



UNIVERSITÉ DE  
**SHERBROOKE**

Faculté de génie  
Département de génie mécanique

# Modélisation et conception de microrésonateurs piézoélectriques pour la récupération d'énergie vibratoire

Mémoire de maîtrise  
Spécialité : génie mécanique

André Dompierre

Jury : Luc G. FRÉCHETTE (directeur)  
Alain BERRY  
François CHARRON

Sherbrooke (Québec) Canada

Août 2011

V-2154



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Your file Votre référence  
ISBN: 978-0-494-83728-3

Our file Notre référence  
ISBN: 978-0-494-83728-3

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

**Canada**

# RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une méthodologie pour la conception de résonateurs piézoélectriques destinés à la transformation de l'énergie des vibrations en électricité. Cette méthodologie incorpore l'effet du couplage piézoélectrique, considère une vaste gamme de géométries, ainsi que les limites reliées à la contrainte induite sur la structure pour guider le dimensionnement des couches piézoélectriques. Tout d'abord, un modèle analytique a été développé afin d'évaluer le comportement des poutres en porte-à-faux composites soumises à des forces inertielles. Celui-ci utilise les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour déterminer le comportement et les paramètres d'influence de la géométrie continue. Ce modèle a ensuite été réduit autour du mode fondamental à l'aide des coefficients et des paramètres équivalents pertinents. Par cette approche, de nouvelles expressions compactes, mais rigoureuses pour évaluer le déplacement, la tension, le courant et la puissance ont été formulées. Il a été démontré que l'effet piézoélectrique affecte la dynamique du résonateur comme une raideur et un amortissement électriques qui agissent simultanément. L'analyse de cette dynamique couplée a permis de reconfirmer formellement que l'amortissement électrique doit être équivalent à l'amortissement mécanique pour optimiser la puissance produite. Ce principe est utilisé afin de déterminer la charge électrique optimale et pour définir un nouveau critère comparatif des matériaux, le critère de couplage critique. Utilisé conjointement avec une démarche permettant d'isoler l'effet de la géométrie sur le couplage, ce critère est aussi utile pour le dimensionnement des couches piézoélectriques. Il permet d'évaluer le besoin du couplage pour optimiser les performances à partir du niveau d'amortissement mécanique intrinsèque du système. Ce critère démontre donc que la diminution de l'amortissement mécanique est prioritaire, car elle permet d'améliorer la puissance par unité de masse tout en éliminant la nécessité d'employer des matériaux à fort couplage ou des couches piézoélectriques épaisses.

Les études paramétriques menées démontrent que les gains de performance importants sont effectivement reliés au dimensionnement de la couche dans la région de couplage sous critique, mais aussi principalement grâce à une augmentation du facteur de qualité de la structure. Il faut également minimiser la longueur de la poutre et maximiser sa masse sismique pour optimiser la puissance produite à une fréquence de résonance donnée, car ceci maximise la contrainte induite. La méthodologie proposée permet finalement de dimensionner des résonateurs piézoélectriques dans une perspective réaliste qui tient compte de la contrainte maximale et de son effet sur la fiabilité à long terme. Celle-ci a mis en évidence qu'outre le niveau de puissance visée ou les caractéristiques de la source de vibration disponible, c'est le niveau d'amortissement mécanique qui guide les spécifications géométriques obtenues. L'atténuation des pertes mécaniques devrait alors guider tous les choix de conception pour permettre de miniaturiser la masse. Ceci a par contre un effet sur la longueur requise pour limiter la contrainte induite, ce qui démontre qu'un compromis entre les performances et le coût est inévitable. Cela dit, il semble réaliste de viser des puissances de l'ordre de 1 à 10  $\mu\text{W}$  pour un microsystème électromécanique soumis à une source de vibration de 0.1 G d'amplitude dans une plage de 150 Hz à 1.5 kHz.

**Mots-clés :** modélisation, conception, optimisation, vibration, amortissement, couplage, résonateur, piézoélectrique



# REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, le professeur Luc G. Fréchette. Sous sa supervision, j'ai grandement appris à voir les choses dans une perspective globale. Grâce à son approche très personnelle et ses interventions toujours pertinentes, il m'a permis d'être plus apte à présenter mes travaux de manière convaincante. Son appui a aussi permis d'attiser une passion pour la recherche qui, dans un contexte de supervision différent, aurait très bien pu s'éteindre.

Je voudrais aussi adresser des remerciements aux autres membres, actuels ou passés, du laboratoire Micros. Tout d'abord, à Amahdreza Tabesh pour son aide à propos de l'effet piézoélectrique. Ses explications m'ont permis de mieux comprendre l'influence du couplage électromécanique et d'être plus confiant pour la suite de mes travaux. Je voudrais aussi souligner les contributions d'Aurore Cabasse et Étienne Léveillé qui ont permis de faire progresser ce projet sur d'autres fronts. Je tiens également à remercier le professeur Srikar Vengalatorre pour son apport à ce projet, car certaines problématiques auraient pu être négligées sans ses interventions pertinentes.

Merci également à Simon Hamel, Lucas Dupuis, Pascal Newby et Moktar Liamini, car ils ont su m'accueillir dans l'esprit de camaraderie qui règne au sein du groupe Micros. J'aimerais de plus remercier mon ami Alexandre Beaulieu, ainsi que mes collègues de bureau pour le précieux soutien moral.

Finalement, je remercie ces organismes pour l'appui financier qu'ils ont fourni à la réalisation de ce projet : le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et la compagnie General Motors of Canada (et plus spécialement le Dr. Carlton Fuerst).



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1	Mise en contexte . . . . .	1
1.2	Caractéristiques des vibrations automobiles . . . . .	2
1.3	Principe de fonctionnement d'un générateur résonant . . . . .	4
1.4	Modélisation des résonateurs piézoélectriques . . . . .	6
1.5	Contraintes et défis liés à la microfabrication . . . . .	14
1.6	Comparaison des résonateurs piézoélectriques fabriqués . . . . .	16
1.7	Problématiques et objectifs . . . . .	17
1.8	Méthodologie . . . . .	18
1.9	Contributions . . . . .	19
<b>2</b>	<b>PRÉSENTATION DES MODÈLES</b>	<b>21</b>
2.1	Géométries du problème . . . . .	21
2.2	Équations mécaniques . . . . .	24
2.3	Équations électriques . . . . .	27
2.4	Équations de couplage obtenues . . . . .	31
2.5	Résolution du problème de vibration couplé . . . . .	38
2.6	Solution autour d'un mode fondamental . . . . .	45
2.7	Résumé de la modélisation . . . . .	53
<b>3</b>	<b>ANALYSE DE LA DYNAMIQUE COUPLÉE</b>	<b>57</b>
3.1	Comportement de la raideur et de l'amortissement électrique . . . . .	57
3.2	Solutions à la résonance . . . . .	59
3.3	Optimisation de la puissance produite . . . . .	60
3.4	Définition du couplage critique . . . . .	62
3.5	Évaluations des paramètres pour une puissance optimale . . . . .	67
3.6	Résumé et conclusion sur la dynamique couplée . . . . .	71
<b>4</b>	<b>ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LE COUPLAGE</b>	<b>73</b>
4.1	Comment évaluer l'effet de la géométrie . . . . .	73
4.2	Analyse des facteurs de forme . . . . .	74
4.3	Discussion sur l'effet du champ de potentiel quadratique . . . . .	77
4.4	Application numérique - Variation de l'épaisseur active . . . . .	78
4.5	Résumé et conclusion de l'étude géométrique . . . . .	86
<b>5</b>	<b>MÉTHODE DE DIMENSIONNEMENT</b>	<b>89</b>
5.1	Effet de la variation du volume de la poutre . . . . .	89
5.2	Contexte et objectifs . . . . .	92
5.3	Choix et définition des paramètres de conception . . . . .	92
5.4	Analyse préliminaire . . . . .	95
5.5	Définition des figures de mérite considérées . . . . .	97

5.6	Utilisation de la méthode de conception . . . . .	99
5.7	Mise à l'échelle et limite de puissance pour les MEMS . . . . .	107
5.8	Résumé et conclusion à propos du dimensionnement . . . . .	108
<b>6</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>113</b>
6.1	Sommaire . . . . .	113
6.2	Contributions . . . . .	116
6.3	Travaux futurs . . . . .	117
<b>A</b>	<b>ÉQUATIONS PIÉZOÉLECTRIQUES RÉDUITES</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>DÉVELOPPEMENTS POUR LE BIMORPHE</b>	<b>121</b>
B.1	Équations mécaniques pour le bimorphe . . . . .	121
B.2	Équations de couplage pour le bimorphe . . . . .	122
<b>C</b>	<b>DÉFINIR UNE FONCTION DE POTENTIEL COMPATIBLE</b>	<b>125</b>
C.1	Visualisation à l'aide des éléments finis . . . . .	125
C.2	Forme générale et hypothèses . . . . .	125
C.3	Analyse de l'impact du cisaillement . . . . .	128
C.4	Évaluation pour une poutre homogène et conclusion . . . . .	130
<b>D</b>	<b>DÉVELOPPEMENTS RELATIFS À L'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE</b>	<b>133</b>
D.1	Rappel des variables importantes . . . . .	133
D.2	Équations des déformées statiques normalisées . . . . .	133
D.3	Calcul des facteurs de forme . . . . .	138
D.4	Coefficient de correction en fonction du rapport des masses . . . . .	145
D.5	Influence du profil quadratique . . . . .	146
<b>E</b>	<b>DÉVELOPPEMENTS RELATIFS AU DIMENSIONNEMENT</b>	<b>149</b>
E.1	Évaluation de la contrainte maximale . . . . .	149
E.2	Résolution des équations du dimensionnement . . . . .	151
	<b>LISTE DES RÉFÉRENCES</b>	<b>155</b>

# LISTE DES FIGURES

1.1	Spectre des vibrations d'un capot d'automobile . . . . .	3
1.2	Spectre des accélérations disponibles dans deux types de véhicules . . . . .	3
1.3	Système d'axes et indices utilisés pour les propriétés piézoélectriques . . . . .	6
1.4	Schéma simplifié du modèle du résonateur piézoélectrique 1-D . . . . .	8
1.5	Exemple de réponse en fréquence de la puissance générée par un résonateur piézoélectrique . . . . .	10
1.6	Schéma d'une poutre en porte-à-faux bimorphe . . . . .	12
1.7	Tendance de la puissance générée en fonction de la fréquence, la masse et le coefficient de couplage . . . . .	13
2.1	Schéma de la poutre unimorphe . . . . .	22
2.2	Schéma de la poutre bimorphe . . . . .	23
2.3	Variation du potentiel électrique selon l'épaisseur . . . . .	30
2.4	Variation du potentiel électrique selon la longueur . . . . .	30
2.5	Circuit équivalent de l'unimorphe piézoélectrique . . . . .	32
2.6	Circuits équivalents du bimorphe piézoélectrique . . . . .	34
2.7	Décalage relatif du premier mode d'une poutre piézoélectrique en fonction du ratio d'épaisseur active . . . . .	37
2.8	Coefficient correcteur sur la force en fonction du rapport de la masse au bout sur la masse de la poutre . . . . .	48
2.9	Réponse en fréquence du déplacement au bout de la poutre en fonction de la charge électrique . . . . .	52
2.10	Réponse en fréquence de la tension en fonction de la charge électrique . . . . .	52
2.11	Réponse en fréquence du courant en fonction de la charge électrique . . . . .	52
2.12	Réponse en fréquence de la puissance en fonction de la charge électrique . . . . .	53
2.13	Schéma de la démarche de modélisation . . . . .	54
3.1	$\Delta\Omega_n^2$ et $\zeta_{el}$ en fonction de la charge résistive du circuit . . . . .	58
3.2	$\Delta\Omega_n^2$ et $\zeta_{el}$ en fonction de la fréquence d'excitation . . . . .	58
3.3	Tendance de la puissance générée en fonction de l'amortissement électrique et mécanique . . . . .	61
3.4	Amortissement électrique à la résonance en fonction de la charge électrique . . . . .	63
3.5	Tendance de la puissance produite en fonction de la charge électrique et du coefficient de couplage . . . . .	64
3.6	Couplage effectif et facteur de qualité par rapport au couplage critique pour diverses classes de matériaux piézoélectriques . . . . .	67
3.7	Charge optimale en fonction du couplage effectif et de l'amortissement mécanique (condition de couplage optimale) . . . . .	69
4.1	Facteur de forme sur le couplage pour la configuration de l'unimorphe et du bimorphe . . . . .	75

4.2	Facteur de couplage effectif corrigé en considérant l'influence du champ quadratique . . . . .	77
4.3	Variation de la fréquence de résonance en fonction du couplage effectif et de l'amortissement mécanique . . . . .	79
4.4	Variation de la résistance optimale en fonction de la fraction d'épaisseur piézoélectrique et de l'amortissement mécanique . . . . .	80
4.5	Variation de la tension RMS en fonction de la fraction d'épaisseur piézoélectrique et de l'amortissement mécanique . . . . .	81
4.6	Variation du courant RMS en fonction de la fraction d'épaisseur piézoélectrique et de l'amortissement mécanique . . . . .	82
4.7	Variation de la puissance en fonction de la fraction d'épaisseur piézoélectrique et de l'amortissement mécanique . . . . .	83
4.8	Variation de la puissance en fonction du couplage effectif et de l'amortissement mécanique . . . . .	84
4.9	Variation du déplacement au bout de la poutre en fonction du couplage effectif et de l'amortissement mécanique . . . . .	85
5.1	Variation de la puissance et de la contrainte maximale en fonction de la longueur	91
5.2	Schéma de la méthode de dimensionnement . . . . .	96
5.3	Variation de la puissance spécifique et de la puissance surfacique en fonction du facteur de couplage . . . . .	106
5.4	Mise à l'échelle de la longueur et de l'épaisseur en fonction de la puissance visée et de la fréquence . . . . .	108
5.5	Mise à l'échelle de la masse au bout en fonction de la puissance visée et de la fréquence . . . . .	108
5.6	Variation de la tension et du courant RMS en fonction de la puissance visée et de la fréquence . . . . .	109
C.1	Forme du champ de potentiel dans la couche piézoélectrique pour le premier mode de vibration . . . . .	125
C.2	Forme du champ de potentiel dans la couche piézoélectrique pour le second mode de vibration . . . . .	125
C.3	Forme de la contrainte normale dans la poutre pour le premier mode de vibration	126
C.4	Forme de la contrainte normale dans la poutre pour le second mode de vibration	126
C.5	Forme de la contrainte de cisaillement dans la poutre pour le premier mode de vibration . . . . .	126
C.6	Forme de la contrainte de cisaillement dans la poutre pour le second mode de vibration . . . . .	126
D.1	Vue de la surface d'une poutre en trapèze . . . . .	135
D.2	Coefficient de correction pour une poutre trapèze en fonction du rapport des largeurs . . . . .	143
D.3	Coefficient de correction pour une couverture partielle de l'électrode. . . . .	145
D.4	Coefficient de correction sur le couplage en fonction du rapport de la masse au bout sur la masse de la poutre. . . . .	146

D.5 Contribution géométrique de la composante quadratique du champ de tensions sur la raideur ..... 148



# LISTE DES TABLEAUX

1.1	Caractéristiques des vibrations sur le capot d'une voiture . . . . .	2
1.2	Comparaison des méthodes de conversion d'énergie vibratoire . . . . .	5
1.3	Propriétés piézoélectriques répertoriées . . . . .	14
1.4	Comparaison de plusieurs dispositifs piézoélectriques . . . . .	16
2.1	Paramètres utilisés pour la simulation et l'évaluation analytique du décalage relatif du premier mode . . . . .	38
2.2	Paramètres géométriques et électromécaniques utilisés pour générer les réponses fréquentielles . . . . .	51
2.3	Comparaison des résultats expérimentaux de Erturk et des résultats fournis par le modèle développé . . . . .	54
2.4	Paramètres utilisés pour la comparaison des résultats . . . . .	54
4.1	Paramètres utilisés pour l'étude géométrique . . . . .	79
5.1	Paramètres fixés par le choix des matériaux . . . . .	93
5.2	Paramètres intermédiaires pour le dimensionnement . . . . .	94
5.3	Paramètres d'entrée pour la méthode de conception . . . . .	99
5.4	Propriétés des matériaux utilisées pour les calculs . . . . .	99
5.5	Dimensions des poutres obtenues à partir de la méthode de conception . . . . .	100
5.6	Paramètres équivalents des poutres obtenues . . . . .	100
5.7	Paramètres de sortie pour les divers matériaux employés . . . . .	100
5.8	Comparaison des poutres en PZT-4 obtenues pour trois sources d'accélération . . . . .	102
5.9	Comparaison de la puissance normalisée des dispositifs conçus avec ceux répertoriés dans la littérature . . . . .	104
5.10	Effet d'un suramortissement de la poutre sur les résultats de la méthode de conception . . . . .	105
C.1	Propriétés utilisées et valeurs des contributions mécanique et piézoélectrique à la raideur en flexion . . . . .	132
D.1	Liste des valeurs et leur signification . . . . .	134



# LISTE DES SYMBOLES

$b$	Largeur de la poutre
$C_{el}$	Constante d'amortissement électrique du système
$C_m$	Constante d'amortissement mécanique du système
$C_p$	Capacité de la couche piézoélectrique
$D$	Déplacements électriques
$d_{ij}$	Constante piézoélectrique pour le mode de polarisation $i - j$
$E$	Champs électriques
$f$	Facteur de forme sur le couplage
$f_n(t)$	Force d'excitation inertielle modale
$FS$	Facteur de sécurité sur la contrainte, $FS = \sigma_u / \sigma_{max}$
$f'$	Rapport des inerties des sections piézoélectriques sur la section de la poutre
$h_a$	Position de la surface inférieure de la poutre unimorphe par rapport à l'axe neutre
$h_b$	Position de l'interface piezo/substrat de la poutre unimorphe par rapport à l'axe neutre
$h_c$	Position de la surface supérieure de la poutre unimorphe par rapport à l'axe neutre
$h_p$	Épaisseur d'une couche piézoélectrique
$h_s$	Épaisseur de la couche de support mécanique ou de substrat
$\tilde{h}$	Rapport de l'épaisseur du matériau piézoélectrique sur celle du substrat, $\tilde{h} = h_p / h_s$
$i$	Courant généré par la couche piézoélectrique
$I_0$	Phaseur du courant en sortie
$I_{RMS}$	Valeur RMS du courant en sortie, $I_{RMS} =  I_0  / \sqrt{2}$
$k_e$	Facteur de couplage effectif du système, $k_e = \sqrt{\vartheta_n^2 / (K_m C_p)}$
$k_{ij}$	Facteur de couplage du matériau piézoélectrique pour le mode de polarisation $i - j$
$K_{el}$	Raideur électrique du système
$K_m$	Raideur mécanique équivalente du système
$L$	Longueur de la poutre
$L_{eq}$	Inductance équivalente de la charge électrique externe
$m$	Masse linéique de la poutre
$M_{eq}$	Masse équivalente du système
$M_t$	Masse déposée au bout de la poutre
$M_z(x, t)$	Moment de flexion interne dans la poutre
$P$	Puissance électrique moyenne en sortie
$P_M$	Puissance spécifique
$P_S$	Puissance surfacique
$P_p$	Densité de puissance
$q$	Quantité de charges générées par la couche piézoélectrique
$Q$	Facteur de qualité, $Q = 1 / (2\zeta_m)$
$r$	Rapport d'aspect surfacique de la poutre, $r = b / L$
$R$	Fraction de l'épaisseur de la poutre occupée par le matériau piézoélectrique
$R_{eq}$	Résistance équivalente de la charge électrique externe
$s_{ij}$	Coefficients de la matrice de souplesse $s$
$S$	Matrice des déformations

$T$	Tenseur des contraintes
$t$	Temps
$U_p$	Volume de matériau piézoélectrique composant la poutre
$v(t)$	Différence de potentiel entre les électrodes de la couche piézoélectrique
$v^p(t)$	Différence de potentiel pour le branchement en parallèle
$v^s(t)$	Différence de potentiel pour le branchement en série
$V(x, y, t)$	Champs de potentiel dans la couche piézoélectrique
$V_0$	Phaseur de la tension en sortie
$V_{RMS}$	Valeur RMS de la tension en sortie, $V_{RMS} =  V_0 /\sqrt{2}$
$w(x, t)$	Déplacement relatif de la fibre neutre à la position $x$ par rapport à la base
$w_b$	Déplacement de l'encastrement à la base
$\hat{w}_n(x)$	Déformée modale normalisée
$x$	Position horizontale par rapport à l'encastrement de la poutre
$x_1$	Position horizontale du début de l'électrode
$x_2$	Position horizontale de la fin de l'électrode
$x_t$	Position horizontale de la masse ajoutée
$y$	Position verticale par rapport à l'axe neutre de la poutre
$Y_s$	Module d'élasticité du substrat en contrainte plane, $Y_s = s_{11s}^{-1}$
$Y_p$	Module d'élasticité du matériau piézoélectrique en contrainte plane, $Y_p = s_{11p}^{-1}$
$\bar{Y}$	Rapport des modules d'élasticité, $\bar{Y} = Y_p/Y_s$
$YI$	Module de rigidité en flexion
$Z_{eq}$	Impédance électrique de la charge externe
$\alpha$	Charge résistive adimensionnelle, $\alpha = \omega_n R_{eq} C_p$
$\Delta\Omega_n^2$	Décalage de la résonance provenant de l'effet piézoélectrique, $\Delta\Omega_n^2 = K_{el}/K_m$
$\eta_n$	Phaseur du déplacement modale
$\epsilon_0$	Permittivité du vide ( $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ C/(m V))
$\epsilon^S$	Matrice des permittivités du matériau piézoélectrique sous déformation constante
$\epsilon^T$	Matrice des permittivités du matériau piézoélectrique sous contrainte constante
$\mu$	Facteur de correction sur la force
$\nu$	Facteur de correction sur le couplage effectif
$\omega$	Pulsation de l'excitation
$\omega_n$	Pulsation naturelle de la poutre piézoélectrique (court-circuit)
$\omega'_n$	Pulsation de résonance de la poutre piézoélectrique (couplage)
$\Omega_n$	Rapport de fréquence, $\Omega_n = \omega/\omega_n$
$\Omega'_n$	Rapport de fréquence à la résonance, $\Omega'_n = \omega'_n/\omega_n = \sqrt{1 + \Delta\Omega_n^2}$
$\rho_p$	Densité du matériau piézoélectrique
$\rho_s$	Densité du substrat
$\sigma_{max}$	Contrainte normale maximale
$\sigma_u$	Résistance en flexion du matériau
$\sigma_x(x, y, t)$	Contrainte normale de flexion
$\bar{\sigma}_p$	Contribution piézoélectrique à la contrainte maximale
$\theta$	Coefficient de couplage électromécanique de la couche piézoélectrique
$\theta^p$	Coefficient de couplage électromécanique du bimorphe en parallèle
$\theta^s$	Coefficient de couplage électromécanique du bimorphe en série
$\vartheta_n$	Coefficient de couplage électromécanique modale du système
$\zeta_{el}$	Facteur d'amortissement électrique du système, $\zeta_{el} = C_{el}/(2\omega_n M_{eq})$
$\zeta_m$	Facteur d'amortissement mécanique du système, $\zeta_m = C_m/(2\omega_n M_{eq})$

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Mise en contexte

L'industrie de l'automobile représente un secteur particulièrement compétitif à l'échelle mondiale. Les constructeurs tentent de demeurer concurrentiels en matière de fonctionnalités, de fiabilité, de performances, de consommation en carburant et de confort alors qu'ils sont également soumis à de nombreuses normes et réglementations toujours plus exigeantes sur la sécurité et le respect de l'environnement. L'atteinte de ces objectifs nécessite une amélioration constante de leurs produits. Le développement des technologies de communication sans fil, notamment leur miniaturisation, jumelé à l'utilisation de capteurs microfabriqués (*Micro Electromechanical Systems* ou *MEMS*) permet de considérer l'implantation de systèmes intelligents<sup>1</sup> dans les véhicules comme une solution intéressante à ce problème. Dans une automobile, le nombre de ces capteurs pourrait facilement dépasser la centaine. L'alimentation de ceux-ci demeure toutefois problématique, car l'utilisation de fils entraînerait une hausse du coût très importante principalement reliée à la main-d'oeuvre lors de l'installation. Des kilomètres de fils seraient également nécessaires, ce qui complexifierait encore davantage l'assemblage. L'idéal serait alors d'opter pour des capteurs autonomes qui disposent de leur propre source d'alimentation ; une source qui serait à la fois miniature, peu coûteuse et durable. Les piles électrochimiques représentent la seule technologie actuellement disponible sur le marché qui répond aux deux premiers critères. Elle demeure cependant inadéquate, car sa durée de vie limitée requerrait des entretiens fréquents et exhaustifs pour remplacer ou recharger les piles usées qui seraient distribuées dans le véhicule.

Une alternative envisageable consiste plutôt à récolter et transformer l'énergie localement disponible dans l'environnement du capteur (gradient thermique, gradient de pression, radiation solaire, vibrations, ondes électromagnétiques, etc.) pour fournir l'électricité requise par ce dernier. Un réseau de capteurs pourrait alors être intégré très facilement et à faible coût dans un véhicule. À cette fin, les méthodes d'extraction d'énergie vibratoire présentent beaucoup d'intérêt puisque plusieurs sources de vibrations de haute qualité, à des fréquences entre 20 à 200 Hz et des accélérations de l'ordre de 0.1 à 1 g, sont généralement disponibles dans un véhicule

---

<sup>1</sup>Dans le cadre actuel, un système intelligent pourrait se définir comme « un ensemble de capteurs MEMS distribués et reliés en réseau sans fil. »

(dans le compartiment moteur ou le système de direction par exemple) [46, 47]. Certaines de ces méthodes exploitent l'accélération de la source pour porter à la résonance une structure électromécanique secondaire. Cette approche est dite « inertielle » et elle se différencie d'une approche directe qui exploite la déformation de la source elle-même. La concordance entre la fréquence de la source et celle propre au dispositif pose alors plusieurs défis. De plus, les densités de puissance atteintes<sup>2</sup> par ces systèmes doivent être améliorées pour considérer leur miniaturisation et leur implantation pratique dans un véhicule.

## 1.2 Caractéristiques des vibrations automobiles

L'idée d'exploiter les vibrations ambiantes pour alimenter les capteurs dans une automobile est très attrayante, puisqu'il s'agit d'une source d'énergie abondante dans un véhicule en marche. Par exemple, des données recueillies par Roundy [49] démontrent que des vibrations ayant une accélération de l'ordre de  $12 \text{ m/s}^2$  dans une plage de fréquences avoisinant les 200 Hz sont disponibles dans le compartiment moteur. Le panneau d'instrumentation est aussi une source potentielle, puisque des vibrations de  $3 \text{ m/s}^2$  d'amplitude d'accélération à une fréquence de 13 Hz y ont été mesurées.

Dans une étude similaire, Dutoit [9] a entre autres caractérisé les vibrations qui se propagent sur le capot d'une voiture afin d'évaluer leur potentiel d'exploitation pour ce type d'usage. La figure 1.1 contient les spectres en fréquence qu'il a mesurés au centre du capot, lorsque la voiture était stationnée et avec le moteur en marche à des régimes de 750 tours/minute et 3000 tours/minute. Le tableau 1.1 résume les caractéristiques des vibrations dominantes pour chaque régime.

Tableau 1.1 Caractéristiques des vibrations sur le capot d'une voiture<sup>[9]</sup>.

	Accél. ( $\text{m/s}^2$ )	Fréquence (Hz)
<b>750 RPM</b>	0.0744	35.6
	0.0143	148.8
	0.0103	510.6
<b>3000 RPM</b>	0.257	147.5
	0.102	880.6

De plus, comme le démontre la figure 1.2, des vibrations de l'ordre de 0.1 à 0.5 g et à de très basses fréquences ( $< 50 \text{ Hz}$ ) sont aussi disponibles aux environs de la suspension, des pneus, du système de direction et du moteur [57]. Les fréquences des vibrations mécaniques intéressantes se trouvent donc dans une plage inférieure à 1 kHz.

<sup>2</sup>La densité de puissance est généralement décrite comme « le rapport de la puissance produite sur le volume occupé ou balayé par le mécanisme de transformation d'énergie. »

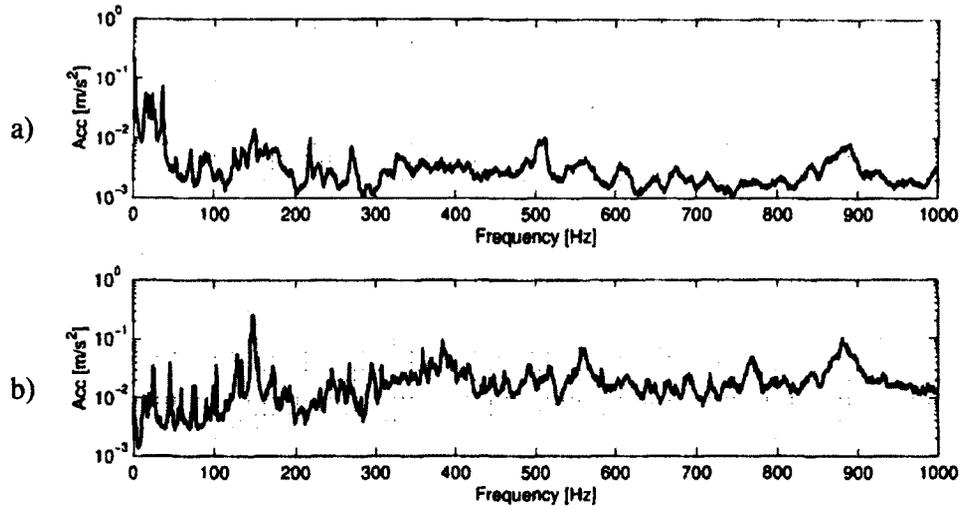


Figure 1.1 Spectre des vibrations d'un capot d'automobile à a) 750 RPM et b) 3000 RPM [9].

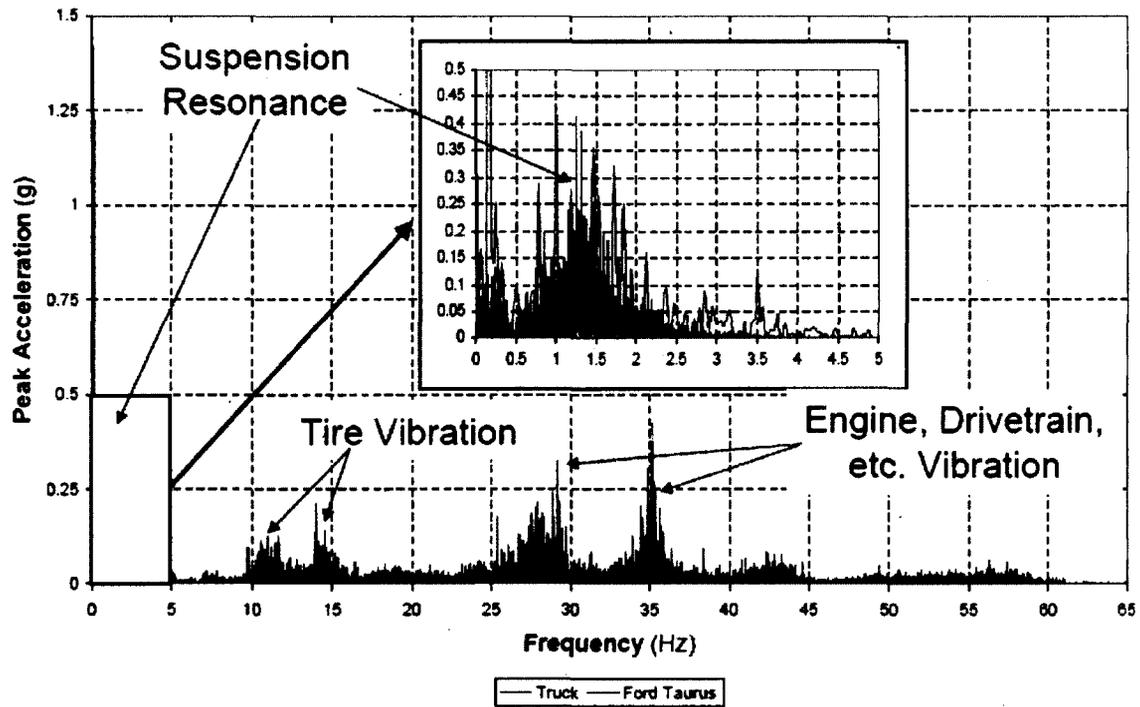


Figure 1.2 Spectre des accélérations disponibles dans deux types de véhicules [57].

Malgré tout, il est important de considérer que les modes de vibrations d'une voiture sont propres à celle-ci, car en effet, ils peuvent différer même pour deux véhicules d'un même modèle. La fréquence de ces modes aura également tendance à changer avec le temps pour plusieurs raisons (régime moteur, état de la route, usure des éléments mécaniques).

### 1.3 Principe de fonctionnement d'un générateur résonant

Depuis quelques années, la recherche sur les méthodes d'extraction d'énergie vibratoire s'intensifie afin de trouver une solution adéquate et durable qui permettra d'alimenter des capteurs sans fil. L'un des principes qui semble prometteur est celui du générateur résonant. Tel que son nom l'indique, un système de ce type doit fonctionner en résonance et donc être sollicité près de sa fréquence naturelle. Ce principe d'opération permet alors d'obtenir un bon couplage entre la source de vibrations et le dispositif de récupération d'énergie, car l'amplitude des déformations induites par la force inertielle se trouve amplifiée significativement. Il est également préférable de minimiser les pertes par amortissement mécanique pour favoriser un maximum de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.

#### 1.3.1 Trois types de générateurs

Trois mécanismes de transduction ont été établis et étudiés à ce jour :

- l'effet électromagnétique ;
- l'effet électrostatique ;
- l'effet piézoélectrique.

Chaque méthode présente ses avantages et inconvénients. Le tableau 1.2 présente un résumé des caractéristiques de chaque méthode de conversion d'énergie de vibrations mécaniques en énergie électrique.

Bien que la transduction électrostatique soit un mécanisme plus facile à intégrer dans des dispositifs MEMS, il nécessite une source de tension externe. Cette méthode est alors très peu pratique pour une application dans des véhicules. De plus, les densités de puissance atteintes par ces dispositifs sont plus faibles que pour les deux autres types. La transduction électromagnétique permet quant à elle de générer des densités de puissance intéressantes, mais elle est la plus difficile à mettre en oeuvre dans des microdispositifs. Les tensions produites sont également très faibles ( $< 1$  V). L'utilisation des matériaux piézoélectriques permet de développer des tensions de l'ordre de 1 à 20+ V et des densités de puissance élevées (de l'ordre de 50 à 400  $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ ). Par

Tableau 1.2 Comparaison des méthodes de conversion d'énergie vibratoire[39].

Transduction	Électrostatique	Électromagnétique	Piézoélectrique
Tension de sortie	élevée ( $\approx 40$ V) pour être efficace	faible ( $< 1$ V)	moyenne à élevée (1 à 20+ V)
Densité de puissance	très faible	moyenne	élevé (50 à 400 $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ )
Miniaturisation	facile	difficile	moyenne
Spécificités	requiert une source externe	matériaux exotiques	propriétés des couches minces moins bonnes qu'en bloc massif

contre, l'intégration de plusieurs de ces matériaux dans les procédés de microfabrication n'est pas encore maîtrisée et est parfois même incompatible avec le procédé standard CMOS, ce qui pose un défi supplémentaire [41, 49]. Malgré tout, c'est cette méthode qui se présente comme le choix le plus intéressant dans le cadre de ce projet. Elle semble en effet la mieux adaptée pour une intégration dans des microdispositifs destinés à être installés dans un véhicule.

### 1.3.2 Limite du principe résonant

Afin d'être fonctionnel, le générateur résonant doit opérer à l'une de ses fréquences propres. Par contre, lorsque la fréquence d'excitation dévie légèrement du mode de résonance, la puissance électrique se voit réduite de plusieurs ordres de grandeur. En pratique, elle peut devenir insuffisante au point de compromettre le fonctionnement adéquat du capteur qui lui serait annexé. Sous cette condition, la performance du dispositif est alors fortement dépendante de la fréquence des vibrations disponibles dans le milieu. Ce comportement est problématique pour l'intégration dans tous systèmes où les vibrations produites par la source peuvent varier sur une plage de fréquences plus ou moins grande, comme c'est le cas dans une automobile. Différentes solutions ont déjà été proposées afin de traiter ce problème et la plupart d'entre elles consiste à permettre un ajustement de la fréquence de résonance à l'aide de différents mécanismes actifs (ex : raideur [5] ou masse variable [19]) ou passifs (ex : effet d'étirement non linéaire [10], couplage magnétique [4], matrice de résonateurs dans un seul dispositif [39]). Par contre, bien que l'aspect de la dépendance fréquentielle représente en effet un problème majeur qui doit être surmonté afin de concevoir un récupérateur d'énergie vibratoire fonctionnel, il ne sera pas abordé davantage dans le cadre de la présente étude afin d'en limiter le spectre.

## 1.4 Modélisation des résonateurs piézoélectriques

L'effet piézoélectrique est la propriété que possèdent certains matériaux de se charger électriquement sous l'effet d'une déformation mécanique. L'idée derrière ce type de résonateurs est donc de coupler un matériau ayant cette propriété à une structure hôte qui imposera ses déplacements sur celui-ci. Ce couplage, dont l'intensité dépend de plusieurs facteurs qui seront abordés dans ce document, a des effets très précis sur le comportement dynamique du résonateur.

### 1.4.1 Modélisation de l'effet piézoélectrique

La modélisation linéaire de l'effet piézoélectrique est basée sur l'ancienne norme de 1987 établi par l'IEEE [55]. Puisqu'il s'agit de matériaux anisotropes, leurs propriétés sont représentées sous forme de tenseurs. La figure 1.3 représente le système d'axes associé aux indices de chaque terme et l'indice 3 représente le sens de polarisation du matériau piézoélectrique.

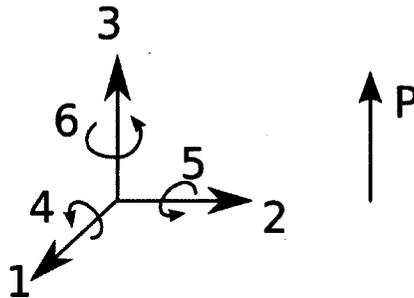


Figure 1.3 Système d'axes et indices utilisés pour les propriétés piézoélectriques. Les indices 4, 5 et 6 représentent des rotations autour des axes 1, 2 et 3 respectivement.

Les tenseurs des contraintes mécaniques  $T_{ij}$  et des déformations  $S_{ij}$  sont reliés entre eux par les souplesses  $s_{ijk}$  (ou les rigidités  $c_{ijk}$ ), tout comme pour les matériaux non piézoélectriques, mais aussi par les tenseurs des champs électriques  $E_{ij}$  et des déplacements électriques  $D_{ij}$ . C'est sur ces deux derniers tenseurs qu'agissent les coefficients piézoélectriques  $d_{ijk}$  (ou ses dérivées) et les permittivités  $\epsilon_{ijk}$  du matériau. Les équations 1.1 et 1.2 sont les équations constitutives de la piézoélectricité (sous la forme déformation-charge), alors que l'équation 1.3 définit les coefficients piézoélectriques (qui s'expriment en m/V ou en C/N). Les exposants  $E$  et  $T$  indiquent que ces propriétés sont évaluées lorsque les champs électriques et les contraintes sont constants ou

nuls respectivement. L'exposant  $t$  dénote la transposée.

$$S = s^E T + d^t E \quad (1.1)$$

$$D = dT + \epsilon^T E \quad (1.2)$$

$$d_{ij} = \left( \frac{\partial D_i}{\partial T_j} \right)_{E=const} = \left( \frac{\partial S_i}{\partial E_j} \right)_{T=const} \quad (1.3)$$

Les cristaux des matériaux ferroélectriques possèdent souvent des plans de symétrie qui permettent de simplifier les matrices des coefficients piézoélectriques, des permittivités et de souplesse sous la forme des équations 1.4, 1.5 et 1.6.

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$s = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

D'autres simplifications peuvent également être faites selon le type de sollicitation considéré. Par exemple, les simplifications pour le cas d'une contrainte plane sont présentées à l'annexe A. Lorsque les coefficients de la matrice  $d$  sont élevés, cela signifie qu'un déplacement élevé est associé à une tension donnée (mode actionneur) ou qu'une tension élevée est associée à un déplacement donné (mode capteur).

D'un point de vue énergétique, les facteurs de couplage sont plutôt utilisés pour quantifier la capacité à convertir l'énergie fournie sous une autre forme (soit d'électrique à mécanique ou l'inverse). Ces facteurs de couplage sont sans dimension et dépendent du matériau, ainsi que de la direction de la contrainte appliquée par rapport à l'axe de polarisation. Les facteurs de couplage intrinsèques du matériau (généralement obtenus en condition statique ou quasi-statique, à

partir d'une barre du matériau soumise à un champs de contraintes uniforme) sont notés par  $k_{ij}$ , où les indices  $ij$  sont associés aux différents modes de sollicitation. Par exemple, le facteur  $k_{33}$  est relié au mode longitudinal,  $k_{31}$  au mode transversal et  $k_{15}$  au mode de cisaillement. L'équation 1.7 permet d'évaluer le facteur  $k_{31}$  dans le cas d'une contrainte plane uniaxiale et démontre que ce facteur s'apparente à un rendement de conversion.

$$k_{31}^2 = \frac{\text{énergie électrique emmagasinée}}{\text{énergie totale appliquée}} = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (1.7)$$

On parle plutôt d'un facteur de couplage effectif  $k_e$  lorsque cette capacité de conversion est évaluée pour une configuration géométrique bien spécifique sujette à une déformation donnée. En d'autres termes, ce facteur est à la fois fonction du facteur intrinsèque du matériau piézoélectrique et de sa répartition sur la structure couplée électromécaniquement. Le facteur effectif est alors utile pour caractériser le couplage des structures composées de plusieurs matériaux et soumises à une distribution de contraintes non uniforme.

#### 1.4.2 Modèle du résonateur piézoélectrique 1-D

Le modèle du résonateur piézoélectrique à une dimension est la représentation la plus simple de ce type de système. Celui-ci considère une masse déposée sur une piézocéramique qui repose elle-même sur une base en mouvement (voir figure 1.4). Cette structure peut aussi se schématiser par un système masse-ressort-amortissement classique auquel s'ajoute une composante électromécanique pour tenir compte du couplage.

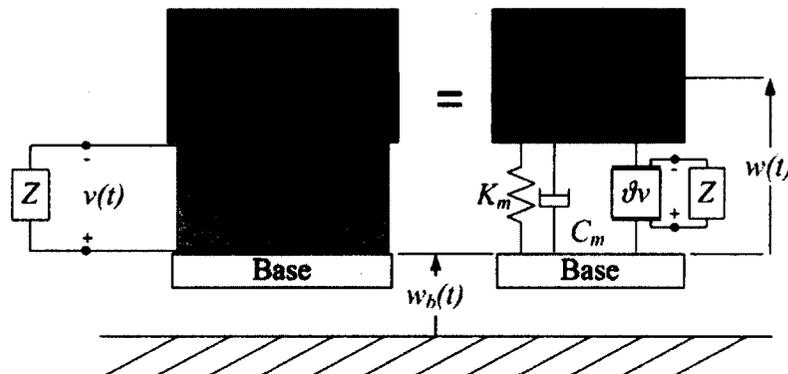


Figure 1.4 Schéma simplifié du modèle de résonateur piézoélectrique 1-D.[45]. Sur ce schéma, la piézocéramique est sollicitée dans sa direction de polarisation, donc en mode 3-3,  $w_b(t)$  représente le mouvement de la base et  $Z$  est l'impédance de la charge électrique.

L'équation qui gouverne le comportement mécanique du système prend la forme générale présentée à l'équation 1.8, où  $M_{eq}$  est la masse équivalente,  $C_m$  la constante d'amortissement mécanique,  $K_m$  la raideur mécanique du système,  $w$  le déplacement relatif de la masse par rapport à la base dont le déplacement est donné par  $w_b$ . La différence de potentiel mesurée entre les électrodes est notée par  $v$  et la variable  $\vartheta$  représente un coefficient de couplage électromécanique. Ce dernier dépend des propriétés de la couche piézoélectrique, comme sa rigidité et ses constantes piézoélectriques  $d$ , ainsi que de sa géométrie. Pour le cas illustré à la figure 1.4,  $\vartheta = \frac{d_{33}A}{s_{33}h_p}$  où  $A$  et  $h_p$  sont respectivement l'aire de l'électrode et l'épaisseur de la couche piézoélectrique.

$$M_{eq}\ddot{w} + C_m\dot{w} + K_m w - \vartheta v = -M_{eq}\ddot{w}_b \quad (1.8)$$

L'équation dans le domaine électrique dépend évidemment de la charge qui est branchée au dispositif. Pour le cas d'une résistance pure, étudié par DuToit *et al.* [10], elle prend la forme présentée à l'équation 1.9, où  $C_p$  est la capacité équivalente de la couche piézoélectrique et  $R_{eq}$  est la résistance équivalente de la charge. Le tout s'apparente alors à un circuit RC. Renno *et al.* [45] ont analysé le cas du circuit RLC décrit par l'équation 1.10, où  $L_{eq}$  est une inductance branchée en parallèle.

$$\vartheta\dot{w} + C_p\dot{v} + \frac{1}{R_{eq}}v = 0 \quad (1.9)$$

$$\vartheta\ddot{w} + C_p\ddot{v} + \frac{1}{R_{eq}}\dot{v} + \frac{1}{L_{eq}}v = 0 \quad (1.10)$$

L'intérêt d'un modèle 1D est qu'il est généralement plus pratique comme outil de conception, car il permet d'observer les tendances, d'isoler l'influence de certains paramètres et de rendre la dynamique très explicite autour d'un mode fondamental. Par contre, le fait de négliger l'interaction des autres modes peut entraîner des erreurs importantes sur l'évaluation de la réponse pour des fréquences éloignées de la fréquence de résonance du mode considéré. De plus, certains modèles, notamment celui de William et Yates [61], simplifient l'effet du couplage piézoélectrique par un simple amortissement visqueux (proportionnel à la vitesse du mouvement), alors qu'il a été démontré que cette hypothèse néglige certains phénomènes physiques importants. Ces modèles sont donc moins précis et, selon Erturk et Inman [15], il faudrait éviter de les utiliser pour évaluer les performances d'un résonateur piézoélectrique. En effet, cette simplification serait plutôt valide pour un générateur électromagnétique.

À l'opposé, des travaux plus récents, comme ceux de Erturk et Inman [14], Liao et Sodano [53], Renno *et al.* [45] ou duToit *et al.* [10], présentent tous des développements similaires issus

des équations fondamentales de la piézoélectricité afin de représenter rigoureusement le comportement de ce type de système. Ils mènent cependant à des formulations complexes qui sont difficiles et peu intuitives à utiliser pour établir une méthodologie de conception simple. En effet, l'effet piézoélectrique apparaît par l'entremise du facteur de couplage effectif  $k_e$  et de la charge électrique, mais il est souvent difficile d'isoler explicitement sa contribution à partir des formules proposées. Bref, malgré l'abondance des modèles répertoriés dans la littérature, très peu sont présentés de manière à être à la fois précis et intuitifs pour le dimensionnement. Néanmoins, ceux-ci permettent tout de même d'observer des comportements intéressants qui seront discutés dans les prochaines sections. À noter également que les développements présentés au chapitre 2 s'inspirent beaucoup du modèle proposé par Erturk et Inman [14], de sorte qu'une revue plus détaillée de ce modèle ne sera pas présentée dans le présent chapitre.

### Effet de la charge et de l'amortissement

DuToit *et al.* [10] ont tout d'abord démontré l'impact d'une simple charge résistive. Ils ont démontré que la puissance maximale n'est pas nécessairement extraite à la fréquence naturelle de la structure ( $\Omega = \omega/\omega_n \neq 1$ , où  $\omega_n$  est la fréquence propre du système en court-circuit). En court-circuit ( $R_{eq} \rightarrow 0$ ), un maximum de puissance se produit bien à  $\Omega = 1$ . Par contre, ce maximum se déplace vers une seconde fréquence (« l'antirésonance ») lorsque la résistance augmente et tend vers un circuit ouvert ( $R_{eq} \rightarrow \infty$ ). Le phénomène est illustré sur le graphique de la figure 1.5.

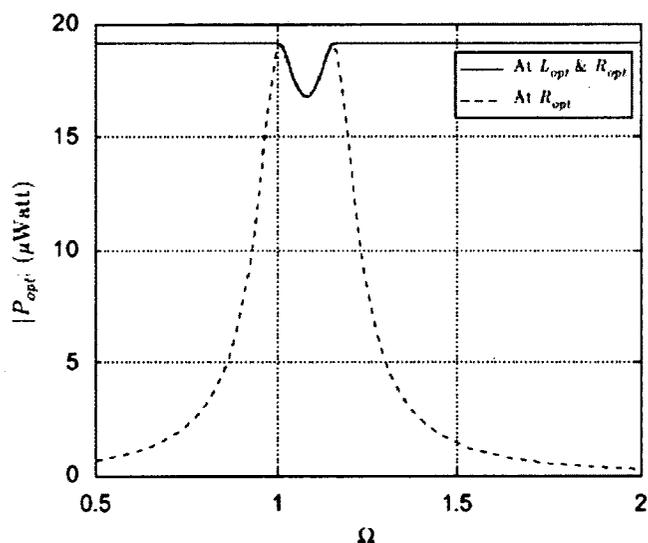


Figure 1.5 Exemple de réponse en fréquence de la puissance générée par un résonateur piézoélectrique. En trait pointillé, avec un circuit RC et en trait plein, avec un circuit RLC. [45]

Il existe alors deux fréquences, chacune correspondant à une résistance optimale, où une puissance maximale peut être générée. Cependant, Renno *et al.* [15] ont défini un facteur d'amortissement de « bifurcation »  $\zeta_b$ , fonction du couplage (donc de la géométrie et des propriétés du matériau piézoélectrique), à partir duquel ces deux maximums se rejoignent pour n'en former qu'un seul. Ils ont également observé l'influence d'une inductance dans le circuit de la charge. Selon leur modèle, l'ajout d'une inductance optimale (qui dépend de la fréquence) permet théoriquement d'obtenir une puissance maximale sur tout le domaine fréquentiel. De plus, lorsque  $\zeta > \zeta_b$ , l'inductance permet de générer des puissances supérieures par rapport à un circuit purement résistif.

### 1.4.3 Modèle du résonateur piézoélectrique continu

Selon la représentation de la figure 1.4, le résonateur est en fait sollicité dans les modes longitudinaux (ou *stack*), lesquels possèdent des fréquences propres relativement élevées. En réalité, il est plus intéressant d'utiliser les modes de vibration en flexion d'une structure flexible et continue afin de profiter de leurs fréquences propres plus basses. Puisque la force inertielle est répartie et que le matériau piézoélectrique peut être appelé à se déformer de façon non uniforme, des modèles continus, à  $n$  degrés de liberté (où  $n$  est le nombre de modes considéré et peut tendre vers l'infini), représentent mieux la réalité.

#### Poutre en porte-à-faux

La géométrie la plus simple et la plus étudiée pour l'extraction de l'énergie vibratoire par piézoélectricité est celle de la poutre en porte-à-faux, illustrée à la figure 1.6. Généralement, la poutre se compose d'une masse à son extrémité libre et d'une ou deux couches d'un matériau piézoélectrique disposé sur les surfaces inférieure ou supérieure d'une couche intermédiaire qui agit en tant que support mécanique. L'avantage de cette configuration est qu'elle est très facile à mettre en oeuvre dans les procédés de microfabrication MEMS et relativement simple à modéliser. Elle permet également d'obtenir des niveaux de contraintes moyennes relativement élevées pour une excitation donnée [2].

De nombreux modèles ont été développés et la plupart sont basés sur la formulation d'Euler-Bernoulli et la méthode de résolution de Rayleigh-Ritz [10, 14, 16, 53]. Liao et Sodano ont également transformé ce modèle sous la forme d'un modèle d'état [38]. La solution analytique de ces modèles s'approche de celle du modèle 1-D. Réduite autour d'un seul mode de vibration, elle permet de situer l'effet de la géométrie et de la répartition de la force sur la puissance générée. Cette solution provenant d'un cas simple permet d'orienter la conception vers des géométries qui optimise la puissance extraite. Une fois de plus, certaines hypothèses ou simplifications

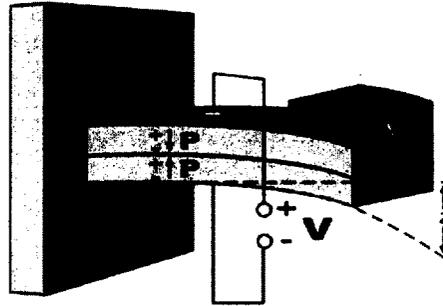


Figure 1.6 Schéma d'une poutre en porte-à-faux bimorphe. La poutre illustrée comporte deux céramiques piézoélectriques. [49]

devraient être évitées. Par exemple, Erturk et Inman [15] ont démontré qu'utiliser directement la déformée statique d'une poutre encastree libre subissant une force ponctuelle à son extrémité libre pour représenter la première déformée pouvait mener à des erreurs supérieures à 20% sur l'estimation de la puissance pour certaines résistances.

#### Autres géométries étudiées

D'autres géométries ont été étudiées, notamment par la méthode de Rayleigh-Ritz ou par les éléments finis. Par exemple, Jiang et Hu ont analysé le comportement d'une plaque ronde « bimorphe » avec une masse sismique en son centre [31]. La simulation démontre un comportement similaire au cas de la poutre. Jeong *et al.* [30] ont fabriqué un prototype de type *multi-stack*, mais sans développer un modèle pour prédire les performances. Cependant, comme les modèles le prédisent, la puissance générée augmente avec la masse. Yeatman [62] a également discuté du potentiel des dispositifs avec masse rotative ou gyroscopique. Un avantage de cette disposition par rapport aux dispositifs fonctionnant par déplacements transversaux est qu'il n'y a théoriquement plus de limite sur le déplacement de la masse ; une limite qui est posée par le volume réel fini d'un dispositif. Des densités de puissance supérieures peuvent donc, en théorie, être atteintes. D'autres géométries se retrouvent dans la littérature, mais puisque plusieurs d'entre elles s'attaquent principalement au problème de la dépendance fréquentielle, elles ne seront pas discutées dans le cadre de ce document.

#### 1.4.4 Discussion sur l'optimisation géométrique

Comme il a été expliqué précédemment, le couplage électromécanique effectif dépend non seulement des propriétés du matériau piézoélectrique utilisé, mais aussi de sa répartition sur la structure et donc de sa géométrie. La masse et sa répartition ont aussi un effet sur la puissance

générée. La figure 1.7 résume comment la puissance peut varier selon la fréquence, la masse et le coefficient de couplage.

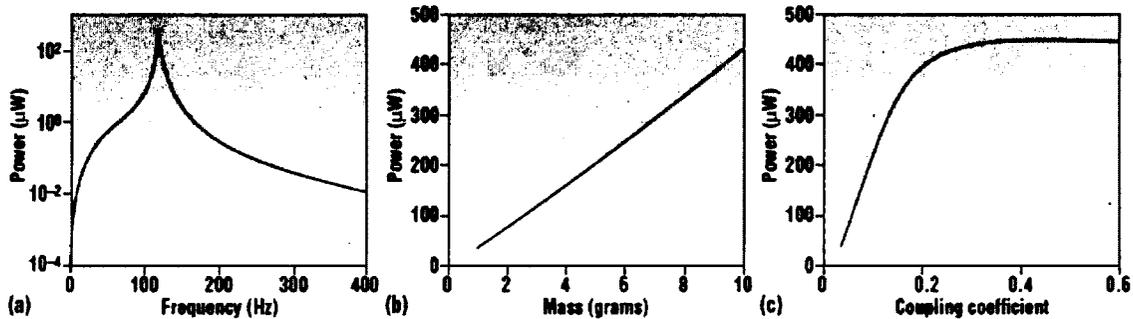


Figure 1.7 Tendence de la puissance générée en fonction de a) la fréquence, b) la masse au bout de la poutre et c) le coefficient de couplage. La poutre modélisée a un volume de  $1 \text{ cm}^3$ , une fréquence de résonance de 120 Hz et est soumise à une accélération de  $2.5 \text{ m/s}^2$  [47].

On constate que, pour une fréquence de résonance et un volume donné, une augmentation de la masse se traduit toujours par une augmentation de la puissance générée. Selon Li *et al.* [37], il est d'ailleurs préférable d'augmenter la masse plutôt que la longueur afin de réduire la fréquence de résonance d'une poutre en porte-à-faux. Cette conclusion est logique, puisque la force exercée sur un système inertiel est directement proportionnelle à sa masse.

La puissance augmente également avec le couplage jusqu'à un certain point à partir duquel elle plafonne. On peut alors penser qu'il est préférable de maximiser le couplage, soit par le choix du matériau ou le choix du mode sollicité (mode 33 plutôt que 31, avec des électrodes interdigitées). Le couplage peut aussi être augmenté en utilisant une structure qui distribue la contrainte le plus uniformément possible. Par exemple, pour un volume de matériau piézoélectrique constant, il a été démontré qu'une augmentation de 30 % sur la puissance pouvait être obtenue en utilisant une variation de la largeur suivant un trapèze [2]. Par contre, selon une analyse paramétrique effectuée par Halvorsen et Dong [23], il semble que ce gain en puissance ne soit pas substantiel si la surface (largeur et longueur totale, avec la masse), les épaisseurs des couches et la fréquence de résonance sont conservées constantes. En fait, selon Halvorsen [23], l'augmentation du couplage se traduit surtout par une réponse plus large bande.

L'effet des noeuds de vibrations a également été discuté par Erturk *et al.* [17]. Ils ont démontré qu'à partir du second mode de vibration, la présence des noeuds entraîne une annulation des contraintes pour une électrode continue sur toute la longueur. Ceci se traduit alors par une diminution du couplage pour ces modes. Une solution consiste à utiliser des électrodes segmentées.

## 1.5 Contraintes et défis reliés à la microfabrication

Cette section se veut un aperçu des matériaux, des procédés de microfabrication et des technologies offertes dans le cadre de ce projet. Elle met en évidence les problématiques qui émergent de ces différentes options.

### 1.5.1 Propriétés des matériaux piézoélectriques

Les matériaux piézoélectriques peuvent se diviser en plusieurs catégories selon leur composition. De plus, leurs propriétés varient selon la méthode de fabrication utilisée. Le tableau 1.3 fournit quelques plages de valeurs de propriétés pour différents matériaux piézoélectriques.  $Q$  représente le facteur de qualité du matériau qui est un indice de l'amortissement interne (entre autres associé à la friction et aux pertes thermoélastiques dans le matériau).

Tableau 1.3 Propriétés piézoélectriques répertoriées

Matériau	$s_{11}^{-1}$ (GPa)	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	$d_{31}$ (pC/N)	$k_{31}$ (%)	$Q$	Source
PZT-5A	61/71	1500/1928	-171/-190	34/37	75/80	[11, 28, 42]
PZT-5H	58/63	3200/3935	-250/-320	36/44	30/75	[11, 28, 42]
PZT4	72/81	1135/1494	-120/-150	33/36	500/600	[11, 28, 42]
PZT sol-gel	79/90	330/1704	-48.2/-118	15/27	10/237	[41, 43, 59, 63]
AlN	250/395	9.2/12	-1.73/-2.65	11/20	120/2490	[6, 41, 50, 59]
ZnO	127	12.64	-5.43	18	N/A	[11]
LiNbO <sub>3</sub>	173	30	-1	2.6	N/A	[11]
BaTiO <sub>3</sub>	110/124	168/1700	-34.5/-78	21/32	300	[11, 28]
PMN-PT	15/93	155/6610	-83/-1395	19/90	20/185	[1, 7, 25, 44, 52, 58, 59]
PZN-PT	9.4/54	612/5600	-158/-1540	16/85	95/441	[7, 33, 34]
Quartz	78	4.68	-2.3 ( $d_{11}$ )	9.8 ( $k_{11}$ )	$> 10^4$	[11, 20, 36]

Ces données montrent que même si le nitrure d'aluminium (AlN) et le titanate de baryum (BaTiO<sub>3</sub>) possèdent une constante piézoélectrique  $d_{31}$  plus faible que les céramiques PZT, ces matériaux pourraient offrir un facteur de couplage électromécanique comparable au PZT et ce, grâce à une plus grande rigidité et une constante diélectrique plus faible. Dans le cas des PZT, il semble que les constantes piézoélectriques sont beaucoup plus faibles lorsqu'il est fabriqué en couche mince, ce qui démontre effectivement qu'il y a une grande variation des propriétés selon le procédé de fabrication choisi. De plus, les matériaux composés de « relaxeur » (comme le PbMg<sub>1/3</sub>Nb<sub>2/3</sub>O<sub>3</sub> (PMN) et le PbZn<sub>1/3</sub>Nb<sub>2/3</sub>O<sub>3</sub> (PZN)) sont relativement récents et se présentent sous différentes compositions et formes (amorphe, polycristalline ou monocristalline).

C'est une des raisons qui explique la grande variabilité des propriétés retrouvées pour ces matériaux. Ceux-ci sont souvent plus souples que les piézocéramiques et ils peuvent atteindre des facteurs de couplage très élevés en forme monocristalline. Le quartz a une structure cristalline trigonale-32 qui est très différente des autres matériaux présentés, ce qui rend la comparaison plus difficile à effectuer dans ce cas.

### 1.5.2 Discussion sur le procédé de microfabrication

Tel que mentionné auparavant, le choix du procédé d'intégration du matériau piézoélectrique au dispositif impose des contraintes sur la taille des couches qui peuvent être réalisées en pratique. Par ailleurs, dans quelle mesure ceci peut s'avérer désavantageux en terme de puissance générée reste à déterminer, même s'il est généralement admis qu'un grand coefficient piézoélectrique est préférable. La question à savoir si, pour une fréquence visée, il est préférable que le dispositif soit épais ou mince demeure également sans réponse. Différentes options pour la fabrication sont offertes, par exemple :

1. Utiliser le PZT « bloc » (*bulk PZT*) pour profiter de sa constante  $d_{31}$  élevée sans modifier son épaisseur ( $\approx 260 \mu\text{m}$ ). Le PZT est intégré à la structure par collage et découpage. Dans ce cas, la polarisation de la couche piézoélectrique épaisse est problématique, car cette étape nécessiterait des tensions très élevées. L'épaisseur finale du dispositif est également très fortement reliée aux épaisseurs des matériaux « bloc » disponibles. Elle sera sans doute élevée, donc cette approche produirait des dispositifs ayant des fréquences naturelles élevées.
2. Utiliser le PZT « bloc » aminci ( $\approx 30 \mu\text{m}$ ) par meulage et polissage. On profite ainsi de sa constante  $d_{31}$  élevée et la problématique de polarisation de la couche est éliminée. De plus, l'usage de cette méthode offre davantage de souplesse sur la conception du dispositif, mais ajoute des étapes supplémentaires au procédé de fabrication.
3. Utiliser le PZT couche mince par application sol gel. Selon la technique choisie (*spray* ou *spinning*), les épaisseurs par cycle varient. Ces procédés peuvent présenter certaines complications, notamment à cause de phénomènes de diffusion et de fatigue par cyclage thermique. On parle alors de couche de l'ordre de quelques nanomètres à  $100 \mu\text{m}$  d'épaisseur.
4. Pulvérisation d'AlN. Cette méthode est très répandue et est compatible CMOS. Cette approche simplifierait donc l'intégration des composantes électroniques qui seront requises pour le dispositif réel. Cependant, ce matériau semble posséder de moins bonnes proprié-

tés piézoélectriques que le PZT. L'épaisseur des couches est alors de l'ordre de quelques  $\mu\text{m}$  ( $< 10 \mu\text{m}$ ).

5. MBE (*molecular beam epitaxy*) d'AlN. Les taux de croissance associés à cette technique sont très faibles, limitant l'épaisseur des couches à quelques dixièmes de micromètre (0.1 à  $0.5 \mu\text{m}$ ). Par contre, leur qualité mécanique et piézoélectrique est supérieure à ce qui est généralement produit par pulvérisation.

En ce qui concerne le collage, plusieurs techniques existent (l'adhésion par polymères ou la fusion métallique par exemple), mais les conséquences sur le comportement dynamique et la fiabilité provenant de cette interface demeurent une source d'incertitudes [21]. Un procédé de fabrication pour l'option 2 pourrait par exemple faire intervenir une gaufre de support temporaire pour l'étape de collage. Ce support serait ensuite éliminé lors du meulage.

## 1.6 Comparaison des résonateurs piézoélectriques fabriqués

Plusieurs dispositifs piézoélectriques ont déjà été fabriqués à ce jour. Le tableau 1.4 en regroupe quelques-uns, la plupart ayant été fabriquées à l'aide de méthodes de microfabrication. Le tableau répertorie le volume, la fréquence, l'accélération et la puissance pour tenter de faire une comparaison équitable de chaque dispositif.

Tableau 1.4 Comparaison de plusieurs dispositifs piézoélectriques.

No.	Volume ( $\text{mm}^3$ )	Fréq. (Hz)	Accél. (G)	Puissance ( $\mu\text{WG}^{-2}\text{mm}^{-3}$ )	Micro ?	Commentaire	Réf.
1	12.7	572	2	1.18	oui	AlN	[12]
2	0.027	13900	10.9	0.315	oui	$d_{33}$ PZT	[29]
3	$\approx 0.6$	214	2	0.537	oui	$d_{33}$ PZT	[35]
4	$\approx 0.4$	255.9	2.5	1.11	oui	$d_{31}$ PZT	[35]
5	0.1944	608	1	11.1	oui	$d_{31}$ PZT	[18]
6	0.652	462.5	2	0.824	oui	$d_{31}$ PZT	[51]
7	0.153	2302	-	85.0	oui	PZT par épitaxie	[27]
8	1000	120	0.23	7.13	non	PZT-5A, bimorphe	[48]
9	$\approx 230$	80	23.1	$3.76 \times 10^{-4}$	non	poutre chanfreinée	[60]

Tout d'abord, il semble plutôt difficile d'établir une tendance claire à partir du matériau et du mode de couplage choisi. En effet, le dispositif numéro 1, composé d'AlN, semble se classer plutôt bien comparativement aux dispositifs 2, 3, 4 et 6 qui sont fabriqués à partir de PZT. D'ailleurs, il semble aussi que les dispositifs faits de PZT et opérant en mode 31, comme les dispositifs 4, 5 et 6, se classent mieux que ceux sollicités en mode 33. En théorie, l'usage du mode 33 doit permettre d'améliorer les performances en exploitant les meilleures propriétés de

couplage du matériau dans cette direction de polarisation. Ainsi, baser la sélection du matériau, de son procédé de fabrication et la conception de la géométrie sur l'unique base des propriétés du couplage piézoélectrique qui en résultera ne semble pas être une approche efficace. Il apparaît donc nécessaire de définir un critère clair.

Cela dit, le dispositif 7 se démarque du lot avec une puissance par unité de volume supérieure de presque un ordre de grandeur à celle des autres. Il a été conçu à partir d'un procédé de croissance épitaxiale du PZT à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Par contre, sa fréquence de résonance est de 2.3 kHz, ce qui est bien au-dessus de la plage fréquentielle visée dans le cadre de ce projet. Au deuxième rang se trouve ensuite le dispositif numéro 5 qui a été microfabriqué par Fang *et al.* [18] à l'aide d'un film de PZT sollicité en mode 31 déposé par une méthode sol-gel. Le dispositif numéro 8, de Roundy et Wright [48], se trouve au troisième rang. Même si ce dernier a une fréquence de 120 Hz, ce qui tombe dans la bande fréquentielle recherchée, ce dispositif a été assemblé manuellement à l'échelle macroscopique et fabriqué à partir d'une poutre commerciale de PZT-5A. Finalement, le dispositif 9 semble avoir des performances médiocres vu sa taille et sa géométrie. En effet, tel qu'il a été brièvement discuté à la section 1.4.4, l'usage d'une poutre chanfreinée devrait en théorie optimiser les performances, ce qui ne semble pas être le cas ici. De plus, il semble avoir été conçu pour fonctionner à une très grande accélération, ce qui n'est pas du tout réaliste dans le contexte de ce projet.

## 1.7 Problématiques et objectifs

L'intérêt suscité pour les générateurs piézoélectriques en tant que source d'énergie durable pour des capteurs sans fil est grandissant et provient de domaines technologiques très variés. À cause de cet engouement, de nombreux modèles ont été développés pour tenter de prédire leur performance. Tel qu'il a été soulevé à la section 1.4, certains modèles simplifient plus qu'il ne le faut l'effet du couplage piézoélectrique. Dans certains cas, des erreurs ou des hypothèses tout simplement inadéquates ont été faites et celles-ci se sont malheureusement répandues dans la littérature [15]. De plus, plusieurs travaux semblent en contradiction en ce qui concerne la charge optimale. Par exemple, certains affirment que la charge optimale est principalement dépendante de la géométrie du système, mais le modèle de Erturk et Inman [15] démontre très clairement une dépendance avec le niveau d'amortissement mécanique. Il semble alors nécessaire de reprendre à partir de la base de la modélisation afin d'éviter de répéter certaines erreurs.

Par ailleurs, la section 1.5.2 a mis en lumière les différentes options disponibles en ce qui concerne la microfabrication. Ce choix technologique relève une importance critique, puisqu'il requiert des investissements considérables en équipements et en temps. Cette problématique

soulève donc une question pertinente : « **Comment concevoir un microrésonateur piézoélectrique et sélectionner son procédé de fabrication afin qu'il soit le plus performant possible pour l'extraction d'énergie vibratoire ?** » Le but de ce mémoire est donc de répondre à cette question pour finalement être en mesure d'adopter une stratégie adéquate pour concevoir la partie transducteur de ce type de microdispositif inertiel. Pour y parvenir, il est d'abord essentiel d'atteindre certains sous objectifs :

1. Comprendre l'impact du couplage piézoélectrique sur la structure résonante ;
2. Comprendre et quantifier comment la géométrie et les propriétés des matériaux affectent la génération de la puissance électrique, ainsi que la tension et le courant en sortie ;
3. Définir des critères de comparaison de performance utiles à la conception ;
4. Proposer une méthodologie de dimensionnement adéquate pour une poutre piézoélectrique ;
5. Fournir des recommandations sur le choix des matériaux et la méthode de fabrication à préconiser.

## **1.8 Méthodologie**

L'approche de modélisation utilisée est tout d'abord présentée au chapitre 2. En premier lieu, un modèle analytique continu pour une poutre en porte-à-faux piézoélectrique soumise à une excitation vibratoire par la base est développé. Obtenu à partir du principe d'Hamilton et basé sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, donc valide pour une poutre mince, le modèle permet de représenter adéquatement la dynamique du système couplé pour une fréquence d'excitation arbitraire et pour différentes géométries. Entre autres inspiré du modèle d'Erturk et Inman [15], ce modèle est utile pour définir et obtenir la valeur exacte des paramètres d'influences qui font notamment intervenir la géométrie, la distribution de la contrainte, la distribution de la masse et les propriétés des matériaux. Il est ensuite réduit à un ordre inférieur et des paramètres équivalents sont introduits afin de faciliter sa compréhension. Il est alors démontré que l'effet piézoélectrique agit de façon similaire à une raideur électrique et un amortissement électrique.

Par la suite, le chapitre 3 présente une analyse détaillée du comportement de ces deux composantes électriques et de la dynamique couplée. Une compréhension de base de l'interaction entre les domaines mécanique et électrique du système est acquise afin de déduire des formules pour évaluer le comportement à la résonance. De plus, les conditions permettant de générer une puissance optimale sont mises au clair. Après avoir établi l'influence de la charge électrique, de la géométrie, des propriétés piézoélectriques et de l'amortissement mécanique, un nouveau

critère, le « couplage critique », est introduit. Ce critère permet notamment de comparer les matériaux piézoélectriques entre eux et de définir deux types de fonctionnement pour les dispositifs résonants.

Afin de pouvoir comparer l'impact d'une vaste gamme de géométries et configurations possibles, une analyse géométrique relative au facteur de couplage effectif est effectuée au chapitre 4. Une formulation permettant de découpler l'effet des propriétés piézoélectriques de la géométrie dans l'expression du facteur de couplage effectif est d'abord présentée. La méthode d'analyse est ensuite employée pour comparer les configurations de l'unimorphe et du bimorphe. L'effet d'une poutre en trapèze ou d'une électrode qui recouvre partiellement la poutre est aussi discuté. Les résultats obtenus à la suite d'une application numérique permettent d'apprécier l'impact d'une variation de l'épaisseur de la couche piézoélectrique sur la dynamique globale du système. L'effet sur la fréquence de résonance, la charge optimale, la tension, le courant, la puissance et le déplacement est calculé.

Finalement, le chapitre 5 propose une méthodologie de conception permettant de dimensionner une poutre piézoélectrique à partir d'un nombre restreint de paramètres. Quelques analyses paramétriques sont d'abord présentées afin de comprendre les tendances relatives à une variation du volume de la poutre pour une fréquence de résonance donnée. La méthodologie est ensuite mise en contexte. Celle-ci incorpore l'effet du couplage, de la charge électrique, de la contrainte et de la géométrie afin de fournir les dimensions adéquates pour un système fiable. À la suite de l'analyse des résultats fournis par cette méthode, celle-ci est révisée afin d'optimiser les figures de mérite pertinentes. Ce chapitre se termine par une analyse globale des résultats et la présentation d'une procédure permettant de mettre à l'échelle en fonction de la puissance visée. Elle est finalement utilisée pour cibler l'ordre des puissances accessibles à l'échelle des MEMS et des dimensions requises. Quelques recommandations pour la suite du projet sont finalement formulées.

## 1.9 Contributions

Les travaux présentés dans ce mémoire s'attaquaient à la problématique du dimensionnement et de la sélection du matériau dans l'optique de choisir le procédé de fabrication le mieux adapté pour l'intégration de la technologie de la récupération de l'énergie vibratoire dans les MEMS. Pour ce faire, plusieurs nouvelles méthodes d'analyses ont été introduites.

Par exemple, l'analyse de la dynamique du système couplé électromécaniquement a été simplifiée grâce à l'utilisation des concepts de raideur et d'amortissement électrique pour représenter la transduction piézoélectrique. Grâce à cette formulation, les équations exactes du mouvement,

de la tension, du courant et de la puissance ont pu être décrites de manière compacte tout en permettant d'explicitier les conditions d'une génération de puissance optimale. Le concept d'amortissement électrique a aussi été utilisé pour déterminer la charge électrique optimale, ainsi que le besoin de couplage effectif de la structure grâce au critère du couplage critique.

Au passage, la modélisation de l'effet piézoélectrique dans les poutres en flexion sollicitées en mode 31 a été raffinée grâce à l'utilisation d'un profil de tension quadratique qui respecte les lois fondamentales de l'électromagnétisme. La définition de ce profil est d'ailleurs grandement inspirée des observations faites par Tabesh et Fréchette [56]. Même si l'hypothèse du champ électrique constant selon l'épaisseur s'est malgré tout montrée adéquate pour simuler le comportement des systèmes ayant un facteur de couplage faible ou modéré, il semble que l'usage d'un champ linéaire offrirait une meilleure précision pour l'évaluation de la rigidité en flexion. En effet, une analyse par éléments finis a démontré que l'apparition d'une onde électrique longitudinale tend à augmenter les fréquences propres de flexion de manière non négligeable pour des poutres composées majoritairement de matériaux piézoélectriques ayant un facteur de couplage  $k_{31}$  élevé. Une expression analytique pour la fonction de potentiel électrique a donc été proposée puis validée numériquement.

Finalement, une méthode de dimensionnement qui permet d'optimiser la puissance produite en fonction du couplage tout en considérant l'aspect de la contrainte induite a été proposée. Une approche permettant d'isoler l'influence de la géométrie sur le couplage pour orienter son dimensionnement a tout d'abord été présentée. Avec le critère de couplage critique, cette approche a démontré que l'atténuation de l'amortissement mécanique devrait être prioritaire dans l'optique de la miniaturisation de ces dispositifs, car cela permettrait de réduire la masse du système et l'épaisseur des couches piézoélectriques requises. L'analyse des résultats obtenus à l'aide de l'algorithme de conception a également permis d'apprécier la sensibilité de certaines figures de mérite couramment utilisées dans la littérature. Grâce à l'intégration de l'aspect de la contrainte et de la fiabilité des résonateurs piézoélectrique dans la démarche de conception, les limites théoriques de ces dispositifs ont pu être déterminés.

# CHAPITRE 2

## PRÉSENTATION DES MODÈLES

Ce chapitre décrit les modèles développés et employés pour réaliser cette étude. Tout d'abord, un modèle analytique continu est développé selon les hypothèses d'Euler-Bernoulli et la méthode de Rayleigh-Ritz. Grandement inspiré des développements proposés par Erturk et Inman [11–16], ce modèle considère la déformation de poutres en flexion plane ayant un comportement linéaire. Par la suite, les géométries étudiées sont définies, puis les équations mécaniques et électriques utilisées sont introduites. Une fois résolues, les équations du modèle sont ramenées à un ordre inférieur afin de simplifier les méthodes d'analyse qui suivront.

### 2.1 Géométries du problème

Cette section définit les paramètres de base pour les deux principales configurations étudiées, soit l'unimorphe et le bimorphe.

#### 2.1.1 Paramètres pour l'unimorphe

La figure 2.1 présente la géométrie pour la poutre de type unimorphe. Celle-ci se compose d'une couche piézoélectrique déposée sur un substrat. L'origine du repère cartésien est fixée à la hauteur de la fibre neutre à l'encastrement. Ce système de référence est mobile et suit le mode rigide de la poutre. Les coordonnées en  $y = h_a$  et  $h_c$  correspondent respectivement à la position du dessous et du dessus de la poutre par rapport à l'axe neutre. La position de l'interface substrat-piézo par rapport à l'axe neutre est quant à elle donnée par  $y = h_b$ . Dans la direction des  $x$ , les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  correspondent respectivement au début et à la fin de l'électrode. En ce qui concerne les dimensions de la poutre, l'épaisseur de la couche piézoélectrique est exprimée par  $h_p$  et celle du substrat est donnée par  $h_s$ . La largeur est donnée par  $b$ , alors que  $L$  correspond à la longueur. Le module d'élasticité  $Y$  et la densité  $\rho$  sont accompagnés des indices  $p$  ou  $s$  pour identifier qu'il s'agit des propriétés du matériau piézoélectrique ou du substrat.  $Z_{eq}$  est l'impédance du circuit connecté au système et  $M_f$  est la masse ajoutée au bout.

#### Calcul de la position de la fibre neutre

La fibre neutre représente l'intersection entre le plan de flexion et le plan de contrainte nulle. Il s'agit également de la position de la courbure moyenne. Afin d'obtenir cette position (noté par

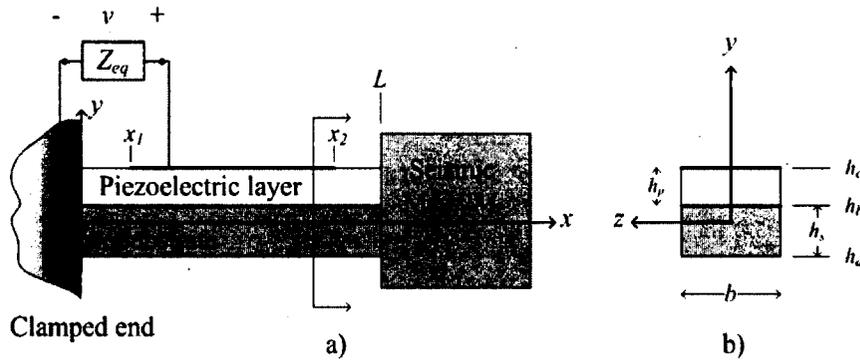


Figure 2.1 Schéma de la poutre unimorphe avec son système de coordonnées en vue a) de côté et b) de coupe.

$\bar{y}$ ) pour la section composée, un système de repère secondaire positionné au bas de la section de la poutre est utilisé. La procédure courante consiste alors à calculer le centroïde de la section équivalente à partir de la somme des centroïdes des sous-sections pondérées par leur module de Young et leur aire (équation 2.1) [3].

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_s Y_s b h_s + \bar{y}_p Y_p b h_p}{Y_s b h_s + Y_p b h_p} \quad (2.1)$$

Grâce à la symétrie, la largeur  $b$  disparaît et l'équation 2.2 donne alors la distance de la fibre neutre par rapport à  $h_a$ .

$$\bar{y} = \frac{\frac{h_s}{2} Y_s h_s + \left(h_s + \frac{h_p}{2}\right) Y_p h_p}{Y_s h_s + Y_p h_p} \quad (2.2)$$

À partir de ce résultat, les valeurs  $h_a$ ,  $h_b$  et  $h_c$  sont données par les équations 2.3 à 2.5.

$$h_a = - \frac{\frac{h_s}{2} Y_s h_s + \left(h_s + \frac{h_p}{2}\right) Y_p h_p}{Y_s h_s + Y_p h_p} \quad (2.3)$$

$$h_b = h_s - \frac{\frac{h_s}{2} Y_s h_s + \left(h_s + \frac{h_p}{2}\right) Y_p h_p}{Y_s h_s + Y_p h_p} \quad (2.4)$$

$$h_c = h_s + h_p - \frac{\frac{h_s}{2} Y_s h_s + \left(h_s + \frac{h_p}{2}\right) Y_p h_p}{Y_s h_s + Y_p h_p} \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Paramètres pour le bimorphe

La géométrie pour le cas d'une poutre de type bimorphe, c'est-à-dire une poutre ayant deux couches piézoélectriques déposées sur les faces supérieure et inférieure d'un substrat, est présentée à la figure 2.2. Une fois de plus, l'origine du repère cartésien est fixée à la hauteur de la fibre neutre à l'encastrement. La configuration est aussi traitée comme étant symétrique. La fibre neutre demeurera alors au centre de la couche de support mécanique peut importe la valeur de l'épaisseur des couches piézoélectrique. L'épaisseur d'une couche de matériau piézoélectrique est encore donnée par  $h_p$  et celle du substrat par  $h_s$ . À noter que pour cette configuration, un branchement des couches en parallèle ou en série avec la charge électrique est possible. Pour une connexion en parallèle, la polarisation est identique dans les deux couches ( $d'_{31} = d_{31}$ ). À l'opposée, la polarisation est inversée dans une des couches pour la connexion en série, ce qui se traduit par un changement de signe de la constante piézoélectrique  $d_{31}$  dans une des deux couches ( $d'_{31} = -d_{31}$ ). L'impact du choix du branchement sera d'ailleurs traité à la section 2.4.3.

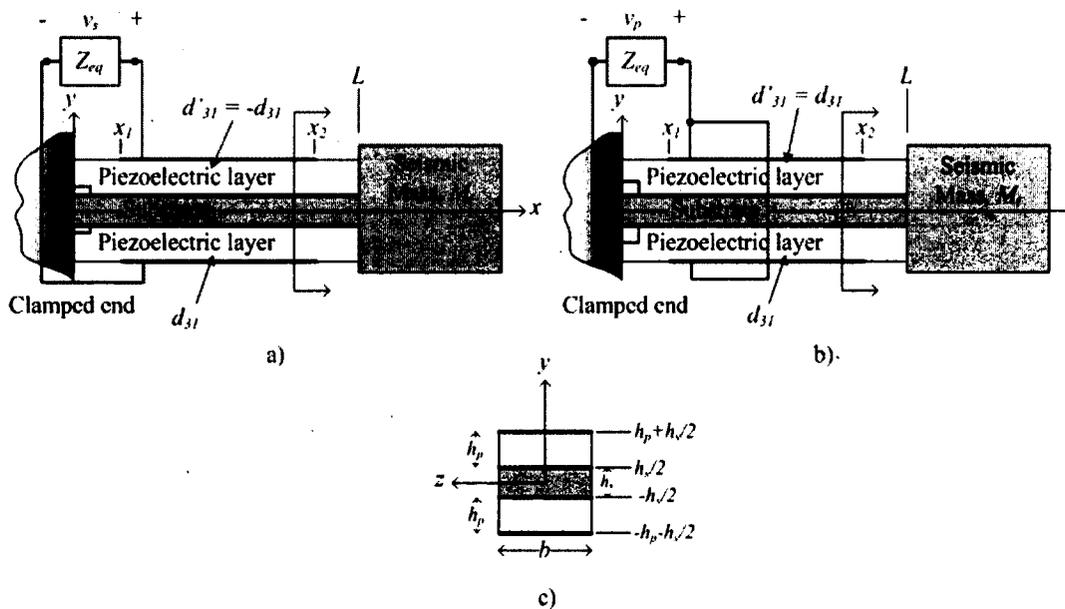


Figure 2.2 Schéma de la poutre bimorphe avec son système de coordonnées en vue de côté, a) branchée en série, b) branchée parallèle, et c) en vue de coupe.

## 2.2 Équations mécaniques

### 2.2.1 Hypothèses

Maintenant que les géométries à l'étude sont définies, cette section aborde les hypothèses et les équations reliées à la mécanique du problème. Afin d'alléger le développement, seul le traitement pour le cas de l'unimorphe est présenté ici. La même démarche appliquée au cas du bimorphe est présentée à l'annexe B. Le problème à l'étude est celui d'une structure ayant une masse distribuée qui est excitée par une accélération par la base  $\ddot{w}_b(t)$ . La variable  $w_b(t)$  représente donc le déplacement de la base dans un repère fixe et dans la direction transversale, suivant l'axe  $y$ . La poutre est alors sollicitée en flexion dans le plan  $xy$  seulement et sous l'effet de la force inertielle résultante. En première approche, il est supposé que le comportement demeure linéaire malgré les grands déplacements ( $\geq h$ ) qui pourraient être induits lorsque la structure entrera en résonance. Les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de flexion pure sont également utilisées pour modéliser les champs de déplacements  $u_i$  (équation 2.6) et les champs de déformations  $\epsilon_i$  (équation 2.7) dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  du repère de la poutre. Selon ces hypothèses, la section déformée demeure perpendiculaire à l'axe neutre et la poutre est dans un état de contrainte plane dans une seule direction. À noter que ces hypothèses sont valides et fournissent un bon degré de précision dans le cas de poutres minces ( $b$  et  $h < L/10$ ), ce qui devra être pris en compte lors de l'analyse des résultats obtenus à l'aide du modèle.

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= -y \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ u_y(x, y, z, t) &= w(x, t) \\ u_z(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(x, y, z, t) &= -y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

La fonction  $w(x, t)$  correspond donc au déplacement transversal de la fibre neutre dans le repère de la poutre. Cette fonction représente la déflexion de la poutre à la position  $x$  et au temps  $t$  par rapport à l'origine du repère accéléré qui est situé à la base de la structure.

### 2.2.2 Détermination de l'Hamiltonien

Le principe d'Hamilton, énoncé à l'équation 2.8, permet d'obtenir l'équation du mouvement de la poutre piézoélectrique en vibration transversale. Le développement est tout d'abord effectué en considérant un circuit ouvert, mais son résultat pourra tout aussi bien s'appliquer au cas avec une charge électrique par la suite.

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (\Gamma - \Lambda + W) dt = 0 \quad (2.8)$$

$\Gamma$  est l'énergie cinétique,  $\Lambda$  est l'énergie potentielle et  $W$  correspond au travail exercé par les forces externes. Évidemment, ce dernier terme est nul dans le cas des vibrations libres. Dans le cas d'une excitation inertielle,  $W$  est plutôt donné par l'équation 2.9.

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^L \int_{h_a}^{h_c} \int_{-b/2}^{b/2} (\rho \ddot{w}_b(t) w(x,t) + M_t \ddot{w}_b(t) w(x,t) \delta(x - x_t)) dz dy dx \\ &= \int_0^L (m \ddot{w}_b(t) w(x,t)) dx + M_t \ddot{w}_b(t) w(x_t, t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\delta(x - x_t)$  est la fonction delta Dirac appliquée à la position de la masse ajoutée. La variable  $m$  est la masse par unité de longueur de la section et est donnée à l'équation 2.10.

$$\begin{aligned} m &= \int_{h_a}^{h_b} \int_{-b/2}^{b/2} \rho dz dy \\ &= b [\rho_s h_s + \rho_p h_p] \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'énergie cinétique  $\Gamma$  est donnée par l'équation 2.11.

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^L \int_{h_a}^{h_c} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{w}(x,t)^2 + \frac{1}{2} \rho \left( y \frac{\partial \dot{w}(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} M_t \dot{w}(x,t)^2 \delta(x - x_t) \right) dz dy dx \\ &= \int_0^L \left( \frac{1}{2} m \dot{w}(x,t)^2 + \frac{1}{2} (\rho I_z)_{eq} \left( \frac{\partial \dot{w}(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} M_t \dot{w}(x_t, t)^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $(\rho I_z)_{eq}$  représente l'inertie de rotation de la section droite et vaut

$$\begin{aligned}
(\rho I_z)_{eq} &= \int_{h_a}^{h_c} \int_{-b/2}^{b/2} \rho y^2 dz dy \\
&= \frac{b}{3} [\rho_s (h_b^3 - h_a^3) + \rho_p (h_c^3 - h_b^3)]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

L'énergie potentielle  $\Lambda$  est quant à elle fournie par l'équation 2.13

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &= \int_0^L \int_{h_a}^{h_c} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} Y \epsilon_{11}^2(x, y, t) dz dy dx \\
&= \int_0^L \int_{h_a}^{h_c} \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{1}{2} \sigma_x(x, y, t) y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} dz dy dx \\
&= \int_0^L \frac{1}{2} M_z(x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} dx
\end{aligned} \tag{2.13}$$

où  $M_z(x, t)$  est le moment de flexion interne. Il est fonction de la contrainte normale  $\sigma_x$  définie à l'équation 2.14. Dans la couche du substrat, l'équation est purement mécanique, alors que la couche piézoélectrique fait évidemment intervenir l'équation constitutive de la piézoélectricité.

$$\sigma_x(x, y, t) = \begin{cases} -Y_s \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} y & \text{si } h_a \leq y \leq h_b \\ -Y_p \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} y - Y_p d_{31} E_y(x, y, t) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] & \text{si } h_b < y \leq h_c \end{cases} \tag{2.14}$$

Le moment interne de flexion est donc donné par l'équation 2.15.

$$\begin{aligned}
M_z(x, t) &= -b \int_{h_a}^{h_c} \sigma_x(x, y, t) y dy \\
&= YI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + b Y_p d_{31} [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \int_{h_b}^{h_c} E_y(x, y, t) y dy
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$YI$  représente le module de flexion et vaut

$$YI = \frac{b}{3} [Y_s (h_b^3 - h_a^3) + Y_p (h_c^3 - h_b^3)] \tag{2.16}$$

et  $[U(x-x_1) - U(x-x_2)]$  est la fonction échelon qui délimite la surface de l'électrode selon  $x$ .  $E_y$  est le champ électrique dans la couche piézoélectrique orienté dans l'axe piézoélectrique 3. Sa valeur s'obtient à partir des relations fondamentales de l'électricité, celles de la piézoélectricité et la relation de Maxwell-Gauss.

Il est d'usage courant de négliger l'énergie cinétique reliée à l'inertie de rotation des sections pour les premiers modes de vibrations des poutres minces, car elle n'a normalement qu'une très faible contribution par rapport à l'énergie de translation pour ces modes. À la suite de cette simplification et d'une substitution des équations 2.9, 2.11 et 2.13 dans 2.8, on obtient l'équation 2.17 qui fourni un développement partiel de l'Hamiltonien.

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_0^L \left( \frac{1}{2} m \dot{w}(x,t)^2 - \frac{1}{2} M_z(x,t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \ddot{w}_b(t) w(x,t) \right) dx + M_t \ddot{w}_b(t) w(x_t,t) + \frac{1}{2} M_t \dot{w}(x_t,t)^2 \right) dt \quad (2.17)$$

Il faut ensuite déterminer le comportement électrique du système, ce qui est le sujet de la section 2.3.

## 2.3 Équations électriques

La physique électrique du problème pourrait se diviser en deux grandes parties : les équations relatives au circuit connecté au dispositif et celles plutôt reliées au comportement de la couche piézoélectrique. Tout d'abord, la quantité de charges  $q$  sur l'électrode disposée sur le matériau piézoélectrique à la position  $h_c$  est donnée par la loi de Gauss (équation 2.18).

$$\begin{aligned} q(t) &= \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \\ &= b \int_{x_1}^{x_2} D_y(x, h_c, t) dx \end{aligned} \quad (2.18)$$

Puisque l'électrode est perpendiculaire à la direction  $y$ , seulement les déplacements  $D_y$  peuvent être considérés. De toute manière, les déplacements  $D_x$  à la position  $h_c$ , tangents à la surface de Gauss qui entoure l'électrode, sont nuls puisqu'on considère la surface des électrodes comme un conducteur idéal.

Par ailleurs, le courant peut s'exprimer comme à l'équation 2.19

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{Z_{eq}} \quad (2.19)$$

où  $v(t)$  est la différence de potentiel aux bornes de la couche piézoélectrique et  $Z_{eq}$  l'impédance du circuit qui y est connecté. En substituant la valeur de la charge dans l'équation 2.19, l'équation 2.20 permettant de déterminer la tension à partir du déplacement électrique est obtenue.

$$v(t) = -Z_{eq}b \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} D_y(x, h_c, t) dx \quad (2.20)$$

La valeur de  $D_y$  à la position  $h_c$  est fournie à partir des équations constitutives de la piézoélectricité (équation 1.2). Bien qu'il s'agisse d'un problème de vibration (donc dynamique), le comportement piézoélectrique est analysé de manière quasi-statique. En effet, la dynamique à l'étude ( $< 1$  KHz) est beaucoup plus lente que la fréquence de résonance électrique des matériaux piézoélectriques ( $> 50$  KHz) [55].

Selon la définition des champs électriques,

$$\begin{aligned} E_x(x, y, t) &= -\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x} \\ E_y(x, y, t) &= -\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \\ E_z(x, y, t) &= -\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

où  $V(x, y, t)$  est la fonction de potentiel électrique dans la couche piézoélectrique. Les valeurs des champs et des contraintes (équation 2.14) sont substituées dans les équations constitutives afin de les exprimer en fonction du potentiel électrique, comme aux équations 2.22 et 2.23.

$$D_x(x, y, t) = d_{15}\tau_{xy}(x, y, t) - \epsilon_{11}^T \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.22)$$

$$D_y(x, y, t) = -d_{31}Y_p y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \epsilon_{33}^S \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \quad (2.23)$$

où  $\epsilon_{33}^S$  est la permittivité sous déformation constante, telle que définie à l'annexe A. À noter que selon les hypothèses d'Euler-Bernoulli le cisaillement  $\tau_{xy} = 0$ , mais le terme est tout de même conservé pour le souci de la démonstration actuelle. L'équation 2.24 est la relation de

Maxwell-Gauss, une loi fondamentale qui décrit le comportement électrique dans tout matériau diélectrique homogène et considéré comme un isolant parfait [8].

$$\frac{\partial D_x(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial D_y(x,y,t)}{\partial y} = 0 \quad (2.24)$$

Après dérivation des expressions 2.22 et 2.23, l'équation 2.24 peut être remaniée pour obtenir la relation 2.25.

$$-\epsilon_{11}^T \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial y^2} = d_{31} Y_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - d_{15} \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,t)}{\partial x} \quad (2.25)$$

Cette expression est par la suite employée pour définir la fonction de potentiel électrique.

### 2.3.1 Établir la fonction de potentiel électrique

L'hypothèse très couramment posée dans la littérature est de considérer la fonction de potentiel électrique comme étant une fonction linéaire de  $y$  seulement [10, 14, 16, 38, 53]. Autrement dit, le champ électrique dans la couche piézoélectrique sous contrainte est constant dans l'épaisseur, donc similaire au champ rencontré dans un condensateur à plaque parallèle. Mathématiquement, ceci revient à dire que  $\frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial y^2} = 0$ . Selon l'équation 2.25, ceci impliquerait également que  $\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0$ . Évidemment, cette conclusion est fautive, car elle signifie qu'il n'y a aucune déformation. Comme il a été noté par Tabesh et Fréchette [56], l'hypothèse du champ constant entraîne donc une violation directe de la loi de Maxwell-Gauss. Tabesh a également proposé un nouveau champs de potentiel pour remédier à cette violation, mais sa démarche a été développée à partir d'un cas statique. Sa solution n'est donc pas directement transférable au cas dynamique. Il est alors pertinent de proposer un champ de potentiel compatible avec cette loi fondamentale et valide pour une poutre vibrant à une fréquence quelconque. Deux possibilités sont mathématiquement envisageables :

1.  $V(x,y,t)$  n'est pas une fonction de  $y$ . Cet énoncé est à rejeter puisque ceci revient à dire qu'il n'y a aucun champ électrique dans la direction de polarisation et donc aucune tension mesurée.
2. Tous les termes dépendants de la coordonnée  $y$  dans la partie de gauche de l'équation 2.25 devraient s'annuler à toutes positions  $(x,y)$  et temps  $t$  pour ne donner qu'une fonction dépendante de la coordonnée  $x$ . De plus, les composantes dépendantes de  $x$  doivent avoir

une forme semblable à la déformée.

À l'aide d'un modèle par éléments finis fait dans COMSOL 3.5a® et à la suite d'une analyse analytique (voir annexe C), il a pu être démontré que le potentiel électrique varie en fait d'une manière quadratique dans la direction  $y$  et varie également dans la direction  $x$ . La figure 2.3 illustre la variation du potentiel électrique dans la direction de l'épaisseur (coordonnée  $y$ ), alors que la variation selon la position  $x$  (à une hauteur  $y$  près du centre de la couche) est illustrée à la figure 2.4. Ces figures ont été obtenues à partir d'une simulation effectuée sur un unimorphe opérant en circuit ouvert identique à celui modélisé par Erturk [1-]. Cet unimorphe de 10 cm de long n'a pas de masse au bout et est composé d'une couche de 400  $\mu\text{m}$  de PZT ( $k_{31} \approx 0.37$ ) déposée sur un substrat de 500  $\mu\text{m}$  d'épaisseur.

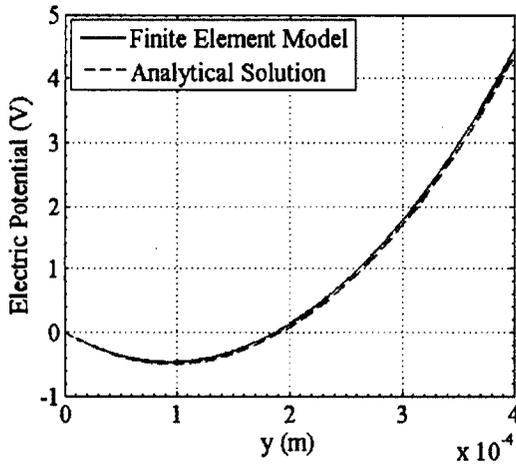


Figure 2.3 Variation du potentiel électrique selon l'épaisseur.  $y = 0$  se situe à l'interface.

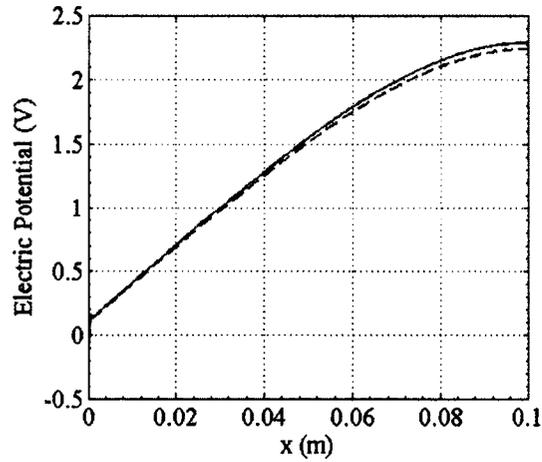


Figure 2.4 Variation du potentiel électrique selon la longueur. Courbe obtenue à  $y = 2 \times 10^{-4}$  m.

Tout d'abord, la composante quadratique dans la direction  $y$  est très prononcée. Par contre, la variation de la tension par unité de longueur selon  $x$  est beaucoup plus faible que dans la direction de polarisation (d'environ 2 ordres de grandeur), ce qui indique que les champs électriques longitudinaux sont quand même très faibles. L'équation 2.26 présente la solution de la fonction de potentiel électrique qui ressort de cette analyse et qui permet de respecter la loi de Maxwell-Gauss. À titre comparatif, elle est également tracée en pointillé sur les figures 2.3 et 2.4. On constate que la solution analytique colle très bien aux résultats de l'analyse par éléments finis. L'influence de ce nouveau profil est discutée à la prochaine section.

$$V(x, y, t) = -\frac{d_{31}Y_p}{2\epsilon_{33}^S} (y^2 - (h_b + h_c)y + h_b h_c) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \left( \frac{y - h_b}{h_c - h_b} \right) v(t) \quad (2.26)$$

## 2.4 Équations de couplage obtenues

Puisque la fonction de potentiel électrique est désormais connue, il est possible de résoudre les équations du couplage piézoélectrique vues précédemment en 2.15 et 2.20. Tout d'abord, les équations du circuit et du moment de flexion pour l'unimorphe sont obtenues. Par la suite, le cas du bimorphe est traité de manière analogue afin de démontrer l'impact des branchements en série ou en parallèle. L'influence de la composante quadratique est finalement déterminée et quantifiée.

### 2.4.1 Équation du circuit électrique

À la suite de la dérivation et de la substitution des termes, l'équation électrique 2.20 prend désormais la forme de l'équation 2.27.

$$\begin{aligned}
 v(t) &= Z_{eq} b \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} - \left( d_{31} Y_p h_c \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \epsilon_{33}^S \left[ \frac{-d_{31} Y_p}{2 \epsilon_{33}^S} (2h_c - (h_b + h_c)) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{v(t)}{h_p} \right] \right) dx \\
 &= Z_{eq} b \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} - \left( d_{31} Y_p \frac{(h_b + h_c)}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\epsilon_{33}^S v(t)}{h_p} \right) dx \\
 &= -Z_{eq} \left( C_p \dot{v}(t) + \theta \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx \right) \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

où  $C_p$  représente la capacité de la couche piézoélectrique (équation 2.28) et  $\theta$  est le coefficient de couplage piézoélectrique. L'équation 2.29 démontre que ce coefficient dépend de la géométrie par un terme équivalent à l'aire de la section située entre l'axe neutre et le demi-plan de la couche piézoélectrique, là où se situe sa contrainte moyenne.

$$C_p = \epsilon_{33}^S b \frac{(x_2 - x_1)}{h_p} \tag{2.28}$$

$$\theta = d_{31} Y_p b \frac{(h_b + h_c)}{2} \tag{2.29}$$

À noter que ce résultat est identique à ce qui est normalement obtenu en utilisant un profil de tension linéaire dans la couche piézoélectrique [14]. L'équation 2.27 peut aussi être mise sous la forme de l'équation 2.30 et schématisée par le circuit électrique illustré à la figure 2.5. Comme

le démontre l'équation 2.31, la source de courant varie alors avec la vitesse de déformation de la poutre.

$$\frac{v(t)}{Z_{eq}} + C_p \dot{v}(t) + i(t) = 0 \quad (2.30)$$

$$i(t) = \theta \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \dot{w}(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (2.31)$$

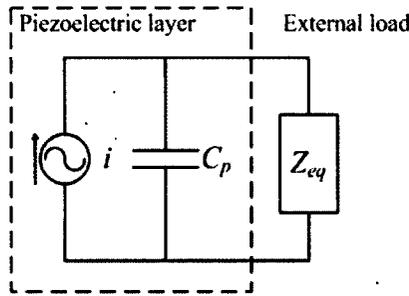


Figure 2.5 Circuit équivalent de la poutre piézoélectrique. La couche piézoélectrique est assimilée à une source de courant  $i$  branchée en parallèle à un condensateur  $C_p$ . Figure adaptée de [16].

## 2.4.2 Équation du moment de flexion

Selon l'équation 2.15, le moment de flexion interne fait intervenir l'intégrale du champs électrique  $E_y$  suivant l'épaisseur. Dans un premier temps, le résultat de cette intégrale est fourni à l'équation 2.32.  $E_y$  est obtenu à partir du champs de potentiel défini à l'équation 2.26 et la définition des champs électriques à l'équation 2.21.

$$\begin{aligned} \int_{h_b}^{h_c} E_y(x,y,t) y dy &= \int_{h_b}^{h_c} -\frac{\partial V(x,y,t)}{\partial y} y dy \\ &= \int_{h_b}^{h_c} \left( \frac{d_{31} Y_p}{2\epsilon_{33}^s} (2y^2 - y(h_b + h_c)) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v(t)y}{(h_c - h_b)} \right) dy \\ &= \frac{d_{31} Y_p}{2\epsilon_{33}^s} \left( \frac{2(h_c^3 - h_b^3)}{3} - \frac{(h_b + h_c)(h_c^2 - h_b^2)}{2} \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v(t)(h_c^2 - h_b^2)}{2(h_c - h_b)} \\ &= \frac{d_{31} Y_p}{\epsilon_{33}^s} \left( \frac{h_p^3}{12} \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v(t)(h_c + h_b)}{2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le moment de flexion interne est désormais donné par l'équation 2.33

$$M_z(x,t) = \left( YI + Y_p I_p \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \theta v(t) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \quad (2.33)$$

où  $I_p$  est équivalent à un moment d'inertie autour du plan milieu de la couche piézoélectrique (équation 2.34).

$$I_p = \frac{bh_p^3}{12} \quad (2.34)$$

Le terme  $\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2}$  est quant à lui obtenu à partir des définitions de la permittivité sous déformation constante (équation A.4) et du facteur de couplage  $k_{31}$  (équation 1.7).

$$\begin{aligned} \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^S} &= \left( \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^T - Y_p d_{31}^2} \right) \\ &= \left( \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^T} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^T}} \right) \\ &= \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \end{aligned}$$

D'une part, la composante linéaire du profil de potentiel génère le terme de couplage fonction de la tension,  $\theta v(t)$ , mais la composante quadratique incluse dans le modèle a cette fois une influence qui s'apparente à une augmentation de la raideur en flexion. L'équation 2.33 révèle par ailleurs que cette contribution augmente avec le couplage  $k_{31}$  et l'épaisseur du matériau piézoélectrique.

### 2.4.3 Équations de couplage pour le bimorphe

Les équations électriques changent selon que les couches sont branchées en parallèle ou en série l'une par rapport à l'autre. Les équations obtenues pour l'unimorphe demeurent utiles ici, car elles permettent déjà de déterminer la valeur de la capacité d'une couche et la quantité de charges générées par une couche piézoélectrique sous contrainte. Il suffit par la suite de

déterminer le circuit équivalent pour déterminer l'effet du couplage. La figure 2.6 illustre les circuits équivalents pour les deux cas.

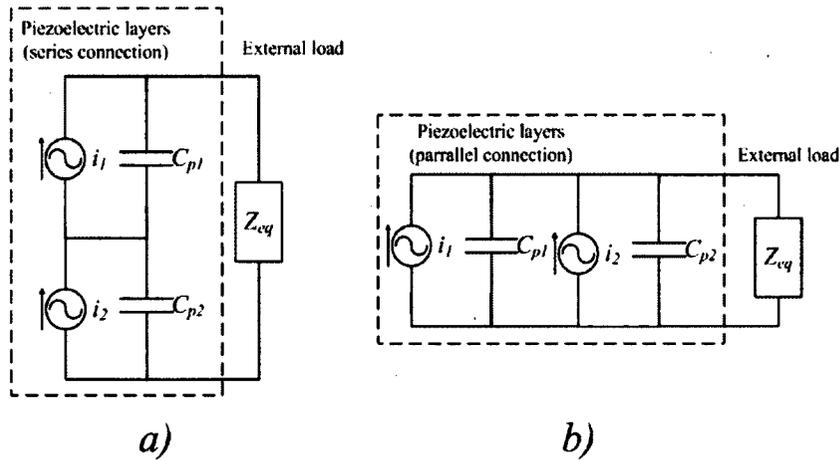


Figure 2.6 Circuits équivalents du bimorphe piézoélectrique branché a) en série et b) en parallèle. Figure adaptée de [16]

Puisque la géométrie a été supposée symétrique, les deux couches piézoélectriques sont faites du même matériau et possèdent les mêmes dimensions. Elles ont donc la même capacité.

$$C_{p1} = C_{p2} = C_p$$

La capacité équivalente pour les deux situations est donnée par

$$\frac{1}{(C_p)_{eq}^s} = \frac{1}{C_{p1}} + \frac{1}{C_{p2}}$$

$$(C_p)_{eq}^s = \frac{C_p}{2} \quad (2.35)$$

$$(C_p)_{eq}^p = C_{p1} + C_{p2} = 2C_p \quad (2.36)$$

alors que la tension mesurée sur la charge externe est

$$v^s(t) = v_1(t) + v_2(t) = 2v(t) \quad (2.37)$$

$$v^p(t) = v_1(t) = v_2(t) = v(t) \quad (2.38)$$

où  $v(t)$  est la tension aux bornes d'une couche. La tension est la même dans les deux couches dans le cas en série à cause de la symétrie de la géométrie. Les capacités sont identiques, tout comme les charges instantanées produites, puisque les contraintes et la polarité sont de signes opposés d'une couche à l'autre. Le courant produit par une couche est donnée par l'équation 2.39, identique au cas de l'unimorphe.

$$i(t) = d_{31}Y_p b \frac{(h_s + h_p)}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (2.39)$$

L'application des lois de Kirchoff aux circuits équivalents définis précédemment permet d'obtenir les équations électriques. Pour le circuit en série,

$$\begin{aligned} \frac{v^s(t)}{Z_{eq}} + (C_p)_{eq}^s \dot{v}^s(t) + i(t) &= 0 \\ \frac{v^s(t)}{Z_{eq}} + \frac{C_p}{2} \dot{v}^s(t) + d_{31}Y_p b \frac{(h_s + h_p)}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Pour le circuit en parallèle,

$$\begin{aligned} \frac{v^p(t)}{Z_{eq}} + (C_p)_{eq}^p \dot{v}^p(t) + 2i(t) &= 0 \\ \frac{v^p(t)}{Z_{eq}} + 2C_p \dot{v}^p(t) + d_{31}Y_p b (h_s + h_p) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Autrement dit,

$$\theta^s = \theta \quad (2.42)$$

$$\theta^p = 2\theta \quad (2.43)$$

Ces résultats indiquent qu'un branchement en série produit une tension plus élevée (vu la capacité équivalente plus faible pour la même quantité de charges), mais également un courant plus faible que le branchement en parallèle. Ils sont aussi validés par le calcul du moment de flexion. Il faut se rappeler que pour le cas en série, les champs électriques instantanés sont du même signe dans les deux couches, car la polarité est inversée. Pour le branchement en parallèle, les champs instantanés dans les deux couches sont de signes opposés, car la polarité est la même. Dans

les deux cas, les contraintes sont de signes opposés, ce qui fait que l'expression du moment de flexion est donnée par l'équation 2.44. Le détail du calcul appliqué est disponible à l'annexe B.

$$M_z(x,t) = \left( YI + 2Y_p I_p \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - bY_p d_{31} \frac{(h_p + h_s)}{2} (v_1(t) + v_2(t)) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \quad (2.44)$$

En série,

$$M_z(x,t) = (YI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \theta^s v^s(t) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \quad (2.45)$$

En parallèle,

$$M_z(x,t) = (YI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \theta^p v^p(t) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \quad (2.46)$$

où  $(YI)_{eq}$  est le module de flexion équivalent qui tient compte du profil de tension quadratique. On note que le branchement parallèle ou série n'affecte aucunement l'effet de raideur provenant du profil quadratique.

$$(YI)_{eq} = YI + 2Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \quad (2.47)$$

Par ailleurs, les équations concordent parfaitement avec celles développées par Erturk et Inman [16] pour le bimorphe lorsque la contribution provenant de la composante quadratique du champs de potentiel électrique est négligée.

#### 2.4.4 Validation du champ de potentiel quadratique et discussion

Les développements présentés dans cette section ont permis de mettre en évidence l'effet du couplage piézoélectrique sur le moment de flexion interne. L'ajout de la composante quadratique semble notamment agir comme une rigidité supplémentaire, ce qui devrait concrètement se répercuter sur la fréquence naturelle de la poutre. Afin de valider le profil de tension proposé,

mais également quantifier son impact, une comparaison avec un modèle par éléments finis a été faite. L'analyse portait sur la variation des fréquences propres afin d'évaluer le décalage résultant selon la géométrie. Celle-ci a permis de démontrer la justesse de l'équation proposée.

Une poutre piézoélectrique composée d'un seul matériau, mais décomposée en deux parties, l'une active et l'autre passive (le tenseur de couplage est annulé), a été modélisée. Dans un premier temps, uniquement le rapport de l'épaisseur active sur l'épaisseur passive a été modifié. Par la suite, la valeur de la constante  $d_{31}$  a été doublée. Pour simuler la situation de court-circuit et donc éliminer tout effet de couplage provenant de la charge externe, puisque la tension est nulle, la charge résistive dans l'éditeur Spice® a été ajustée à  $1E-4$  Ohm. La figure 2.7 compare les résultats analytiques aux résultats obtenus numériquement. Le tableau 2.1 fournit les paramètres utilisés pour la simulation Comsol et l'évaluation analytique.

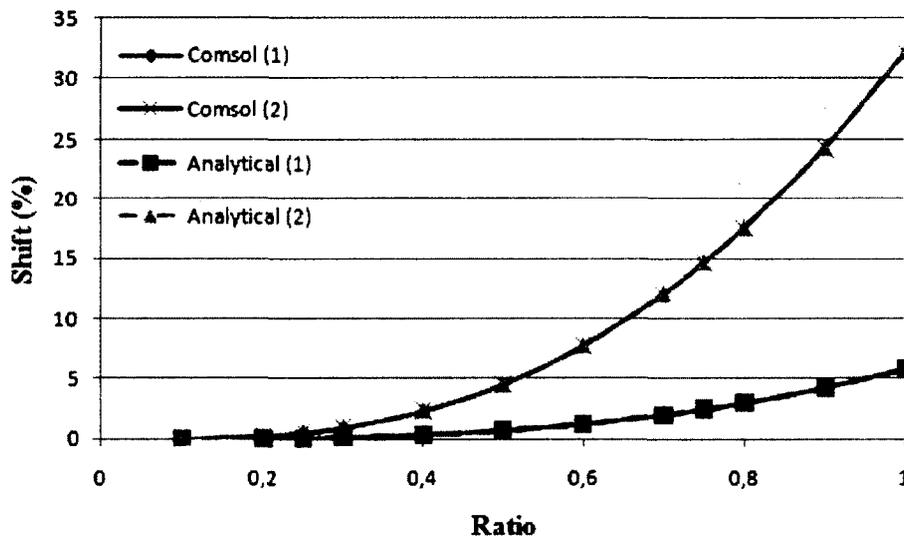


Figure 2.7 Décalage relatif (%) du premier mode d'une poutre piézoélectrique en fonction du ratio d'épaisseur active  $h_p/h_{tot}$ .

Ces résultats démontrent clairement l'influence de l'effet piézoélectrique sur la rigidité en flexion malgré la situation de court-circuit. L'estimation analytique et le résultat numérique se suivent presque parfaitement, il semble donc que la relation déterminée précédemment représente bien la contribution de la composante quadratique. Comme prévu, on constate que plus le coefficient de couplage du matériau est élevé, plus l'effet de raideur est prononcé. Pour un matériau avec un couplage relativement faible ( $k_{31} \approx 0.33$ ), l'impact sur la fréquence naturelle est pratiquement négligeable peu importe la géométrie, car un décalage maximal de l'ordre de  $\approx 6\%$  pour une poutre homogène est calculé. Pour la même géométrie, mais deux fois plus de couplage, cette valeur s'élève plutôt à  $\approx 32\%$ , ce qui n'est plus du tout négligeable.

Tableau 2.1 Paramètres utilisés pour la simulation et l'évaluation analytique du décalage relatif du premier mode.

Paramètres	Cas 1	Cas 2
Matériau dans Comsol ®	PZT-4	PZT-4(modifié)
$h_{tot}$ (mm)	1	1
$b$ (mm)	1	1
$L$ (mm)	50	50
$\rho_p$ (kg/m <sup>3</sup> )	7500	7500
$Y_p$ (GPa)	81.3	81.3
$d_{31}$ (pm/V)	-123	-246
$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	1300	1300
$k_{31}$	0.327	0.654

En résumé, le champ de potentiel proposé comporte une composante quadratique variant selon la longueur. Il respecte les conditions aux limites électriques du problème et permet de prendre en compte d'un effet de raideur supplémentaire créé par le couplage piézoélectrique. Son utilisation permet de mieux prédire la raideur et la fréquence naturelle de la structure couplée, particulièrement si le couplage est fort et que le matériau piézoélectrique est relativement épais par rapport à l'épaisseur totale de la structure. Par contre, l'hypothèse du champ électrique constant, très répandue et utilisée dans la littérature, semble pouvoir prédire convenablement le comportement de la plupart des structures ayant un couplage relativement faible [16, 38, 48]. Pour cette raison, la suite des analyses fera généralement abstraction de cette contribution, mais la connaissance de ce comportement pourrait s'avérer utile si la conception idéale requiert l'usage de couches piézoélectriques épaisses ayant un fort couplage.

## 2.5 Résolution du problème de vibration couplé

Le but de cette section est de compléter la résolution du problème de vibration par le principe de Hamilton. Afin de simplifier le problème, on considère le cas où l'électrode et le matériau piézoélectrique recouvrent toute la longueur de la poutre ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L$ ). De plus, l'excitation est considérée comme de type harmonique et la charge électrique est considérée comme étant purement résistive ( $Z_{eq} = R_{eq}$ ). Cette simplification est faite afin d'alléger la démarche, car l'analyse du circuit ne figure pas parmi les objectifs du présent ouvrage. L'usage d'une charge purement résistive devrait également être suffisant pour comprendre l'impact du choix du matériau et de la géométrie sur l'extraction de l'énergie. Finalement, on peut supposer que la solution du problème de vibrations est une série convergente de fonctions propres qui prend la forme de l'équation 2.48.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_n(x) \eta_n(t) \quad (2.48)$$

où  $\hat{w}_n(x)$  est la déformée modale du mode  $n$  et  $\eta_n(t)$  est l'amplitude modale de ce mode. L'équation 2.49 propose la forme de la déformée modale pour la géométrie à l'étude [16], qui a d'ailleurs été abondamment traitée dans des ouvrages d'acoustique des structures.

$$\hat{w}_n(x) = A_n \left[ \cos\left(\lambda_n \frac{x}{L}\right) - \cosh\left(\lambda_n \frac{x}{L}\right) + \zeta_n \left( \sin\left(\lambda_n \frac{x}{L}\right) - \sinh\left(\lambda_n \frac{x}{L}\right) \right) \right] \quad (2.49)$$

$$\zeta_n = \frac{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n + \lambda_n \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n)}{\cos \lambda_n + \cosh \lambda_n - \lambda_n \frac{M_t}{mL} (\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n)} \quad (2.50)$$

Il est également courant de normaliser la déformée modale afin que sa valeur soit unitaire à l'extrémité de la poutre ( $x = L$ ). Autrement dit,

$$A_n = \left| \frac{\cos \lambda_n + \cosh \lambda_n + \lambda_n \frac{M_t}{mL} (\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n)}{-2 \sin \lambda_n \sinh \lambda_n} \right| \quad (2.51)$$

$\lambda_n$  représente les valeurs propres du système qui s'obtiennent à partir de l'équation transcendante 2.52.

$$1 + \cos \lambda_n \cosh \lambda_n + \lambda_n \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda_n \sinh \lambda_n - \sin \lambda_n \cosh \lambda_n) = 0 \quad (2.52)$$

Les amplitudes modales  $\eta_n$  sont également considérées comme coordonnées généralisées du système. À partir de la valeur du moment de flexion déterminée à l'équation 2.33, l'équation 2.17 de l'Hamiltonien peut alors s'écrire

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_0^L \left( \frac{1}{2} m \dot{w}(x,t)^2 - \frac{1}{2} (YI)_{eq} \left( \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta v(t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \ddot{w}_b(t) w(x,t) \right) dx + M_t \ddot{w}_b(t) w(x_t, t) + \frac{1}{2} M_t \dot{w}(x_t, t)^2 \right) dt \quad (2.53)$$

Exprimée à partir des coordonnées généralisées  $\eta_n(t)$ , l'équation 2.53 prend alors la forme de l'équation 2.54.

$$\begin{aligned}
H = \int_{t_0}^{t_1} & \left( \int_0^L \left( \frac{1}{2} m \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}_n(x) \hat{w}_m(x) \dot{\eta}_n(t) \dot{\eta}_m(t) \right) - \right. \right. \\
& \frac{1}{2} (YI)_{eq} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \hat{w}_m(x)}{dx^2} \eta_n(t) \eta_m(t) \right) + \\
& \left. \frac{1}{2} \theta v(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} \eta_n(t) + m \ddot{w}_b(t) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_n(x) \eta_n(t) \right) dx + \\
& \left. M_t \ddot{w}_b(t) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_n(x_t) \eta_n(t) + \frac{1}{2} M_t \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}_n(x_t) \hat{w}_m(x_t) \dot{\eta}_n(t) \dot{\eta}_m(t) \right) \right) dt \quad (2.54)
\end{aligned}$$

À partir de l'hypothèse d'une excitation harmonique, on peut aussi supposer que les réponses des modes  $\eta_n(t)$  et de la tension en sortie  $v(t)$  le seront aussi. Cette supposition permet d'écrire

$$\eta_n(t) = \eta_n e^{j\omega t} \quad (2.55)$$

$$\dot{\eta}_n(t) = j\omega \eta_n e^{j\omega t} = j\omega \eta_n(t) \quad (2.56)$$

$$\ddot{\eta}_n(t) = -\omega^2 \eta_n e^{j\omega t} = -\omega^2 \eta_n(t) \quad (2.57)$$

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (2.58)$$

$$\dot{v}(t) = j\omega V_0 e^{j\omega t} = j\omega v(t) \quad (2.59)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'accélération par la base et  $V_0$  est le phaseur de la tension. À noter que s'il y a un déphasage entre le déplacement et la tension, cet effet se retrouve implicitement dans le terme  $V_0$ . L'équation électrique peut alors s'écrire sous la forme de l'équation 2.61.

$$\frac{v(t)}{R_{eq}} + C_p \dot{v}(t) = -\theta \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{w}(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
v(t) \left( \frac{1}{R_{eq}} + C_p j\omega \right) &= -\theta \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{w}(x,t)}{\partial x^2} dx \\
v(t) &= - \left( \frac{R_{eq}}{1 + R_{eq} C_p j\omega} \right) \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^L \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} dx \right) \dot{\eta}_n(t) \\
v(t) &= - \left( \frac{j\omega R_{eq}}{1 + R_{eq} C_p j\omega} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \eta_n(t) \quad (2.61)
\end{aligned}$$

où  $\vartheta_n$  est le coefficient de couplage modal.

$$\vartheta_n = \theta \left( \int_0^L \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} dx \right) \quad (2.62)$$

L'équation 2.61 est ensuite retranscrite sous la forme de l'équation 2.63, obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur.

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{(1 - j\omega R_{eq} C_p)}{(1 + j\omega R_{eq} C_p)} \left( \frac{j\omega R_{eq}}{1 + j\omega R_{eq} C_p} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \eta_n(t) \\ &= -\left( \frac{j\omega R_{eq} + \omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \eta_n(t) \end{aligned} \quad (2.63)$$

En substituant  $v(t)$  par sa valeur dans l'équation 2.54, on obtient l'Hamiltonien exprimé uniquement en fonction des coordonnées généralisées à l'équation 2.64.

$$\begin{aligned} H = \int_{t_0}^{t_1} & \left( \int_0^L \left( \frac{1}{2} m \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}_n(x) \hat{w}_m(x) \dot{\eta}_n(t) \dot{\eta}_m(t) \right) \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} (YI)_{eq} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \hat{w}_m(x)}{dx^2} \eta_n(t) \eta_m(t) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{j\omega R_{eq} + \omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} \vartheta_m \eta_n(t) \eta_m(t) \\ & \left. + m \ddot{w}_b(t) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_n(x) \eta_n(t) \right) dx + M_t \ddot{w}_b(t) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_n(x_t) \eta_n(t) + \\ & \left. \frac{1}{2} M_t \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}_n(x_t) \hat{w}_m(x_t) \dot{\eta}_n(t) \dot{\eta}_m(t) \right) \right) dt \end{aligned} \quad (2.64)$$

L'extrémalisation de cette fonctionnelle à  $n$  fonctions du temps  $\eta_n(t)$  se produit lorsque

$$H = \int_{t_0}^{t_1} F(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dots, \dot{\eta}_n) dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}_n} = 0 \quad \forall n \text{ et } \forall t \in ]t_0, t_1[ \quad (2.65)$$

Ainsi, pour chaque  $\eta_n$ , il advient que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta_n} = & -(YI)_{eq} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^L \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \hat{w}_m(x)}{dx^2} dx \right) \eta_m(t) - \left( \frac{j\omega R_{eq} + \omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \right) \vartheta_n \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m \eta_m(t) \\ & + m \ddot{w}_b(t) \int_0^L \hat{w}_n(x) dx + M_t \ddot{w}_b(t) \hat{w}_n(x_t) \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}_n} = m \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^L \hat{w}_n(x) \hat{w}_m(x) dx \right) \dot{\eta}_m(t) + M_t \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}_n(x_t) \hat{w}_m(x_t) \dot{\eta}_m(t) \quad (2.67)$$

De plus, en considérant la propriété d'orthogonalité des modes propres de vibrations utilisés (exprimée aux équations 2.68 et 2.69), l'équation 2.65 peut se transcrire comme à l'équation 2.70. Cette équation est l'équation du mouvement modale.

$$\int_0^L \hat{w}_n(x) \hat{w}_m(x) dx = 0 \quad \forall m \neq n \quad (2.68)$$

$$\int_0^L \frac{d\hat{w}_n(x)}{dx} \frac{d\hat{w}_m(x)}{dx} dx = 0 \quad \forall m \neq n \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} (YI)_{eq} N_n^{xx} \eta_n(t) + \left( \frac{j\omega R_{eq} + \omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \right) \vartheta_n \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m \eta_m(t) + \\ m \left( N_n + \frac{M_t}{m} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}_n(x_t) \hat{w}_m(x_t) \right) \dot{\eta}_n(t) = f_n(t) \end{aligned} \quad (2.70)$$

où  $N_n$  et  $N_n^{xx}$  sont des modules d'intégration et  $f_n(t)$  est la force d'excitation modale issue de l'accélération par la base.

$$N_n = \int_0^L (\hat{w}_n(x))^2 dx \quad (2.71)$$

$$N_n^{xx} = \int_0^L \left( \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.72)$$

$$f_n(t) = m\ddot{w}_b(t) \left( \int_0^L \hat{w}_n(x) dx + \frac{M_t}{m} \hat{w}_n(x_t) \right) \quad (2.73)$$

Afin de considérer les différents modes, l'équation 2.70 peut se retranscrire sous la forme matricielle de l'équation 2.74.

$$\mathbf{K}\{\eta_n(t)\} + \mathbf{M}\{\ddot{\eta}_n(t)\} + \left( \frac{j\omega R_{eq} + \omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \right) \Theta \{\eta_n(t)\} = \{f_n(t)\} \quad (2.74)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur,  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\Theta$  est la matrice de couplage électromécanique et  $\{f_n(t)\}$  est le vecteur des forces d'excitations modales. La valeur de chacun de ses termes est donnée aux équations 2.75 à 2.78.

$$\mathbf{K} = (YI)_{eq} \begin{bmatrix} N_1^{xx} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_n^{xx} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_n \end{bmatrix} + M_t \begin{bmatrix} \hat{w}_1(x_t)^2 & \cdots & \hat{w}_1(x_t)\hat{w}_n(x_t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{w}_n(x_t)\hat{w}_1(x_t) & \cdots & \hat{w}_n(x_t)^2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \vartheta_1^2 & \cdots & \vartheta_1\vartheta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vartheta_n\vartheta_1 & \cdots & \vartheta_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$\{f_n(t)\} = m\ddot{w}_b(t) \begin{pmatrix} \int_0^L \hat{w}_1(x) dx + \frac{M_t}{m} \hat{w}_1(x_t) \\ \vdots \\ \int_0^L \hat{w}_n(x) dx + \frac{M_t}{m} \hat{w}_n(x_t) \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

À noter que la contribution provenant de la matrice de couplage  $\Theta$  est annulée en situation de court-circuit. En quelque sorte, le comportement de la poutre est alors purement limité au domaine mécanique.

### 2.5.1 Traitement amorti

La procédure courante pour tenir compte des pertes mécaniques consiste à ajouter une matrice d'amortissement modale  $\mathbf{C}$  dans l'équation 2.74. Cette matrice est diagonale et ses valeurs sont habituellement mesurées expérimentalement. De cette manière, il est possible de prendre en compte l'augmentation des pertes par amortissement pour des dynamiques plus rapides. On obtient alors l'équation 2.79.

$$\mathbf{K}\{\eta_n(t)\} + \mathbf{C}\{\dot{\eta}_n(t)\} + \mathbf{M}\{\ddot{\eta}_n(t)\} + \left( \frac{j\omega R_{eq} + \omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \right) \Theta \{\eta_n(t)\} = \{f_n(t)\} \quad (2.79)$$

### 2.5.2 Solution pour une fréquence arbitraire

Pour une excitation harmonique de fréquence arbitraire, l'équation 2.79 devient

$$\mathbf{K}\{\eta_n\} + j\omega\mathbf{C}\{\eta_n\} - \omega^2\mathbf{M}\{\eta_n\} + \left( \frac{j\omega R_{eq} + \omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \right) \Theta \{\eta_n\} = \{f_n\} \quad (2.80)$$

À noter que la dépendance temporelle a disparu, car tous les termes  $e^{j\omega t}$  se simplifient à cette étape. Il est aussi intéressant de regrouper les différentes composantes réelles et imaginaires, afin de visualiser l'influence du couplage sur le système. L'équation 2.80 est alors retranscrite sous la forme de l'équation 2.81.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\Theta)\{\eta_n\} - \omega^2\mathbf{M}\{\eta_n\} + j\omega(\mathbf{C} + \mathbf{C}_\Theta)\{\eta_n\} = \{f_n\} \quad (2.81)$$

Les matrices  $\mathbf{K}_\Theta$  et  $\mathbf{C}_\Theta$  représentent ici les contributions du couplage sous la forme de matrices de raideur électrique (équation 2.82) et d'amortissement électrique (équation 2.83).

$$\mathbf{K}_\Theta = \frac{\omega^2 R_{eq}^2 C_p}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \Theta \quad (2.82)$$

$$C_{\Theta} = \frac{R_{eq}}{1 + \omega^2 R_{eq}^2 C_p^2} \Theta \quad (2.83)$$

Ces deux composantes varient avec la fréquence et la charge, car ces paramètres influencent à la fois l'amplitude et la phase de la force électrique interne. L'intérêt de cette notation est qu'elle permet de visualiser aisément la contribution de l'effet piézoélectrique sur la dynamique du système. L'analyse de cette dynamique est d'ailleurs présentée plus en détail à la section 3.1. Sous sa forme actuelle, l'expression 2.81 représente un système d'équations linéaires. Sa solution à l'équation 2.84 fournit l'amplitude de chaque mode  $\eta_n$ .

$$\{\eta_n\} = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\Theta} + j\omega(\mathbf{C} + \mathbf{C}_{\Theta}) - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \{f_n\} \quad (2.84)$$

## 2.6 Solution autour d'un mode fondamental

Pour un système mécanique, la solution précédente peut se simplifier dans le cas où l'excitation se situe près d'une des fréquences propres du système. Dans cette situation, la contribution des autres modes est très faible par rapport au mode sollicité et on peut alors ne considérer que ce dernier. Liao et Sodano ont démontré expérimentalement que cette hypothèse est aussi valide pour une poutre piézoélectrique [38]. La masse équivalente  $M_{eq}$ , la raideur mécanique  $K_m$ , la raideur électrique  $K_{el}$  et l'amortissement électrique  $C_{el}$  sont alors donnés par les équations 2.85 à 2.88.

$$M_{eq} = mN_n + M_t \hat{w}_n(x_t) \quad (2.85)$$

$$K_m = (YI)_{eq} N_n^{xx} \quad (2.86)$$

$$K_{el} = \left( \frac{\vartheta_n^2}{C_p} \right) \frac{(\omega R_{eq} C_p)^2}{1 + (\omega R_{eq} C_p)^2} \quad (2.87)$$

$$C_{el} = \left( \frac{\vartheta_n^2}{C_p} \right) \frac{(R_{eq} C_p)}{1 + (\omega R_{eq} C_p)^2} \quad (2.88)$$

L'amplitude modale peut alors s'exprimer,

$$\eta_n = \frac{f_n}{(K_m + K_{el} - \omega^2 M_{eq}) + j\omega(C_m + C_{el})} \quad (2.89)$$

où  $C_m$  représente l'amortissement mécanique du mode considéré. On retrouve alors une expression pour un système d'oscillateur masse-ressort-amortisseur, mais ayant des composantes électriques. De plus, en simplifiant l'équation 2.63 autour d'un seul mode, la tension générée peut s'exprimer

$$V_0 = -\frac{(K_{el} + j\omega C_{el})}{\vartheta_n} \eta \quad (2.90)$$

La tension est alors proportionnelle au déplacement, de manière analogue aux forces générées par un ressort et un amortisseur électrique.

### 2.6.1 Définition des paramètres adimensionnels

Il serait désormais approprié de définir certains paramètres qui seront utiles pour la suite de cette étude. Tout d'abord, il faut rappeler l'expression traditionnelle de la fréquence naturelle  $\omega_n$ , donnée par l'équation 2.91. Par contre, celle-ci ne tient pas compte de la raideur électrique introduite par le couplage piézoélectrique et c'est pourquoi une fréquence de résonance couplée  $\omega'_n$  est également introduite à l'équation 2.92. Ce paramètre est discuté davantage à la section 3.2.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_m}{M_{eq}}} \quad (2.91)$$

$$\omega'_n = \sqrt{\frac{K_m + K_{el}}{M_{eq}}} \quad (2.92)$$

La fréquence  $\omega$ , l'amortissement mécanique  $C_m$ , la charge résistive  $R_{eq}$  et le couplage  $\vartheta_n$  peuvent désormais s'exprimer sous formes adimensionnelles.

$$\Omega_n = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.93)$$

$$\zeta_m = \frac{C_m}{2\omega_n M_{eq}} \quad (2.94)$$

$$\alpha = \omega_n C_p R_{eq} \quad (2.95)$$

$$k_e^2 = \frac{\vartheta^2}{K_m C_p} \quad (2.96)$$

$\Omega_n$  est le rapport de fréquence,  $\zeta_m$  est le facteur d'amortissement mécanique et  $\alpha$  est la constante de temps (ou la charge résistive) adimensionnelle. Par ailleurs, l'équation 2.96 est très utilisée dans la littérature pour évaluer le facteur de couplage piézoélectrique effectif  $k_e$  [10, 18, 19], mais il est important de noter que cette expression n'est pas tout à fait exacte, car elle ne correspond pas à  $k_e$  tel qu'il a été défini à la section 1.4.1. En effet, cette expression représente plutôt le rapport de l'énergie électrique sur l'énergie mécanique emmagasinée (et non l'énergie totale appliquée). Par contre, dans le cas de systèmes faiblement couplés ( $k_e \leq 0.1$ ), l'énergie mécanique est beaucoup plus importante que l'énergie électrique et l'expression 2.96 fournit alors un très bon estimé du couplage effectif.

Toutes ces valeurs peuvent donc être évaluées pour chaque mode considéré. Ces paramètres peuvent également être employés pour redéfinir la raideur électrique  $K_{el}$  et l'amortissement électrique  $C_{el}$ .

$$\zeta_{el} = \frac{\alpha k_e^2}{2(1 + \Omega_n^2 \alpha^2)} \quad (2.97)$$

$$\Delta\Omega_n^2 = \frac{\Omega_n^2 \alpha^2 k_e^2}{(1 + \Omega_n^2 \alpha^2)} \quad (2.98)$$

$$= 2\Omega_n^2 \alpha \zeta_{el} \quad (2.99)$$

Physiquement,  $\zeta_{el}$  est le facteur d'amortissement associé au couplage piézoélectrique et  $\Delta\Omega^2$  représente le décalage de la fréquence de résonance provenant de l'effet piézoélectrique. Autrement dit,

$$\omega'_n = \omega_n \sqrt{1 + \Delta\Omega_n^2} \quad (2.100)$$

Un coefficient correcteur  $\mu$ , formulé à l'équation 2.101, est finalement introduit afin de tenir compte de l'effet de la répartition de la masse de la structure sur la force inertielle. Dans un modèle 1-D, cette force correspondrait exactement au produit de la masse et de l'accélération de la base, mais cela n'est pas nécessairement le cas lorsque la masse est distribuée. En pratique, ceci tend à être exact seulement si la masse au bout de la poutre est relativement plus importante que la masse de la poutre ( $M_t > 10mL$ ). La figure 2.8 trace la valeur de ce coefficient pour le premier mode de flexion en fonction du rapport entre la masse au bout et la masse de la poutre. Pour un rapport de 0 par exemple, le coefficient prend une valeur de 1,566. L'importance de tenir compte de ce paramètre deviendra apparente dans la prochaine section. La relation 2.102, déterminée numériquement par Erturk [15], permet d'évaluer directement ce coefficient en fonction du rapport des masses.

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{f_n(t)}{\ddot{w}_b(t)M_{eq}} \\ &= \frac{\left( \int_0^L \hat{w}_n(x) dx + \frac{M_t}{m} \hat{w}_n(x_t) \right)}{N_n + \frac{M_t}{m} \hat{w}_n(x_t)} \end{aligned} \quad (2.101)$$

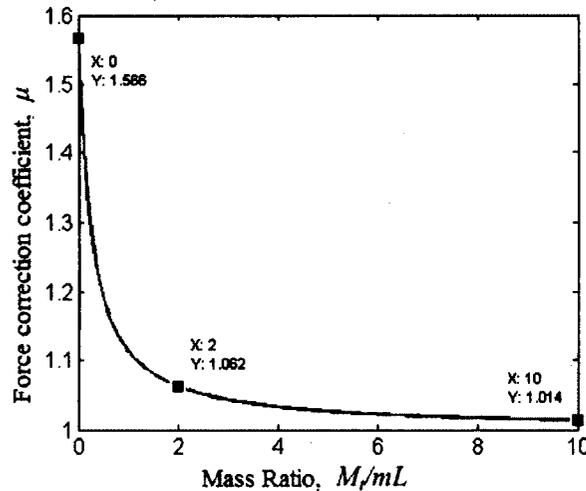


Figure 2.8 Coefficient correcteur sur la force  $\mu$  en fonction du ratio de masse  $M_t/mL$  pour le premier mode de vibration.

$$\mu = \frac{(M_t/mL)^2 + 0.603(M_t/mL) + 0.08955}{(M_t/mL)^2 + 0.4637(M_t/mL) + 0.05718} \quad (2.102)$$

### 2.6.2 Équations des paramètres en sortie

L'amplitude modale peut être retranscrite en fonction des paramètres adimensionnés introduits à la section précédente.

$$\eta_n = \frac{\mu \ddot{w}_b}{\omega_n^2 [1 + \Delta\Omega_n^2 - \Omega_n^2 + 2j\Omega_n(\zeta_m + \zeta_{el})]} \quad (2.103)$$

et la norme de la déflexion est donc donnée par

$$|\eta_n| = \frac{\mu \ddot{w}_b}{\omega_n^2 \sqrt{(1 + \Delta\Omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + 4\Omega_n^2(\zeta_m + \zeta_{el})^2}} \quad (2.104)$$

Pour une accélération  $\ddot{w}_b$  constante, l'amplitude diminue avec le carré de la fréquence de résonance  $\omega_n$ . Ce résultat est logique, puisqu'une fréquence élevée correspond à une rigidité élevée. La tension d'un mode en fonction de l'amplitude est donnée par l'équation 2.105.

$$V_0 = -\frac{K_m}{\vartheta_n} (\Delta\Omega_n^2 + 2j\Omega_n\zeta_{el}) \eta_n \quad (2.105)$$

En substituant l'amplitude modale dans cette relation, on obtient la solution explicite de la tension à l'équation 2.106.

$$V_0 = -\frac{\mu \ddot{w}_b M_{eq}}{\vartheta_n} \frac{(\Delta\Omega_n^2 + 2j\Omega_n\zeta_{el})}{[1 + \Delta\Omega_n^2 - \Omega_n^2 + 2j\Omega_n(\zeta_m + \zeta_{el})]} \quad (2.106)$$

La norme de la tension est donnée par

$$|V_0| = \frac{\mu \ddot{w}_b M_{eq}}{\vartheta_n} \frac{\sqrt{\Delta\Omega_n^4 + 4\Omega_n^2 \zeta_{el}^2}}{\sqrt{(1 + \Delta\Omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + 4\Omega_n^2(\zeta_m + \zeta_{el})^2}} \quad (2.107)$$

Une tension élevée est donc associée à une action prononcée de la raideur et de l'amortissement électrique. De plus, pour une accélération constante, la tension augmente avec la masse. Au premier coup d'oeil, elle semble également diminuer avec le couplage modal, mais il faut aussi considérer que celui-ci apparaît au carré dans le numérateur (via les termes de raideur et d'amor-

tissement électrique). L'analyse de cette expression semble donc moins aisée. La solution de la tension peut ensuite être employée pour déterminer le courant  $I_0$  (équation 2.108).

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{V_0}{R_{eq}} \\ &= \frac{\mu \ddot{w}_b \vartheta_n}{\omega_n} \frac{\Omega_n (\Omega_n \alpha + j)}{(1 + \Omega_n^2 \alpha^2) [1 + \Delta \Omega_n^2 - \Omega_n^2 + 2j \Omega_n (\zeta_m + \zeta_{el})]} \end{aligned} \quad (2.108)$$

La norme du courant vaut alors

$$|I_0| = \frac{\mu \ddot{w}_b \vartheta_n}{\omega_n} \frac{\Omega_n}{\sqrt{\Omega_n^2 \alpha^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{(1 + \Delta \Omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + 4 \Omega_n^2 (\zeta_m + \zeta_{el})^2}} \quad (2.109)$$

Le courant diminue avec la fréquence naturelle du système, mais augmente aussi avec le couplage modal. De plus, une charge résistive nulle (donc un court-circuit) permet logiquement de générer un fort courant. L'augmentation de cette charge semble moduler une diminution du courant, ce qui est aussi une conclusion logique. Pour désormais évaluer la puissance, il est important de tenir compte du déphasage entre la tension et le courant à la charge. Pour une charge résistive, ces deux composantes sont en phase, mais pour être rigoureux, les équations pour une source alternative seront employées. La puissance complexe est donnée par l'équation 2.110, où  $I_0^*$  est la conjuguée du courant.

$$P = \frac{V_0 I_0^*}{2} \quad (2.110)$$

En effectuant cette opération, la solution suivante est obtenue

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu^2 \ddot{w}_b^2 M_{eq} k_e^2 \Omega_n^2 \alpha (\Omega_n \alpha + j) (\Omega_n \alpha - j)}{2 \omega_n (\Omega_n^2 \alpha^2 + 1)^2 [1 + \Delta \Omega_n^2 - \Omega_n^2 + 2j \Omega_n (\zeta_m + \zeta_{el})] [1 + \Delta \Omega_n^2 - \Omega_n^2 - 2j \Omega_n (\zeta_m + \zeta_{el})]} \\ &= \frac{\mu^2 \ddot{w}_b^2 M_{eq} \Omega_n^2 \zeta_{el}}{\omega_n [(1 + \Delta \Omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + 4 \Omega_n^2 (\zeta_m + \zeta_{el})^2]} \end{aligned} \quad (2.111)$$

L'équation 2.111 donne, dans ce cas, un nombre réel, car la charge est purement résistive. Autrement dit, cette valeur fournie à la fois la puissance moyenne et l'amplitude du signal alternatif

qui est généré. La puissance instantanée peut donc atteindre une valeur allant de 0 à  $2P$  au cours d'une période. Cette expression de puissance diffère de celle fournie par Erturk et Inman [ ] d'un facteur 1/2, car eux ont plutôt utilisé l'expression  $P = V_0^2/R_{eq}$ , généralement utilisée pour déterminer la puissance en courant DC. Bien que cette façon de faire fournie au final la même puissance instantanée maximum, le résultat est équivalent à un signal allant de  $-P$  à  $P$  et dont la moyenne donne 0, ce qui ne représente évidemment pas la réalité.

L'équation 2.111 permet également de constater l'importance du facteur de correction  $\mu$ , puisqu'il y apparaît au carré. Dans le cas d'une poutre sans masse au bout, négliger ce facteur mènera alors à sous-estimer la puissance produite de 59 %. Pour des ratios de 2 et 10, l'erreur sur la puissance diminuerait à 9.6 % et 2,7 % respectivement. La puissance est également proportionnelle au carré de l'accélération, ainsi qu'au rapport masse équivalente sur fréquence naturelle. Pour une fréquence donnée, l'augmentation du volume (donc de la masse) entraîne une augmentation de la puissance produite.

Comparativement aux autres formules présentées dans la littérature, les expressions présentées dans cette section ont l'avantage d'être relativement compactes et explicites, puisqu'elles font clairement apparaître les composantes de raideur et d'amortissement électrique. Elles sont également tout aussi exactes.

### 2.6.3 Exemple de réponses fréquentielles

Les figures 2.9 à 2.12 illustrent des réponses en fréquence près du premier mode pour le déplacement au bout de la poutre, la tension, le courant et la puissance. Elles démontrent la variation des réponses lorsque la charge électrique  $\alpha$  est variée. La poutre modélisée est un unimorphe soumis à une accélération de  $1 \text{ m/s}^2$  et n'ayant aucune masse ajoutée à son bout. Le tableau 2.2 regroupe les données utilisées en entrée pour générer ces traces.

Tableau 2.2 Paramètres géométriques et électromécaniques utilisés pour générer les réponses fréquentielles.

$L$ (mm)	$b$ (mm)	$h_s$ (mm)	$h_p$ (mm)	$Y_s$ (Gpa)	$Y_p$ (GPa)	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_p$ (kg/m <sup>3</sup> )	$d_{31}$ (pm/V)	$\epsilon_{33}^S$ (nF/m)	$\zeta_m$
100	20	0.5	0.4	100	66	7165	7800	-190	15.93	0.005

La dynamique observée est analysée plus en détail au chapitre 3, mais la figure 2.9 permet déjà d'observer l'effet de décalage de la fréquence de résonance avec l'augmentation de la résistance électrique, ainsi que l'impact de l'amortissement électrique qui module le déplacement. Comme on pourrait s'y attendre, la tension augmente et le courant diminue avec la charge  $\alpha$ . De plus, la puissance semble atteindre sa valeur maximale à la fréquence naturelle, puis à un second pic

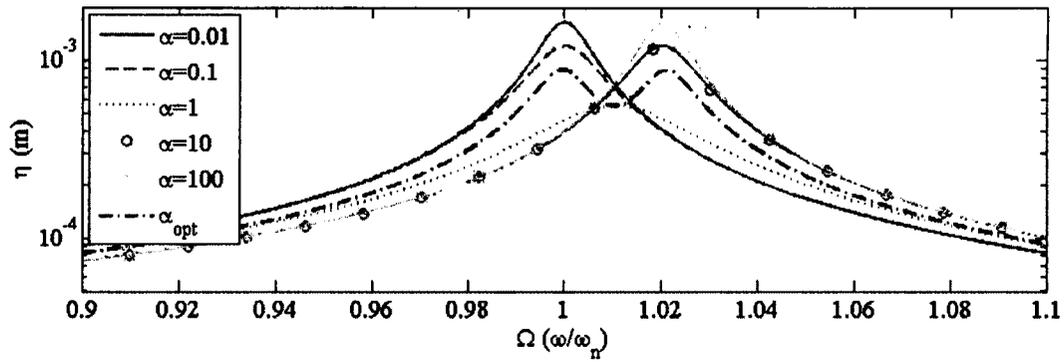


Figure 2.9 Réponse en fréquence du déplacement au bout  $\eta_n$  en fonction de la charge électrique  $\alpha$ .

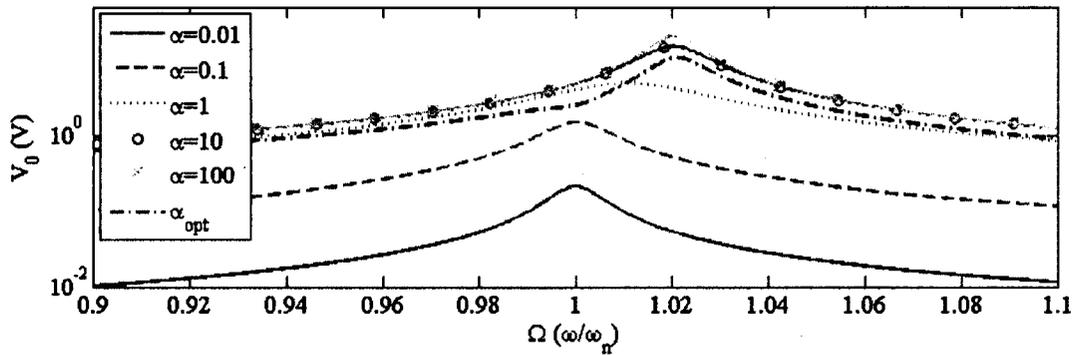


Figure 2.10 Réponse en fréquence de la tension  $V_0$  en fonction de la charge électrique  $\alpha$ .

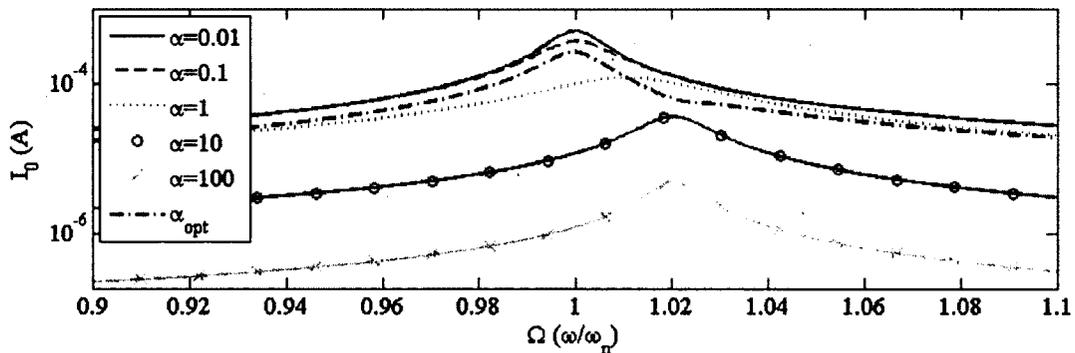


Figure 2.11 Réponse en fréquence du courant  $I_0$  en fonction de la charge électrique  $\alpha$ .

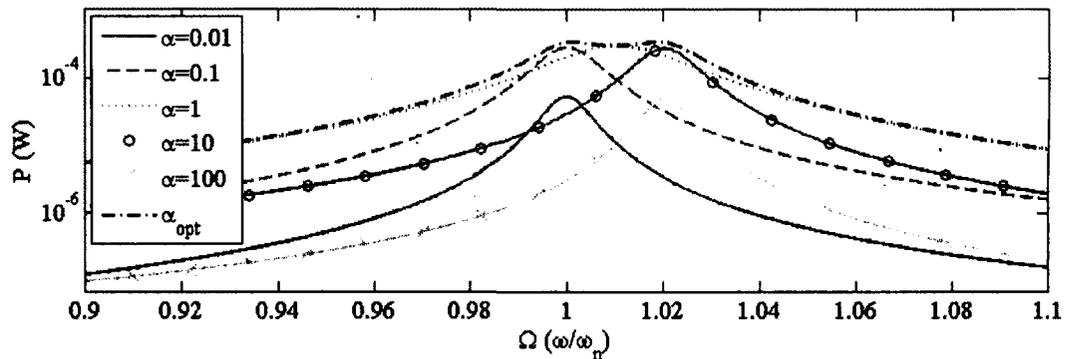


Figure 2.12 Réponse en fréquence de la puissance  $P$  en fonction de la charge électrique  $\alpha$ .

près de  $\Omega = 1.02$ . À noter que la figure 2.12 est très similaire à la figure 1.5 obtenue par Renno *et al.* [45]. Les traces pour  $\alpha_{opt}$  correspondent aux réponses obtenues en optimisant la charge électrique  $\alpha$  afin de maximiser la puissance  $P$  pour chaque rapport de fréquence  $\Omega$ . En annulant la dérivée de l'équation 2.111 par rapport à  $\alpha$ , l'équation 2.112 (tirée de [45]) est obtenue.

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{1 + \Omega_n^4 - 2\Omega_n^2 + 4\zeta_m^2 \Omega_n^2}{\Omega_n^2 (4\zeta_m^2 \Omega_n^2 + (1 - \Omega_n^2 + k_e^2)^2)}} \quad (2.112)$$

Dans un second temps, le modèle développé est comparé avec des résultats expérimentaux présentés par Erturk et Inman [16] afin de le valider. Le tableau 2.3 compare ses mesures aux résultats obtenus en injectant les paramètres correspondant dans le modèle. Ces paramètres se trouvent au tableau 2.4 et sont ceux d'un bimorphe fabriqué par Piezosystems Inc. (modèle T226-A4-503X). Pour cette expérience, une masse de 12 g a été ajoutée au bout de la poutre. Une bonne concordance des résultats théoriques avec la pratique peut être observée.

## 2.7 Résumé de la modélisation

Ce chapitre a permis de développer un modèle distribué basé sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Tout d'abord, deux types de configurations ont été présentés : l'unimorphe et le bimorphe symétrique. Grâce à l'application du principe d'Hamilton, les équations générales du mouvement et du circuit électrique ont pu être obtenues. En cours de route, il a été démontré que l'usage d'un champ électrique constant selon l'épaisseur pour modéliser la réponse de la couche piézoélectrique viole les lois fondamentales de l'électromagnétisme. En vérité, le champ varie plutôt linéairement (donc le profil de tension est quadratique dans la couche), ce qui se traduit par une rigidité supplémentaire de la poutre en flexion. Cependant, l'évaluation numérique

Tableau 2.3 Comparaison des résultats expérimentaux de Erturk (E) et des résultats fournis par le modèle développé (M). CO=circuit ouvert, CC=court-circuit.

Fréquence (Hz)	$R_{eq}$ (k $\Omega$ )	$V_0/\ddot{w}_b$ (V/G)		$I_0/\ddot{w}_b$ (mA/G)		$P/(\ddot{w}_b)^2$ (mW/G <sup>2</sup> )	
		E	M	E	M	E	M
45.6	1	1.57	1.56	-	1.56	-	1.21
	35	-	28.9	-	0.83	12.0	12
	83.4	40.6	40.5	0.49	0.49	9.95	9.9
	CO	54.5	55.9	-	-	-	-
	CC	-	-	1.57	1.59	-	-
48.4	83.4	40.6	40.4	0.49	0.48	9.95	9.8
	186	-	65.1	-	0.35	12.0	11.4
	470	84	91.3	-	0.19	-	8.7
	CO	108.8	120.4	-	-	-	-
	CC	-	-	0.68	0.68	-	-

Tableau 2.4 Paramètres utilisés pour la comparaison des résultats.

$L$ (mm)	$b$ (mm)	$h_s$ (mm)	$h_p$ (mm)	$Y_s$ (Gpa)	$Y_p$ (Gpa)
50.8	31.8	0.14	0.26	105	66
$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_p$ (kg/m <sup>3</sup> )	$d_{31}$ (pm/V)	$\epsilon_{33}^s$ (nF/m)	$M_t$ (g)	$\zeta_m$
9000	7800	-190	13.28	0.027	12

faite à la section 2.4.4 a permis de démontrer que ce comportement n'est important que lorsque le matériau piézoélectrique a un facteur de couplage élevé et qu'il compose une bonne partie de la poutre.

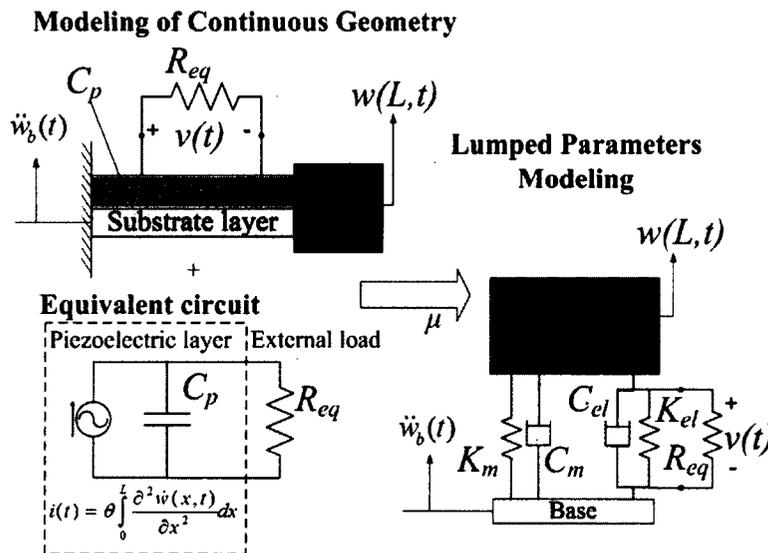


Figure 2.13 Schéma de la démarche de modélisation.

Par la suite, le modèle distribué a été réduit avec succès autour d'un seul mode à la suite de l'introduction des paramètres adimensionnés et des circuits équivalents pertinents. La contribution du couplage piézoélectrique à la dynamique du système a également été redéfinie explicitement sous la forme d'une raideur et d'un amortissement électrique. Ces deux paramètres sont essentiellement fonction du facteur de couplage effectif  $k_e^2$ , de la charge électrique et de la fréquence d'excitation. Par la suite, des formules compactes pour le déplacement, la tension, le courant et la puissance ont été déterminées. La figure 2.13 résume l'ensemble de cette démarche.

Le modèle développé a finalement pu être validé par le calcul des réponses en fréquence typiques pour ce type de système. La variation de la charge électrique a bel et bien l'effet attendu sur le comportement vibratoire de la poutre piézoélectrique. Par contre, les réponses démontrent un comportement complexe qu'il faut mettre davantage au clair avant d'aller plus loin. Le modèle doit être analysé et compris afin de pouvoir en extraire les dynamiques importantes et finalement s'en servir à des fins de conception. Cette analyse est l'objet du prochain chapitre.



## CHAPITRE 3

# ANALYSE DE LA DYNAMIQUE COUPLÉE

Tel que présenté à la section 2.6, l'effet piézoélectrique peut être assimilé à l'ajout d'une raideur et d'un amortissement électrique agissant sur le résonateur. Le modèle présenté jusqu'à présent a permis d'explicitier cette contribution, ce qui devrait simplifier l'analyse du comportement du système. Cette section présente tout d'abord une analyse du comportement électromécanique, suivit des formules pour évaluer les paramètres à la résonance. Par la suite, un critère de couplage critique est introduit pour expliquer les différents régimes de fonctionnement du système. Finalement, les solutions sous formes compactes pour ces régimes sont présentées.

### 3.1 Comportement de la raideur et de l'amortissement électrique

L'amortissement et la raideur totale du système varient avec l'impédance de la charge et la fréquence d'excitation. Selon les développements précédents, les composantes électriques peuvent s'écrire

$$\zeta_{el} = \frac{C_{el}}{2\omega_n M_{eq}} = \frac{\alpha k_e^2}{2(1 + \Omega_n^2 \alpha^2)} \quad (3.1)$$

$$\Delta\Omega_n^2 = \frac{K_{el}}{K_m} = \frac{\Omega_n^2 \alpha^2 k_e^2}{(1 + \Omega_n^2 \alpha^2)} \quad (3.2)$$

La figure 3.1 illustre les tendances des variations de la raideur électrique  $\Delta\Omega_n^2$  et de l'amortissement électrique  $\zeta_{el}$  en fonction de la charge résistive. La raideur passe de 0 pour aller vers une valeur asymptotique égale à  $k_e^2$  lorsque la résistance augmente. Cela est conforme au phénomène du décalage de la fréquence de résonance qui a été abondamment noté dans la littérature et observé expérimentalement. De plus, l'amortissement électrique est nul en court-circuit, atteint une valeur maximale, puis redevient nul en état de circuit ouvert. La figure 3.2 illustre plutôt les tendances en fonction du rapport fréquentiel. La tendance pour la raideur est identique à celle observée précédemment et quant à l'amortissement, il est maximal en basse fréquence et tend vers zéro lorsque la fréquence augmente.

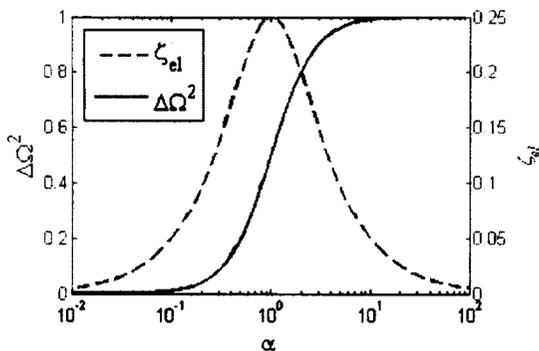


Figure 3.1  $\Delta\Omega_n$  et  $\zeta_{el}$  en fonction de la charge résistive du circuit (valeurs normalisées).  $\Omega = 1$

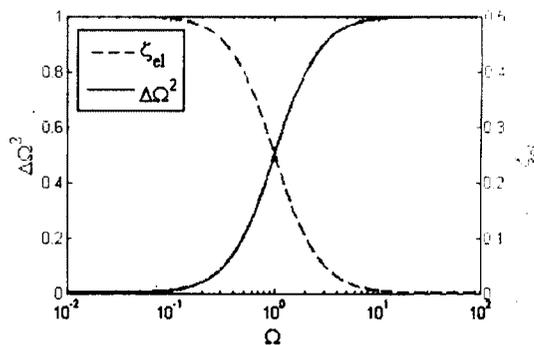


Figure 3.2  $\Delta\Omega_n^2$  et  $\zeta_{el}$  en fonction de la fréquence d'excitation (valeurs normalisées).  $\alpha = 1$

Ce comportement est essentiellement relié au décalage de la force piézoélectrique produite par rapport au mouvement relatif de la poutre et ce déphasage est lui-même relié à la nature du circuit équivalent du système (dans ce cas, un circuit RC). En situation de court-circuit, les charges produites sont dissipées à bas voltage, sans affecter la dynamique de la poutre. À l'opposé, les charges produites demeurent dans la couche capacitive et génèrent une tension élevée lorsque le circuit est ouvert, d'où l'effet de « réflexion » ou de raideur électrique. Entre ces deux situations, il y a échange d'énergie entre la poutre vibrante et la charge résistive externe connectée, ce qui se traduit finalement par une forme d'amortissement provenant de l'extraction des charges électriques. À la fréquence naturelle de la poutre ( $\Omega = 1$ ), l'amortissement électrique maximum est obtenu lorsque  $\alpha = 1$  ( $R_{eq} = \omega_n C_p$ ). Ce résultat est logique, puisqu'il correspond au principe d'adaptation d'impédance qui stipule que l'impédance du récepteur électrique doit être complexe conjuguée à l'impédance du générateur pour optimiser le transfert de la puissance électrique.

Le comportement fréquentiel s'explique du fait qu'à basse fréquence, l'impédance de la couche capacitive est beaucoup plus élevée que celle de la résistance externe, donc les charges produites sont dirigées vers la charge externe. La tendance est inversée à haute fréquence, puisque l'impédance de la capacité est désormais beaucoup plus faible que celle de la résistance externe. Les charges produites sont donc « réfléchies » dans la poutre, ce qui se traduit ici encore comme une raideur électrique. Par contre, même si l'amortissement électrique semble très important pour de faibles rapports de fréquences, il faut aussi considérer que la puissance produite est fonction de l'amplitude des déformations induites dans la poutre. Pour ces faibles rapports  $\Omega$ , la transmissibilité est minime et la puissance extraite est finalement très faible.

Cette analyse permet donc de comprendre comment la nature même du circuit influence la dynamique du système. Une analyse similaire pourrait très bien être faite pour un circuit comportant

une inductance ou une capacité externe. Par exemple, Renno *et al.* [45] avaient déjà observé que la réponse fréquentielle pouvait être optimisée sur tout le spectre par l'ajout d'une inductance optimale (fonction de la fréquence et de la résistance externe). Au final, le circuit équivalent est un circuit RLC. Sachant que ce type de circuit peut également entrer en résonance, ceci revient à introduire un second mode résonant ajustable à partir de la charge RL. Autrement dit, ce type de circuit permet d'ajuster la raideur et l'amortissement électrique pour toutes les fréquences.

### 3.2 Solutions à la résonance

Tout près de la résonance, le terme réel  $(1 + \Delta\Omega_n^2 - \Omega_n^2)$  présent au dénominateur de la solution du déplacement doit être nul. Le rapport de fréquences où ce phénomène se produit peut donc s'exprimer par

$$\Omega_n'^2 = 1 + \Delta\Omega_n^2 = 1 + \frac{\Omega_n'^2 \alpha^2 k_e^2}{1 + \Omega_n'^2 \alpha^2} \quad (3.3)$$

Il est possible de déterminer explicitement ce rapport en fonction d'une charge résistive  $\alpha$  en résolvant l'équation polynomiale 3.4 de degré quatre. Parmi les quatre solutions possibles, la seule valide est la solution réelle positive fournie à l'équation 3.5.

$$0 = \alpha^2 \Omega_n'^4 + \Omega_n'^2 (1 - \alpha^2 (1 + k_e^2)) - 1 \quad (3.4)$$

$$\Omega_n' = \sqrt{\frac{\alpha^2 (1 + k_e^2) - 1 + \sqrt{(1 - \alpha^2 (1 + k_e^2))^2 + 4\alpha^2}}{2\alpha^2}} \quad (3.5)$$

Ce terme peut prendre une valeur allant de 1 à  $\sqrt{1 + k_e^2}$  pour la situation de court-circuit et de circuit ouvert respectivement. À chacun de ces rapports correspond également un facteur d'amortissement électrique donné par l'équation 3.6.

$$\zeta_{el} |_{\Omega_n = \Omega_n'} = \frac{\alpha k_e^2}{1 + \alpha^2 (1 + k_e^2) + \sqrt{(1 - \alpha^2 (1 + k_e^2))^2 + 4\alpha^2}} \quad (3.6)$$

Dans ce cas, les modules des fonctions de transfert du déplacement  $\eta_n$ , de la tension  $V_0$ , du courant  $I_0$  et de la puissance  $P$  peuvent s'exprimer simplement par

$$\left| \frac{\eta_n}{\dot{w}_b} \right|_{\Omega_n=\Omega'_n} = \frac{\mu}{2\omega_n^2 \Omega'_n (\zeta_m + \zeta_{el}|_{\Omega_n=\Omega'_n})} \quad (3.7)$$

$$\left| \frac{V_0}{\dot{w}_b} \right|_{\Omega_n=\Omega'_n} = \frac{\mu M_{eq} k_e^2 \alpha}{2\vartheta_n (\zeta_m + \zeta_{el}|_{\Omega_n=\Omega'_n}) \sqrt{\Omega_n'^2 \alpha^2 + 1}} \quad (3.8)$$

$$\left| \frac{I_0}{\dot{w}_b} \right|_{\Omega_n=\Omega'_n} = \frac{\mu \vartheta_n}{2\omega_n (\zeta_m + \zeta_{el}|_{\Omega_n=\Omega'_n}) \sqrt{\Omega_n'^2 \alpha^2 + 1}} \quad (3.9)$$

$$\left| \frac{P}{\dot{w}_b^2} \right|_{\Omega_n=\Omega'_n} = \frac{M_{eq}}{\omega_n} \frac{\mu^2 \zeta_{el}|_{\Omega_n=\Omega'_n}}{4 (\zeta_m + \zeta_{el}|_{\Omega_n=\Omega'_n})^2} \quad (3.10)$$

### 3.3 Optimisation de la puissance produite

La relation 3.10 permet d'évaluer la puissance à la résonance en fonction de l'amortissement électrique et de l'amortissement mécanique. Celle-ci a été tracée à la figure 3.3 et elle démontre qu'une puissance optimale est générée lorsque  $\zeta_m = \zeta_{el}$ , ce qui peut également se démontrer facilement en dérivant  $P$  par rapport à  $\zeta_{el}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\zeta_{el}} &= 0 \\ &= \frac{(\zeta_m + \zeta_{el})^2 - 2\zeta_{el}(\zeta_m + \zeta_{el})}{(\zeta_m + \zeta_{el})^4} \\ &= \zeta_m - \zeta_{el} \\ \zeta_{el} &= \zeta_m \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logiquement, la puissance produite augmente toujours lorsque l'amortissement mécanique diminue. Il faut cependant bien comprendre la dynamique du système pour saisir le sens de la solution optimale pour l'amortissement électrique.

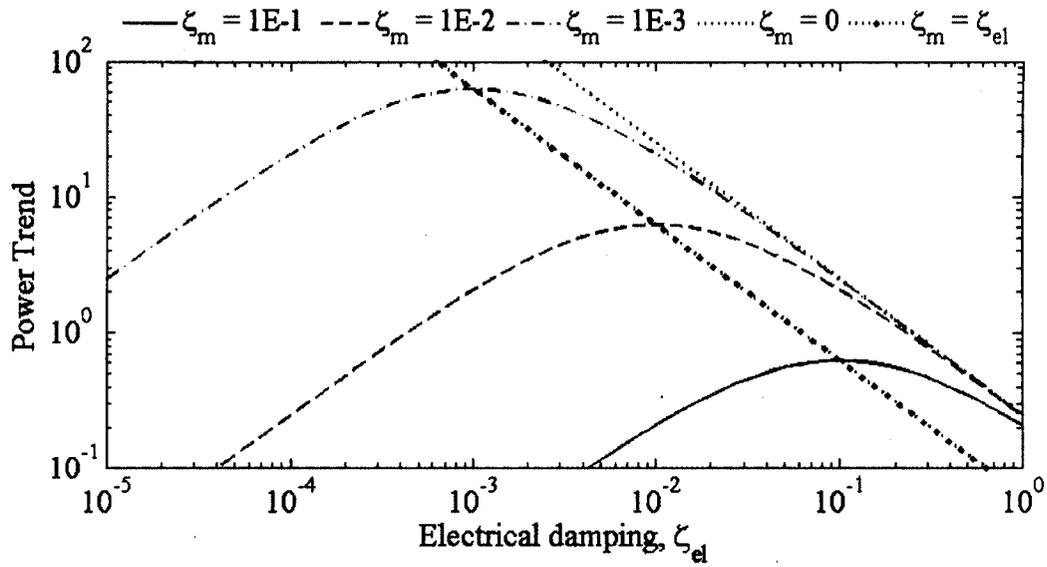


Figure 3.3 Tendence de la puissance générée en fonction de  $\zeta_m$  et  $\zeta_{el}$ .  $\zeta_{el} = \zeta_m$  est la courbe optimale.

### 3.3.1 Effet de la fréquence et de l'amortissement électrique

L'équation générale de la puissance (2.111) peut être retranscrite de la manière suivante :

$$P = \omega_n^3 M_{eq} \zeta_{el} \Omega_n^2 |\eta_n|^2 = \omega \Omega_n \zeta_{el} \underbrace{K_m |\eta_n|^2}_{\text{Énergie pot.}} \quad (3.12)$$

À première vue, l'équation 3.12 semble indiquer que la puissance extraite est proportionnelle à l'amortissement électrique. On pourrait alors croire qu'il faut maximiser cette forme d'amortissement. C'est également ce qui semblait ressortir de l'analyse effectuée à la section 3.1. Cependant, la puissance est également proportionnelle au carré du déplacement de la masse et ce terme est aussi limité par l'amortissement électrique. Il y a donc un compromis qui doit être atteint afin de ne pas trop limiter le déplacement de la masse sismique. En effet, de grands déplacements permettent de générer davantage de contraintes et d'énergie de déformation (dont une partie est transformée sous forme électrique), ce qui explique pourquoi il serait nuisible de suramortir la structure.

Par ailleurs, même si une augmentation de la fréquence a pour effet d'augmenter le cyclage du système, l'énergie extraite à accélération et masse constante peut finalement être moindre à cause de la diminution des contraintes induites qui sont proportionnelles à l'amplitude du mouvement, car  $K_m \propto \omega_n^2$  et  $\eta_n \propto \omega_n^{-2}$ .

### 3.3.2 Récapitulatif

La puissance est donc maximisée grâce à ces trois conditions :

1. Le système possède un faible facteur d'amortissement mécanique ;
2. le système opère en résonance ;
3. la charge électrique est ajustée de sorte à ce que l'amortissement électrique soit égal à l'amortissement mécanique.

Ces conclusions sont essentiellement les mêmes que celles tirées par William et Yates [61] à partir de leur analyse pour un dispositif fonctionnant selon le principe de transduction électromagnétique. Le développement présenté jusqu'à présent démontre donc de manière très explicite que la seule différence fondamentale entre les deux mécanismes provient de l'ajout de l'effet de raideur électrique. Cet effet provient d'une partie de l'énergie convertie électriquement qui ne peut pas être extraite et qui est alors réfléchi dans la poutre.

Par ailleurs, la troisième condition est d'un intérêt particulier, car elle peut servir de principe pour déterminer simplement la charge optimale. De plus, puisqu'il a déjà été démontré que l'amortissement électrique est intimement lié au facteur de couplage effectif, il est aussi possible de s'en servir afin de définir un nouveau critère comparatif, le « couplage critique ». La définition de ce nouveau critère est l'objet de la prochaine section.

## 3.4 Définition du couplage critique

Il a été démontré que pour optimiser la puissance produite par un dispositif piézoélectrique résonant, il faut entre autres que son amortissement électrique concorde avec l'amortissement mécanique du système. Il s'agit cependant d'une condition idéale. D'une part, l'amortissement mécanique pourrait être considéré comme une propriété intrinsèque du système par sa géométrie et les matériaux qui le composent. D'autre part, les développements précédents ont démontré que l'amortissement électrique est à la fois fonction de la géométrie, des propriétés piézoélectriques du matériau, mais également de la charge qui est connectée au système. Cette forme d'amortissement est donc ajustable, contrairement aux pertes visqueuses. La figure 3.4 trace l'amortissement électrique à la résonance en fonction de la charge électrique (équation 3.6) pour différents facteurs de couplage effectif. Une ligne pointillée est également ajoutée afin de comparer pour un niveau d'amortissement mécanique donné.

Pour des facteurs de couplage faibles, l'amortissement électrique maximal est limité et il est en fait impossible d'atteindre la valeur optimale  $\zeta_{el} = \zeta_m$ . Dans ce cas, l'amortissement électrique

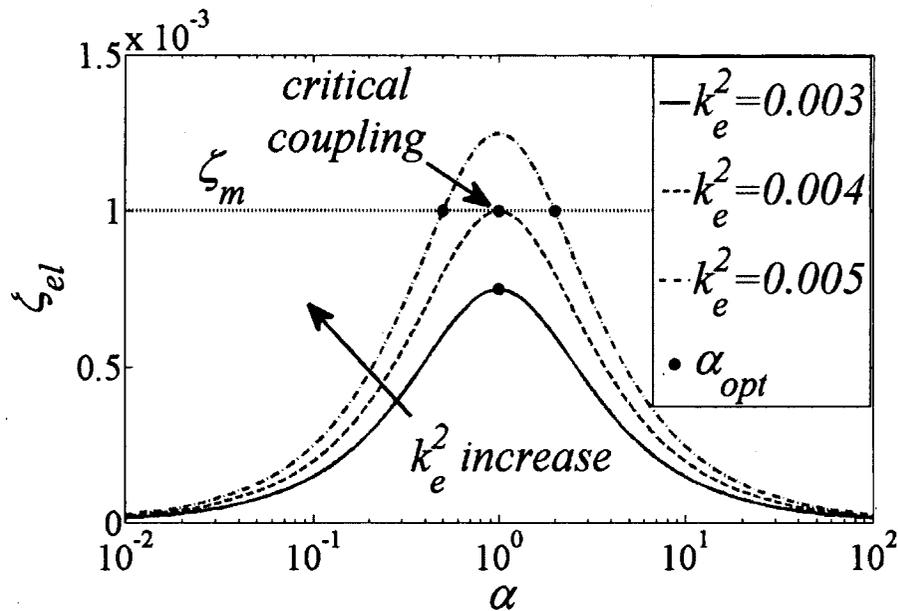


Figure 3.4 Amortissement électrique à la résonance  $\zeta_{el}|_{\Omega_n=\omega_n}$  en fonction de la charge électrique  $\alpha$ . Le trait pointillé illustre l'amortissement mécanique.

devrait être maximisé et il n'y a alors qu'une seule charge optimale. Lorsque  $k_e^2$  augmente, des niveaux d'amortissement électrique plus élevés peuvent être atteints, ce qui permet de s'approcher de la condition idéale. Il y a alors une augmentation de la puissance optimale produite tant et aussi longtemps que la valeur maximale de l'amortissement électrique ne dépasse pas le niveau d'amortissement mécanique du système. À noter que cette augmentation de la puissance s'accompagne également d'une diminution de l'amplitude du déplacement, puisque l'amortissement total du système augmente. D'une certaine façon, on pourrait s'attendre à ce que la densité de puissance augmente. Le couplage critique peut donc être défini comme « le facteur de couplage effectif minimal permettant d'ajuster l'amortissement électrique à l'amortissement mécanique ».

D'ailleurs, la figure 3.5 trace la tendance de la puissance en fonction du facteur de couplage effectif pour un niveau d'amortissement mécanique donné et elle démontre que l'augmentation du couplage effectif au-delà de la valeur critique ne contribue pas à augmenter la puissance optimale produite. Cela se produit tout simplement parce que le couplage du système est suffisant et permet même d'atteindre des niveaux d'amortissement électrique supérieurs à l'amortissement mécanique. Dans ce cas, au lieu de maximiser l'amortissement électrique, il faut l'ajuster au même niveau que l'amortissement intrinsèque afin de ne pas suramortir le système. La figure 3.4 démontre simplement ce principe, alors que les charges optimales pour les trois cas sont identifiées à l'aide de cercles. Cela explique également pourquoi certains dispositifs ne pré-

sentent qu'une seule charge optimale, alors que d'autres en présentent deux (correspondant à la résonance et à « l'antirésonance »), avec une diminution de la puissance produite entre ces deux points optimaux. En d'autres termes, la puissance maximale de certains dispositifs est à la fois limitée par l'amortissement mécanique et par le couplage, alors que pour les systèmes à fort couplage (relativement à leur niveau d'amortissement mécanique), seul l'amortissement mécanique est en cause. Dans ce dernier cas, optimiser le couplage dans le but d'augmenter la puissance maximale est inutile. Cela porte donc à croire que le besoin en couplage est directement lié à l'amortissement mécanique et qu'améliorer le facteur de qualité de la structure pourrait être un enjeu plus important que l'optimisation du couplage.

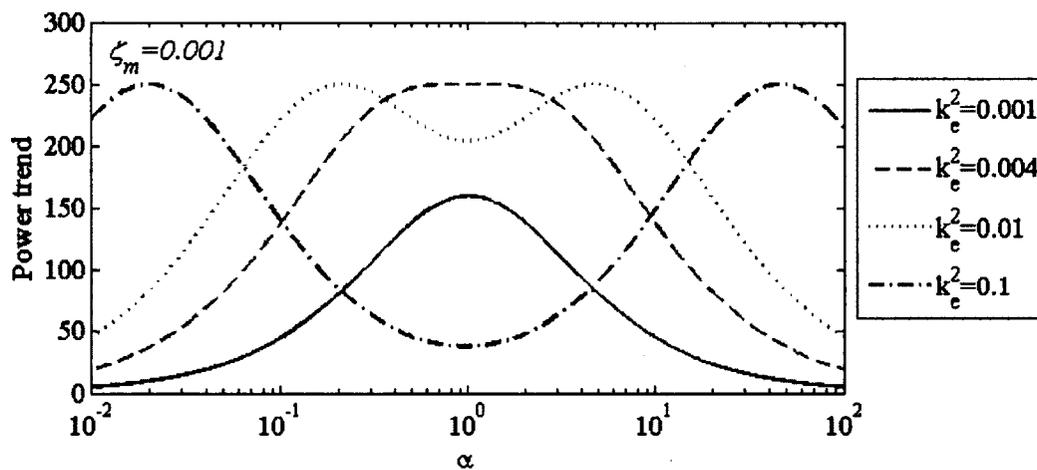


Figure 3.5 Tendence de la puissance produite en fonction de la charge électrique  $\alpha$  et du coefficient de couplage  $k_e^2$  ( $\zeta_m = 0.001$ ).

Il faut cependant mentionner qu'il pourrait tout de même y avoir un intérêt à augmenter le facteur de couplage effectif au-delà de la valeur critique. Puisqu'il existe deux charges optimales dans cette situation, il existe aussi deux fréquences de résonance couplées. L'augmentation du couplage augmente l'écart entre ces deux fréquences et on constate alors une augmentation de la puissance moyenne sur le spectre en fréquence (lorsque la charge est optimisée pour chaque  $\Omega_n$ ). En d'autres termes, même si l'augmentation du couplage ne contribue pas à augmenter la puissance maximale, elle contribue à créer un comportement large bande. Cela dit, l'ajustement de la charge influence également la tension. Cela signifie que la possibilité d'exploiter ce comportement large bande peut être limitée par le circuit de conditionnement du signal. En effet, une partie de ce comportement sera associée à des tensions très faibles, alors qu'une autre portion sera, au contraire, associée à des tensions plus élevées (le point optimal se rapprochant alors de la situation du circuit ouvert).

### 3.4.1 Calculer le couplage critique

La première étape permettant de calculer le facteur de couplage critique consiste à déterminer la charge  $\alpha$  qui maximise l'amortissement électrique. L'équation 3.1 est alors optimisée en identifiant la valeur  $\alpha$  qui annule sa dérivée première. Cette valeur est fournie à l'équation 3.13.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_{el}}{\partial \alpha} &= \frac{2k_e^2(1 + \Omega_n^2 \alpha^2) - 4k_e^2 \Omega_n^2 \alpha^2}{4(1 + \Omega_n^2 \alpha^2)^2} = 0 \\ 0 &= 1 - \Omega_n^2 \alpha^2 \\ \alpha &= \frac{1}{\Omega_n}\end{aligned}\quad (3.13)$$

L'amortissement électrique maximal pour un rapport  $\Omega_n$  quelconque est alors donné par :

$$(\zeta_{el})_{max} = \frac{k_e^2}{4\Omega_n} \quad (3.14)$$

Le résultat de la charge est ensuite utilisé dans l'équation 3.2 pour évaluer le décalage fréquentiel résultant. La raideur électrique est alors donnée par l'équation 3.15.

$$\Delta \Omega_n^2 |_{\alpha = \frac{1}{\Omega_n}} = \frac{k_e^2}{2} \quad (3.15)$$

Finalement, l'amortissement électrique maximum à la résonance est donné par l'équation 3.16.

$$(\zeta_{el})_{max} |_{\Omega_n = \Omega'_n} = \frac{k_e^2}{4\sqrt{1 + \frac{k_e^2}{2}}} \quad (3.16)$$

Ce résultat indique qu'il n'y a alors qu'un seul rapport de fréquence pour lequel il y a à la fois la résonance du système couplée et l'amortissement électrique maximal et il ne dépend que du couplage effectif. En isolant  $k_e^2$  dans l'équation 3.16 et en substituant  $\zeta_{el}$  par  $\zeta_m$ , le couplage critique est obtenu en fonction du niveau d'amortissement mécanique.

$$(k_e^2)_{crit} = 4\zeta_m \left( \zeta_m + \sqrt{\zeta_m^2 + 1} \right) \quad (3.17)$$

L'équation 3.17 est la solution exacte, mais sachant que l'amortissement mécanique devrait être  $< 0.1$ , le second terme entre parenthèses devrait tendre vers 1. Le couplage critique peut donc s'estimer tout simplement par l'équation 3.18.

$$(k_e^2)_{crit} \approx 4\zeta_m \quad (3.18)$$

Dans la littérature, la comparaison entre l'amortissement électrique et mécanique est fréquemment effectuée grâce à la figure de mérite  $k_e^2 Q$ . D'ailleurs, selon Lefeuvre *et al.*, il n'y aurait aucun gain de performance possible à partir de  $k_e^2 Q = 2$  et ce, peu importe le circuit d'extraction utilisé [36]. Il est donc très intéressant de constater que l'équation 3.18 permet de tirer exactement la même conclusion à partir d'une simple charge résistive.

### 3.4.2 Couplage critique et sélection de matériaux

Bien qu'il existe plusieurs sources de dissipation d'énergie mécanique dans un microrésonateur (la friction avec l'air, les effets de compression de fluide dans un espace fermé et restreint, les pertes provenant du support et la friction interne des matériaux) [26], plusieurs d'entre elles pourraient être réduites grâce à une conception judicieuse. Par exemple, l'amortissement visqueux provenant de l'interaction avec l'air (friction et compression) peut être éliminé en concevant un dispositif qui est encapsulé sous vide [13, 32]. La géométrie de la poutre, notamment celle près de son encastrement, pourrait également être conçue de manière à grandement réduire les pertes provenant du support [54]. Par contre, il restera toujours une source d'amortissement issue de la friction interne du matériau. Celle-ci peut donc s'imposer comme une limite lorsque toutes les autres composantes d'amortissement mécanique sont réduites de manière à les rendre négligeables. Le facteur de qualité  $Q$  est souvent utilisé pour décrire le niveau d'amortissement d'une structure, mais il est aussi utile afin d'évaluer la friction associée à un matériau. Son facteur  $Q$  dépend entre autre de sa composition et de sa méthode de fabrication. En négligeant alors toutes les autres sources d'amortissement, il est possible d'employer le critère de couplage pour comparer le potentiel des divers matériaux piézoélectriques entre eux. La figure 3.6, obtenue à partir des propriétés présentées au tableau 1.3, situe grossièrement les différentes classes de matériaux par rapport à ce critère.

Puisque le critère se base sur le couplage effectif et qu'il fait normalement intervenir la géométrie, cette étude préliminaire ne dresse qu'un portrait partiel (l'influence de la géométrie sera traitée plus en détail au chapitre 4). Elle permet tout de même de tirer certaines conclusions sur la sélection des matériaux piézoélectriques. Il semble tout d'abord que plusieurs matériaux peuvent répondre au critère de couplage critique. Considérant ceci, et puisqu'il a aussi été dé-

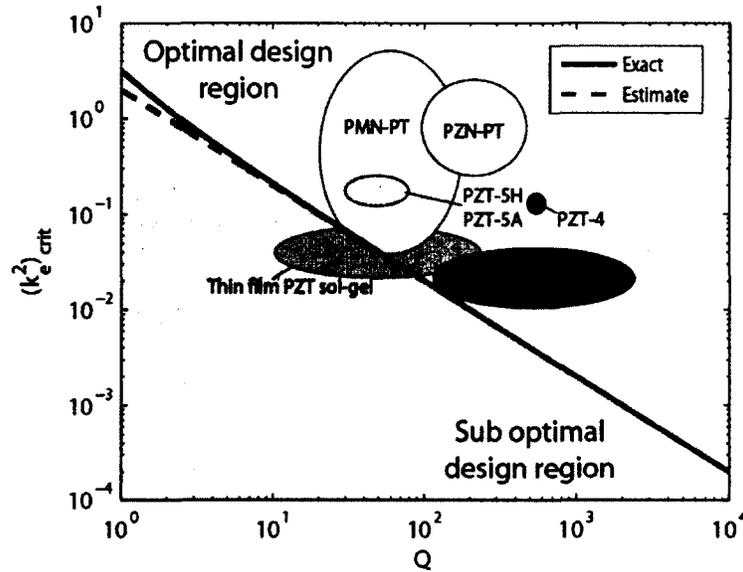


Figure 3.6 Couplage effectif et facteur de qualité par rapport au couplage critique pour diverses classes de matériaux piézoélectriques.

montré précédemment qu'une diminution de l'amortissement mécanique mène toujours à une augmentation de la puissance produite, le facteur de qualité devrait alors être un critère de sélection dominant par rapport au couplage. En d'autres termes, le choix d'une conception et d'un matériau à faible amortissement mécanique permet d'utiliser des matériaux ayant un plus faible couplage piézoélectrique. Par exemple, même si l'AlN a un facteur  $k_{31}$  plus faible que les PZT, les PMN-PT et les PZN-PT, il fournit suffisamment de couplage face au critère vu son facteur de qualité élevé. Ceci pourrait donc en faire un choix intéressant malgré tout. Il serait cependant présomptueux de n'utiliser que ce critère pour juger du meilleur matériau, car il ne tient aucunement compte des niveaux de tensions qui seront atteints, de l'impact sur la géométrie finale (longueur et épaisseur) et des pertes diélectriques par exemple. Néanmoins, il permet déjà d'orienter la conception, comme il sera démontré aux chapitres 4 et 5.

### 3.5 Évaluations des paramètres pour une puissance optimale

Il a été démontré que la puissance maximale théorique peut être limitée par deux facteurs, le couplage et l'amortissement, selon le niveau de couplage par rapport au niveau d'amortissement mécanique du dispositif. Il a aussi été démontré à la section 3.4 que la charge optimale dépend grandement de cette condition. En résumé,

- Si le couplage critique est atteint ( $k_e^2 \geq (k_e^2)_{crit}$ ),
  - l'amortissement mécanique est le seul facteur limitatif ;

- l'amortissement électrique doit alors être limité au même niveau que l'amortissement mécanique afin de générer le maximum de puissance à la résonance ;
- il peut y avoir deux charges résistives optimales et elles dépendent du couplage et de l'amortissement ;
- la configuration a un couplage « optimal ».
- Si le couplage critique n'est pas atteint ( $k_e^2 < (k_e^2)_{crit}$ ),
  - le couplage et l'amortissement mécanique sont tous deux des facteurs limitatifs ;
  - il faut alors maximiser l'amortissement électrique ;
  - il n'y a qu'une seule charge électrique optimale à la résonance et elle dépend uniquement du couplage ;
  - la configuration a un couplage « sous optimal ».

Cette section présente la façon d'évaluer les différents paramètres selon ces deux états de conception.

### 3.5.1 Condition de couplage optimal

Dans ce cas, il faut que  $(\zeta_{el})_{opt} = \zeta_m$  et il y a deux charges optimales. Celles-ci sont évaluées en résolvant l'équation 3.6 en posant que l'amortissement électrique est égal à l'amortissement mécanique. La solution obtenue à l'aide Matlab® est fournie à l'équation 3.19.

$$\alpha_{opt} |_{\Omega_n = \Omega'_n} \approx \frac{1}{1 + k_e^2} \left[ \frac{k_e^2}{4\zeta_m} + \zeta_m \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k_e^2}{2\zeta_m^2} + \frac{1}{\zeta_m^2} \left[ \left( \frac{k_e^2}{4\zeta_m} \right)^2 - 1 \right]} \right) \right] \quad (3.19)$$

La figure 3.7 trace cette équation en fonction du niveau de couplage  $k_e^2$  et pour plusieurs niveaux d'amortissement  $\zeta_m$ . Comme discuté précédemment, les charges optimales s'éloignent lorsque l'amortissement diminue ou lorsque le couplage augmente.

La puissance maximale n'est alors plus une fonction du couplage et elle est donnée par

$$\left| \frac{P}{\dot{w}_b^2} \right|_{\Omega_n = \Omega'_n} = \frac{\mu^2 M_{eq}}{16\omega_n \zeta_m} \quad (3.20)$$

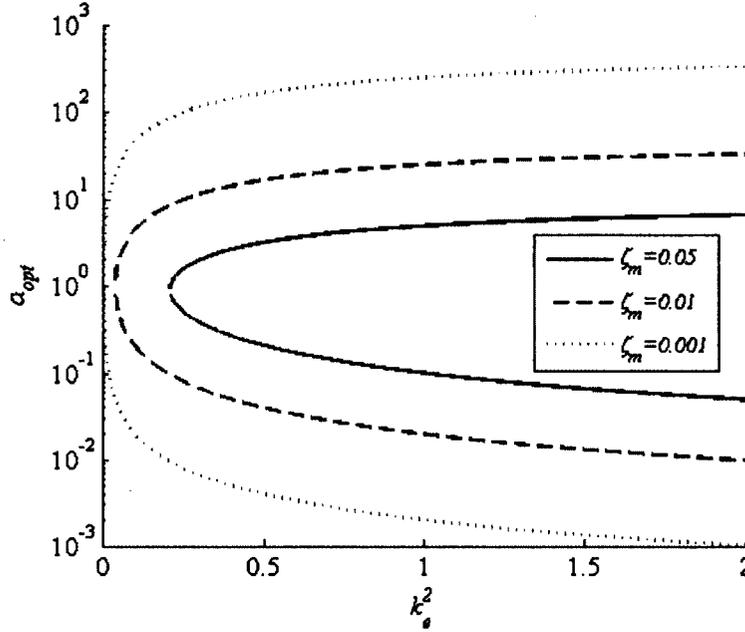


Figure 3.7 Charge optimale  $\alpha_{opt}|_{\Omega_n=\Omega'_n}$  en fonction du couplage  $k_e^2$  et de l'amortissement  $\zeta_m$  en condition de couplage optimale.

Cette expression est importante, car elle représente la limite théorique sur la puissance atteignable pour tout dispositif piézoélectrique résonant branché à un circuit résistif. La tension  $V_0$  et le courant  $I_0$  doivent être évalués à partir de la charge optimale.

$$\left| \frac{V_0}{\ddot{w}_b} \right|_{\Omega_n=\Omega'_n} = \frac{\mu M_{eq} k_e^2}{\vartheta_n 4\zeta_m} \frac{\alpha_{opt}|_{\Omega_n=\Omega'_n}}{\sqrt{\Omega_n'^2 (\alpha_{opt}|_{\Omega_n=\Omega'_n})^2 + 1}} \quad (3.21)$$

$$\left| \frac{I_0}{\ddot{w}_b} \right|_{\Omega_n=\Omega'_n} = \frac{\mu \vartheta_n}{4\omega_n \zeta_m} \frac{1}{\sqrt{\Omega_n'^2 (\alpha_{opt}|_{\Omega_n=\Omega'_n})^2 + 1}} \quad (3.22)$$

Dans une certaine mesure, ce résultat indique que la géométrie de la couche piézoélectrique n'influencera que la répartition de la tension et du courant pour la puissance générée dans cette plage de conception. Pour une géométrie donnée, il semble que la diminution de l'amortissement affecte le courant et la tension en sortie de plusieurs manières. D'une part, l'augmentation d'amplitude qui en résulte contribue à augmenter ces valeurs, mais l'amortissement a aussi un effet sur la charge optimale. En effet, la diminution de l'amortissement mène vers un fonctionnement de plus en plus en court-circuit ou en circuit ouvert, ce qui correspond alors à des points de fonctionnement haut courant/basse tension ou bas courant/haute tension. Il est cependant dif-

ficile d'établir clairement les tendances dans cet espace de conception. En ce qui concerne le déplacement, il est donné par

$$\left| \frac{\eta_n}{\ddot{w}_b} \right|_{\Omega_n = \Omega'_n} = \frac{\mu}{4\omega_n^2 \Omega'_n \zeta_m} \quad (3.23)$$

où  $\Omega'_n$  est évalué à partir des charges optimales et de l'équation 3.5. Connaissant la variation de ce terme en fonction de la charge, il semble que de fonctionner en circuit ouvert permet de réduire légèrement l'amplitude du déplacement tout en ayant la même puissance générée. L'effet de l'amortissement mécanique semble cependant dominant par rapport à celui de la raideur électrique.

### 3.5.2 Condition de couplage sous optimale

En condition sous optimale, l'amortissement électrique ne peut pas dépasser l'amortissement mécanique et il faut alors le maximiser. Dans ce cas, les conditions pour générer le maximum de puissance sont

$$\Omega_n^2 = 1 + \frac{k_e^2}{2} \quad (3.24)$$

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_e^2}{2}}} \quad (3.25)$$

$$(\zeta_{el})_{max} = \frac{k_e^2}{4\sqrt{1 + \frac{k_e^2}{2}}} \quad (3.26)$$

La puissance vaut alors

$$\left| \frac{P}{\ddot{w}_b^2} \right|_{\Omega_n = \Omega'_n} = \frac{\mu^2 M_{eq}}{4\omega_n \zeta_m} \frac{(\zeta_{el})_{max}}{(1 + \frac{(\zeta_{el})_{max}}{\zeta_m})^2} \quad (3.27)$$

La puissance augmente bel et bien avec l'augmentation de l'amortissement électrique maximal (donc de  $k_e^2$ ), jusqu'au point de couplage critique. Pour la tension, elle est fournie par

$$\left| \frac{V_0}{\ddot{w}_b} \right|_{\Omega_n = \Omega'_n} = \frac{\sqrt{2}\mu M_{eq}}{\vartheta_n} \frac{(\zeta_{el})_{max}}{(1 + \frac{(\zeta_{el})_{max}}{\zeta_m})} \quad (3.28)$$

et le courant vaut

$$\left| \frac{I_0}{\ddot{w}_b} \right|_{\Omega_n = \Omega'_n} = \frac{\mu \vartheta_n}{2\sqrt{2}\omega_n \zeta_m} \frac{1}{\left(1 + \frac{(\zeta_{el})_{max}}{\zeta_m}\right)} \quad (3.29)$$

À nouveau, les tendances sont plus difficiles à cerner pour ces deux paramètres, car le terme  $\vartheta$  intervient dans l'équation et il affecte également le coefficient de couplage. Finalement, le déplacement est donné par

$$\left| \frac{\eta_n}{\ddot{w}_b} \right|_{\Omega_n = \Omega'_n} = \frac{\mu}{2\omega_n^2 \zeta_m \sqrt{1 + \frac{k_e^2}{2} \left(1 + \frac{(\zeta_{el})_{max}}{\zeta_m}\right)}} \quad (3.30)$$

Dans ce cas, il est très clair que le déplacement diminue avec l'augmentation du couplage effectif. Il peut être intéressant de calculer le rapport entre la puissance produite et la déflexion associée afin d'explicitier l'augmentation de la densité de puissance avec  $k_e^2$  pour ce régime. En effet, l'équation 3.31 permet en quelque sorte d'associer la puissance au volume requis de fonctionnement.

$$\left| \frac{P}{\eta_n} \right|_{\Omega_n = \Omega'_n} = \mu \ddot{w}_b \omega_n M_{eq} \sqrt{1 + \frac{k_e^2}{2}} \frac{\frac{(\zeta_{el})_{max}}{\zeta_m}}{2 \left(1 + \frac{(\zeta_{el})_{max}}{\zeta_m}\right)} \quad (3.31)$$

Contrairement à l'équation de la puissance, la fréquence intervient plutôt au numérateur. Il semblerait donc que pour une masse donnée, même si la puissance nette diminue avec la fréquence, le rapport de la puissance générée sur le déplacement associé augmente.

### 3.6 Résumé et conclusion sur la dynamique couplée

Dans ce chapitre, l'impact de l'effet piézoélectrique sur la dynamique couplée a été clairement décrit et analysé. En fonction de la fréquence de l'excitation et de la charge électrique branchée, le couplage peut agir d'une manière plus ou moins prononcée comme une raideur et un amortissement électrique. De façon générale, la raideur électrique augmente avec l'impédance, tandis que l'amortissement électrique atteint sa valeur maximale lorsque l'impédance de la charge externe équivaut à celle de la capacité de la couche piézoélectrique. Cette équivalence correspond au principe d'adaptation d'impédance qui permet généralement de maximiser le transfert de puissance entre le générateur et le récepteur.

La raideur et l'amortissement électrique dépendent donc de la résistance branchée au système et ils agissent en simultanément. De ce fait, la fréquence de résonance de la poutre varie avec la charge électrique. Des formules permettant de déterminer cette fréquence de résonance, ainsi que l'amortissement électrique résultant pour une charge résistive donnée ont été obtenues analytiquement. À partir de ces nouvelles équations et des développements faits au chapitre 2, il a été possible de démontrer simplement que la puissance optimale est atteinte lorsque l'amortissement électrique du système équivaut à son amortissement mécanique.

Puisque l'amortissement électrique est limité par le couplage effectif  $k_e^2$ , il existe une valeur minimale permettant de remplir cette condition idéale. Cette valeur a été définie comme le facteur de couplage effectif critique  $(k_e^2)_{crit}$  et elle peut être estimée par  $4\zeta_m$  (ou  $2/Q$ ). Le couplage critique dépend ainsi du niveau d'amortissement mécanique du système, mais l'amortissement mécanique intrinsèque est également reliée au choix du matériau et à son facteur de qualité  $Q$ . Ainsi, une comparaison des divers matériaux piézoélectriques sur la base du critère du couplage critique a révélé que certains matériaux à faible couplage (comme l'AlN par exemple) se classaient favorablement par rapport à d'autres matériaux ayant un très bon facteur de couplage  $k_{31}$ . En fait, la plupart des matériaux comparés remplissaient le critère. Le choix du matériau ne devrait donc pas être uniquement basé sur le couplage, mais aussi prendre en compte du facteur de qualité. Cette propriété pourrait se révéler être tout aussi importante, sinon plus que le couplage.

Par la suite, le couplage critique a été employé pour identifier deux types de régimes d'opération, ainsi que les charges électriques optimales qui leur sont associées. Pour un  $k_e^2$  plus grand que la valeur critique, il existe deux charges électriques qui permettent d'égaliser les amortissements électrique et mécanique pour optimiser la génération de puissance. L'amortissement mécanique est alors tout ce qui limite la puissance maximale du système. Pour un facteur de couplage effectif inférieur au niveau critique, le couplage s'impose comme un second facteur limitatif à la génération de la puissance. Puisque l'amortissement électrique maximum ne peut pas atteindre la condition idéale, il doit être maximisé, ce qui est possible en utilisant une charge externe bien spécifique donnée par  $\alpha = (\sqrt{1 + k_e^2/2})^{-1}$ . Finalement, les équations des paramètres de sortie à la résonance ont été simplifiées pour chacun de ces régimes d'opération.

Dans une certaine mesure, le facteur de couplage effectif  $k_e^2$  est donc un paramètre important à considérer dans le but d'optimiser la performance des dispositifs. Le prochain chapitre présente une étude géométrique qui permet de mieux comprendre comment il est influencé par la configuration et la géométrie des couches piézoélectriques. Les formules déterminées à la section 3.5 sont aussi utilisées dans une application numérique afin de valider les tendances observées pour le déplacement, le courant, la tension et la puissance.

# CHAPITRE 4

## ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LE COUPLAGE

Le chapitre précédent a permis de voir que le facteur de couplage effectif est un paramètre qui joue un très grand rôle dans l'évaluation de la dynamique du système couplé. Afin de compléter l'étude préliminaire des matériaux de la section 3.4.2, il est aussi nécessaire de faire une étude géométrique pour comprendre l'influence de cet aspect. De cette manière, l'ordre des épaisseurs requises pour les différents matériaux pourra ensuite être déterminé facilement.

Ce chapitre propose donc une méthodologie pour évaluer le facteur de couplage effectif pour différentes configurations ainsi qu'une analyse des tendances observées. Les géométries étudiées sont principalement celles des poutres unimorphe et bimorphe, mais l'impact d'une poutre chanfreinée ou d'une couverture partielle de l'électrode est également évalué. L'effet du champ quadratique de tension sur le couplage effectif est aussi brièvement traité.

### 4.1 Comment évaluer l'effet de la géométrie

Le coefficient de couplage effectif  $k_e^2$  peut s'exprimer sous une forme qui permet d'isoler partiellement l'influence de la géométrie (lorsque l'effet du profil de tension quadratique dans la couche piézoélectrique est négligé). À partir de l'expression du facteur de couplage effectif donnée à l'équation 2.96 et sachant que  $\vartheta \propto d_{31}Y_p$ ,  $K_m \propto Y_p$  et  $C_p \propto \epsilon_{33}^S$ , il est en effet possible de mettre en évidence le terme  $d_{31}^2 Y_p / \epsilon_{33}^S$  pour exprimer  $k_e^2$  selon deux termes. L'un est uniquement fonction des propriétés piézoélectriques tandis que l'autre dépend des élasticités et de la disposition du matériau piézoélectrique sur la poutre. Cette nouvelle notation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} k_e^2 &= \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^S} f(\bar{Y}, R, x_1, x_2, \hat{w}(x)) \\ &= \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} f(\bar{Y}, R, x_1, x_2, \hat{w}(x)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $\bar{Y}$  est le rapport des modules d'élasticité du matériau piézoélectrique et du substrat (équation 4.2) et  $R$  est la fraction du matériau piézoélectrique qui compose la poutre.

$$\tilde{Y} = \frac{Y_p}{Y_s} \quad (4.2)$$

$$R = \frac{h_p}{h_s + h_p} \quad \text{pour l'unimorphe} \quad (4.3)$$

$$R = \frac{2h_p}{h_s + 2h_p} \quad \text{pour le birmorphe} \quad (4.4)$$

Le terme noté  $f$  est alors équivalent à un facteur de forme. Une première analyse de ce facteur de forme est tout d'abord menée en négligeant la contribution du champ quadratique (son impact est discuté à la section 4.3). L'analyse se concentre uniquement sur le premier mode de vibration, car c'est celui qui devrait offrir le meilleur potentiel pour la conversion de l'énergie vibratoire. La déformée statique d'une poutre soumise à une force ponctuelle appliquée à son bout libre est utilisée afin de simplifier les calculs. Cette hypothèse équivaut à considérer le mode fondamental de flexion d'une poutre encastree ayant une grosse masse sismique à son bout et excité de manière inertielle [3]. Comme dans le cas de la force d'excitation, cette hypothèse peut entraîner une erreur sur le facteur de couplage. Un traitement similaire à ce qui a été fait à la section 2.6.1 a été fait pour corriger le facteur de couplage en fonction de la distribution de la masse (voir section D.4). L'essentiel des manipulations algébriques faites pour parvenir aux résultats obtenus dans ce chapitre peut être consulté à l'annexe D.

## 4.2 Analyse des facteurs de forme

### 4.2.1 Facteurs de forme de l'unimorphe et du birmorphe

Les équations des facteurs de forme de l'unimorphe et du birmorphe (éq. D.28 et D.33) sont tracées à la figure 4.1 et elles permettent d'observer plusieurs tendances quant à l'effet de la composition de la poutre et de la disposition du matériau sur celle-ci.

Tout d'abord, le couplage effectif d'un unimorphe est nul lorsque  $R = 0$  et  $R = 1$ . Ce résultat est conforme aux attentes, puisque dans un cas, il n'y a aucun matériau piézoélectrique et dans l'autre, il y a annulation des contraintes et donc des charges générées. Il y a aussi une valeur d'épaisseur de matériau piézoélectrique qui permet de maximiser le couplage effectif. Dans le cas où  $\tilde{Y} = 1$  (la structure est donc mécaniquement homogène), la valeur maximale est  $f =$

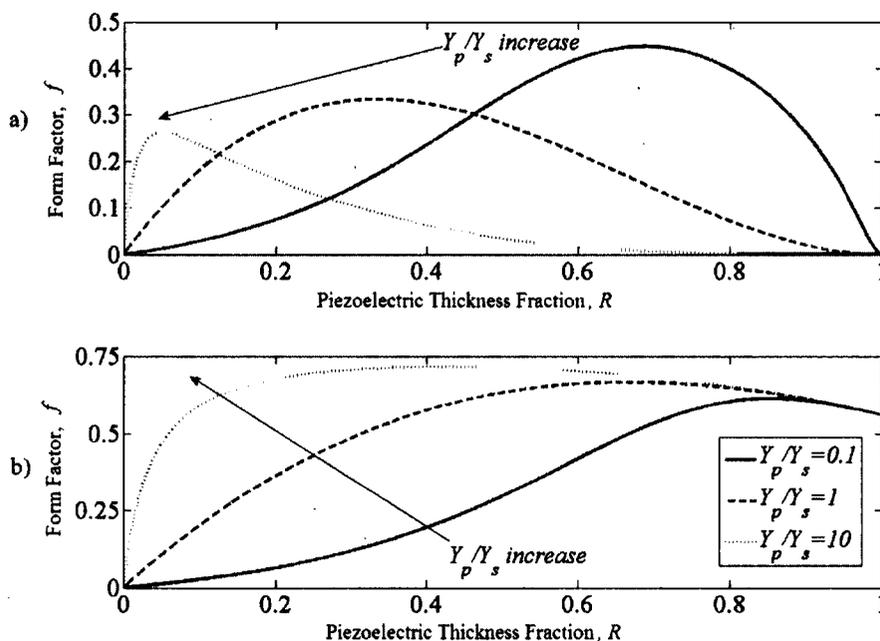


Figure 4.1 Facteur de forme sur le couplage  $f$  en fonction de la fraction piézoélectrique  $R$  et du rapport des modules d'élasticité  $\bar{Y}$  pour la configuration a) de l'unimorphe et b) du bimorphe.

$1/3$  pour  $R = 1/3$ . Ce résultat pourrait surprendre, puisqu'avec un rapport  $R = 0.5$  il y a un plus grand volume du matériau piézoélectrique qui est sollicité et sans aucune annulation des charges. Par contre, le couplage effectif est fonction du terme  $\vartheta^2/C_p$ . Il semble alors évident que ce point optimal représente en fait le meilleur compromis entre la taille de la capacité (qui influence principalement la tension) et la quantité de charges produites (celle-ci étant liée à la contrainte moyenne induite dans la couche). Dans le cas du bimorphe, on peut constater que la fraction  $R = 1$  ne fournit plus un couplage nul. Ce résultat est attendu et il démontre le principal avantage de cette configuration, soit la possibilité de séparer les zones sous contraintes en plusieurs parties distinctes afin d'éviter l'annulation des charges. De plus, le compromis entre la quantité de matériel utilisé et la taille de la capacité se manifeste ici encore. Pour le rapport des modules d'élasticité  $\bar{Y} = 1$ , la fraction qui maximise le couplage est  $R = 2/3$ , pour un facteur de forme résultant  $f = 2/3$ . Considérant le résultat optimal obtenu pour l'unimorphe, l'apparition du facteur deux est tout à fait logique. Le couplage se voit tout simplement doublé en ajoutant le même volume de matériau piézoélectrique sur la face inférieure que sur la face supérieure.

Les tendances changent également avec le rapport des rigidités. Pour optimiser le couplage de l'unimorphe, il est préférable d'utiliser un matériau souple et épais par rapport au substrat. Dans le cas où un matériau piézoélectrique rigide est utilisé, des épaisseurs plus minces seraient plutôt recommandées, mais le facteur de couplage optimal ne sera pas aussi élevé que pour la première

combinaison. La plage de rapports de modules d'élasticité  $\tilde{Y}$  étudiée est également suffisamment large pour fournir l'étendue des facteurs de forme possible pour cette configuration. De cette analyse, il est possible de conclure que des facteurs de forme maximaux allant de 0.26 à 0.45 peuvent être atteints avec un unimorphe. Par contre, la symétrie de la configuration du bimorphe change considérablement les tendances relatives au rapport des modules de Young. Afin d'optimiser le couplage d'un bimorphe, il semble préférable d'utiliser un matériau piézoélectrique très rigide par rapport au substrat, puisque le couplage est amélioré même en diminuant le volume de matériau piézoélectrique utilisé. Le cas particulier d'une poutre avec un cœur évidé pourrait alors s'avérer intéressant, car il permettrait de maximiser le couplage tout en utilisant relativement peu de matériau piézoélectrique. De façon générale, il semble que la configuration du bimorphe permet d'obtenir de meilleurs facteurs de couplage, avec des valeurs maximales allant de 0.61 à 0.72.

En jetant un oeil à la figure 3.6 qui considérerait un facteur de forme unitaire, il semble que la plupart des matériaux pourraient encore satisfaire le critère de couplage critique même après la correction des couplages effectifs. Il faut évidemment que ceux-ci soient disposés selon une épaisseur adéquate qui sera principalement limitée par le procédé d'intégration choisi. Finalement, la catégorie du PZT sol-gel déposé en couche mince semble la plus à risque de chuter dans la région de couplage sous optimal alors que les PZT-5A et PZT-5H s'approchent également de la valeur critique.

#### 4.2.2 Autres géométries

La même démarche a été employée afin d'évaluer l'impact de différentes géométries, comme celle de la poutre chanfreinée par exemple. Utilisée pour ce type de poutre, la méthode d'analyse permet de quantifier précisément l'amélioration attendue en fonction du rapport des largeurs à la base et au bout (voir section D.3.3). Au final, une amélioration d'au mieux 33 % du facteur  $k_e^2$  serait à prévoir grâce à l'utilisation d'une poutre triangulaire.

L'utilisation d'une électrode qui ne couvre qu'une partie de la poutre devrait aussi permettre d'améliorer le couplage effectif (voir section D.3.4). En effet, la méthode démontre qu'il serait avantageux de sacrifier la récolte des charges au bout de la poutre encastree libre, car la contrainte est beaucoup plus faible dans cette zone. Le matériau piézoélectrique déposé à cet endroit contribue davantage à augmenter la taille de la capacité, ce qui diminue finalement la tension à laquelle les charges sont produites et donc l'efficacité de conversion de l'énergie. Dans ce cas, les gains sur  $k_e^2$  varient beaucoup avec la distribution de la masse. Ceux-ci peuvent aller de 19 à 40 % en utilisant une électrode recouvrant entre 66 % et 50 % de la longueur de la poutre.

### 4.3 Discussion sur l'effet du champ de potentiel quadratique

Jusqu'à présent, l'effet de raideur relié à la présence d'un profil de tension quadratique dans les couches piézoélectriques a été négligé. Ceci a d'abord été fait afin de simplifier l'analyse, puisque l'influence des propriétés piézoélectriques est ainsi complètement découplée de la géométrie. Par contre, il a été démontré que la raideur peut dépendre du couplage par le terme  $k_{31}^2/(1 - k_{31}^2)$  et un autre terme géométrique. Autrement dit, les courbes de facteur de forme présentées peuvent mener à une surévaluation du couplage effectif, puisque la raideur réelle est sous-estimée. Cet effet pourrait être notable lorsque la couche piézoélectrique constitue le principal matériau composant le volume de la poutre. À la suite d'une démarche dont le détail est présenté à la section D.5, il a été possible de démontrer que c'est le cas uniquement lorsque le matériau piézoélectrique a un facteur de couplage  $k_{31}$  élevé. La figure 4.2 compare les facteurs de couplage effectif obtenus avec et sans la composante quadratique pour un facteur  $k_{31} = 0.7$ . Il faut alors considérer que l'écart dans les courbes s'accroît davantage lorsque ce facteur augmente et tend vers 1. Au contraire, l'écart entre les courbes diminue très rapidement pour des valeurs inférieures à 0.7. Par contre, ces résultats semblent indiquer que l'influence du profil quadratique sur le facteur de couplage effectif est somme toute limitée lorsque le rapport  $\tilde{Y} \leq 1$ , ainsi que pour des rapports d'épaisseurs  $R < 0.5$ .

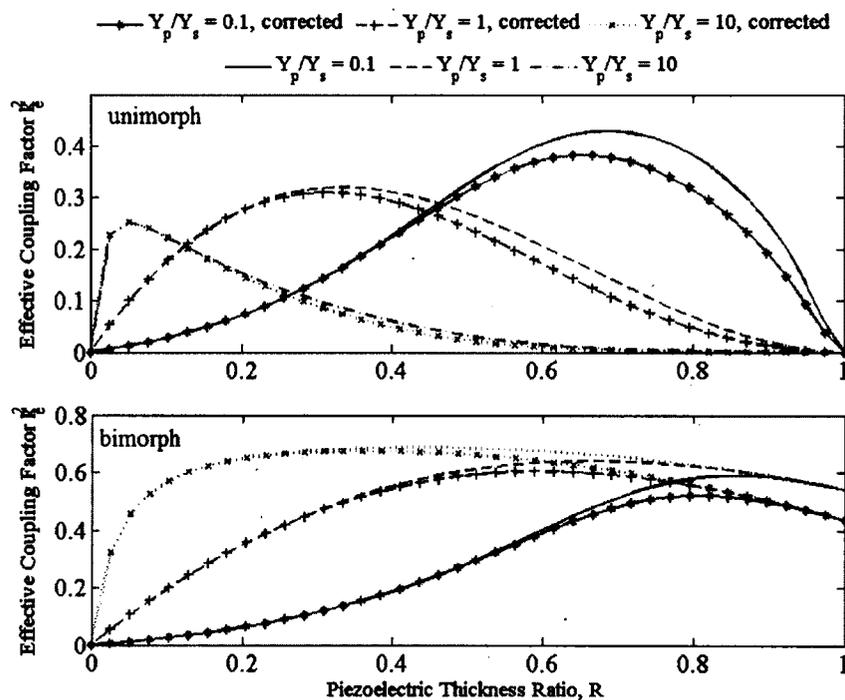


Figure 4.2 Facteur de couplage effectif  $k_e^2$  corrigé en considérant l'influence du champ quadratique.  $k_{31} = 0.7$ .

En résumé, il semblerait que des matériaux ayant un facteur de couplage élevé puissent atteindre d'excellents facteurs de couplage effectif, même avec des couches minces. Évidemment, le couplage effectif pourrait être amélioré en utilisant des couches plus épaisses, mais cela aurait l'effet indésirable d'augmenter la raideur effective de la poutre à cause de la présence du profil quadratique dans la couche. D'autre part, les matériaux ayant un faible couplage doivent être utilisés en couches épaisses pour compenser cette faiblesse. Ceux-ci sont également moins affectés par l'effet de rigidité provenant de la composante quadratique du champ de potentiel électrique.

Maintenant que l'effet de la géométrie sur le facteur de couplage effectif est mieux compris, il est intéressant d'évaluer l'interaction de ce paramètre avec l'amortissement. En effet, il a déjà été soulevé que l'optimisation du facteur de couplage effectif n'est pas nécessairement synonyme d'une augmentation de la puissance produite. Une fois la valeur critique atteinte, il peut y avoir suramortissement de la structure et cela ne se traduit pas par une augmentation de la puissance. La prochaine section présente une application numérique qui devrait permettre d'observer l'interaction entre l'épaisseur active et tous ces autres aspects. Ces résultats devraient ensuite permettre d'orienter la méthode de conception en ce qui concerne la taille des couches à utiliser.

#### 4.4 Application numérique - Variation de l'épaisseur active

Dans le cadre de cette analyse, la plupart des paramètres géométriques d'une poutre unimorphe droite sont conservés constants. Ceux-ci sont la largeur  $b$ , la longueur  $L$ , l'épaisseur totale  $h_{tot}$ , la masse  $M_t$  et la pulsation naturelle  $\omega_n$ . La poutre est également modélisée comme étant homogène afin d'éliminer toute influence pouvant provenir des différences de densités et de modules d'élasticité. Une fraction de son épaisseur (l'épaisseur active) est cependant considérée comme étant polarisée et contribuant à l'extraction de l'énergie électrique. La fraction d'épaisseur active  $R$  est donc la principale variable. Le facteur d'amortissement mécanique,  $\zeta_m = 2/Q$ , est aussi varié, ce qui devrait notamment permettre d'observer l'influence du critère de couplage critique sur les paramètres en sortie (fréquence de résonance et charge électrique d'opération, tension, courant, puissance et déplacement). De plus, l'amplitude de l'accélération utilisée demeure constante et est de  $1 \text{ m/s}^2$ . Le tableau 4.1 regroupe les paramètres qui ont été conservés constants au cours de cette étude. Par ailleurs, les conclusions tirées à la section 4.2.1 permettent déjà de savoir qu'avec ces conditions,  $k_e^2$  atteindra une valeur maximale de 0.0437 pour une fraction  $R = 1/3$ . À noter également que trois points d'opération sont considérés pour cette étude : les deux fréquences de résonance permettant de maximiser la puissance en condition de couplage optimale ( $\zeta_{el} = \zeta_m$ ) et le point d'opération sous optimale associé à la maximisation de l'amortissement électrique.

Tableau 4.1 Paramètres utilisés pour l'étude géométrique.

$L$ (cm)	$b$ (mm)	$h_{tot}$ (mm)	$\omega_n/2\pi$ (Hz)	$M_t$ (g)	$Y_p$ (GPa)	$\rho_p$ (kg/m <sup>3</sup> )	$d_{31}$ (pC/N)	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	$k_{31}$	$\ddot{w}_b$ (m/s <sup>2</sup> )
2	1	1	150	2.64	76	7588	133	1312	0.34	1

#### 4.4.1 Effet sur la fréquence de résonance et la charge optimale

La figure 4.3 illustre comment la fréquence de résonance de la poutre  $\omega'_n$  varie avec le couplage effectif  $k_e^2$  et le niveau d'amortissement mécanique.

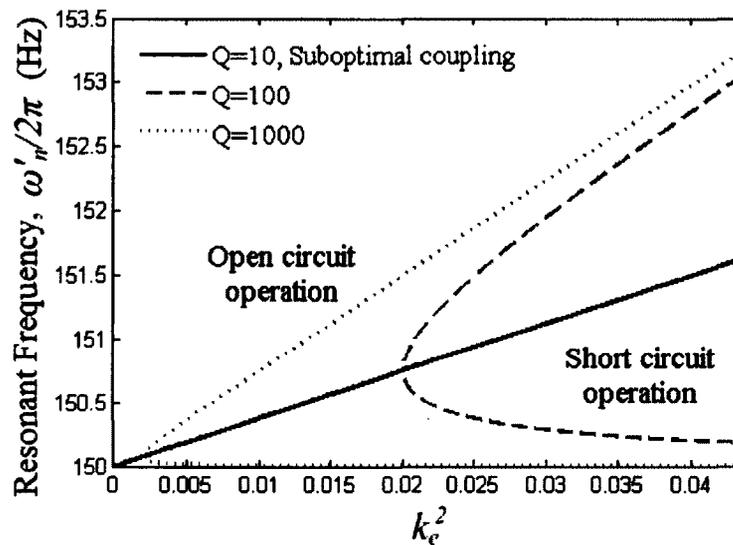


Figure 4.3 Variation de la fréquence de résonance  $\omega'_n$  en fonction du couplage effectif  $k_e^2$  et de l'amortissement mécanique  $Q$ .

Comme soulevé à la section 3.5, il existe différents régimes de fonctionnement selon le niveau de couplage par rapport à l'amortissement mécanique de la structure. Si l'amortissement est élevé, il n'y a qu'une seule fréquence de résonance qui maximise la puissance produite. Lorsque l'amortissement diminue, le couplage critique diminue également. Il existe alors plutôt deux fréquences de résonance et deux charges optimales qui permettent d'optimiser la puissance, ainsi qu'un minimum local entre ces deux fréquences. La droite pleine est donc associée au régime de fonctionnement avec couplage sous optimal, ainsi qu'à ce minimum local lorsque  $k_e^2 > (k_e^2)_{crit}$ . De façon générale, la fréquence de résonance augmente avec le couplage effectif en condition sous critique (ou au minimum local). Cependant, les tendances changent lorsque le couplage est supérieur à la valeur critique, selon la condition d'opération choisie.

En condition de couplage optimal, la poutre peut en effet générer sa puissance maximale à partir d'une charge électrique faible ou élevée. Selon la discussion faite à la section 3.1, la raideur

électrique est faible en situation de court-circuit et élevée en circuit ouvert, ce qui explique pourquoi une portion de la courbe s'approche de la fréquence naturelle de la poutre de 150 Hz et qu'une autre s'en éloigne lorsque  $k_e^2$  et  $Q$  augmentent. La figure 4.4 permet également de visualiser la variation de la charge électrique d'opération en fonction du rapport de l'épaisseur du matériau piézoélectrique actif et de l'amortissement mécanique.

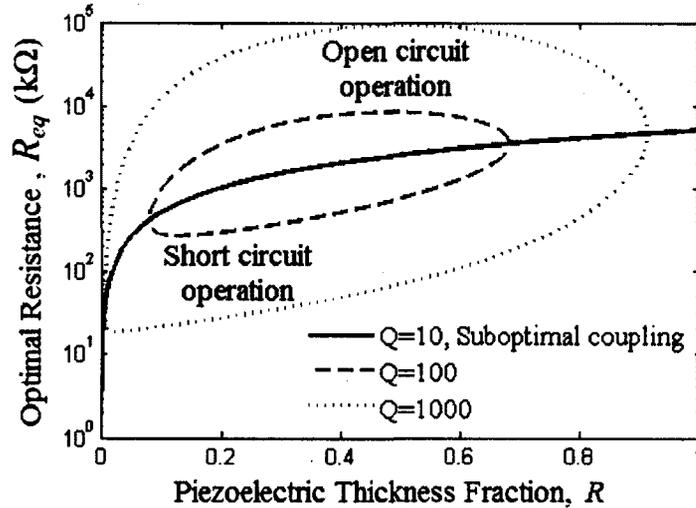


Figure 4.4 Variation de la résistance optimale  $R_{opt}$  en fonction de la fraction d'épaisseur piézoélectrique  $R$  et de l'amortissement mécanique  $Q$ .

Elle permet de constater qu'en situation de couplage sous optimal, la charge électrique d'opération augmente toujours avec l'épaisseur du matériau piézoélectrique, puisque la capacité augmente également. En régime optimal, les deux autres points d'opération apparaissent sous la forme de traces concentriques autour du maximum de couplage effectif possible pour ce dispositif. Les traces s'éloignent de ce point avec l'augmentation de  $Q$ , ce qui devrait se traduire par des tensions d'opération de plus en plus faibles (court-circuit) ou de plus en plus élevées (circuit ouvert) avec la diminution de l'amortissement.

Finalement, bien que l'effet sur la fréquence de résonance semble faible dans ce cas (pour cette application numérique, le décalage relatif maximal est de l'ordre de 2%), il pourrait devenir considérable pour un dispositif à fort couplage. Par exemple, pour une valeur de  $k_{31} = 0.8$ , un facteur de couplage effectif optimal et une opération en circuit ouvert, on parle plutôt d'un décalage pouvant atteindre 26%. Comme il avait été brièvement abordé à la section 3.5.1, la charge d'opération optimale peut donc être significativement affectée par la variation du niveau d'amortissement mécanique du système.

### 4.4.2 Effet sur la tension

Les tendances déduites à la section 4.4.1 sont effectivement visibles à la figure 4.5 qui trace la tension en fonction du rapport  $R$  et de l'amortissement mécanique pour les différents régimes d'opération. Les traces circulaires qui apparaissent pour les niveaux d'amortissement plus faible ( $Q = 100$  et  $1000$ ) sont associées au fonctionnement en circuit ouvert ou en court-circuit et donc aux courbes concentriques de charges d'opération visibles sur la figure 4.4.

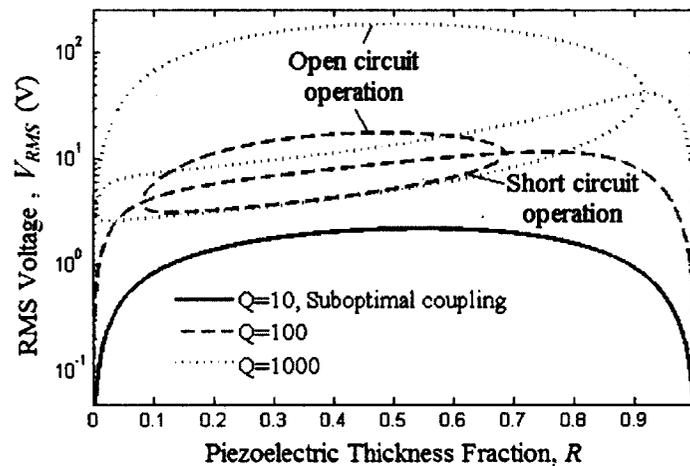


Figure 4.5 Variation de la tension  $V_{RMS}$  en fonction de la fraction d'épaisseur piézoélectrique  $R$  et de l'amortissement mécanique  $Q$ .

D'une part, la tension augmente avec  $Q$ , car le mouvement, la déformation et les contraintes de la poutre augmentent également avec ce paramètre. On constate qu'il est aussi possible de générer des tensions plus élevées en fonctionnant en court-circuit avec un faible niveau d'amortissement qu'avec un dispositif fortement amorti branché à une résistance plus élevée. Dans cette optique, minimiser l'amortissement mécanique paraît une fois de plus avantageux pour augmenter la tension en sortie. Les courbes associées à l'amortissement électrique maximal et à l'opération en court-circuit semblent de plus se rejoindre de manière asymptotique avec l'augmentation de  $Q$ . Par contre, des tensions de plus en plus élevées peuvent être obtenues grâce à un dispositif faiblement amorti qui opère en circuit ouvert.

D'un point de vue géométrique, il semble que la tension en sortie augmente très rapidement pour de faibles  $R$  ( $< 0.1$ ), ce qui est d'ailleurs accentué avec la diminution de l'amortissement mécanique. Dans cette zone, la tension est alors très sensible à l'épaisseur de la couche piézoélectrique et il est facile de gagner quelques ordres de grandeur sur la tension. Par la suite (entre  $R = 0.1$  et  $0.9$ ), bien que l'augmentation de l'épaisseur de la couche entraîne une augmentation de la tension, celle-ci est moins prononcée. L'augmentation de l'épaisseur diminue la capacité,

ce qui contribue à augmenter l'impédance et donc la tension, mais il y a aussi une diminution de la contrainte moyenne qui diminue également la quantité de charges par mètre générées. De plus, l'effet de l'annulation des contraintes et des charges se manifeste très clairement pour des rapports  $R$  plus élevés ( $> 0.9$ ), car la chute de tension y est très drastique. Il est aussi intéressant de constater que la tension maximale est atteinte à  $R = 0.5$  (en opération sous-optimale pour  $Q = 10$  et en circuit ouvert pour les deux autres niveaux d'amortissement). Ce rapport  $R$  est donc associé à une maximisation de la tension, mais pas du couplage effectif.

#### 4.4.3 Effet sur le courant

La figure 4.6 illustre la variation du courant en fonction du rapport  $R$  et du facteur de qualité  $Q$  et elle permet de visualiser des tendances semblables à ce qui a été observé pour la tension.

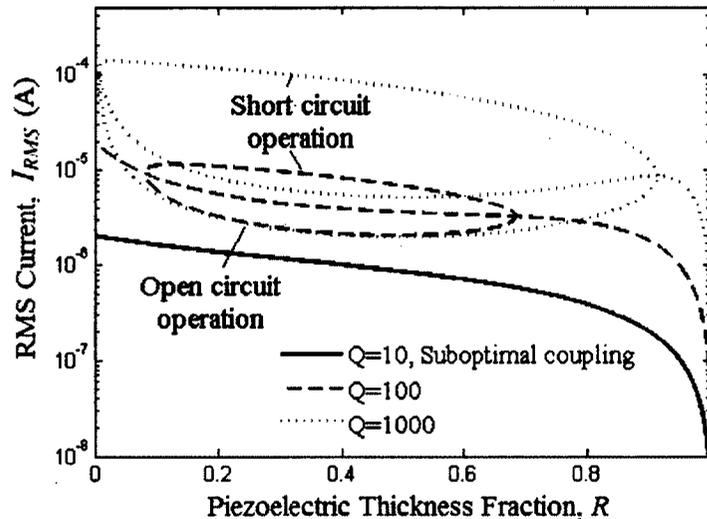


Figure 4.6 Variation du courant  $I_{RMS}$  en fonction de la fraction d'épaisseur piézoélectrique  $R$  et de l'amortissement mécanique  $Q$ .

À nouveau, le courant augmente avec  $Q$  à cause de l'augmentation du niveau des contraintes induites. Par contre, la tendance asymptotique observée sur la tension et qui s'appliquait pour l'opération en court-circuit semble plutôt s'appliquer à l'opération en circuit ouvert. D'ailleurs, on remarque que la disposition des courbes pour ces deux régimes de fonctionnement est inversée. Il semble également que le courant diminue généralement avec l'augmentation de l'épaisseur du matériau piézoélectrique. Il est alors possible de conclure que l'usage des couches minces fournit un courant élevé et une tension faible, car ce type de géométrie est associée à un niveau de contrainte moyenne élevé et une grande capacité. En d'autres termes, l'augmentation de l'épaisseur de la couche permet de passer d'un générateur de courant à un générateur de tension. À noter également que même si le courant tend vers une valeur élevée lorsque  $R$  tend

vers 0, il est effectivement nul pour ce rapport. Il n'y a en réalité aucun matériau piézoélectrique actif déposé sur la poutre pour ce rapport ; il ne peut donc pas y avoir de courant produit. Cette tendance s'explique tout simplement à partir de la résistance d'opération qui tend vers zéro avec l'amincissement de la couche, ce qui correspond à un court-circuit. Pour  $R > 0.9$ , le courant diminue à nouveau à cause de l'annulation des charges qui sont générées.

#### 4.4.4 Effet sur la puissance

L'analyse de la variation de la tension et du courant avec l'épaisseur a permis d'observer des tendances similaires relatives au facteur de qualité  $Q$ , mais en opposition en ce qui concerne l'épaisseur. Il est alors évident que la puissance devrait augmenter avec  $Q$ , mais comme il a été discuté à la section 3.4, elle devrait également atteindre une limite dès que le couplage critique est atteint. L'impact de l'épaisseur sur la puissance est illustré à la figure 4.7 et les résultats sont également tracés en fonction du facteur de couplage effectif  $k_e^2$  à la figure 4.8. Celles-ci démontrent très clairement le comportement attendu.

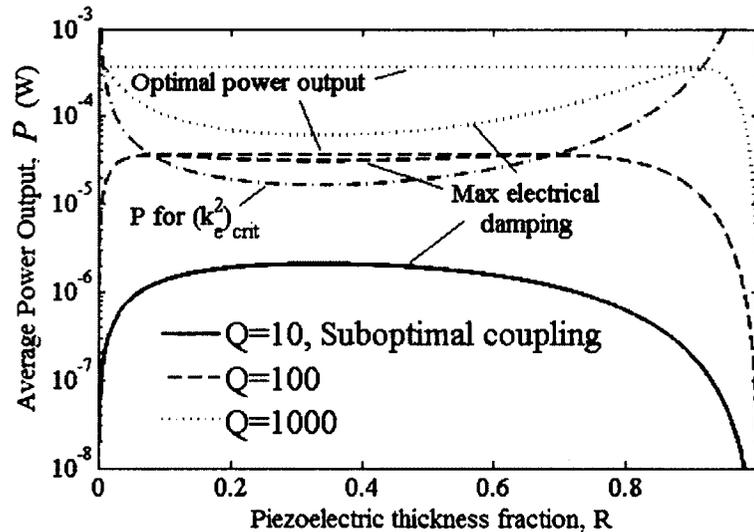


Figure 4.7 Variation de la puissance  $P$  en fonction de la fraction d'épaisseur piézo-électrique  $R$  et de l'amortissement mécanique  $Q$ .

Pour  $R < 0.1$ , l'augmentation de l'épaisseur active contribue à augmenter la puissance, car il y a une augmentation du couplage effectif et la valeur critique n'a pas encore été atteinte. La courbe de puissance en fonction du facteur de couplage critique  $(k_e^2)_{crit}$  démontre que de  $R = 0.1$  à  $0.9$ , un plateau de puissance optimale (associé à l'opération en court-circuit ou en circuit ouvert) apparaît pour les facteurs de qualité plus élevés. La portion de la courbe en forme de selle pour ces facteurs  $Q$  représente le point d'opération associé au minimum local de puissance entre la résonance et l'antirésonance. Pour ce point d'opération, l'augmentation de  $k_e^2$  au-delà de  $(k_e^2)_{crit}$

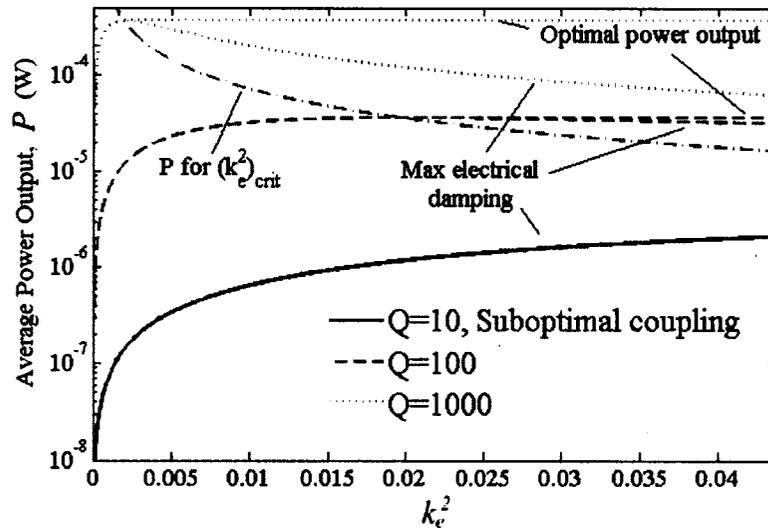


Figure 4.8 Variation de la puissance  $P$  en fonction du couplage effectif  $k_e^2$  et de l'amortissement mécanique  $Q$ .

contribue à suramortir la poutre et il y a effectivement une diminution de la puissance nette qui est observée. La courbe de puissance associée à  $Q = 10$  ne croise jamais celle associée au couplage critique, ce qui signifie que la configuration et le matériau choisis ne pourront jamais être optimaux avec ce niveau d'amortissement. Dans ce cas, la puissance croît toujours avec  $k_e^2$ . Pour  $R > 0.9$ , la puissance diminue rapidement, car le couplage diminue bien en dessous de la valeur critique.

Ainsi, lorsque  $k_e^2$  est très élevé par rapport à l'amortissement, le plateau de puissance optimale est très large et la différence entre la puissance produite en régime optimal ( $\zeta_{el} = \zeta_m$ ) et sous optimale ( $\zeta_{el} = (\zeta_{el})_{max}$ ) s'accroît. De plus, la figure 4.4 a démontré que l'écart entre les charges électriques d'opération pour ces différents régimes augmente avec  $k_e^2 Q$ . Autrement dit, si le système est très fortement couplé par rapport à l'amortissement mécanique, il sera très sensible à la charge électrique qui y est connectée. Au contraire, si le couplage est près de la valeur critique, il est possible de maximiser la puissance tout en réduisant la sensibilité par rapport à la charge. Par contre, des niveaux de tension plus faibles sont à prévoir. Finalement, les variations de la puissance les plus importantes sont reliées à l'augmentation de  $Q$  et à une augmentation de l'épaisseur active dans la région  $R < 0.1$  (soit la région de couplage sous critique). Bref, il semble à première vue que l'usage d'un matériau avec un très bon facteur de qualité serait tout à fait compatible avec un procédé de fabrication en couche mince pour optimiser la puissance produite.

### 4.4.5 Effet sur le déplacement

La figure 4.9 permet de clore cette analyse en illustrant la variation du déplacement au bout de la poutre en fonction du facteur de couplage effectif et du niveau d'amortissement mécanique du système.

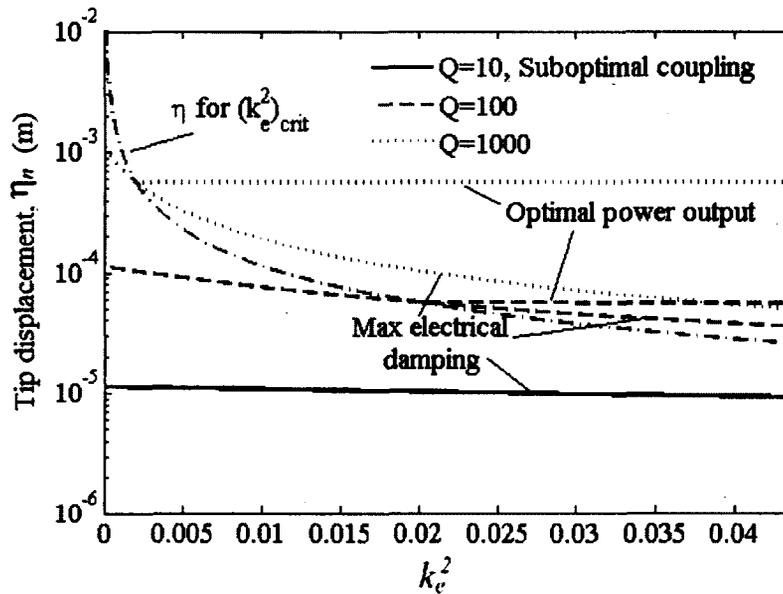


Figure 4.9 Variation du déplacement au bout de la poutre  $\eta_n$  en fonction du couplage effectif  $k_e^2$  et de l'amortissement mécanique  $Q$ .

En premier lieu, on remarque que l'effet du couplage effectif sur le déplacement est plus perceptible lorsque le système est faiblement amorti. Il va donc de soit que si l'amortissement électrique peut atteindre un ordre de grandeur similaire ou supérieur à l'amortissement mécanique, son influence sur le système sera plus apparent. De plus, le déplacement tend généralement à diminuer avec  $k_e^2$ , car l'amortissement électrique maximal augmente avec cette valeur. Par contre, dès que le couplage critique est atteint, le système génère une puissance maximale en conservant un niveau d'amortissement total constant ( $\zeta_{total} = 2\zeta_m$ ) et il y a alors l'apparition d'un plateau pour ces régimes de fonctionnement. À noter qu'il y a une légère diminution de l'amplitude du déplacement entre l'opération en court-circuit et en circuit ouvert, puisque ce dernier point d'opération augmente légèrement la raideur totale du système. Par contre, cette contribution demeure minime par rapport à celle reliée à la variation de l'amortissement.

Ainsi, l'amélioration du couplage dans la région de couplage sous optimal permet d'améliorer de beaucoup la puissance tout en diminuant l'amplitude du mouvement. Il est alors clair que des gains de performance significatifs peuvent être obtenus en améliorant le couplage dans cette

plage de conception. Par contre, la possibilité d'améliorer significativement les performances au-delà du couplage critique semble beaucoup moins évidente à établir.

## 4.5 Résumé et conclusion de l'étude géométrique

Ce chapitre a tout d'abord introduit une méthodologie permettant d'évaluer le facteur de couplage effectif de manière à découpler l'effet des propriétés piézoélectriques et de la géométrie. Grâce à cette méthode, il suffit de multiplier la quantité  $k_{31}^2/(1 - k_{31}^2)$  par un facteur de forme (noté  $f$ ) pour évaluer  $k_e^2$ . Celui-ci dépend principalement de la disposition du matériau piézoélectrique sur la poutre (épaisseur, couverture totale ou partielle), du rapport de son module d'élasticité sur celui du substrat, ainsi que de la déformation subit par la structure.

La méthodologie a donc été utilisée pour déterminer et comparer les facteurs de forme associés à différentes configurations et géométries, comme celles des poutres unimorphe et bimorphe. Dans les deux cas, des valeurs optimales de la fraction piézoélectrique ont été déterminées afin d'optimiser le facteur de forme. Contrairement à ce qu'on pourrait s'attendre, la fraction optimale ne correspond pas à celle permettant d'éviter l'annulation des charges, mais à celle permettant d'atteindre un compromis idéal entre la taille de la capacité et la quantité de charges produites. Il peut alors être avantageux d'utiliser un moindre volume de matériau piézoélectrique afin d'optimiser à la fois la quantité de charges et la tension. Pour un rapport des modules d'élasticité de 1, les rapports  $R$  optimaux sont de  $1/3$  et  $2/3$  pour l'unimorphe et le bimorphe respectivement. Ils fournissent alors des facteurs de forme de  $1/3$  et de  $2/3$ . Ce compromis est également favorisé par l'usage d'un profil chanfreiné en largeur. Celui-ci permet de mieux solliciter le matériau piézoélectrique et d'améliorer le facteur de couplage effectif d'au plus 33 % à partir d'une poutre triangulaire. L'usage d'une électrode qui ne couvre que partiellement la poutre pourrait aussi permettre d'augmenter  $k_e^2$ . Selon la distribution de la masse du système, ce gain pourrait être de 19 à 40% pour une électrode couvrant entre 66 % et 50 % de la surface de la poutre.

Par la suite, une application numérique a été faite pour observer concrètement les tendances sur la fréquence de résonance, la résistance optimale, la tension, le courant, la puissance et le déplacement. L'apparition des différents régimes de fonctionnement en fonction de  $k_e^2 Q$  a pu être démontrée et le système se comporte tel qu'il avait été prévu au chapitre 3. La puissance maximale est atteinte à partir du couplage critique et toute augmentation de l'épaisseur au dessus de ce seuil n'influence que la fréquence de résonance, la résistance d'opération, ainsi que la répartition de la tension et du courant en sortie. Des couches épaisses seront associées à une impédance élevée et donc à des tensions élevées et des courants faibles. La plus grande partie des gains en performance sont obtenus dans la zone de conception sous la valeur critique, car la

puissance s'accompagne également d'une diminution de l'amplitude du déplacement au bout de la poutre. À la suite de cette analyse, il semble que l'usage des couches minces soit une option intéressante, à condition que le système possède un bon facteur de qualité. Dans ce cas, même un facteur de couplage  $k_{31}$  modéré serait suffisant pour obtenir de bonnes performances.

Maintenant que l'effet de l'épaisseur des couches piézoélectriques est bien compris, il est intéressant de s'attarder à l'effet d'un changement des autres dimensions de la poutre (sa largeur, sa longueur ou sa masse ajoutée). L'analyse faite au prochain chapitre tiendra aussi compte du niveau de contrainte induite pour développer une procédure de conception directe et réaliste.



# CHAPITRE 5

## MÉTHODE DE DIMENSIONNEMENT

Les développements faits aux chapitres 3 et 4 ont permis de bien comprendre la relation entre le couplage effectif, la géométrie et son effet sur la dynamique du système couplé. Grâce à une application numérique, l'impact de l'épaisseur de la couche piézoélectrique sur les paramètres en sortie a pu être explicitement identifié. Même si des paramètres géométriques comme la largeur, la longueur et le volume de la poutre n'ont pas d'impact direct sur le couplage, ceux-ci ont tout de même une influence sur la puissance produite. Il est essentiel de saisir ces aspects avant de pouvoir dimensionner adéquatement une poutre piézoélectrique. Afin de pouvoir cibler la bonne approche, un résumé des tendances observées à la suite d'une variation du volume de la poutre est présenté.

Par la suite, ce chapitre présente une méthode de conception intégrée pour dimensionner une poutre piézoélectrique servant à la transformation de l'énergie vibratoire en électricité. Le contexte et les objectifs de cette méthode sont exposés, puis les paramètres de conception importants et les relations utiles pour le dimensionnement sont présentés. À la suite d'une analyse préliminaire des tendances attendues, des figures de mérite sont définies. Celles-ci sont utilisées lors de l'analyse des résultats obtenus à l'aide de la démarche. La méthode de conception est ensuite révisée pour déterminer sa sensibilité et optimiser les performances. Pour clore ce chapitre, les limites de performances pour des dispositifs à l'échelle MEMS sont définies et des recommandations sont formulées.

### 5.1 Effet de la variation du volume de la poutre

Quelques analyses ont été effectuées afin de comprendre l'effet d'une variation du volume de la poutre à partir d'un changement d'une ou de plusieurs de ses dimensions. Elles ont été menées en posant une fraction piézoélectrique  $R$ , une fréquence naturelle  $\omega_n$  et un niveau d'amortissement mécanique  $\zeta_m$  constants.

#### 5.1.1 Variation de la largeur

Afin de ne pas modifier la fréquence naturelle, toute augmentation de la largeur de la poutre doit s'accompagner d'une augmentation de la masse au bout, car la raideur est proportionnelle

à  $b$ . Ainsi, la variation de la largeur influence la masse, la raideur et la capacité de la couche piézoélectrique. Toutes ces valeurs sont proportionnelles à cette dimension. Concrètement,

- la puissance  $P$  est proportionnelle à  $b$  ;
- la charge électrique d'opération  $R_{eq}$  est inversement proportionnelle à  $b$  ;
- la tension  $V_{RMS}$  ne varie pas, car l'augmentation de la masse est annulée par la diminution de l'impédance ;
- toute augmentation de la puissance est alors reliée à une augmentation du courant  $I_{RMS}$ .

Autrement dit, une seule poutre large ayant une longueur, une épaisseur et une fréquence naturelle donnée équivaut à brancher plusieurs poutres étroites (ayant la même longueur, la même épaisseur et la même fréquence naturelle) en parallèle.

### 5.1.2 Variation de la longueur et de l'épaisseur

#### Sans masse au bout

Afin de conserver la fréquence constante, toute augmentation de l'épaisseur doit s'accompagner d'une augmentation de la longueur. La largeur  $b$  et la fraction  $R$  sont conservées constantes. S'il n'y a aucune masse au bout, le rapport  $h/L^2$  doit demeurer constant et la masse du système augmente. Dans ce cas,

- la puissance  $P$  est proportionnelle au volume de la poutre ;
- la tension  $V_{RMS}$  est proportionnelle à l'épaisseur de la poutre ;
- le courant  $I_{RMS}$  est proportionnel à la longueur de la poutre.

Puisque l'épaisseur augmente, il n'y a pas moyen d'utiliser cette analyse afin de savoir la différence entre une approche qui consisterait à fabriquer plusieurs petits dispositifs sur la même gaufre ou une autre qui favoriserait la fabrication d'un seul gros dispositif à partir de cette gaufre. Il faut ajouter une masse au bout de la poutre pour pouvoir analyser cet effet.

### Avec masse au bout

La fréquence, la largeur  $b$ , l'épaisseur totale  $h_{tot}$  et les propriétés électromécaniques contenues au tableau 4.1 sont utilisées pour cette analyse. Par contre, la longueur de la poutre et la masse au bout sont modifiées pour garder la fréquence de résonance constante. Une fraction d'épaisseur  $R = 0.0802$  et un niveau d'amortissement mécanique  $\zeta_m = 0.005$  sont aussi employés. La figure 5.1 trace les résultats obtenus. Il en ressort que,

- la masse au bout et la masse équivalente varient environ avec  $L^{-3}$  ;
- la puissance  $P$  est proportionnelle à la masse, donc aussi grossièrement à  $L^{-3}$  ;
- si la masse sismique déposée au bout est beaucoup plus importante que la masse de la poutre, le déplacement au bout de la poutre ne varie pas avec  $L$  ;
- la contrainte maximale à l'encastrement varie selon  $L^{-2}$  ;
- la tension  $V_{RMS}$  est proportionnelle à  $L^{-2}$  et le courant  $I_{RMS}$  à  $L^{-1}$ , car l'impédance diminue proportionnellement avec  $L$ .

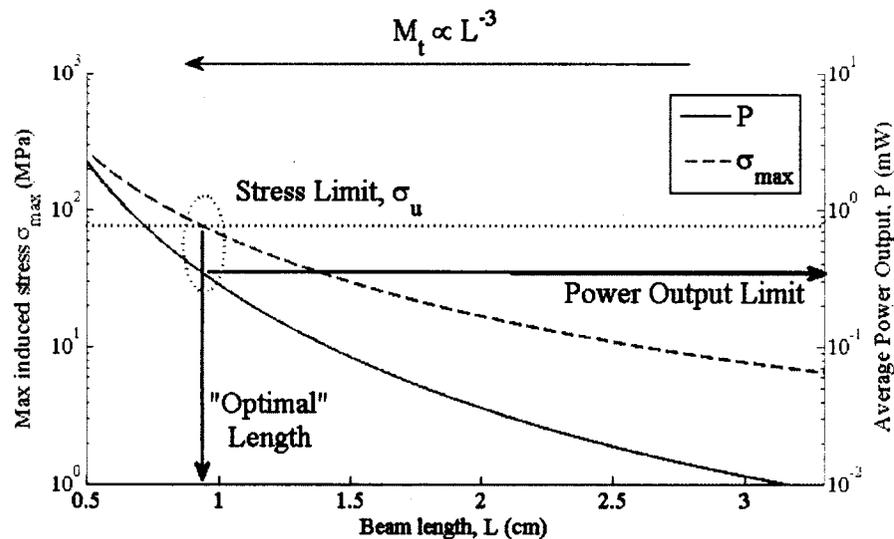


Figure 5.1 Variation de la puissance  $P$  et de la contrainte maximale  $\sigma_{max}$  en fonction de la longueur  $L$ .

Il est alors possible de conclure que le déplacement au bout de la poutre demeure relativement constant pour une fréquence, un niveau d'amortissement et une accélération donnée. Il est ainsi préférable de maximiser la masse et de diminuer la longueur, car cette configuration permet de maximiser la contrainte et donc également la puissance produite. Cette conclusion est conforme

à ce qui avait été dit par Li *et al.* [37]. Par contre, la capacité du matériau à résister à cette contrainte est ce qui impose une limite sur la masse qui peut être déposée au bout de la poutre par rapport à sa longueur. Cette limite est d'ailleurs identifiée sur la figure 5.1. À partir de ces observations, il est pertinent de définir le contexte de conception d'un système d'extraction d'énergie vibratoire.

## 5.2 Contexte et objectifs

Le dispositif d'extraction d'énergie vibratoire doit servir à alimenter électriquement un capteur autonome. En ce sens, il doit être en mesure de fournir suffisamment de puissance  $P$  à partir d'une source environnante de vibrations pour cette application précise. Dans le cadre actuel, il est considéré que la source est préalablement connue et sinusoïdale. Elle a donc été caractérisée par au moins 2 paramètres parmi sa pulsation  $\omega_s$ , l'amplitude de ses accélérations  $\dot{w}_b$  ou l'amplitude de son mouvement  $w_b$ . De plus, les observations faites au chapitre 3 et à la section précédente ont permis de réaliser que pour maximiser la puissance produite, le dispositif doit :

1. fonctionner en résonance,  $\omega_s = \omega'_n$  ;
2. fournir suffisamment de couplage pour atteindre le régime de couplage optimal,  $k_e^2 \geq 4\zeta_m$  ;
3. posséder une masse sismique suffisante pour produire la puissance  $P$  demandée ;
4. avoir une longueur minimale, car cette géométrie permet de maximiser la contrainte et la puissance produite.

Par ailleurs, la troisième affirmation est en opposition avec le désir recherché de miniaturisation, car elle stipule qu'il faut beaucoup de masse pour maximiser la puissance. Cette approche pose donc des limites qu'il est important de bien définir. C'est d'ailleurs l'objet de la section 5.7.

## 5.3 Choix et définition des paramètres de conception

### Facteur de sécurité sur la contrainte $FS$

Le dispositif est destiné à fonctionner en résonance pour la grande majorité de sa durée de vie. Il sera soumis à des contraintes élevées et il est alors important de considérer cet aspect trop souvent négligé dans la procédure de conception. Ceci permet de conserver une perspective réaliste pour la conception d'un dispositif fiable. Cette limite peut être prise en compte en s'assurant de respecter un facteur de sécurité sur la contrainte  $FS$ , défini par la relation 5.1

$$FS = \frac{\sigma_u}{\sigma_{max}} \quad (5.1)$$

où  $\sigma_u$  est la contrainte ultime en flexion du matériau et  $\sigma_{max}$  est la contrainte maximale induite. Idéalement, le paramètre  $FS$  devrait être déterminé à partir d'une étude de la durée de vie en fatigue (courbes S-N), mais en première approche il serait raisonnable d'utiliser des valeurs autour de 5 ou 10. Ces valeurs devraient correspondre à un nombre de cycles avant rupture satisfaisant.

#### Rapport d'aspect surfacique $r$

Un nouveau paramètre géométrique, noté  $r$ , est introduit pour faciliter le dimensionnement. Ce dernier correspond à un rapport d'aspect de surface entre la largeur et la longueur de la poutre. Il est également choisi par le concepteur, mais sa valeur devrait être relativement faible ( $\leq 0.2$ ) afin que les hypothèses du comportement mécanique pour une poutre demeurent valides.

$$r = \frac{b}{L} \quad (5.2)$$

#### Choix du matériau

Puisque la plupart des matériaux semblent en mesure de respecter le critère du couplage critique, il est encore impossible de s'arrêter sur un choix précis. Ce choix demeure une variable en entrée du problème qui dicte plusieurs autres des paramètres. Ceux-ci sont identifiés au tableau 5.1.

Tableau 5.1 Paramètres fixés par le choix des matériaux

Symbole	Signification
$\rho_i$	Densité des matériaux
$Y_i$	Module d'élasticité des matériaux
$Q$	Facteur de qualité des matériaux
$\sigma_u$	Contrainte ultime en flexion du matériau piézoélectrique
$\epsilon_{33}^T$	Permittivité du diélectrique
$d_{31}$	Constante piézoélectrique
$k_{31}$	Coefficient de couplage piézoélectrique

S'il est supposé que la poutre opère dans un environnement sous vide (donc aucune perte par friction avec l'air ou relié à des écoulements dans une cavité restreinte), qu'elle est dimensionnée de sorte à minimiser les pertes au support et que que le substrat utilisé possède un facteur de qualité très élevé (ce qui est généralement le cas du silicium, par exemple), il serait alors adéquat

de considérer que la friction interne dans le matériau piézoélectrique sera la principale source d'amortissement mécanique. Ce principe est exprimé mathématiquement à l'équation 5.3 [16].

$$Q_{tot}^{-1} = Q_{drag}^{-1} + Q_{squeeze}^{-1} + Q_{support}^{-1} + \underbrace{(Q_{piezo}^{-1} + Q_{sub}^{-1})}_{Q_{int.}^{-1}}$$

$$Q_{tot}^{-1} \approx Q_{piezo}^{-1} \quad (5.3)$$

### 5.3.1 Évaluation des paramètres intermédiaires

À partir de toutes ces données, d'autres paramètres intermédiaires peuvent être déterminés. Ceux-ci se retrouvent au tableau 5.2.

Tableau 5.2 Paramètres intermédiaires pour le dimensionnement.

Symbole	Signification	Relation	Réf.
$(k_e^2)_{crit}$	Facteur de couplage effectif minimal	$2/Q$	éq. 3.18
$(f)_{crit}$	Facteur de forme minimal	$(k_e^2)_{crit} \left( \frac{1-k_{31}^2}{k_{31}^2} \right)$	éq. 4.1
$R$	Fraction de matériau piézoélectrique	-	fig. 4.1
$M_{eq}$	Masse équivalente requise	$\frac{8P\omega_n}{\mu^2 \bar{w}^2 Q}$	éq. 3.20
$\Omega'_n$	Rapport de fréquence à la résonance	$\sqrt{1 + \frac{k_e^2}{2}}$	éq. 3.24
$\alpha_{opt}$	Charge résistive optimale adimensionnelle	$1/\Omega'_n$	éq. 3.25
$\omega_n$	Fréquence naturelle de la poutre	$\omega_s/\Omega'_n$	éq. 2.92
$K_m$	Raideur mécanique requise	$\omega_n^2 M_{eq}$	éq. 2.91
$w(L)$	Déflexion résultante au bout de la poutre	$\frac{\mu Q \bar{w} b}{2\omega_s^2}$	éq. 3.23

Il est supposé qu'une géométrie fournissant un facteur de couplage égal au facteur critique est idéale pour optimiser les performances. Cette hypothèse permet alors de cibler l'épaisseur du matériau piézoélectrique qui sera utilisée en fonction de l'épaisseur totale requise. Le rapport d'épaisseur est donc tout simplement fourni par le niveau d'amortissement et le couplage du matériau. En fixant le niveau de couplage à cette valeur, la puissance maximale n'est limitée que par la masse et la qualité des matériaux utilisées (du point de vue des pertes mécaniques). Pour ce point d'opération, il est également facile de prévoir le décalage fréquentiel et la charge électrique d'opération optimale. Le coefficient correcteur  $\mu$  est inclus dans ces relations, mais il n'est évidemment pas encore connu. Puisque le dispositif n'a pas encore été dimensionné, il est impossible de connaître au préalable le rapport des masses. Il peut cependant être posé à la

valeur unitaire pour débiter, puis être ajusté itérativement selon les résultats fournis à la suite du dimensionnement préliminaire.

Finalement, la géométrie permettant de rencontrer les spécifications est déterminée grâce aux équations de la raideur (équation 5.4) et de la contrainte maximale induite (équation 5.5). Ces paramètres sont estimés à partir de la déformée statique. À titre de rappel, la raideur est fournie par

$$K_m = YI(N_n^{xx}) = \frac{3YI}{L^3} \quad (5.4)$$

En ce qui concerne la contrainte, il faut considérer qu'elle provient non seulement du déplacement au bout de la poutre, mais également de l'effet du couplage piézoélectrique. Logiquement, un matériau ayant un fort couplage piézoélectrique devrait subir des contraintes importantes reliées aux champs électriques qui sont générés. Un traitement analytique a été tenté afin d'obtenir une solution permettant d'extraire clairement les tendances. Cette démarche est d'ailleurs présentée à l'annexe E. Cela dit, trouver une équation analytique explicite et simple pour évaluer précisément cette contribution pour une vaste gamme de géométries ou de charges se révèle être complexe. Cet effet sera donc incorporé dans la méthode de conception, mais il sera évaluée numériquement. La formulation proposée consiste à corriger l'équation de la contrainte mécanique de la manière suivante :

$$\sigma_{max} = \frac{3h_c Y_p}{L^2} |\eta_n| (1 + \bar{\sigma}_p(R, \bar{Y}, k_{31}, \Omega_n, \alpha)) \quad (5.5)$$

où  $\bar{\sigma}_p$  est un facteur adimensionnel positif fonction de l'épaisseur du matériau piézoélectrique, du rapport des modules d'élasticité, du couplage, de la fréquence et de la charge électrique. Par exemple, ce facteur pourrait prendre des valeurs aussi élevées que 0.4 à 0.8 pour une mince couche d'un matériau à fort couplage ( $k_{31}$  autour de 0.7 à 0.8) et fonctionnant en circuit ouvert. Il est donc pertinent de considérer cette contribution dans certains cas.

## 5.4 Analyse préliminaire

La figure 5.2 schématise la procédure de conception présentée jusqu'à présent.

Le problème de conception peut alors être résolu à partir des équations présentées à la section 5.3 (le détail de cette résolution est présenté à l'annexe E.2) et les solutions obtenues révèlent déjà

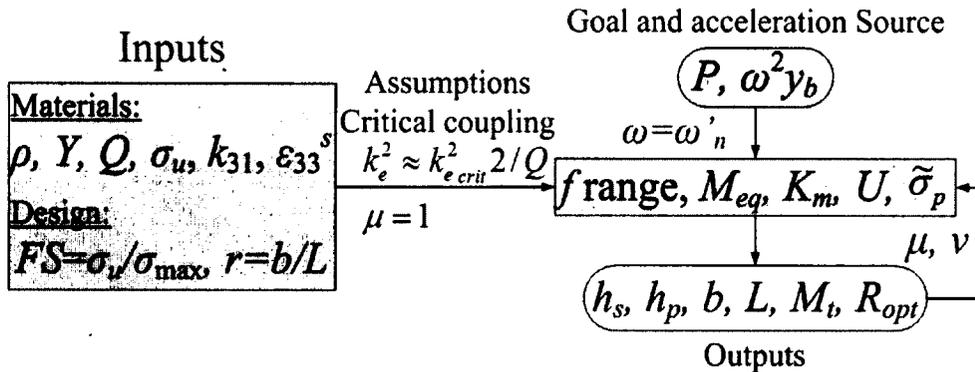


Figure 5.2 Schéma de la méthode de dimensionnement

certaines tendances. Par exemple, le tableau 5.2 révèle que la masse équivalente requise est proportionnelle à la puissance visée, mais aussi à la fréquence naturelle (et donc à la fréquence de la source de vibration). Ceci signifie donc que pour un niveau de puissance donné, la masse doit augmenter avec la fréquence et que, pour compenser, la poutre devrait être plus courte et plus épaisse. La masse requise diminue également avec le facteur de qualité et l'amplitude de l'accélération disponible. Il va de soit que l'application visée a alors un impact significatif sur la géométrie finale du dispositif. La méthode de conception permet également de déterminer une limite sur l'accélération et ce point est discuté à la sous-section 5.4.3.

### 5.4.1 Variation de l'épaisseur

Tout d'abord, l'équation 5.6 révèle que l'épaisseur ne dépend pas directement du facteur de qualité.

$$h \propto \sqrt{\frac{P\omega FS}{\ddot{w}_b r}} \quad (5.6)$$

L'épaisseur augmente selon une fonction racine carrée avec la puissance  $P$ , la fréquence  $\omega$  et le facteur de sécurité  $FS$  et elle diminue avec l'accélération  $\ddot{w}_b$  et le rapport  $r$ . Par exemple, passer d'une spécification de puissance de 1 mW à 0.25 mW, mais en gardant les autres paramètres de conception égaux, fournira une épaisseur deux fois plus mince. Le résultat est semblable pour la fréquence, où le fait de passer de 100 Hz à 1 kHz devrait grossièrement mener à une épaisseur trois fois plus importante.

### 5.4.2 Variation de la longueur

Contrairement à l'épaisseur, la longueur est influencée par le facteur de qualité. Selon l'équation 5.7, celle-ci augmente selon  $Q^{\frac{1}{2}}$ . Elle diminue cependant avec la fréquence qui est associée à un exposant  $-3/4$ .

$$L \propto Q^{\frac{1}{2}} \left( \frac{FS}{\omega} \right)^{\frac{3}{4}} \left( \frac{\ddot{w}_b P}{r} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.7)$$

Passer d'une fréquence de 100 Hz à 1 kHz affecte donc la longueur d'un facteur d'environ 0.18. Puisque la puissance agit selon une racine quatrième, passer d'un niveau de puissance de 1 mW à 0.25 mW devrait diminuer la longueur par un facteur  $\sqrt{2}$ . L'influence majeure de la longueur sur la contrainte induite est perceptible grâce à l'exposant  $3/4$  qui est affecté au facteur de sécurité  $FS$ . L'augmentation du rapport d'aspect surfacique  $r$  devrait également entraîner une diminution de la longueur selon une racine quatrième.

### 5.4.3 Limite sur l'accélération

Finalement, l'équation 5.8 indique que l'accélération en entrée est surtout limitée par la contrainte.

$$(\ddot{w}_b)_{limite} \propto \frac{\omega}{QFS} \quad (5.8)$$

Il peut être surprenant de ne pas voir apparaître la puissance dans cette équation, mais il faut considérer que celle-ci est proportionnelle à la masse et que la méthode permet alors d'effectuer une mise à l'échelle avec ce paramètre. Cette limite d'accélération correspond au point où il est impossible de réduire davantage la masse au bout de la poutre pour diminuer la contrainte induite par un grand déplacement. Ce grand déplacement peut provenir d'un amortissement mécanique faible, mais aussi d'une excitation à basse fréquence. On peut également en déduire que des dispositifs destinés à des opérations à de hautes fréquences devraient être en mesure de supporter des accélérations bien plus importantes.

## 5.5 Définition des figures de mérite considérées

Afin de pouvoir comparer les performances des dispositifs conçus, il est nécessaire de définir des figures de mérite (FDM). Dans la littérature, il est courant de voir les comparaisons se baser sur une seule FDM, mais il n'a pas encore été établi laquelle est la plus adéquate. Ainsi,

plusieurs d'entre elles seront utilisées et il sera alors possible de déterminer comment celles-ci varient selon les paramètres d'entrées. Celles les plus pertinentes afin d'atteindre les spécifications pourront aussi être identifiées.

### 5.5.1 Puissance surfacique $P_S$

La puissance surfacique  $P_S$  est une FDM pertinente dans l'optique de fabriquer ces dispositifs à l'échelle MEMS et à un gros volume de production. Exprimée en  $\text{mW}/(\text{cm}^2\text{G}^2)$ , celle-ci est exprimée par le rapport de la puissance (normalisée par l'accélération au carré) sur la surface utilisée par la poutre sur une gaufre. La taille de la masse n'est pas considérée dans ce calcul, car il est supposé qu'elle est fabriquée à partir d'un autre matériau. Cette FDM peut éventuellement être utilisée pour estimer grossièrement le coût de fabrication de tels dispositifs, car cette valeur est reliée au nombre de dispositifs par gaufre qu'il est possible de fabriquer. Bref, une puissance surfacique élevée est désirée pour diminuer le coût unitaire.

### 5.5.2 Puissance spécifique $P_M$

La puissance spécifique  $P_M$  est une FDM exprimée en  $\text{mW}/(\text{g G}^2)$  qui représente le rapport de la puissance produite (normalisée par l'accélération au carré) sur la masse totale de matériel utilisé pour fabriquer le dispositif. Cette masse comprend celle de la poutre ainsi que celle de la masse disposée au bout. Cette FDM permet de juger des performances du dispositif par rapport à une estimation de sa taille. D'autres auteurs utilisent plutôt le rapport de la puissance normalisée sur le volume total de matériel afin d'exprimer la puissance par unité de volume. La puissance spécifique est en quelque sorte équivalente, car elle peut être reliée à cette autre FDM si la densité des matériaux qui composent le dispositif est connue.

### 5.5.3 Densité de puissance $P_\rho$

Pour cette étude, la densité de puissance est plutôt évaluée à partir du rapport entre la puissance nette produite et un estimé réaliste du volume du dispositif. Le calcul utilise alors le volume requis de fonctionnement, c'est-à-dire le volume nécessaire pour que la poutre et la masse à son extrémité puissent se déplacer librement. Cette FDM, qui s'exprime en  $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ , est plus précise que la puissance spécifique, mais aussi plus difficile à évaluer et à analyser. Elle est moins appropriée à une étude générale comme celle qui est effectuée ici, car elle tient en compte de l'optimisation de la géométrie et du positionnement de la masse. Ces aspects ne font pas l'objet de la présente étude. Il semble tout de même pertinent de l'introduire afin d'observer sa sensibilité face à la méthode de conception proposée.

## 5.6 Utilisation de la méthode de conception

La méthodologie proposée est désormais utilisée afin de comparer les différents matériaux et l'effet de leurs propriétés sur la géométrie finale. Les tableaux 5.3 et 5.4 présentent les paramètres de conception et les propriétés utilisées en entrée. À noter que le matériau choisi en tant que substrat est le silicium, car il est couramment utilisé dans les MEMS. De plus, la plupart des propriétés de matériaux utilisées pour cette étude représentent des valeurs moyennes tirées de celles répertoriées à la section 1.5.2. Par contre, les valeurs pour la contrainte ultime ne sont que des estimations très rudimentaires, car il est effectivement plutôt difficile d'obtenir cette propriété pour tous les matériaux retenus dans le cadre de cette étude. La contrainte ultime a été tout simplement estimée comme étant de trois ordres de grandeur inférieurs au module d'élasticité ( $\sigma_u = Y_p/1000$ ). La densité du matériau utilisé pour fabriquer la masse ajoutée est représentée par  $\rho_t$ . Le tungstène a été choisi pour sa densité très élevée qui devrait permettre de réduire le volume final des dispositifs. Bien qu'il serait également possible d'optimiser la géométrie de la masse pour améliorer l'usage du volume, ce n'est pas l'objet premier de cette étude. Elle sera alors tout simplement considérée comme cubique.

Tableau 5.3 Paramètres d'entrée pour la méthode de conception.

$r$	$FS$	Fréq. source (Hz)	Accél. ( $m/s^2$ )	$P$ (mW)	$\rho_s$ ( $kg/m^3$ )	$Y_s$ (GPa)	$\rho_t$ ( $kg/m^3$ )
0.2	5	150	1	0.1	2330	166	19300

Tableau 5.4 Propriétés moyennes des matériaux utilisées pour les calculs.

Matériau	$\rho_p$ ( $kg/m^3$ )	$Y_p$ (GPa)	$k_{31}$	$d_{31}$ (pC/N)	$\epsilon_{33}^s/\epsilon_0$	$Q$	$\sigma_u$ (MPa)
PZN-PT	8400	21	0.70	811	1624	270	21
PMN-PT	8160	40	0.57	497	2320	50	40
PZT-4	7588	76	0.34	133	1160	525	76
PZT-5A	7725	67	0.35	181	1770	80	67
PZT-5H	7660	61	0.40	290	3050	50	61
AIN	3250	310	0.15	2.63	10.5	1000	310

### 5.6.1 Résultats obtenus à l'aide de la méthode

Le tableau 5.5 fournit les dimensions obtenues pour les différents matériaux.  $S$  représente la surface de la poutre, donc la surface minimale requise pour la fabriquer à partir d'une gaufre. La surface occupée par la masse n'est pas considérée dans cette valeur, puisqu'elle est composée d'un matériau différent. Le volume de matériau piézoélectrique est également indiqué par  $U_p$ . Le tableau 5.6 fournit quant à lui les paramètres mécaniques et électriques, ainsi que la valeur de la

contribution piézoélectrique de la contrainte  $\tilde{\sigma}_p$  pour chaque poutre. Finalement, le tableau 5.7 fournit les paramètres en sortie pour tous ces dispositifs.

Tableau 5.5 Dimensions des poutres obtenues à partir de la méthode de conception.

Matériau	$L$ (cm)	$b$ (mm)	$h_s$ ( $\mu\text{m}$ )	$h_p$ ( $\mu\text{m}$ )	$S$ ( $\text{cm}^2$ )	$U_p$ ( $\text{mm}^3$ )	$M_t$ (g)	$M_t/mL$
PZN-PT	3.22	6.45	666	17.5	2.08	3.63	2.61	7.39
PMN-PT	1.43	2.85	655	93.1	0.406	3.78	14.9	161
PZT-4	3.82	7.64	581	16.7	2.92	4.88	1.21	2.80
PZT-5A	1.68	3.35	589	126	0.562	7.06	9.30	70.6
PZT-5H	1.40	2.80	595	164	0.391	6.43	14.9	144
AlN	5.01	10.0	511	13.2	5.02	6.60	0.422	0.682

Tableau 5.6 Paramètres équivalents des poutres obtenues.

Matériau	$K_m$ (kN/m)	$C_p$ (nF)	$R_{eq}$ (k $\Omega$ )	$\tilde{\sigma}_p$
PZN-PT	2.38	171	6.21	0.280
PMN-PT	13.0	8.96	118	0.166
PZT-4	1.16	179	5.93	0.0359
PZT-5A	8.19	7.00	151	0.0523
PZT-5H	13.0	6.43	165	0.0756
AlN	0.504	3.55	299	0.0062

Tableau 5.7 Paramètres de sortie pour les divers matériaux employés.

Matériau	$w(L)$ (mm)	$V_{RMS}$ (V)	$I_{RMS}$ (mA)	$P_S$ (mW/( $\text{cm}^2\text{G}^2$ ))	$P_M$ (mW/( $\text{g G}^2$ ))	$P_p$ ( $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ )
PZN-PT	0.155	0.786	0.127	4.63	3.25	76.3
PMN-PT	0.0284	3.46	0.0289	23.7	0.642	50.4
PZT-4	0.309	0.762	0.131	3.30	5.86	67.6
PZT-5A	0.0454	3.90	0.0256	17.1	1.02	65.4
PZT-5H	0.0284	4.09	0.0245	24.6	0.641	51.0
AlN	0.648	5.24	0.0191	1.92	9.24	46.1

## 5.6.2 Discussion

Premièrement, les résultats semblent pour la plupart respecter les limites de validité du modèle. La plupart des facteurs de forme ne sont pas dépassés outrageusement et on peut considérer que le comportement demeure pratiquement linéaire en comparant les déflexions et les épaisseurs obtenues. De plus, tous les dispositifs génèrent des tensions qui se trouvent à au moins un ordre de grandeur d'intervalle. Par exemple, quatre dispositifs (le PMN-PT, le PZT-5A, le PZT-5H et l'AlN) pourraient fournir des tensions autour de 3 à 5 V, alors que les deux autres (le PZN-PT et

le PZT-4) fourniraient autour de 0.8 V. Cette différence peut s'expliquer en jetant un oeil aux valeurs des capacités de chaque poutre, car celles faites de PZN-PT et de PZT-4 ont effectivement des capacités beaucoup plus élevées que toutes les autres. Ces capacités élevées proviennent des faibles épaisseurs de matériau piézoélectrique, qui ont elles-mêmes été dimensionnées ainsi à cause du haut facteur de qualité. La tension pourrait être augmentée en augmentant l'épaisseur des couches, mais le dispositif serait aussi au dessus de la condition du couplage critique. Comme il avait été noté à la section 4.4, la charge optimale et la réponse fréquentielle seraient alors différentes. Le cas de l'AlN est particulier, car malgré la mince couche employée, sa capacité demeure faible. Ce résultat s'explique alors par la permittivité très faible de ce matériau qui permet d'obtenir une impédance élevée. De plus, l'influence de l'effet piézoélectrique sur la contrainte (fournie par  $\bar{\sigma}_p$ ) demeure limitée pour tous les dispositifs. Comme il était possible de s'y attendre, l'ordre de cette valeur est très clairement relié au facteur de couplage  $k_{31}$ , mais aussi à l'épaisseur relativement faible des couches piézoélectriques.

La comparaison des volumes de matériau piézoélectrique utilisés dans chaque dispositif semble aussi démontrer que les matériaux composés de relaxeur (PZN-PT et PMN-PT) ont un avantage marginal, avec des volumes de 3.63 et 3.70 mm<sup>3</sup>. De ce côté, l'AlN se compare favorablement aux divers PZT standards. Devant ces volumes similaires, il semble que cette valeur soit surtout reliée au niveau de puissance visée et à la source d'accélération disponible. Le choix du matériau n'aurait qu'une influence mineure sur ces résultats. De plus, les résultats pour la puissance surfacique  $P_S$  et la puissance spécifique  $P_M$  peuvent s'expliquer à partir des tendances prévues à la section 5.4 et qui sont aussi très évidentes dans les données obtenues. Les matériaux ayant un  $Q$  élevé génèrent des dispositifs longs et avec une faible masse disposée à leur bout, tandis que de faibles  $Q$  mèneront inévitablement vers de petites poutres munies d'une grosse masse. Les conditions de conception font alors que ces figures de mérites sont principalement dépendantes du facteur de qualité et suivent des tendances opposées. De plus, l'amortissement semble affecter de manière négligeable l'épaisseur totale de la poutre, puisque la plupart des dispositifs ont des couches piézoélectriques relativement minces par rapport à l'épaisseur du substrat.

Finalement, tous les dispositifs proposés semblent fournir une densité de puissance similaire, sans impact apparent qui pourrait provenir du facteur de qualité  $Q$ . Cette analyse ne permet donc pas de conclure sur ce qui peut influencer spécifiquement cette FDM. Dépend-elle tout simplement des caractéristiques de la source d'accélération (fréquence et amplitude) ou est-ce que la géométrie à quand même quelque chose à y voir ? Deux autres analyses sont menées aux sous-sections 5.6.3 et 5.6.5. La première analyse porte sur l'effet de l'accélération en entrée, alors que la seconde porte sur l'effet de limiter le déplacement grâce au couplage piézoélectrique.

### 5.6.3 Effet de la source d'accélération sur les résultats

Le tableau 5.8 compare les géométries obtenues pour produire la même puissance à partir de différentes sources d'accélération. Tout d'abord, l'amplitude est conservée constante, mais la fréquence est augmentée par un facteur 10 (passant ainsi de 150 Hz à 1.5 kHz). Par la suite, l'amplitude de l'accélération est aussi modifiée par ce même facteur. Cette analyse comparative a été menée pour le PZT-4, mais les tendances seront les mêmes peu importe le matériau choisi. À noter que les dimensions résultantes à 1.5 kHz ne sont pas toujours caractéristiques d'une poutre à proprement dit, puisqu'elles sont parfois toutes près de l'ordre du millimètre. Cela dit, ce détail sera négligé afin de tout même extraire les tendances essentielles.

Tableau 5.8 Comparaison des poutres en PZT-4 obtenues pour trois sources d'accélération.

Fréquence (Hz)	150	1500	1500
Accél. ( $m/s^2$ )	1	1	10
$L$ (cm)	3.82	0.671	1.21
$b$ (mm)	7.64	1.34	2.42
$h_s$ ( $\mu m$ )	581	1879	581
$h_p$ ( $\mu m$ )	16.7	53.5	16.7
$S$ ( $mm^2$ )	2.92	0.0902	0.292
$U_p$ ( $mm^3$ )	4.89	0.483	0.488
$M_t$ (g)	1.21	14.3	0.121
$M_t/mL$	2.80	332	2.80
$K_m$ (kN/m)	1.16	1272	11.6
$C_p$ (nF)	179	1.73	17.9
$R_{eq}$ ( $k\Omega$ )	5.93	61.4	5.93
$\bar{\sigma}_p$	0.0359	0.0359	0.0359
$w(L)$ (mm)	0.309	0.003	0.0309
$V_{RMS}$ (V)	0.762	2.48	0.762
$I_{RMS}$ (mA)	0.131	0.0403	0.131
$P_S$ ( $mW/(cm^2G^2)$ )	3.30	107	0.323
$P_M$ ( $mW/(gG^2)$ )	5.86	0.670	0.586
$P_p$ ( $\mu W/cm^3$ )	67.6	77.3	1561

Encore une fois, les tendances qui étaient grossièrement prévues à la section 5.4 sont notables. Alors qu'une petite masse est nécessaire pour le premier cas à basse fréquence (ce qui requiert une poutre longue et mince), l'excitation à haute fréquence dans le second cas nécessite l'usage d'une poutre très courte et épaisse, avec une masse beaucoup plus imposante disposée à son extrémité. L'augmentation de l'épaisseur s'accompagne également d'une diminution de la capacité, d'une augmentation de la tension en sortie et de la résistance optimale. Le déplacement a aussi diminué d'un facteur 100, ce qui explique également la diminution de la longueur. Le

volume de la poutre (ainsi que celui du matériau piézoélectrique) a subi une diminution d'un facteur 10 et la masse est désormais énorme à la suite d'une augmentation par ce même facteur 10. Le troisième cas permet de constater que pour réduire la taille de la masse et l'épaisseur, il faut augmenter l'amplitude de l'accélération en entrée. Par contre, la longueur augmente de nouveau. Bref, si l'accélération en entrée est trop faible par rapport à la fréquence, l'épaisseur et la taille de la masse seront très élevées. Pour conserver ces valeurs dans une plage acceptable, il faut donc que  $\ddot{w}_b$  suivent l'augmentation de la fréquence ou bien il faut alors réduire la puissance visée.

Par ailleurs, toutes les FDM démontrent des sensibilités par rapport à l'accélération utilisée en entrée. Ceci signifie qu'il faut être très vigilant lorsqu'on s'en sert pour comparer des dispositifs conçus pour fonctionner à partir de deux sources différentes. Par exemple, la puissance surfacique  $P_S$  est à la fois sensible à la fréquence et à l'amplitude  $\ddot{w}_b$ , alors que la puissance spécifique  $P_M$  ne semble très sensible que par rapport à la fréquence. L'équation 3.20 permet de comprendre cette sensibilité, car en disposant la masse au dénominateur de la partie de gauche, on retrouve sensiblement la définition actuelle de  $P_M$  et on note que la fréquence demeure au dénominateur de la partie de droite. En ce qui concerne la densité de puissance, elle a subi une augmentation marginale entre le premier et le second cas. À partir de l'équation 3.31, il est possible de comprendre qu'il n'y a pas de changement majeur de  $P_p$  avec la fréquence, car le produit de la fréquence et de la masse est finalement compensé par la diminution du déplacement. Cette faible augmentation est alors principalement reliée à la taille dominante de la masse sismique et à sa densité plus élevée par rapport aux matériaux qui composent la poutre. Cette même équation permet également de comprendre la sensibilité reliée à l'amplitude de l'accélération. Afin de pouvoir comparer des dispositifs opérant sous différentes conditions, il serait alors utile de définir une autre figure de mérite qui est indépendante de la source d'accélération. Pour ce faire, une figure de mérite noté  $FM$  est proposée à l'équation 5.9.

$$FM = \frac{P}{\omega_n^3 w_b^2 M_{eq}} = \frac{P \omega_n}{\ddot{w}_b^2 M_{eq}} \quad (5.9)$$

$FM$  représente un rapport entre la puissance électrique en sortie  $P$  et le produit de l'amplitude de la force appliquée ( $\dot{w}_b M_{eq} = \omega_n^2 w_b M_{eq}$ ) avec l'amplitude de la vitesse à la base de la structure ( $\dot{w}_b = \omega_n w_b$ ), ce qui représente en quelque sorte une valeur proportionnelle à la puissance injectée dans le dispositif. La valeur de  $FM$  indique alors le niveau de transmissibilité, inversement proportionnel à  $\zeta_m$ , et le qualité du rendement de conversion piézoélectrique.

### 5.6.4 Comparaison des dispositifs conçus avec les dispositifs répertoriés

Grâce à la nouvelle figure de mérite introduite la section 5.6.3, il est possible de comparer adéquatement les conceptions obtenus à la section 5.6.1 par rapport aux différents dispositifs répertoriés en introduction dans le tableau 1.4. Par contre, puisque la plupart des références ne mentionnent pas la masse équivalente des dispositifs, mais plutôt leur volume total, l'équation 5.9 est modifiée de sorte à remplacer  $M_{eq}$  par le volume total. Cette nouvelle figure de mérite est notée  $FM^*$  et possède alors des unités représentatives d'une densité ( $g/cm^3$ ). Les résultats de cette analyse sont présentés au tableau 5.9.

Tableau 5.9 Comparaison de la puissance normalisée des dispositifs conçus avec ceux répertoriés dans la littérature.

Dispositifs	$FM^*$ ( $g/cm^3$ )	Matériaux masse/substrat
PZN-PT	354	tungstène/silicium
PMN-PT	122	tungstène/silicium
PZT-4	414	tungstène/silicium
PZT-5A	188	tungstène/silicium
PZT-5H	122	tungstène/silicium
AlN	344	tungstène/silicium
Ref. 1 [12]	44.1	silicium/silicium
Ref. 2 [29]	286	résine SU-8/SiO <sub>2</sub> -SiN <sub>x</sub>
Ref. 3 [35]	7.51	silicium/silicium
Ref. 4 [35]	18.5	silicium/silicium
Ref. 5 [18]	441	nickel/silicium
Ref. 6 [51]	24.9	silicium/silicium
Ref. 7 [27]	12775	silicium/silicium
Ref. 8 [48]	55.9	tungstène/acier
Ref. 9 [60]	0.002	aucune/acier

Ces résultats démontrent la qualité de la méthode de conception, car tous les dispositifs dimensionnés se comparent très favorablement aux dispositifs provenant des références. Par contre, le dispositif de Isarakorn *et al.* [27] se démarque grâce à un indice  $FM^*$  d'au moins deux ordres supérieurs aux autres. Théoriquement, ce dispositif aurait à la fois un facteur de qualité et un rendement de conversion très élevé. Ceci dit, cette valeur paraît disproportionnée, voir même possiblement erronée.

Afin de confirmer ces doutes, la limite de  $P/\dot{w}_b^2$  (équation 3.20) est calculée puis comparée avec la puissance par accélération au carré rapportée de  $13 \mu W/G^2$ . Selon les dimensions fournies, ce dispositif serait muni d'une masse de silicium ayant un volume de  $0.115 \text{ mm}^3$  ( $1 \times 0.5 \times 0.23 \text{ mm}^3$ , ce qui est environ trois fois la taille de la poutre fabriquée). Ce volume est employé

afin d'estimer la masse équivalente,  $M_{eq} = 2.7 \times 10^{-7}$  kg. Sachant que la fréquence de résonance est d'environ 2.3 kHz ( $\omega_n = 4.6\pi \times 10^3$  rad/s) et que l'amortissement mécanique mesuré est de  $\zeta_m = 0.0004$ , la puissance limite par  $G^2$  est alors estimée à  $0.28 \mu\text{W}/G^2$ , soit environ 50 fois moins que la valeur apparemment mesurée. Ce calcul confirme donc les soupçons tout en démontrant une fois de plus la valeur de la méthode de dimensionnement.

### 5.6.5 Limiter le déplacement et augmenter la masse

À titre comparatif, l'approche de conception est modifiée afin de cette fois limiter le déplacement d'une poutre avec un haut facteur de qualité pour utiliser une plus grosse masse sismique. Bien que ceci pourrait se faire à l'aide de butées mécaniques, il serait également possible d'accomplir un résultat similaire en augmentant l'amortissement électrique maximal du système. Autrement dit, le facteur de couplage effectif est varié afin d'observer son impact sur les résultats fournis par la méthode de conception. Le couplage pourra alors prendre des valeurs inférieures ou supérieures à la valeur critique. Le tableau 5.10 compare les résultats obtenus à la suite de cette modification pour le cas du PZT-4.

Tableau 5.10 Effet d'un suramortissement de la poutre sur les résultats de la méthode de conception (pour le PZT-4).

Approche	Long et petite masse	Court et grosse masse	+ court et + grosse masse
$k_e^2$	0.0038	0.0190	0.0381
$L$ (cm)	3.82	2.09	1.65
$b$ (mm)	7.64	4.18	3.30
$h_s$ ( $\mu\text{m}$ )	581	452	400
$h_p$ ( $\mu\text{m}$ )	16.7	69.7	154
$S$ ( $\text{mm}^2$ )	2.92	0.875	0.545
$U_p$ ( $\text{mm}^3$ )	4.88	6.10	8.41
$M_t$ (g)	1.21	2.49	4.21
$M_t/mL$	2.80	18.0	36.8
$K_m$ (kN/m)	1.16	2.22	3.70
$C_p$ (nF)	179	12.9	3.63
$R_{eq}$ (k $\Omega$ )	5.93	82.3	292
$\bar{\sigma}_p$	0.0359	0.0454	0.0572
$w(L)$ (mm)	0.309	0.100	0.0549
$V_{RMS}$ (V)	0.762	2.86	5.40
$I_{RMS}$ (mA)	0.131	0.0349	0.0185
$P_S$ (mW/( $\text{cm}^2 G^2$ ))	3.30	11.0	17.7
$P_M$ (mW/( $\text{g} G^2$ ))	5.86	3.65	2.22
$P_p$ ( $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ )	67.6	145	120

Limiter le déplacement à l'aide du couplage piézoélectrique semble être bénéfique, car cette approche permet de réduire la taille de la poutre, donc d'augmenter la puissance surfacique, sans trop sacrifier la puissance spécifique. Le dispositif avec un très fort couplage effectif permet d'ailleurs d'atteindre des puissance surfaciques similaires à ce qu'on retrouvait pour les dispositifs avec de faibles  $Q$  (comme le PZT-5A, voir tableau 5.7), mais avec une densité de puissance et une puissance spécifique avantageuses par rapport à ceux-ci (grossièrement un gain de 2 par rapport au PZT-5A). La figure 5.3 permet d'observer les tendances pour  $P_M$  et  $P_S$  en fonction du facteur de couplage effectif  $k_e^2$ .

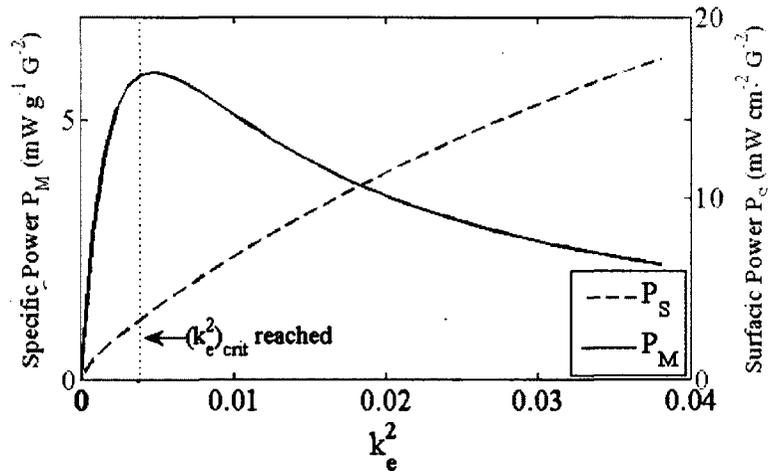


Figure 5.3 Variation de la puissance spécifique  $P_M$  et de la puissance surfacique  $P_S$  en fonction du facteur de couplage  $k_e^2$ .

Tel qu'on pouvait s'y attendre, la puissance spécifique atteint son optimum tout près de la valeur du couplage critique, mais la puissance surfacique augmente toujours avec  $k_e^2$ . Le taux de variation de la puissance spécifique est aussi beaucoup plus faible pour un couplage plus grand que  $(k_e^2)_{crit}$ , ce qui laisse croire qu'un compromis coût/performance peut être obtenu dans cette plage de conception. L'augmentation du couplage par l'usage de couches piézoélectriques plus épaisses permet également d'augmenter l'impédance et donc la tension en sortie. Les tendances observées pour la densité de puissance  $P_p$  ressemblent grossièrement à celles obtenues pour la puissance spécifique  $P_M$ , mais la valeur de  $k_e^2$  optimale semble légèrement décalée par rapport à la valeur critique. Cet écart s'explique sans doute par la différence des densités des matériaux qui composent la masse et la poutre, ainsi que par l'influence de la géométrie de la masse dans le calcul de cette FDM.

Il faut également noter que les dispositifs produits par cette approche pourraient théoriquement produire plus de puissance que la spécification de 0.1 mW exigée. En effet, un ajustement de la charge permettrait de réduire l'amortissement total du système et de s'approcher de la condition

optimale  $\zeta_{el} = \zeta_m$ , mais cette augmentation de la puissance s'obtiendrait alors au détriment de la contrainte induite qui dépasserait la spécification maximale préalablement fixée. Il faudrait également que la fréquence de la source d'accélération suive la nouvelle fréquence de résonance associée à cet ajustement.

## 5.7 Mise à l'échelle et limite de puissance pour les MEMS

L'approche de conception a permis de considérer tous les aspects du problème afin d'obtenir la géométrie adéquate d'un résonateur piézoélectrique qui génère une puissance visée grâce à une source d'accélération donnée. Les résultats ont d'ailleurs démontré que l'amplitude et la fréquence de l'accélération ont un impact significatif sur la géométrie, mais l'effet de la puissance visée sur les dimensions n'a pas encore été discuté. Cette section permettra de voir l'importance de ce paramètre, car il permet en quelque sorte d'effectuer une mise à l'échelle des dispositifs. La méthode de dimensionnement peut alors être utilisée pour déterminer la limite de cette technologie à l'échelle des MEMS. Des abaques permettant de cibler les dimensions des dispositifs à partir de la puissance visée et de la source de vibration utilisée sont donc présentés aux figures 5.4 et 5.5. La figure 5.4 illustre tout d'abord comment la longueur et l'épaisseur du substrat varient avec la puissance visée et la fréquence de résonance, tandis que la figure 5.5 illustre ces tendances pour la masse ajoutée au bout de la poutre. Une amplitude d'accélération de 0.1 G et les propriétés du PZT-4 (disponible au tableau 5.3) ont été utilisées pour tracer ces abaques.

Par exemple, en fixant la limite sur l'épaisseur du substrat à 1 mm (pour une épaisseur du film piézoélectrique de 28.5  $\mu\text{m}$ ), celle sur la longueur à 1 cm et celle sur la masse à 1 g (ce qui correspond à une masse de tungstène d'environ 50  $\text{mm}^3$ ), il est possible de conclure qu'il est tout à fait possible de réaliser un dispositif MEMS qui fournirait une puissance de l'ordre de 1 à peut-être même 10  $\mu\text{W}$  à partir d'une accélération de 0.1 G dans une plage de 150 Hz à 1.5 kHz. Par contre, une puissance de l'ordre du mW semble difficilement accessible, car la plupart des dimensions requises sont toutes trop grandes. Même avec des facteurs de qualité ou des amplitudes d'accélération très élevés, la contrainte induite nécessiterait une poutre très longue, au-delà de l'ordre du centimètre. Finalement, la figure 5.6 permet d'observer l'ordre de grandeur des tensions et des courants associés à chaque niveau de puissance visée.

Dans ce cas spécifique, atteindre des tensions de l'ordre du V semble possible, mais il faudrait viser un niveau de couplage supérieur à la valeur critique. Par la suite, il faudrait soit utiliser une masse plus grande et ainsi sacrifier la puissance spécifique (tel que proposé à la section 5.6.5) ou conserver la même masse et privilégier une opération qui tend vers le circuit ouvert.

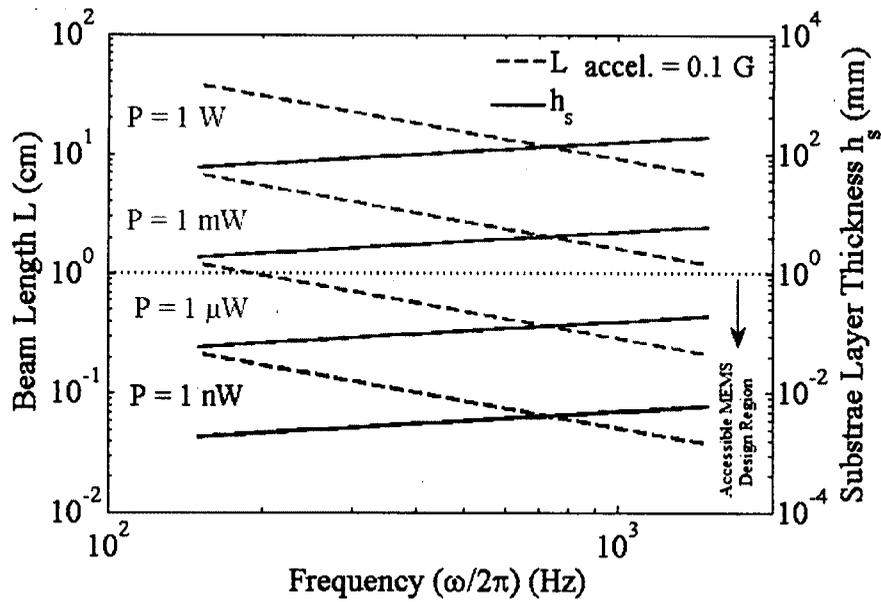


Figure 5.4 Mise à l'échelle de la longueur  $L$  et de l'épaisseur  $h_s$  en fonction de la puissance  $P$  visée et de la fréquence.

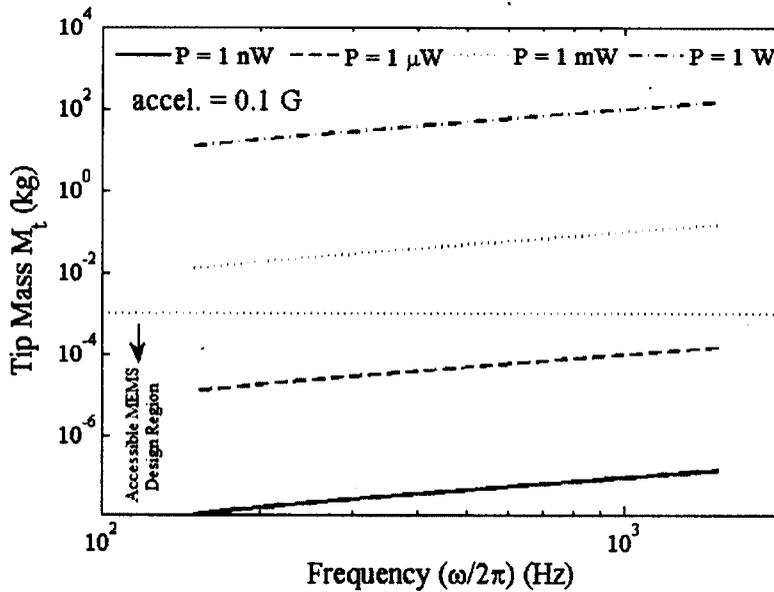


Figure 5.5 Mise à l'échelle de la masse au bout  $M_t$  en fonction de la puissance  $P$  visée et de la fréquence.

## 5.8 Résumé et conclusion à propos du dimensionnement

Au début de ce chapitre, l'effet de la variation du volume de la poutre a été décrit. Il en ressort premièrement que la puissance est grossièrement proportionnelle au volume, ce qui signifie évi-

demment que la taille des technologies MEMS limite les puissances accessibles. Il est alors important d'identifier cette limite et les moyens qui peuvent être utilisés pour tenter de s'en approcher. L'analyse effectuée démontre de plus qu'il est préférable d'employer des poutres courtes munies d'une grosse masse pour maximiser la contrainte et donc la puissance produite à une fréquence donnée. Par contre, la résistance en flexion des matériaux est ce qui impose la limite pratique sur la longueur minimale de la poutre. Devant ce constat, une procédure de conception qui prend en compte de toutes les spécifications importantes (puissance visée, source de vibration disponible, correspondance de la fréquence de résonance, niveau de contrainte maximum) a été proposée. Celle-ci fournit toutes les dimensions de la poutre dans une région quasi optimale de l'espace de conception.

La procédure permet d'identifier les paramètres qui affectent chacune des dimensions du système. Évidemment, l'objectif de puissance recherchée et la source de vibrations à exploiter ont un impact significatif sur les dimensions, ce qui signifie qu'il est très difficile de fournir des recommandations spécifiques sans avoir préalablement choisi une application précise. Par contre, il est intéressant de constater que l'épaisseur totale de la poutre n'est pas particulièrement affectée par le niveau d'amortissement du système. Celui-ci affecte plutôt la longueur de la poutre. L'accélération est aussi limitée par le niveau de contrainte, donc par le facteur de qualité  $Q$  et le facteur de sécurité  $FS$ . La fréquence a aussi un effet sur cette limite, car son augmentation entraîne une diminution du déplacement au bout de la poutre. La poutre doit alors être plus épaisse, très courte et munie d'une grosse masse à son bout pour compenser.

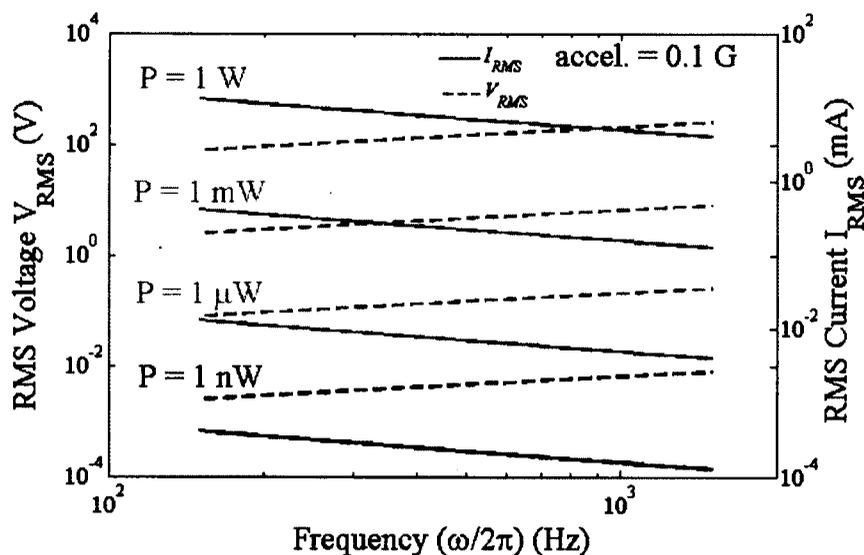


Figure 5.6 Variation de la tension  $V_{RMS}$  et du courant  $I_{RMS}$  en fonction de la puissance  $P$  visée et de la fréquence.

Par la suite, trois figures de mérite ont été définies afin de pouvoir comparer les performances des divers dispositifs fournis par la méthode de dimensionnement. La puissance surfacique  $P_S$  normalise la puissance par l'accélération au carré et la surface de la poutre. Elle permet d'obtenir une indication du coût. La puissance spécifique  $P_M$  est la seconde figure introduite et elle normalise la puissance par l'accélération au carré et la masse du système. Elle permet d'évaluer les performances du système par rapport à sa taille. La dernière FDM est la densité de puissance  $P_p$  et elle représente le rapport de la puissance en sortie sur le volume balayé pour la poutre et sa masse. Il s'agit d'une autre FDM de performance.

L'algorithme de conception a ensuite été utilisé et les résultats obtenus à l'aide de celui-ci confirment les tendances prévues à la section 5.4. Alors que la puissance surfacique  $P_S$  diminue beaucoup avec le facteur de qualité  $Q$ , car un faible niveau d'amortissement génère des poutres longues et avec une faible masse ajoutée, la puissance spécifique  $P_M$  suit une tendance opposée. Étonnamment, la densité de puissance  $P_p$  ne semble pas affectée par ce paramètre, ce qui laisse croire que l'augmentation de la taille de la masse d'un système ayant un faible  $Q$  compense en bonne partie pour la diminution du déplacement du bout de la poutre. D'autres analyses ont ensuite démontré que la source vibratoire utilisée affecte significativement chacune des FDM de différentes façons. Il est alors très important de considérer ceci lorsque l'on désire comparer des dispositifs opérants dans des conditions différentes. La densité de puissance  $P_p$  est sensible par rapport à  $\ddot{w}_b$ .  $P_S$  est sensible à la fréquence  $\omega$  et à l'amplitude  $\ddot{w}_b$ , tandis que  $P_M$  est surtout sensible à la fréquence. Pour comparer de manière convenable des dispositifs opérant à des fréquences différentes, la puissance spécifique  $P_M$  doit être multipliée par  $\omega$ . À la suite de cette correction, les dispositifs conçus par la méthode ont été comparés à ceux répertoriés dans la littérature. Ils se comparent favorablement aux meilleurs dispositifs fabriqués à ce jour, ce qui tend à confirmer la validité de la méthode proposée.

Une modification de la méthode a également été faite afin de savoir s'il était intéressant de limiter le déplacement du bout d'une poutre faiblement amortie mécaniquement pour ainsi réduire sa longueur. La poutre doit alors avoir une plus grosse masse déposée à son extrémité. Pour ajuster le déplacement, le facteur de couplage effectif  $k_e^2$  a été modifié pour jouer sur l'amortissement électrique du système. L'analyse effectuée révèle qu'il s'agit d'une approche intéressante. Elle démontre entre autres que l'optimum de la puissance spécifique se produit bien au couplage critique et que la puissance surfacique augmente toujours avec  $k_e^2$ . Au-delà de  $(k_e^2)_{crit}$ , il serait cependant possible d'atteindre un compromis intéressant entre la puissance surfacique et la puissance spécifique. Autrement dit, il est toujours intéressant de privilégier des matériaux avec un faible niveau d'amortissement mécanique, quitte à limiter le déplacement du système pour ne pas dépasser sa contrainte limite. En ce sens, la diminution de l'amortissement mécanique devrait

permettre de réduire la masse requise, ce qui est essentiel dans l'optique de la miniaturisation de ce type de système.

La section 5.7 a finalement permis de démontrer comment la méthodologie proposée peut être employée pour effectuer une mise à l'échelle selon le niveau de puissance recherchée et l'accélération disponible dans l'environnement. Cet exercice permet alors de cibler très facilement l'ordre des dimensions requises pour fabriquer un résonateur piézoélectrique adéquat et d'identifier si cette application peut-être réalisée à l'échelle MEMS. Selon les résultats fournis, des puissances de l'ordre de 1 à 10  $\mu\text{W}$  seraient accessibles à partir d'une accélération de 0.1 G et dans une plage de fréquence de 150 Hz à 1.5 kHz.

Pour conclure, la méthode démontre que le contexte d'application a un impact important sur le dimensionnement des couches. Il est alors très difficile de faire le choix définitif d'un matériau et d'une méthode de fabrication sans avoir préalablement défini une application spécifique. Une fois que ce choix sera fait, la méthodologie présentée devrait permettre de guider ces décisions. Cela dit, il semble a priori très intéressant de choisir des matériaux ayant un très bon facteur de qualité afin de minimiser les pertes mécaniques. Ce choix devrait permettre d'améliorer la puissance spécifique en réduisant la taille de la masse et il semble d'ailleurs que c'est celle-ci qui imposera la limite la plus importante sur la taille du dispositif. Le critère de l'amortissement interne apparaît comme prioritaire par rapport au couplage, même si celui-ci demeure tout de même un aspect important à considérer. En effet, des gains significatifs sur les performances sont possibles dans la région de conception sous optimale. Au-dessus du seuil de couplage critique, un gain de la puissance surfacique peut être fait au détriment de la puissance spécifique.



# CHAPITRE 6

## CONCLUSION

### 6.1 Sommaire

L'objectif du présent mémoire était de proposer une méthodologie permettant de concevoir un microrésonateur piézoélectrique qui optimise l'extraction de l'énergie vibratoire. Cette méthodologie devait alors toucher à la fois au dimensionnement du dit système, à la sélection des matériaux qui le composent et au choix d'une approche de microfabrication appropriée. Pour ce faire, un modèle analytique continu d'une poutre en porte-à-faux piézoélectrique soumise à une excitation inertielle a été développé au chapitre 2. Basé sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli et la méthode de Rayleigh-Ritz, puis développé à partir du principe d'Hamilton, le modèle programmé sous Matlab® permet de calculer les réponses en fréquence d'un dispositif piézoélectrique soumis à une accélération transversale par la base. L'effet du couplage piézoélectrique sur la dynamique du système est d'ailleurs perceptible dans les réponses du déplacement, de la tension, du courant et de la puissance. Afin d'explicitier cette contribution et de pouvoir utiliser le modèle pour la conception, ce dernier a été réduit autour d'un seul mode propre. Pour conserver la précision du modèle complet, des paramètres équivalents tels que les raideurs mécanique et électrique, les facteurs d'amortissement mécanique et électrique, la masse équivalente et le facteur de correction sur la force d'excitation ont également été introduits.

Une fois tous les paramètres adimensionnés, l'analyse de la dynamique couplée faite au chapitre 3 a permis de saisir comment l'effet piézoélectrique peut agir simultanément comme une raideur et un amortissement électrique. Ceux-ci varient avec la fréquence d'excitation, la charge électrique qui est branchée au système et son facteur de couplage effectif. Des équations explicites permettant d'évaluer le comportement du système à la fréquence de résonance ont ensuite été formulées et la suite de l'étude s'est concentrée sur ce mode d'opération. Ces formules confirment qu'une puissance optimale est générée lorsque l'amortissement électrique du système est équivalent à son amortissement mécanique. Puisque l'amortissement électrique est intimement relié au facteur de couplage effectif, le besoin en couplage est alors directement relié au niveau d'amortissement mécanique présent dans le système. À partir d'un niveau de couplage défini comme le « couplage critique », il est possible de suramortir le résonateur, ce qui entraîne aussi une chute de la puissance produite. Pour éviter ce phénomène, la charge électrique doit être ajustée. Ce niveau de couplage peut être grossièrement évalué par l'expression  $(k_e^2)_{crit} = 4\zeta_m$ .

En d'autres termes, la puissance générée par une conception sous critique est limitée par le couplage ainsi que l'amortissement mécanique, tandis qu'une conception optimal n'est limité que par son amortissement mécanique intrinsèque. Il apparait alors important de prioriser des matériaux avec un bon facteur de qualité, car ils permettent de réduire le besoin du couplage piézoélectrique tout en augmentant la puissance nette produite avec une masse donnée. Une étude préliminaire des matériaux basée sur le critère du couplage critique a donc été effectuée et elle a permis de démontrer que l'AIN est un matériau potentiellement intéressant pour ce type de système malgré son faible facteur de couplage  $k_{31}$ .

Par contre, cette étude préliminaire ne prenait pas en compte de l'impact de la géométrie sur le facteur de couplage effectif. Il semblait donc pertinent de mener une autre étude qui permettrait d'isoler et quantifier l'impact de cet aspect. Présentée au chapitre 4, celle-ci propose tout d'abord une méthodologie permettant de séparer la contribution des propriétés piézoélectriques de la géométrie. Exprimé sous la forme d'un facteur de forme, l'effet de l'épaisseur des couches et de la configuration utilisée peut être évalué à partir du rapport des modules d'élasticité entre le matériau piézoélectrique et son substrat, la fraction de volume piézoélectrique qui compose la poutre et la déformation normalisée anticipée de la structure. L'analyse a d'abord révélée que des facteurs de forme optimaux sont atteints grâce à un compromis entre la quantité de charges produites et la taille de la capacité de la couche déposée. Non seulement faut-il éviter l'annulation des charges, mais il peut aussi être préférable de réduire le volume du matériau piézoélectrique afin de générer les charges à une tension plus élevée. Dans le cas de l'unimorphe, les facteurs de forme optimaux varient de 0.26 à 0.45, tandis que le bimorphe permet d'atteindre des facteurs de 0.61 à 0.72. La méthodologie a aussi confirmé que l'usage d'une poutre chanfreinée ou d'une couverture partielle de la surface de la poutre par l'électrode permet d'obtenir des gains supplémentaires sur le couplage effectif (ceux-ci peuvent s'élever jusqu'à 40% par rapport à la valeur pour une poutre droite complètement recouverte). Grâce à cette analyse, il a été possible de réaliser que la combinaison d'un matériau ayant un bon facteur de qualité et un niveau de couplage modéré pourrait être déposée en couche relativement mince et fournir de bonnes performances. L'application numérique faite à partir du PZT-4 a effectivement démontré qu'en augmentant le facteur de qualité, la puissance maximale atteint rapidement un plateau pour des fractions d'épaisseur piézoélectrique qui sont souvent bien inférieures à 10% de l'épaisseur totale de la poutre. Bref, les gains de performances semblent beaucoup moins importants au-delà du couplage critique, ce qui démontre l'utilité du critère comme outil de conception.

Finalement, le chapitre 5 débute par une analyse qui établit l'influence des paramètres comme la masse, la longueur et la largeur de la poutre. Cette étude a une fois de plus confirmé que la puissance est proportionnelle au volume du dispositif. Par ailleurs, l'analyse a aussi permis de

conclure qu'il est préférable de maximiser la masse et de réduire la longueur de la poutre pour maximiser sa puissance pour une amplitude de vibration à une fréquence donnée. Ce résultat provient du fait que cette configuration permet de maximiser la contrainte induite à l'encastrement de la poutre. Cependant, le dispositif doit être en mesure de résister à ces sollicitations et pour une durée de vie prolongée. Une méthode de dimensionnement a donc été formulée afin de pouvoir poser les limites théoriques des puissances accessibles pour les résonateurs piézoélectriques à l'échelle des MEMS tout en considérant l'aspect de leur fiabilité à long terme. À partir d'un objectif de puissance visé, d'une source d'accélération connue, d'un facteur de sécurité sur la contrainte, d'un rapport d'aspect surfacique et d'un choix préalable de matériaux, la méthodologie permet de dimensionner un résonateur piézoélectrique qui se situe dans une région optimale de l'espace de conception. Celle-ci a aussi permis d'énoncer des tendances claires pour chaque dimension, ainsi qu'une limite sur l'accélération en entrée. Celle-ci est fortement dépendante de la fréquence, du facteur de qualité et du facteur de sécurité sélectionnés.

Après avoir introduit trois figures de mérite pertinentes (la puissance surfacique, la puissance spécifique et la densité de puissance), l'algorithme de conception a été utilisé pour dimensionner des résonateurs composés de différents matériaux et observer leur effet sur les FDM proposées. Une fois de plus, le niveau d'amortissement mécanique s'est révélé être le facteur qui affecte la plupart des résultats, tandis que le niveau de couplage du matériau a un impact secondaire. Un faible niveau amortissement produit des poutres longues avec une petite masse ajoutée, tandis que les matériaux qui introduisent beaucoup de pertes mécaniques génèrent des poutres courtes avec une très grosse masse sismique. De ce fait, la puissance surfacique tend à augmenter avec l'amortissement, mais la puissance spécifique suit la tendance inverse. Les FDM ont aussi démontré des sensibilités par rapport à la source d'accélération utilisée, ce qui met en évidence l'importance de considérer cette donnée dans toute étude comparative des performances. Le niveau de couplage a également été ajusté, ce qui a permis de valider que le critère du couplage permet d'optimiser la puissance spécifique. Pour clore ce mémoire, la portée de la méthodologie proposée a été démontrée en effectuant une mise à l'échelle à partir de la puissance visée pour une excitation donnée. Il en ressort tout d'abord que la géométrie requise est très intimement liée à l'application visée. Il faut alors préciser celle-ci avant de formuler des recommandations spécifiques. Cela dit, il semble réaliste de viser des puissances de l'ordre d'un à quelques dizaines de  $\mu\text{W}$  à partir d'une source de 0.1 G pour des dispositifs fabriqués à l'échelle MEMS. L'amélioration du facteur de qualité des matériaux et des structures résonantes devrait permettre d'atteindre ces limites de puissances. Même si un faible amortissement est relié à des longueurs importantes (pour réduire les contraintes induites), quelques ajustements de la méthodologie ont permis de démontrer que certaines pistes de solution intéressantes sont offertes (limiter le dépla-

cement et augmenter la masse, par exemple). Le but de minimiser l'amortissement mécanique devrait alors guider le choix des matériaux et du procédé de fabrication.

## 6.2 Contributions

Ce projet de maîtrise a permis de préciser plusieurs éléments qui étaient auparavant flous par rapport à la génération de puissance électrique à partir des résonateurs piézoélectriques.

Tout d'abord, la modélisation de l'effet piézoélectrique pour des dispositifs sollicités en flexion et en mode 31 a été raffinée. Alors que la plupart des auteurs supposent que la tension varie de manière linéaire selon l'épaisseur de la couche, le modèle développé démontre que cette simplification viole les lois fondamentales de l'électromagnétisme et que la tension varie plutôt selon un profil quadratique. Une nouvelle forme de la fonction de potentiel électrique dans la couche piézoélectrique a été proposée et validée numériquement. Il a été démontré que même si l'influence de cette composante est mineure pour des matériaux et des géométries à faible couplage, celle-ci peut être significative pour des systèmes avec un fort couplage piézoélectrique. Cette composante agit alors sur le module de raideur mécanique de flexion.

De plus, de nouvelles équations adimensionnelles permettant de représenter la dynamique des systèmes piézoélectriques ont été proposées. Celles-ci font intervenir les principes de la raideur et de l'amortissement électrique pour expliciter la dynamique couplée du système. Ces composantes dépendent de la charge, de la géométrie et des propriétés piézoélectriques et elles agissent simultanément. Cette formulation a par ailleurs permis d'éliminer toutes ambiguïtés possibles quant aux conditions qui permettent d'optimiser la puissance produite. Elle permet de confirmer les conclusions tirées par Williams et Yates : l'amortissement électrique doit être égal à l'amortissement mécanique et les pertes mécaniques sont la principale limite sur la puissance accessible. La formulation ne contient aucune simplification et elle incorpore aussi plusieurs coefficients de correction. Elle peut alors être utilisée pour évaluer précisément la réponse d'une vaste gamme de géométries de résonateurs piézoélectriques à partir d'un modèle 1-D.

Troisièmement, un nouveau critère pour la sélection des matériaux et pour la conception des résonateurs piézoélectriques a été défini. Le couplage critique indique le niveau de couplage requis pour être en mesure de remplir la condition optimale d'égalisation des deux types d'amortissements. D'une part, le critère a permis de prouver que des matériaux ayant un facteur de qualité élevé, mais qui ont un couplage faible ou modéré peuvent être adéquats pour l'extraction de l'énergie vibratoire par résonance. Jumelé à une méthodologie permettant d'isoler l'influence de la géométrie (pour l'optimiser), le critère a d'autre part permis de démontrer la compatibilité

d'une approche qui consiste à minimiser l'amortissement mécanique pour ainsi pouvoir utiliser de minces couches de matériaux piézoélectriques.

Finalement, une méthodologie de conception qui optimise la géométrie en fonction d'un objectif de puissance, d'une source de vibration connue et d'une spécification sur la contrainte a été proposée. Celle-ci a permis de mettre dans un contexte réaliste le dimensionnement des résonateurs piézoélectriques et d'identifier les limites des puissances accessibles pour les MEMS. Elle met en évidence que l'amélioration du facteur de qualité des matériaux et des structures résonantes est un défi qui a priorité sur le couplage afin d'améliorer les performances des MEMS, mais que cette quête n'est pas sans conséquence sur le dimensionnement.

### 6.3 Travaux futurs

Les travaux présentés dans ce mémoire ont permis de lever le voile sur l'influence de la géométrie sur le couplage et son interaction avec la puissance et l'amortissement mécanique. Il a aussi été vu que la charge électrique a une influence majeure sur le comportement et les performances du système. Par contre, le modèle présenté ne s'est concentré que sur l'effet d'une simple charge résistive. En réalité, un système de transformation d'énergie vibratoire doit être doté d'un circuit de gestion de puissance qui est beaucoup plus complexe et il serait donc pertinent d'inclure l'influence de ce type de circuit dans un modèle plus complet.

Du point de vue mécanique, le modèle pourrait évidemment être amélioré de plusieurs manières. Par exemple, l'inertie de rotation de la masse déposée au bout de la poutre n'a pas été considérée et cette omission peut entraîner une surévaluation de la fréquence naturelle du système si la masse ajoutée est justement très grande par rapport à la taille de la poutre. Les résultats généralement obtenus (des poutres courtes munies d'une grosse masse) démontrent que cette distribution de la masse est typique pour ce type de système et il semble alors important d'ajouter cet effet au modèle. Cette configuration est également associée à des contraintes de cisaillement importantes. Dans ce cas, l'utilisation des hypothèses de Timoshenko plutôt que celles d'Euler-Bernoulli pourrait aussi fournir une meilleure précision au modèle. D'autres phénomènes tels que l'effet des pertes diélectriques et des non-linéarités reliées aux grandes déformations à la résonance pourraient aussi être considérés.

Par ailleurs, l'étude comparative des matériaux pourrait être améliorée grâce à de meilleures caractérisations des divers matériaux. Celles-ci insistent souvent sur la mesure des propriétés piézoélectriques, mais l'évaluation de leur facteur de qualité et de leur résistance ultime (avec ou sans polarisation) est souvent manquante. Pourtant, ce mémoire démontre qu'une meilleure

connaissance de ces propriétés est importante dans l'optique d'optimiser la conception des microrésonateurs piézoélectriques.

Dans une perspective à long terme, ce projet vise à développer un système performant de transformation de l'énergie vibratoire à l'échelle MEMS. Ce système devra donc intégrer un circuit de gestion de l'énergie, mais aussi s'attaquer à plusieurs des autres problématiques liées au principe de fonctionnement des résonateurs. L'une d'elles est la très forte dépendance fréquentielle de ce type de système, car il est en effet très rare de trouver des vibrations qui conservent une fréquence constante dans le temps dans certains environnements (notamment les automobiles). L'intégration d'un mécanisme d'adaptation fréquentielle ou de fonctionnement large bande devra être considérée dans ce futur dispositif.

À plus court terme, la prochaine étape du projet devrait se concentrer à cibler une application précise pour pouvoir progresser dans la fabrication d'un dispositif. En effet, ce mémoire a clairement démontré qu'il y a une très forte dépendance entre la géométrie requise et le contexte d'application visé. Ce choix doit alors être fait afin de pouvoir restreindre les géométries possibles et ainsi sélectionner les procédés de fabrication adéquats. Puisque deux des priorités devraient être la réduction de l'amortissement mécanique et des coûts de fabrication, une approche d'encapsulation par tranche et sous vide (*vacuum wafer-level packaging*) devrait être développée.

## ANNEXE A

### ÉQUATIONS PIÉZOÉLECTRIQUES RÉDUITES

Lorsque la structure piézoélectrique modélisée est en état de contrainte plane (comme c'est le cas pour une poutre mince), il n'y a que la contrainte axiale  $T_1$  qui est non nulle. De plus, si l'électrode recouvre une surface perpendiculaire à l'axe de polarisation (direction 3), les équations constitutives de la piézoélectricité peuvent se simplifier comme à l'équation A.1.

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Afin de faire intervenir l'élasticité plutôt que la souplesse, l'équation A.1 peut être remaniée sous cette forme.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p & d_{31}Y_p \\ d_{31}Y_p & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

où  $Y_p$  est l'élasticité du matériau piézoélectrique dans l'axe de contrainte et  $\epsilon_{33}^S$  est la permittivité sous déformation constante, tous deux pour la forme réduite en contrainte plane.

$$Y_p = (s_{11}^E)^{-1} \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^T - d_{31}^2 Y_p \quad (\text{A.4})$$

De plus, lorsque l'analyse du comportement piézoélectrique est faite de manière quasi statique, le facteur de couplage électromécanique  $k_{31}$  est donné par l'équation A.5.

$$k_{31} = \sqrt{\frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}} \quad (\text{A.5})$$



## ANNEXE B

### DÉVELOPPEMENTS POUR LE BIMORPHE

Les équations mécaniques du bimorphe s'obtiennent de la même manière que pour l'unimorphe, mais divergent légèrement du fait que la configuration est symétrique et comporte deux couches piézoélectriques. Les développements analogues à ceux présentés aux sections 2.2 à 2.4, mais appliqués au bimorphe, sont présentés dans cette annexe.

#### B.1 Équations mécaniques pour le bimorphe

##### B.1.1 Évaluation de la masse linéique

Le paramètre de masse linéique est fourni par l'équation B.1.

$$\begin{aligned} m &= \int_{-(h_s/2+h_p)}^{(h_s/2+h_p)} \int_{-b/2}^{b/2} \rho dz dy \\ &= b [\rho_s h_s + 2\rho_p h_p] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

##### B.1.2 Évaluation du moment de flexion interne

Tout d'abord, les équations pour la contrainte sont

$$\sigma_x(x, y, t) = \begin{cases} -Y_s \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} y & \text{si } -h_s/2 < y < h_s/2 \\ -Y_p \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} y - Y_p d_{31} E_{1y}(x, y, t) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] & \text{si } -(h_s/2 + h_p) \leq y \leq -h_s/2 \\ -Y_p \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} y - Y_p d'_{31} E_{2y}(x, y, t) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] & \text{si } h_s/2 \leq y \leq (h_s/2 + h_p) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Le moment de flexion interne peut donc être évalué par

$$\begin{aligned} M_z(x, t) &= -b \int_{-(h_s/2+h_p)}^{(h_s/2+h_p)} \sigma_x(x, y, t) y dy \\ &= YI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + b Y_p [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \left( d_{31} \int_{-(h_s/2+h_p)}^{-h_s/2} E_{1y}(x, y, t) y dy + \right. \\ &\quad \left. d'_{31} \int_{h_s/2}^{(h_s/2+h_p)} E_{2y}(x, y, t) y dy \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où  $YI$  est la rigidité de flexion, donnée par

$$YI = b \left[ \frac{Y_s h_s^3}{12} + Y_p \left( \frac{2}{3} \left( \frac{h_s}{2} + h_p \right)^3 - \frac{h_s^3}{12} \right) \right] \quad (\text{B.4})$$

Dans le cas du bimorphe, la polarisation des couches est très importante afin d'éviter l'annulation des charges générées. Pour une connexion en parallèle, la polarisation est la même dans les deux couches ( $d'_{31} = d_{31}$ ). À l'opposée, la polarisation est inversée pour la connexion en série. Ceci se traduit alors par un changement de signe de la constante piézoélectrique  $d_{31}$  dans une des deux couches, donc  $d'_{31} = -d_{31}$ .

## B.2 Équations de couplage pour le bimorphe

Dans le cas du bimorphe, les équations du champ de potentiel pour chaque couche s'expriment (voir l'annexe C pour l'origine de la composante quadratique)

$$\begin{aligned} V_1(x, y, t) &= -\frac{d_{31} Y_p}{2\epsilon_{33}^s} \left( y^2 + (h_p + h_s)y + \frac{h_s}{2} \left( \frac{h_s}{2} + h_p \right) \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \left( \frac{y + h_s/2}{h_p} \right) v_1(t) \\ V_2(x, y, t) &= -\frac{d'_{31} Y_p}{2\epsilon_{33}^s} \left( y^2 - (h_p + h_s)y + \frac{h_s}{2} \left( \frac{h_s}{2} + h_p \right) \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \left( \frac{y - h_s/2}{h_p} \right) v_2(t) \end{aligned}$$

En plus des développements pour obtenir l'équation des circuits pour le bimorphe, il a été démontré à la section 2.4 que la composante quadratique n'a aucune influence sur l'équation électrique obtenue. Par contre, elle influence bel et bien la valeur du moment de flexion interne. Il faut se rappeler que pour le cas en série, les champs électriques instantanés sont du même signe dans les deux couches, mais la polarité est inversée. Pour le branchement en parallèle, les champs instantanés dans les deux couches sont de signes opposés, mais la polarité est la même. Dans les deux cas, les contraintes sont de signes opposés, ce qui fait que l'expression du moment de flexion est donnée par

$$\begin{aligned} M_z(x, t) &= -b \int_{-(h_s/2+h_p)}^{(h_s/2+h_p)} \sigma_x(x, y, t) y dy \\ &= YI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + b Y_p [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \left( \int_{-(h_s/2+h_p)}^{-h_s/2} d_{31} E_{1y}(x, y, t) y dy + \right. \\ &\quad \left. \int_{h_s/2}^{(h_s/2+h_p)} d'_{31} E_{2y}(x, y, t) y dy \right) \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

L'intégration des champs électriques sur l'épaisseur de chaque couche est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\int_{-(h_s/2+h_p)}^{-h_s/2} E_{1y}(x,y,t)ydy &= \int_{-(h_s/2+h_p)}^{-h_s/2} \left( \frac{d_{31}Y_p}{2\epsilon_{33}^S} (2y + (h_p + h_s)) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v_1(t)}{h_p} \right) ydy \\
&= -\frac{d_{31}Y_p}{\epsilon_{33}^S} \frac{h_p^3}{12} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{(h_p + h_s)}{2} v_1(t) \\
\int_{h_s/2}^{(h_s/2+h_p)} E_{2y}(x,y,t)ydy &= \frac{d'_{31}Y_p}{\epsilon_{33}^S} \frac{h_p^3}{12} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{(h_p + h_s)}{2} v_2(t)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

L'équation générale du moment de flexion peut donc se retranscrire

$$\begin{aligned}
M_z(x,t) &= \left( YI + \frac{Y_p^2 (d_{31}^2 + d_{31}'^2) b h_p^3}{\epsilon_{33}^S 12} [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \\
&\quad bY_p d_{31} \frac{(h_p + h_s)}{2} (-v_1(t) - v_2(t)) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \\
&= \left( YI + 2Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \\
&\quad bY_p d_{31} \frac{(h_p + h_s)}{2} (v_1(t) + v_2(t)) [U(x-x_1) - U(x-x_2)]
\end{aligned} \tag{B.7}$$

En série,

$$\begin{aligned}
M_z(x,t) &= \left( YI + 2Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \\
&\quad bY_p d_{31} \frac{(h_s + h_p)}{2} v^s(t) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \\
&= (YI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \theta^s v^s(t) [U(x-x_1) - U(x-x_2)]
\end{aligned} \tag{B.8}$$

et en parallèle,

$$\begin{aligned}
M_z(x,t) &= \left( YI + 2Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \\
&\quad bY_p d_{31} (h_s + h_p) v^p(t) [U(x-x_1) - U(x-x_2)] \\
&= (YI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \theta^p v^p(t) [U(x-x_1) - U(x-x_2)]
\end{aligned} \tag{B.9}$$

où  $(YI)_{eq}$  est la raideur en flexion équivalente, tenant compte de l'effet du champ quadratique.

$$(YI)_{eq} = YI + 2Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \quad (\text{B.10})$$

Par analogie avec ce développement, il serait ensuite très facile de déduire les équations pour des géométries ayant davantage de couches.

## ANNEXE C

# DÉFINIR UNE FONCTION DE POTENTIEL COMPATIBLE

La section 2.3.1 a brièvement soulevé la violation de la loi de Maxwell-Gauss provenant de l'hypothèse du champ électrique constant dans la direction de l'épaisseur de la couche piézoélectrique. Ce chapitre présente le détail de la démarche utilisée afin de déterminer un champ de potentiel compatible avec cette loi fondamentale.

### C.1 Visualisation à l'aide des éléments finis

Une analyse par éléments finis faite à l'aide du logiciel Comsol 3.5a® a permis de visualiser la forme du champ de potentiel dans la couche piézoélectrique. Les figures C.1 et C.2 présentent la forme du champ de potentiel pour les deux premiers modes de vibration, tandis que les figures C.3 et C.4 illustrent la forme de la contrainte normale. Finalement, les figures C.5 et C.6 tracent la contrainte de cisaillement pour ces mêmes modes.

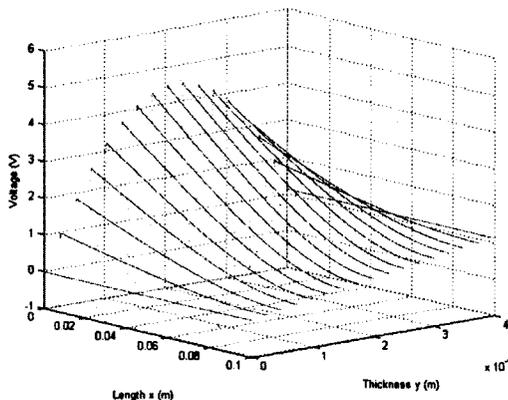


Figure C.1 Forme du champ de potentiel dans la couche piézoélectrique pour le premier mode de vibration.

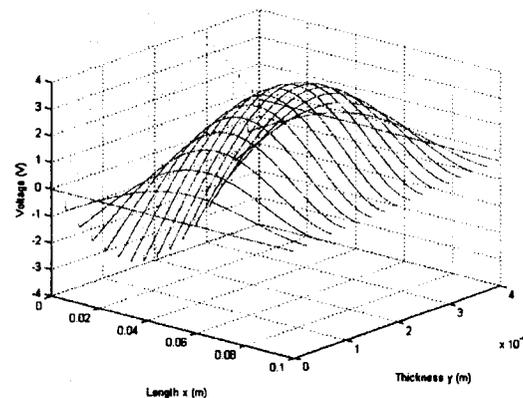


Figure C.2 Forme du champ de potentiel dans la couche piézoélectrique pour le second mode de vibration.

À la suite de ces observations, il semblait pertinent d'obtenir une solution analytique qui pourrait représenter adéquatement la tension générée à l'intérieur du matériau piézoélectrique pour finalement identifier l'impact de ce comportement sur la dynamique du système.

### C.2 Forme générale et hypothèses

Pour débiter, il est supposé que la fonction de potentiel pourrait s'écrire sous la forme générale donnée par l'équation C.1.

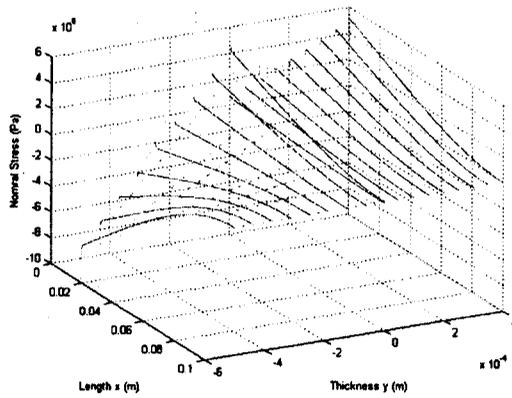


Figure C.3 Forme de la contrainte normale dans la poutre pour le premier mode de vibration.

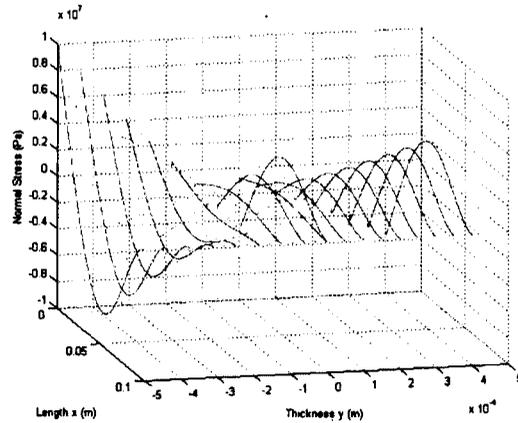


Figure C.4 Forme de la contrainte normale dans la poutre pour le second mode de vibration.

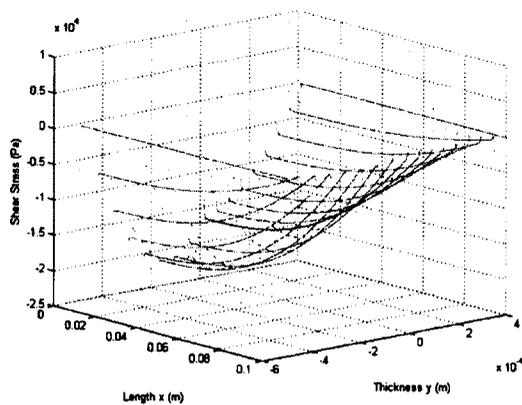


Figure C.5 Forme de la contrainte de cisaillement dans la poutre pour le premier mode de vibration.

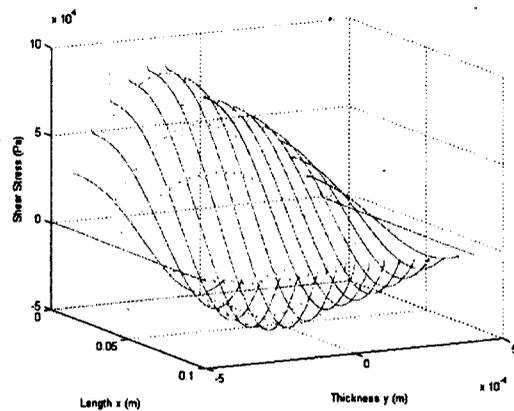


Figure C.6 Forme de la contrainte de cisaillement dans la poutre pour le second mode de vibration.

$$V(x, y, t) = \hat{V}(x, y)v(t) = [\Xi(x)\Pi(y) + \beta(x) + \kappa(y)] v(t) \quad (\text{C.1})$$

où  $\hat{V}(x, y)$  est la composante spatiale normalisée par rapport à la tension aux bornes  $v(t)$  et  $\Xi(x)$ ,  $\Pi(y)$ ,  $\beta(x)$  et  $\kappa(y)$  sont les différentes composantes de  $\hat{V}$ . Les conditions aux limites permettent déjà de simplifier cette équation. Par exemple, aux électrodes ( $y = h_b$  et  $y = h_c$ ) la tension demeure constante sur la longueur et autrement dit  $\frac{\partial \hat{V}(x, h_b)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{V}(x, h_c)}{\partial x} = 0$ .  $\beta(x)$  ne peut donc qu'être nulle et  $\Pi(h_b) = \Pi(h_c) = 0$ . On pourrait donc penser que  $\Pi(y)$  est une fonction sinusoïdale ou un polynôme de degré égal ou supérieur à deux. De plus, selon l'équation 2.25, la condition 2 énoncée à la section 2.3.1 et les résultats de l'analyse par éléments finis,  $\Xi(x) \sim \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$ .

Il est alors logique de réécrire  $\hat{V}$  et ses dérivées secondes comme aux équations C.2, C.3 et C.4.

$$\hat{V}(x, y) = \Xi(x)\Pi(y) + \kappa(y) + \beta_0 \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{V}(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Xi(x)}{\partial x^2} \Pi(y) \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{V}(x, y)}{\partial y^2} = \Xi(x) \frac{\partial^2 \Pi(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa(y)}{\partial y^2} \quad (\text{C.4})$$

L'analyse des équations 2.25 et C.4 révèle également que  $\kappa(y)$  doit être un polynôme de  $y$  du premier degré afin de n'avoir aucun terme uniquement dépendant de  $y$  dans l'équation de Maxwell-Gauss. Ce terme correspond alors à la composante linéaire du champ de potentiel. Les résultats de l'analyse par éléments finis semblent aussi indiquer que  $\Pi(y)$  est en fait un polynôme du deuxième degré. Une forme quadratique avait également été proposée par Tabesh et Fréchette [56]. À partir de ces suppositions et des conditions aux limites, on peut alors écrire la composante spatiale de la fonction de potentiel comme à l'équation C.5.

$$\hat{V}(x, y) = \Xi(x) [y^2 - (h_b + h_c)y + h_b h_c] + \left( \frac{y - h_b}{h_c - h_b} \right) \quad (\text{C.5})$$

Malgré cette nouvelle formulation, il y aura encore et toujours la présence d'un terme fonction de  $y$  (ici quadratique) dans l'équation C.6 de Maxwell-Gauss.

$$-\varepsilon_{11}^T \frac{\partial^2 \Xi(x)}{\partial x^2} [y^2 - (h_b + h_c)y + h_b h_c] v(t) - 2\varepsilon_{33}^S \Xi(x) v(t) = d_{31} Y_p \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{C.6})$$

Ceci permet de conclure que l'omission du cisaillement, qui est une contrainte qui varie quadratiquement selon  $y$ , mène à cette violation de l'équation de Maxwell-Gauss. Négliger le cisaillement est généralement une hypothèse acceptable pour la vibration de poutres minces sans couplage électromécanique, car l'énergie de cisaillement est très faible par rapport à l'énergie de flexion. Considérant ceci, il se peut très bien que cette violation de la loi de Maxwell-Gauss soit sans grande conséquence sur le comportement de la poutre piézoélectrique. Une analyse quasi statique du cisaillement est effectuée afin de vérifier l'impact de cette omission.

### C.3 Analyse de l'impact du cisaillement

Dans le cas du chargement statique d'une poutre, le cisaillement est estimé par une relation similaire à l'équation C.7. Cette relation est aussi utilisée pour ce problème dynamique en première approche.

$$\{\tau_{xy}(x, y, t)\}_0 = \frac{q_{xy}(x, y, t)}{b} \quad (\text{C.7})$$

où  $q_{xy}$  est le flux de cisaillement (équation C.8) de la section. Il est fonction de l'effort tranchant  $T_\tau(x, t)$  et du premier moment de la sous-section limité à la hauteur  $y$  (donné par l'équation C.9). À noter ici que l'effort tranchant est considéré comme la seule fonction dépendante du temps et de l'espace. Bref, le problème est traité selon une approche quasi statique.

$$q_{xy}(x, y, t) = \frac{T_\tau(x, t) Q_\tau(y)}{b I_p} \quad (\text{C.8})$$

$$I_p = b \int_{h_b}^{h_c} y^2 dy$$

$$= b \frac{(h_c^3 - h_b^3)}{3}$$

$$Q_\tau(y) = A' \bar{y}'$$

$$= b(h_c - y) \frac{(h_c + y)}{2}$$

$$= \frac{b(h_c^2 - y^2)}{2} \quad (\text{C.9})$$

En remplaçant les termes de l'équation C.7 par leur valeur aux équations C.8 et C.9, on obtient la formule C.10

$$\{\tau_{xy}(x, y, t)\}_0 = \frac{T_\tau(x, t)}{b} \frac{b(h_c^2 - y^2)}{2} \frac{3}{b(h_c^3 - h_b^3)}$$

$$= \frac{3(h_c^2 - y^2)}{2b(h_c^3 - h_b^3)} T_\tau(x, t) \quad (\text{C.10})$$

En tenant compte de l'effet piézoélectrique, l'équation de la contrainte de cisaillement prend alors la forme de l'équation C.11

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(x,y,t) &= \{\tau_{xy}(x,y,t)\}_0 - d_{15}G_p E_x \\
&= \frac{3(h_c^2 - y^2)}{2b(h_c^3 - h_b^3)} T_\tau(x,t) + d_{15}G_p \frac{\partial V(x,y,t)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{C.11}$$

La dérivée du cisaillement est fournie par l'équation C.12

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,t)}{\partial x} = \frac{3(h_c^2 - y^2)}{2b(h_c^3 - h_b^3)} \frac{\partial T_\tau(x,t)}{\partial x} + d_{15}G_p \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} \tag{C.12}$$

En considérant cette fois le cisaillement dans l'équation 2.25, l'équation de Maxwell-Gauss peut maintenant s'écrire sous la forme de l'équation C.13.

$$\begin{aligned}
-\epsilon_{11}^T \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial y^2} &= \\
d_{31}Y_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - d_{15} \left( \frac{3(h_c^2 - y^2)}{2b(h_c^3 - h_b^3)} \frac{\partial T_\tau(x,t)}{\partial x} + d_{15}G_p \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} \right) &= \\
d_{31}Y_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - d_{15} \frac{3(h_c^2 - y^2)}{2b(h_c^3 - h_b^3)} \frac{\partial T_\tau(x,t)}{\partial x} &= [d_{15}^2 G_p - \epsilon_{11}^T] \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial y^2} \\
&= -\epsilon_{11}^S \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Puis, en substituant la fonction de potentiel par sa valeur,

$$\begin{aligned}
d_{31}Y_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - d_{15} \frac{3(h_c^2 - y^2)}{2b(h_c^3 - h_b^3)} \frac{\partial T_\tau(x,t)}{\partial x} &= \\
-\epsilon_{11}^S \frac{\partial^2 \Xi(x)}{\partial x^2} [y^2 - (h_b + h_c)y + h_b h_c] v(t) - 2\epsilon_{33}^S \Xi(x) v(t) &=
\end{aligned} \tag{C.14}$$

L'équation C.14 semble déjà plus cohérente en vue de respecter l'équation 2.25 grâce à l'ajout du terme quadratique fonction de  $y$ . Par contre, une incohérence est encore présente et elle peut être mise en évidence en isolant tous les termes qui sont à la fois fonctions de  $x$  et de  $y$  (équation C.15).

$$-d_{15} \frac{3(h_c^2 - y^2)}{2b(h_c^3 - h_b^3)} \frac{\partial T_\tau(x,t)}{\partial x} = -\epsilon_{11}^S \frac{\partial^2 \Xi(x)}{\partial x^2} [y^2 - (h_b + h_c)y + h_b h_c] v(t) \tag{C.15}$$

On constate que d'un côté de l'équation il y a un terme linéaire de  $y$  qui ne se retrouve pas de l'autre. En vérité, les hypothèses des champs de déplacements et de déformations d'Euler-Bernoulli ne sont plus exactes dans le cas où il y a un effort tranchant d'appliqué. Ce sont pourtant ces hypothèses qui ont été employées jusqu'ici. Il est donc plausible que ce résultat en soit une conséquence. Néanmoins, il suffit de considérer le cas bien spécifique d'une poutre qui ne serait composée que du matériau piézoélectrique (donc pas de couche servant de support mécanique) pour éliminer cette incohérence. Dans ce cas, l'axe neutre est au centre de l'épaisseur  $h_p$  de la couche piézoélectrique et  $h_c = -h_b = h_p/2$ . L'équation C.15 devient alors

$$6d_{15} \frac{\left(y^2 - \frac{h_p^2}{4}\right)}{(bh_p^3)} \frac{\partial T_\tau(x,t)}{\partial x} = -\epsilon_{11}^S \frac{\partial^2 \Xi(x)}{\partial x^2} \left(y^2 - \frac{h_p^2}{4}\right) v(t)$$

#### C.4 Évaluation pour une poutre homogène et conclusion

Il y a donc un effet qui n'est pas considéré dans les équations et qui est relié à l'hétérogénéité ou la non-symétrie de la section. La forme de l'équation du potentiel est cependant validée dans le cas d'une poutre homogène piézoélectrique. La valeur de  $\Xi(x)$  peut donc être déterminée en isolant tous les termes qui ne sont fonctions que de  $x$  dans l'équation C.14, comme le démontre l'équation C.16.

$$\begin{aligned} -2\epsilon_{33}^S \Xi(x) v(t) &= d_{31} Y_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ \Xi(x) &= -\frac{d_{31} Y_p}{2\epsilon_{33}^S} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} v(t) \end{aligned} \quad (C.16)$$

L'équation du champ de potentiel pour une poutre homogène peut finalement s'écrire comme à l'équation C.17

$$V(x,y,t) = -\frac{d_{31} Y_p}{2\epsilon_{33}^S} \left(y^2 - \frac{h_p^2}{4}\right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{2y + h_p}{2h_p}\right) v(t) \quad (C.17)$$

En supposant que le résultat de l'équation C.16 est aussi valide pour une poutre non homogène, l'équation générale du champ de potentiel est donnée par l'équation C.18

$$V(x,y,t) = -\frac{d_{31} Y_p}{2\epsilon_{33}^S} (y^2 - (h_b + h_c)y + h_b h_c) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{y - h_b}{h_p}\right) v(t) \quad (C.18)$$

Il est désormais possible d'évaluer l'impact du couplage sur le moment fléchissant (équation C.20). Auparavant, l'équation C.19 donne le champ électrique  $E_y$ .

$$E_y(x, y, t) = \left( \frac{d_{31} Y_p}{\epsilon_{33}^S} \right) y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{h_p} \right) v(t) \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} M_z(x, t) &= YI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + b Y_p d_{31} [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \int_{-h_p/2}^{h_p/2} E_y(x, y, t) y dy \\ \int_{-h_p/2}^{h_p/2} E_y(x, y, t) y dy &= \int_{-h_p/2}^{h_p/2} \left[ \left( \frac{d_{31} Y_p}{\epsilon_{33}^S} \right) y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{h_p} \right) v(t) \right] y dy \\ &= \left[ \left( \frac{h_p^3 d_{31} Y_p}{12 \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{h_p} \right) \left( \left( \frac{h_p}{2} \right)^2 - \left( \frac{-h_p}{2} \right)^2 \right) v(t) \right] \\ &= \left( \frac{h_p^3 d_{31} Y_p}{12 \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\ M_z(x, t) &= \left( YI + \frac{b h_p^3 d_{31}^2 Y_p^2}{12 \epsilon_{33}^S} [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^S} &= \left( \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^T - Y_p d_{31}^2} \right) \\ &= \left( \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^T} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{d_{31}^2 Y_p}{\epsilon_{33}^T}} \right) \\ &= \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \end{aligned}$$

$$M_z(x, t) = \left( YI + Y_p \frac{b h_p^3}{12} \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) [U(x - x_1) - U(x - x_2)] \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{C.20})$$

où  $k_{31}$  est le coefficient de couplage du matériau piézoélectrique utilisé (compris entre 0 et 1).

Comme on s'y attendrait, la composante linéaire du champ électrique  $E_y$ , ne contribue pas au moment de flexion dans le cas considéré de la poutre piézoélectrique homogène. Par contre, l'équation C.20 révèle une contribution non nulle de la composante quadratique variant selon  $x$  qui fait intervenir le second moment de la section  $I_p = b h_p^3 / 12$ . Il est clair que cette contribution est similaire à une raideur supplémentaire. Afin de savoir si cette contribution est significative, une application numérique est effectuée. Le tableau C.1 contient les propriétés utilisées et les valeurs obtenues pour la raideur mécanique de flexion  $Y_p I_p$  et le terme piézoélectrique  $Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right)$ .

Tableau C.1 Propriétés utilisées et valeurs des contributions mécanique et piézo-électrique à la raideur en flexion.

Symbole (unités)	Valeur
$h_p$ ( $\mu\text{m}$ )	400
$b$ (cm)	2
$Y_p$ (GPa)	66
$d_{31}$ (pm/V)	-190
$\epsilon_{33}^S$ (nF/m)	15.93
$k_{31}$	0.36
$Y_p I_p$ ( $\text{Pa}\cdot\text{m}^4$ )	0.00704
$Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2} \right)$ ( $\text{Pa}\cdot\text{m}^4$ )	0.00105
$\frac{(\omega_n)_{quad}}{\omega_n} = \sqrt{1 + \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2}}$	1.072

Dans le cas considéré, il semble que cette contribution soit de l'ordre de 15 % de la rigidité de flexion mécanique. Cet effet se traduit donc par une première fréquence naturelle plus élevée d'environ 7 %. Cet effet est donc principalement quantifié par le rapport  $k_{31}^2/(1 - k_{31}^2)$  et il diminue radicalement avec la diminution de l'épaisseur de la couche piézoélectrique à cause de la présence du terme  $I_p$ .

## ANNEXE D

# DÉVELOPPEMENTS RELATIFS À L'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE

Ce chapitre présente les manipulations mathématiques effectuées afin d'obtenir les équations des facteurs de formes pour les diverses configurations. La première section présente un tableau récapitulatif des principales variables utiles pour cette analyse. Par la suite, l'équation de la déformée statique normalisée pour une poutre droite est présentée, suivi du développement effectué pour obtenir cette même déformée pour une poutre chanfreinée. Finalement, les manipulations algébriques effectuées pour obtenir les chartes de facteur de formes sont développées.

### D.1 Rappel des variables importantes

Le tableau D.1 se veut un résumé des variables utiles pour évaluer les paramètres importants des poutres piézoélectriques. Certains de ces paramètres sont utilisés pour évaluer le facteur de couplage effectif et le facteur de forme.

### D.2 Équations des déformées statiques normalisées

La déformée statique des poutres en flexion peut être obtenue à l'aide de la méthode de la double intégration qui consiste à intégrer deux fois l'équation D.1. Celle-ci relie la courbure de la poutre  $\frac{d^2w(x)}{dx^2}$  à son moment de flexion interne  $M_z(x)$ .

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{YI(x)} \quad (\text{D.1})$$

où  $YI(x)$  est la rigidité en flexion à la position  $x$ . Les conditions aux limites à respecter pour la résolution des intégrales sont celles typiquement utilisées pour le cas de la poutre encastree à un seul bout. Exprimées aux équations D.2 et D.3, elles correspondent respectivement à un déplacement et une rotation nuls à l'encastrement.

$$w(0) = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = 0 \quad (\text{D.3})$$

Le moment de flexion interne est quant à lui obtenu à partir du bilan des forces à l'équilibre statique. Dans le cas présent, la force d'excitation  $F$  est appliquée ponctuellement au bout de la poutre, ce qui génère un moment interne qui varie linéairement selon la position  $x$ .

Tableau D.1 Liste des valeurs et leur signification.

Symbole	Signification	Unimorphe	Bimorphe
$m$	Masse linéique de la poutre (kg/m)	$b[\rho_s h_s + \rho_p h_p]$	$b[\rho_s h_s + 2\rho_p h_p]$
$YI$	Raideur en flexion (N.m <sup>2</sup> )	$\frac{b}{3} [Y_s(h_b^3 - h_a^3) + Y_p(h_c^3 - h_b^3)]$	$b \left[ \frac{Y_s h_s^3}{12} + Y_p \left( \frac{2}{3} \left( \frac{h_s}{2} + h_p \right)^3 - \frac{h_s^3}{12} \right) \right]$
$I_p$	Inertie d'une section piézoélectrique (m <sup>4</sup> )	$\frac{bh_p^3}{12}$	idem
$(YI)_{eq}$	Raideur en flexion équivalente (N.m <sup>2</sup> )	$YI + Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right)$	$YI + 2Y_p I_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right)$
$C_p$	Capacité de la couche piézo (F)	$\epsilon_{33}^s b \frac{(x_2 - x_1)}{h_p}$	idem
$(C_p)_{eq}^s$	Capacité équivalente en série (F)	-	$\frac{C_p}{2}$
$(C_p)_{eq}^p$	Capacité équivalente en parallèle (F)	-	$2C_p$
$\theta$	Coefficient de couplage (C)	$d_{31} Y_p b \frac{(h_b + h_c)}{2}$	-
$\theta^s$	Coefficient de couplage en série (C)	-	$\theta$
$\theta^p$	Coefficient de couplage en parallèle (C)	-	$2\theta$
$\vartheta_n$	Coefficient de couplage modal (C/m)	$\theta \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} dx$	$\theta^i \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} dx$
$N_n$	Module d'intégration « cinétique » (m)	$\int_0^L (\hat{w}_n(x))^2 dx$	idem
$N_n^{xx}$	Module d'intégration « potentiel » (m <sup>-3</sup> )	$\int_0^L \left( \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} \right)^2 dx$	idem
$K_m$	Raideur modale équivalente (N/m)	$(YI)_{eq} N_n^{xx}$	idem
$M_{eq}$	Masse modale équivalente (kg)	$m N_n + M_t \hat{w}_n(x)^2$	idem
$\omega_n$	Pulsation naturelle (rad/s)	$\sqrt{\frac{K_m}{M_{eq}}}$	idem
$\alpha$	Résistance adimensionnelle	$\omega_n R_{eq} C_p$	$\omega_n R_{eq} (C_p)_{eq}$
$k_e^2$	Facteur de couplage effectif	$\frac{\vartheta_n^2}{K_m C_p}$	$\frac{\vartheta_n^2}{K_m (C_p)_{eq}}$

$$M_z(x) = F(x-L) \quad (\text{D.4})$$

Partant de ces hypothèses, les déformées statiques normalisées (la flèche est ramenée à l'unité au bout de la poutre) pour la poutre droite et la poutre chanfreinée peuvent être obtenues.

### D.2.1 Équations pour la poutre droite

La déformée statique pour une poutre droite peut s'obtenir très facilement par la méthode de la double intégration, mais elle est aussi très facile à trouver dans la littérature [3]. Cette déformée normalisée est définie à l'équation D.5. Les valeurs dérivées utiles pour le calcul des paramètres sont aussi données par les équations D.6 à D.8.

$$\hat{w}(x) = \frac{1}{2} \left[ -\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{d\hat{w}(x)}{dx} = \frac{3}{2L} \left[ -\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{d^2\hat{w}(x)}{dx^2} = \frac{3}{L^2} \left[ -\left(\frac{x}{L}\right) + 1 \right] \quad (\text{D.7})$$

$$N_n^{xx} = \int_0^L \left( \frac{d^2\hat{w}(x)}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{3}{L^3} \quad (\text{D.8})$$

### D.2.2 Démarche pour la poutre chanfreinée

Contrairement à une poutre droite, la rigidité de flexion de la poutre chanfreinée varie selon la position  $x$  puisque la largeur de la poutre varie également selon ce paramètre (équation D.9). La figure D.1 illustre les paramètres géométriques introduits. Les termes  $b_0$  et  $b_1$  représentent respectivement la largeur à l'encastrement et la largeur au bout de la poutre.

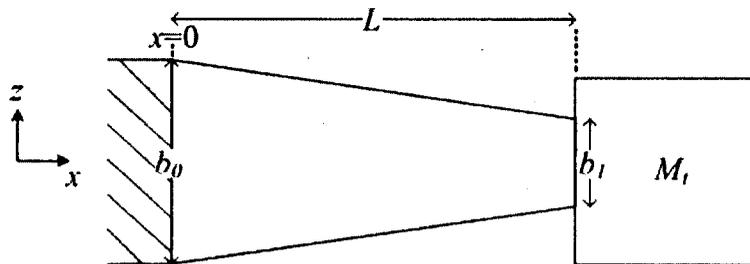


Figure D.1 Vue de la surface d'une poutre en trapèze.  $b_0$  est la largeur à l'encastrement,  $b_1$  est la largeur à l'extrémité libre.

$$b(x) = b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L}x \quad (\text{D.9})$$

La fonction  $YI(x)$  est alors très facile à déduire à partir du module de flexion de la poutre droite. Cette relation est fournie par l'équation D.10.

$$YI(x) = \left( b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right) \frac{(Y_s(h_b^3 - h_a^2) + Y_p(h_c^3 - h_b^3))}{3} \quad (D.10)$$

La déformée s'obtient ensuite par double intégration de l'équation D.1, tel qu'exprimée à l'équation D.11.

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} dx &= \frac{-3F}{(Y_s(h_b^3 - h_a^2) + Y_p(h_c^3 - h_b^3))} \iint \frac{(x-L)}{\left( b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right)} dx \\ &= \phi \iint \frac{(x-L)}{\left( b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right)} dx \end{aligned} \quad (D.11)$$

où  $\phi$  est une variable regroupant les épaisseurs, les modules de rigidité et la force appliquée. Après une première intégration par partie, l'équation D.12 est obtenue.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \frac{\partial w(x)}{\partial x} &= \frac{(x-L)L}{(b_1 - b_0)} \ln \left| b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right| - \frac{L^2}{(b_1 - b_0)^2} \left( b_0 \ln \left| b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right| - b_0 + \right. \\ &\quad \left. \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \ln \left| b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right| - \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right) + C_0 \\ &= \frac{L}{(b_1 - b_0)} \left( x - \frac{Lb_1}{(b_1 - b_0)} \ln \left| b_0 + \frac{(b_1 - b_0)}{L} x \right| + \frac{Lb_0}{(b_1 - b_0)} \right) + C_0 \end{aligned} \quad (D.12)$$

$C_0$  est une constante d'intégration obtenue à partir de la condition aux limites définie à l'équation D.3 et sa valeur est donnée par la relation D.13.

$$C_0 = \frac{L^2}{(b_1 - b_0)^2} (b_1 \ln |b_0| - b_0) \quad (D.13)$$

L'équation D.12 peut donc se retranscrire

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial w(x)}{\partial x} = \frac{L^2}{(b_1 - b_0)} \left( \frac{x}{L} - \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \ln \left| 1 + \frac{(b_1 - b_0)x}{b_0 L} \right| \right) \quad (D.14)$$

Par la suite, l'équation D.15 est obtenue en intégrant D.14 par partie.

$$\frac{w(x)}{\phi} = \frac{L^3}{(b_1 - b_0)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{b_1}{(b_1 - b_0)^2} \left( b_0 + \frac{(b_1 - b_0)x}{L} \right) \left( \ln \left| 1 + \frac{(b_1 - b_0)x}{b_0 L} \right| - 1 \right) \right) + C_1 \quad (\text{D.15})$$

$C_1$  est une autre constante d'intégration cette fois obtenue à partir de la seconde condition aux limites (D.2). Sa valeur est donnée par l'équation D.16.

$$C_1 = -\frac{L^3 b_1 b_0}{(b_1 - b_0)^3} \quad (\text{D.16})$$

En substituant  $C_1$  dans D.15, D.17 est obtenue.

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{\phi} &= \frac{L^3}{(b_1 - b_0)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{b_1}{(b_1 - b_0)^2} \left( b_0 + \frac{(b_1 - b_0)x}{L} \right) \ln \left| 1 + \frac{(b_1 - b_0)x}{b_0 L} \right| + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \frac{x}{L} \right) \\ &= \frac{L^3}{(b_1 - b_0)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \left( \frac{x}{L} - \left( \frac{b_0}{(b_1 - b_0)} + \frac{x}{L} \right) \ln \left| 1 + \frac{(b_1 - b_0)x}{b_0 L} \right| \right) \right) \quad (\text{D.17}) \end{aligned}$$

Puisque la forme de la relation de la déformée est désormais connue, elle peut être normalisée. Évaluée à la position  $x = L$ , la relation D.17 vaut

$$\frac{w(L)}{\phi} = \frac{L^3}{(b_1 - b_0)} \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right) \quad (\text{D.18})$$

Finalement, la déformée normalisée est fournie à l'équation D.19. Les équations D.20 et D.21 fournissent ses dérivées.

$$\begin{aligned} \hat{w}(x) &= \frac{w(x)}{w(L)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \left( \frac{x}{L} - \left( \frac{b_0}{(b_1 - b_0)} + \frac{x}{L} \right) \ln \left| 1 + \frac{(b_1 - b_0)x}{b_0 L} \right| \right)}{\left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{w}(x)}{dx} = \frac{\left(\frac{x}{L} - \frac{b_1}{(b_1-b_0)} \ln \left| 1 + \frac{(b_1-b_0)x}{b_0L} \right| \right)}{L \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1-b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1-b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{d^2\hat{w}(x)}{dx^2} = \frac{\left(\frac{x}{L} - 1\right)(b_1 - b_0)}{L^2 (b_0 + (b_1 - b_0)\frac{x}{L}) \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1-b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1-b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \quad (\text{D.21})$$

### D.3 Calcul des facteurs de forme

Tel qu'introduit à la section 4.1, l'effet de la géométrie peut être isolé du facteur de couplage effectif en l'exprimant de la manière suivante.

$$k_e^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} f(\bar{Y}, \bar{h}, x_1, x_2, \hat{w}(x)) \quad (\text{D.22})$$

où  $\bar{Y}$  est le rapport des modules d'élasticité (équation D.23) et  $\bar{h}$  est le rapport des épaisseurs piézo/substrat (équation D.24).

$$\bar{Y} = \frac{Y_p}{Y_s} \quad (\text{D.23})$$

$$\bar{h} = \frac{h_p}{h_s} \quad (\text{D.24})$$

Cette section montre les manipulations algébriques effectuées pour parvenir à exprimer ce facteur de forme en fonction d'un nombre réduit de paramètres.

#### D.3.1 Calcul du facteur de forme pour l'unimorphe

Pour la configuration de l'unimorphe,

$$\begin{aligned} k_e^2 &= \frac{\vartheta_n^2}{Y I N_n^{xx} C_p} \\ &= \frac{\vartheta^2 \left( \frac{d\hat{w}_n(L)}{dx} \right)^2 h_p}{Y I N_n^{xx} \varepsilon_{33}^S b L} \end{aligned}$$

Les termes  $\frac{d\hat{w}_n(L)}{dx}$  et  $N_n^{xx}$  sont respectivement évalués à partir des équation D.6 et D.8, ce qui permet finalement d'exprimer le couplage effectif à l'équation D.25.

$$\begin{aligned} k_e^2 &= \frac{3d_{31}^2 Y_p^2 b (h_b + h_c)^2 h_p}{16 Y I \epsilon_{33}^S} \\ &= \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{9 Y_p h_p (h_b + h_c)^2}{16 [Y_s (h_b^3 - h_a^3) + Y_p (h_c^3 - h_b^3)]} \end{aligned} \quad (D.25)$$

À l'aide des relations permettant de déterminer la position des interfaces (voir section 2.1.1), le facteur de forme peut finalement s'exprimer tel qu'à l'équation D.26.

$$\begin{aligned} f &= \frac{9 Y_p h_p \left( \frac{Y_s h_s}{Y_s h_s + Y_p h_p} \right)^2 (h_p + h_s)^2}{16 [Y_s (h_b^3 - h_a^3) + Y_p (h_c^3 - h_b^3)]} \\ &= \frac{9 Y_p h_p (Y_s h_s)^2 (h_p + h_s)^2}{4 (Y_s h_s + Y_p h_p) [(Y_s h_s^2 + Y_p h_p^2)^2 + 4 Y_s h_s Y_p h_p (h_s h_p + h_s^2 + h_p^2)]} \\ &= \frac{9 \tilde{Y} \tilde{h} (\tilde{h} + 1)^2}{4 (1 + \tilde{Y} \tilde{h}) [(1 + \tilde{Y} \tilde{h}^2)^2 + 4 \tilde{Y} \tilde{h} (\tilde{h}^2 + \tilde{h} + 1)]} \end{aligned} \quad (D.26)$$

Afin de faciliter l'analyse graphique, un changement de variable est effectué sur  $\tilde{h}$ . La variable  $R$ , comprise entre 0 et 1 et fournie à l'équation D.27, est plutôt employée. Elle représente la fraction du matériau piézoélectrique qui compose la poutre.

$$R = \frac{h_p}{h_s + h_p} = \frac{\tilde{h}}{1 + \tilde{h}} \quad (D.27)$$

L'équation D.26 devient alors

$$f = \frac{9 \tilde{Y} R (1 - R)^2}{4 [(\tilde{Y} - 1)R + 1] [(\tilde{Y} - 1)^2 R^4 + (\tilde{Y} - 1)R(4R^2 - 6R + 4) + 1]} \quad (D.28)$$

L'équation D.28 est tracée à la figure 4.1 et analysée plus en détail à la section 4.2.1.

### D.3.2 Calcul du facteur de forme pour le bimorphe

Dans le cas du bimorphe, il est possible d'utiliser un branchement en série ou en parallèle. Il est tout d'abord démontré que le type de branchement n'a aucun impact sur la valeur du facteur de couplage.

$$k_e^2 = \frac{(\vartheta_n^s)^2}{YIN_n^{xx}(C_p)_{eq}^s} = \frac{(\vartheta_n^p)^2}{YIN_n^{xx}(C_p)_{eq}^p} = \frac{2\theta^2 \left( \frac{d\hat{w}_n(L)}{dx} \right)^2}{YIN_n^{xx} C_p} \quad (D.29)$$

Les équations D.6 et D.8 sont une fois de plus utilisées pour évaluer les termes fonctions de la déformée. Le facteur de couplage est alors donné par l'équation D.30.

$$\begin{aligned} k_e^2 &= \frac{3d_{31}^2 Y_p^2 b h_p (h_s + h_p)^2}{8YI \epsilon_{33}^s} \\ &= \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{3Y_p b h_p (h_s + h_p)^2}{8YI} \end{aligned} \quad (D.30)$$

Le facteur de forme peut ensuite s'exprimer

$$\begin{aligned} f &= \frac{3 Y_p b h_p (h_s + h_p)^2}{8 YI} \\ &= \frac{3 Y_p h_p (h_s + h_p)^2}{8 \left( Y_p \left( \frac{2}{3} (h_s/2 + h_p)^3 - h_s^3/12 \right) + Y_s h_s^3/12 \right)} \\ &= \frac{9 Y_p h_p (h_s + h_p)^2}{2 \left( 12 Y_p h_s h_p^2 + 6 Y_p h_s^2 h_p + 8 Y_p h_p^3 + Y_s h_s^3 \right)} \\ &= \frac{9 \tilde{h} (1 + \tilde{h})^2}{2 \left( 8\tilde{h}^3 + 12\tilde{h}^2 + 6\tilde{h} + \frac{1}{\tilde{Y}} \right)} \end{aligned} \quad (D.31)$$

À nouveau, un changement de variable est effectué pour faciliter l'analyse graphique en employant la fraction de matériau piézoélectrique  $R$  au lieu du rapport des épaisseurs  $\tilde{h}$ . Dans ce cas,  $R$  est donnée par l'équation D.32.

$$R = \frac{2h_p}{h_s + 2h_p} = \frac{2\tilde{h}}{1 + 2\tilde{h}} \quad (D.32)$$

L'équation D.31 devient alors

$$f = \frac{9 \tilde{Y} R [R^2 + 4(1 - R)]}{16 [(\tilde{Y} - 1) R (R^2 + 3(1 - R)) + 1]} \quad (D.33)$$

L'équation D.33 est tracée à la figure 4.1 et analysée plus en détail à la section 4.2.1

### D.3.3 Calcul du facteur de forme pour la poutre chanfreinée

Selon plusieurs études antérieures, la géométrie de la poutre triangulaire ou trapèze permet d'améliorer la génération de puissance. Le calcul du facteur de forme pour cette configuration est utilisé afin de démontrer et quantifier rapidement l'impact de cette géométrie. Ce type de profil peut s'appliquer aussi bien à l'unimorphe qu'au bimorphe, mais le développement présenté ici se concentrera sur le cas d'un unimorphe chanfreiné. Il sera cependant démontré que ce choix n'a pas d'influence sur les conclusions à en tirer. Avant de pouvoir calculer le facteur de couplage et le facteur de forme, il faut auparavant déterminer la valeur de la raideur, du couplage modal et de la capacité de la poutre chanfreinée.

#### Calcul de la raideur

La raideur  $K_m$  peut être évaluée en divisant la force appliquée par le déplacement résultant. À partir de la relation D.18, on obtient

$$K_m = \frac{F}{w(L)} = \frac{(Y_s(h_b^3 - h_a^2) + Y_p(h_c^3 - h_b^3))(b_1 - b_0)}{3L^3 \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \quad (\text{D.34})$$

#### Calcul de la capacité

La capacité de la couche piézoélectrique est une fois de plus calculée selon l'équation d'un condensateur à plaques parallèles. Puisque la surface de l'électrode est un trapèze,  $C_p$  est donnée par

$$C_p = \frac{(b_0 + b_1)L\epsilon_{33}^S}{2h_p} \quad (\text{D.35})$$

#### Calcul du couplage modal

Le couplage modal  $\vartheta_n$  est donné par

$$\vartheta_n = \int_0^L d_{31} Y_p b(x) \frac{(h_b + h_c)}{2} \frac{d^2 \hat{w}(x)}{dx^2} dx \quad (\text{D.36})$$

L'intégrale contenue à l'équation D.36 est évaluée à partir de l'équation D.20. Le couplage modal est finalement donné à l'équation D.37.

$$\begin{aligned}
\vartheta_n &= \frac{d_{31}Y_p(h_b + h_c)(b_1 - b_0)}{2L^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \int_0^L \left( \frac{x}{L} - 1 \right) dx \\
&= \frac{d_{31}Y_p(h_b + h_c)(b_1 - b_0)}{4L \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \quad (D.37)
\end{aligned}$$

### Calcul du facteur de couplage effectif et du facteur de forme

Le facteur de couplage effectif  $k_e^2$  est finalement donné par l'équation D.38

$$\begin{aligned}
k_e^2 &= \frac{\vartheta_n^2}{K_m C_p} \\
&= \frac{3h_p d_{31}^2 Y_p^2 (h_b + h_c)^2 (b_1 - b_0)}{8(Y_s(h_b^3 - h_a^2) + Y_p(h_c^3 - h_b^3))(b_0 + b_1) \epsilon_{33}^S \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \\
&= \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \left( \frac{3h_p Y_p (h_b + h_c)^2}{8(Y_s(h_b^3 - h_a^2) + Y_p(h_c^3 - h_b^3))} \right) \frac{(b_1 - b_0)}{(b_0 + b_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \quad (D.38)
\end{aligned}$$

Le facteur de forme  $f$  de la poutre chanfreinée peut donc être évalué par

$$f = \left( \frac{3h_p Y_p (h_b + h_c)^2}{8(Y_s(h_b^3 - h_a^2) + Y_p(h_c^3 - h_b^3))} \right) \frac{(b_1 - b_0)}{(b_0 + b_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \quad (D.39)$$

Il est intéressant de constater que l'équation D.39 a une forme très similaire à l'équation D.26 qui exprime le facteur de forme de la poutre droite. Il serait alors logique d'écrire

$$(k_e^2)_{\text{tapped}} = \delta (k_e^2)_{\text{straight}} \quad (D.40)$$

où  $\delta$  est un coefficient de correction entre une poutre droite (unimorphe ou bimorphe) et une poutre trapèze ayant les mêmes rapports d'épaisseurs  $\bar{h}$  et de module de Young  $\bar{Y}$ . La valeur de ce coefficient est fournie à l'équation D.41.

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2}{3} \frac{(b_1 - b_0)}{(b_0 + b_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} - \left( \frac{b_1}{(b_1 - b_0)} \right)^2 \ln \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \right)} \\ &= \frac{2}{3} \frac{(\bar{b} - 1)}{(1 + \bar{b}) \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{b}}{\bar{b} - 1} - \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b} - 1} \right)^2 \ln |\bar{b}| \right)}\end{aligned}\quad (\text{D.41})$$

où  $\bar{b}$  est le rapport des largeurs, tel que défini à l'équation D.42.

$$\bar{b} = \frac{b_1}{b_0} \quad (\text{D.42})$$

### Analyse du facteur de forme et discussion sur la configuration de la poutre chanfreinée

Le facteur de correction  $\delta$  est tracé en fonction du rapport des largeurs  $\bar{b}$  à la figure D.2. On constate qu'une poutre triangulaire permet d'augmenter d'environ 33 % le couplage effectif. Au-delà de 1, le couplage diminue. À noter que, même si l'équation est discontinue lorsque  $\bar{b} = 1$ , elle tend tout de même vers la valeur de 1, conforme au cas d'une poutre droite.

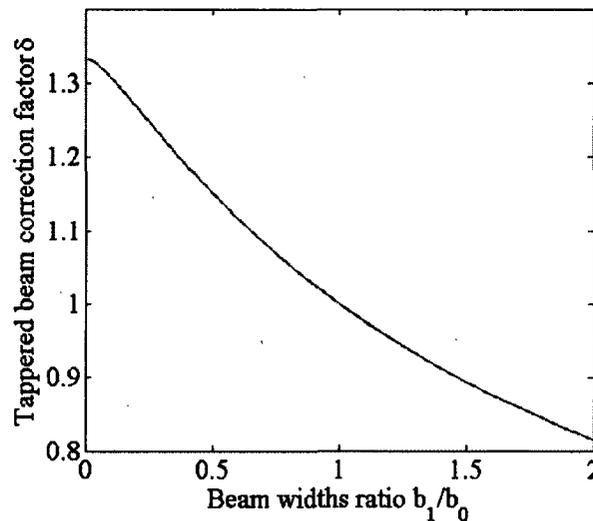


Figure D.2 Coefficient de correction pour une poutre trapèze  $\delta$  en fonction du rapport des largeurs  $\bar{b}$ .

Ces résultats semblent donc indiquer qu'il serait intéressant d'utiliser un profil chanfreiné pour optimiser le couplage effectif d'un unimorphe ou d'un bimorphe. Par contre, l'usage de cette géométrie entraîne également d'autres conséquences. Par exemple, pour une même épaisseur et une même surface, la géométrie en trapèze entraîne une augmentation de la raideur. De plus, si la poutre ne possède pas une grosse masse à son bout, la majorité de la matière se retrouve

distribuée près de l'encastrement. Ceci entraîne alors une diminution de la masse équivalente et une augmentation de la fréquence de résonance. Bref, la comparaison directe des facteurs de couplage effectif n'est pas suffisante pour conclure que la poutre chanfreinée offre de meilleures performances, car elle ne tient pas compte de l'effet sur la masse équivalente requise et sur le volume résultant.

### D.3.4 Coefficient de correction pour une couverture partielle de l'électrode

Les analyses menées jusqu'à présent s'appliquent au cas d'une électrode qui recouvre toute la longueur de la poutre. Cependant, il peut être intéressant de ne recouvrir que partiellement la structure, car bien qu'une couverture partielle diminue la valeur du coefficient  $\vartheta_n$ , elle diminue également la valeur de la capacité  $C_p$ . L'analyse faite dans cette section ne considère que l'effet d'une électrode plus courte, qui débute à l'encastrement (où se trouve la contrainte maximale) d'une poutre droite. Autrement dit, la poutre a une section constante (donc également une raideur constante) malgré la diminution de la longueur de l'électrode. Dans ce cas, le coefficient de couplage peut s'exprimer

$$\begin{aligned} k_e^2 &= \frac{3}{16} \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \frac{Y_p b h_p (h_b + h_c)^2}{YI} \left( \frac{L}{x_2} \right) \left[ - \left( \frac{x_2}{L} \right)^2 + 2 \left( \frac{x_2}{L} \right) \right]^2 \\ &= \frac{3}{16} \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \frac{Y_p b h_p (h_b + h_c)^2}{YI} \left( \frac{x_2}{L} \right) \left[ 2 - \left( \frac{x_2}{L} \right)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (D.43)$$

où  $x_2$  est la position où l'électrode s'arrête. Un maximum se trouve à  $\frac{x_2}{L} = \frac{2}{3}$  et il correspond à un gain sur le couplage de 18.5 % par rapport à la couverture complète. Ce résultat a été obtenu à partir de la déformée statique, mais le gain peut être encore plus important si le rapport des masses  $M_t/(mL)$  est faible. Comme le démontre la figure D.3, un gain maximal d'environ 40 % est possible, ce qui est supérieur au gain obtenu par l'usage d'une poutre trapèze.

Ce gain est justifié en considérant le compromis entre la quantité de charges générées par rapport à la taille de la capacité résultante. Puisque le bout de la poutre subit en effet beaucoup moins de contraintes, cette partie contribue aussi beaucoup moins à la génération des charges tout en contribuant autant à la capacité. Il y a donc une diminution de la tension qui n'est pas compensée par la génération de plus de charges. Des gains plus importants sur  $k_e^2$  pourraient possiblement être fait en ne recouvrant qu'une partie du substrat du matériau piézoélectrique, puisqu'il y aurait alors une diminution de la raideur mécanique de la structure. Cette diminution de la raideur permettrait d'augmenter la déformation induite et donc d'augmenter la contrainte moyenne. Par contre, il y aurait également une diminution de la masse de la poutre (et donc possiblement de la masse totale), ce qui pourrait également contribuer à une diminution de la puissance produite. Une fois de plus, cette comparaison n'est pas suffisante pour conclure à l'optimisation des performances.

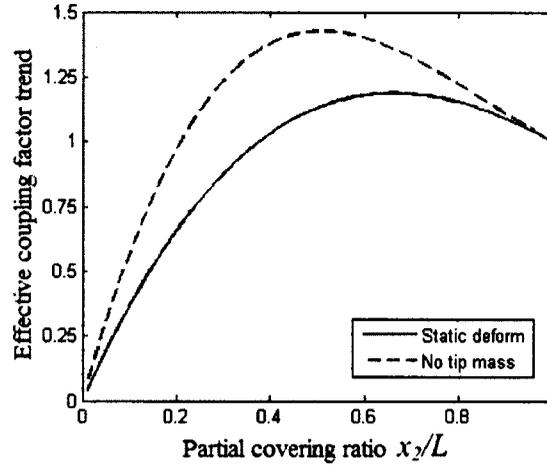


Figure D.3 Coefficient de correction pour une couverture partielle de l'électrode.

## D.4 Coefficient de correction en fonction du rapport des masses

Les équations des facteurs de formes ont été obtenues à l'aide de la déformée statique, mais la distribution de la masse crée la force inertielle, ce qui influence également la forme de la déformée. Erturk et Inman [15] avaient d'ailleurs dénoncé cette manière de procéder, car selon eux, cette pratique mène à des erreurs importantes sur l'évaluation de la tension générée. Il faut donc tenir compte de cet effet pour évaluer correctement le couplage. Tout d'abord, l'équation du facteur de forme fait intervenir le rapport

$$\mathfrak{R} = \frac{\left(\frac{d\hat{w}_n(L)}{dx}\right)^2}{LN_n^{xx}} \quad (\text{D.44})$$

où la longueur  $L$  qui apparaît au dénominateur provient du terme capacitif. Dans le cas de la déformée statique d'une poutre droite, ce rapport vaut

$$\mathfrak{R}_{statique} = \frac{\left(\frac{3}{2L}\right)^2}{\frac{3}{L^2}} = \frac{3}{4} \quad (\text{D.45})$$

Le coefficient de correction sur le couplage  $v$  est alors fourni par l'équation D.46.

$$v = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_{statique}} = \frac{4 \left(\frac{d\hat{w}_n(L)}{dx}\right)^2}{3LN_n^{xx}} \quad (\text{D.46})$$

La figure D.4 trace la valeur de ce coefficient de correction en fonction du rapport de la masse ajoutée au bout sur la masse de la poutre  $M_t/mL$ . L'équation D.47 est une solution obtenue numériquement et elle fournit une erreur de moins de  $9 \times 10^{-3} \%$  pour tout  $M_t/mL$ .

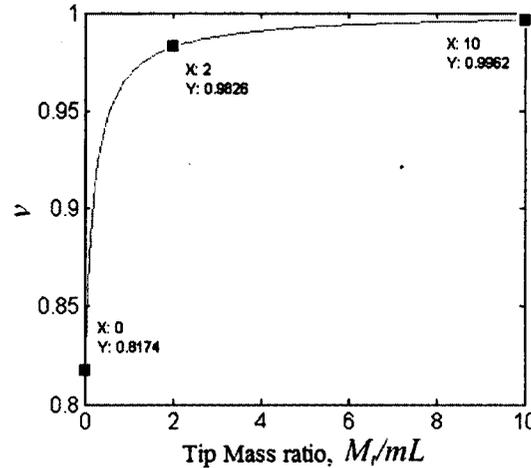


Figure D.4 Coefficient de correction sur le couplage en fonction du rapport  $M_t/mL$  pour le premier mode de vibration.

$$v = \frac{(M_t/mL)^2 + 0.3808(M_t/mL) + 0.0383}{(M_t/mL)^2 + 0.419(M_t/mL) + 0.04686} \quad (D.47)$$

La figure D.4 démontre que pour une poutre avec une grosse masse disposée à son bout, le facteur de forme est bien évalué par la déformée statique. Par contre, l'erreur sur  $f$  peut s'élever à 22% pour une poutre sans masse. Elle diminue cependant rapidement et se trouve à 1.8% pour un rapport  $M_t/mL$  égal à 2. En considérant la contribution de chaque terme, il est possible de démontrer que la source principale d'erreur provient du terme de couplage  $\vartheta_n^2$ , avec une contribution de 19%, comparativement à 3.1% pour le terme  $N_n^{xx}$  relié à la raideur. Autrement dit, la déformée statique permet de bien évaluer la raideur  $K_m$  de la poutre, peu importe si elle a une masse à son bout ou non. Cependant, les erreurs sur le couplage  $\vartheta_n$ , le courant et la tension peuvent être significatives. Il est donc envisageable d'utiliser le coefficient  $v$  pour corriger le coefficient de couplage afin d'évaluer correctement la tension et le courant à partir de la démarche approximative présentée dans cette section. Dans ce cas, il suffit de lui appliquer une racine carrée, tel que démontré à l'équation D.48.

$$\vartheta_{exacte} = \sqrt{v} \vartheta_{approx}. \quad (D.48)$$

## D.5 Influence du profil quadratique

Comme discuté à la section 2.4, la présence du profil quadratique dans la couche piézoélectrique tend à augmenter la raideur en flexion de la structure. Cette augmentation de la raideur peut être significative si le matériau utilisé est épais et possède un fort facteur de couplage  $k_{31}$ . Finalement, cela peut également avoir un impact sur le facteur de couplage effectif réel. La valeur de la raideur mécanique  $K_m$  peut être corrigée grâce à l'équation D.49.

$$(K_m)_{eff} = K_m \left( 1 + \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) f' \right) \quad (D.49)$$

où  $f'$  est un rapport d'inertie de section tel que défini aux équations D.50 et D.51.

$$f' = \frac{Y_p I_p}{YI} \text{ pour l'unimorphe} \quad (D.50)$$

$$= \frac{2Y_p I_p}{YI} \text{ pour le bimorphe} \quad (D.51)$$

Par la suite, l'équation 4.1 peut être corrigée en utilisant plutôt l'équation D.52.

$$\begin{aligned} k_e^2 &= \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) f \frac{1}{1 + \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) f'} \\ &= \frac{k_{31}^2 f}{1 - k_{31}^2 (1 - f')} \end{aligned} \quad (D.52)$$

Pour l'unimorphe, la valeur de  $f'$  est donnée par

$$\begin{aligned} f' &= \frac{Y_p h_p^3}{4 [Y_s (h_b^3 - h_a^3) + Y_p (h_c^3 - h_b^3)]} \\ &= \frac{\tilde{Y} \tilde{h}^3 (1 + \tilde{h} \tilde{Y})}{\tilde{h}^4 \tilde{Y}^2 + (4\tilde{h}^3 + 6\tilde{h}^2 + 4\tilde{h}) \tilde{Y} + 1} \\ &= \frac{R^3 \tilde{Y} [1 + R(\tilde{Y} - 1)]}{[R^4 (\tilde{Y} - 1)^2 + 2R(\tilde{Y} - 1)(2R^2 - 3R + 2) + 1]} \end{aligned} \quad (D.53)$$

et est comprise entre 0 ( $R = 0$ ) et 1 ( $R = 1$ ) pour tout  $\tilde{Y}$  (voir figure D.5). Pour le bimorphe, elle est plutôt fournie par

$$\begin{aligned} f' &= \frac{2Y_p h_p^3}{[Y_s h_s^3 + Y_p (8(\frac{h_s}{2} + h_p)^3 - h_s^3)]} \\ &= \frac{2\tilde{Y} \tilde{h}^3}{[1 + \tilde{Y} (8(\frac{1}{2} + \tilde{h})^3 - 1)]} \\ &= \frac{R^3 \tilde{Y}}{4[(\tilde{Y} - 1)R(R^2 - 3R + 3) + 1]} \end{aligned} \quad (D.54)$$

et est comprise entre 0 ( $R = 0$ ) et 0.25 ( $R = 1$ ) pour tout  $\tilde{Y}$ .

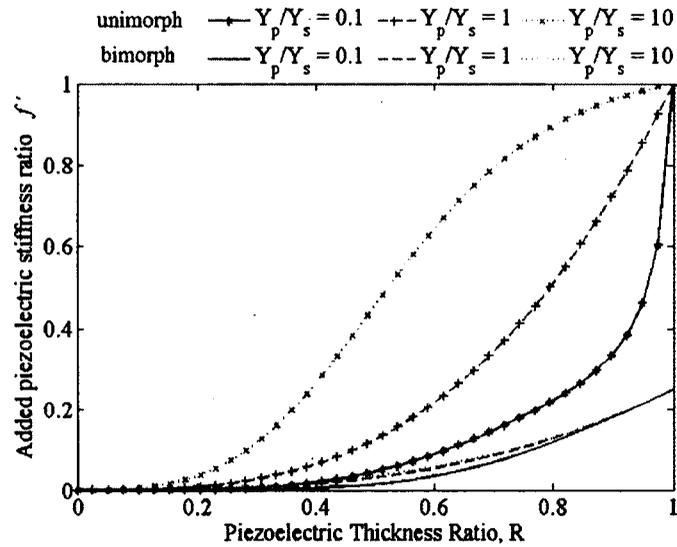


Figure D.5 Contribution géométrique  $f'$  de la composante quadratique du champ de tensions sur la raideur

Tout d'abord, la contribution diminue dans le cas du bimorphe par rapport à l'unimorphe. Pour une fraction  $R = 1$ , le facteur  $f'$  est réduit d'un facteur 4. Dans ce cas, le bimorphe a deux couches piézos, chacune d'épaisseur  $h_p = h_{total}/2$ , alors que l'unimorphe a une couche d'épaisseur  $h_p = h_{total}$ . Pour la même épaisseur totale, il y a alors une diminution d'un facteur 4. Cette diminution provient du terme  $I_p$  qui est en fait fonction du cube de l'épaisseur d'une couche piézo ( $h_p^3$ ). La répartition du matériau piézoélectrique en plusieurs couches diminue donc l'influence de la composante quadratique sur le couplage et la raideur de la structure. La configuration du bimorphe semble également beaucoup moins sensible à la variation du rapport des modules d'élasticité  $\tilde{Y}$ , ce qui s'explique sans doute par sa symétrie.

## ANNEXE E

# DÉVELOPPEMENTS RELATIFS AU DIMENSIONNEMENT

Cette annexe présente les développements mathématiques relatifs au chapitre 5 qui porte sur la méthode de dimensionnement. La première section développe l'approche d'évaluation de la contribution piézoélectrique à la contrainte, tandis que la section E.2 démontre la résolution mathématique du problème de dimensionnement.

### E.1 Évaluation de la contrainte maximale

Pour compléter la méthode de dimensionnement, il faut être en mesure d'estimer la contrainte maximale induite dans la poutre et déterminer si l'effet piézoélectrique peut avoir une contribution notable. La contrainte maximale est située à l'encastrement et à la surface de la poutre. Elle est obtenue en évaluant l'équation 2.14 à la position  $(x, y) = (0, h_c)$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= |\sigma_x(0, h_c, t)| \\ &= \left| -h_c Y_p \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} - Y_p d_{31} E_y(0, h_c, t) \right|\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

Exprimé en fonction des paramètres géométriques, le second terme de l'équation E.1 est donné par

$$\begin{aligned}Y_p d_{31} E_y(0, h_c, t) &= d_{31} Y_p \left( \frac{d_{31} Y_p}{2 \epsilon_{33}^S} (h_c - h_b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(0)}{dx^2} \eta_n(t) - \frac{v(t)}{h_p} \right) \\ &= Y_p \left( \frac{d_{31}^2 Y_p h_p}{\epsilon_{33}^S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(0)}{dx^2} \eta_n(t) - \frac{d_{31}}{h_p C_p} \left( \frac{j \Omega_n \alpha + \Omega_n^2 \alpha^2}{1 + \Omega_n^2 \alpha^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \eta_n(t) \right) \\ &= Y_p \left( \frac{h_p}{2} \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(0)}{dx^2} \eta_n(t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{Y_p d_{31}^2 (h_b + h_c)}{2 L \epsilon_{33}^S} \left( \frac{j \Omega_n \alpha + \Omega_n^2 \alpha^2}{1 + \Omega_n^2 \alpha^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^L \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} dx \right) \eta_n(t) \right)\end{aligned}$$

$$Y_p d_{31} E_y(0, h_c, t) = Y_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(0)}{dx^2} \eta_n(t) \left( \frac{h_p}{2} + \frac{(h_b + h_c)}{2L} \left( \frac{j\Omega_n \alpha + \Omega_n^2 \alpha^2}{1 + \Omega_n^2 \alpha^2} \right) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^L \frac{d^2 \hat{w}_n(x)}{dx^2} dx \right) \eta_n(t)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \hat{w}_n(0)}{dx^2} \eta_n(t)} \right) \quad (\text{E.2})$$

Autour du premier mode et évaluée à partir de la déformée statique, l'équation E.2 peut se simplifier par

$$Y_p d_{31} E_y(0, h_c, t) = Y_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \frac{3}{L^2} \eta_n(t) \left( \frac{h_p}{2} + \frac{(h_b + h_c)}{4} \left( \frac{j\Omega_n \alpha + \Omega_n^2 \alpha^2}{1 + \Omega_n^2 \alpha^2} \right) \right) \quad (\text{E.3})$$

L'équation E.1 peut finalement s'exprimer par

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \left| -Y_p h_c \frac{3}{L^2} \eta_n - Y_p \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \frac{3}{L^2} \eta_n \left( \frac{h_p}{2} + \frac{(h_b + h_c)}{4} \left( \frac{j\Omega_n \alpha + \Omega_n^2 \alpha^2}{1 + \Omega_n^2 \alpha^2} \right) \right) \right| \\ &= \frac{3h_c Y_p}{L^2} |\eta_n| \left| 1 + \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \left( \frac{h_p}{2h_c} + \frac{(h_b + h_c)}{4h_c} \left( \frac{j\Omega_n \alpha + \Omega_n^2 \alpha^2}{1 + \Omega_n^2 \alpha^2} \right) \right) \right| \quad (\text{E.4}) \end{aligned}$$

Le premier terme, unitaire, correspond à la contribution purement mécanique de la contrainte. Le second terme, qui n'est pas fonction de la charge électrique, provient du champ quadratique. Selon les observations précédentes, ce terme est équivalent à une augmentation de la rigidité avec l'épaisseur de la couche. Le troisième terme, qui dépend de la charge connectée, provient de la différence de potentiel mesurée. À l'opposé du terme précédent, celui-ci est dominant lorsque la couche est mince. Extraire l'effet de l'épaisseur de la couche piézoélectrique sur la contrainte n'est donc pas une tâche simple. L'équation E.4 est retranscrite de la manière suivante.

$$\sigma_{max} = \frac{3h_c Y_p}{L^2} |\eta_n| \left| 1 + \tilde{\sigma}_{p1} + \tilde{\sigma}_{p2} \left( \frac{j\Omega_n \alpha + \Omega_n^2 \alpha^2}{1 + \Omega_n^2 \alpha^2} \right) \right| \quad (\text{E.5})$$

où  $\tilde{\sigma}_{p1}$  et  $\tilde{\sigma}_{p2}$  sont des paramètres sans dimension permettant d'estimer la contribution de l'effet piézoélectrique sur la contrainte. Leur valeur est donnée aux relations E.6 et E.7.

$$\tilde{\sigma}_{p1} = \frac{h_p}{2h_c} \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \quad (\text{E.6})$$

$$\tilde{\sigma}_{p2} = \frac{\left( \frac{h_b}{h_c} + 1 \right)}{4} \left( \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \quad (\text{E.7})$$

Finalement, le module de la contrainte est donné par

$$\sigma_{max} = \frac{3h_c Y_p}{L^2} |\eta_n| \sqrt{\left( 1 + \tilde{\sigma}_{p1} + \tilde{\sigma}_{p2} \left( \frac{\Omega_n^2 \alpha^2}{(1 + \Omega_n^2 \alpha^2)} \right) \right)^2 + \left( \tilde{\sigma}_{p2} \left( \frac{\Omega_n \alpha}{(1 + \Omega_n^2 \alpha^2)} \right) \right)^2} \quad (\text{E.8})$$

Dans la situation du circuit ouvert, l'équation E.8 est maximale. Cette expression pourrait s'exprimer sous une forme générale :

$$\sigma_{max} = \frac{3h_c Y_p}{L^2} |\eta_n| (1 + \tilde{\sigma}_p) \quad (\text{E.9})$$

Le terme  $\tilde{\sigma}_p$  est donc indicatif de la portion de la contrainte induite par l'effet piézoélectrique. Pour des matériaux à fort couplage, ce terme peut être important par rapport à la contrainte créée purement par le mouvement de la poutre.

## E.2 Résolution des équations du dimensionnement

Pour résoudre le problème du dimensionnement, il peut être utile d'exprimer tous les termes nécessaires en fonction de paramètres géométriques adimensionnés.

$$\begin{aligned} h_a &= h_s \left[ \frac{(1 - \tilde{h}^2 \tilde{Y})}{2(1 + \tilde{h} \tilde{Y})} - 1 \right] \\ &= h_s \tilde{h}_a \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} h_b &= h_s \frac{(1 - \tilde{h}^2 \tilde{Y})}{2(1 + \tilde{h} \tilde{Y})} \\ &= h_s \tilde{h}_b \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned}
h_c &= h_s \left[ \frac{(1 - \tilde{h}^2 \tilde{Y})}{2(1 + \tilde{h} \tilde{Y})} + \tilde{h} \right] \\
&= h_s \tilde{h}_c
\end{aligned} \tag{E.12}$$

Les égalités relatives à la raideur s'obtiennent à partir des relations 2.91, 3.20, 5.4 et 2.16.

$$\begin{aligned}
K_m &= \frac{8P\omega_n^3}{\dot{w}_b^2 Q \mu^2} = \frac{bh_s^3 [Y_s(\tilde{h}_b^3 - \tilde{h}_a^3) + Y_p(\tilde{h}_c^3 - \tilde{h}_b^3)]}{L^3} \\
&= \frac{rh_s^3 [Y_s(\tilde{h}_b^3 - \tilde{h}_a^3) + Y_p(\tilde{h}_c^3 - \tilde{h}_b^3)]}{L^2}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

L'équation E.14 révèle que puisque la déflexion maximale est connue (équation 3.23), il faut limiter le rapport  $\frac{h_s}{L^2}$  pour limiter la contrainte.

$$\frac{\sigma_u}{FS} = \frac{3h_s \tilde{h}_c Y_p \mu Q \dot{w}_b}{L^2 2\omega_s^2} (1 + \tilde{\sigma}_p) \tag{E.14}$$

$$\frac{h_s}{L^2} = \frac{2\omega_s^2}{3\mu \dot{w}_b Y_p Q \tilde{h}_c (1 + \tilde{\sigma}_p)} \frac{\sigma_u}{FS} \tag{E.15}$$

En substituant cette relation dans l'équation de la raideur, il est alors possible de déterminer l'épaisseur de substrat requise.

$$\begin{aligned}
\frac{8P\omega_n^3}{\dot{w}_b^2 Q \mu^2} &= \frac{2\omega_s^2 r h_s^2 [Y_s(\tilde{h}_b^3 - \tilde{h}_a^3) + Y_p(\tilde{h}_c^3 - \tilde{h}_b^3)]}{3\mu \dot{w}_b Y_p Q \tilde{h}_c (1 + \tilde{\sigma}_p)} \frac{\sigma_u}{FS} \\
h_s &= \sqrt{\frac{12P\omega_n^3 Y_p F S \tilde{h}_c (1 + \tilde{\sigma}_p)}{\mu \dot{w}_b r \omega_s^2 \sigma_u [Y_s(\tilde{h}_b^3 - \tilde{h}_a^3) + Y_p(\tilde{h}_c^3 - \tilde{h}_b^3)]}}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

Puis, il suffit de substituer cette solution dans l'équation E.15 pour obtenir la valeur de la longueur.

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{\frac{3h_s F S \mu \dot{w}_b Y_p Q \tilde{h}_c (1 + \tilde{\sigma}_p)}{2\omega_s^2 \sigma_u}} \\
&= \left( \frac{Q}{\omega_s^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{27\mu \dot{w}_b P}{r [Y_s(\tilde{h}_b^3 - \tilde{h}_a^3) + Y_p(\tilde{h}_c^3 - \tilde{h}_b^3)]} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\omega_n Y_p F S \tilde{h}_c (1 + \tilde{\sigma}_p)}{\sigma_u} \right)^{\frac{3}{4}}
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Connaissant la géométrie de la poutre, il est désormais possible de déterminer la masse à ajouter à son bout pour obtenir la bonne fréquence de résonance.

$$\begin{aligned} M_{eq} &= mLN_n + M_t \\ M_t &= \frac{8P\omega_n}{\ddot{w}_b^2 Q \mu^2} - 0.236rL^2 h_s [\rho_s(\tilde{h}_b - \tilde{h}_a) + \rho_p(\tilde{h}_c - \tilde{h}_b)] \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

### E.2.1 Limite sur l'accélération

La méthode de dimensionnement présente une limite lorsque la source d'accélération  $\ddot{w}_b$  et le facteur de qualité  $Q$  sont élevés, car la masse équivalente requise diminue alors que la masse ajoutée tend vers 0. Dans ce cas,  $\mu = 1.566$  et cela revient à limiter le volume de la poutre.

$$rL^2 h_s \leq \frac{8P\omega_n}{0.58Q\ddot{w}_b^2 [\rho_s(\tilde{h}_b - \tilde{h}_a) + \rho_p(\tilde{h}_c - \tilde{h}_b)]} \quad (\text{E.19})$$

À partir des équations E.16 et E.17, on sait que

$$L^2 h_s = 18 \left( \frac{QP}{r [Y_s(\tilde{h}_b^3 - \tilde{h}_a^3) + Y_p(\tilde{h}_c^3 - \tilde{h}_b^3)]} \right) \left( \frac{\omega_n^3}{\omega_s^4} \right) \left( \frac{\tilde{h}_c Y_p F S (1 + \tilde{\sigma}_p)}{\sigma_u} \right)^2 \quad (\text{E.20})$$

Les deux équations précédentes peuvent être combinées pour obtenir l'accélération limite en fonction des conditions de conception et des propriétés.

$$\ddot{w}_b \leq \frac{2}{3} \left( \frac{\omega_s^2 \sigma_u}{\omega_n Q \tilde{h}_c Y_p F S (1 + \tilde{\sigma}_p)} \right) \sqrt{\frac{[Y_s(\tilde{h}_b^3 - \tilde{h}_a^3) + Y_p(\tilde{h}_c^3 - \tilde{h}_b^3)]}{0.58 [\rho_s(\tilde{h}_b - \tilde{h}_a) + \rho_p(\tilde{h}_c - \tilde{h}_b)]}} \quad (\text{E.21})$$



## LISTE DES RÉFÉRENCES

- [1] APC International Ltd. (20 juillet 2008). *Properties of PMN-PT Single Crystal (PMN-0.32PT)*. <http://www.americanpiezo.com/ceramic-crystals/pm-n-pt.html> (page consultée le 14 mars 2011).
- [2] Baker, J., Roundy, S. et Wright, P. K. (2005). Alternative geometries for increasing power density in vibration energy scavenging for wireless sensor networks. Dans *3rd International Energy Conversion Engineering Conference, August 15-18*. volume 2. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, p. 959–970.
- [3] Bazergui, A., Bui-Quoc, T., Biron, A., McIntyre, G. et Laberge, C. (2002). *Résistance des Matériaux*, troisième édition. Presses Internationales Polytechnique, Montréal, Canada, 715 p.
- [4] Challa, V. R., Prasad, M. G., Shi, Y. et Fisher, F. T. (2008). A vibration energy harvesting device with bidirectional resonance frequency tunability. *Smart Materials and Structures*, volume 17, numéro 1, p. 015035.
- [5] Charnegie, D. (2007). *Frequency Tuning Concepts for Piezoelectric Cantilever Beams and Plates for Energy Harvesting*. Mémoire de maîtrise, University of Pittsburgh, Department of Mechanical Engineering and Materials Science.
- [6] Chen, Q., Quin, L. et Wang, Q.-M. (2007). Property characterization of AlN thin films in composite resonator structure. *Journal of Applied Physics*, volume 101, p. 084103.
- [7] Delaunay, T., Clézio, E. L., Guennou, M., Dammak, H., Thi, M. P. et Feuillard, G. (2008). Full tensorial characterization of PZN-0.12PT single crystal by resonant ultrasound spectroscopy. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, volume 55, numéro 2, p. 476–488.
- [8] Demarest, K. R. (1998). *Engineering Electromagnetics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, États-Unis, 672 p.
- [9] du Toit, N. E. (2005). *Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Department of Aeronautics and Astronautics.
- [10] duToit, N. E., Wardle, B. L. et Kim, S.-G. (2005). Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters. Dans *Symposium on Ferroelectricity and Piezoelectricity IMRC 2004*. volume 71. Gordon and Breach, p. 121–160.
- [11] eFunda (s. d.). *Piezo Material Data*. [http://www.efunda.com/materials/piezo/material\\_data/matdata\\_index.cfm](http://www.efunda.com/materials/piezo/material_data/matdata_index.cfm) (page consultée le 4 janvier 2011).
- [12] Elfrink, R., Kamel, T., Goedbloed, M., Matova, S., Hohlfeld, D., Andel, Y. et Schaijk, R. (2009). Vibration energy harvesting with aluminum nitride-based piezoelectric devices. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, volume 19, p. 094005.

- [13] Elfrink, R., Renaud, M., Kamel, T., de Nooijer, C., Jambunathan, M., Goedbloed, M., Hohlfeld, D., Matova, S., Pop, V., Caballero, L. et van Schaijk, R. (2010). Vacuum-packaged piezoelectric vibration energy harvesters : damping contributions and autonomy for a wireless sensor system. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, volume 20, p. 104001.
- [14] Erturk, A. et Inman, D. J. (2008). A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the Asme*, volume 130, numéro 4, p. 041002.
- [15] Erturk, A. et Inman, D. J. (2008). Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structures*, volume 17, numéro 6, p. 065016.
- [16] Erturk, A. et Inman, D. J. (2009). An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, volume 18, numéro 2, p. 025009.
- [17] Erturk, A., Tarazaga, P. A., Farmer, J. R. et Inman, D. J. (2009). Effect of strain nodes and electrode configuration on piezoelectric energy harvesting from cantilevered beams. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the Asme*, volume 131, numéro 1, p. 011010.
- [18] Fang, H. B., Liu, J. Q., Xu, Z. Y., Dong, L., Wang, L., Chen, D., Cai, B. C. et Liu, Y. (2006). Fabrication and performance of MEMS-based piezoelectric power generator for vibration energy harvesting. *Microelectronics Journal*, volume 37, numéro 11, p. 1280–1284.
- [19] Fitch, J. S., Buhler, S. A. et Shrader, E. (2007). Energy scavengers which adjust their frequency by altering liquid distributions on a beam. United States Patent US 7293411. 2007-11-13.
- [20] Gonnard, P. (2004). *Guide on the best piezoelectric properties of lead-free single crystals* (POLECER Thematic Network Workpackage 9 : Environmental Aspects of Polar Electroceramics). POLECER Thematic Network, 20 p.
- [21] Guerre, R., Fréchette, L. G., Sosale, G., Langella, A. et Vengallatore, S. (2009). Piezoelectric Vibration Energy scavenger : Microfabrication Approaches and Challenges, présentation pour General Motors Canada.
- [22] Halvorsen, E. (2008). Energy harvesters driven by broadband random vibrations. *Journal of Microelectromechanical Systems*, volume 17, numéro 5, p. 1061–1071.
- [23] Halvorsen, E. et Dong, T. (2008). Analysis of tapered beam piezoelectric energy harvesters. Dans *Proceedings of PowerMEMS 2008 + microEMS 2008, Sendai, Japan, November 9-12*. p. 241–244.
- [24] Hao, Z. et Ayazi, F. (2005). Support loss in micromechanical disk resonators. Dans *MEMS 2005, 18th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, IEEE. p. 137–141.

- [25] Hemery, H. (2003). *Céramiques orientées hautes performances  $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3$ - $PbTiO_3$  par croissance interfaciale*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [26] Hosaka, H., Itao, K. et Kuroda, S. (1994). Evaluation of energy dissipation mechanisms in vibrational microactuators. Dans *Micro Electro Mechanical Systems, 1994, MEMS'94, Proceedings, IEEE Workshop on*, IEEE. p. 193–198.
- [27] Isarakorn, D., Briand, D., Janphuang, P., Sambri, A., Gariglio, S., Triscone, J., Guy, F., Reiner, J., Ahn, C. et de Rooij, N. (2011). The realization and performance of vibration energy harvesting mems devices based on an epitaxial piezoelectric thin film. *Smart Materials and Structures*, volume 20, p. 025015.
- [28] Jaffe, H. et Berlincourt, D. (1965). Piezoelectric transducer materials. *Proceedings of the IEEE*, volume 53, numéro 10, p. 1372–1386.
- [29] Jeon, Y. B., Sood, R., Jeong, J. H. et Kim, S. G. (2005). MEMS power generator with transverse mode thin film PZT. *Sensors and Actuators A : Physical*, volume 122, numéro 1, p. 16–22.
- [30] Jeong, S.-J., Kim, M.-S., Lee, D.-S. et Song, J.-S. (2008). Properties of a multi-stack type piezoelectric energy harvesting device. Dans *Integrated Ferroelectrics*. volume 98. Taylor and Francis LTD, p. 208–215.
- [31] Jiang, S. et Hu, Y. (2007). Analysis of a piezoelectric bimorph plate with a central-attached mass as an energy harvester. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, volume 54, numéro 7, p. 1463–1469.
- [32] Kamel, T., Elfrink, R., Renaud, M., Hohlfeld, D., Goedbloed, M., de Nooijer, C., Jambunathan, M. et van Schaijk, R. (2010). Modeling and characterization of mems-based piezoelectric harvesting devices. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, volume 20, p. 105023.
- [33] Kobor, D. (2005). *Synthèse, dopage et caractérisation de monocristaux ferroélectriques type PZN-PT par la méthode du flux*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Laboratoire de Génie Électrique et Ferroélectricité.
- [34] Lebrun, L., Sebald, G., Guiffard, B., Richard, C., Guyomar, D. et Pleska, E. (2004). Investigations on ferroelectric PMN-PT and PZN-PT single crystals ability for power or resonant actuators. *Ultrasonics*, volume 42, numéro 1-9, p. 501–505.
- [35] Lee, B. S., Lin, S. C., Wu, W. J., Wang, X. Y., Chang, P. Z. et Lee, C. K. (2009). Piezoelectric MEMS generators fabricated with an aerosol deposition PZT thin film. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, volume 19, p. 065014.
- [36] Lefeuvre, E., Sebald, G., Guyomar, D., Lallart, M. et Richard, C. (2009). Materials, structures and power interfaces for efficient piezoelectric energy harvesting. *Journal of Electroceramics*, volume 22, p. 171–179.

- [37] Li, Y., Li, W., Guo, T., Yan, Z., Fu, X. et Hu, X. (2009). Study on structure optimization of a piezoelectric cantilever with a proof mass for vibration-powered energy harvesting system. Dans *Journal of Vacuum Science and Technology B*, volume 27, AIP, p. 1288–1290.
- [38] Liao, Y. et Sodano, H. A. (2008). Model of a single mode energy harvester and properties for optimal power generation. *Smart Materials and Structures*, volume 17, numéro 6, p. 065026.
- [39] Liu, J.-Q., Fang, H.-B., Xu, Z.-Y., Mao, X.-H., Shen, X.-C., Chen, D., Liao, H. et Cai, B.-C. (2008). A mems-based piezoelectric power generator array for vibration energy harvesting. *Microelectronics Journal*, volume 39, numéro 5, p. 802–806.
- [40] Marinkovic, B. et Koser, H. (2009). Smart sand - a wide bandwidth vibration energy harvesting platform. *Applied Physics Letters*, volume 94, numéro 10, p. 103505.
- [41] Marzencki, M. (2007). *Conception de microgénérateurs intégrés pour systèmes sur puce autonomes*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I, Laboratoire TIMA.
- [42] Matweb (s. d.). *Online Materials Information Resource - Matweb*. <http://www.matweb.com/> (page consultée le 4 janvier 2011).
- [43] Murali, P., Antifakos, J., Cantoni, M., Lanz, R. et Martin, F. (2006). Is there a better material for thin film BAW applications than AlN? Dans *Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium 2005*, IEEE, volume 1, p. 315–320.
- [44] Peng, J., Luo, H., He, T., Xu, H. et Lin, D. (2005). Elastic, dielectric, and piezoelectric characterization of  $0.70\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3-0.30\text{PbTiO}_3$  single crystals. *Materials Letters*, volume 59, numéro 6, p. 640–643.
- [45] Renno, J. M., Daqaq, M. F. et Inman, D. J. (2009). On the optimal energy harvesting from a vibration source. *Journal of Sound and Vibration*, volume 320, numéro 1-2, p. 386–405.
- [46] Roundy, S. (2005). On the effectiveness of vibration-based energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, volume 16, numéro 10, p. 809–823.
- [47] Roundy, S., Leland, E. S., Baker, J., Carleton, E., Reilly, E., Lai, E., Otis, B., Rabaey, J. M., Wright, P. K. et Sundararajan, V. (2005). Improving power output for vibration-based energy scavengers. *IEEE Pervasive Computing*, volume 4, numéro 1, p. 28–36.
- [48] Roundy, S. et Wright, P. K. (2004). A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. *Smart Materials and Structures*, volume 13, p. 1131.
- [49] Roundy, S., Wright, P. K. et Rabaey, J. (2003). A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes. *Computer Communications*, volume 26, numéro 11, p. 1131–1144.
- [50] Safari, A. et Akdoğan, E. K. (2008). *Piezoelectric and acoustic materials for transducer applications*. Springer US, New York, États-Unis, 415 p.
- [51] Shen, D., Park, J. H., Ajitsaria, J., Choe, S. Y., III, C. W. H. et Kim, D. J. (2008). The design, fabrication and evaluation of a MEMS PZT cantilever with an integrated Si proof

- mass for vibration energy harvesting. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, volume 18, p. 055017.
- [52] Sitti, M., Campolo, D., Yan, J. et Fearing, R. S. (2005). Development of PZT and PZN-PT based unimorph actuators for micromechanical flapping mechanisms. Dans *Proceedings ICRA 2001, IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE. volume 4. p. 3839–3846.
- [53] Sodano, H. A., Park, G. et Inman, D. J. (2004). Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting. *Strain*, volume 40, numéro 2, p. 49–58.
- [54] Sosale, G., Prabhakar, S., Fréchet, L. et Vengallatore, S. (2011). A microcantilever platform for measuring internal friction in thin films using thermoelastic damping for calibration. *Journal of Microelectromechanical Systems*, , numéro 99, p. 1–10.
- [55] Standards Committee of the IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society (1988). ANSI/IEEE Std 176-1987 : Standard on piezoelectricity.
- [56] Tabesh, A. et Fréchet, L. G. (2008). An improved small-deflection electromechanical model for piezoelectric bending beam actuators and energy harvesters. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, volume 18, p. 104009.
- [57] Tanner, T. (2007). *Energy Harvesting Technology* (Présentation PowerPoint). AdaptiveEnergy.
- [58] Wasa, K., Ito, S., Nakamura, K., Matsunaga, T., Kanno, I., Suzuki, T., Okino, H., Yamamoto, T., Seo, S. H. et Noh, D. Y. (2006). Electromechanical coupling factors of single-domain  $0.67\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$ - $0.33\text{PbTiO}_3$  single-crystal thin films. *Applied Physics Letters*, volume 88, numéro 12, 122903.
- [59] Wasa, K., Kanno, I. et Kotera, H. (2009). Fundamentals of thin film piezoelectric materials and processing design for a better energy harvesting MEMS. Dans *Proceedings of PowerMEMS 2009, Washington DC, USA, 1-4 December*. p. 61–66.
- [60] White, N. M., Glynn-Jones, P. et Beeby, S. P. (2001). A novel thick-film piezoelectric micro-generator. *Smart Materials and Structures*, volume 10, p. 850.
- [61] Williams, C. B. et Yates, R. B. (1996). Analysis of a micro-electric generator for microsystems. Dans *International Solid-State Sensors and Actuators Conference - TRANSDUCERS '95*. volume A52. Elsevier, p. 8–11.
- [62] Yeatman, E. M. (2008). Energy harvesting from motion using rotating and gyroscopic proof masses. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science*, volume 222, numéro 1, p. 27–36.
- [63] Zarycka, A., Zachariasz, R., Brus, B. et Ilczuk, J. (2003). Real structure of PZT type ceramics obtained by the sol-gel method. *Molecular and Quantum Acoustics*, volume 24, p. 255–260.

