

La Transformée de Fourier de la Gaussienne Généralisée

par

Samir El Mashoubi

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juillet 2010



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 978-0-494-65605-1
Our file *Notre référence*
ISBN: 978-0-494-65605-1

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

Le 13 juillet 2010

*le jury a accepté le mémoire de Monsieur Samir El Mashoubi
dans sa version finale.*

Membres du jury

**Professeur François Dubeau
Directeur de recherche
Département de mathématiques**

**Professeur Maxime Descoteaux
Membre
Département d'informatique**

**Professeur Jean-Marc Belley
Président rapporteur
Département de mathématiques**

À ma mère

SOMMAIRE

La fonction appelée gaussienne généralisée est largement utilisée dans plusieurs domaines. Dans ce mémoire, nous présentons quelques propriétés de la gaussienne généralisée et nous étudions plus spécifiquement sa transformée de Fourier. Nous débutons notre étude de la transformée de Fourier de la gaussienne généralisée en rappelant le calcul pour quelques cas particuliers. Ensuite, nous discutons des cas où le paramètre de forme prend des valeurs entières. Nous distinguons selon la parité du paramètre de forme: le cas où le paramètre de forme est pair et le cas où le paramètre de forme est impair. À la lumière de cette étude nous en concluons que la transformée de Fourier de la gaussienne généralisée peut être obtenue de façon semblable pour toute valeur du paramètre de forme supérieure ou égale à 1. Nous discutons également du cas bidimensionnel pour lequel nous présentons deux façons de définir la gaussienne généralisée et calculons les transformées de Fourier correspondantes. Nous terminons par une application au domaine de la vision par ordinateur.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de maîtrise, M. François Dubeau, pour son soutien tout au long de la réalisation de ce mémoire. J'ai apprécié de travailler sous sa direction, d'autant plus que ceci m'a permis d'approfondir mes connaissances grâce à ses judicieux conseils.

Je remercie ma mère qui m'a toujours encouragé pour les études.

Finalement, j'aimerais remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce mémoire.

Samir El Mashoubi
Sherbrooke, Janvier 2010

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	3
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIÈRES	5
CHAPITRE 1 — Préliminaires mathématiques	11
1.1 Propriétés de la fonction $f_\lambda(x)$.	11
1.2 Propriétés de la T.F. de $f_\lambda(x)$.	13
1.3 Résultat de convergence.	14
1.4 Propriétés de la fonction Gamma.	16
CHAPITRE 2 — Quelques cas particuliers	18
2.1 Cas $\lambda = 1$.	18
2.2 Cas $\lambda = 2$.	19
2.2.1 Première méthode : intégration dans le plan complexe.	19

2.2.2	Seconde méthode : une équation différentielle.	22
2.3	Cas $\lambda = +\infty$	22
2.3.1	Cas $\lambda \rightarrow 0^+$	23
2.4	Figures des cas particuliers.	23
CHAPITRE 3 — Cas à paramètre λ entier		27
3.1	Cas où λ est pair.	27
3.2	Cas où λ est impair.	33
3.2.1	Première équation différentielle.	33
3.2.2	Deuxième équation différentielle.	34
3.2.3	Troisième équation différentielle.	35
CHAPITRE 4 — Cas général à paramètre λ réel strictement positif		39
4.1	Développement de Maclaurin de $\hat{f}_\lambda(\omega)$	40
4.2	Série de Maclaurin et convergence.	41
4.2.1	Convergence de la série de Maclaurin.	41
4.2.2	Limite de la série de Maclaurin.	42
4.3	Retour aux cas particuliers.	44
4.3.1	Cas $\lambda = 1$	44
4.3.2	Cas $\lambda = 2$	44
4.3.3	Cas $\lambda \rightarrow +\infty$	45

4.4	Approximation.	45
4.4.1	Approximation par intégration.	46
4.4.2	Approximation à l'aide de la série de Maclaurin.	47
4.5	Illustration graphique.	50
CHAPITRE 5 — La transformée de Fourier de la gaussienne généralisée en deux dimensions		56
5.1	Formes de la GG en dimension 2.	56
5.2	Cas particulier $\lambda = 2$	57
5.3	Calcul de la transformée de Fourier de $F_\lambda(x_1, x_2)$	58
5.3.1	Illustration graphique.	59
5.4	Calcul de la transformée de Fourier de $G_\lambda(x_1, x_2)$	61
5.4.1	Illustration graphique.	64
5.5	Approximation.	67
5.5.1	Sur le carrée $[-\Omega, \Omega]^2$ pour $F_\lambda(\omega_1, \omega_2)$	67
5.5.2	Dans le disque $D(0; \Omega)$ pour la forme $\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2)$	70
CHAPITRE 6 — Application dans le domaine de la vision par ordinateur		74
6.1	Le voile atmosphérique.	75
6.2	La transformée de Fourier du voile atmosphérique.	75
6.3	La représentation graphique de $\tilde{N}_{\sigma,p}$ et $\hat{N}_{\sigma,p}$	76
6.3.1	Effet de p	77

6.3.2	Effet de σ .	78
6.4	Application.	79
6.4.1	Méthodes de calcul des paramètres atmosphériques.	79
6.4.2	Résultats.	81

INTRODUCTION

Au cours des dernières années la fonction appelée gaussienne généralisée GG a été largement utilisée dans des domaines tels que la vision par ordinateur [27], le traitement d'image [19, 29], le traitement de la voix [32], le traitement du signal [9], etc. La GG a de nombreuses propriétés, par contre sa transformée de Fourier TF a été peu étudiée. Notons que la fonction gaussienne généralisée est aussi connue sous le nom de distribution normale généralisée [30, 45], de distribution de Laplace généralisée [20, 21, 24], de distribution exponentielle généralisée [5], ou de distribution des erreurs généralisées [38]. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application de cette distribution dans divers problèmes de statistique. Par exemple l'estimation des paramètres [2, 11, 23, 28, 41, 43, 44, 46], l'analyse statistique bayésienne [3, 4, 5, 8, 12, 42], et d'autres problèmes [10, 14, 15, 17, 30, 31, 35, 37, 39, 40]. Pour plus d'information concernant cette distribution et ses applications nous pouvons consulter [5, 20, 21, 24].

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés aux propriétés et au calcul de la TF de la GG. Au Chapitre 1, nous établissons les propriétés de la GG ainsi que les résultats d'existence. Nous rappelons également quelques résultats qui seront utiles dans la suite. Au Chapitre 2, nous rappelons les calculs de la TF de quelques cas particuliers de la GG. Au Chapitre 3, nous discutons des cas où le paramètre de forme prend des valeurs entières. Nous distinguons deux cas suivant la parité du paramètre de forme: le cas

où le paramètre de forme est pair et le cas où le paramètre de forme est impair. À la lumière des résultats de ce chapitre nous concluons, au Chapitre 4, que la TF peut être obtenue de façon semblable pour toute valeur de paramètre de forme supérieure ou égale à 1. Au Chapitre 5, nous discutons du cas bidimensionnel. Nous présentons deux façons de définir la GG et calculons les TF correspondantes. Finalement, au Chapitre 6, nous donnons une application au domaine de la vision par ordinateur.

CHAPITRE 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce texte la GG de paramètre λ est définie pour toute valeur de x dans \mathbb{R} par la formule $f_\lambda(x) = e^{-|x|^\lambda}$. La famille de GG que nous étudierons est donnée par :

$$\mathcal{J} = \left\{ f_\lambda(x) = e^{-|x|^\lambda} \mid \lambda > 0 \right\}.$$

Dans ce chapitre nous identifions quelques propriétés des éléments de \mathcal{J} et leurs conséquences sur leur TF. Nous citons également quelques résultats mathématiques que nous allons utiliser par la suite.

1.1 Propriétés de la fonction $f_\lambda(x)$.

La fonction $f_\lambda(x)$ est une fonction paire et continue sur \mathbb{R} . Nous pouvons écrire $f_\lambda(x)$ de la manière suivante

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} e^{-x^\lambda} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ e^{-(-x)^\lambda} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

et nous avons

$$\frac{d}{dx}f_\lambda(x) = \begin{cases} -\lambda x^{\lambda-1}e^{-x^\lambda} = -\lambda|x|^{\lambda-1}e^{-|x|^\lambda} & \text{si } x > 0, \\ \lambda(-x)^{\lambda-1}e^{-(-x)^\lambda} = \lambda|x|^{\lambda-1}e^{-|x|^\lambda} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{d}{dx}f_\lambda(x) = -\lambda \operatorname{sgn}(x) |x|^{\lambda-1} e^{-|x|^\lambda},$$

sauf peut être pour $x = 0$. Ainsi, la dérivée est continue lorsque $\lambda > 1$. La dérivée d'ordre k est donnée par

$$f_\lambda^{(k)}(x) = P_{k-1}(|x|^\lambda) |x|^{\lambda-k} \operatorname{sgn}(x)^k e^{-|x|^\lambda},$$

sauf peut être pour $x = 0$. En effet, pour $k = 1$ nous avons

$$f_\lambda^{(1)}(x) = P_0(|x|^\lambda) |x|^{\lambda-1} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|^\lambda},$$

avec $P_0(|x|^\lambda) = -\lambda$. Supposons que nous ayons pour k l'expression

$$f_\lambda^{(k)}(x) = P_{k-1}(|x|^\lambda) |x|^{\lambda-k} \operatorname{sgn}(x)^k e^{-|x|^\lambda},$$

et montrons le resultat pour $k + 1$. Nous avons

$$f_\lambda^{(k+1)}(x) = P_k(|x|^\lambda) |x|^{\lambda-k-1} \operatorname{sgn}(x)^{k+1} e^{-|x|^\lambda},$$

avec

$$P_k(|x|^\lambda) = (|x|^\lambda + (\lambda - k))P_{k-1}(|x|^\lambda) + \lambda|x|^\lambda P_{k-2}(|x|^\lambda)$$

qui est un polynôme de degré k en $|x|^\lambda$. Comme conséquence de la parité de $f_\lambda(x)$, ses dérivées d'ordre paires sont paires et ses dérivées d'ordre impaires sont impaires.

La fonction $f_\lambda(x) = e^{-|x|^\lambda}$ est non seulement continue mais aussi à décroissance rapide.

En effet pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^p e^{-|x|^\lambda}| &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^{x^\lambda}} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^{\frac{p}{\lambda}}}{e^\xi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Définition 1.1 [26] Soit Ω un ouvert de (\mathbb{R}) et $1 \leq p < +\infty$.

(i) $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions f définies sur Ω , à un ensemble négligeable près, telles que $\int_{\Omega} |f(x)|^p < +\infty$.

(ii) $L^p_{loc}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$ \square

En utilisant la proposition suivante on en déduit, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x^p f_{\lambda}(x)$ est un élément de $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 1.2 [18] Si $f(x)$ est une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x^p f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ \square

En fait pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x^p f(x)$ appartient à $L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \geq 1$.

1.2 Propriétés de la T.F. de $f_{\lambda}(x)$.

Dans ce texte la transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ est définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\omega x} dx. \quad (1.1)$$

Nous utiliserons le résultat suivant.

Proposition 1.3 [18] Si $f(x)$ est une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide alors $\hat{f}(\omega)$ est indéfiniment dérivable et ses dérivées d'ordre $p = 1, 2, 3, \dots$, sont données par

$$\hat{f}^{(p)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2i\pi x)^p e^{-2i\pi\omega x} dx \quad \square$$

Nous avons

$$\hat{f}_{\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda}(x)e^{-2i\pi\omega x} dx, \quad (1.2)$$

et en vertu des Propositions 1.1 et 1.2 on en déduit que $\widehat{f}_\lambda(\omega)$ est indéfiniment dérivable avec

$$\widehat{f}_\lambda^{(p)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x) (-2i\pi x)^p e^{-2i\pi\omega x} dx \quad (1.3)$$

et

$$\widehat{f}_\lambda^{(p)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x) (-2i\pi x)^p dx.$$

Par conséquent

$$\widehat{f}_\lambda^{(p)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \\ \frac{2(-2i\pi)^p}{\lambda} \Gamma\left(\frac{p+1}{\lambda}\right) & \text{si } p \text{ est pair,} \end{cases}$$

où nous avons utilisé la fonction $\Gamma(\cdot)$ pour tout $\lambda > 0$

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\lambda-1} dx. \quad (1.4)$$

Comme $f_\lambda(\cdot)$ est paire on en déduit que $\widehat{f}_\lambda(\cdot)$ est à valeurs réelles. De plus $\widehat{f}_\lambda(-\omega) = \overline{\widehat{f}_\lambda(\omega)} = \widehat{f}_\lambda(\omega)$ et $\widehat{f}_\lambda(\cdot)$ est une fonction paire. On a

$$\widehat{f}_\lambda^{(p)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi\omega x)^p f_\lambda(x) e^{-2i\pi\omega x} dx \quad (1.5)$$

$$= \begin{cases} 2(-1)^{(p+1)/2} (2\pi\omega)^p \int_0^{+\infty} x^p f_\lambda(x) \sin(2\pi\omega x) dx & \text{si } p \text{ impair,} \\ 2(-1)^{p/2} (2\pi\omega)^p \int_0^{+\infty} x^p f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx & \text{si } p \text{ pair.} \end{cases} \quad (1.6)$$

1.3 Résultat de convergence.

Avant de donner un résultat de convergence de série que nous utiliserons dans la suite, nous introduisons la notion de fonction à croissance lente.

Définition 1.4 [16] *Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est une fonction à croissance lente si il existe un réel $c > 0$ et un entier N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leq c(1+x^2)^N$ \square*

Si $g(x)$ est une fonction à croissance lente alors

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)g(x)dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B f_\lambda(x)g(x)dx.$$

Supposons qu'on puisse développer $g(x)$ en série entière, c'est-à-dire $g(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j x^j$, et que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (son rayon de convergence est $+\infty$). Alors la convergence uniforme de la série sur $[0, B]$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^B f_\lambda(x)g(x)dx &= \int_0^B f_\lambda(x) \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j x^j dx \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \int_0^B f_\lambda(x)x^j dx. \end{aligned}$$

En observant que $\int_0^B f_\lambda(x)x^j dx$ est croissant avec B , il suit que

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B f_\lambda(x)x^j dx = \int_0^{+\infty} x^j e^{-x^\lambda} dx = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{j+1}{\lambda}\right).$$

De plus, si la série $\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{j+1}{\lambda}\right)$ est absolument convergente, nous aurons alors

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \int_0^B f_\lambda(x)x^j dx - \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)x^j dx \right| \leq \\ &\left| \sum_{j=0}^{J_\epsilon} \beta_j \int_0^B f_\lambda(x)x^j dx - \sum_{j=0}^{J_\epsilon} \beta_j \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)x^j dx \right| + 2 \sum_{j=J_\epsilon+1}^{+\infty} |\beta_j| \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)x^j dx. \end{aligned}$$

En choisissant J_ϵ tel que $\sum_{j=J_\epsilon+1}^{+\infty} |\beta_j| \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)x^j < \epsilon$ et en faisant tendre B vers $+\infty$, nous obtenons

$$\left| \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)g(x) - \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)x^j dx \right| < 2\epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire nous avons

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)g(x)dx = \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)x^j dx.$$

Nous appliquerons ce résultat avec les deux fonctions à croissance lente (en fait même bornées) $\sin(2\pi\omega x)$ et $\cos(2\pi\omega x)$. Notons que ce résultat est un cas particulier du théorème suivant (Théorème de Fubini pour les séries).

Théorème 1.5 [26] *Si $\{F_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$*

(1) *est une suite de fonctions mesurables définies presque partout (p.p.), et*

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |F_n(x)| dx < +\infty$,

alors

(a) *la série $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x)$ converge presque partout (p.p.), et*

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x) dx \quad \square$

1.4 Propriétés de la fonction Gamma.

Nous présentons quelques propriétés de la fonction Gamma qui nous seront utiles dans la suite de ce travail. Premièrement on obtient facilement pour $\lambda > 0$ que

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda\Gamma(\lambda). \quad (1.7)$$

Ensuite pour $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ en faisant un changement de variables en posant $t = x^\alpha$ nous avons

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha} x^\beta dx \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta/\alpha} t^{1-\frac{1}{\alpha}} dt = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right). \quad (1.8)$$

Nous utilisons les résultats asymptotiques suivants.

Proposition 1.6 [1] *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|\arg z| < \pi$ et $a > 0$, alors*

$$\Gamma(az + b) = \sqrt{2\pi} e^{-az} (az)^{az+b-\frac{1}{2}} \left(1 + o\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

avec

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \quad \square$$

Proposition 1.7 [1] *Soit $z \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{z \rightarrow 0^+} z\Gamma(z) = 1$ \square*

Proposition 1.8 [1] *Soit $\lambda > 0$, alors $\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})$ \square*

Cette propriété étant connue sous le nom de formule de duplication.

CHAPITRE 2

Quelques cas particuliers

Dans ce chapitre nous présentons les cas pour lesquels la transformée de Fourier de $f_\lambda(x)$ s'exprime sous forme simple sans l'aide d'une série. Ces cas se présentent pour les valeurs du paramètre $\lambda = 1, 2$ et $+\infty$.

2.1 Cas $\lambda = 1$.

Pour $\lambda = 1$ nous avons $f_1(x) = e^{-|x|}$ et sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-2i\pi x\omega} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{x(1-2i\pi\omega)} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+2i\pi\omega)} dx \\ &= \left[\frac{e^{x(1-2i\pi\omega)}}{1-2i\pi\omega} \right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{e^{-x(1+2i\pi\omega)}}{1+2i\pi\omega} \right]_{x=0}^{x=+\infty} \\ &= \frac{1}{1-2i\pi\omega} + \frac{1}{1+2i\pi\omega} \\ &= \frac{2}{1+(2\pi\omega)^2}.\end{aligned}$$

2.2 Cas $\lambda = 2$.

Pour $\lambda = 2$, nous calculons la transformée de Fourier selon deux méthodes. La première méthode utilise l'intégration dans le plan complexe tandis que la seconde méthode est basée sur une équation différentielle.

2.2.1 Première méthode : intégration dans le plan complexe.

La transformée de Fourier $\hat{f}_2(\omega)$ est définie par

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|^2} e^{-2i\pi x\omega} dx \\ &= e^{-(\pi\omega)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\pi\omega)^2} dx.\end{aligned}$$

Nous utilisons alors le Théorème de Cauchy suivant.

Théorème 2.1 [33] *Si $f(z)$ est une fonction analytique dans un domaine \mathcal{D} simplement connexe alors pour toute courbe fermée \mathcal{C} dans \mathcal{D} on a*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \quad \square$$

Ce théorème appliqué à l'intégrale définissant $\hat{f}_2(\omega)$ suivant le contour de la Figure 2.1 nous donne la démonstration suivante [33]. Nous avons

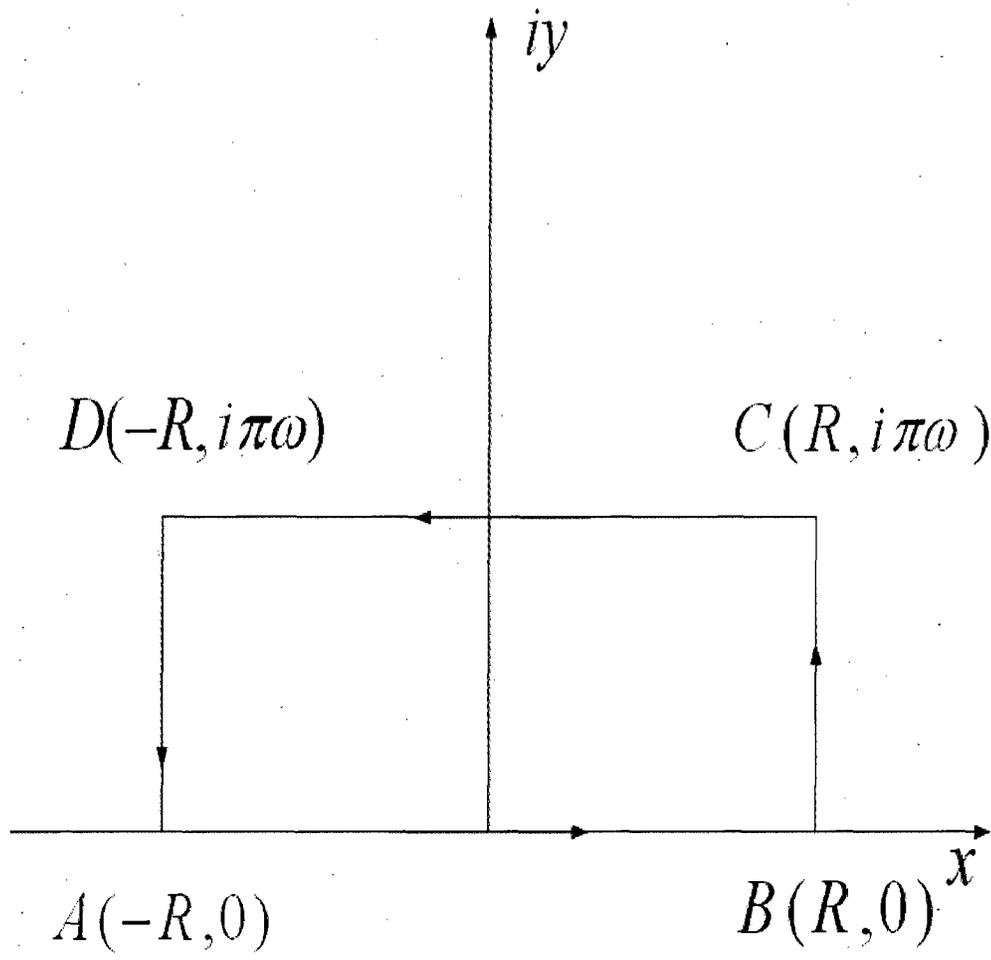


Figure 2.1: Le domaine d'intégration.

Ici la fonction $f(z) = e^{-z^2}$ est analytique dans \mathbb{C} . En utilisant le contour \mathcal{C} de la Figure 2.1 nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \oint e^{-z^2} dz \\ &= \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi\omega} e^{-(R+iy)^2} dy \\ &\quad + \int_{+R}^{-R} e^{-(x+i\pi\omega)^2} dx + \int_{\pi\omega}^0 e^{-(-R+iy)^2} dy. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi\omega} e^{-(R+iy)^2} dy + \int_{\pi\omega}^0 e^{-(-R+iy)^2} dy &= \int_0^{\pi\omega} e^{-R^2+y^2-2iRy} dy + \int_{\pi\omega}^0 e^{-R^2+y^2+2iRy} dy \\ &= \int_0^{\pi\omega} e^{-(R^2-y^2)} [e^{-2iRy} - e^{2iRy}] dy \\ &= -2i \int_0^{\pi\omega} e^{-(R^2-y^2)} \sin(2Ry) dy, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| -2i \int_0^{\pi\omega} e^{-(R^2-y^2)} \sin(2Ry) dy \right| &\leq 2 \int_0^{\pi\omega} e^{-(R^2-y^2)} dy \\ &= 2\pi\omega e^{-(R^2-(\pi\omega)^2)}. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi\omega e^{-(R^2-(\pi\omega)^2)} = 0.$$

Donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\pi\omega} e^{-(R+iy)^2} dy - \int_0^{\pi\omega} e^{-(-R+iy)^2} dy \right) = 0,$$

d'où

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-(x+i\pi\omega)^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

et ainsi

$$\widehat{f}_2(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-(\pi\omega)^2}.$$

2.2.2 Seconde méthode : une équation différentielle.

Nous remarquons que la fonction $f_2(x) = e^{-x^2}$ est solution de l'équation différentielle

$$f_2^{(1)}(x) = -2xf_2(x). \quad (2.1)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de (2.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \widehat{f_2^{(1)}}(\omega) &= -2 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-2i\pi\omega x} dx \\ &= [e^{-x^2} e^{-2i\pi\omega x}]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + 2i\pi\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2i\pi\omega x} dx \\ &= 2i\pi\omega \widehat{f_2}(\omega) \end{aligned}$$

et alors

$$\widehat{f_2^{(1)}}(\omega) = -2\pi^2\omega \widehat{f_2}(\omega).$$

Cette équation différentielle a pour solution

$$\widehat{f_2}(\omega) = ce^{-(\omega\pi)^2}$$

avec

$$c = \widehat{f_2}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

d'où le résultat.

2.3 Cas $\lambda = +\infty$.

Dans ce cas posons

$$f_{+\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1, \\ e^{-1} & \text{si } |x| = 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}_{+\infty}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{+\infty}(x) e^{-2i\pi\omega x} dx \\
 &= \int_{-1}^{+1} e^{-2i\pi\omega x} dx \\
 &= \left[\frac{e^{-2i\pi\omega x}}{-2i\pi\omega} \right]_{x=-1}^{x=+1} \\
 &= \frac{e^{-2i\pi\omega} - e^{2i\pi\omega}}{-2i\pi\omega} \\
 &= \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega} \\
 &= 2 \operatorname{sinc}(2\pi\omega).
 \end{aligned}$$

2.3.1 Cas $\lambda \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ e^{-1} & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

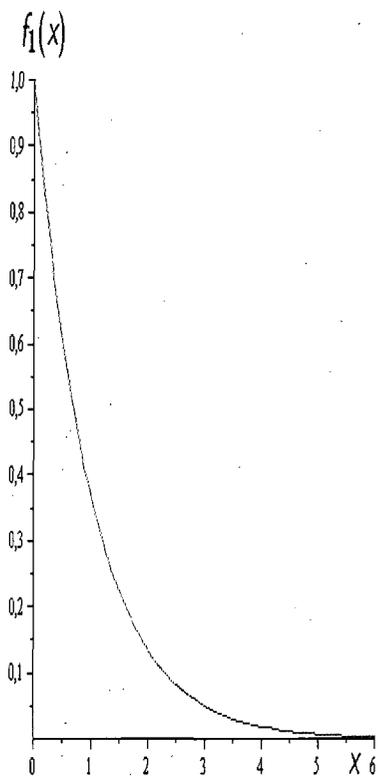
on en déduit que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \widehat{f}_\lambda(\omega) = e^{-1} \delta(\omega),$$

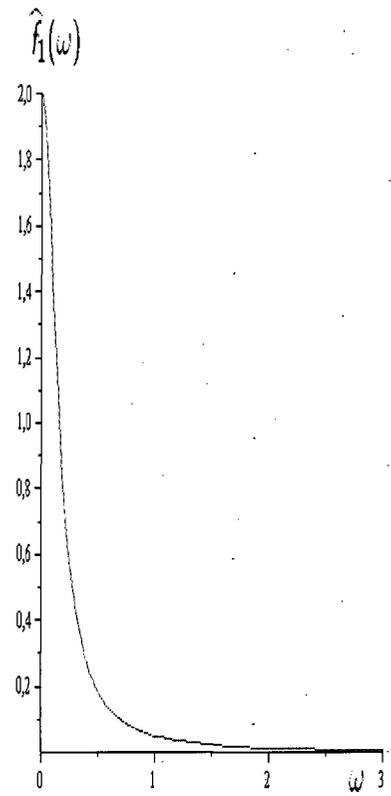
où la convergence est au sens des distributions.

2.4 Figures des cas particuliers.

Dans cette section nous donnons les graphes de $f_\lambda(x)$ et de $\widehat{f}_\lambda(\omega)$ pour les cas particuliers. Comme les graphes sont symétriques par rapport à l'axe des y, nous ne donnons les graphes que pour $x \geq 0$ et $\omega \geq 0$.

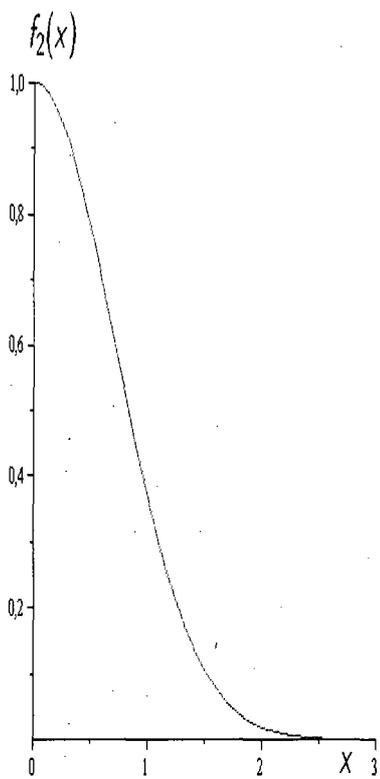


(a)

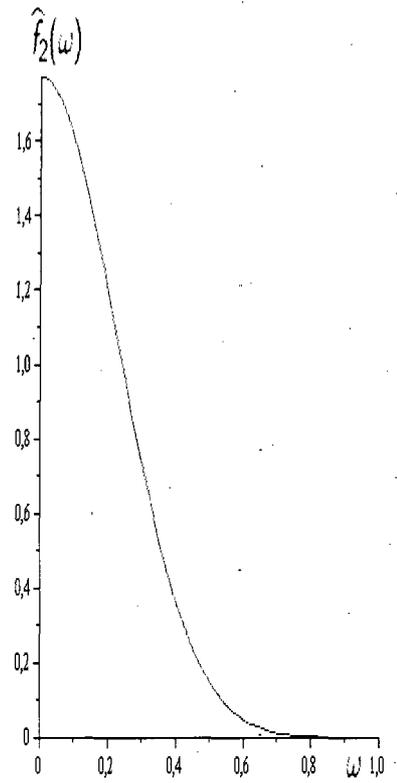


(b)

Figure 2.2: Graphes de (a) $f_1(x)$ et (b) $\hat{f}_1(\omega)$.

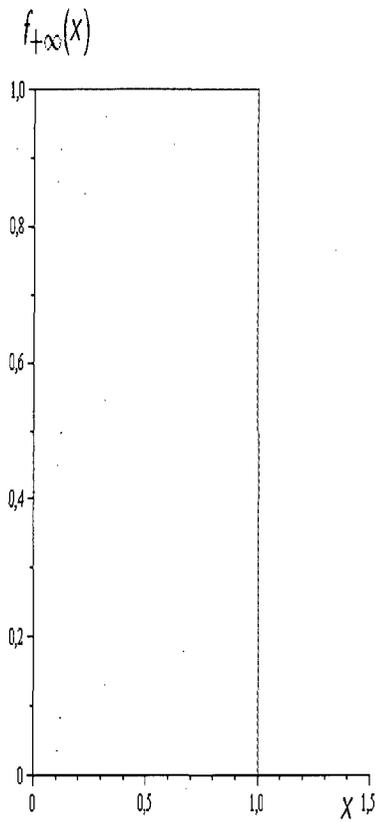


(a)

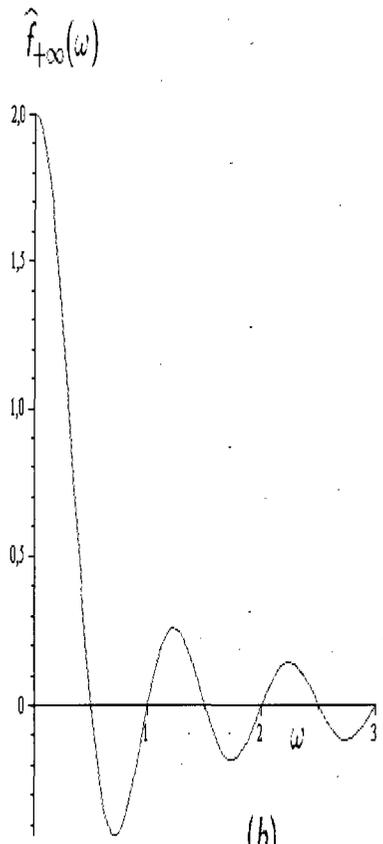


(b)

Figure 2.3: Graphes de (a) $f_2(x)$ et (b) $\hat{f}_2(\omega)$.



(a)



(b)

Figure 2.4: Graphes de (a) $f_{+\infty}(x)$ et (b) $\hat{f}_{+\infty}(\omega)$.

CHAPITRE 3

Cas à paramètre λ entier

Lorsque le paramètre λ est entier, il est possible d'obtenir la transformée de Fourier de $f_\lambda(x)$ comme solution d'une équation différentielle ordinaire semblable au cas $\lambda = 2$ du Chapitre 2. Nous distinguons deux cas. premièrement le cas où λ est pair, dans ce premier cas nous déterminons la solution d'une équation différentielle par la méthode de Frobenius [6]. Ensuite le cas où λ est impair, dans ce deuxième cas nous utilisons une représentation sous forme d'intégrale, un développement en série de Maclaurin et le Théorème de Fubini (Théorème 1.4).

3.1 Cas où λ est pair.

Posons dans ce cas $\lambda = 2l$ avec $l \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$f_{2l}^{(1)}(x) = -2lx^{2l-1}f_{2l}(x) \quad (3.1)$$

et en prenant la transformée de Fourier des deux cotés de (3.1) nous obtenons

$$2i\pi\omega\widehat{f}_{2l}(\omega) = \frac{-2l}{(-2i\pi)^{2l-1}}\widetilde{f}_{2l}^{(2l-1)}(\omega), \quad (3.2)$$

d'où

$$\widehat{f}_{2l}^{(2l-1)}(\omega) = (-1)^l \frac{(2\pi)^{2l}}{2l} \omega \widehat{f}_{2l}(\omega). \quad (3.3)$$

L'équation différentielle (3.3) se résoud par la méthode des séries. Rappelons une définition et un résultat concernant cette méthode.

Définition 3.1 [6] *Un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point ordinaire de l'équation différentielle à coefficients $b_i(x)$ polynomiaux suivante*

$$\sum_{i=0}^n b_i(x) y^{(n-i)}(x) = R(x), \quad (3.4)$$

lorsque $b_0(x_0) \neq 0$ \square

Théorème 3.2 [6] *Si x_0 est un point ordinaire de l'équation différentielle ordinaire à coefficients polynomiaux (3.4) alors il existe une série*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

qui est solution de (3.4) telle que

- (1) les constantes d'intégration a_i , $i = 0, 1, \dots, n - 1$, sont arbitraires, et
- (2) son rayon de convergence est non nul \square

Posons

$$\widehat{f}_{2l}(\omega) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \omega^p. \quad (3.5)$$

Ainsi

$$\widehat{f}_{2l}^{(2l-1)}(\omega) = \sum_{p=2l-1}^{+\infty} a_p \frac{p!}{(p - (2l - 1))!} \omega^{p-(2l-1)}, \quad (3.6)$$

et en substituant dans (3.3), nous obtenons

$$\sum_{p=2l-1}^{+\infty} a_p \frac{p!}{(p - (2l - 1))!} \omega^{p-(2l-1)} = (-1)^l \frac{(2\pi)^{2l}}{2l} \omega \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \omega^p. \quad (3.7)$$

En changeant l'indice de sommation, $q = p - (2l - 1)$, nous avons

$$\sum_{q=0}^{+\infty} a_{q+2l-1} \frac{(q + (2l - 1))!}{q!} \omega^q = (-1)^l \frac{(2\pi)^{2l}}{2l} \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \omega^{p+1}, \quad (3.8)$$

et alors

$$a_{2l-1}(2l - 1)! + \sum_{p=0}^{+\infty} [a_{p+2l} \frac{(p + 2l)!}{(p + 1)!} - (-1)^l a_p \frac{(2\pi)^{2l}}{2l}] \omega^{p+1} = 0. \quad (3.9)$$

Ainsi $a_{2l-1} = 0$ et pour $p = 0, 1, 2, \dots$ nous avons

$$a_{p+2l} = a_p \frac{(p + 1)!}{(p + 2l)!} (-1)^l \frac{(2\pi)^{2l}}{2l}. \quad (3.10)$$

En utilisant

$$\widehat{f}_{2l}^{(p)}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \\ \frac{1}{l} (-2i\pi)^p \Gamma\left(\frac{p+1}{2l}\right) & \text{si } p \text{ est pair,} \end{cases}$$

et en remplaçant p par $2p$, nous avons

$$\widehat{f}_{2l}^{(2p)}(0) = (-1)^p \frac{(2\pi)^{2p}}{l} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l}\right). \quad (3.11)$$

pour $p = 0, 1, \dots, l - 1$. Alors

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p)!} \widehat{f}_{2l}^{(2p)}(0) = (-1)^p \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!} \frac{1}{l} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l}\right),$$

et

$$a_{2p+1} = 0,$$

pour $p = 0, 1, \dots, l - 1$. Par induction, si on suppose que

$$a_{2p+2kl} = (-1)^{p+kl} \frac{(2\pi)^{2p+2kl}}{(2p+2kl)!} \frac{1}{l} \Gamma\left(\frac{2p+2kl+1}{2l}\right), \quad (3.12)$$

ce qui est vrai pour $k = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
a_{2p+2(k+l)} &= a_{2p+(2kl+2l)} \\
&= a_{(2p+2kl)} \frac{(2p+2kl+1)!}{(2p+2(k+1)l)!} (-1)^l \frac{(2\pi)^{2l}}{2l} \\
&= (-1)^{p+(k+1)l} \frac{(2\pi)^{2p+2(k+1)l}}{(2p+2(k+1)l)!} \frac{1}{l} \frac{(2p+2kl+1)}{2l} \Gamma\left(\frac{2p+2kl+1}{2l}\right) \\
&= (-1)^{p+(k+1)l} \frac{(2\pi)^{2p+2(k+1)l}}{(2p+2(k+1)l)!} \frac{1}{l} \Gamma\left(\frac{2p+2(k+1)l+1}{2l}\right).
\end{aligned}$$

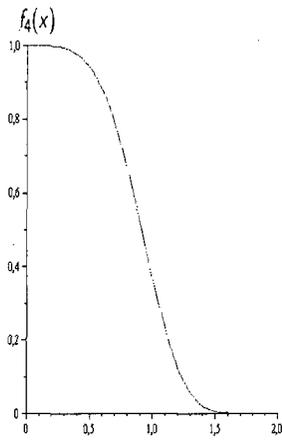
Nous en concluons que

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p (2\pi)^{2p}}{l (2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l}\right)$$

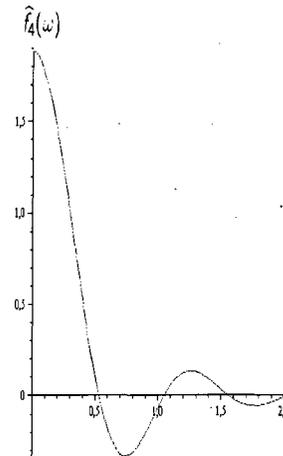
pour $p = 0, 1, 2, \dots$, et

$$\widehat{f}_{2l}(\omega) = \frac{1}{l} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l}\right) \omega^{2p}.$$

Les Figures 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 présentent quelques graphes des fonctions $f_{2l}(x)$ et $\widehat{f}_{2l}(\omega)$.

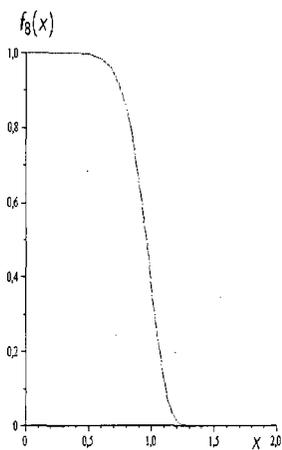


(a)

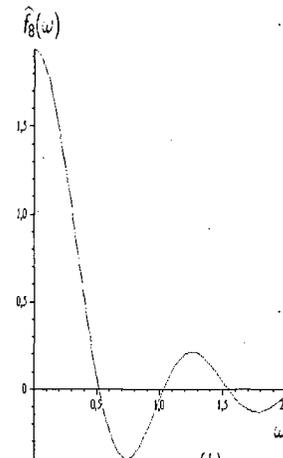


(b)

Figure 3.1: Graphes de (a) $f_4(x)$ et (b) $\hat{f}_4(\omega)$.

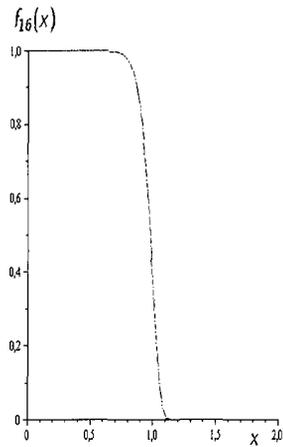


(a)

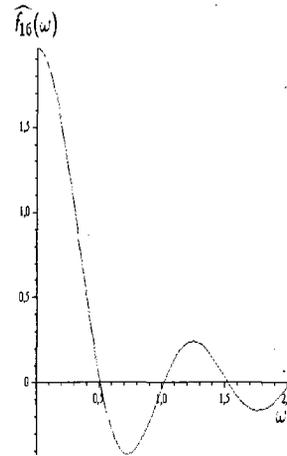


(b)

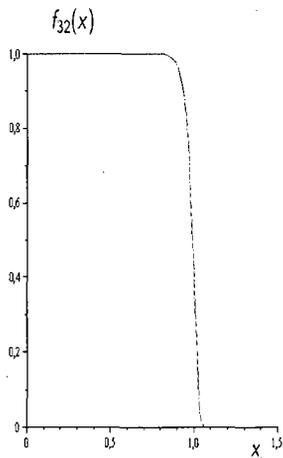
Figure 3.2: Graphes de (a) $f_8(x)$ et (b) $\hat{f}_8(\omega)$.



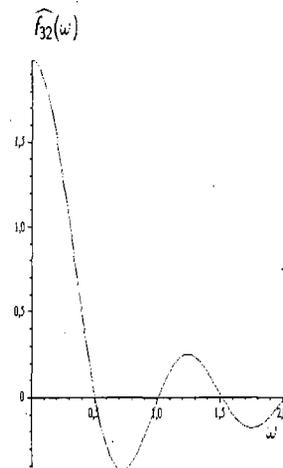
(a)



(b)

Figure 3.3: Graphes de (a) $f_{16}(x)$ et (b) $\hat{f}_{16}(\omega)$.

(a)



(b)

Figure 3.4: Graphes de (a) $f_{32}(x)$ et (b) $\hat{f}_{32}(\omega)$.

3.2 Cas où λ est impair.

Nous avons déjà obtenu une formule pour $\lambda = 1$. Posons alors $\lambda = 2l + 1$ avec $l \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, nous avons

$$f_{2l+1}^{(1)}(x) = -(2l + 1)\text{sgn}(x)x^{2l}f_{2l+1}(x). \quad (3.13)$$

Nous obtiendrons 3 équations différentielles équivalentes que nous allons résoudre par simple intégration successive pour obtenir $\widehat{f}_{2l+1}(\omega)$.

3.2.1 Première équation différentielle.

Prenons la transformée de Fourier des deux membres de (3.13), nous obtenons

$$2i\pi\omega\widehat{f}_{2l+1}(\omega) = -(2l + 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(x)x^{2l}f_{2l+1}(x)e^{-2i\pi\omega x} dx, \quad (3.14)$$

ce qui donne au sens des distributions [22]

$$2i\pi\omega\widehat{f}_{2l+1}(\omega) = \frac{-(2l + 1)}{(-2i\pi)^{2l}} \widehat{\text{sgn}}(\omega) * \widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega). \quad (3.15)$$

En utilisant la distribution valeur principale noté $\text{VP}(\cdot)$ (voir [16]), nous avons

$$\widehat{\text{sgn}}(\omega) = \frac{1}{i\pi} \text{VP}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Alors

$$\text{VP}\left(\frac{1}{\omega}\right) * \widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega) = -\frac{(2i\pi)^{2l+2}}{2(2l + 1)} \omega \widehat{f}_{2l+1}(\omega).$$

Pour résoudre cette équation, utilisons (3.14) pour obtenir

$$2i\pi\omega\widehat{f}_{2l+1}(\omega) = 2(2l + 1)i \int_0^{+\infty} x^{2l}e^{-x^{2l+1}} \sin(2\pi\omega x) dx. \quad (3.16)$$

En développant la fonction $\sin(2\pi\omega x)$ en série et en appliquant le Théorème de Fubini (Théorème 1.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
2i\pi\omega\widehat{f}_{2l+1}(\omega) &= 2(2l+1)i \int_0^{+\infty} x^{2l} e^{-x^{2l+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega x)^{2j+1}}{(2j+1)!} dx \\
&= 2(2l+1)i \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega)^{2j+1}}{(2j+1)!} \int_0^{+\infty} x^{2l+2j+1} e^{-x^{2l+1}} dx \\
&= 2i \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega)^{2j+1}}{(2j+1)!} \Gamma\left(\frac{2l+2j+2}{2l+1}\right),
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\widehat{f}_{2l+1}(\omega) = \frac{2}{2l+1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega)^{2j}}{(2j)!} \Gamma\left(\frac{2j+1}{2l+1}\right). \quad (3.17)$$

3.2.2 Deuxième équation différentielle.

Multiplions (3.13) par $\text{sgn}(x)$ pour obtenir

$$\text{sgn}(x) f_{2l+1}^{(1)}(x) = -(2l+1)x^{2l} f_{2l+1}(x). \quad (3.18)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de (3.18) nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(x) f_{2l+1}^{(1)}(x) e^{-2i\pi\omega x} dx = -\frac{2l+1}{(-2i\pi)^{2l}} \widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega), \quad (3.19)$$

d'où

$$\widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega) = -\frac{2}{2l+1} (2i\pi)^{2l} \text{VP} \left(\frac{1}{\omega} \right) * \omega \widehat{f}_{2l+1}(\omega).$$

Résolvons cette identité en utilisant (3.19) et (3.13). Nous avons

$$\widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega) = 2(2i\pi)^{2l} \int_0^{+\infty} x^{2l} e^{-x^{2l+1}} \cos(2\pi\omega x) dx. \quad (3.20)$$

En utilisant le développement de Maclaurin de $\cos(2\pi\omega x)$ et en appliquant le Théorème de Fubini (Théorème 1.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega) &= 2(-1)^l(2\pi)^{2l} \int_0^{+\infty} x^{2l} e^{-x^{2l+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega x)^{2j}}{(2j)!} dx \\ &= 2(-1)^l(2\pi)^{2l} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega)^{2j}}{(2j)!} \int_0^{+\infty} x^{2l+2j} e^{-x^{2l+1}} dx \\ &= 2(-1)^l(2\pi)^{2l} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega)^{2j}}{(2j)!} \frac{1}{2l+1} \Gamma\left(\frac{2l+2j+1}{2l+1}\right).\end{aligned}$$

En intégrant alors successivement, il suit que

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{2l+1}(\omega) &= \sum_{p=0}^{2l-1} \frac{\widehat{f}_{2l+1}^{(p)}(0)}{p!} \omega^p + \frac{2}{2l+1} (2i\pi)^{2p} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (2\pi)^{2p} \frac{\omega^{2p+2l}}{(2p+2l)!} \Gamma\left(\frac{2p+2l+1}{2l+1}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{2l-1} \frac{\widehat{f}_{2l+1}^{(p)}(0)}{p!} \omega^p + \frac{2}{2l+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+l} \frac{(2\pi)^{2p+2l}}{(2p+2l)!} \Gamma\left(\frac{2p+2l+1}{2l+1}\right) \omega^{2p+2l}.\end{aligned}$$

En utilisant les $2l-1$ premières dérivées de $\widehat{f}_{2l+1}(\omega)$ en $\omega=0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{2l+1}(\omega) &= \sum_{p=0}^{2l-1} \frac{\widehat{f}_{2l+1}^{(p)}(0)}{(2p)!} \omega^{2p} + \frac{2}{2l+1} \sum_{p=l}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l+1}\right) \omega^{2p} \\ &= \frac{2}{2l+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l+1}\right).\end{aligned}$$

3.2.3 Troisième équation différentielle.

Prenons (3.19) et intégrons par partie pour obtenir

$$\widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega) = 2 \frac{(2i\pi)^{2l}}{2l+1} \left[1 - i\pi\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x) f_{2l+1}(x) e^{-2i\pi\omega x} dx \right], \quad (3.21)$$

d'où

$$\widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega) = 2 \frac{(2i\pi)^{2l}}{2l+1} \left[1 - \omega \left(\operatorname{VP} \left(\frac{1}{\omega} \right) * \widehat{f}_{2l+1}(\omega) \right) \right].$$

Résolvons en réécrivant (3.21) comme suit

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_{2l+1}^{(2l)}(\omega) &= 2 \frac{(2i\pi)^{2l}}{2l+1} \left[1 - 2\pi\omega \int_0^{+\infty} e^{-x^{2l+1}} \sin(2\pi\omega x) dx \right] \\
&= 2 \frac{(2i\pi)^{2l}}{2l+1} \left[1 - 2\pi\omega \int_0^{+\infty} e^{-x^{2l+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega x)^{2j+1}}{(2j+1)!} dx \right] \\
&= 2 \frac{(2i\pi)^{2l}}{2l+1} \left[1 - 2\pi\omega \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2\pi\omega)^{2j+1}}{(2j+1)!} \int_0^{+\infty} x^{2j+1} e^{-x^{2l+1}} dx \right] \\
&= 2 \frac{(2i\pi)^{2l}}{2l+1} \left[1 + \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{j+1} \frac{(2\pi\omega)^{2j+2}}{(2j+1)!} \frac{1}{2j+1} \Gamma\left(\frac{2j+2}{2l+1}\right) \right] \\
&= \frac{2}{2l+1} \left[(-1)^l (2\pi)^{2l} + \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{l+j+1} \frac{(2\pi)^{2l+2j+2}}{(2j+2)!} \omega^{2j} \Gamma\left(\frac{2j+2}{2l+1} + 1\right) \right] \\
&= \frac{2}{2l+1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{l+j} \frac{(2\pi)^{2l+2j}}{(2j)!} \omega^{2j} \Gamma\left(\frac{2j+2l+1}{2l+1}\right).
\end{aligned}$$

En intégrant, nous obtenons

$$\widehat{f}_{2l+1}(\omega) = \sum_{p=0}^{2l-1} \frac{\widehat{f}_{2l+1}^{(p)}(0)}{(p)!} \omega^p + \frac{2}{2l+1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{l+j} \frac{(2\pi)^{2l+2j}}{(2j+2)!} \omega^{2j+2l} \Gamma\left(\frac{2j+2l+1}{2l+1}\right),$$

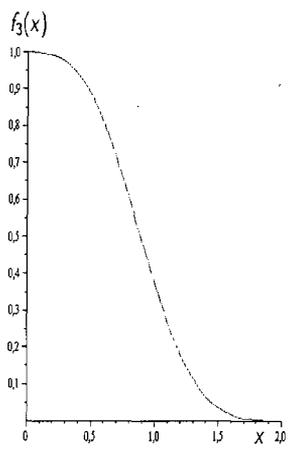
d'où

$$\widehat{f}_{2l+1}(\omega) = \sum_{p=0}^{l-1} \frac{\widehat{f}_{2l+1}^{(2p)}(0)}{(2p)!} \omega^{2p} + \frac{2}{2l+1} \sum_{p=l}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!} \omega^{2p} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l+1}\right).$$

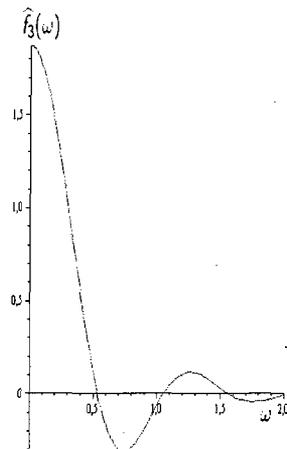
Nous utilisons les dérivées de $\widehat{f}_{2l+1}(\omega)$ en $\omega = 0$ pour obtenir

$$\widehat{f}_{2l+1}(\omega) = \frac{2}{2l+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2l+1}\right).$$

Les Figures 3.5, 3.6, 3.7, et 3.8 présentent quelques graphes de fonction $f_{2l+1}(x)$ et $\widehat{f}_{2l+1}(\omega)$.

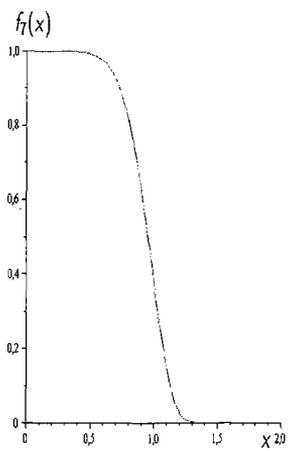


(a)

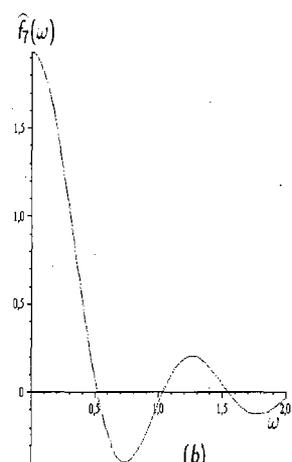


(b)

Figure 3.5: Graphes de (a) $f_3(x)$ et (b) $\hat{f}_3(\omega)$.



(a)



(b)

Figure 3.6: Graphes de (a) $f_7(x)$ et (b) $\hat{f}_7(\omega)$.

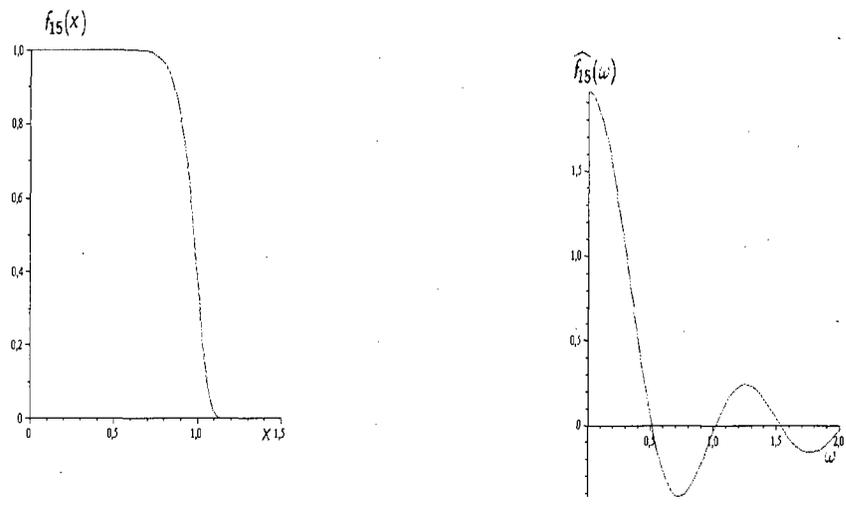


Figure 3.7: Graphes de (a) $f_{15}(x)$ et (b) $\hat{f}_{15}(\omega)$.

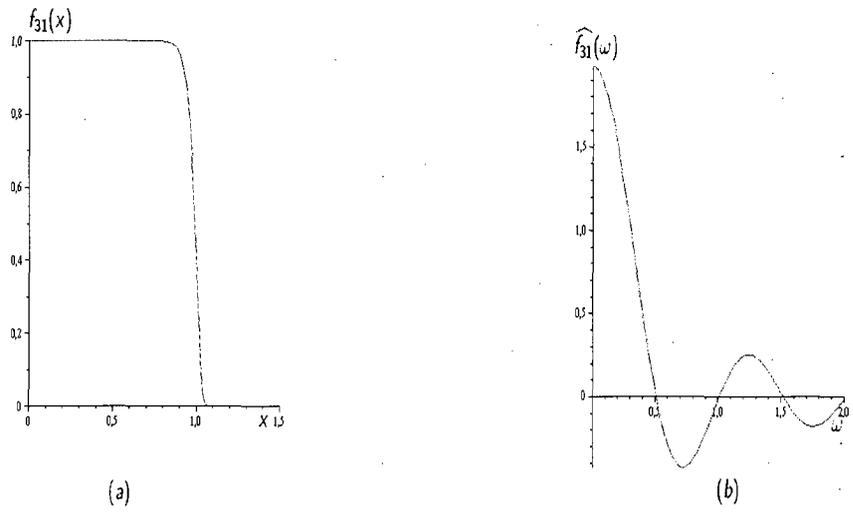


Figure 3.8: Graphes de (a) $f_{31}(x)$ et (b) $\hat{f}_{31}(\omega)$.

CHAPITRE 4

Cas général à paramètre λ réel strictement positif

Dans ce chapitre, nous traitons le problème pour le cas où la constante de forme λ est réel et strictement positive. D'après le chapitre 3, il suit que la technique utilisant un développement de Maclaurin est adéquate pour le cas $\lambda \in [1, +\infty)$. Nous exprimons la transformée de Fourier de $f_\lambda(x)$ à l'aide de son développement de Maclaurin et nous étudions son comportement. Ensuite, nous donnons des approximations de $\hat{f}_\lambda(\omega)$ sur tout intervalle de la forme $[-\Omega, \Omega]$. Pour les $\lambda \in (0, 1)$, la technique précitée ne fonctionne pas et nous conservons le T.F. sous forme d'intégrale.

4.1 Développement de Maclaurin de $\hat{f}_\lambda(\omega)$.

Nous avons déjà remarqué que $\hat{f}_\lambda(\omega)$ est indéfiniment dérivable, ainsi nous pouvons lui associer son développement de Maclaurin de tout ordre

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = \sum_{p=0}^{L-1} \frac{\hat{f}_\lambda^{(p)}(0)\omega^p}{p!} + R_L(\omega), \quad (4.1)$$

où $R_L(\omega)$ est le reste de la série donné par

$$R_L(\omega) = \frac{\hat{f}_\lambda^{(L)}(\xi)}{L!} \omega^L. \quad (4.2)$$

Comme

$$\hat{f}_\lambda^{(l)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi x)^l e^{-|x|^\lambda} e^{-2i\pi x\omega} dx \quad (4.3)$$

entraîne

$$|\hat{f}_\lambda^{(l)}(\omega)| \leq 2 \int_0^{+\infty} (2\pi)^l x^l e^{-x^\lambda} dx = \frac{2}{\lambda} (2\pi)^l \Gamma\left(\frac{l+1}{\lambda}\right), \quad (4.4)$$

et

$$\hat{f}_\lambda^{(l)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est impair,} \\ \frac{2}{\lambda} (2i\pi)^l \Gamma\left(\frac{l+1}{\lambda}\right) & \text{si } l \text{ est pair,} \end{cases}$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \hat{f}_\lambda(\omega) &= \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\hat{f}_\lambda^{(2p)}(0)}{(2p)!} \omega^{2p} + R_{2P}(\omega) \\ &= \frac{2}{\lambda} \sum_{p=0}^{P-1} (-1)^p \frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)}{(2p)!} (2\pi\omega)^{2p} + R_{2P}(\omega) \end{aligned}$$

avec

$$R_{2P}(\omega) = \frac{\hat{f}_\lambda^{(2P)}(\xi)}{(2P)!} \omega^{2P} \quad (4.5)$$

et

$$|R_{2P}(\omega)| \leq \frac{2}{\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{2P+1}{\lambda}\right)}{(2P)!} (2\pi\omega)^{2P}. \quad (4.6)$$

4.2 Série de Maclaurin et convergence.

4.2.1 Convergence de la série de Maclaurin.

Nous considérons la série de Maclaurin

$$S_\lambda(\omega) = \frac{2}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)}{(2p)!} (2\pi\omega)^{2p}, \quad (4.7)$$

étudions sa convergence. Utilisons le test d'Alambert et posons

$$A_p = (-1)^p \frac{2}{\lambda} \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right).$$

Ainsi nous avons

$$\left| \frac{A_p}{A_{p+1}} \right| = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2\pi)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+3}{\lambda}\right)}.$$

Mais d'après la formule asymptotique de la Proposition 1.5, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_p}{A_{p+1}} \right| &= \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2\pi)^2} \left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)^{-\frac{2}{\lambda}} \left| \frac{1 + o\left(\frac{1}{2p+1}\right)}{1 + o\left(\frac{1}{2p+3}\right)} \right| \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{2p}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right)}{(2\pi)^2} (2p)^{2-\frac{2}{\lambda}} \left(\frac{1 + \frac{1}{2p}}{\lambda}\right)^{-\frac{2}{\lambda}} \left| \frac{1 + o\left(\frac{1}{2p+1}\right)}{1 + o\left(\frac{1}{2p+3}\right)} \right| \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence est

$$R_\lambda = \sqrt{\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{A_p}{A_{p+1}} \right|} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \lambda < 1, \\ \frac{1}{2\pi} & \text{si } \lambda = 1, \\ +\infty & \text{si } \lambda > 1. \end{cases}$$

Ainsi la série diverge pour $0 < \lambda < 1$, elle converge pour $\lambda = 1$ à la condition d'avoir $|\omega| < \frac{1}{2\pi}$, et elle converge pour tout $\lambda > 1$ avec ω quelconque dans \mathbb{R} .

4.2.2 Limite de la série de Maclaurin.

Montrons que cette série converge vers $\hat{f}_\lambda(\omega)$ pour $\lambda \geq 1$.

(I) Cas $\lambda = 1$. Nous avons

$$S_1(\omega) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (2\pi\omega)^{2p} \quad (4.8)$$

$$= \frac{2}{1 + (2\pi\omega)^2}. \quad (4.9)$$

Donc pour $|\omega| < \frac{1}{2\pi}$, nous aurons $S_1(\omega) = \hat{f}_1(\omega)$.

(II) Cas $\lambda > 1$. Pour montrer que la série converge vers $\hat{f}_\lambda(\omega)$ dans ce cas nous pouvons procéder de deux manières différentes. Soit en montrant que $R_{2P}(\omega)$ tend vers 0 ou bien nous utilisons le résultat de convergence de la section 1.3, ou le théorème de Fubini pour les séries.

(A) $R_{2P}(\omega)$ tend vers 0. Pour montrer que $R_{2P}(\omega)$ tend vers 0, il suffit de montrer que

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{2}{\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{2P+1}{\lambda}\right)}{(2P)!} (2\pi\omega)^{2P} = 0.$$

D'après la formule asymptotique de la Proposition 1.5, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{2P+1}{\lambda}\right)}{(2P)!} &= \frac{\Gamma\left(\frac{2P+1}{\lambda}\right)}{\Gamma(2P+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{2P}{\lambda}} \left(\frac{2P}{\lambda}\right)^{\frac{2P+1}{\lambda} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} e^{-2P} (2P)^{2P+1-\frac{1}{2}}} \left(1 + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\ &= e^{2P \ln\left(\frac{e}{2P}\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} e^{-(1-\frac{1}{\lambda}) \ln(2P)} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2P+1}{\lambda} - \frac{1}{2}} \left(1 + o\left(\frac{1}{p}\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$|R_{2P}(\omega)| = 2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2P+1}{\lambda} + \frac{1}{2}} e^{2P(1-\frac{1}{\lambda}) \ln(2\pi\omega \frac{e}{2P})} e^{-(1-\frac{1}{\lambda}) \ln(2P)} \left(1 + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

et

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} R_{2P}(\omega) = 0.$$

Donc pour $\lambda > 1$, nous pouvons écrire que

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = \frac{2}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)}{(2p)!} (2\pi\omega)^{2p}.$$

(B) Résultat de convergence ou Théorème de Fubini pour les séries. Nous savons que la fonction f_λ est paire, donc la transformée de Fourier de la fonction $f_\lambda(x)$ vérifie

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} \cos(2\pi\omega x) e^{-x^\lambda} dx. \quad (4.10)$$

Remplaçons $\cos(2\pi\omega x)$ par sa série entière équivalente. Nous aurons

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} x^{2p} e^{-x^\lambda} dx. \quad (4.11)$$

Pour appliquer le Théorème de Fubini pour les séries nous devons montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2 \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} x^{2p} e^{-x^\lambda} dx < +\infty$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2 \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} x^{2p} e^{-x^\lambda} dx &= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{-x^\lambda} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Nous avons vu d'après (4.2.1) que la série (4.12) est convergente sur tout \mathbb{R} pour $\lambda > 1$.

Alors par application du Théorème de Fubini pour les séries ou par application du résultat de convergence de la Section 1.3 à 4.11 nous obtenons

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{-x^\lambda} dx.$$

D'après la définition de la fonction $\Gamma(\cdot)$, nous avons

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = \frac{2}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right).$$

4.3 Retour aux cas particuliers.

4.3.1 Cas $\lambda = 1$.

Nous avons

$$\hat{f}_1(\omega) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\Gamma(2p+1)}{(2p)!} (2\pi\omega)^{2p}, \quad (4.12)$$

et comme $\Gamma(2p+1) = (2p)!$, alors

$$\hat{f}_1(\omega) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (2\pi\omega)^{2p}. \quad (4.13)$$

Cette série converge lorsque $|\omega| < \frac{1}{2\pi}$, et nous avons alors

$$\hat{f}_1(\omega) = \frac{2}{1 + (2\pi\omega)^2}. \quad (4.14)$$

Notons que cette formule est vraie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

4.3.2 Cas $\lambda = 2$.

Nous avons

$$\hat{f}_2(\omega) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}{(2p)!} (2\pi\omega)^{2p}, \quad (4.15)$$

Or, on sait que

$$\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}, \quad (4.16)$$

ainsi, nous obtenons

$$\hat{f}_2(\omega) = \sqrt{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(\pi\omega)^{2p}}{p!} = \sqrt{\pi} e^{-(\pi\omega)^2} \quad (4.17)$$

pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

4.3.3 Cas $\lambda \rightarrow +\infty$.

Nous savons que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = f_{+\infty}(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \quad (4.18)$$

presque partout car

$$f_{+\infty}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1, \\ e^{-1} & \text{si } |x| = 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Aussi

$$\widehat{\chi}_{[-1,1]}(\omega) = 2 \operatorname{sinc}(2\pi\omega). \quad (4.19)$$

Selon la Proposition 1.5 nous avons

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2p+1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right) = 1.$$

En écrivant

$$\widehat{f}_\lambda(\omega) = \frac{1}{\pi\omega} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p+1}}{(2p+1)!} \left(\frac{2p+1}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right), \quad (4.20)$$

nous obtenons, du moins formellement,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \widehat{f}_\lambda(\omega) &= \frac{1}{\pi\omega} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} \\ &= \operatorname{sinc}(\pi\omega) \\ &= \widehat{f}_{+\infty}(\omega). \end{aligned}$$

4.4 Approximation.

Nous allons considérer deux types d'approximation pour le calcul de $\widehat{f}_\lambda(\cdot)$. En premier lieu nous approximerons à l'aide d'une intégrale tronquée et ensuite à l'aide de la série de Maclaurin tronquée.

4.4.1 Approximation par intégration.

Nous avons

$$\begin{aligned}\hat{f}_\lambda(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x) e^{-2\pi\omega x} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx \\ &= 2 \left[\int_0^A f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx + \int_A^{+\infty} f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx \right],\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\left| \int_A^{+\infty} f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx \right| &\leq \int_A^{+\infty} e^{-x^\lambda} dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left[\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \int_0^A e^{-x^\lambda} dx \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda} \int_0^A e^{-x^\lambda} dx.\end{aligned}$$

Ce qui revient à trouver une bonne approximation de la fonction $\Gamma(\cdot)$ en $\frac{1}{\lambda}$. Notons que le problème est de plus en plus difficile lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$. Pour $\lambda \geq 1$ avec un $A \geq 1$ nous avons

$$\begin{aligned}\left| \int_A^{+\infty} f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx \right| &\leq \int_A^{+\infty} e^{-x^\lambda} dx \\ &= -e^{-x} \Big|_A^{+\infty} = e^{-A},\end{aligned}$$

et on peut choisir A pour avoir $e^{-A} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi

$$\left| \hat{f}_\lambda(\omega) - 2 \int_0^A f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx \right| \leq \epsilon.$$

De plus

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^A f_\lambda(x) \cos(2\pi\omega x) dx = 0, \quad (4.21)$$

en vertu du Lemme de Riemann-Lebesgue [26].

4.4.2 Approximation à l'aide de la série de Maclaurin.

Pour l'approximation de $\hat{f}_\lambda(\omega)$ à l'aide de la série de Maclaurin nous considérons deux situations: $0 < \lambda < 1$ et $\lambda > 1$. Le cas $\hat{f}_1(\omega)$ ne nécessitant pas d'approximation.

Cas $0 < \lambda < 1$.

En utilisant le développement de Maclaurin, il est possible d'obtenir une approximation de $\hat{f}_\lambda(\omega)$ au voisinage de l'origine. Pour cela, il suffit que le reste ne soit pas très élevé. Sur l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$, nous avons

$$|R_{2P}(\omega)| \leq \frac{2}{\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{2P+1}{\lambda}\right)}{(2P+1)!} (2\pi\Omega)^{2P}. \quad (4.22)$$

Notons que pour une précision ϵ demandée sur $[-\Omega, \Omega]$, l'augmentation de P entraîne une diminution de Ω .

Pour $\lambda > 1$.

Nous désirons approximer $\hat{f}_\lambda(\omega)$ sur un intervalle $[-\Omega, \Omega]$ en tronquant la série de $\hat{f}_\lambda(\omega)$. Pour une erreur maximale d'une valeur donnée $\epsilon > 0$, le problème est alors de déterminer le plus petit nombre de termes $\overline{P}_\epsilon(\Omega)$ tel que l'erreur maximale ne soit pas supérieure à ϵ , sur $[-\Omega, \Omega]$ c'est-à-dire

$$\min_P \max_{|\omega| \leq \Omega} \left| \hat{f}_\lambda(\omega) - \frac{2}{\lambda} \sum_{p=0}^{P-1} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right) \right| \leq \epsilon.$$

Notons l'erreur par

$$R_P(\omega) = \hat{f}_\lambda(\omega) - \frac{2}{\lambda} \sum_{p=0}^{P-1} (-1)^p \frac{(2\pi\omega)^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right).$$

D'après le test d'Alambert, nous avons

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{A_{p+1}}{A_p} \right| = 0,$$

donc, il existe un $\overline{P}_\epsilon(\Omega)$ tel que

$$\forall p \geq \overline{P}_\epsilon(\Omega) \quad \left| \frac{A_{p+1}}{A_p} \right| < 1 \quad (4.23)$$

Alors, d'après le théorème de la série alternée nous avons pour $\overline{P}_\epsilon(\Omega)$ assez grand

$$\left| R_{\overline{P}_\epsilon(\Omega)}(\omega) \right| < \left| A_{\overline{P}_\epsilon(\Omega)+1} \right|,$$

donc,

$$\left| R_{\overline{P}_\epsilon(\Omega)}(\omega) \right| \leq \frac{2 (2\pi\Omega)^{2\overline{P}_\epsilon(\Omega)+2}}{\lambda (2\overline{P}_\epsilon(\Omega) + 2)!} \Gamma \left(\frac{2\overline{P}_\epsilon(\Omega) + 3}{\lambda} \right).$$

Notons par $E_\lambda(\overline{P}_\epsilon(\Omega), \Omega)$ la valeur maximal de cette expression sur $[-\Omega, \Omega]$. Pour $\epsilon > 0$ donné on peut trouver $\overline{P}_\epsilon > 0$ tel que

$$\left| R_{\overline{P}_\epsilon(\Omega)}(\omega) \right| \leq E_\lambda(\overline{P}_\epsilon(\Omega), \Omega) \leq \epsilon$$

avec

$$E_\lambda(\overline{P}_\epsilon(\Omega), \Omega) = \frac{2}{\lambda} \Gamma \left(\frac{2\overline{P}_\epsilon(\Omega) + 3}{\lambda} \right) \frac{(2\pi\Omega)^{2\overline{P}_\epsilon(\Omega)+2}}{(2\overline{P}_\epsilon(\Omega) + 2)!}.$$

Donnons quelques illustrations de $E_\lambda(2\overline{P}_\epsilon(\Omega), \Omega)$.

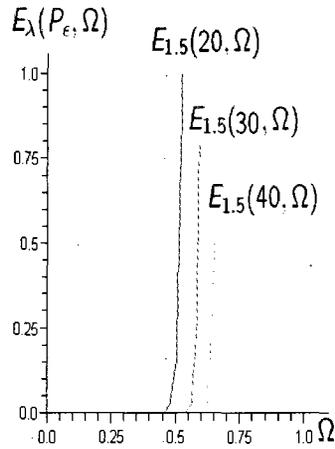


Figure 4.1: Graphes de $E_{1.5}(\overline{P}_{\epsilon}(\Omega), \Omega)$ pour $\overline{P}_{\epsilon}(\Omega) = 20, 30$ et 40 .

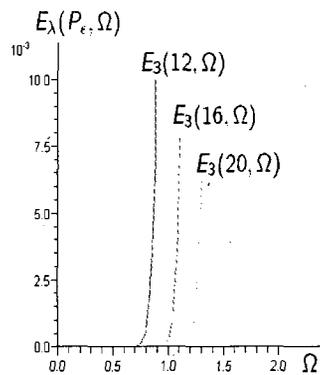


Figure 4.2: Graphes de $E_3(\overline{P}_{\epsilon}(\Omega), \Omega)$ pour $\overline{P}_{\epsilon}(\Omega) = 12, 16$ et 20 .

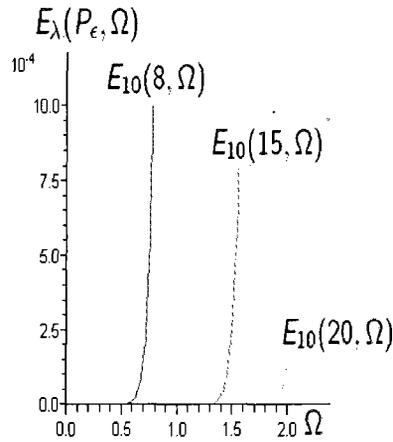


Figure 4.3: Graphes de $E_{10}(\bar{P}_\epsilon(\Omega), \Omega)$ pour $\bar{P}_\epsilon(\Omega) = 8, 15$ et 20 .

Nous allons maintenant expliquer les graphes de l'erreur. Prenons comme exemple la Figure 4.3. Nous avons $\lambda = 10$, fixons $\epsilon = 10^{-4}$, posons $\Omega = 0, 5$. Alors nous constatons d'après le graphe qu'il suffit de prendre $\bar{P}_{10^{-4}}(0.5) = 8$ pour avoir $E_{10}(\bar{P}_{10^{-4}}(0.5), 0.5) < 10^{-4}$ ce qui veut dire que l'erreur maximale est inférieure à 10^{-4} . Posons maintenant $\Omega = 1$, alors nous constatons, d'après le graphe, qu'il suffit de prendre $\bar{P}_{10^{-4}}(1) = 15$ pour avoir $E_{10}(\bar{P}_{10^{-4}}(1), 1) < 10^{-4}$.

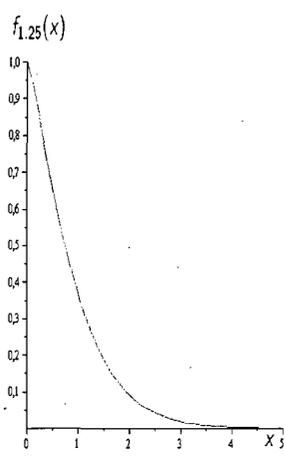
4.5 Illustration graphique.

Pour illustration nous donnons dans la suite les représentations graphiques de certaines fonctions et de leurs transformées de Fourier. Pour $\lambda > 2$, la transformée de Fourier est donnée sous la forme d'une série, alors nous devons tronquer la série à un certain nombre

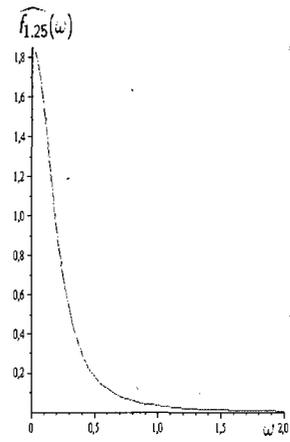
de termes de telle sorte que la série vérifie deux conditions:

- (i) la propriété (4.23) doit être vérifiée;
- (ii) pour un intervalle $[-\Omega, \Omega]$ donné et un $\epsilon > 0$ donné, la valeur calculée avec la série tronquée en ce nombre de terme sont, à ϵ près, la vraie valeur. Pour être sûr que les deux conditions précédentes sont vérifiées, nous tronquons la série à l'ordre 2000.

Pour $1 < \lambda < 2$ il vaut mieux tracer les graphes par la méthode d'approximation par intégrale (4.21).

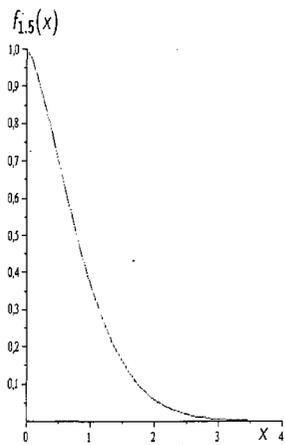


(a)

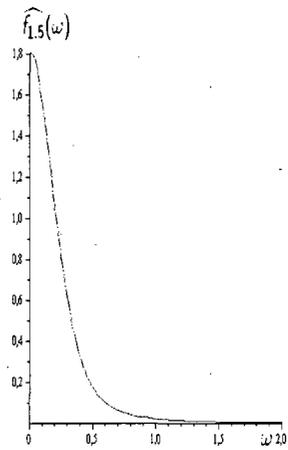


(b)

Figure 4.4: Graphes de (a) $f_{1.25}(x)$ et (b) $\widehat{f}_{1.25}(\omega)$.

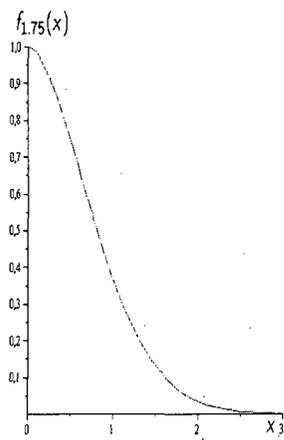


(a)

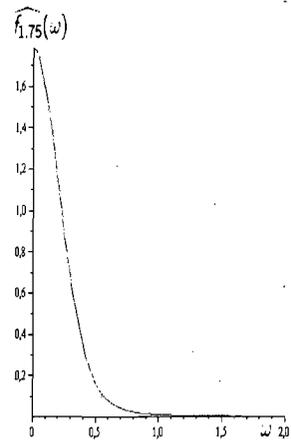


(b)

Figure 4.5: Graphes de (a) $f_{1.5}(x)$ et (b) $\widehat{f}_{1.5}(\omega)$.

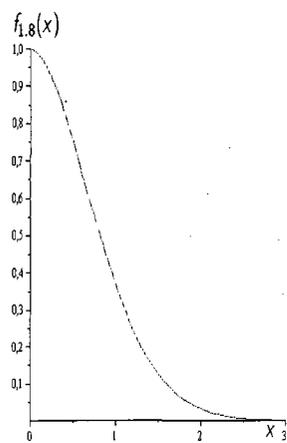


(a)

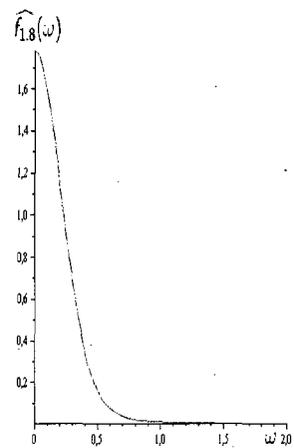


(b)

Figure 4.6: Graphes de (a) $f_{1.75}(x)$ et (b) $\hat{f}_{1.75}(\omega)$.

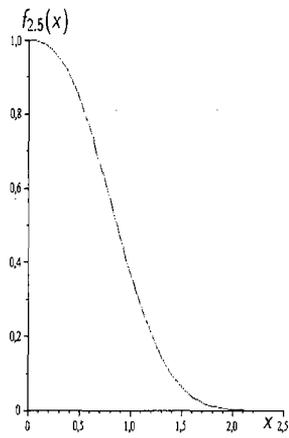


(a)

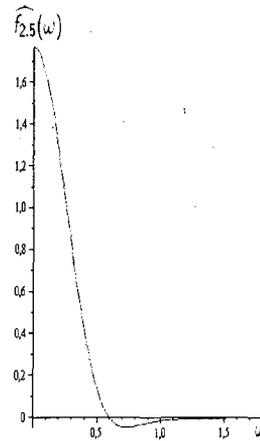


(b)

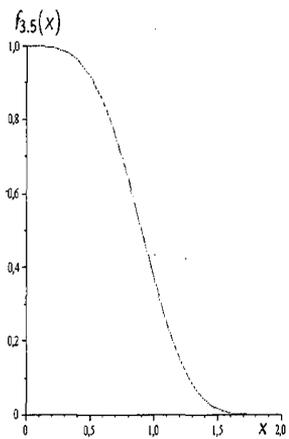
Figure 4.7: Graphes de (a) $f_{1.8}(x)$ et (b) $\hat{f}_{1.8}(\omega)$.



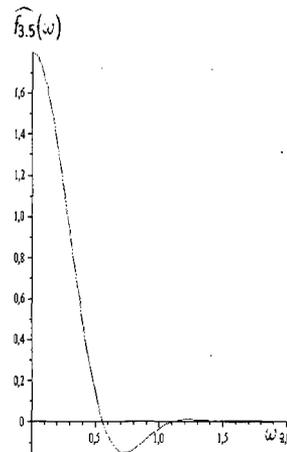
(a)



(b)

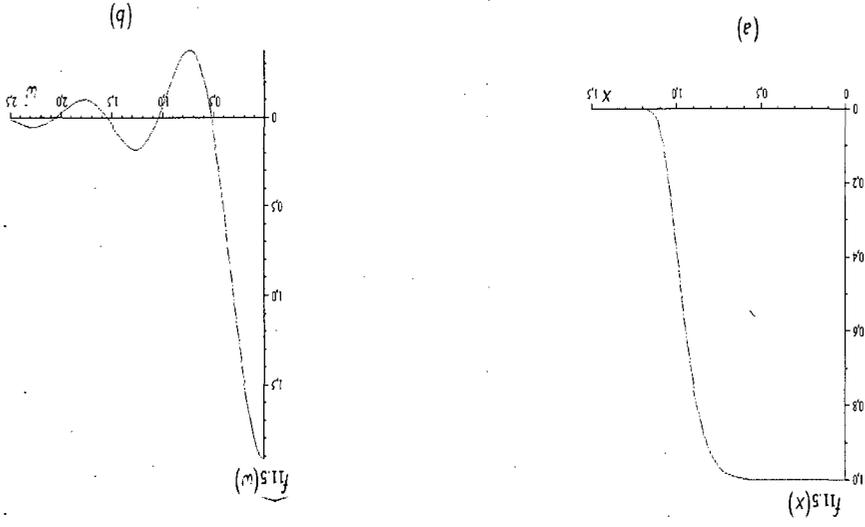
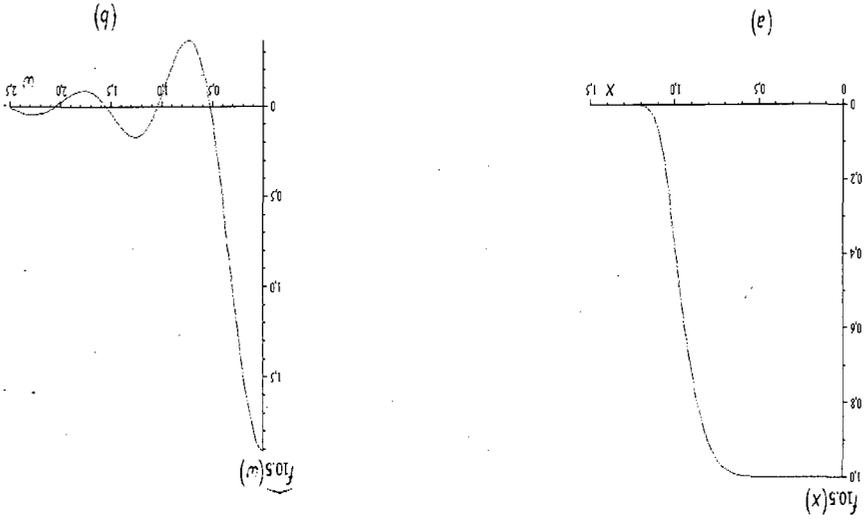
Figure 4.8: Graphes de (a) $f_{2.5}(x)$ et (b) $\hat{f}_{2.5}(\omega)$.

(a)



(b)

Figure 4.9: Graphes de (a) $f_{3.5}(x)$ et (b) $\hat{f}_{3.5}(\omega)$.

Figure 4.11: Graphes de (a) $f_{11.5}(x)$ et (b) $f_{11.5}(\omega)$.Figure 4.10: Graphes de (a) $f_{10.5}(x)$ et (b) $f_{10.5}(\omega)$.

CHAPITRE 5

La transformée de Fourier de la gaussienne généralisée en deux dimensions

Dans ce chapitre, nous calculons la transformée de Fourier de la gaussienne généralisée GG en dimension 2. Deux formes sont suggérées pour cette gaussienne généralisée. Nous donnons quelques propriétés communes aux deux formes et ensuite, nous calculerons leurs transformées de Fourier.

5.1 Formes de la GG en dimension 2.

La première forme de la GG en dimension 2 est le produit de deux GG en dimension 1.

Nous posons

$$F_\lambda(x_1, x_2) = f_\lambda(x_1)f_\lambda(x_2) = e^{-(|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda)}.$$

Notons qu'ici nous pourrions avoir deux paramètres λ différents. Nous savons que cette forme n'est pas invariante par rotation. C'est pour cela que nous introduisons la seconde forme donnée par

$$G_\lambda(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

Notons que ces deux formes vérifient les propriétés de symétrie dans \mathbb{R}^2 données par

$$F_\lambda(\pm x_1, \pm x_2) = F_\lambda(x_1, x_2),$$

et

$$G_\lambda(\pm x_1, \pm x_2) = G_\lambda(x_1, x_2).$$

La forme $F_\lambda(x_1, x_2)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme produit de deux fonctions de classe C^∞ . Elle est aussi à décroissance rapide. La forme $G_\lambda(x_1, x_2)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x_1, x_2) (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}} dx_1 dx_2 < +\infty$$

pour tout entier positif m , donc $\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2)$ la transformée de Fourier de $G_\lambda(x_1, x_2)$, est de classe C^m pour tout entier m .

5.2 Cas particulier $\lambda = 2$.

Lorsque $\lambda = 2$, les deux formes coïncident et nous avons

$$\hat{F}_2(\omega_1, \omega_2) = \hat{G}_2(\omega_1, \omega_2) \tag{5.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
\hat{F}_2(\omega_1, \omega_2) &= \hat{G}_2(\omega_1, \omega_2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} e^{-2i\pi(x_1\omega_1+x_2\omega_2)} dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} e^{-2i\pi x_1 \omega_1} dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2} e^{-2i\pi x_2 \omega_2} dx_2 \\
&= \pi e^{-\pi^2(\omega_1^2+\omega_2^2)} \\
&= \hat{f}_2(\omega_1) \hat{f}_2(\omega_2).
\end{aligned}$$

5.3 Calcul de la transformée de Fourier de $F_\lambda(x_1, x_2)$.

Dans le cas général, nous avons

$$\hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda)} e^{-2i\pi(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)} dx_1 dx_2. \quad (5.2)$$

Or la fonction $f_\lambda(x_1, x_2)$ est séparable, donc sa transformée de Fourier est le produit de deux transformées de Fourier.

$$\hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x_1|^\lambda} e^{-2i\pi x_1 \omega_1} dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x_2|^\lambda} e^{-2i\pi x_2 \omega_2} dx_2. \quad (5.3)$$

Nous obtenons alors pour $\lambda = 1$

$$\hat{F}_1(\omega_1, \omega_2) = \left[\frac{2}{1 + (2\pi\omega_1)^2} \right] \left[\frac{2}{1 + (2\pi\omega_2)^2} \right], \quad (5.4)$$

et pour $\lambda > 1$

$$\hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^2 \left[\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (2\pi\omega_1)^{2p} \frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)}{(2p)!} \right] \left[\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (2\pi\omega_2)^{2p} \frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)}{(2p)!} \right],$$

que nous pouvons également écrire

$$\begin{aligned}\hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) &= \frac{4}{\lambda^2} \sum_{\substack{0 \leq i < +\infty \\ 0 \leq j < +\infty}} (\omega_1^i \omega_2^j)^2 \frac{(-1)^{i+j} (4\pi^2)^{i+j}}{(2i)!(2j)!} \Gamma\left(\frac{2i+1}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{2j+1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{4}{\lambda^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4\pi^2)^k}{(2k)!} \sum_{l=0}^k \omega_1^l \omega_2^{k-l} \binom{2l}{2k} \Gamma\left(\frac{2l+1}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{2(k-l)}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

5.3.1 Illustration graphique.

Nous donnons maintenant des représentations graphiques de certaines fonctions et de leurs transformées de Fourier.

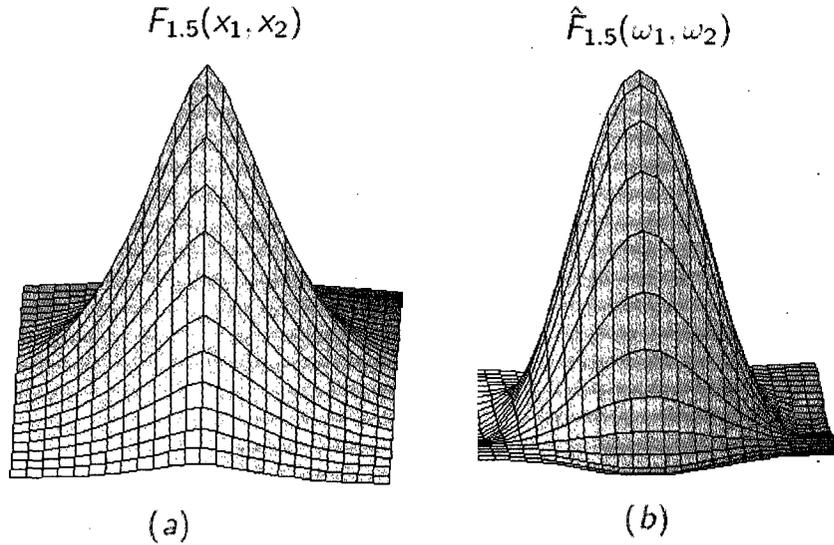


Figure 5.1: Graphes de (a) $F_{1.5}(x_1, x_2)$ et (b) $\hat{F}_{1.5}(\omega_1, \omega_2)$.

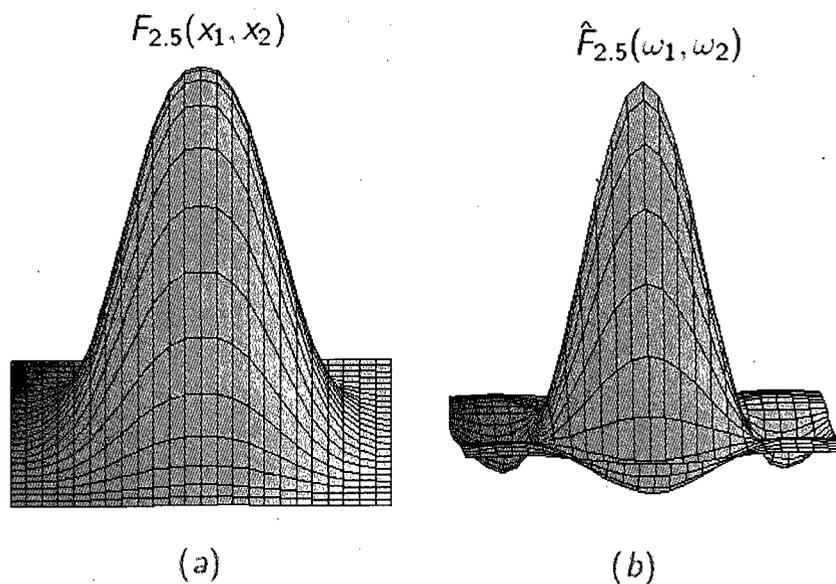


Figure 5.2: Graphes de (a) $F_{2.5}(x_1, x_2)$ et (b) $\hat{F}_{2.5}(\omega_1, \omega_2)$.

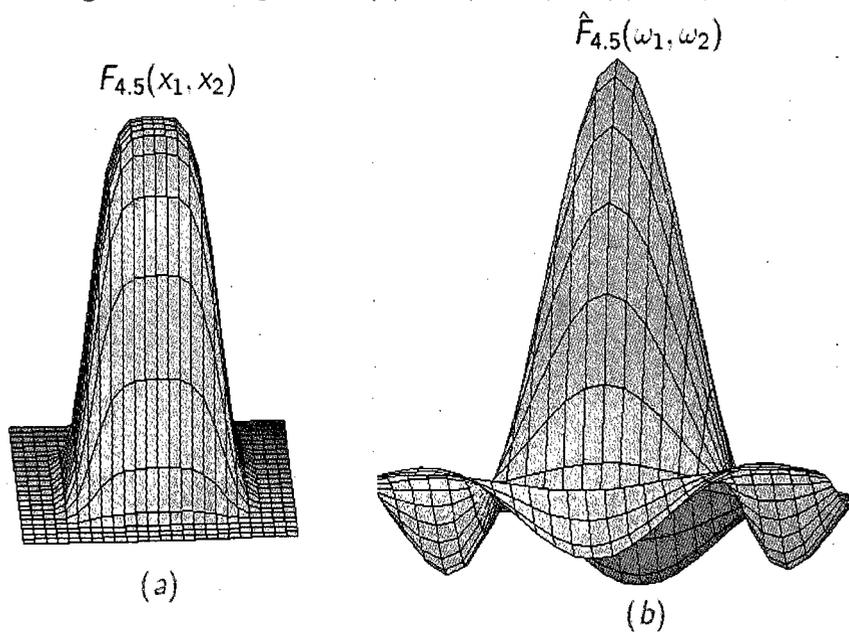


Figure 5.3: Graphes de (a) $F_{4.5}(x_1, x_2)$ et (b) $\hat{F}_{4.5}(\omega_1, \omega_2)$.

5.4 Calcul de la transformée de Fourier de $G_\lambda(x_1, x_2)$.

Nous avons

$$\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)\frac{\lambda}{2}} e^{-2i\pi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

Posons $x_1 = r \cos \theta$ et $x_2 = r \sin \theta$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2) &= \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^\lambda} e^{-2i\pi(\omega_1 r \cos \theta + r \omega_2 \sin \theta)} r dr d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2i\pi(\omega_1 r \cos \theta + r \omega_2 \sin \theta)} d\theta, \end{aligned}$$

donc

$$\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r dr \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} (\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)^h d\theta.$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \left| \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} (\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)^h d\theta \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} (2\pi r)^h \frac{(|\omega_1| + |\omega_2|)^h}{h!} \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} \\ &\leq 2\pi e^{2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)}. \end{aligned}$$

Alors pour r fixé, nous aurons

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \left| \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} (\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)^h d\theta \right| < +\infty$$

ce qui nous permet d'intervertir somme et intégrale, d'où

$$\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r dr \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)^h d\theta,$$

pour intervertir somme et intégrale une deuxième fois, nous devons montrer que

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)^h d\theta \right| dr < +\infty$$

Nous avons pour $\lambda > 1$

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 \cos \theta + \omega_1 \cos \theta)^h d\theta \right| dr \leq 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} dr.$$

Or, on sait que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^3 e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} = 0,$$

donc, il existe un $B > 0$ tel que pour tout $r \geq B$ nous avons $r^3 e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} < 1$.

D'où pour tout $r \geq B$ nous avons

$$r e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} < \frac{1}{r^2}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} dr &= 2\pi \int_0^B r e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} dr + 2\pi \int_B^{+\infty} r e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} dr \\ &\leq 2\pi \int_0^B r e^{-r^\lambda + 2\pi r(|\omega_1| + |\omega_2|)} dr + \pi \int_B^{+\infty} \frac{1}{r^2} < +\infty, \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 \cos \theta + \omega_1 \cos \theta)^h d\theta \right| dr < +\infty.$$

Ceci nous permet d'intervertir somme et intégrale, d'où

$$\begin{aligned} \hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{h=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r dr \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 \cos \theta + \omega_1 \cos \theta)^h d\theta \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^h}{h!} \int_0^{+\infty} e^{-r^\lambda} r^{h+1} dr \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 \cos \theta + \omega_1 \cos \theta)^h d\theta. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)^h d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=0}^h C_h^l \omega_1^l \omega_2^{h-l} (\cos \theta)^l (\sin \theta)^{h-l} d\theta \\ &= \sum_{l=0}^{2h} C_{2h}^l \omega_1^l \omega_2^{2h-l} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^l (\sin \theta)^{2h-l} d\theta \\ &+ \sum_{l=0}^{2h+1} C_{2h+1}^l \omega_1^l \omega_2^{2h+1-l} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^l (\sin \theta)^{2h+1-l} d\theta. \end{aligned}$$

où

$$C_l^h = \binom{l}{h} = \frac{l!}{h!(l-h)!}$$

Nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^l (\sin \theta)^{2h-l} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est impair,} \\ 2 \int_0^{\pi} (\cos \theta)^l (\sin \theta)^{2h-l} d\theta & \text{si } l \text{ est pair,} \end{cases}$$

et pour $l = 2k$, nous avons

$$\int_0^{\pi} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta.$$

Alors, par un changement de variable dans la deuxième intégrale en posant $\psi = \pi - \theta$, nous aurons

$$2 \int_0^{\pi} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta.$$

De même,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^l (\sin \theta)^{2h+1-l} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est pair,} \\ 2 \int_0^{\pi} (\cos \theta)^l (\sin \theta)^{2h+1-l} d\theta & \text{si } l \text{ est impair,} \end{cases}$$

et pour $l = 2k$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\cos \theta)^{2k+1} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2k+1} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos \theta)^{2k+1} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2ir\pi(\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)} d\theta = 4 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^{2h}}{(2h)!} \sum_{k=0}^h C_{2h}^{2k} \omega_1^{2k} \omega_2^{2(h-k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta.$$

Comme nous avons l'identité suivante [1]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2k} (\sin \theta)^{2(h-k)} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{2(h-k)+1}{2}) \Gamma(\frac{2k+1}{2})}{\Gamma(h+1)},$$

nous obtenons

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2ir\pi(\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta)} d\theta = 2 \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i\pi r)^{2h}}{(2h)!} \sum_{k=0}^h C_{2h}^{2k} \omega_1^{2k} \omega_2^{2(h-k)} \frac{\Gamma\left(\frac{2(h-k)+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{\Gamma(h+1)}.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} r^{2h+1} e^{-r\lambda} dr = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{2h+2}{\lambda}\right),$$

alors, nous avons

$$\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \frac{2}{\lambda} \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{(2\pi)^{2h}}{h!} \Gamma\left(\frac{2(h+1)}{\lambda}\right) \sum_{k=0}^h \frac{\Gamma\left(\frac{2(h-k)+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{\Gamma(2(h-k)+1) \Gamma(2k+1)} \omega_1^{2k} \omega_2^{2(h-k)}.$$

Mais,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{\Gamma(2k+1)} = \sqrt{\pi} \frac{2^{-2k}}{k!},$$

et

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2(h-k)+1}{2}\right)}{\Gamma(2(h-k)+1)} = \sqrt{\pi} \frac{2^{-2(h-k)}}{(h-k)!},$$

finalemt, nous obtenons

$$\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{2k+2}{\lambda}\right)}{(k!)^2} [\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)]^k.$$

Notons que pour le cas $\lambda = 2$ nous avons

$$\begin{aligned} \hat{G}_2(\omega_1, \omega_2) &= \pi \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h!} (\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2))^h \\ &= \pi e^{-\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}. \end{aligned}$$

5.4.1 Illustration graphique.

Quelques graphes sont présentés pour illustrer nos résultats.

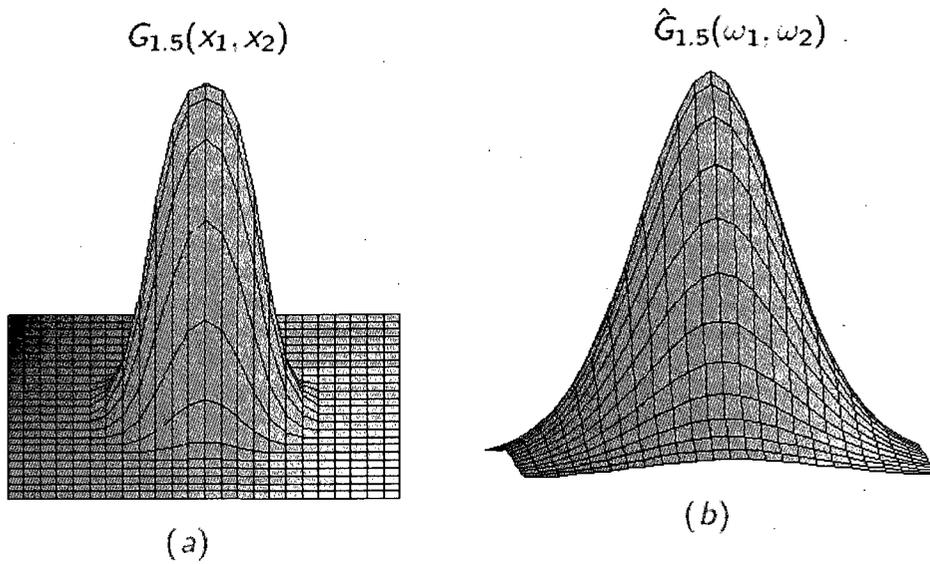


Figure 5.4: Graphes de (a) $G_{1.5}(x_1, x_2)$ et (b) $\hat{G}_{1.5}(\omega_1, \omega_2)$.

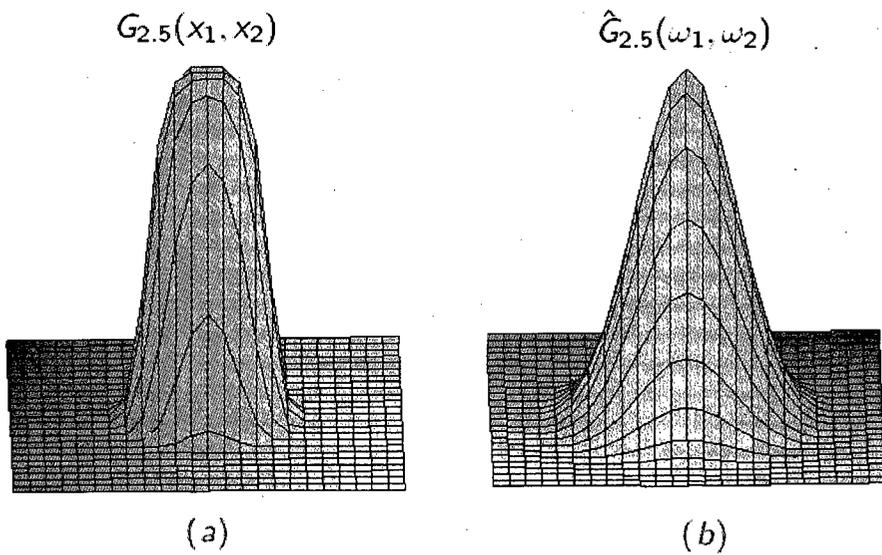


Figure 5.5: Graphes de (a) $G_{2.5}(x_1, x_2)$ et (b) $\hat{G}_{2.5}(\omega_1, \omega_2)$.

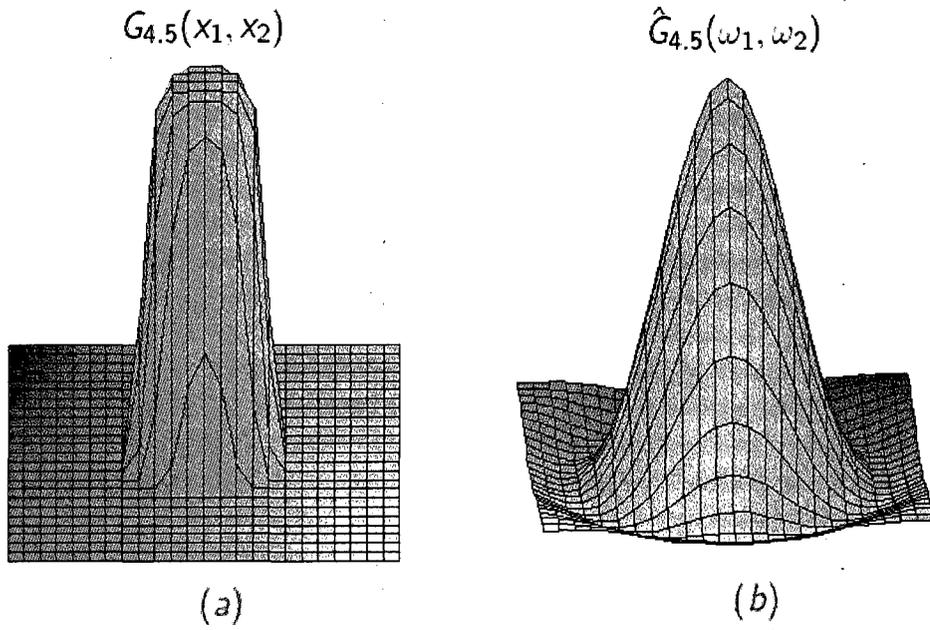


Figure 5.6: Graphes de (a) $G_{4.5}(x_1, x_2)$ et (b) $\hat{G}_{4.5}(\omega_1, \omega_2)$.

5.5 Approximation.

5.5.1 Sur le carrée $[-\Omega, \Omega]^2$ pour $F_\lambda(\omega_1, \omega_2)$.

Nous désirons tronquer la série de telle sorte que l'erreur maximale faite sur le carré de côté 2Ω ne soit pas supérieure à une valeur ϵ donnée. Le problème est de déterminer le plus petit P_ϵ tel que

$$\max_{\substack{|\omega_1| \leq \Omega \\ |\omega_2| \leq \Omega}} \left| \hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) - \frac{4}{\lambda^2} \sum_{\substack{0 \leq i < P_\epsilon - 1 \\ 0 \leq j < P_\epsilon - 1}} (\omega_1^i \omega_2^j)^2 \frac{(-1)^{i+j} (4\pi^2)^{i+j}}{(2i)!(2j)!} \Gamma\left(\frac{2i+1}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{2j+1}{\lambda}\right) \right| \leq \epsilon.$$

Notons l'erreur par

$$\begin{aligned} R_P(\omega_1, \omega_2) &= \hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) - \\ &\quad \frac{4}{\lambda^2} \sum_{\substack{0 \leq i < P_\epsilon - 1 \\ 0 \leq j < P_\epsilon - 1}} (\omega_1^i \omega_2^j)^2 \frac{(-1)^{i+j} (4\pi^2)^{i+j}}{(2i)!(2j)!} \Gamma\left(\frac{2i+1}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{2j+1}{\lambda}\right) \\ &= \hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) - \\ &\quad \frac{4}{\lambda^2} \sum_{p=0}^{P_\epsilon-1} (-1)^p \frac{(2\pi\omega_1)^{2p+1}}{(2p+1)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right) \sum_{p=0}^{P_\epsilon-1} (-1)^p \frac{(2\pi\omega_2)^{2p+1}}{(2p+1)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right) \\ &= \hat{F}_\lambda(\omega_1, \omega_2) - (\hat{f}_\lambda(\omega_1) - R_{2P_\epsilon}(\omega_1))(\hat{f}_\lambda(\omega_2) - R_{2P_\epsilon}(\omega_2)) \\ &= \hat{f}_\lambda(\omega_1)R_{2P_\epsilon}(\omega_2) + \hat{f}_\lambda(\omega_2)R_{2P_\epsilon}(\omega_1) - R_{2P_\epsilon}(\omega_1)R_{2P_\epsilon}(\omega_2). \end{aligned}$$

Donc

$$|R_P(\omega_1, \omega_2)| < \left| \hat{f}_\lambda(\omega_1)R_{2P_\epsilon}(\omega_2) \right| + \left| \hat{f}_\lambda(\omega_2)R_{2P_\epsilon}(\omega_1) \right| + |R_{2P_\epsilon}(\omega_1)R_{2P_\epsilon}(\omega_2)|.$$

Nous savons que

$$\left| \hat{f}_\lambda(\omega_1) \right| < \left| \hat{f}_\lambda(0) \right| = \frac{2}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

et on a aussi pour $\lambda \geq 1$ et pour tout $p \geq 0$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2p+1}{\lambda}\right)}{\Gamma(2p+1)} \leq \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} |R_P(\omega_1, \omega_2)| &\leq 2 \left| \hat{f}_\lambda(0) \right| |R_{2P_\epsilon}(\Omega)| + |R_{2P_\epsilon}(\Omega)|^2 \\ &\leq |R_{2P_\epsilon}(\Omega)| \left(2 \left| \hat{f}_\lambda(0) \right| + |R_{2P_\epsilon}(\Omega)| \right) \end{aligned}$$

d'où

$$|R_P(\omega_1, \omega_2)| \leq \frac{4}{\lambda^2} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2P_\epsilon+1}{\lambda}\right)}{(2P_\epsilon)!} (2\pi\Omega)^{2P_\epsilon} [2 + (2\pi\Omega)^{2P_\epsilon}].$$

L'erreur est donc majorée par la borne $E_\lambda(P_\epsilon, \Omega)$ avec

$$E_\lambda(P_\epsilon, \Omega) = \frac{4}{\lambda^2} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2P_\epsilon+1}{\lambda}\right)}{(2P_\epsilon)!} (2\pi\Omega)^{2P_\epsilon} [2 + (2\pi\Omega)^{2P_\epsilon}]. \quad (5.5)$$

Nous donnons quelques illustrations graphiques.

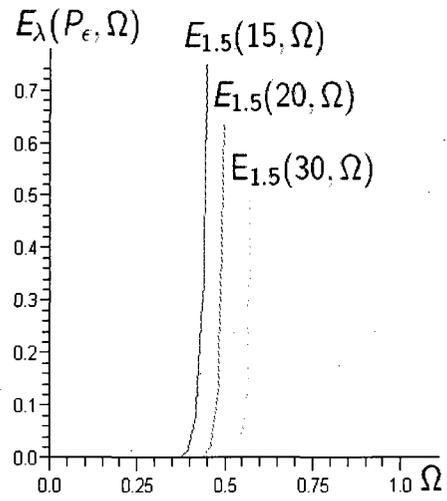


Figure 5.7: Graphes de $E_{1.5}(15, 2)$, $E_{1.5}(20, 2)$ et $E_{1.5}(30, 2)$.

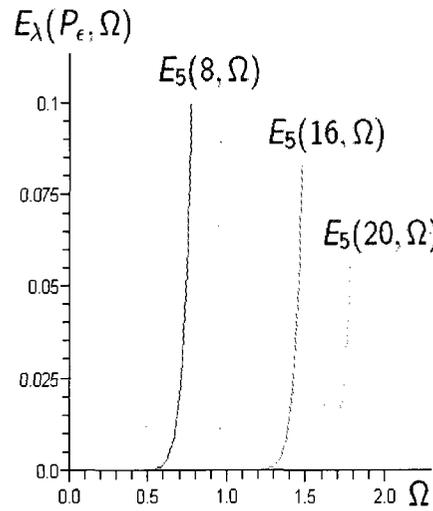


Figure 5.8: Graphes de $E_5(8, 1)$, $E_5(16, 1)$ et $E_5(20, 1)$.

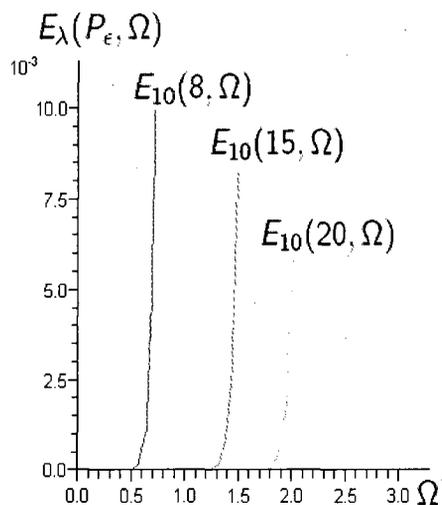


Figure 5.9: Graphes de $E_{10}(8, 2)$, $E_{10}(15, 2)$ et $E_{10}(20, 2)$.

5.5.2 Dans le disque $D(0; \Omega)$ pour la forme $\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2)$.

Nous désirons tronquer la série de telle sorte que l'erreur maximale faite sur le disque de rayon Ω , noté $D(0; \Omega) = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq \Omega^2\}$, ne soit pas supérieure à une valeur ϵ donnée. Dans la Section 5.4, la fonction $\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2)$ est donnée par une série. D'après l'unicité du développement de Maclaurin nous pouvons dire que cette série est la série de Maclaurin pour la fonction $\hat{G}_\lambda(\omega_1, \omega_2)$. Son reste à l'ordre L , noté R_{2L} , est

donné par

$$\begin{aligned}
R_{2L}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2L)!} D_{(\omega_1, \omega_2)}^{2L} \hat{G}_\lambda(\theta\omega_1, \theta\omega_2) \\
&= \frac{(-2i\pi\theta)^{2L}}{(2L)!} \sum_{k=0}^L C_{2k}^{2L} \omega_1^{2k} \omega_2^{2L-2k} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{2k} x_2^{2L-2k} e^{-(x_1^2+x_2^2)^{\frac{\lambda}{2}}} e^{-2i\pi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2,
\end{aligned}$$

avec $0 < \theta < 1$, alors

$$\|R_{2L}(\omega_1, \omega_2)\| \leq \frac{(2\pi)^{2L}}{(2L)!} \sum_{k=0}^L C_{2k}^{2L} \omega_1^{2k} \omega_2^{2L-2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{2k} x_2^{2L-2k} e^{-(x_1^2+x_2^2)^{\frac{\lambda}{2}}} dx_1 dx_2.$$

Par un simple calcul, nous pouvons montrer

$$\|R_{2L}(\omega_1, \omega_2)\| \leq \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Gamma(\frac{2L+2}{\lambda})}{(L!)^2} (\pi\Omega)^{2L}.$$

Posons

$$E_\lambda(L, \Omega) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Gamma(\frac{2(L+1)}{\lambda})}{(L!)^2} (\pi\Omega)^{2L}.$$

L'objectif de cette section est de déterminer le plus petit nombre de termes P_ϵ tel que $E_\lambda(L, \Omega) \leq \epsilon$. Nous allons donner quelques illustrations graphiques de

$$E_\lambda(P_\epsilon, \Omega) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Gamma(\frac{2(P_\epsilon+1)}{\lambda})}{(P_\epsilon!)^2} (\pi\Omega)^{2P_\epsilon}.$$

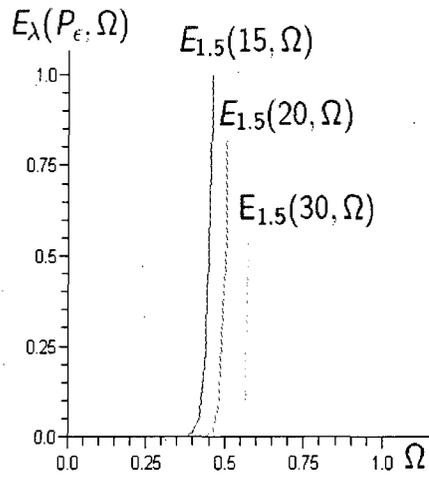


Figure 5.10: Graphes de $E_{1.5}(15, \Omega)$, $E_{1.5}(20, \Omega)$ et $E_{1.5}(30, \Omega)$.

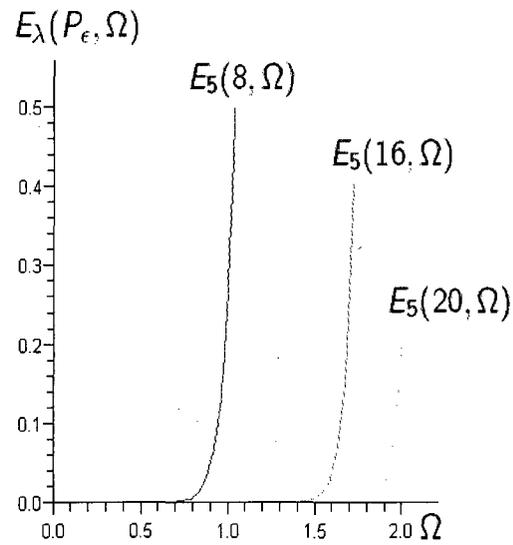


Figure 5.11: Graphes de $E_5(8, \Omega)$, $E_5(16, \Omega)$ et $E_5(20, \Omega)$.

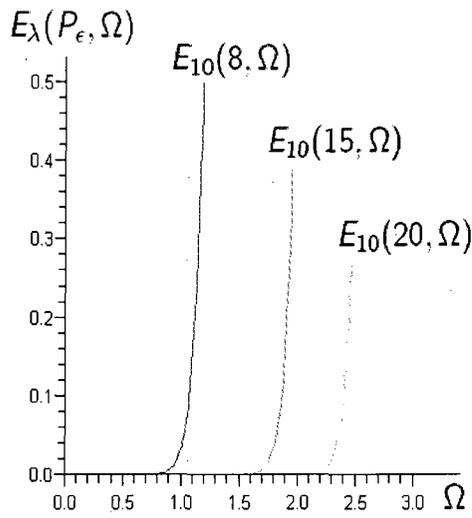


Figure 5.12: Graphes de $E_{10}(8, \Omega)$, $E_{10}(15, \Omega)$ et $E_{10}(20, \Omega)$.

CHAPITRE 6

Application dans le domaine de la vision par ordinateur

Dans ce chapitre nous allons traiter un problème issu du domaine de la vision par ordinateur et du traitement d'image, à savoir l'estimation des paramètres atmosphériques à partir de deux images de la même scène prises sous des conditions atmosphériques différentes et inconnues. Sachant qu'une image dégradée peut être vue comme étant le produit de convolution de sa version nette avec un filtre modélisant le voile atmosphérique, l'estimation des paramètres atmosphériques relatifs à chaque image réside alors dans l'estimation des paramètres du filtre approprié à l'image en question. Dans l'application nous devons estimer deux paramètres atmosphériques: l'épaisseur optique et la diffusion atmosphérique. Dans ce chapitre nous utilisons un filtre qui est inspiré de la gaussienne généralisée, ce qui nous permet d'introduire deux paramètres: le paramètre de forme et le paramètre de dispersion.

6.1 Le voile atmosphérique.

Dans [27] les auteurs ont proposé un nouveau filtre permettant de modéliser les effets des différentes conditions atmosphériques sur les images. Ce filtre est inspiré de la gaussienne généralisée et est donné par

$$APSF_{q,T}(x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{kT}{2}}}{|A(kT, \frac{1-q}{q})|^{kT}}}}{4\Gamma^2(1 + \frac{1}{kT})A\left(kT, \frac{1-q}{q}\right)^2}, \quad (6.1)$$

où APSF est l'abréviation de (amplitude point-spread function.)

$$APSF_{\sigma,p}(x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{p}{2}}}{|A(p, \sigma)|^p}}}{4\Gamma^2(1 + \frac{1}{p})A(p, \sigma)^2}, \quad (6.2)$$

où T est l'épaisseur optique de l'atmosphère, q est le paramètre de diffusion atmosphérique et k est une constante donnée. Ici nous prenons $k = \frac{1}{2}$. Posons $p = kT$ et $\sigma = \frac{1-q}{q}$, alors $A(p, \sigma) = \left(\sigma^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{3}{p})}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6.2 La transformée de Fourier du voile atmosphérique.

Dans le Chapitre 5, nous avons calculé la transformée de Fourier d'une fonction définie par

$$f_p(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)^{\frac{p}{2}}}. \quad (6.3)$$

Rappelons que la transformée de Fourier de cette fonction est donnée par

$$\hat{f}_p(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{p} \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{\Gamma(\frac{2h+1}{p})}{(h!)^2} (\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2))^h. \quad (6.4)$$

Le filtre donné par l'équation (6.2) est basée sur une GG. Ainsi, on pourra adapter l'expression analytique de la \hat{f}_p pour ce filtre (il nous reste juste à mettre les paramètres

du filtre en correspondance avec ceux de la fonction f_p). Ainsi, la transformée de Fourier du voile atmosphérique $APSF_{\sigma,p}$ sera donnée par

$$(\widehat{APSF}_{\sigma,p})(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi}{2p} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{p+1}{p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{3}{p})} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\frac{2k+2}{p}) \left(\sigma^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{3}{p})} \right)^k}{(k!)^2} (\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2))^k. \quad (6.5)$$

Comme la série de Fourier de cette gaussienne généralisée est peu pratique, nous allons l'approximer par l'expression suivante

$$\widetilde{APSF}_{\sigma,p}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi}{2p} \frac{\Gamma(\frac{2}{p})}{\Gamma^2(\frac{p+1}{p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{3}{p})} \frac{e^{-\frac{\left(\sigma^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{3}{p})}\right)^{\frac{p}{2}}}{2p} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{\frac{p}{2}}}}{[1 + \mu(\omega_1^2 + \omega_2^2)]}. \quad (6.6)$$

Dans cette expression μ est un paramètre supplémentaire d'ajustement de forme que nous poserons égal à 2 dans la suite.

6.3 La représentation graphique de $\widetilde{N}_{\sigma,p}$ et $\widehat{N}_{\sigma,p}$.

Maintenant, nous allons donner quelques graphes qui illustrent la comparaison entre la transformée de Fourier du filtre atmosphérique $\widehat{APSF}_{\sigma,p}$ et son approximation $\widetilde{APSF}_{\sigma,p}$. Puisque les deux formes sont symétriques, il suffit alors d'illustrer les graphes dans le cas unidimensionnel. Pour comparer les formes des \widehat{APSF} et \widetilde{APSF} , nous les normalisons à l'origine.

$$\widehat{N}_{\sigma,p} = \frac{\widehat{APSF}_{\sigma,p}(\omega)}{\widehat{APSF}_{\sigma,p}(0)}$$

et

$$\widetilde{N}_{\sigma,p} = \frac{\widetilde{APSF}_{\sigma,p}(\omega)}{\widetilde{APSF}_{\sigma,p}(0)}$$

où $\omega = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Les différents graphiques qui suivent illustrent l'effet de p et de σ sur les formes des courbes.

6.3.1 Effet de p .

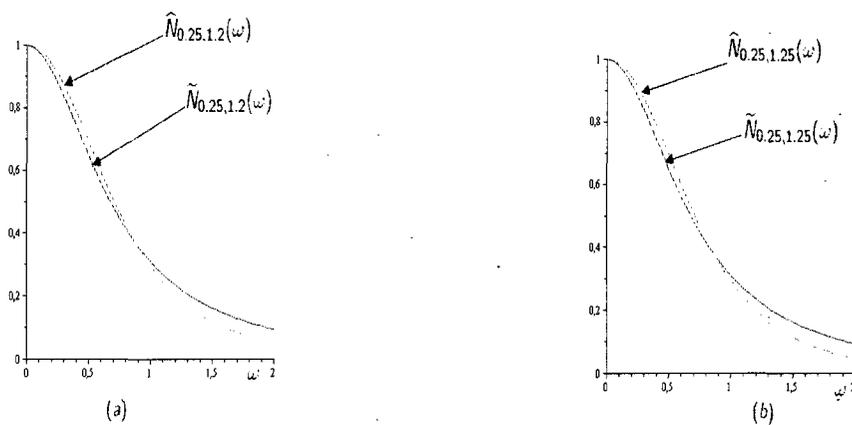


Figure 6.1: Graphes de (a) $\hat{N}_{0.25,1.2}$, $\tilde{N}_{0.25,1.2}$ et (b) $\hat{N}_{0.25,1.25}$, $\tilde{N}_{0.25,1.25}$.

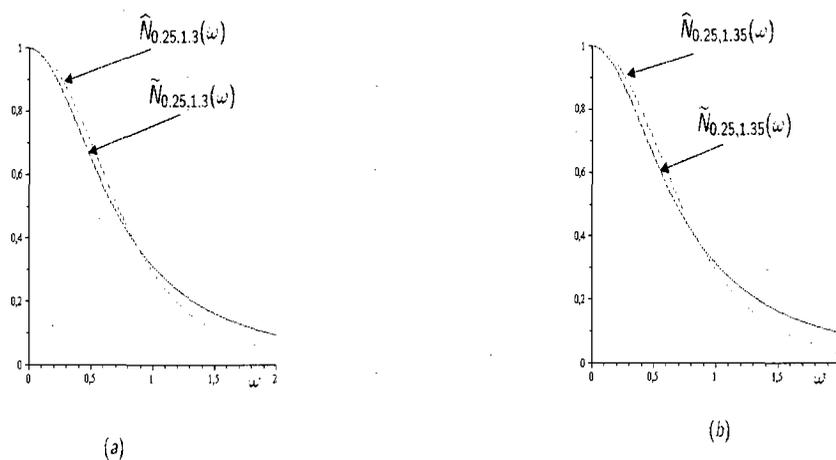
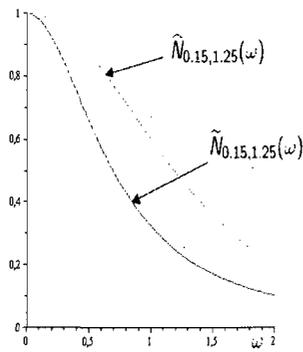
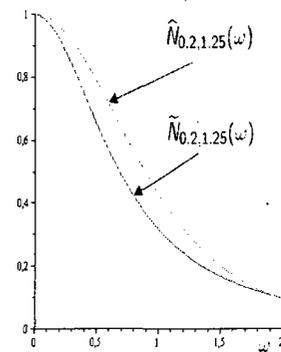


Figure 6.2: Graphes de (a) $\hat{N}_{0.25,1.3}$, $\tilde{N}_{0.25,1.3}$ et (b) $\hat{N}_{0.25,1.35}$, $\tilde{N}_{0.25,1.35}$.

6.3.2 Effet de σ .

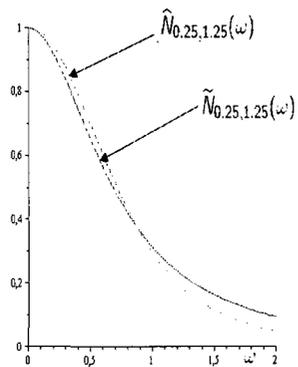


(a)

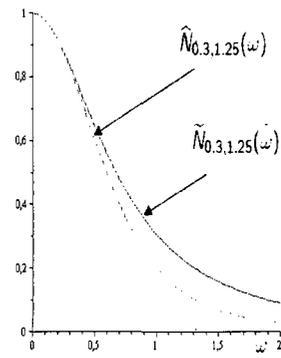


(b)

Figure 6.3: Graphes de (a) $\hat{N}_{0.15,1.25}$, $\tilde{N}_{0.15,1.25}$ et (b) $\hat{N}_{0.2,1.25}$, $\tilde{N}_{0.2,1.25}$.



(a)



(b)

Figure 6.4: Graphes de (a) $\hat{N}_{0.3,1.25}$, $\tilde{N}_{0.3,1.25}$ et (b) $\hat{N}_{0.35,1.25}$, $\tilde{N}_{0.35,1.25}$.

6.4 Application.

6.4.1 Méthodes de calcul des paramètres atmosphériques.

L'objectif principal de cette application est l'estimation des paramètres atmosphériques, à savoir l'épaisseur optique T et le paramètre de diffusion atmosphérique q , à partir de deux images de la même scène prises sous des conditions atmosphériques différentes et inconnues. Pour ce faire, considérant les deux images dégradées I_1 et I_2 données par les équations de convolution suivantes

$$\begin{cases} I_1 = I_0 * APSE_{(q_1, T_1)}, \\ I_2 = I_0 * APSE_{(q_2, T_2)}, \end{cases}$$

où I_0 est l'image originale de la scène et correspond au voile atmosphérique de l'image I_i . En appliquant la transformée de Fourier au système d'équations mentionné ci-dessus près de l'origine $(0,0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I_1)(\omega_1, \omega_2) &= \mathcal{F}(I_0)(\omega_1, \omega_2) \widehat{APSE}_{(q_1, T_1)}(\omega_1, \omega_2), \\ &\approx \mathcal{F}(I_0)(\omega_1, \omega_2) APSE_{(q_1, T_1)}(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{6.7}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I_2)(\omega_1, \omega_2) &= \mathcal{F}(I_0)(\omega_1, \omega_2) \widehat{APSE}_{(q_2, T_2)}(\omega_1, \omega_2), \\ &\approx \mathcal{F}(I_0)(\omega_1, \omega_2) APSE_{(q_2, T_2)}(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Prenant le rapport de (6.6) et (6.7) nous obtenons

$$\frac{\mathcal{F}(I_1)}{\mathcal{F}(I_2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\widehat{APSF}_{(q_1, T_1)}(\omega_1, \omega_2)}{\widehat{APSF}_{(q_2, T_2)}(\omega_1, \omega_2)} \quad (6.9)$$

$$\approx \frac{\widetilde{APSF}_{(q_1, T_1)}(\omega_1, \omega_2)}{\widetilde{APSF}_{(q_2, T_2)}(\omega_1, \omega_2)} \quad (6.10)$$

$$\approx \frac{\frac{\pi}{2kT_1} \frac{\Gamma(\frac{2}{kT_1})}{\Gamma^2(\frac{kT_1+1}{kT_1})} \frac{\Gamma(\frac{1}{kT_1})}{\Gamma(\frac{3}{kT_1})} e^{-\frac{A(kT_1, \frac{1-q_1}{q_1})^{kT_1}}{2kT_1} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{\frac{kT_1}{2}}}}{\frac{\pi}{2kT_2} \frac{\Gamma(\frac{2}{kT_2})}{\Gamma^2(\frac{kT_2+1}{kT_2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{kT_2})}{\Gamma(\frac{3}{kT_2})} e^{-\frac{A(kT_2, \frac{1-q_2}{q_2})^{kT_2}}{2kT_2} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{\frac{kT_2}{2}}}} \quad (6.11)$$

Nous savons d'après les graphes qu'au voisinage du point $(0, 0)$ la quantité $\frac{\mathcal{F}(I_1)(\omega_1, \omega_2)}{\mathcal{F}(I_2)(\omega_1, \omega_2)}$ est positive, alors en prenant le logarithme, nous obtenons

$$\alpha(\omega_1, \omega_2) \approx \ln K - \beta_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{P_1} + \beta_2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{P_2}, \quad (6.12)$$

avec $\alpha(\omega_1, \omega_2) = \ln \left(\frac{\mathcal{F}(I_1)}{\mathcal{F}(I_2)}(\omega_1, \omega_2) \right)$, $\beta_i = \frac{A(kT_i, \frac{1-q_i}{q_i})^{kT_i}}{2kT_i}$, $P_i = \frac{kT_i}{2}$, avec $(i = 1, 2)$. Nous obtenons une équation non linéaire dont les inconnus sont K , β_1 , P_1 , β_2 et P_2 .

Pour estimer ces inconnus nous utilisons la méthode des moindres carrés pour des valeurs de (ω_1, ω_2) près de l'origine. Nous utilisons SAS [36] ou Matlab [25] pour résoudre le problème. Une fois les P_i calculés nous pouvons déterminer les paramètres T_i car $T_i = \frac{2P_i}{k}$, en posant $k = \frac{1}{2}$. Après avoir calculer les β_i et les T_i , nous pouvons calculer les σ_i . Nous avons $\beta_i = \frac{A(kT_i, \sigma_i)^{kT_i}}{2kT_i}$, d'où $A(kT_i, \frac{1-q_i}{q_i}) = 2(\beta_i)^{\frac{1}{kT_i}}$. Or on sait que

$$A(kT_i, \frac{1-q_i}{q_i}) = \left(\left(\frac{1-q_i}{q_i} \right)^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{kT_i})}{\Gamma(\frac{3}{kT_i})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\frac{1-q_i}{q_i} = 2(\beta_i)^{\frac{1}{kT_i}} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{kT_i})}{\Gamma(\frac{1}{kT_i})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalement on a

$$q_i = \frac{1}{1 + 2(\beta_i)^{\frac{1}{kT_i}} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{kT_i})}{\Gamma(\frac{1}{kT_i})} \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

6.4.2 Résultats.

Dans ce qui suit nous donnons les résultats de cette approche sur deux images réelles de la même scène (cf. Figure 6.5) prises à partir de la base de données "WILD" ("Weather and Illumination Database", [7]). La vérité terrain des deux images est donnée dans le

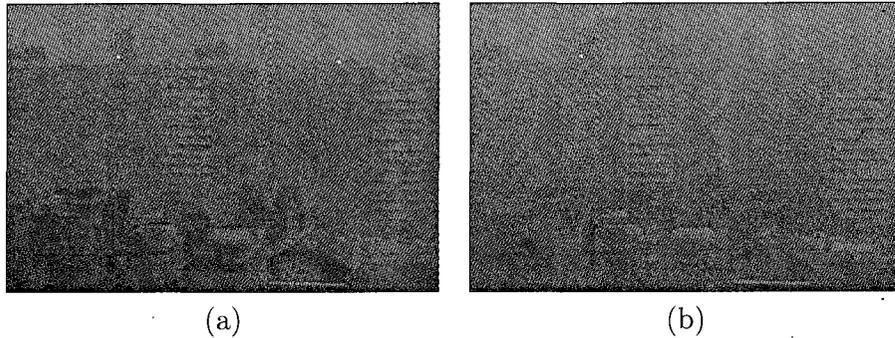


Figure 6.5: Des images réelles extraites à partir de la base de données "WILD": (a) buée, (b) brume.

Tableau 6.1. Ce dernier renferme pour chaque image, la valeur du paramètre de diffusion q qui permet de déduire le type de condition atmosphérique, la visibilité de l'atmosphère V ainsi que l'épaisseur optique de l'atmosphère. Rappelons que l'épaisseur optique est donnée par

$$T = \frac{3.91}{V} Z, \quad (6.13)$$

avec Z est la profondeur de la scène. Notons que la vérité terrain révèle une profondeur moyenne estimée à 3 miles. L'estimation des paramètres obtenue par notre approche est donnée dans le Tableau 6.2. À partir de ce tableau on voit que l'identification des types de conditions atmosphériques ainsi que des types d'atmosphère sont effectuées avec succès.

	Image "a"	Image "b"
Visibilité "V"	4 miles	4 miles
Profondeur de la profondeur "Z"	3 miles	3 miles
Épaisseur optique "T"	2.93	2.93
Paramètre de diffusion "q"	[0.8..0.85]	[0.7..0.8]
Type de condition	Buée	Brume

Tableau 6.1: Vérité terrain relative aux deux images.

	Image "a"	Image "b"
Épaisseur optique estimée \hat{T}	2.71	2.60
Paramètre de diffusion estimé \hat{q}	0.81	0.75
Type de condition	Buée	Brume

Tableau 6.2: Résultat de l'estimation des paramètres atmosphériques.

Rappelons que la relation entre le paramètre σ et le paramètre de diffusion atmosphérique q est donnée par

$$\sigma = \frac{1 - q}{q}. \quad (6.14)$$

et que la mise en correspondance entre le paramètre de diffusion atmosphérique q et les types de conditions atmosphériques est donnée par le tableau suivant.

q	0.0-0.2	0.2-0.7	0.7-0.8	0.8-0.85	0.85-0.9	0.9-1.0
Type de condition	Air	Aérosols	Brume	Buée	Brouillard	Pluie

Tableau 6.3: Tableau de correspondance entre le paramètre de diffusion atmosphérique q et les types des conditions atmosphériques.

CONCLUSION

La gaussienne généralisée est largement utilisée dans des domaines tels que la vision par ordinateur [27], le traitement d'image [19], le traitement de la voix [7], le traitement du signal [9]. Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude de la transformée de Fourier de la gaussienne généralisée dans le cas unidimensionnel et bidimensionnel. À cette fin, nous avons présenté une forme de la gaussienne généralisée dans le cas unidimensionnel et deux formes de la gaussienne généralisée pour le cas bidimensionnel. Nous avons obtenu des expressions analytiques de la transformée de Fourier de la gaussienne généralisée sous forme de séries de Maclaurin. Finalement nous avons donné une application de la transformée de Fourier de la gaussienne généralisée dans le domaine de la vision par ordinateur.

Ce travail peut être poursuivi dans différentes directions. Par exemple d'un point de vue purement mathématique il serait intéressant de faire l'étude des zéros de la série tronquée de la transformée de Fourier de la gaussienne généralisée [13]. De même le caractère oscillatoire de la transformée de Fourier et l'apparition des zéros de celle-ci pourraient être étudiés [34]. Également, les résultats obtenus pourraient servir à définir des approximations de filtres en analyse d'image.

En terminant, nous espérons que ce mémoire pourra susciter un quelconque intérêt auprès

du lecteur et qu'il saura inspirer le développement de nouveaux concepts et résultats sur les propriétés de la gaussienne généralisée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Abramowitz et I.A. Segun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [2] G. Agrò, Maximum likelihood estimation for the exponential power function parameters, *Computational Statistics and Data Analysis*, 24 (1995), 523-536.
- [3] G.E.P. Box, A note on regions for test of kurtosis, *Biometrika*, 40 (1953), 465-468.
- [4] G.E.P. Box et G. Tiao, A further look at robustness via Bayes's theorem, *Biometrika*, 49 (1962), 419-432.
- [5] G.E.P. Box et G. Tiao, *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Reading, MA, Addison-Wesley, 1973.
- [6] W.E. Boyce et R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, John Wiley et Sons, Inc, 2005.
- [7] J.H. Chang, J.W. Shin et N.S. Kim, Voice activity detector employing generalized Gaussian distribution, *Electronics letters*, 40 (2004), 1561-1563
- [8] S.T.B. Choi et S.G. Walker, The extended exponential power distribution and Bayesian robustness, *Statistics and Probability Letters*, 65 (2003), 227-232.

- [9] M. Clément, C. Adrien et B. Frédéric, *Lidar waveform analysis and processing for cartography and pattern recognition : application to urban areas*, Laboratoire MATIS - Institut Géographique National et UMR TETIS Cemagref/Cirad/ENGREF, Maison de la Télédétection, 2008
- [10] A. Desgagné et J.-F. Angers, Importance sampling with the generalized exponential power density, *Statistics and Computing*, 15 (2005), 189-196.
- [11] P.H. Dianada, Note on some properties of maximum likelihood estimates, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45 (1949), 536-544.
- [12] T.J. DiCiccio et A.C. Monti, Inferential aspects of the skew exponential power distribution *Journal of the American Statistical Association*, 99 (2004), 439-450.
- [13] J. Dieudonné, Sur les zéros des polynômes-sections de e^x , *Bulletin Sci-Math*, 70 (1935), 333-350.
- [14] J.A. Domínguez-Molina, G. González-Farías, et R.M. Rodríguez-Dagnino, *A practical procedure to estimate the shape parameter in the generalized Gaussian distribution*, Technical Report I-01-18, Investigation Center in Mathematics (CIMAT), Guanajuato, Mexico, 2001.
- [15] M. Fréchet, Sur la loi des erreurs d'observations, *Mathematicheskii Sbornik*, 32 (1924), 1-8.
- [16] G. Gasquet et P. Witomski *Analyse de Fourier et applications*, Masson, Paris 1990.
- [17] E. Gómez, M.A. Gómez-Villegas, et J.M. Marín, A multivariate generalization of the power exponential family of distributions, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 27 (1998), 589-600.
- [18] D.W. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*, Prentice Hall, New Jersey 2000.

- [19] H. Kim, R. Sakamoto, I. Kitahara, T. Toriyama et K. Kogure, Background subtraction using generalized Gaussian family mode, *Electronics letters*, 44 (2008), 189-190.
- [20] C. Kleiber et S. Kotz, *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, Wiley, 2003.
- [21] S. Kotz, T.J. Kozubowski et K. Podgorski, *The Laplace Distribution and Generalizations*, Birkhauser, 2001.
- [22] T.W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [23] H. Jakuszenkow, Estimation of the variance in the generalized Laplace distribution with quadratic loss function, *Demonstratio Mathematica*, 12 (1979), 581-591.
- [24] N.L. Johnson, S. Kotz et N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions*, Vol. II, Wiley, 1995.
- [25] Matlab User's Guide version 7.2, The MathWorks Inc., USA, 2006. reference 16
- [26] M. Maumy et J. Vauthier, *Calcul différentiel et intégral, licence de mathématiques*, Ellipse, Paris, 1998.
- [27] S. Metari et F. Deschênes, A new convolution kernel for atmospheric point spread function applied to computer vision, *IEEE 11th Conference on Computer Vision (ICCV 2007)*, Rio de Janeiro, Brazil, 14-20 oct. 2007.
- [28] A.C. Monti, A note on estimation of the skew normal and skew exponential power distributions, *Metron*, 61 (2003), 205-219.
- [29] G. Moser, J. Zerubia et S.B. Serpico, *SAR amplitude probability density function estimation based on a generalized Gaussian scattering model*, Technical Report N° 5153, INRIA, 2004.

- [30] S. Nadarajah, A generalized normal distribution, *Journal of Applied statistics*, 32 (2005), 685-694.
- [31] S. Nadarajah, Acknowledgement of priority : the generalized normal distribution, *Journal of Applied statistics*, 33 (2006), 1031-1032.
- [32] S.G. Narasimhan et S.K. Nayar, Shedding light on the weather, *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, USA, 1 (2003), 665-672.
- [33] H.A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*, Clarendon Press. OXFORD 1990
- [34] R. Varga et A. Carpenter , Zeros of the partial sums of $\cos(z)$ and $\sin(z)$, *Numerical Algorithms*, 25 (2000), 363-375.
- [35] E.G. Sánchez-Manzano, M.A. Gómez-Villegas et J.-M. Marín-Diazaraque, A matrix variate generalization of the power exponential family of distributions, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 31 (2002), 2167-2182.
- [36] SAS User's Guide version 9.2, SAS Institute Inc., Cary, NC,USA, 2002-2008.
- [37] D. Sharma, On estimating the variance of a generalized Laplace distribution, *Metrika*, 31 (1984), 85-88.
- [38] M.T. Subbotin, On the law of frequency of error, *Mathematicheskii Sbornik*, 31 (1923), 296-300.
- [39] P.R. Tadikamalla, Random sampling from the exponential power distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 75 (1980), 683-686.
- [40] J.M.G. Taylor, Properties of modelling the error distribution with an extra shape parameter, *Computational Statistics and Data Analysis*, 13 (1992), 33-46.

- [41] G.C. Tiao et D.R. Lund, The use of OLUMV estimators in inference robustness studies of the location parameter of a class of symmetric distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 65 (1970), 370-386.
- [42] C.A. Tojeiro, F. Louzada-Neto et H. Bolfarine, A Bayesian analysis for accelerated lifetime tests under an exponential power law model with threshold stress, *Journal of Applied Statistics*, 31 (2004), 685-691.
- [43] M.C. Turner, On heuristic estimation methods, *Biometrics*, 16 (1960), 299-301.
- [44] M.K. Varanasi et B. Aazhany, Parametric generalized Gaussian density function, *Journal of the Acoustical Society of America*, 86 (1989), 1404-1415.
- [45] S. Vianelli, La misura della variabilita condizionata in uno schema generale delle curve normali di frequenza, *Statistica*, 42 (1963), 155-176.
- [46] R. Zeckhauser et M. Thompson, Linear regression with non-normal error terms, *Review of Economics and Statistics*, 52 (1970), 280-286.