pour lesquelles les données expérimentales manquent [109] et où une transition du comportement en  $1/f$  au comportement linéaire en fréquence est attendue [93].

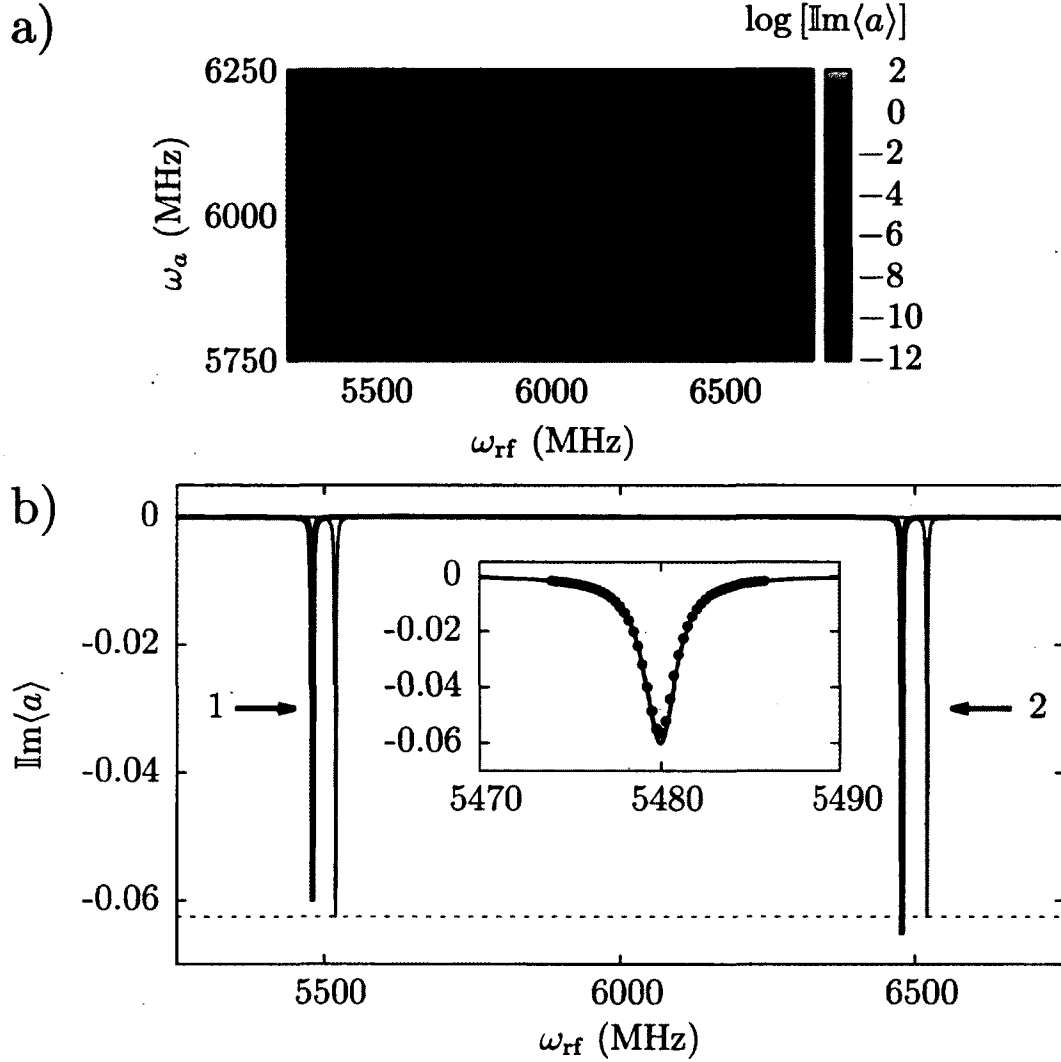


FIGURE 3.7 – Asymétrie du spectre de transmission de Rabi due aux termes non séculaires. a) Spectre pour différentes valeurs de fréquence du qubit selon l'équation (H.29) donnée à l'annexe H. b) Spectre pour deux valeurs spécifiques de  $\omega_a$ . Dans la courbe 1,  $\omega_a$  est tel que  $\Delta^{\text{BS}} = 0$ . Dans la courbe 2,  $\Delta^{\text{BS}} \neq 0$ , mais les amplitudes des raies sont égales. Encadré : courbe pleine : vue agrandie de la raie de gauche, obtenue analytiquement. Points noirs : résultats numériques obtenus par évolution temporelle de l'équation maîtresse (3.14) avec SQUACK. Les paramètres sont  $\omega_r/2\pi = 6$  GHz,  $g/2\pi = 500$  MHz et  $\kappa/2\pi = \gamma_1/2\pi = \gamma_\phi = 1$  MHz.





# Conclusion

On a démontré l'importance de traiter le système qubit-résonateur comme un tout lorsqu'on considère son interaction avec son environnement. En particulier, on a montré que la description simple donnée par l'équation maîtresse de l'optique quantique peut échouer, notamment en produisant des excitations parasites, telles que des renversement de qubit ou la génération de photons, même à  $T = 0$ . Pour réparer ces failles, on a inclus le couplage atome-cavité dans les étapes menant à l'obtention de l'équation maîtresse. Les taux impliqués dans l'équation maîtresse de type Redfield obtenue de la sorte dépendent du spectre du bruit aux fréquences des transitions du système habillé. Ces taux ont été obtenus analytiquement pour  $g$  assez grand pour que les transitions individuelles du qubit et du résonateur soient résolues dans le régime de Bloch-Siegert, où  $g \ll \omega_a + \omega_r$ . Même en incluant les termes non séculaires, l'équation maîtresse obtenue peut être utilisée au-delà du régime de Bloch-Siegert simplement en diagonalisant numériquement l'hamiltonien de Rabi. Des résultats dans le régime de Bloch-Siegert ont été présentés.

Dans notre modèle, le bruit qui était responsable du déphasage pur dans l'équation maîtresse de l'optique quantique peut maintenant provoquer des transitions dans le système. En ce sens, l'équation maîtresse développée ici peut être interprétée comme une généralisation du modèle du déphasage habillé [96, 81]. Dans le régime de Bloch-Siegert, on trouve que le spectre de séparation de Rabi peut être asymétrique. Cette asymétrie peut être exploitée comme une sonde de la densité spectrale du bruit en  $\sigma_z$  à des fréquences inexplorées de  $\sim 1$  GHz ou plus. Par ailleurs, des modulations dans la fréquence du qubit peuvent être employées pour générer des bandes latérales, ou comme un oscillateur paramétrique induisant de la compression. Finalement, alors que cela signifie que le bruit en  $\sigma_z$  peut générer des photons [8, 110, 6], notre modèle montre raisonnablement que ces excitations parasites ne peuvent pas être générées à température nulle.

Les conclusions de ce travail mènent à plusieurs questions d'intérêt pour le développement de l'EDQ-circuit. D'abord, l'idée d'étudier le bruit selon  $\sigma_z$  avec l'asymétrie du

spectre de séparation de Rabi repose sur la supposition que le bruit selon  $X$  et  $\sigma_x$  est ohmique. Il serait donc pertinent de déterminer à quel point c'est réellement le cas en situation expérimentale et de prédire quelles erreurs seraient induites si cette approximation est inadéquate. Par ailleurs, il serait nécessaire de déterminer à quel point cette asymétrie est une sonde sensible du bruit en  $\sigma_z$  à haute fréquence. En effet, si ce dernier est très faible, il se pourrait que le temps d'intégration du signal soit trop long pour que l'expérience soit réalisable en pratique. Une autre idée découlant de ce travail est celle d'utiliser un signal cohérent en  $\sigma_z$  pour le contrôle quantique du système qubit-résonateur. Par exemple, la bande latérale rouge pourrait être employée pour transférer très rapidement des excitations d'un qubit à un résonateur. Dans la plupart des systèmes réels, comme le transmon, les qubits sont des systèmes à  $N$  niveaux et les différences de fréquence entre ces états sont déterminées par un flux externe. Il serait donc d'office de vérifier si les transitions de bandes latérales peuvent être stimulées aussi rapidement en présence de niveaux supplémentaires et si les modulations de flux requises requièrent un signal trop puissant en pratique. Les bandes latérales étant un excellent outil pour générer de l'enchevêtrement [106] et pouvant être employées pour des portes logiques à deux qubits [78], on peut aussi se demander quelle est la meilleure façon d'exploiter la plus grande rapidité d'opération prédite dans ce travail pour le calcul quantique. Ainsi, en plus de résoudre des problèmes passés, ce travail apporte de nouvelles idées pouvant faire l'objet de recherche future.

# Annexe A

## Approximation adiabatique avec un résonateur multi-modes rapide

Dans cette section, on généralise les résultats obtenus à la section 1.2.8 pour les deux états de plus basse énergie du système atome-résonateur au cas d'un atome couplé à  $N$  modes. Ces différents modes peuvent être interprétés comme les différentes harmoniques d'un résonateur multi-modes, ou bien comme plusieurs résonateurs monomodes couplés au même qubit.

Un tel système a pour hamiltonien celui donné par l'équation (1.59)

$$H_{\text{R}}^{(N)} = \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + \sum_{j=1}^N [\omega_r^j a_j^\dagger a_j + g_j (a_j + a_j^\dagger) (\sigma_- + \sigma_+)]. \quad (\text{A.1})$$

Exactement comme dans la section 1.2.8, on peut appliquer une rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe des  $y$  sur les opérateurs du qubit. En supposant  $\omega_a \ll \omega_r^j \forall j$ , on peut remplacer  $\sigma_z \rightarrow \pm 1$  dans l'expression obtenue. L'hamiltonien résultant pour  $\omega_a = 0$  est alors

$$H_{\text{R}}^{(N)} \Big|_{\omega_a \rightarrow 0} \simeq \sum_{j=1}^N \omega_r^j a_j^\dagger a_j \mp g_j (a_j + a_j^\dagger). \quad (\text{A.2})$$

Il s'agit donc de la somme d'hamiltoniens distincts pour chaque mode. Chacun s'exprime, à l'instar du cas monomode, comme un oscillateur harmonique déplacé

$$H_{\text{R}}^{(N)} \Big|_{\omega_a \rightarrow 0} \simeq \sum_{j=1}^N \omega_r^j D_j (\pm \alpha_j) a_j^\dagger a_j D_j^\dagger (\pm \alpha_j), \quad (\text{A.3})$$

où l'on emploie les opérateurs déplacement  $D_j(\alpha_j) = \exp[\alpha_j (a_j^\dagger - a_j)]$  et  $\alpha_j = g_j/\omega_r^j$ . Ceci permet de construire la base des états de Fock déplacés

$$\prod_{j=1}^N |n_j^\pm\rangle, \quad (\text{A.4})$$

où  $|n_j^\pm\rangle = D_j(\pm\alpha_j)|n_j\rangle$  et  $|n_j\rangle$  est l'état à  $n$  photons du mode  $j$ . Comme dans la section 1.2.8, l'hamiltonien  $H_R^{(N)}$  est exprimé dans cette base. On obtient alors les éléments de matrice de cet hamiltonien

$$\langle \pm | \otimes \prod_{j=1}^N \langle m_j^\pm | H_R^{(N)} | n_j^\pm \rangle \otimes | \pm \rangle = E_{n_1, n_2, \dots, n_N} \prod_{j=1}^N \langle m_j^\pm | n_j^\pm \rangle = E_{n_1, n_2, \dots, n_N} \prod_{j=1}^N \delta_{m_j, n_j}, \quad (\text{A.5})$$

$$\langle \pm | \otimes \prod_{j=1}^N \langle m_j^\pm | H_R^{(N)} | n_j^\mp \rangle \otimes | \mp \rangle = \frac{\omega_a}{2} \prod_{j=1}^N \langle m_j^\pm | n_j^\mp \rangle, \quad (\text{A.6})$$

où  $E_{n_1, n_2, \dots, n_N} = \sum_j \omega_r^j n_j$  et  $\langle m_j^\pm | n_j^\mp \rangle$  est donné par l'équation (1.49) en remplaçant  $m \rightarrow m_j$ ,  $n \rightarrow n_j$  et  $\alpha \rightarrow \alpha_j$ .

Comme précédemment, l'astuce consiste à négliger les termes contenant  $\langle m_j^\pm | n_j^\mp \rangle$  tels que  $m \neq n$ . Pour  $\alpha_j \ll 1$ , cette approximation se justifie très bien, car ces termes sont des polynômes en  $\alpha_j$  de degré supérieur aux termes contenant  $\langle n_j^\pm | n_j^\mp \rangle$ . Dans la limite inverse, soit  $\alpha_j \gg 1$ , faire l'approximation ne change pas non plus le résultat puisque, de toute façon, tous les termes en  $\langle m_j^\pm | n_j^\mp \rangle$  tombent exponentiellement avec  $\alpha_j$ . Ainsi, on s'attend à une excellente comparaison entre l'analytique et le numérique dans les régimes  $\alpha_j \ll 1 \forall j$  et  $\alpha_j \gg 1 \forall j$ , avec un régime intermédiaire pour lequel les résultats sont moins fiables.

Si l'on écrivait la matrice représentant l'hamiltonien qui résulte des approximations ci-dessus, on verrait qu'il contient très peu d'éléments hors-diagonaux non nuls. Ceux-ci sont limités aux termes contenant  $\langle n_j^\pm | n_j^\mp \rangle$ . Néanmoins, la matrice serait très compliquée, car les  $n_j$  peuvent être différents. Cependant, il resterait un bloc  $2 \times 2$  dans le coin supérieur gauche qui n'est pas couplé au reste de l'hamiltonien, ce qui permet de trouver les deux états propres de plus basse énergie en solutionnant

$$\left( \begin{array}{cc} E_{0,0,\dots,0} & \frac{1}{2}\omega_a \langle -, 0^-, 0^-, \dots, 0^- | +, 0^+, 0^+, \dots, 0^+ \rangle \\ \frac{1}{2}\omega_a \langle -, 0^-, 0^-, \dots, 0^- | +, 0^+, 0^+, \dots, 0^+ \rangle & E_{0,0,\dots,0} \end{array} \right) |\Psi\rangle = E|\Psi\rangle. \quad (\text{A.7})$$

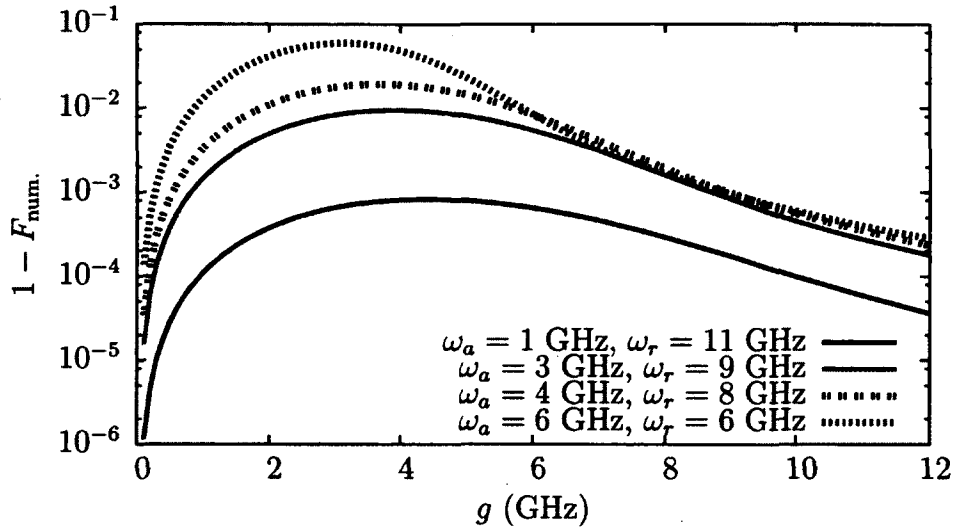


FIGURE A.1 – Erreur faite en approxinant l'état fondamental d'un qubit couplé à deux modes du champ électromagnétique par le chat enchevêtré présenté à l'équation (A.11) en fonction de  $g$  pour différentes valeurs de  $\omega_a$  et de  $\omega_r = \omega_r^1 = \omega_r^2$ .

Le résultat est

$$|\Psi_{\pm,0,0,\dots,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, 0^-, 0^-, \dots, 0^-\rangle \pm |-, 0^+, 0^+, \dots, 0^+\rangle), \quad (\text{A.8})$$

$$E_{\pm,0,0,\dots,0} = \pm \frac{\omega_a}{2} \langle -, 0^-, 0^-, \dots, 0^- | +, 0^+, 0^+, \dots, 0^+ \rangle - \sum_j \frac{g_j^2}{\omega_r^j}. \quad (\text{A.9})$$

En ramenant les matrices de Pauli dans la base de l'équation (A.1), on trouve comme états de plus basse énergie le doublet quasi-dégénéré

$$|\Psi_{\pm,0}\rangle = \frac{1}{2} [ | \uparrow \rangle (\prod_{j=1}^N |\alpha_j\rangle \pm \prod_{j=1}^N |-\alpha_j\rangle) - | \downarrow \rangle (\prod_{j=1}^N |\alpha_j\rangle \mp \prod_{j=1}^N |-\alpha_j\rangle) ]. \quad (\text{A.10})$$

Il s'agit donc d'un état "chats enchevêtrés". En particulier, le fondamental pour un qubit couplé à deux modes est

$$|\Psi_{-,0}\rangle \simeq \frac{1}{2} [ | \uparrow \rangle (|\alpha_1, \alpha_2\rangle - |-\alpha_1, -\alpha_2\rangle) - | \downarrow \rangle (|\alpha_1, \alpha_2\rangle + |-\alpha_1, -\alpha_2\rangle) ]. \quad (\text{A.11})$$

La figure A.1 présente l'erreur  $1 - F_{\text{num.}}$  faite en prenant ce fondamental approximatif au lieu du fondamental  $|\Psi_{\text{num.}}\rangle$  obtenu par diagonalisation numérique exacte, où  $F_{\text{num.}} = |\langle \Psi_{-,0} | \Psi_{\text{num.}} \rangle|^2$ . L'erreur reste toujours de l'ordre de 1 % ou moins pour  $\omega_a/\omega_r \lesssim 1/2$ .



# Annexe B

## Introduction à l'électrodynamique quantique en circuit

L'oscillateur  $LC$  et la jonction Josephson peuvent être perçus comme les deux briques fondamentales de l'EDQ-circuit, l'une étant l'élément linéaire et l'autre l'élément non linéaire primordial. À la manière de la référence [111], dans cette annexe, on présente l'hamiltonien de ces deux composantes principales pour donner une intuition de l'architecture employée.

L'hamiltonien de l'oscillateur  $LC$  monomode est obtenu simplement en écrivant l'énergie totale du système

$$H_{LC} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (\text{B.1})$$

où la charge  $Q$  et le flux magnétique  $\Phi$  sont considérés comme des opérateurs. Cet hamiltonien a exactement la même forme que celui d'une particule massive dans un potentiel quadratique, donc il s'agit d'un oscillateur harmonique avec pour analogues respectifs de  $X$  et  $P$  les opérateurs

$$\Phi = \sqrt{\frac{Z_0}{2}}(a^\dagger + a), \quad (\text{B.2})$$

$$Q = \frac{i}{\sqrt{2Z_0}}(a^\dagger - a). \quad (\text{B.3})$$

On a défini ici l'impédance caractéristique  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  du circuit ainsi que les opérateurs d'échelle  $a(a^\dagger)$  de l'oscillateur harmonique. À l'instar de la position et de la quantité de



mouvement,  $\Phi$  et  $Q$  obéissent à une relation de commutation canonique

$$[\Phi, Q] = i. \quad (\text{B.4})$$

À l'aide des équations (B.3) et (B.2), l'hamiltonien de l'oscillateur  $LC$  se réécrit comme celui d'un oscillateur harmonique dans la base diagonale :  $H_{LC} = \omega_r a^\dagger a$ , où  $\omega_r = \sqrt{LC}$ . Le circuit  $LC$  peut donc être interprété comme un mode stationnaire du champ électromagnétique.

Pour avoir un atome artificiel, il faut introduire une non-linéarité qui lève la dégénérescence entre les transitions. Tel qu'illustré à la figure B.1, c'est ce qui permet de s'adresser séparément à deux niveaux en particulier et donc de contrôler l'état quantique du système. La non linéarité est obtenue à l'aide d'une jonction Josephson, dont l'hamiltonien est

$$H_J = \frac{Q^2}{2C_J} - E_J \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (\text{B.5})$$

où  $\Phi_0 = \pi/e$  est le quantum de flux et  $E_J = \Phi_0 I_C / 2\pi$  est l'énergie Josephson de la jonction.  $I_C$  est le courant critique à partir de laquelle elle perd son état supraconducteur. En écrivant le cosinus comme sa série de Fourier, l'équation (B.3) permet de conclure qu'un tel hamiltonien est effectivement non-linéaire. Au quatrième ordre (ce qui est valide pour de grandes valeurs de  $E_J$ ),

$$H_J \simeq \omega_J b^\dagger b + K (b^\dagger b)^2 \quad (\text{B.6})$$

où  $\omega_J \simeq \sqrt{8E_C E_J}$  et  $K = -E_C/2$ , avec  $E_C = e^2/2C_J$ . On a écrit ici les opérateurs d'échelle comme  $b(b^\dagger)$  pour les différencier de ceux de l'oscillateur  $LC$ . La non-linéarité potentiellement très forte de la jonction Josephson permet de lever la dégénérescence des transitions et de contrôler une seule paire de niveaux d'énergie en utilisant des impulsions rf à leur fréquence de séparation. On obtient alors un atome artificiel qui peut interagir avec un mode du champ électromagnétique en couplant un tel système à un résonateur  $LC$ .

Ceci n'est qu'un exemple d'atome artificiel pouvant être obtenu avec des jonctions Josephson. Ce modèle porte dans la littérature le nom de transmon[85, 112]. Il existe une myriade d'autres designs de qubits. Ils se distinguent notamment par le nombre de jonctions Josephson employées ainsi que par des ratios  $E_J/E_C$  différents. Une bonne introduction à ces différentes catégories d'atomes est donnée dans la référence [113].

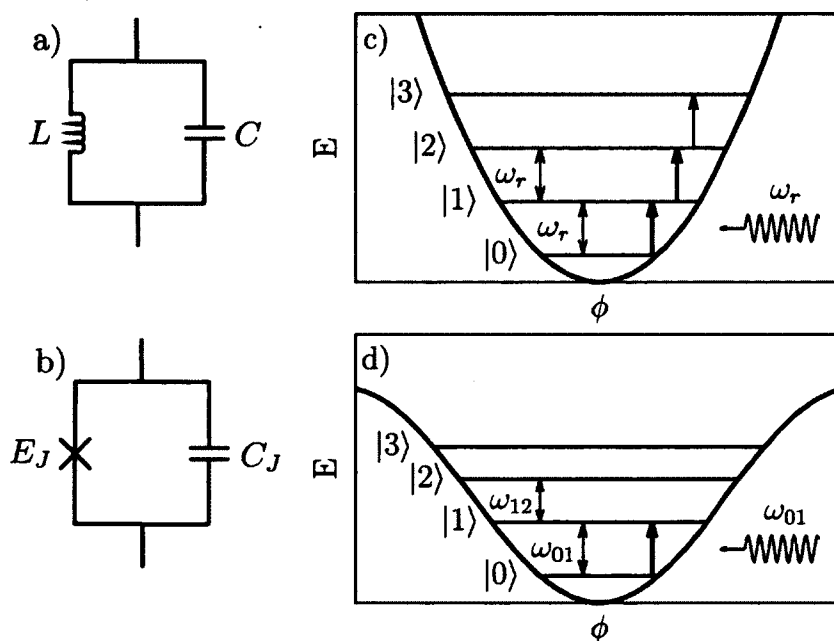


FIGURE B.1 – Circuits linéaires et non linéaires. L'introduction d'une jonction Josephson permet de lever la dégénérescence entre les fréquences de transition entre les différents niveaux d'un oscillateur harmonique. Le contrôle des deux premiers états à l'aide d'une source de rayonnement micro-ondes devient alors possible.



## Annexe C

# Dissipateurs pour les bains en $X$ et en $\sigma_x$

Dans cette annexe, on dérive les dissipateurs associés au couplage au bain en  $X$  et en  $\sigma_x$  dans la base habillée. On considère un système qubit-résonateur fortement couplé avec pour seule hypothèse à propos de son hamiltonien que le nombre total d'excitations a une parité bien définie. Tel que mentionné à la section 3.2.1, on suppose que le système est couplé à deux bains indépendants d'oscillateurs harmoniques avec une interaction de la forme donnée par l'équation (3.11). En se concentrant ici sur un seul bain, on trouve que, dans la représentation d'interaction par rapport à l'hamiltonien du système et de l'environnement découplés, le couplage prend la forme

$$H_{\text{SB}}(t) = \sum_l \alpha_l e^{iH_S t} (c + c^\dagger) e^{-iH_S t} (b_l e^{-i\nu_l t} + b_l^\dagger e^{i\nu_l t}). \quad (\text{C.1})$$

En exprimant l'hamiltonien du système dans sa base propre

$$H_S = \sum_j E_j |j\rangle\langle j|, \quad (\text{C.2})$$

on trouve

$$H_{\text{SB}}(t) = \sum_{jkl} \alpha_l C_{jk} |j\rangle\langle k| (b_l e^{-i\nu_l t} + b_l^\dagger e^{i\nu_l t}) e^{i\Delta_{jk} t} \quad (\text{C.3})$$

où  $C_{jk} = \langle j|(c + c^\dagger)|k\rangle$  et  $\Delta_{jk} = E_j - E_k$ . On divise maintenant la somme en trois parties

$$H_{\text{SB}}(t) = \sum_{l,j} \alpha_l C_{jj} |j\rangle \langle j| (b_l e^{-i\nu_l t} + b_l^\dagger e^{i\nu_l t}) + \left\{ \sum_l \sum_{j,k>j} + \sum_l \sum_{j,k<j} \right\} \alpha_l C_{jk} |j\rangle \langle k| (b_l e^{-i(\nu_l - \Delta_{jk})t} + b_l^\dagger e^{i(\nu_l + \Delta_{jk})t}). \quad (\text{C.4})$$

Puisque  $C_{kj} = C_{jk}^*$ , cela devient

$$H_{\text{SB}}(t) = \sum_j \sum_l \alpha_l C_{jj} |j\rangle \langle j| (b_l e^{-i\nu_l t} + b_l^\dagger e^{i\nu_l t}) + \sum_{j,k>j} \sum_l [\alpha_l C_{jk} |j\rangle \langle k| b_l^\dagger e^{i(\nu_l + \Delta_{jk})t} + \text{c.h.}] \quad (\text{C.5})$$

On introduit maintenant l'opérateur  $\Pi = (-1)^{a^\dagger a + \sigma + \sigma^-}$ , dont les valeurs propres marquent la parité dans le nombre total d'excitations du système qubit-résonateur. Puisque  $[H_R, \Pi] = 0$ , les états propres  $|j\rangle$  ont une parité bien définie. Puisque  $c$  et  $c^\dagger$  changent le nombre d'excitations de un,  $c + c^\dagger$  renverse la parité lorsqu'appliqué sur un état. Ainsi,  $C_{jj} = 0$ , ce qui ramène l'hamiltonien à

$$H_{\text{SB}}(t) = s(t)B^\dagger(t) + s^\dagger(t)B(t), \quad (\text{C.6})$$

où

$$s(t) = \sum_{j,k>j} C_{jk} |j\rangle \langle k| e^{i\Delta_{jk}t} \quad (\text{C.7})$$

$$B(t) = \sum_l \alpha_l b_l e^{-i\nu_l t}. \quad (\text{C.8})$$

Cette formulation simplifie l'écriture de l'équation maîtresse de Born du système. En effet, suivant la procédure standard, on trouve [76]

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_I(t) = & \int_0^t dt' [s(t')\rho_I(t')s(t) - s(t)s(t')\rho_I(t')] \langle B^\dagger(t)B^\dagger(t') \rangle \\ & + \int_0^t dt' [s^\dagger(t')\rho_I(t')s^\dagger(t) - s^\dagger(t)s^\dagger(t')\rho_I(t')] \langle B(t)B(t') \rangle \\ & + \int_0^t dt' [s^\dagger(t')\rho_I(t')s(t) - s(t)s^\dagger(t')\rho_I(t')] \langle B^\dagger(t)B(t') \rangle \\ & + \int_0^t dt' [s(t')\rho_I(t')s^\dagger(t) - s^\dagger(t)s(t')\rho_I(t')] \langle B(t)B^\dagger(t') \rangle \\ & + \text{c.h.} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

À partir de ce point, on fait des hypothèses qui sont standard dans le traitement de Born-Markov de la dissipation [76], sauf pour les considérations suivantes. À l'instar du cas de l'oscillateur anharmonique expliqué à la section 2.2, dans chaque terme de l'équation de Born, on trouve des exponentielles oscillantes de la forme  $\exp[i(\Delta_{jk} - \Delta_{j'k'})t]$ . Puisque  $k > j$  et  $k' > j$ , l'argument de ces exponentielles est zéro pour  $j = j'$  et  $k = k'$ , ou lorsque des paires de transitions différentes dans le système se passent à la même fréquence. On parle alors de dégénérescences de Liouville. Tel que discuté à l'annexe E, en pratique, on est souvent intéressé seulement à un sous-ensemble d'états propres du système pour lesquels toutes les transitions ont des fréquences distinctes. Dans ce cas, on peut négliger les termes oscillant rapidement pour obtenir l'équation maîtresse suivante dans la représentation de Schrödinger

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -i [H'_S, \rho(t)] \\ & + \sum_{j,k>j} \Gamma^{jk} \bar{n}(\Delta_{kj}, T) \mathcal{D}[|k\rangle\langle j|] \rho(t) + \sum_{j,k>j} \Gamma^{jk} (1 + \bar{n}(\Delta_{kj}, T)) \mathcal{D}[|j\rangle\langle k|] \rho(t), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

avec  $\Gamma^{jk} = 2\pi d(\Delta_{kj}) \alpha^2(\Delta_{kj}) |C_{jk}|^2$  et où l'on a introduit la densité d'états  $d(\nu)$  du bain. On a aussi défini l'hamiltonien décalé

$$H'_S(t) = H_S - \sum_{jk} |C_{jk}|^2 \{L_{jk} |k\rangle\langle k| + L'_{jk} (|k\rangle\langle k| - |j\rangle\langle j|)\}. \quad (\text{C.11})$$

Les  $L'_{jk}$  sont des décalages de Lamb causés par le couplage avec l'environnement et donnés par

$$L_{jk} = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty d\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\nu + \Delta_{jk}} \quad (\text{C.12})$$

$$L'_{jk} = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty d\nu \frac{\Gamma(\nu) \bar{n}(\nu, T)}{\nu + \Delta_{jk}}, \quad (\text{C.13})$$

et  $P$  est la partie principale de Cauchy. La fonction  $\Gamma(\nu)$  est un taux de relaxation. Dans le cas de pertes photoniques,  $c \rightarrow a$  et on remplace  $\Gamma(\nu)$  par  $\kappa(\nu)$ . Dans le cas de la relaxation du qubit,  $c \rightarrow \sigma_-$  et on remplace  $\Gamma(\nu)$  par  $\gamma(\nu)$ . Dans le corps principal de ce texte, on néglige ces décalages de Lamb.



# Annexe D

## Dissipateurs pour le bain en $\sigma_z$

Les deux modèles présentés à la section 2.4 pour l'impact du bruit en  $\sigma_z$  sur la dynamique du système sont employés ici pour obtenir rigoureusement une équation maîtresse de type Redfield. Deux régimes se distinguent alors selon la température effective du bain, le régime classique et le régime quantique.

### D.1 Le modèle classique

Dans cette section on obtient la partie de l'équation 3.14 qui provient du bruit en  $\sigma_z$  dans le modèle classique, pour lequel on introduit une fonction stochastique  $f(t)$  modulant la fréquence du qubit

$$H_{\text{dep}} = f(t)\sigma_z, \quad (\text{D.1})$$

où la moyenne de  $f(t)$  est nulle. Suivant l'annexe C, on exprime l'hamiltonien dans sa base propre et on passe dans la représentation d'interaction par rapport à l'équation (D.1) pour obtenir

$$H_{\text{dep}}(t) = f(t) \sum_{jk} |j\rangle\langle k| \langle j|\sigma_z|k\rangle e^{i\Delta_{jk}t}. \quad (\text{D.2})$$

De manière similaire au calcul fait dans la référence [81], on exprime  $f(t)$  en termes de sa décomposition spectrale

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{i\omega t}, \quad (\text{D.3})$$



pour trouver

$$H_{\text{dep}}(t) = \sum_{jk} \sigma_z^{jk} |j\rangle \langle k| f_{-\Delta_{jk}}(t), \quad (\text{D.4})$$

où l'on a défini

$$f_{\Delta_{jk}}(t) = \int_{\Delta_{jk}-B_{jk}}^{\Delta_{jk}+B_{jk}} d\omega f(\omega) e^{i(\omega-\Delta_{jk})t}. \quad (\text{D.5})$$

En écrivant cette expression, on a considéré que la principale contribution à la dynamique provient d'une bande étroite de fréquences  $2B_{jk}$  autour de la fréquence  $\Delta_{jk}$  de chaque transition. Pour que cette approximation soit valide, il faut que  $B_{jk} \ll \Delta_{jk}$ . En employant le théorème de Wiener-Khintchin [114] :

$$E[f(\omega)f(-\omega')] = \delta(\omega - \omega') S_f(\omega), \quad (\text{D.6})$$

où  $E[x]$  est l'espérance mathématique de  $x$  et  $S_f(\omega)$  est la densité spectrale de  $f(t)$ , on découvre que

$$f(\omega) = \sqrt{S_f(\omega)} \xi(\omega), \quad (\text{D.7})$$

avec  $\xi(v)$  tel que  $E[\xi(\omega)] = 0$  et  $E[\xi(\omega)\xi(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ , c'est-à-dire du bruit blanc. Prenons maintenant  $S_f(\omega)$  approximativement constant sur chaque  $B_{jk}$  et considérons que ces bandes ne se recouvrent pas. Cela nous permet d'écrire

$$f_{\Delta_{jk}}(t) = \sqrt{S_f(\Delta_{jk})} \int_{-B_{jk}}^{B_{jk}} d\omega \xi(\omega + \Delta_{jk}) e^{i\omega t}. \quad (\text{D.8})$$

En supposant une échelle de temps pour le déphasage et la relaxation beaucoup plus courte que  $1/B_{jk}$ , on peut prendre  $B_{jk} \rightarrow \infty$  et obtenir

$$f_{\Delta_{jk}}(t) = \sqrt{S_f(\Delta_{jk})} \xi_{\Delta_{jk}}(t), \quad (\text{D.9})$$

ce qui nous mène finalement à

$$H_{\text{dep}}(t) = \sum_{jk} \sigma_z^{jk} |j\rangle \langle k| \xi_{-\Delta_{jk}}(t) \sqrt{S_f(-\Delta_{jk})}. \quad (\text{D.10})$$

Si les fréquences  $\Delta_{jk}$  des transitions sont bien séparées, on peut traiter chaque terme de la somme ci-dessus comme du bruit indépendant. Cette dernière forme pour  $H_{\text{dep}}(t)$

mène alors aux termes suivant dans l'équation maîtresse

$$\sum_{\substack{jk \\ j+k}} \frac{1}{2} \gamma_\phi(-\Delta_{jk}) |\sigma_z^{jk}|^2 \mathcal{D} [|j\rangle\langle k|] + \frac{1}{2} \gamma_\phi(0) \mathcal{D} \left[ \sum_j \Phi_{jj} |j\rangle\langle j| \right], \quad (\text{D.11})$$

avec  $\gamma_\phi(-\Delta_{jk}) = 2S_f(-\Delta_{jk})$ .

## D.2 Le modèle quantique

Pour modéliser le bruit en  $\sigma_z$  de manière quantique, on introduit le bain d'oscillateurs harmoniques mentionné à la section 2.4 avec l'hamiltonien d'interaction donné à l'équation (2.47). Cette interaction correspond au transfert d'un quantum d'un mode du bain à un autre à travers une excitation virtuelle du qubit. On passe maintenant à la représentation d'interaction par rapport à  $H_S + H_B$ .

$$H_I(t) = \sum_{jk} \alpha_{jk} b_j^\dagger b_k e^{i(\nu_j - \nu_k)t} e^{iH_S t} \sigma_- \sigma_+ e^{-iH_S t}. \quad (\text{D.12})$$

En employant la relation de fermeture du système, on trouve

$$H_I(t) = \sum_{jkmn} \alpha_{jk} b_j^\dagger b_k e^{i(\nu_j - \nu_k)t} Z_{mn} |m\rangle\langle n| e^{i\Delta_{mn}t}, \quad (\text{D.13})$$

où l'on a défini l'élément de matrice suivant, qui conserve la parité,

$$Z_{mn} = \langle m | \sigma_+ \sigma_- | n \rangle. \quad (\text{D.14})$$

Dans l'annexe C, pour obtenir l'équation (C.10) pour le couplage aux bains en  $X$  et en  $\sigma_x$ , on a bénéficié du fait que tous les opérateurs du bain qui interagissent avec le système sont en moyenne nuls à l'équilibre thermique [76]. Ce n'est *pas* le cas ici, puisque les termes tels que  $j = k$  ont une moyenne thermique non nulle. Pour régler ce problème, on doit inclure ces termes dans l'hamiltonien, ce qui donne un hamiltonien efficace décalé

$$H'_S = H_S + \sum_{jmn} \alpha_{jj} b_j^\dagger b_j z_{mn}(t), \quad (\text{D.15})$$

où

$$z_{mn}(t) = Z_{mn} |m\rangle\langle n| e^{i\Delta_{mn}t}. \quad (\text{D.16})$$

En supposant le bain à l'équilibre thermique, on obtient

$$H'_S = H_S + \sum_{jmn} \alpha_{jj} \bar{n}_j(T) z_{mn}(t). \quad (\text{D.17})$$

On peut maintenant écrire l'hamiltonien d'interaction comme

$$H_I(t) = B(t)s(t), \quad (\text{D.18})$$

où

$$B(t) = \sum_{j,k \neq j} \alpha_{jk} b_j^\dagger b_k e^{i(\nu_j - \nu_k)t} \quad (\text{D.19})$$

$$s(t) = \sum_{mn} z_{mn}(t). \quad (\text{D.20})$$

Ceci permet d'employer l'équation maîtresse de Born

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_I(t) = - \int_0^t dt' \{ [s(t)s(t')\rho_I(t') - s(t')\rho_I(t')s(t)] \langle B(t)B(t') \rangle_\beta \\ + [\rho_I(t')s(t')s(t) - s(t)\rho_I(t')s(t')] \langle B(t')B(t) \rangle_\beta \}, \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

où  $\beta$  indique une moyenne prise dans un état thermique. Les corrélateurs ci-dessus prennent donc la forme

$$\begin{aligned} \langle B(t)B(t') \rangle &= \sum_{j,k \neq j} \alpha_{jk}^2 \bar{n}_j(T) (1 + \bar{n}_k(T)) e^{i(\nu_j - \nu_k)\tau} \\ \langle B(t')B(t) \rangle &= \sum_{j,k \neq j} \alpha_{jk}^2 \bar{n}_j(T) (1 + \bar{n}_k(T)) e^{-i(\nu_j - \nu_k)\tau}, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

où  $\tau = t - t'$  et où l'on a pris le couplage système-bain réel et symétrique sous l'échange des modes  $j$  et  $k$ . L'équation maîtresse de Born devient

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_I(t) = - \sum_{mnm'n'} \quad (\text{D.23}) \\ \times \{ [z_{mn}(t)z_{m'n'}(t)\rho_I(t-\tau) - z_{m'n'}(t)\rho_I(t-\tau)z_{mn}(t)] \int_0^t d\tau e^{-i\Delta_{m'n'}\tau} \langle B(t)B(t-\tau) \rangle \\ + [\rho_I(t-\tau)z_{m'n'}(t)z_{mn}(t) - z_{mn}(t)\rho_I(t-\tau)z_{m'n'}(t)] \int_0^t d\tau e^{-i\Delta_{m'n'}\tau} \langle B(t-\tau)B(t) \rangle \}, \end{aligned}$$

En remplaçant  $\rho_I(t-\tau)$  et  $\rho_I(t)$  et en prolongeant la borne supérieure des intégrales

jusqu'à l'infini, c'est-à-dire en faisant l'approximation de Markov, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau e^{-i\Delta_{m'n'}\tau} \langle B(t)B(t-\tau) \rangle &\simeq \gamma_{m'n'}(T) - iL_{m'n'} \\ \int_0^t d\tau e^{-i\Delta_{m'n'}\tau} \langle B(t-\tau)B(t) \rangle &\simeq \frac{1}{2}\gamma_{m'n'}(T) - iL_{m'n'}, \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

où

$$\gamma_{mn} = 2\pi \int_0^\infty d\nu \alpha^2(\nu, \nu + \Delta_{mn}) d(\nu) d(\nu + \Delta_{mn}) \bar{n}(\nu, T) (1 + \bar{n}(\nu + \Delta_{mn}, T)), \quad (\text{D.25})$$

$$L_{mn} = P \int_0^\infty d\nu d\nu' \frac{\alpha^2(\nu, \nu') d(\nu) d(\nu')}{\nu' - \nu - \Delta_{mn}} \bar{n}(\nu, T) (1 + \bar{n}(\nu', T)). \quad (\text{D.26})$$

Comme dans l'annexe C, on suppose l'absence de toute dégénérescence de Liouville, ce qui permet de laisser tomber les termes oscillants. Les conditions sous lesquelles cette approche pourrait être inadéquate sont expliquées à l'annexe E.

Sachant que  $Z_{mn} = (\delta_{mn} + \sigma_z^{mn})/2$ , on obtient l'équation maîtresse suivante dans la représentation de Schrödinger

$$\dot{\rho}(t) = -i[H_S'', \rho(t)] + \frac{\gamma_\phi(0)}{2} \mathcal{D} \left[ \sum_m \sigma_z^{mm} |m\rangle \langle m| \right] \rho(t) + \sum_{m, n \neq m} \Gamma_\phi^{nm} \mathcal{D}[|m\rangle \langle n|] \rho(t), \quad (\text{D.27})$$

avec  $\Gamma_\phi^{nm} = \gamma_\phi(\Delta_{nm}) |\sigma_z^{mn}|^2 / 2$ ,  $\gamma_\phi(\Delta_{nm}) = \gamma_{nm} / 2$ , et où

$$H_S'' = H_S' + \sum_{mn} |Z_{mn}|^2 L_{mn} |n\rangle \langle n| \quad (\text{D.28})$$

est l'hamiltonien sous de multiples décalage de Lamb. L'équation (D.27) est exactement celle trouvée pour le bain classique si on néglige ces décalages, ce qui peut être fait à basse température et à faible couplage système-bain.

Finalement, puisque l'équation maîtresse ci-dessus a été obtenue pour un bain à l'équilibre thermique, les taux doivent obéir au bilan détaillé [102]

$$\gamma_\phi(-\omega) = \exp\left(-\frac{\omega}{k_B T}\right) \gamma_\phi(\omega). \quad (\text{D.29})$$

Le cas classique, pour lequel la densité spectrale de bruit doit être symétrique, est retrouvé quant  $T \rightarrow \infty$ .



## Annexe E

# Conditions auxquelles l'équation de Redfield est applicable

Dans les annexes précédentes, on néglige toute dégénérescence de Liouville. Ici, on discute des conditions sous lesquelles cette approximation est sûre. Tel qu'établi à la section 3.2.1, si  $\zeta \lesssim \kappa$ , les transitions du résonateur se recouvrent. D'un autre côté, si le rapport  $g/\Delta$  est assez grand pour avoir  $\zeta \gg \kappa$ , cette dégénérescence est levée, du moins pour de faibles nombres d'excitations. En effet, pour des états hautement excités, certaines transitions pourraient accidentellement avoir la même fréquence.

On définit maintenant un nombre d'excitation critique  $\tilde{n}_{\text{crit}}$  sous lequel il n'y a pas de dégénérescence de Liouville, étant donné un rapport  $g/\Delta$  suffisant. On se limite au régime de Bloch-Siegert, pour lequel  $g \ll \Sigma$ . Dans ce cas, les niveaux d'énergie sont donnés par l'équation (1.18) et manifestent une non-linéarité en  $\sqrt{n}$ . Par ailleurs, tel qu'illustré à la figure E.1, les opérateurs du bain couplent seulement les états à l'intérieur du même doublet ou à l'écart d'un ou deux doublets l'un de l'autre. En outre, tel qu'expliqué à la section 3.2.1, des règles de sélection de parité s'appliquent, de sorte que les bains en  $X$  et en  $\sigma_x$  peuvent seulement générer des transitions entre doublets adjacents (type 1), alors que le bruit en  $\sigma_z$  n'induit des transitions qu'à l'intérieur d'un même doublet ou entre doublets deuxièmes plus proches voisins. Ceci permet de trouver un  $\tilde{n}_{\text{crit}}$  distinct pour chaque bain en inspectant chaque combinaison possible de transitions et en trouvant quand certaines peuvent se recouvrir.

On considère d'abord les transitions provoquées par les bains impairs, qui sont de type 1. À faible  $n$ , elles sont essentiellement non dégénérées à cause de la non-linéarité en  $\sqrt{n}$ . Cependant, alors que  $n$  augmente,  $\sqrt{n}$  devient comparable à  $\sqrt{n+1}$  et ces transitions se

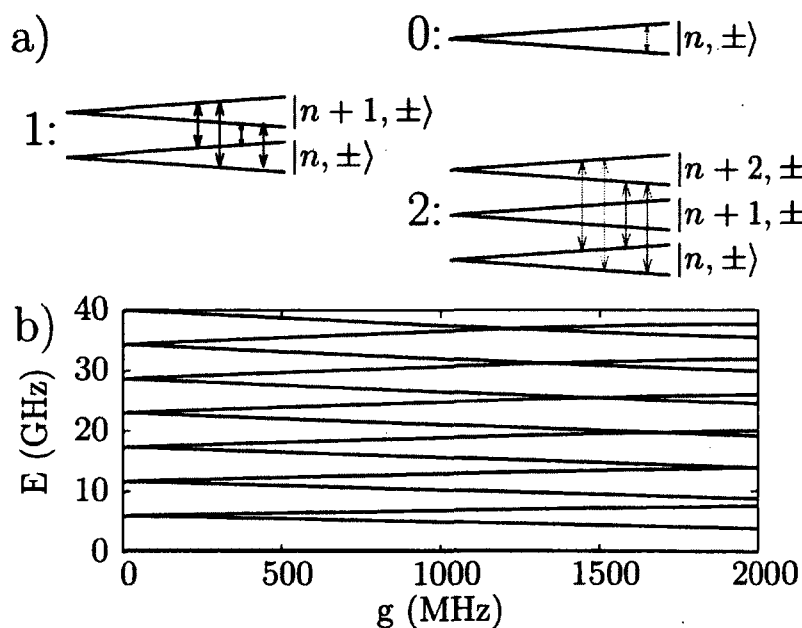


FIGURE E.1 – a) Types de transitions permis dans le régime de Bloch-Siegert ( $g \ll \Sigma$ ). En gris (rouge en version électronique) : les transitions induites par le bain en  $\sigma_z$ , qui sont paires. En noir : les transitions provoquées par les bains en  $X$  et en  $\sigma_x$ , qui sont impaires. b) Niveaux d'énergie de l'hamiltonien de Rabi trouvés numériquement en augmentant le couplage. Des croisements entre des niveaux dans le spectre mènent à des paires de transitions dégénérées. Cependant, puisque, dans chacune d'elles, une transition est paire et l'autre impaire, elles appartiennent à des bains différents et ces dégénérescences sont impertinentes pour l'équation maîtresse. Les paramètres sont  $\omega_r/2\pi = \omega_a/2\pi = 6$  GHz.

rapprochent. Lorsque la différence de fréquence entre deux transitions devient de l'ordre de  $n\kappa$ , leur largeur de raie typique, notre modèle échoue. On obtient un ordre de grandeur de ce  $n$  critique avec la condition  $(E_{n+1,+} - E_{n,+}) - (E_{n+1,-} - E_{n,-}) \sim n\kappa$ . En omettant les termes d'ordre supérieur à  $g^2$  et en supposant  $g \gg \kappa$  et  $g \gtrsim |\Delta|$ , autrement dit que le système est *hors* du régime dispersif, on trouve

$$\tilde{n}_{\text{crit}}^{(1)} \simeq \left[ \frac{g}{\kappa} \left( 1 + \frac{\Delta}{2\Sigma} \right) \right]^{2/3}. \quad (\text{E.1})$$

Typiquement, cela signifie que l'on peut avoir des centaines d'excitations avant que la non-linéarité ne disparaisse et que le modèle ne s'ébrèche. Il en résulte que cette limite est en pratique impertinente.

On se tourne maintenant vers les transitions produites par le bain pair. Les transitions de type 2 se recouvrent dans des conditions similaires aux précédentes, mais à des  $n$  plus grands, puisqu'elles comprennent des niveaux d'énergie plus largement détachés. Ainsi, ces transitions ne fixent pas la valeur de  $\tilde{n}_{\text{crit}}$ . Par ailleurs, à cause de la non-linéarité en  $\sqrt{\tilde{n}}$ , toutes les transitions de type 0 ont des fréquences différentes. Cependant, les transitions de type 0 et 2 peuvent accidentellement se recouvrir. Ces recouvrements dépendent des paramètres  $g$ ,  $\omega_a$  et  $\omega_r$  de manière non triviale, mais un  $n$  critique à partir duquel cette possibilité survient peut être établi avec la condition  $E_{n+1,-} - E_{n-1,+} = E_{n,+} - E_{n,-}$ , qui mène à une expression compliquée pour  $\tilde{n}_{\text{crit}}$ . Cependant, on peut commodément obtenir un estimé de ce nombre critique avec le critère  $E_{n,+} - E_{n,-} \sim \omega_r$ , qui mène à

$$\tilde{n}_{\text{crit}}^{(0-2)} = \frac{\omega_r^2 - \Delta^2}{4(g^2 + \mu\Delta)}. \quad (\text{E.2})$$

Avec  $\omega_a/2\pi = \omega_r/2\pi = 6$  GHz et  $g/2\pi = 1$  GHz,  $\tilde{n}_{\text{crit}}^{(0-2)} = 9$ , ce qui est bien assez pour décrire avec précision plusieurs expériences comme la spectroscopie.

Finalement, on souligne qu'au-dessus de  $g/2\pi = 1$  GHz,  $\tilde{n}_{\text{crit}}^{(0-2)}$ , on peut seulement dire que *certaines* paires de transitions *pourraient* se recouvrir. Si les niveaux impliqués ne jouent pas le rôle déterminant dans la dynamique du système étudié, l'équation maîtresse présentée ici peut tout de même donner des résultats très raisonnables en pratique.





## Annexe F

# Éléments de matrice apparaissant dans l'équation de Redfield

Dans cette annexe, on évalue les éléments de matrice entre les états propres  $|j\rangle$  et  $|k\rangle$  de l'hamiltonien de Rabi pour les opérateurs  $X$ ,  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$ . Ce calcul est fait dans le cadre de la théorie de perturbation présentée à la section 1.2 au deuxième ordre en  $g$ , de sorte que

$$O^{jk} \simeq \langle j|U^\dagger O U|k\rangle, \quad (\text{F.1})$$

où  $O$  est un des opérateurs mentionnés ci-dessus et  $|j\rangle$  est un état propre dans la base de l'hamiltonien de Bloch-Siegert, obtenue par la transformation  $U$  donnée à l'équation (1.9). En employant les équations (1.19) et (1.20), on peut calculer les éléments de matrice.

Pour  $O = X$ , on obtient

$$\begin{aligned} X^{j0;1-} &= (1+l)\sin\theta_1 - l\cos\theta_1 & (\text{F.2}) \\ X^{j0;1+} &= (1+l)\cos\theta_1 + l\sin\theta_1 \\ X^{n+;n+1,+} &= [\sqrt{n}(1-l)\sin\theta_n + l\cos\theta_n]\sin\theta_{n+1} + \sqrt{n+1}(1+l)\cos\theta_n\cos\theta_{n+1} \\ X^{n+;n+1,-} &= -[\sqrt{n}(1-l)\sin\theta_n + l\cos\theta_n]\cos\theta_{n+1} + \sqrt{n+1}(1+l)\cos\theta_n\sin\theta_{n+1} \\ X^{n-;n+1,+} &= [-\sqrt{n}(1-l)\cos\theta_n + l\sin\theta_n]\sin\theta_{n+1} + \sqrt{n+1}(1+l)\sin\theta_n\cos\theta_{n+1} \\ X^{n-;n+1,-} &= -[-\sqrt{n}(1-l)\cos\theta_n + l\sin\theta_n]\cos\theta_{n+1} + \sqrt{n+1}(1+l)\sin\theta_n\sin\theta_{n+1}, \end{aligned}$$

où  $l = 2\xi + \Lambda^2/2$ ;  $\xi = g\Lambda/2\omega_r$  est défini sous l'équation (1.9). On note que  $X^{ij} = X^{ji}$ . Tous les autres éléments de matrice sont nuls au deuxième ordre.

Similairement, pour  $O = \sigma_x$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{\downarrow 0;1-} &= r_0^2 \cos \theta_1 - s_0 \sin \theta_1 \\
 \sigma_x^{\downarrow 0;1+} &= -r_0^2 \sin \theta_1 - s_0 \cos \theta_1 \\
 \sigma_x^{n+;n+1,+} &= -[r_n^2 \sin \theta_{n+1} + s_{n+1} \cos \theta_{n+1}] \cos \theta_n + [s_n \sin \theta_{n+1} + t_n \cos \theta_{n+1}] \sin \theta_n \\
 \sigma_x^{n+;n+1,-} &= -[-r_n^2 \cos \theta_{n+1} + s_{n+1} \sin \theta_{n+1}] \cos \theta_n + [-s_n \cos \theta_{n+1} + t_n \sin \theta_{n+1}] \sin \theta_n \\
 \sigma_x^{n-;n+1,+} &= -[r_n^2 \sin \theta_{n+1} + s_{n+1} \cos \theta_{n+1}] \sin \theta_n - [s_n \sin \theta_{n+1} + t_n \cos \theta_{n+1}] \cos \theta_n \\
 \sigma_x^{n-;n+1,-} &= -[-r_n^2 \cos \theta_{n+1} + s_{n+1} \sin \theta_{n+1}] \sin \theta_n - [-s_n \cos \theta_{n+1} + t_n \sin \theta_{n+1}] \cos \theta_n,
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

avec  $r_n^2 = 1 - \Lambda^2(n + 1/2)$ ,  $s_n = \Lambda\sqrt{n+1}$ , et  $t_n = 2\xi\sqrt{n(n+1)}$ .

Finalement,  $O = \sigma_z$  donne

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^{\downarrow 0;\downarrow 0} &= 2\Lambda^2 - 1 \\
 \sigma_z^{\downarrow 0;2+} &= 2\Lambda \sin \theta_2 \\
 \sigma_z^{\downarrow 0;2-} &= -2\Lambda \cos \theta_2 \\
 \sigma_z^{n+;n+} &= [2\Lambda^2(n-1) - 1] \cos(2\theta_n) + 4\Lambda^2 \cos^2 \theta_n \\
 \sigma_z^{n+;n-} &= 2(2\Lambda^2 n - 1) \sin \theta_n \cos \theta_n \\
 \sigma_z^{n-;n-} &= -[2\Lambda^2(n-1) - 1] \cos(2\theta_n) + 4\Lambda^2 \sin^2 \theta_n \\
 \sigma_z^{n+;n+2,+} &= 2\Lambda\sqrt{n+1} \cos \theta_n \sin \theta_{n+2} \\
 \sigma_z^{n+;n+2,-} &= -2\Lambda\sqrt{n+1} \cos \theta_n \cos \theta_{n+2} \\
 \sigma_z^{n-;n+2,+} &= 2\Lambda\sqrt{n+1} \sin \theta_n \sin \theta_{n+2} \\
 \sigma_z^{n-;n+2,-} &= -2\Lambda\sqrt{n+1} \sin \theta_n \cos \theta_{n+2}.
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

Quelques exemples de comparaison de ces formules analytiques avec les résultats de la diagonalisation numérique sont présentés à la figure F.1. La comparaison est excellente jusqu'au rapport  $g/\Sigma \sim 0.15$  pour tous les éléments de matrice.

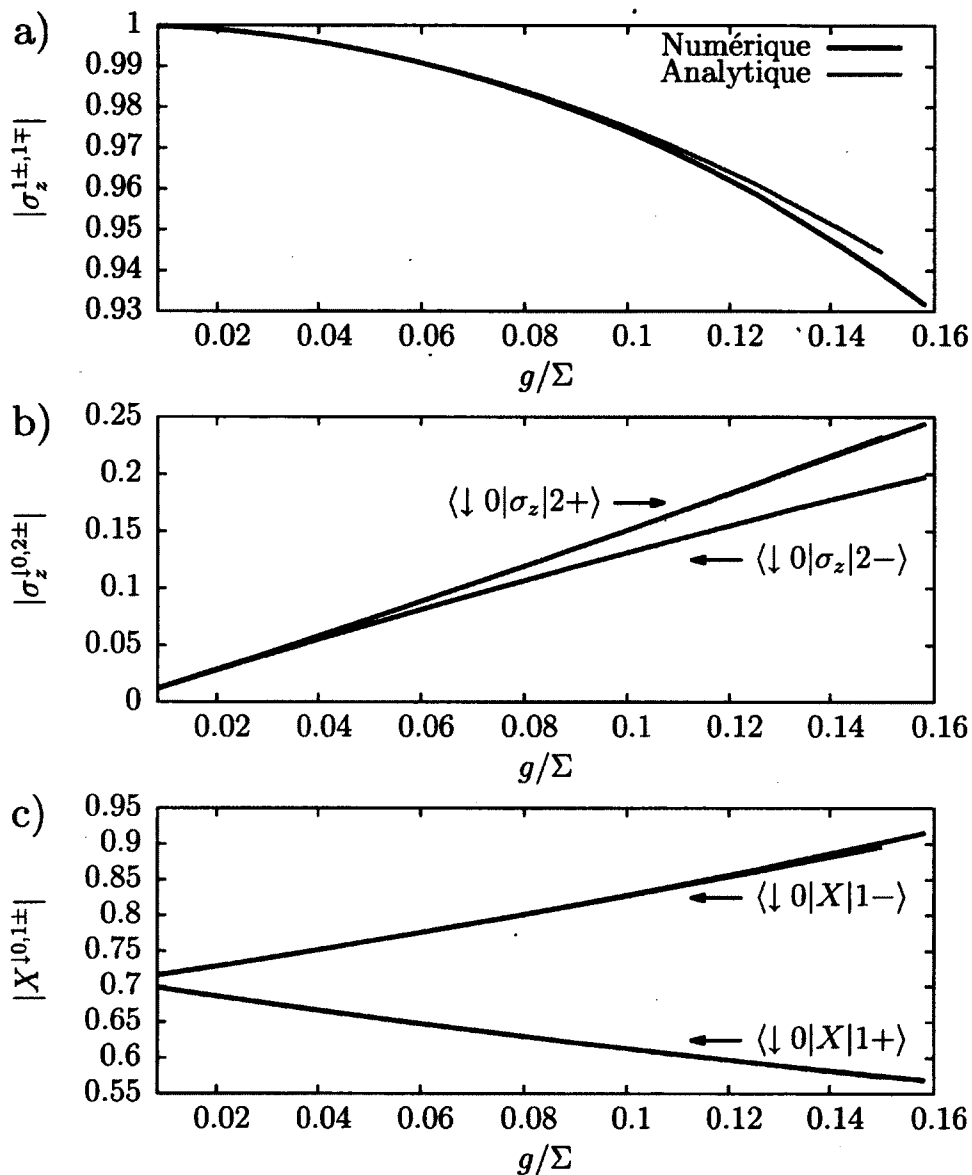


FIGURE F.1 – Comparaison de quelques éléments de matrice analytiques et numériques. Dans tous les cas, une ligne grise (rouge en version électronique) signifie un résultat analytique donné par une des équations (F.2) à (F.4) alors qu'un trait noir représente les valeurs obtenues par diagonalisation numérique. Dans tous les cas,  $\omega_a = \omega_r = 6$  GHz. Le calcul analytique est très près du résultat numérique jusqu'à  $g/\Sigma \sim 10$  %, c'est-à-dire  $g/\omega_r \sim 20$  %. Cet intervalle inclut donc toute la gamme des couplages réalisés expérimentalement jusqu'à ce jour [5], qui va jusqu'à  $g/\omega_r \sim 12$  %.



## Annexe G

# Taux de création de photons sous du bruit en $\sigma_z$

Dans cette section, on calcule le taux de création de photons donné par l'équation (3.36) et causé par du bruit blanc dans la fréquence du qubit. Pour simplifier la discussion, on inclut seulement les transitions au premier doublet accessible, c'est-à-dire  $|\widetilde{2}, \pm\rangle$ .

Le taux moyen de création de photons est donné par

$$\beta(t) = \frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle(t) = \text{Tr} [\dot{\rho}(t) a^\dagger a]. \quad (\text{G.1})$$

On prend  $|\widetilde{\downarrow} 0\rangle$  pour état initial. Pour obtenir un taux constant, on se limite à des temps  $t$  très petits, tels que  $\beta(t) \simeq \beta(0)$ . Tel qu'illustré à la figure 3.4, cette approximation ne cause pas de problème pour du bruit blanc, pour lequel on trouve numériquement que  $\langle a^\dagger a \rangle$  augmente linéairement en tout temps. Puisque  $\dot{\rho}(t)|_{t=0} = -i[H_R, \rho(0)] + \mathcal{L}_{\text{hab}}\rho(0)$  et que  $\rho(0)$  commute avec  $H_R$ , on trouve

$$\beta \simeq \text{Tr} [a^\dagger a \mathcal{L}_{\text{hab}} |\widetilde{\downarrow} 0\rangle \langle \widetilde{\downarrow} 0|]. \quad (\text{G.2})$$

Tel que montré à l'équation (3.14), si on considère le bruit en  $\sigma_z$ ,  $\mathcal{L}_{\text{hab}}$  a une composante responsable du déphasage pur et une autre qui induit des transitions. Puisque  $\rho(0)$  est un état propre, le terme de déphasage n'a pas d'effet et s'annule. Ainsi, en se plaçant

dans la base de Bloch-Siegert, on obtient

$$\begin{aligned} \beta \simeq & - \left( \Gamma_\phi^{2-, \downarrow 0} + \Gamma_\phi^{2+, \downarrow 0} \right) \langle \downarrow 0 | (a^\dagger a)^{\text{BS}} | \downarrow 0 \rangle \\ & + \Gamma_\phi^{2-, \downarrow 0} \langle 2 - | (a^\dagger a)^{\text{BS}} | 2 - \rangle + \Gamma_\phi^{2+, \downarrow 0} \langle 2 + | (a^\dagger a)^{\text{BS}} | 2 + \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Avec

$$\begin{aligned} (a^\dagger a)^{\text{BS}} = & a^\dagger a - \Lambda (a \sigma_- + a^\dagger \sigma_+) - 2\xi (a^2 + a^{\dagger 2}) \sigma_z \\ & - \Lambda^2 \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \sigma_z + \frac{1}{2} \Lambda^2, \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

et en utilisant l'équation (3.17) pour les taux de transition ainsi que les équations (F.4) pour les éléments de matrice correspondants, on trouve

$$\beta \simeq 2\Lambda^2 [T_{2-}(\theta_2) \gamma_\phi(-\omega_{2-}) + T_{2+}(\theta_2) \gamma_\phi(-\omega_{2+})], \quad (\text{G.5})$$

où

$$T_{2-} = (1 + \sin^2 \theta_2) \cos^2 \theta_2 \quad (\text{G.6})$$

$$T_{2+} = (1 + \cos^2 \theta_2) \sin^2 \theta_2, \quad (\text{G.7})$$

et  $\omega_{2\pm} = E_{2\pm} - E_{10}$ .

L'équation (G.5) montre clairement que le spectre du bruit à de très hautes fréquences négatives doit être important pour que le bain en  $\sigma_z$  génère des photons de façon significative. Or, dans le modèle quantique présenté ici, ce bain respecte le principe du bilan détaillé. En effet,  $\gamma_\phi(-\omega) = \exp(-\omega/k_B T) \gamma_\phi(\omega)$ , de sorte que  $\gamma_\phi(-\omega) \rightarrow 0$  pour  $\omega \gg k_B T$ , ce qui signifie que ces contributions devraient être très faibles pour de basses températures effectives.

Enfin, lorsque  $k_B T \gg \omega_{2\pm}$ , on a  $\gamma(-\omega_{2-}) \simeq \gamma(-\omega_{2+}) \equiv \gamma_\phi$ , donc du bruit blanc, et l'équation (G.5) se réduit à la forme plus simple

$$\beta = 2\gamma_\phi \Lambda^2 T(\theta_2), \quad (\text{G.8})$$

qui correspond à l'équation (3.36).

## Annexe H

# Calcul du spectre de séparation de Rabi

Tel que souligné à la section 3.2.6, on calcule ici  $\langle a \rangle_s$  sous l'approximation de la faible f.é.m externe. On suppose que le bruit en  $\sigma_z$  à de hautes fréquences négatives est faible, de sorte que les transitions du fondamental au doublet  $|\widetilde{2, \pm}\rangle$  sont négligeables. Comme le montre l'annexe G, ceci est valide pour un bain ayant une basse température effective. En supposant que la f.é.m externe est très faible, cela signifie que seuls les trois premiers niveaux du système sont pertinents.

Pour la simplicité, on commence par se mettre dans la base de Bloch-Siegert, définie par l'équation (1.9), pour obtenir

$$H_{\text{forcé}}^{\text{BS}}(t) = U^\dagger H(t)U = H_{\text{BS}} + \epsilon a^{\text{BS}} e^{i\omega_{\text{rf}}t} + \text{h.c.} \quad (\text{H.1})$$

Il est aussi utile de passer dans un référentiel tournant en appliquant

$$V(t) = e^{-i\omega_{\text{rf}}[(a^\dagger a)^{\text{BS}} + \sigma_z^{\text{BS}}/2]t}, \quad (\text{H.2})$$

pour obtenir l'hamiltonien indépendant du temps

$$H_{\text{forcé}}^{\text{BS}} = \Delta_r^{\text{BS}} a^\dagger a + \frac{\Delta_a^{\text{BS}}}{2} \sigma_z + gI_+ + \epsilon(a^{\text{BS}} + a^{\dagger\text{BS}}), \quad (\text{H.3})$$

avec

$$\Delta_r^{\text{BS}} = \omega_r - \omega_{\text{rf}} - \mu \quad \Delta_a^{\text{BS}} = \omega_a - \omega_{\text{rf}} + \mu. \quad (\text{H.4})$$



L'équation du mouvement de Heisenberg pour un opérateur arbitraire  $\hat{O}$  est

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle = i\langle[H_{\text{forcé}}^{\text{BS}}, \hat{O}]\rangle + \langle\mathcal{L}_{\text{hab}}\hat{O}\rangle, \quad (\text{H.5})$$

où, dans le sous-espace  $\{|\downarrow\bar{0}\rangle, |\bar{1}-\rangle, |\bar{1}+\rangle\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{hab}}^O = & \sum_{\sigma=\pm} (\Gamma_{\kappa}^{10,1\sigma} + \Gamma_{\gamma}^{10,1\sigma}) \mathcal{D}_O [|\downarrow\bar{0}\rangle\langle\bar{1}\sigma|] + \Gamma_{\phi}^{1-,1+} \mathcal{D}_O [|\bar{1}-\rangle\langle\bar{1}+|] + \Gamma_{\phi}^{1+,1-} \mathcal{D}_O [|\bar{1}+\rangle\langle\bar{1}-|] \\ & + \mathcal{D}_O [\Phi^{10,10}|\downarrow\bar{0}\rangle\langle\downarrow\bar{0}| + \Phi^{1-,1-}|\bar{1}-\rangle\langle\bar{1}-| + \Phi^{1+,1+}|\bar{1}+\rangle\langle\bar{1}+|], \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

où  $\mathcal{D}_O[\hat{Q}]\hat{O} = (2\hat{Q}^\dagger\hat{O}\hat{Q} - \hat{Q}^\dagger\hat{Q}\hat{O} - \hat{O}\hat{Q}^\dagger\hat{Q})/2$ . Les taux sont définis à la section 3.2.1.

Nous sommes intéressés à obtenir les valeurs moyennes de  $a$  et de  $\sigma_-$ . Puisque les valeurs moyennes ne dépendent pas du référentiel, nous allons simplifier les calculs en travaillant dans la base de Bloch-Siegert. Pour ce faire, on calcule d'abord l'effet des dissipateurs sur  $a^{\text{BS}}$  et  $\sigma_-^{\text{BS}}$ , sachant que

$$\mathcal{D}_O[\hat{Q}^{\text{BS}}]\hat{O}^{\text{BS}} = (\mathcal{D}_O[\hat{Q}]\hat{O})^{\text{BS}}. \quad (\text{H.7})$$

Cela signifie que nous pouvons traiter les états et les opérateurs dans la base de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings efficace et ensuite utiliser la transformation unitaire  $U$  définie à l'équation (1.9) pour revenir à la base de Bloch-Siegert, qui prend en compte les termes non séculaires. Dans l'approximation à trois niveaux, on trouve

$$a = \cos\theta_1|\downarrow 0\rangle\langle 1+| + \sin\theta_1|\downarrow 0\rangle\langle 1-|, \quad (\text{H.8})$$

$$\sigma_- = -\sin\theta_1|\downarrow 0\rangle\langle 1+| + \cos\theta_1|\downarrow 0\rangle\langle 1-|, \quad (\text{H.9})$$

ce qui donne les dissipateurs

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_O[|\downarrow 0\rangle\langle 1+|]a &= -\frac{1}{2}\cos\theta_1(a\cos\theta_1 - \sigma_- \sin\theta_1), \\ \mathcal{D}_O[|\downarrow 0\rangle\langle 1-|]a &= -\frac{1}{2}\sin\theta_1(a\sin\theta_1 + \sigma_- \cos\theta_1), \\ \mathcal{D}_O[|\bar{1}-\rangle\langle 1+|]a &= -\frac{1}{2}\cos\theta_1(a\cos\theta_1 - \sigma_- \sin\theta_1), \\ \mathcal{D}_O[|\bar{1}+\rangle\langle 1-|]a &= -\frac{1}{2}\sin\theta_1(a\sin\theta_1 + \sigma_- \cos\theta_1), \\ \mathcal{D}_O[|\downarrow 0\rangle\langle 1+|]\sigma_- &= +\frac{1}{2}\sin\theta_1(a\cos\theta_1 - \sigma_- \sin\theta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_O[|\downarrow 0\rangle\langle 1-|]\sigma_- &= -\frac{1}{2}\cos\theta_1(a\sin\theta_1 + \sigma_- \cos\theta_1), \\ \mathcal{D}_O[|1-\rangle\langle 1+|]\sigma_- &= +\frac{1}{2}\sin\theta_1(a\cos\theta_1 - \sigma_- \sin\theta_1), \\ \mathcal{D}_O[|1+\rangle\langle 1-|]\sigma_- &= -\frac{1}{2}\cos\theta_1(a\sin\theta_1 + \sigma_- \cos\theta_1).\end{aligned}$$

Procéder de manière similaire pour les dissipateurs reliés au déphasage pur donne

$$\mathcal{D}_O^{\text{deph}} a = -\frac{1}{2}(\gamma_\phi^+ \cos^2\theta_1 + \gamma_\phi^- \sin^2\theta_1)a - \frac{1}{2}\sin\theta_1 \cos\theta_1(\gamma_\phi^- - \gamma_\phi^+)\sigma_- \quad (\text{H.10})$$

$$\mathcal{D}_O^{\text{deph}} \sigma_- = -\frac{1}{2}\sin\theta_1 \cos\theta_1(\gamma_\phi^- - \gamma_\phi^+)a - \frac{1}{2}(\gamma_\phi^+ \sin^2\theta_1 + \gamma_\phi^- \cos^2\theta_1)\sigma_-, \quad (\text{H.11})$$

où nous avons défini

$$\gamma_\phi^\pm = \frac{\gamma_\phi(0)}{2} |\sigma_z^{\uparrow 0, \downarrow 0} - \sigma_z^{1\pm, 1\pm}|^2. \quad (\text{H.12})$$

Si on additionne maintenant les contributions à l'équation de Heisenberg pour  $\langle a \rangle$  de tous les dissipateurs de l'équation (H.5), on obtient

$$-\Gamma_+(\theta_1)\langle a \rangle - \eta(\theta_1)\langle \sigma_- \rangle, \quad (\text{H.13})$$

alors que pour  $\sigma_-$ , on a

$$-\eta(\theta_1)\langle a \rangle - \Gamma_-(\theta_1)\langle \sigma_- \rangle. \quad (\text{H.14})$$

Ici, on a défini

$$\Gamma_+(\theta_1) = \Gamma_1 \sin^2\theta_1 + \Gamma_2 \cos^2\theta_1, \quad (\text{H.15})$$

$$\Gamma_-(\theta_1) = \Gamma_1 \cos^2\theta_1 + \Gamma_2 \sin^2\theta_1, \quad (\text{H.16})$$

$$\eta(\theta_1) = (\Gamma_1 - \Gamma_2) \sin\theta_1 \cos\theta_1, \quad (\text{H.17})$$

avec les taux

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_- + \gamma_\phi^\uparrow + \gamma_\phi^-}{2}; \quad \Gamma_2 = \frac{\gamma_+ + \gamma_\phi^\downarrow + \gamma_\phi^+}{2}. \quad (\text{H.18})$$

Cette formule implique à son tour les expressions

$$\gamma_\pm = \kappa(\Delta_{1\pm, \downarrow 0}) |X^{\uparrow 0, 1\pm}|^2 + \gamma(\Delta_{1\pm, \downarrow 0}) |\sigma_x^{\uparrow 0, 1\pm}|^2, \quad (\text{H.19})$$

$$\gamma_\phi^{\uparrow/\downarrow} = \frac{1}{2}\gamma_\phi(\Delta_{1\mp, 1\pm}) |\sigma_z^{1\mp, 1\pm}|^2. \quad (\text{H.20})$$

On calcule maintenant  $[H_{\text{drvn}}, a^{\text{BS}}]$  et  $[H_{\text{drvn}}, \sigma_z^{\text{BS}}]$ . En négligeant les termes qui mènent à la fuite de l'état hors du système à trois niveaux efficace de Jaynes-Cummings, on obtient des formes plus simples pour  $a^{\text{BS}}$  et  $\sigma_z^{\text{BS}}$  dans la base nue

$$a^{\text{BS}} \approx \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) a - \Lambda \sigma_+ + 2\xi a^\dagger \quad (\text{H.21})$$

$$\sigma_-^{\text{BS}} \approx \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) \sigma_- - \Lambda a^\dagger. \quad (\text{H.22})$$

De ces expressions, on obtient facilement

$$[H_{\text{drvn}}, a^{\text{BS}}] \simeq -\epsilon - \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) \Delta_r^{\text{BS}} a - \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) g \sigma_- + (2\xi \Delta_r^{\text{BS}} - \mu) a^\dagger + (2\xi g - \Lambda \Delta_a^{\text{BS}}) \sigma_+, \quad (\text{H.23})$$

$$[H_{\text{drvn}}, \sigma_-^{\text{BS}}] \simeq -\left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) \Delta_a^{\text{BS}} \sigma_- - \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) g a - \Lambda \Delta_r^{\text{BS}} a^\dagger - \mu \sigma_+, \quad (\text{H.24})$$

On exprime maintenant ceci dans la base de Bloch-Siegert. À partir des équations (H.21) et (H.22), on trouve

$$\sigma_- \simeq \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) \sigma_-^{\text{BS}} + \Lambda a^{\dagger \text{BS}}. \quad (\text{H.25})$$

Sachant que  $a^{\text{BS}} = a + \mathcal{O}(\Lambda)$ , l'équation (H.21) mène à

$$a \simeq \left(1 - \frac{\Lambda^2}{2}\right) a^{\text{BS}} + \Lambda \sigma_+^{\text{BS}} - 2\xi a^{\dagger \text{BS}}. \quad (\text{H.26})$$

Cela permet de trouver les commutateurs appropriés

$$\begin{aligned} [H_{\text{drvn}}, a^{\text{BS}}] &\simeq -\epsilon - \Delta_r^{\text{BS}} a^{\text{BS}} - \left(1 + \frac{\Lambda^2}{2}\right) g \sigma_- \\ &\quad + 2(\xi \Delta_r^{\text{BS}} - \mu) a^{\dagger \text{BS}} - [\Lambda(\Delta_a^{\text{BS}} + \Delta_r^{\text{BS}}) - 2\xi g] \sigma_+^{\text{BS}}, \end{aligned} \quad (\text{H.27})$$

$$\begin{aligned} [H_{\text{drvn}}, \sigma_-^{\text{BS}}] &\simeq -[(1 + \Lambda^2) \Delta_a^{\text{BS}} + \Lambda^2 \Delta_r^{\text{BS}}] \sigma_-^{\text{BS}} - g a^{\text{BS}} \\ &\quad - [\Lambda(\Delta_a^{\text{BS}} + \Delta_r^{\text{BS}}) - 2\xi g] a^{\dagger \text{BS}} - 2\mu \sigma_+^{\text{BS}}. \end{aligned} \quad (\text{H.28})$$

On peut maintenant écrire les équations du mouvement pour  $a^{\text{BS}}$  et  $\sigma_-^{\text{BS}}$ . Alors que les contributions hamiltoniennes sont purement imaginaires, les termes liés à la dissipation sont purement réels. Les termes imaginaires mènent à un comportement oscillatoire, alors que les termes réels sont responsables de la dynamique non conservative, c'est-à-dire le forçage et l'amortissement du système. Les termes en  $a^{\text{BS}}$  et en  $\sigma_-^{\text{BS}}$  ont tous deux des composantes réelles et imaginaires, mais les termes en  $a^{\dagger \text{BS}}$  et en  $\sigma_+^{\text{BS}}$  ont seulement

une contribution imaginaire. Ces derniers ont donc uniquement pour effet d'ajouter des oscillations dans la dynamique. Puisqu'on s'intéresse seulement au comportement de l'état stationnaire, on peut les négliger. Cela permet d'obtenir les équations suivantes pour l'état stationnaire en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $g^2$

$$\begin{aligned} [i\Delta_r^{\text{BS}} + \Gamma_+(\theta_1)] \langle a^{\text{BS}} \rangle_s + [ig + \eta(\theta_1)] \langle \sigma_-^{\text{BS}} \rangle_s + i\epsilon &= 0, \\ [ig + \eta(\theta_1)] \langle a^{\text{BS}} \rangle_s + [i\tilde{\Delta}_a^{\text{BS}} + \Gamma_-(\theta_1)] \langle \sigma_-^{\text{BS}} \rangle_s &= 0, \end{aligned}$$

où nous avons défini  $\tilde{\Delta}_a^{\text{BS}} = (1 + \Lambda^2)\Delta_a^{\text{BS}} + \Lambda^2\Delta_r^{\text{BS}}$ . En solutionnant l'ensemble d'équations ci-dessus, on trouve finalement

$$\langle a \rangle_s = \frac{i\epsilon G_q(\theta_1)}{G_\eta^2(\theta_1) - G_q(\theta_1)G_r(\theta_1)}, \quad (\text{H.29})$$

où

$$G_q(\theta_1) = \Gamma_-(\theta_1) + i\tilde{\Delta}_a^{\text{BS}} \quad (\text{H.30})$$

$$G_r(\theta_1) = \Gamma_+(\theta_1) + i\Delta_r^{\text{BS}} \quad (\text{H.31})$$

$$G_\eta(\theta_1) = ig + \eta(\theta_1). \quad (\text{H.32})$$

Dans le régime du couplage fort, c'est-à-dire quand  $2g$  est beaucoup plus grand que tous les taux de relaxation et de déphasage du système, la partie imaginaire de cette formule se réduit approximativement à l'équation (3.46).



# Bibliographie

- [1] S. Haroche et J.-M. Raimond. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford University Press, Oxford, (2006).
- [2] A. A. Houck, D. I. Schuster, J. M. Gambetta, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin *et al.* Generating single microwave photons in a circuit. *Nature* **449**(7160), 328–331 (2007).
- [3] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature* **431**(7005), 162–167 (2004).
- [4] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. García-Ripoll, E. Solano, C. J. P. M. Harmans et J. E. Mooij. Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime. *Phys. Rev. Lett.* **105**(23), 237001 (2010).
- [5] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano *et al.* Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. *Nature Physics* (2010).
- [6] A. V. Dodonov. Asymptotic mean excitation numbers due to anti-rotating term (AMENDART) in Markovian circuit QED. *Journal of Physics : Conference Series* **274**(1), 012137 (2011).
- [7] A. V. Dodonov. Photon creation from vacuum and interactions engineering in nonstationary circuit QED. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 161, 012029. IOP Publishing, (2009).
- [8] T. Werlang, A. V. Dodonov, E. I. Duzzioni et C. J. Villas-Bôas. Rabi model beyond the rotating-wave approximation : Generation of photons from vacuum through decoherence. *Phys. Rev. A* **78**(5), 053805 (2008).
- [9] M. Bina, G. Romero, J. Casanova, J. J. Garcia-Ripoll, A. Lulli, F. Casagrande et E. Solano. Solvable model of dissipative dynamics in the deep strong coupling regime. *ArXiv e-prints* (2011).
- [10] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond et S. Haroche. Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement. *Phys. Rev. Lett.* **77**(24), 4887–4890 (1996).

- [11] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. B. Hoff, M. Brune, J. M. Raimond et S. Haroche. Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity. *Nature* **446**(7133), 297–300 (2007).
- [12] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.M. Raimond et S. Haroche. Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting. *Nature* **448**(7156), 889–893 (2007).
- [13] A. Blais, R. S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits : An architecture for quantum computation. *Physical Review A* **69**(6), 62320 (2004).
- [14] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, Jens Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Controlling the spontaneous emission of a superconducting transmon qubit. *Physical Review Letters* **101**(8), 080502 (2008).
- [15] J. Gambetta, A. Blais, M. Boissonneault, A. A. Houck, D. I. Schuster et S. M. Girvin. Quantum trajectory approach to circuit QED : Quantum jumps and the Zeno effect. *Physical Review A* **77**(1), 12112 (2008).
- [16] J. Gambetta, A. Blais, D. I. Schuster, A. Wallraff, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Qubit-photon interactions in a cavity : Measurement-induced dephasing and number splitting. *Physical Review A* **74**(4), 42318 (2006).
- [17] D. I. Schuster, A. Wallraff, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. ac Stark shift and dephasing of a superconducting qubit strongly coupled to a cavity field. *Phys. Rev. Lett.* **94**(12), 123602 (2005).
- [18] F. R. Ong, M. Boissonneault, F. Mallet, A. Palacios-Laloy, A. Dewes, A. C. Doherty, A. Blais, P. Bertet, D. Vion et D. Esteve. Circuit QED with a nonlinear resonator : ac-Stark shift and dephasing. *Phys. Rev. Lett.* **106**(16), 167002 (2011).
- [19] T. P. Orlando, J. E. Mooij, Lin Tian, Caspar H. van der Wal, L. S. Levitov, Seth Lloyd et J. J. Mazo. Superconducting persistent-current qubit. *Phys. Rev. B* **60**(22), 15398–15413 (1999).
- [20] J. Bourassa, JM Gambetta, AA Abdumalikov Jr, O. Astafiev, Y. Nakamura et A. Blais. Ultrastrong coupling regime of cavity QED with phase-biased flux qubits. *Physical Review A* **80**(3), 32109 (2009).
- [21] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, JJ García-Ripoll, E. Solano, C. Harmans et JE Mooij. Observation of the Bloch-Siegert Shift in a Qubit-Oscillator System in the Ultrastrong Coupling Regime. *Arxiv preprint arXiv :1005.1559* (2010).
- [22] Johannes Hausinger et Milena Grifoni. Qubit-oscillator system under ultrastrong coupling and extreme driving. *Phys. Rev. A* **83**(3), 030301 (2011).
- [23] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll et E. Solano. Deep strong coupling regime of the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. Lett.* **105**(26), 263603 (2010).

- [24] B. Peropadre, P. Forn-Díaz, E. Solano et J. J. García-Ripoll. Switchable ultrastrong coupling in circuit QED. *Phys. Rev. Lett.* **105**(2), 023601 (2010).
- [25] J. Hausinger et M. Grifoni. The qubit-oscillator system : an analytical treatment of the ultra-strong coupling regime. *ArXiv e-prints* (2010).
- [26] J. Hausinger et M. Grifoni. Dissipative dynamics of a biased qubit coupled to a harmonic oscillator : analytical results beyond the rotating wave approximation. *New Journal of Physics* **10**, 115015 (2008).
- [27] Marlan O. Scully et M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, (1997).
- [28] D. Braak. Integrability of the Rabi model. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 100401 (2011).
- [29] I. Shavitt et L.T. Redmon. Quasidegenerate perturbation theories. A canonical van Vleck formalism and its relationship to other approaches. *The Journal of Chemical Physics* **73**, 5711 (1980).
- [30] R. J. Thompson, G. Rempe et H. J. Kimble. Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.* **68**(8), 1132–1135 (1992).
- [31] J. M. Fink, M. Göppl, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais et A. Wallraff. Climbing the Jaynes–Cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity QED system. *Nature* **454**(7202), 315–318 (2008).
- [32] C. Sabín, J. León et J. J. García-Ripoll. Detecting ground-state qubit self-excitations in circuit QED : A slow quantum anti-zeno effect. *Phys. Rev. B* **84**(2), 024516 (2011).
- [33] D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. Johnson, M. H. Devoret *et al.* Resolving photon number states in a superconducting circuit. *Nature* **445**(7127), 515–518 (2007).
- [34] U. Fano. Atomic theory of electromagnetic interactions in dense materials. *Phys. Rev.* **103**, 1202–1218 (1956).
- [35] J. J. Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Phys. Rev.* **112**, 1555–1567 (1958).
- [36] Myung-Joong Hwang et Mahn-Soo Choi. Variational study of a two-level system coupled to a harmonic oscillator in an ultrastrong-coupling regime. *Phys. Rev. A* **82**(2), 025802 (2010).
- [37] Yuanwei Zhang, Gang Chen, Lixian Yu, Qifeng Liang, J.-Q. Liang et Suotang Jia. Analytical ground state for the Jaynes-Cummings model with ultrastrong coupling. *Phys. Rev. A* **83**(6), 065802 (2011).
- [38] D. Walls et G. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, Berlin, (1994).
- [39] David Zueco, Georg M. Reuther, Sigmund Kohler et Peter Hänggi. Qubit-oscillator dynamics in the dispersive regime : Analytical theory beyond the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. A* **80**(3), 033846 (2009).



- [40] S. Ashhab et Franco Nori. Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical states. *Phys. Rev. A* **81**(4), 042311 (2010).
- [41] E. K. Irish. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling. *Phys. Rev. Lett.* **99**(17), 173601 (2007).
- [42] E. K. Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin et K. C. Schwab. Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator. *Phys. Rev. B* **72**(19), 195410 (2005).
- [43] J. Larson. Dynamics of the Jaynes–Cummings and Rabi models : old wine in new bottles. *Physica Scripta* **76**, 146 (2007).
- [44] Roy S. Bondurant et Jeffrey H. Shapiro. Squeezed states in phase-sensing interferometers. *Phys. Rev. D* **30**(12), 2548–2556 (1984).
- [45] Carlton M. Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. D* **23**(8), 1693–1708 (1981).
- [46] David Stoler. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys. Rev. D* **1**(12), 3217–3219 (1970).
- [47] R. Sohn et M.S. Swanson. Exact coherent state transition elements for the squeezed harmonic oscillator. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **38**, 2511 (2005).
- [48] N.J. Cerf, G. Leuchs et E.S. Polzik. *Quantum information with continuous variables of atoms and light*. Imperial College Pr, (2007).
- [49] H. Jeong et T. C. Ralph. Schrodinger Cat States for Quantum Information Processing. *Arxiv preprint quant-ph/0509137* (2005).
- [50] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble et E. S. Polzik. Unconditional quantum teleportation. *Science* **282**(5389), 706–709 (1998).
- [51] E. Knill, R. Laflamme et G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature* **409**(6816), 46–52 (2001).
- [52] T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro et S. Glancy. Quantum computation with optical coherent states. *Phys. Rev. A* **68**, 042319 (2003).
- [53] M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Circuit-QED : How strong can the coupling between a Josephson junction atom and a transmission line resonator be? *Annalen der Physik* **16**(10-11), 767–779 (2007).
- [54] S. M. Girvin, M. H. Devoret et R. J. Schoelkopf. Circuit QED and engineering charge-based superconducting qubits. *Physica Scripta* **137**, 014012 (2009).
- [55] Jérôme Bourassa. *Étude de résonateurs supraconducteurs linéaires et non-linéaires pour couplages lumière-matière et lumière-lumière ultraforts pour l'électrodynamique quantique en circuit*. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, (2012).

- [56] H. Wang, M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, Erik Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, M. Weides, J. Wenner, A. N. Cleland et John M. Martinis. Decoherence dynamics of complex photon states in a superconducting circuit. *Phys. Rev. Lett.* **103**(20), 200404 (2009).
- [57] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Approaching unit visibility for control of a superconducting qubit with dispersive readout. *Phys. Rev. Lett.* **95**(6), 060501 (2005).
- [58] R. Bianchetti, S. Filipp, M. Baur, J. M. Fink, M. Göppl, P. J. Leek, L. Steffen, A. Blais et A. Wallraff. Dynamics of dispersive single-qubit readout in circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A* **80**(4), 043840 (2009).
- [59] A. Lupaşcu *et al.* Quantum non-demolition measurement of a superconducting two-level system. *Nature Physics* **3**(2), 119–125 (2007).
- [60] F. Mallet, F. R. Ong, A. Palacios-Laloy, F. Nguyen, P. Bertet, D. Vion et D. Esteve. Single-shot qubit readout in circuit quantum electrodynamics. *Nature Physics* **5**(11), 791–795 (2009).
- [61] Jonas Larson. Anomalous decoherence and absence of thermalization in a photonic many-body system. *Phys. Rev. A* **83**(5), 052103 (2011).
- [62] J. Larson. Travelling to exotic places with cavity QED systems. *Physica Scripta Volume T* **140**(1), 014025–+ (2010).
- [63] Jonas Larson. Jahn-Teller systems from a cavity QED perspective. *Phys. Rev. A* **78**(3), 033833 (2008).
- [64] Pierre Nataf et Cristiano Ciuti. Vacuum degeneracy of a circuit QED system in the ultrastrong coupling regime. *Phys. Rev. Lett.* **104**(2), 023601 (2010).
- [65] Clive Emary et Tobias Brandes. Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model. *Phys. Rev. E* **67**(6), 066203 (2003).
- [66] Clive Emary et Tobias Brandes. Quantum chaos triggered by precursors of a quantum phase transition : The Dicke model. *Phys. Rev. Lett.* **90**(4), 044101 (2003).
- [67] S. Girvin, M. Devoret et R. Schoelkopf. Circuit QED and engineering charge based superconducting qubits. *ArXiv e-prints* (2009).
- [68] V. E. Manucharyan, J. Koch, L. I. Glazman et M. H. Devoret. Fluxonium : Single Cooper-Pair Circuit Free of Charge Offsets. *Science* **326**, 113– (2009).
- [69] V. E. Manucharyan, J. Koch, M. Brink, L. I. Glazman et M. H. Devoret. Coherent oscillations between classically separable quantum states of a superconducting loop. *ArXiv e-prints* (2009).
- [70] V. E. Manucharyan, J. Koch, L. I. Glazman et M. H. Devoret. Fluxonium : Single Cooper-Pair Circuit Free of Charge Offsets. *Science* **326**(5949), 113 (2009).
- [71] K. Rzażewski, K. Wódkiewicz et W. Żakowicz. Phase transitions, two-level atoms, and the  $A^2$  term. *Phys. Rev. Lett.* **35**(7), 432–434 (1975).

- [72] Neill Lambert, Yueh-nan Chen, Robert Johansson et Franco Nori. Quantum chaos and critical behavior on a chip. *Phys. Rev. B* **80**(16), 165308 (2009).
- [73] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins et H. J. Carmichael. Proposed realization of the Dicke-model quantum phase transition in an optical cavity QED system. *Phys. Rev. A* **75**(1), 013804 (2007).
- [74] P. Nataf et C. Ciuti. Protected quantum computation with multiple resonators in ultrastrong coupling circuit QED. *ArXiv e-prints* (2011).
- [75] A. O. Caldeira et A. J. Leggett. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems. *Phys. Rev. Lett.* **46**(4), 211–214 (1981).
- [76] Howard Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag, (1993).
- [77] S. Syzranov et Y. Makhlin. Geometric phases in open multi-level systems. In *Electron Transport in Nanosystems*, Janez Bonča et Sergei Kruchinin, editors, NATO Science for Peace and Security Series B : Physics and Biophysics, 301–314. Springer Netherlands (2009). 10.1007/978-1-4020-9146-9\_23.
- [78] A. Blais, J. Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret et R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Physical Review A* **75**(3), 32329 (2007).
- [79] Maxime Boissonneault. *Effets non-linéaires et qualité de la mesure en électrodynamique quantique en circuit*. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, (2007).
- [80] C. W. Gardiner et P. Zoller. *Quantum Noise : A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*, volume 56. Springer, Berlin Heidelberg, 2<sup>e</sup> édition, (2000).
- [81] Maxime Boissonneault, J. M. Gambetta et Alexandre Blais. Dispersive regime of circuit QED : Photon-dependent qubit dephasing and relaxation rates. *Phys. Rev. A* **79**(1), 013819 (2009).
- [82] J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, K. M. Lang et C. Urbina. Decoherence of a superconducting qubit due to bias noise. *Physical Review B* **67**(9), 94510 (2003).
- [83] J. Clarke et F. K. Wilhelm. Superconducting quantum bits. *Nature* **453**(7198), 1031–1042 (2008).
- [84] J. A. Schreier, A. A. Houck, J. Koch, D. I. Schuster, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M. H. Devoret *et al.* Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits. *Physical Review B* **77**(18), 180502 (2008).
- [85] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box. *Physical Review A* **76**(4), 42319 (2007).
- [86] D. J. Van Harlingen, T. L. Robertson, B. L. T. Plourde, P. A. Reichardt, T. A. Crane et John Clarke. Decoherence in Josephson-junction qubits due to critical-current fluctuations. *Phys. Rev. B* **70**(6), 064517 (2004).

- [87] F. C. Wellstood, C. Urbina et J. Clarke. Flicker ( $1/f$ ) noise in the critical current of Josephson junctions at 0.09–4.2 K. *Applied Physics Letters* **85**, 5296 (2004).
- [88] P. Dutta et P. M. Horn. Low-frequency fluctuations in solids :  $1/f$  noise. *Rev. Mod. Phys.* **53**(3), 497–516 (1981).
- [89] S. Machlup. Noise in semiconductors : Spectrum of a two-parameter random signal. *Journal of Applied Physics* **25**, 341 (1954).
- [90] Lara Faoro et Lev B. Ioffe. Microscopic origin of critical current fluctuations in large, small, and ultra-small area Josephson junctions. *Phys. Rev. B* **75**(13), 132505 (2007).
- [91] Lara Faoro et Lev B. Ioffe. Microscopic origin of low-frequency flux noise in Josephson circuits. *Phys. Rev. Lett.* **100**(22), 227005 (2008).
- [92] Roger H. Koch, David P. DiVincenzo et John Clarke. Model for  $1/f$  flux noise in SQUIDs and qubits. *Phys. Rev. Lett.* **98**(26), 267003 (2007).
- [93] Alexander Shnirman, Gerd Schön, Ivar Martin et Yuriy Makhlin. Low- and high-frequency noise from coherent two-level systems. *Phys. Rev. Lett.* **94**(12), 127002 (2005).
- [94] F. Yoshihara, K. Harrabi, A. O. Niskanen, Y. Nakamura et J. S. Tsai. Decoherence of flux qubits due to  $1/f$  flux noise. *Phys. Rev. Lett.* **97**(16), 167001 (2006).
- [95] O. Astafiev, Yu. A. Pashkin, Y. Nakamura, T. Yamamoto et J. S. Tsai. Temperature square dependence of the low frequency  $1/f$  charge noise in the Josephson junction qubits. *Phys. Rev. Lett.* **96**(13), 137001 (2006).
- [96] Maxime Boissonneault, J. M. Gambetta et Alexandre Blais. Nonlinear dispersive regime of cavity QED : The dressed dephasing model. *Phys. Rev. A* **77**(6), 060305 (2008).
- [97] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, Jens Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Controlling the spontaneous emission of a superconducting transmon qubit. *Phys. Rev. Lett.* **101**(8), 080502 (2008).
- [98] M. D. Reed, B. R. Johnson, A. A. Houck, L. DiCarlo, J. M. Chow, D. I. Schuster, L. Frunzio et R. J. Schoelkopf. Fast reset and suppressing spontaneous emission of a superconducting qubit. *Applied Physics Letters* **96**, 203110 (2010).
- [99] M. Scala, B. Militello, A. Messina, J. Piilo et S. Maniscalco. Microscopic derivation of the Jaynes-Cummings model with cavity losses. *Phys. Rev. A* **75**(1), 013811 (2007).
- [100] Ruixue Xu, YiJing Yan et Xin-Qi Li. Cavity quantum electrodynamics in the presence of energy relaxation and pure dephasing : A unified quantum master-equation approach. *Phys. Rev. A* **65**(2), 023807 (2002).
- [101] Maxime Boissonneault. *Mesure et rétroaction sur un qubit multi-niveaux en électrodynamique quantique en circuit non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, (2011).

- [102] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt et R. J. Schoelkopf. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Reviews of Modern Physics* **82**(2), 1155–1208 (2010).
- [103] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson et Franco Nori. Dynamical casimir effect in superconducting microwave circuits. *Phys. Rev. A* **82**(5), 052509 (2010).
- [104] C. M. Wilson, T. Duty, M. Sandberg, F. Persson, V. Shumeiko et P. Delsing. Photon generation in an electromagnetic cavity with a time-dependent boundary. *Phys. Rev. Lett.* **105**(23), 233907 (2010).
- [105] T. Yamamoto, K. Inomata, M. Watanabe, K. Matsuba, T. Miyazaki, W. D. Oliver, Y. Nakamura et J. S. Tsai. Flux-driven Josephson parametric amplifier. *Applied Physics Letters* **93**(4), 042510 (2008).
- [106] P. J. Leek, S. Filipp, P. Maurer, M. Baur, R. Bianchetti, J. M. Fink, M. Göppl, L. Steffen et A. Wallraff. Using sideband transitions for two-qubit operations in superconducting circuits. *Phys. Rev. B* **79**(18), 180511 (2009).
- [107] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, J. M. Gambetta, J. Schreier, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Sideband transitions and two-tone spectroscopy of a superconducting qubit strongly coupled to an on-chip cavity. *Phys. Rev. Lett.* **99**(5), 50501 (2007).
- [108] X. Cao, J. Q. You, H. Zheng et F. Nori. A qubit strongly coupled to a resonant cavity : asymmetry of the spontaneous emission spectrum beyond the rotating wave approximation. *New Journal of Physics* **13**, 073002 (2011).
- [109] J. Bylander, S. Gustavsson, F. Yan, F. Yoshihara, K. Harrabi, G. Fitch, D.G. Cory, Y. Nakamura, J. S. Tsai et W. D. Oliver. Noise spectroscopy through dynamical decoupling with a superconducting flux qubit. *Nature Physics* (2011).
- [110] A. V. Dodonov. How 'cold' can a Markovian dissipative cavity QED system be? *Physica Scripta* **82**, 038102 (2010).
- [111] A. Blais. Superconductivity-based artificial atoms for quantum information. *Physics in Canada* **67**, 123 (2011).
- [112] A. A. Houck, J. Koch, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Life after charge noise : recent results with transmon qubits. *Quantum Information Processing* **8**(2), 105–115 (2009).
- [113] R. J. Schoelkopf et S. M. Girvin. Wiring up quantum systems. *Nature* **451**(7179), 664–670 (2008).
- [114] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods : for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer, Berlin, (2004).