

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Faculté de génie  
Département de génie mécanique

MODÉLISATION DYNAMIQUE D'UNE  
TRANSMISSION À VARIATION  
CONTINUE (CVT) À COURROIE DE  
CAOUTCHOUC

Mémoire de maîtrise  
Spécialité : génie mécanique

Guifré JULIÓ

Jury : Jean-Sébastien PLANTE (directeur)  
François CHARRON  
Denis RANCOURT

Sherbrooke (Québec) Canada

Décembre 2010

IV-2102



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-79751-8  
*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-79751-8

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

# RÉSUMÉ

Le développement d'outils prédictifs est nécessaire pour la conception des nouvelles générations de transmission à variation continue (CVT) à courroie de caoutchouc.

Ce mémoire présente un modèle de CVT à courroie de caoutchouc, capable de prédire la réponse temporelle du rapport de transmission pour des variations de la force de serrage de la poulie motrice, du couple et du régime moteur. Pour ce faire, la courroie est discrétisée en noeuds sur lesquels s'exercent les forces internes de la courroie ainsi que les forces de contact imposées par les poulies. Les relations permettant de déterminer ces dernières sont développées, considérant la physique du contact entre les poulies et la courroie. La réponse temporelle du rapport de transmission est obtenue par la solution des équations différentielles découlant de l'application des lois de la mécanique classique sur les noeuds.

Les résultats du modèle concordent avec les mesures expérimentales prises dans des conditions d'opération représentatives de l'exploitation normale des CVT. La similarité des prédictions du modèle et des résultats de tests est présentée à la fois pour le régime transitoire et les conditions stabilisées, validant que l'approche utilisée est valable et qu'elle permet l'obtention de résultats inatteignables jusqu'à présent.

L'utilisation du modèle présenté dans ce mémoire aidera les concepteurs des futures générations de CVT en leur permettant d'anticiper le comportement de la transmission, sans avoir recours au prototypage.

**Mots-clés :** Modèle, CVT, Transmission, Variation, Continue, Discret, Friction

# REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait pu être effectué sans l'accord, le soutien et l'aide de plusieurs personnes.

Je tiens à remercier François Charron, professeur au Département de génie mécanique de l'Université de Sherbrooke et ancien directeur général du Centre de Technologies Avancées BRP - Université de Sherbrooke (CTA), ainsi que Roger Rioux, directeur technique du CTA, qui m'ont accueilli et fourni le cadre nécessaire à la réalisation de mon travail de maîtrise.

J'exprime ma plus vive gratitude à Guy Payre, PhD., spécialiste en méthodes numériques au Département de génie mécanique de l'Université de Sherbrooke, qui m'a fourni une aide considérable en me faisant profiter de son immense expertise et en se rendant toujours disponible malgré son travail.

J'adresse évidemment mes sincères remerciements à mon directeur de recherche, Jean-Sébastien Plante, professeur au département de génie mécanique de l'Université de Sherbrooke, pour la confiance qu'il m'a accordé, son support et son encadrement durant toute la durée de ma maîtrise, en me faisant partager son dynamisme et son enthousiasme pour la recherche.

Comment ne pas citer les membres du groupe de recherche CAMUS qui m'ont apporté leur aide, leur attention et leur créativité lors de nos réunions hebdomadaires, ainsi que leur camaraderie lors de nos mémorables soupers de groupe.

Je pense également à tous mes collègues du CTA qui m'ont fourni leur aide ou qui ont contribué à créer un environnement agréable aussi bien durant le travail qu'en dehors.

Je terminerai en adressant un immense merci à mes parents pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes mes études et à qui je dois tout.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1	Mise en contexte et problématique . . . . .	1
1.2	Définition du projet de recherche . . . . .	2
1.3	Objectifs du projet de recherche . . . . .	3
1.4	Contributions originales . . . . .	3
1.5	Plan du document . . . . .	4
<b>2</b>	<b>ÉTAT DE L'ART</b>	<b>5</b>
2.1	Description d'une CVT . . . . .	5
2.2	Mécanique de la courroie en régime permanent . . . . .	5
2.2.1	Loi du frottement exponentiel . . . . .	6
2.2.2	Glissement fonctionnel . . . . .	8
2.2.3	Pénétration radiale de la courroie . . . . .	9
2.3	Mécanique de la courroie lors du changement de rapport . . . . .	10
2.3.1	Coincement ( <i>Self-Locking</i> ) . . . . .	10
2.4	Résumé de l'état de l'art . . . . .	12
<b>3</b>	<b>ARTICLE</b>	<b>13</b>
3.1	Abstract . . . . .	15
3.2	Introduction . . . . .	15
3.2.1	Motivation . . . . .	15
3.2.2	Background and literature . . . . .	17
3.3	Analytical Development . . . . .	18
3.3.1	Discretization . . . . .	19
3.3.2	Contact problem . . . . .	19
3.3.3	Forces on the nodes . . . . .	20
3.3.4	Driven Pulley Sub-Model . . . . .	29
3.3.5	Simulation . . . . .	30
3.4	Experiments . . . . .	34
3.4.1	Test bench description . . . . .	34
3.5	Results and discussion . . . . .	35
3.5.1	Steady State . . . . .	35
3.5.2	Transient . . . . .	36
3.6	Conclusion . . . . .	38
<b>4</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>39</b>
	<b>LISTE DES RÉFÉRENCES</b>	<b>41</b>

# LISTE DES FIGURES

1.1	Courbes de puissance typiques pour un moteur 2 temps et 4 temps . . . . .	1
2.1	CVT de motoneige . . . . .	5
2.2	Élément de courroie dans une poulie . . . . .	6
2.3	Diagramme des forces sur l'élément de courroie . . . . .	6
2.4	Angle actif et angle de repos . . . . .	8
2.5	Montage expérimental de Halbmann . . . . .	9
2.6	Trajectoire de la courroie dans la poulie motrice . . . . .	10
2.7	Schéma des forces sur une demi-section de courroie . . . . .	11
3.1	Transmission ratio change . . . . .	15
3.2	Current rubber-belt CVT actuation . . . . .	16
3.3	Discretized drive belt . . . . .	18
3.4	3D view of a pulley . . . . .	19
3.5	Force balance on a pulley sheave . . . . .	20
3.6	Forces acting on the nodes . . . . .	21
3.7	Belt element between nodes . . . . .	21
3.8	Wedging effect with flexural stiffness neglected . . . . .	23
3.9	Angular spring and damper at nodes . . . . .	23
3.10	Equivalent force system principle . . . . .	24
3.11	Difference between groove width and belt free width . . . . .	25
3.12	Karnopp's friction model . . . . .	27
3.13	Relative velocity between a node and the pulley . . . . .	28
3.14	Force balance on a node in the rotating reference frame . . . . .	29
3.15	Driven pulley mechanism . . . . .	30
3.16	Apparatus used to determine $k_z$ . . . . .	33
3.17	Drive pulley prototype operating principle . . . . .	34
3.18	Diagram of the test bench . . . . .	35
3.19	Steady-state comparison between experiments and model predictions . . . . .	36
3.20	Transmission ratio (t.r.) time response for small shifts at low torque . . . . .	37
3.21	Transmission ratio (t.r.) time response for large shifts at high torque . . . . .	38

# LISTE DES TABLEAUX

3.1 Belt property parameters used for simulation . . . . .	33
--	----

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Mise en contexte et problématique

Les transmissions à variation continue à courroie de caoutchouc (en Anglais : *Continuously Variable Transmission - CVT* ) sont présentes dans les motoneiges depuis la mise en marché des modèles Ski-Doo®, en 1959. À l'époque, ce choix de technologie s'est posé en considérant le besoin de couple ininterrompu à la chenille. En effet, l'important couple créé par la résistance au roulement sur la neige aurait fait caler le moteur lors du passage des vitesses si un autre type de transmission avait été utilisé. C'est donc le besoin de transmettre continuellement la puissance qui a forcé les inventeurs à adapter les CVT, autrefois utilisées seulement dans les applications industrielles, aux véhicules sportifs et légers. De plus, les CVT permettent l'opération du moteur à un régime constant, peu importe les conditions de conduite. Cette caractéristique a permis d'optimiser la performance des motoneiges. En effet, les moteurs à deux temps qui animaient ces véhicules avaient une bande de puissance très étroite. C'est-à-dire, qu'à un certain régime moteur, la puissance pouvait être importante, alors qu'elle diminuait rapidement si la vitesse de rotation du moteur s'éloignait quelque peu de cet optimum (voir figure 1.1). Plusieurs efforts ont alors été concentrés afin de calibrer les CVT pour qu'elles permettent au moteur de fonctionner en tout temps à ce régime optimal, afin d'offrir au conducteur les performances d'accélération maximales.

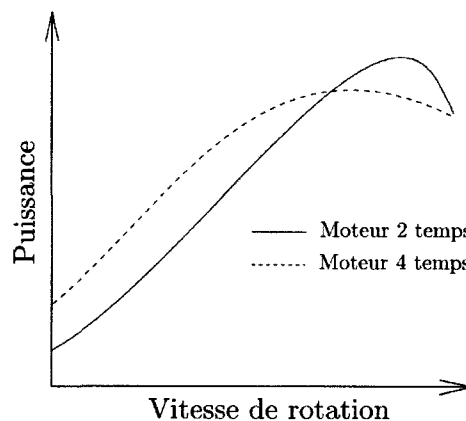


Figure 1.1 Courbes de puissance typiques pour un moteur 2 temps et 4 temps



Aujourd'hui, l'opération continue du moteur au régime de puissance maximale n'est plus nécessairement souhaitée. Cette stratégie, bien que performante pour les accélérations, cause d'importants désagréments en régime de croisière : vibrations transmises aux passagers, niveau de bruit élevé, importante consommation d'essence ainsi que de hautes émissions polluantes. Le principal ajustement des CVT actuelles pour diminuer l'importance de ces désagréments consiste à modifier le régime d'opération du moteur. Une telle action est effective sur toutes les conditions de conduite et compromet les performances d'accélération des véhicules. Une solution idéale consiste à maintenir la vitesse de rotation du moteur au régime de puissance maximale lors des accélérations et de la réduire lors des conditions de croisière. Pour ce faire, un asservissement électronique de la transmission à variation continue doit être mis en oeuvre.

## 1.2 Définition du projet de recherche

Le développement d'une nouvelle technologie de CVT asservie doit s'appuyer sur des outils mathématiques capables de prédire les efforts internes auxquels sera soumis le système en régime permanent. De plus, un modèle prédictif du régime transitoire devra permettre de calculer la réponse temporelle de la CVT sous l'influence de changements des conditions de chargement.

Ainsi, une meilleure compréhension de la mécanique des transmissions à variation continue à courroie de caoutchouc permettra :

- un dimensionnement plus précis des composantes, réduisant les coûts et la masse associés à la matière première ;
- une réduction des coûts de développement en éliminant l'approche par essai et erreur ;
- une optimisation du contrôleur et du système mécanique en vue des performances désirées.

L'interaction entre la courroie et les poulies durant les changements de rapport est un phénomène encore mal connu. En effet, la modélisation de ce système est complexe et il est difficile de le mesurer expérimentalement. De plus, le besoin d'un modèle dynamique complet est récent, puisqu'il découle d'une volonté d'asservissement des CVT. Ceci explique en partie pourquoi le sujet de la recherche n'a été que très peu abordé à ce jour [Sorge, 2004].

## 1.3 Objectifs du projet de recherche

Considérant les besoins des concepteurs des nouvelles générations de CVT asservies, l'objectif général du projet de recherche est de développer et de valider expérimentalement un modèle de CVT à courroie de caoutchouc, capable de prédire à la fois les conditions transitoires et stabilisées. Plus précisément, le projet de recherche a pour objectifs :

- Le développement d'un modèle dynamique de CVT, utilisant les lois de la mécanique des particules et des corps rigides, appliquées sur la courroie discrétisée.
- La collection de données expérimentales représentatives des conditions d'opération des CVT de véhicules récréatifs motorisés.
- La comparaison entre les données recueillies et les prédictions du modèle, en régime permanent et transitoire.

## 1.4 Contributions originales

La quantité de travaux de recherche portant sur le comportement dynamique des CVT à courroie de caoutchouc étant relativement limitée, le travail présenté dans ce document comporte plusieurs contributions scientifiques originales.

Premièrement, il s'agit du premier modèle pouvant décrire la réponse transitoire et stabilisée du rapport de transmission d'une CVT face à un changement des conditions d'entrée.

Deuxièmement, l'approche discrète a été jusqu'ici exploitée uniquement pour prédire les caractéristiques vibratoires des variations de tension dans les CVT à chaînes. Son utilisation pour les courroies de caoutchouc et la résolution sur des périodes de l'ordre de la dizaine de secondes constituent des nouveautés.

Troisièmement, les résultats expérimentaux présentés pour la validation constituent une base de données couvrant une large bande de rapport de transmission et de couple transmis. De tels résultats expérimentaux, représentatifs des conditions réelles d'utilisation des CVT de véhicules récréatifs, manquent à la littérature.

Finalement, le travail de recherche décrit dans ce document montre une validation du modèle pour les hautes valeurs de couple transmis, ce qui est absent de la documentation scientifique.

## 1.5 Plan du document

Le présent mémoire est composé de deux chapitres principaux. Le premier synthétise les travaux scientifiques publiés dans le domaine de la modélisation de CVT à courroie de caoutchouc, en régime permanent et en régime transitoire. Le deuxième présente un article scientifique faisant état des travaux de recherche et des résultats obtenus dans le cadre de ce projet de maîtrise. L'article en question expose le développement théorique des équations composant le modèle de CVT. De plus, le banc de test utilisé pour l'obtention des données expérimentales est décrit. Une comparaison entre les prédictions du modèle et les résultats expérimentaux est effectuée et une discussion à ce sujet s'ensuit. Pour conclure, un rappel des travaux réalisés et des résultats obtenus, ainsi qu'un aperçu des perspectives futures dans le domaine sont présentés.

# CHAPITRE 2

## ÉTAT DE L'ART

### 2.1 Description d'une CVT

La figure 2.1 montre une CVT à courroie de caoutchouc utilisée dans plusieurs modèles de motoneiges. Elle est constituée d'une courroie trapézoïdale en caoutchouc, enroulée sur deux poulies à gorges de largeur variable.

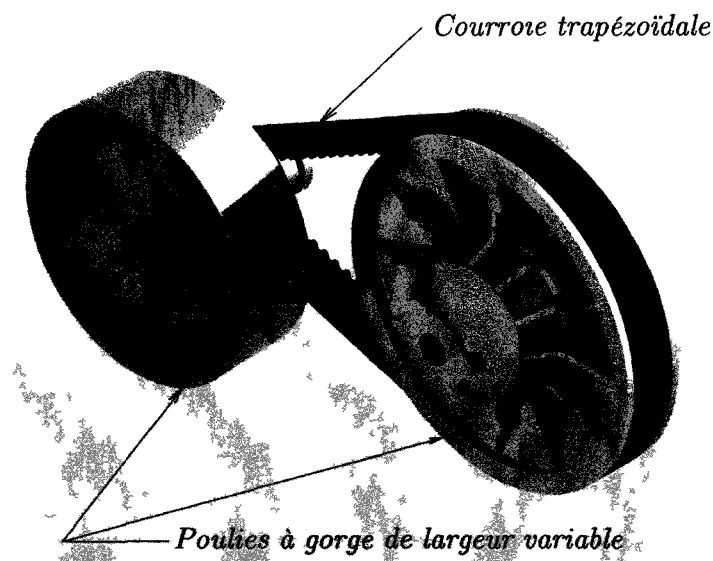


Figure 2.1 CVT de motoneige  
*gracieu*eté de BRP ®

Une des poulies est connectée au vilebrequin du moteur (poulie motrice) tandis que l'autre (poulie menée) est montée sur l'arbre d'entraînement du véhicule. La variation du diamètre d'enroulement sur les poulies permet d'ajuster le rapport de démultiplication.

### 2.2 Mécanique de la courroie en régime permanent

Lorsque le rapport de transmission demeure constant, la mécanique de la courroie d'une CVT est la même que celle d'une transmission par courroie trapézoïdale avec poulies à gorge constante. Les principaux concepts ressortant des études portant sur ce type de mé-

canisme sont : la loi du frottement exponentiel, le glissement fonctionnel et la pénétration radiale de la courroie [Farges, s.d.].

### 2.2.1 Loi du frottement exponentiel

Aussi connue sous le nom de la formule de cabestan (capstan equation) ou encore de l'équation d'Euler, cette loi résulte d'une étude des forces en jeu sur un élément de courroie trapézoïdale infinitésimal engagé dans une poulie conique à gorge fixe [Gerbert, 1999]. Les figures 2.2 et 2.3 montrent cet élément et les forces qui y sont appliquées.

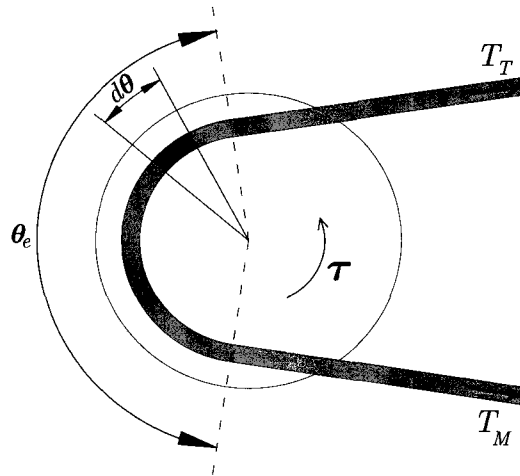


Figure 2.2 Élément de courroie dans une poulie

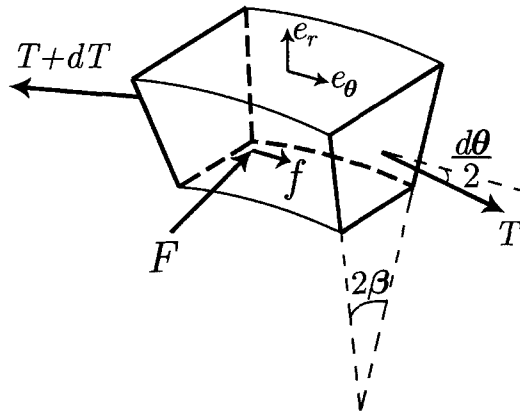


Figure 2.3 Diagramme des forces sur l'élément de courroie

Il est possible d'exprimer la deuxième loi de Newton selon les axes du système de la figure 2.3.

$$\sum F_{e_r} = \frac{d(mv_{e_r})}{dt} = 2F \sin \beta - (2T + dT) \sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) \quad (2.1)$$

$$\sum F_{e_\theta} = \frac{d(mv_{e_\theta})}{dt} = T \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + 2f - (T + dT) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \quad (2.2)$$

En posant l'hypothèse des petits angles ( $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$  ;  $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx 1$ ), les équations 2.1 et 2.2 deviennent :

$$\frac{d(mv_{e_r})}{dt} = 2F \sin \beta - (2T + dT) \left(\frac{d\theta}{2}\right) \quad (2.3)$$

$$\frac{d(mv_{e_\theta})}{dt} = 2f - dT \quad (2.4)$$

Pour cette analyse, la poulie est considérée immobile et le couple  $\tau$  appliqué sur la poulie est maximal pour l'angle d'enroulement  $\theta_e$  donné. Au-delà de cette valeur, il y aurait patinage de la courroie. Aussi, la pénétration radiale de la courroie dans la poulie causée par la différence de tension entre le brin tendu et le brin mou ( $T_T - T_M$ ) est négligée. C'est pourquoi la force de friction  $f$  est orientée dans la direction  $e_\theta$  uniquement [Farges, s.d.].

Puisque la vitesse et l'accélération radiales sont nulles, les équations 2.3 et 2.4 deviennent :

$$Td\theta = 2F \sin \beta - \left(\frac{dT d\theta}{2}\right) \quad (2.5)$$

$$2f = dT \quad (2.6)$$

Or, le terme croisé  $dTd\theta$  étant très petit, il est négligé et l'équation 2.5 devient :

$$Td\theta \approx 2F \sin \beta \quad (2.7)$$

D'après la loi de Coulomb,

$$f = \mu F \quad (2.8)$$

où  $\mu$  est le coefficient de friction entre la poulie et la courroie. En remplaçant l'équation 2.8 dans l'équation 2.6 et en divisant par l'équation 2.7, on obtient :

$$\frac{dT}{T} = \frac{2\mu F}{2F \sin \beta} d\theta \quad (2.9)$$

En intégrant à partir de  $\theta = 0$  correspondant au point de sortie de la courroie, la loi du frottement exponentiel apparaît :

$$T(\theta) = e^{\left(\frac{\mu\theta}{\sin\beta}\right)} T_M \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Glissement fonctionnel

L'équation 2.10, appelée formule de Cabestan, peut être généralisée pour des poulies en rotation et pour des couples inférieurs au couple limite de patinage, en introduisant les concepts de tension due à l'effort centrifuge  $T_C$  et d'angle actif  $\theta_a$ , [Gerbert, 1999].

$$\frac{T_T - T_C}{T_M - T_C} = e^{\left(\frac{\mu\theta_a}{\sin\beta}\right)} \quad (2.11)$$

Selon cette théorie, la tension varie exponentiellement sur un arc de même grandeur sur les deux poulies, appelé angle actif  $\theta_a$ . Pour une tension centrifuge donnée, plus le rapport de tension entre le brin tendu et le brin mou est important, plus l'angle actif augmente, jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur de l'angle d'enroulement  $\theta_e$  d'une des poulies. À partir de ce point, il y a glissement important (patinage) de la courroie sur cette poulie. La portion de l'angle d'enroulement où la tension ne varie pas est appelée angle de repos  $\theta_r$ . Comme le montre la figure 2.4, l'angle de repos se trouve du côté du brin entrant dans la poulie et l'angle actif du côté du brin sortant de la poulie.

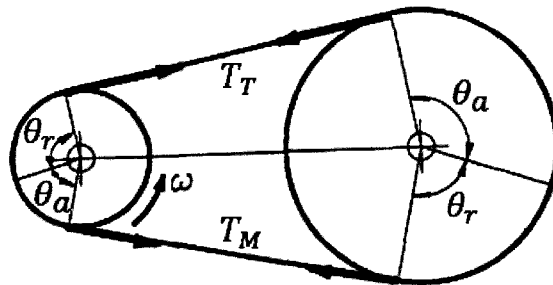


Figure 2.4 Angle actif et angle de repos  
*Adaptée d'après [Gerbert, 1999]*

Dans les modèles de mécanique de courroie en régime permanent, la courroie est considérée extensible longitudinalement. Sa longueur varie donc sous l'effet de la tension. L'allongement se produit dans l'angle actif, ce qui crée une différence de vitesse entre la courroie et la poulie. Ce glissement est appelé glissement fonctionnel et il n'a pas rapport au patinage

[Farges, s.d.]. L'existence des angles actifs et des angles de repos, ainsi que du glissement fonctionnel ont été mis en évidence par des études expérimentales [Dobrovolski *et al.*, 1971] dans [Farges, s.d.] et [Halbmann, 1986] dans [Gerbert, 1999]. La figure 2.5 montre une photo du montage expérimental de Halbmann. En utilisant un ressort comme courroie, il lui a été possible de mesurer le pas d'hélice et de constater que ce dernier variait uniquement dans une portion de l'angle d'enroulement, correspondant à l'angle actif.

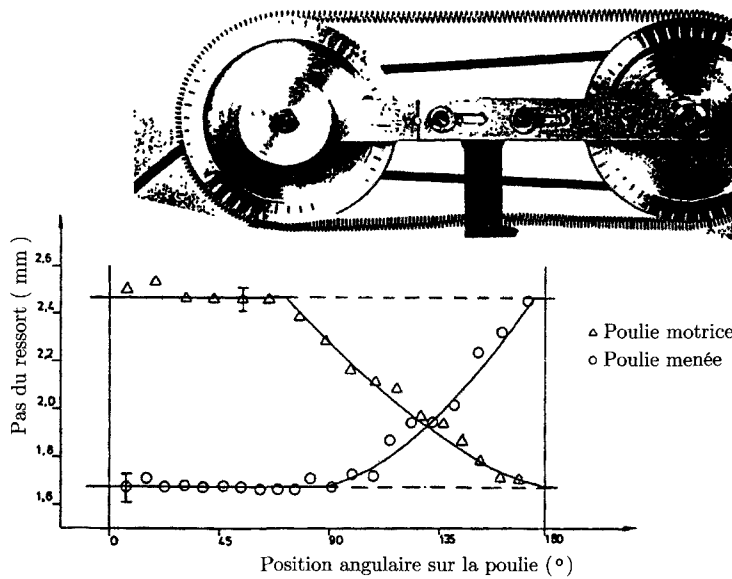


Figure 2.5 Montage expérimental de Halbmann  
Tirée de [Gerbert, 1999]

### 2.2.3 Pénétration radiale de la courroie

La variation de tension dans les angles actifs cause aussi un déplacement radial de la courroie dans la poulie (voir figure 2.6). L'explication de ce phénomène a fait l'objet de plusieurs recherches [Gerbert, 1972], [Dolan et Worley, 1985], [Sorge, 1996a], mais peu de mesures expérimentales confirment les modèles proposés.

La trajectoire de la courroie dans la poulie influence la force axiale à appliquer sur le flasque mobile en fonction de la tension des brins. Une comparaison entre les forces réelles et celles prédites par les modèles de Gerbert [1972] et de Dolan et Worley [1985] est présentée par Ferrando *et al.* [1996]. Il constate une différence importante entre les résultats prédits par les modèles et ceux observés expérimentalement, particulièrement pour la poulie menée. Les résultats les plus précis ont été obtenus en ajustant des paramètres du



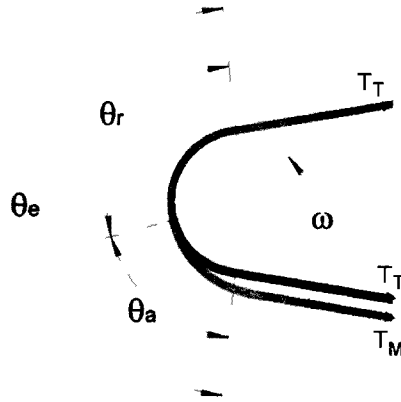


Figure 2.6 Trajectoire de la courroie dans la poulie motrice

modèle de Gerbert de manière à minimiser l'erreur. Par contre, ce calage du modèle n'est valable que pour une transmission donnée, ce qui amène Ferrando à affirmer qu'aucune des méthodes purement théoriques testées ne déterminait précisément la force axiale à appliquer [Ferrando *et al.*, 1996].

## 2.3 Mécanique de la courroie lors du changement de rapport

Contrairement au cas des CVT à courroies métalliques, de plus en plus fréquemment utilisées dans l'automobile, peu de recherches sur le régime transitoire des CVT à courroie de caoutchouc ont été présentées à ce jour. La différence fondamentale entre ces deux types de transmissions est le coefficient de friction entre la courroie et la poulie.

### 2.3.1 Coincement (*Self-Locking*)

La figure 2.7 montre un schéma des forces sur une section transverse de la courroie, en omettant la tension et la force centrifuge. Étant donné la symétrie, seule la demi-section est illustrée.

Pour qu'un mouvement radial (direction  $e_r$  sur la figure 2.7) soit possible, l'inégalité suivante doit être vraie.

$$F \sin \beta - f \cos \beta > 0 \quad (2.12)$$

D'après la loi de Coulomb :

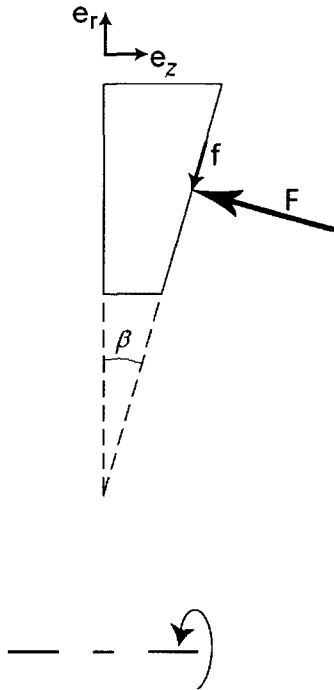


Figure 2.7 Schéma des forces sur une demi-section de courroie

$$F \sin \beta > \mu F \cos \beta \quad (2.13)$$

En divisant par  $F \cos \beta$ , on obtient :

$$\tan \beta > \mu \quad (2.14)$$

Pour les CVT à courroies métalliques, cette inégalité est toujours respectée étant donné le faible coefficient de friction du contact acier sur acier lubrifié [Carbone, 2002]. Pour les CVT à courroies de caoutchouc, les valeurs typiques de  $\mu$  et de  $\beta$  sont respectivement entre 0.35 et 0.5 et entre  $14^\circ$  et  $18^\circ$ . L'inégalité de l'équation 2.14 n'est donc pas vérifiée. Il en résulte qu'une augmentation de la force  $F$  ne cause pas de mouvement radial de la courroie. Plusieurs auteurs appellent ce phénomène de coincement « self-locking ». Pour permettre l'augmentation de rayon de la courroie à l'origine du changement de rapport, l'apport de la tension et de la force centrifuge dans la direction  $e_r$  doit être positif. Selon Sorge [2003, 2004] et Cammalleri et Sorge [2009], l'angle d'enroulement durant le changement de rapport se divise en deux régions. Dans la première zone appelée région d'adhésion, il y a

coincement et le rayon demeure constant. Dans l'autre partie de l'arc d'enroulement, située du côté du brin entrant dans la poulie, la courbure importante de la courroie influence la direction de la tension, permettant ainsi un glissement radial de la courroie. La coordonnée de transition entre ces deux régions est une donnée importante de ces approches, puisqu'elle est le point de départ de la résolution. Or, en pratique, cette donnée est inconnue. Pour la validation de ce modèle, Cammalleri et Sorge [2009] ont donc procédé à une série d'estimations par essai et erreur jusqu'à ce que le résultat des calculs concorde avec les résultats expérimentaux.

## 2.4 Résumé de l'état de l'art

La variation des diamètres d'enroulement sur les poulies à gorges de largeur variable constitue le principe de fonctionnement des transmissions à variation continue à courroie. En effet, la variation des forces axiales sur les flasques mobiles des poulies entraîne leur déplacement, ce qui modifie la largeur de la gorge.

La mécanique des CVT à courroie de caoutchouc en régime permanent a fait l'objet de nombreuses publications. Par contre, la pénétration radiale de la courroie sous l'effet de la différence de tension entre les brins de courroie est un problème complexe et la précision des modèles développés est critiquable. En ce qui a trait aux caractéristiques dynamiques des CVT, les études actuelles ne permettent pas de prédire la réponse temporelle du rapport de transmission, car la résolution du modèle s'appuie sur des données n'étant pas définies a priori.

# CHAPITRE 3

## ARTICLE

### Avant-propos

#### Auteurs et affiliation :

G. Julió : étudiant à la maîtrise, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

J-S. Plante : professeur, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

**Date de soumission :** 30 avril 2010

**Numéro de manuscrit :** MECHMT-D-10-00147

**Revue :** Mechanism and Machine Theory

**Titre français :** Modèle discret pour CVT à courroie de caoutchouc validé expérimentalement

#### Contribution au document :

Cet article contribue au mémoire en décrivant l'essentiel du travail de recherche réalisé et des résultats obtenus durant le projet de maîtrise. La méthodologie utilisée pour développer le modèle discret de CVT à courroie de caoutchouc, le traitement numérique des équations ainsi que l'obtention des mesures expérimentales y sont décrits. De plus, une comparaison avec les données de test et avec un modèle existant confirme la validité du modèle développé.

#### Résumé français :

Les derniers développements dans le domaine des transmissions à variation continue à courroie de caoutchouc destinées aux véhicules récréatifs concernent la création de systèmes mécatroniques aptes à gérer les forces de serrage sur les poulies en temps réel. Cet article présente un modèle de CVT à courroie de caoutchouc, capable de prédire la réponse temporelle du rapport de transmission à des variations de la force de serrage de la poulie motrice, du couple résistant et du régime moteur. Les forces sur le système sont déter-

minées et la seconde loi de Newton est appliquée à la courroie discrétisée, menant à un système d'équations différentielles ordinaires soluble numériquement. Les résultats du modèle concordent avec les mesures expérimentales effectuées jusqu'à un couple de 150 Nm, autant pour les cas transitoires qu'en régime permanent. Ce modèle pourra être utile aux concepteurs ainsi qu'aux ingénieurs en contrôle, dans le développement de transmission à variation continue à commande du rapport.

**Note :**

À la suite des corrections demandées par les membres du jury, le contenu de cet article diffère de celui présenté à la revue.

# An Experimentally-Validated Discrete Model for Rubber-Belt CVT

## 3.1 Abstract

Latest advances in recreational vehicle rubber-belt CVTs involve mechatronic systems in order to modulate the axial forces on pulleys in real-time. This paper presents a model of the rubber-belt CVT, capable of predicting the transmission ratio time response to changing conditions of drive pulley axial force, load torque and engine RPM. Forces on the system are determined and Newton's law of motion is applied on the discretized drive belt, leading to a system of ordinary differential equations, which is solved numerically. Model outputs are compared with experiments and satisfactory agreement is observed for both steady-state and transient cases under high loads of up to 150 Nm. This model should be useful to design and control engineers in the development and optimization of ratio-controllable rubber-belt CVTs.

## 3.2 Introduction

### 3.2.1 Motivation

Rubber-belt continuously-variable transmissions (CVT) are used in a wide variety of off-road and on-road recreational vehicles such as : all terrain vehicles (ATVs), snowmobiles and motorcycles. They consist in a rubber belt wrapped around two variable-diameter pulleys (see Fig. 3.1).

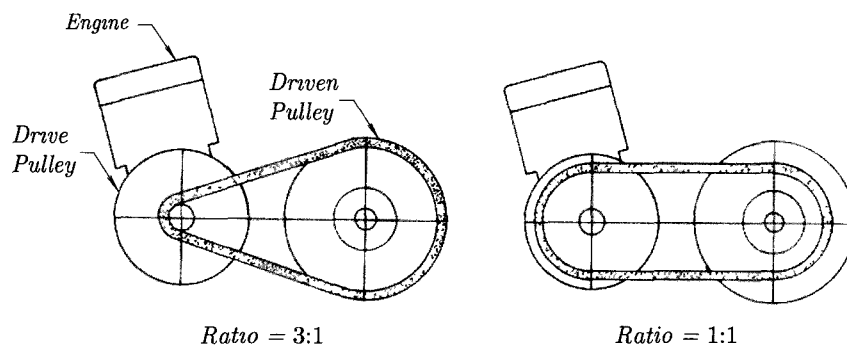


Figure 3.1 Transmission ratio change (Adapted from [Aaen, 1986])

Each pulley has a fixed sheave, generally press-fitted on the shaft and a movable sheave capable of sliding in the axial direction relative to the shaft (see Fig. 3.2). The force applied to the movable sheave defines the groove width and hence, the wrap diameter. The drive pulley is attached to the engine crankshaft while the driven pulley is attached to the vehicle drive shaft. Axial forces on each pulley can be modulated by a control mechanism, to change the transmission ratio without interrupting the torque output.

Current rubber-belt CVTs are mechanically self-regulated. As shown in Fig. 3.2, the axial force on the drive pulley is modulated by centrifugal levers and ramps while the axial force on the driven pulley is modulated by a torque-cam assembly. These mechanical control systems are designed to make the engine run at a constant speed, independently from the vehicle speed.

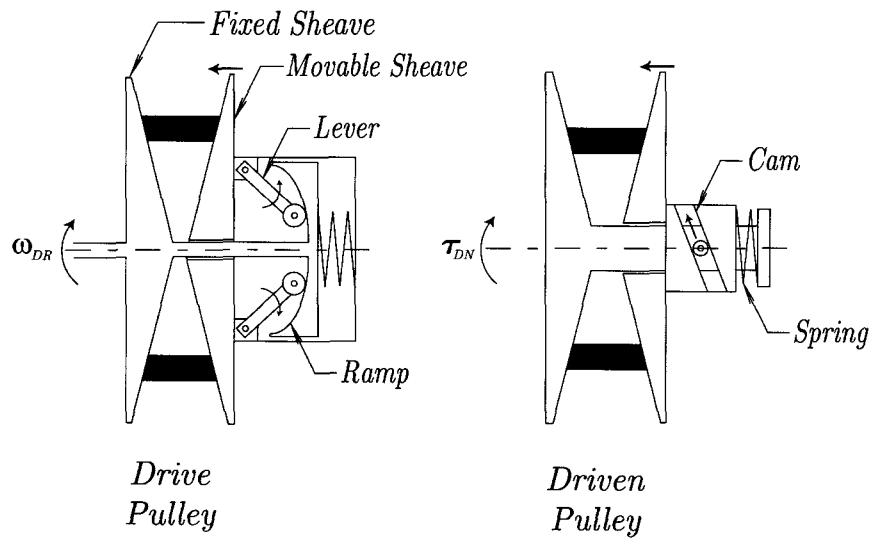


Figure 3.2 Current rubber-belt CVT actuation

This feature was essential in the past in order to accommodate the narrow power band of two-stroke engines often found in recreational vehicles. However, with today's stricter pollutant and noise regulations, operating the engine at fixed RPMs, selected for maximum output, imposes unacceptable penalties. Better control systems that can adjust the transmission ratio in real-time are needed to provide maximum power from the engine for acceleration and low engine speeds in cruising conditions. Instead of centrifugal mechanisms, electromechanical control systems can be implemented [Asumi *et al.*, 2005; Yang *et al.*, 2008] to modulate the axial force applied on the drive pulley in real-time, allowing a transmission ratio independent from engine speed and torque. A dynamic model that can predict CVT behavior during transient operation is critical in the development process of these new technologies for :

- Optimizing components and thus reducing cost and weight while improving performance ;
- Reducing development time by reducing the amount of experimental work required ;
- Designing CVT controllers, since the electronic ratio controller has to predict the axial force to be applied on the drive pulley.

### 3.2.2 Background and literature

The dynamic behavior of the pulley and rubber belt during shifts is not fully understood in literature. Moreover, considering the high rotational speed and vibratory environment, it is difficult to measure belt tension, axial forces and belt trajectory in a fully-functional CVT.

Some research has been made to expand steady-state rubber-belt CVT theory, developed principally by Gerbert [Gerbert, 1972, 1999], Dolan and Worley [Dolan et Worley, 1985] and Sorge [Sorge, 1996a], to the transient case [Sorge, 2003]. Further work with this approach yielded closed-form analytical approximations [Sorge, 2004; Cammalleri et Sorge, 2009]. The resolution speed of the proposed closed-form approximations and their reasonable accordance with tests results would make this model useful for preliminary design. However, experimental validation has only been conducted at low power, in comparison to the operational conditions of real-life CVTs. Moreover, since the focus of those works were on the theoretical assessment of the belt trajectory along the arc of contact, many of the required model inputs remained undefined a priori. For example, in order to begin the solution, the user has to supply the model with the tension of the slack stand and the coordinates of the transition between two belt friction regimes. These parameters can be found by trial-and-error using experimental data as inputs. However, this requires a representative experimental database, which is not necessarily available in the case of a new CVT design.

The automotive industry multi-body dynamics models were developed for metal chain-driven CVTs [Srnik et Pfeiffer, 1997; Pfeiffer *et al.*, 2004]. With this approach, the chain is discretized in elements and the force balance is computed on each of them. Time response is obtained by numerically solving Newton's law of motion. This approach has only been used in chain-driven CVTs so far and its purpose is to predict the vibrational behavior of the chain caused by the pins interaction with the pulleys.



This paper proposes a rubber-belt CVT dynamic model to predict the time response of the transmission ratio under given conditions of drive pulley axial force, drive pulley speed and load torque. Like the multi-body dynamics approach of the metal-chain CVT models [Srnik et Pfeiffer, 1997; Pfeiffer *et al.*, 2004], Newton’s law of motion is applied to a discretized belt and solved numerically. Model parameters are all derived from measurable physical quantities that can be determined a priori. The model is capable of predicting both steady-state and transient responses of the transmission ratio and shows excellent agreement with experimental data.

### 3.3 Analytical Development

The model considers the planar motion of a discretized belt in the  $x - y$  inertial frame (see Fig. 3.3). Model inputs are :

- Drive pulley axial force :  $\vec{F}_{DR}(t)$  ;
- Drive pulley speed :  $\vec{\omega}_{DR}(t)$  ;
- Driven pulley resistant torque :  $\vec{\tau}_{DN}(t)$ .

Model outputs are the discretized nodes position  $\vec{P}_i$  and velocity  $\vec{v}_i$  as well as the driven pulley speed  $\vec{\omega}_{DN}$  as functions of time.

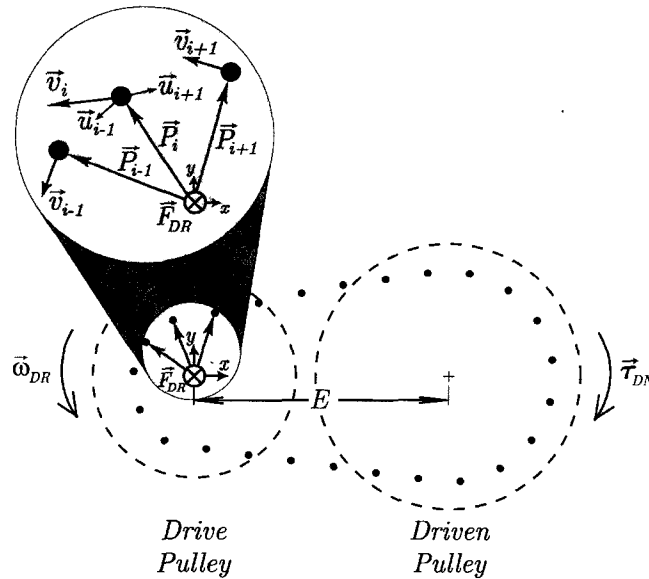


Figure 3.3 Discretized drive belt

The inertia of the pulleys' movable sheaves is neglected as a simplifying assumption. Moreover, the friction in the pulleys' movable sheave mechanisms is considered null and no deformation of the sheaves is considered. Thus, axial forces are transferred directly to the belt. The effect of gravity on the system is neglected.

### 3.3.1 Discretization

The total mass of the belt  $M$  is distributed among  $n$  nodes, so the mass of each node is  $m = \frac{M}{n}$ . After determination of the force balance on each node, one can apply Newton's second law, leading to a system of  $n$  second order vectorial differential equations. The numerical treatment of these equations is detailed in section 3.3.5.

### 3.3.2 Contact problem

The contact problem between the belt and the pulleys is simplified in order to make the reactions of axial forces on the nodes directly computable. Otherwise, forces would have to be found by iterative methods for each time step which would lead to significantly longer computing times.

The axial force  $F$  applied on a pulley sheave is balanced by the sum of the axial forces of the  $q$  nodes in contact (see Fig. 3.4).

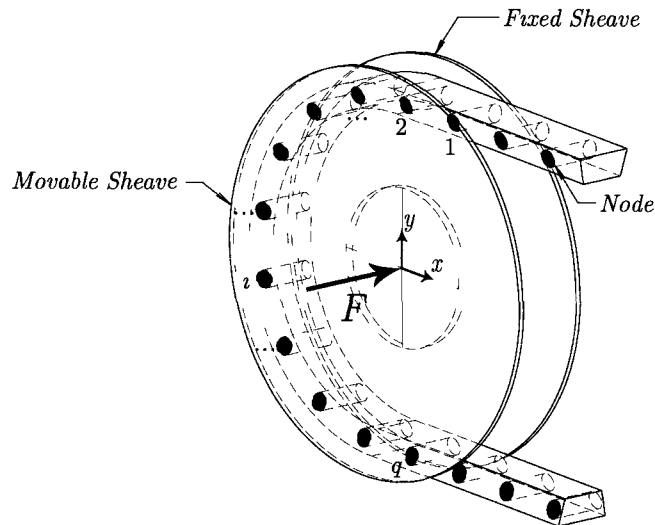


Figure 3.4 3D view of a pulley

Indeed, due to the conical shape of the sheaves, contact forces have axial and radial components (see Fig. 3.5). However, the direction and magnitude of the friction vector

$\vec{f}_i$  at each node are still unknown. Hence, in order to simplify this situation, the axial component of friction  $\vec{f}_{z_i}$  is neglected. Therefore, the axial force balance on the movable sheave of either of the pulleys can be expressed by :  $\vec{F} \cong - \sum_{i=1}^q \vec{R}_{z_i}$ .

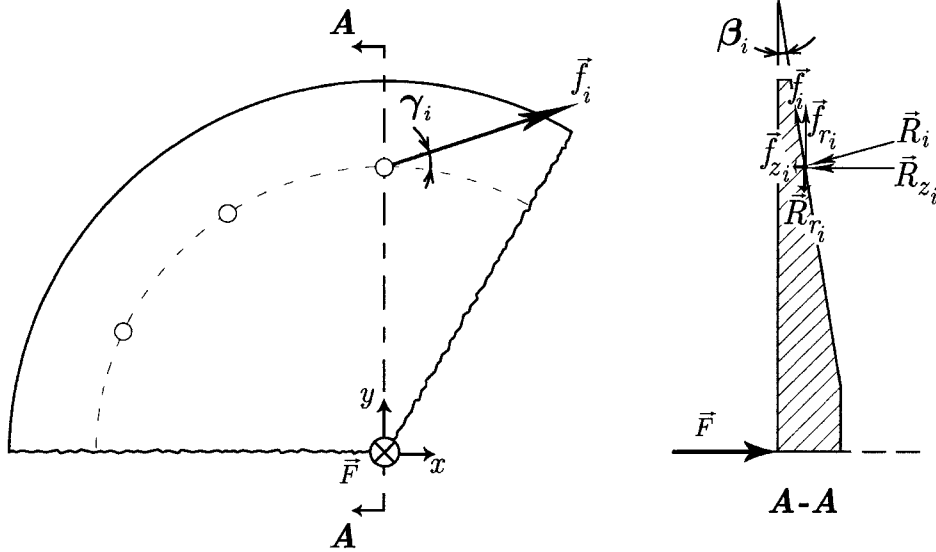


Figure 3.5 Force balance on a pulley sheave

This approximation induces an error on  $\|\vec{R}_{z_i}\|$  and  $\|\vec{f}_i\|$ , which depends on the angle  $\gamma_i$  between the friction vector  $\vec{f}_i$  and the tangential direction (see Fig. 3.5). The magnitude of these errors have been assessed in a wide array of operating conditions, using the model to obtain  $\gamma_i$ , allowing the computation of the exact values of  $\|\vec{R}_{z_i}\|$  and  $\|\vec{f}_i\|$  and comparing with the original approximation. The average errors were 4.5 % for  $\|\vec{R}_{z_i}\|$  and 2.3 % for  $\|\vec{f}_i\|$  respectively, which were considered acceptable for this model.

### 3.3.3 Forces on the nodes

Each node is subject to many force vectors (see Fig. 3.6) :

- Belt tension from the adjoining nodes,  $\vec{T}_{i-1}$  and  $\vec{T}_{i+1}$  ;
- Radial resultant of axial force from both pulleys,  $\vec{R}_{r_{DR}}$  and  $\vec{R}_{r_{DN}}$  ;
- Friction force with the pulleys  $\vec{f}_{DR}$  and  $\vec{f}_{DN}$  ;
- Equivalent force  $\vec{F}_M$  resulting from the bending moment.

Forces are treated separately and summed before applying Newton's second law to each node. The seven forces vary depending on the node position. For instance, the friction

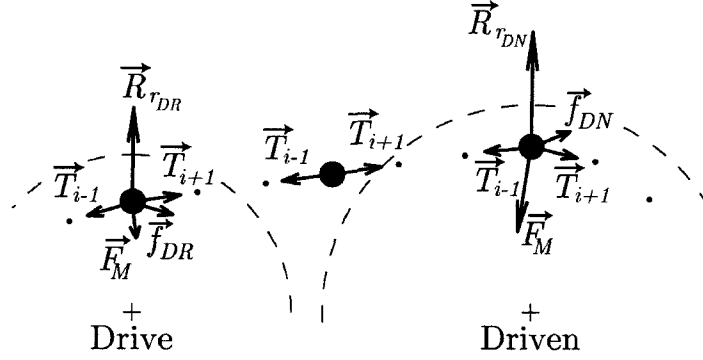


Figure 3.6 Forces acting on the nodes

forces with the pulleys  $\vec{f}_{DR}$  and  $\vec{f}_{DN}$  only have non-zero values when the belt is in contact with a pulley. The following paragraphs detail how these forces are calculated.

### Tension ( $\vec{T}_{i-1}, \vec{T}_{i+1}$ )

The belt portion between two nodes is considered as a tension spring, as represented in Fig. 3.7. Tension is calculated using a linear relationship with distance :  $T = k(l - l_0)$ , where  $k$  is the longitudinal stiffness of the belt,  $l$  is the distance between the nodes and  $l_0$  is the no-load distance between the nodes.

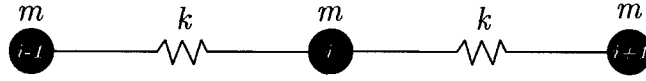


Figure 3.7 Belt element between nodes

Hence, tension in the direction of the preceding ( $i - 1$ ) and the following ( $i + 1$ ) nodes depends on the belt longitudinal stiffness  $k$  and the respective position of the nodes  $\vec{P}_{i-1}$ ,  $\vec{P}_i$ ,  $\vec{P}_{i+1}$  :

$$\vec{T}_{i-1} = k \left( \left\| \vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i \right\| - l_0 \right) \vec{u}_{i-1} \quad (3.1)$$

$$\vec{T}_{i+1} = k \left( \left\| \vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i \right\| - l_0 \right) \vec{u}_{i+1} \quad (3.2)$$

where  $\vec{u}_{i-1}$  and  $\vec{u}_{i+1}$  are unit vectors in the direction of the adjoining nodes defined by :

$$\vec{u}_{i-1} = \frac{\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i}{\left\| \vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i \right\|} \quad (3.3)$$

$$\vec{u}_{i+1} = \frac{\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i}{\|\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i\|} \quad (3.4)$$

Special cases of Eq. (3.1) to (3.4) exist for the first and last nodes in order to respect belt continuity. Indeed, at  $i = 1$ ,  $\vec{T}_{i-1} = \vec{T}_n$  and  $\vec{u}_{i-1} = \vec{u}_n$ , while at  $i = n$ ,  $\vec{T}_{i+1} = \vec{T}_1$  and  $\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_1$ . Hence, for nodes  $n$  and  $1$ , Eq. (3.1) to (3.4) become :

$$\vec{T}_n = k \left( \|\vec{P}_n - \vec{P}_1\| - l_0 \right) \vec{u}_n \quad (3.5)$$

$$\vec{T}_1 = k \left( \|\vec{P}_1 - \vec{P}_n\| - l_0 \right) \vec{u}_1 \quad (3.6)$$

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{P}_n - \vec{P}_1}{\|\vec{P}_n - \vec{P}_1\|} \quad (3.7)$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{P}_1 - \vec{P}_n}{\|\vec{P}_1 - \vec{P}_n\|} \quad (3.8)$$

### Forces due to the bending moment $(\vec{F}_{M_i})$

Unlike the metal chain of some automotive CVTs [Srnik et Pfeiffer, 1997; Pfeiffer *et al.*, 2004], rubber belts have a flexural stiffness that is typically considered in steady-state models [Gerbert, 1972, 1999; Dolan et Worley, 1985; Sorge, 1996a]. Although neglected in some metal push-belt CVT dynamic models [Srivastava et Ul-Haque, 2005], the influence of the bending moment is significant in rubber-belt CVT dynamics and must be considered. Otherwise, the wedging effect of the belt slack strand in the drive pulley causes inconsistency with experimental observations, as illustrated in Fig. 3.8 by the erroneous belt path, obtained when neglecting the belt's flexural stiffness.

In order to consider the effect of flexural stiffness, a torsional spring and damper is added at each node, similar to the discrete element technique (DET) for evaluating beam dynamic response [Yavari *et al.*, 2002] (see Fig. 3.9).

Hence, the moment produced at each node is :

$$\vec{M}_i = k_{ang} (\theta_i - \theta_0) + c_{ang} \dot{\theta}_i \quad (3.9)$$

where  $k_{ang}$  is the angular stiffness,  $c_{ang}$  is the angular damping coefficient and  $\theta_0$  is the angle between the nodes of an unconstrained belt.  $\theta_i$  and  $\dot{\theta}_i$  are geometric functions of the nodes position and velocity vectors.

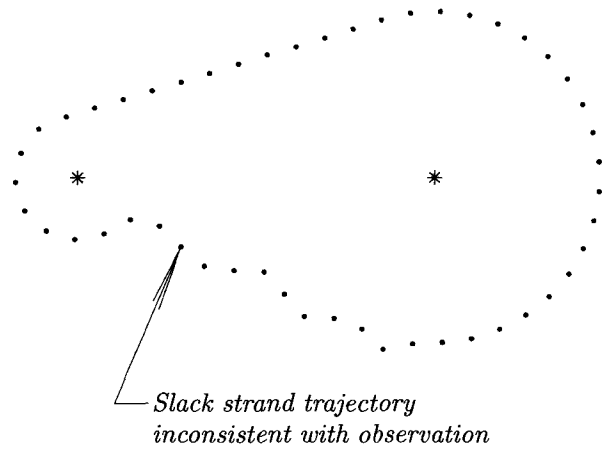


Figure 3.8 Wedging effect with flexural stiffness neglected

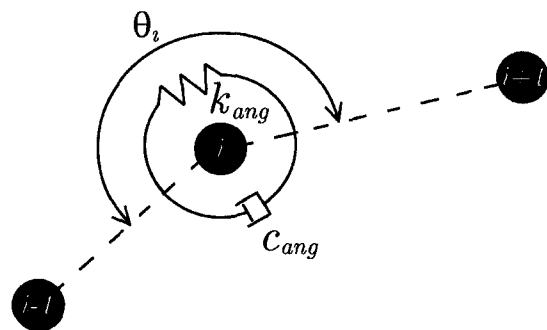


Figure 3.9 Angular spring and damper at nodes

The system of Fig. 3.9 would normally be solved from a deformable body dynamics point of view (e.g. using bar elements) where the moments  $\vec{M}_i$  and the belt's inertial effect are accounted directly in the equations of motion. Unfortunately, this would require extra degrees of freedom and thus longer computing times. To avoid this situation, the moment system is simplified to a particle kinematics representation by converting moments to equivalent forces, using the equivalent force system principle [Beer et Johnston, 2007]. Consider two nodes ( $i$  and  $i + 1$ ) joined by a longitudinally-deformable, inertia-free link (see Fig. 3.10(a)). The system is subject to moments  $\vec{M}_i$  and  $\vec{M}_{i+1}$  as defined by Eq. (3.9).

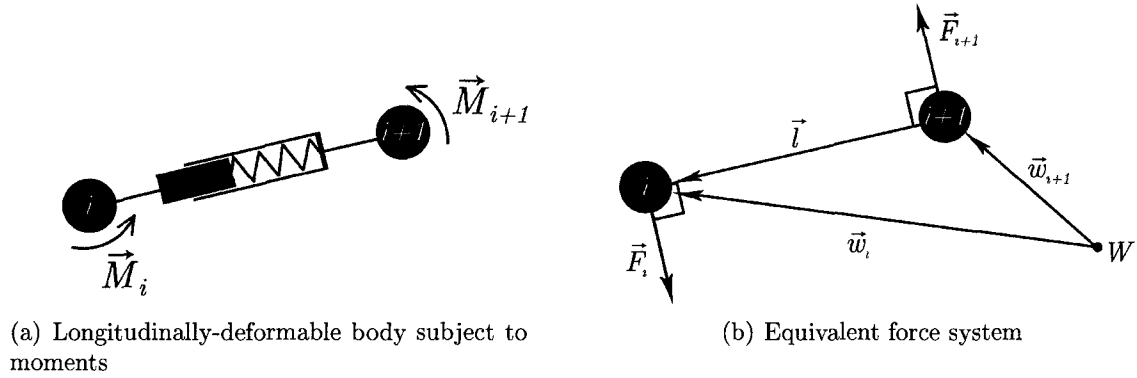


Figure 3.10 Equivalent force system principle

The original force system constituted of  $\vec{M}_i$  and  $\vec{M}_{i+1}$  can be replaced by an equivalent force system as long as the two following conditions are respected :

$$\sum \vec{F}_{eq} = \sum \vec{F}_{or} \quad ; \quad \sum \vec{M}_{W_{eq}} = \sum \vec{M}_{W_{or}} \quad (3.10)$$

where  $W$  is an arbitrary point and the subscripts *or* and *eq* designate respectively the original and equivalent force systems. From Fig. 3.10(a), an equivalent force system must therefore respect :

$$\sum \vec{F}_{eq} = 0 \quad ; \quad \sum \vec{M}_{W_{eq}} = \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \quad (3.11)$$

Moreover, the equivalent forces must be normal to the longitudinal axis. Since the studied body is deformable along this axis, any longitudinal force would create a different deformation of the body than the original force system, making them not equivalent. Hence, the force system of Fig. 3.10(b) is chosen to replace the original force system of Fig. 3.10(a).

Developing Eq. (3.11), one can obtain the expression of  $\vec{F}_i$  :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{i+1} + \vec{F}_i &= 0 \\
\vec{F}_{i+1} &= -\vec{F}_i \\
\vec{w}_i \times \vec{F}_i + \vec{w}_{i+1} \times \vec{F}_{i+1} &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
\vec{w}_i \times \vec{F}_i - \vec{w}_{i+1} \times \vec{F}_i &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
(\vec{w}_i - \vec{w}_{i+1}) \times \vec{F}_i &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
\vec{l} \times \vec{F}_i &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
\vec{F}_i &= \frac{(\vec{M}_i + \vec{M}_{i+1}) \times \vec{l}}{\|\vec{l}\|^2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Note that  $\vec{l}$  can be replaced by the nodes position vector difference  $(\vec{P}_i - \vec{P}_{i+1})$ . Repeating this development considering the nodes  $i$  and  $i - 1$  and summing, the force  $\vec{F}_{M_i}$  resulting from the bending moment on each node is obtained :

$$\vec{F}_{M_i} = \frac{(\vec{M}_i + \vec{M}_{i+1}) \times (\vec{P}_i - \vec{P}_{i+1})}{\|\vec{P}_i - \vec{P}_{i+1}\|^2} + \frac{(\vec{M}_i + \vec{M}_{i-1}) \times (\vec{P}_i - \vec{P}_{i-1})}{\|\vec{P}_i - \vec{P}_{i-1}\|^2} \tag{3.13}$$

### Radial Resultant of Axial Force $(\vec{R}_{rDR_i}, \vec{R}_{rDN_i})$

Each node is considered as a linear compression spring along the  $z$  direction. Hence, the individual axial reaction components ( $R_{z_i}$ ) can be found with :  $R_{z_i} = k_z \varepsilon_i$ , where  $k_z$  is the axial stiffness of the belt and  $\varepsilon_i$  is the difference between the groove width and the belt free width, as illustrated in Fig. 3.11.

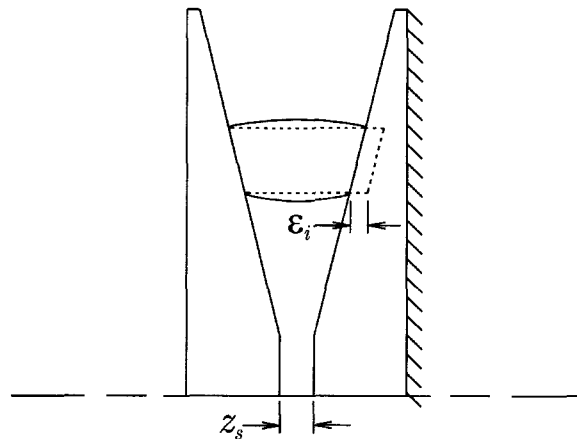


Figure 3.11 Difference between groove width and belt free width



The travel of the movable sheave  $z_s$  imposes a groove width which is a geometric function of the distance between the node and the center of the pulley defined by the sheave profile  $r_i(x_i, y_i)$ . It follows that the variable  $\varepsilon_i$  depends on the position of the node and the travel of the movable sheave  $\varepsilon_i(x_i, y_i, z_s)$ . Since  $\vec{f}_{z_i}$  is neglected (see section 3.3.2), the force balance on the movable sheave can be expressed as follows :

$$F \cong \sum_{i=1}^q k_z \varepsilon_i(x_i, y_i, z_s) \quad (3.14)$$

$\varepsilon_i$  represents the compression of the belt into the pulley groove. If the groove width is larger than the belt, it means that there is no contact between the parts at this node. This causes a discontinuity in Eq. (3.14) at  $\varepsilon_i = 0$ , making it impossible to solve analytically. Therefore, Eq. (3.14) is solved numerically to find the sheave travel  $z_s$  making the sum of axial reactions on the belt equal to the axial force applied to the pulley. The values of  $\varepsilon_i$  being known, radial components of axial force of the two pulleys for each node  $\vec{R}_{r_{DR_i}}$  and  $\vec{R}_{r_{DN_i}}$  can be determined :

$$\vec{R}_{r_{DR_i}} = 2k_z \varepsilon_i \tan(\beta_i) \vec{u}_{r_{DR_i}} \quad (3.15)$$

$$\vec{R}_{r_{DN_i}} = 2k_z \varepsilon_i \tan(\beta_i) \vec{u}_{r_{DN_i}} \quad (3.16)$$

where  $\vec{u}_{r_{DR_i}}$  and  $\vec{u}_{r_{DN_i}}$  are respectively unit vectors in the radial direction of the drive pulley and the driven pulley, defined by :

$$\vec{u}_{r_{DR_i}} = \frac{\vec{P}_i}{\|\vec{P}_i\|} \quad (3.17)$$

$$\vec{u}_{r_{DN_i}} = \frac{(\vec{P}_i - \vec{P}_{DN})}{\|(\vec{P}_i - \vec{P}_{DN})\|} \quad (3.18)$$

Note that the groove half-angle  $\beta_i$  depends on radial position  $r_i(x_i, y_i)$  in the case of progressive-angle sheaves and  $\vec{P}_{DN}$  is the position of the driven pulley center  $\vec{P}_{DN} \equiv [E, 0]$  (see Fig. 3.3).

### Friction $(\vec{f}_{DR_i}, \vec{f}_{DN_i})$

The nodes in contact with the pulleys are subject to friction. Since the transverse ( $z$ -direction) contribution of friction is neglected (see section 3.3.2), friction is only treated in the  $x$ - $y$  plane. Under a constant normal force, friction models commonly used for simulation usually consider friction force as a continuous function of the magnitude of the

relative velocity  $\|\vec{v}_{rel}\|$  between the contacting bodies to facilitate numerical treatment [Haessig Jr et Friedland, 1991]. This implies that friction force is null when  $\|\vec{v}_{rel}\|$  is 0, which makes these models inappropriate for predicting zero relative velocity equilibrium positions, as explained by Andersson et al. [Andersson *et al.*, 2007]. To overcome this problem, Karnopp's model of friction [Karnopp, 1985] proposes two friction states : *stuck* or *sliding*, that are distinguished based on  $\|\vec{v}_{rel}\|$ . If  $\|\vec{v}_{rel}\|$  is smaller than a given threshold  $v_{rel,min}$ , the body is considered *stuck*. Otherwise, it is considered *sliding*. In the later case, the friction force is defined by a function of  $\|\vec{v}_{rel}\|$ . On the other hand, if the body is *stuck*, the friction force is determined by the sum of the other forces acting on the body  $\vec{\phi}$ . Indeed, the friction force must be equal in magnitude and in the opposite direction of  $\vec{\phi}$ , in order to maintain the body in its *stuck* state. If  $\|\vec{\phi}\|$  is greater than the breakaway force ( $f_{max}$ ), relative motion occurs. Figure 3.12 shows a representation of the magnitude of the friction force  $\|\vec{f}\|$  for the possible friction states.

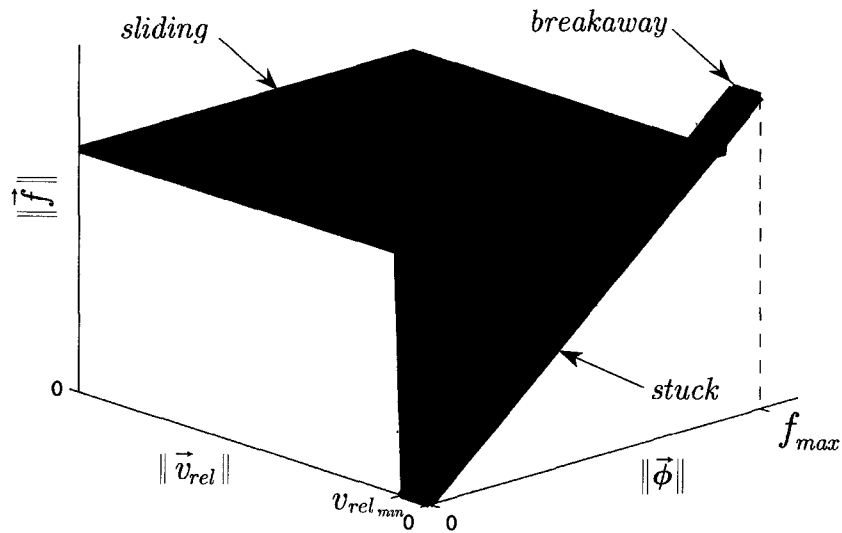


Figure 3.12 Karnopp's friction model [Karnopp, 1985]

Using Karnopp's model on the nodes, the friction force with both pulleys (suffixes *DR* and *DN* are omitted for brevity) is defined by :

$$\begin{aligned}
\vec{f}_i &= -R_{z_i} \mu_d \frac{\vec{v}_{rel_i}}{\|\vec{v}_{rel_i}\|} & \text{if } (\|\vec{v}_{rel_i}\| \geq v_{rel_{min}}) & \text{sliding} \\
\vec{f}_i &= -\vec{\phi}_i & \text{if } \left( \begin{array}{l} \|\vec{v}_{rel_i}\| < v_{rel_{min}} \\ \|\vec{\phi}_i\| \leq f_{max_i} \end{array} \right) & \text{stuck} \\
\vec{f}_i &= -f_{max_i} \frac{\vec{\phi}_i}{\|\vec{\phi}_i\|} & \text{if } \left( \begin{array}{l} \|\vec{v}_{rel_i}\| < v_{rel_{min}} \\ \|\vec{\phi}_i\| > f_{max_i} \end{array} \right) & \text{breakaway}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

As shown in Fig. 3.13, the relative velocity between the node and the pulley at its contact point  $\vec{v}_{rel_i}$  is obtained by the difference of the node's velocity and the pulley speed :

$$\vec{v}_{rel_i} = \vec{v}_i - (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \tag{3.20}$$

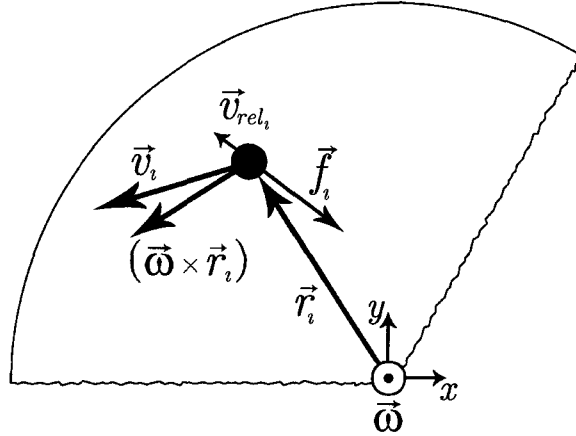


Figure 3.13 Relative velocity between a node and the pulley

The breakaway force for each node is computed with Coulomb's law, using the static coefficient of friction  $\mu_s$  and the axial reaction component of the axial force  $R_{z_i}$  :

$$f_{max_i} = \mu_s R_{z_i} \tag{3.21}$$

The vectorial sum of the forces other than friction applied to the node  $\vec{\phi}_i$  is obtained in the rotating pulley's reference frame (see Fig. 3.14). Hence, fictitious forces due to particle acceleration in the non-inertial reference frame must be added. These are strongly

dominated by the centrifugal fictitious force, as defined by :

$$\vec{F}_{C_i} = m \|\vec{\omega}\|^2 \vec{r}_i \quad (3.22)$$

Hence, omitting the other fictitious forces that are negligible in comparison to  $\vec{F}_{C_i}$ ,  $\vec{\phi}_i$  becomes :

$$\vec{\phi}_i = \vec{R}_{r_i} + \vec{F}_{C_i} + \vec{T}_{i+1} + \vec{T}_{i-1} \quad (3.23)$$

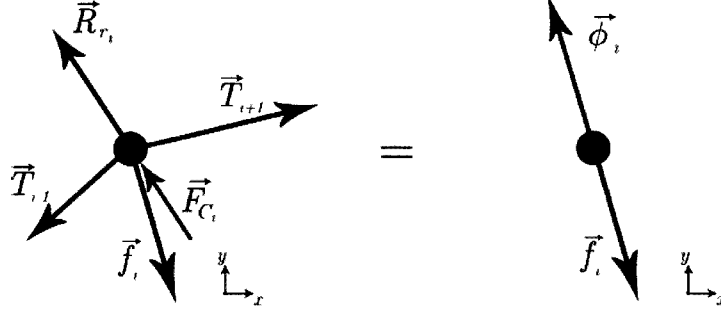


Figure 3.14 Force balance on a node in the rotating reference frame

### 3.3.4 Driven Pulley Sub-Model

Unlike the drive pulley, of which the angular speed is an input of the model, the driven pulley speed  $\vec{\omega}_{DN}$  is a variable. Its time response is given by the solution of Newton's second law :  $\frac{d\vec{\omega}_{DN}}{dt} = \frac{1}{J} (\vec{\tau}_f + \vec{\tau}_{DN})$ , where  $\vec{\tau}_f$  is the torque applied on the pulley by belt friction and  $J$  is the angular moment of inertia of the pulley and drive shaft assembly.  $\vec{\tau}_f$  is given by :

$$\vec{\tau}_f = \sum_i^n \left( \vec{P}_i \times \vec{f}_{DN_i} \right) \quad (3.24)$$

The axial force on the movable sheave of the driven pulley  $F_{DN}$  is applied by a torque-cam mechanism and a spring (see Fig. 3.15). This system is usually modeled so that  $F_{DN}$  is the sum of the spring preload  $F_0$ , the spring force and the cam force  $F_{cam}$  [Kim *et al.*, 2002; Cammalleri, 2005; Sheu *et al.*, 1999; Huang et Hu, 2003] :

$$F_{DN} = F_0 + k_{DN} z_{s_{DN}} + F_{cam} \quad (3.25)$$

where  $k_{DN}$  is the driven pulley spring constant and  $z_{s_{DN}}$  is the driven pulley movable sheave travel.

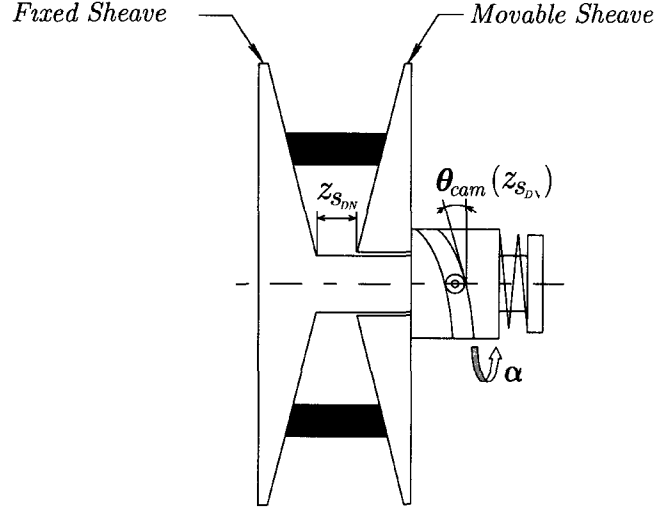


Figure 3.15 Driven pulley mechanism

However,  $F_{cam}$  is not only a function of the driven pulley torque, but also of the relative angle between the two sheaves corresponding to the driven pulley movable sheave travel  $\alpha(z_{s_{DN}})$ . Indeed, this relative rotation caused by the helical shape of the torque-cam twists the spring, resulting in a supplementary torque applied to the cam  $\tau_\alpha$ , defined by :

$$\tau_\alpha = k_{tors_{DN}} \alpha(z_{s_{DN}}) \quad (3.26)$$

where  $k_{tors_{DN}}$  is the driven pulley spring torsional stiffness. Hence, assuming that the torque transmitted by the belt is split equally between the two sheaves of the pulley, the cam force is found by :

$$F_{cam} = \frac{\frac{\tau_{DN}}{2} + \tau_\alpha}{r_{cam} \tan(\theta_{cam}(z_s))} \quad (3.27)$$

where  $r_{cam}$  is the cam radius and  $\theta_{cam}(z_{s_{DN}})$  is the cam angle corresponding to the movable sheave travel.

### 3.3.5 Simulation

#### Numerical Analysis

Using the equations developed in section 3.3.3, the model inputs  $\vec{\omega}_{DR}, \vec{F}_{DR}, \vec{\tau}_{DN}$  can be used to determine the force vector on each node,  $\vec{T}_{i-1}, \vec{T}_{i+1}, \vec{R}_{r_{DR_i}}, \vec{R}_{r_{DN_i}}, \vec{F}_{M_i}, \vec{f}_{DR_i}$  and  $\vec{f}_{DN_i}$  over time. Force vectors having being determined, the application of Newton's second law

to the nodes and the driven pulley leads to an  $n + 1$  system of differential equations :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \frac{1}{m} \left( \vec{T}_n + \vec{T}_2 + \vec{R}_{r_{DR_1}} + \vec{R}_{r_{DN_1}} + \vec{F}_{M_1} + \vec{f}_{DR_1} + \vec{f}_{DN_1} \right) \\
\frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \frac{1}{m} \left( \vec{T}_1 + \vec{T}_3 + \vec{R}_{r_{DR_2}} + \vec{R}_{r_{DN_2}} + \vec{F}_{M_2} + \vec{f}_{DR_2} + \vec{f}_{DN_2} \right) \\
&\dots \\
\frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \frac{1}{m} \left( \vec{T}_{i-1} + \vec{T}_{i+1} + \vec{R}_{r_{DR_i}} + \vec{R}_{r_{DN_i}} + \vec{F}_{M_i} + \vec{f}_{DR_i} + \vec{f}_{DN_i} \right) \\
&\dots \\
\frac{d\vec{v}_n}{dt} &= \frac{1}{m} \left( \vec{T}_{n-1} + \vec{T}_1 + \vec{R}_{r_{DR_n}} + \vec{R}_{r_{DN_n}} + \vec{F}_{M_n} + \vec{f}_{DR_n} + \vec{f}_{DN_n} \right) \\
\frac{d\vec{\omega}_{DN}}{dt} &= \frac{1}{J} (\vec{\tau}_f + \vec{\tau}_{DN})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Introducing the variable  $Z$  allows the vectorial system of Eq. (3.28) to be reduced to a single ordinary differential equation :

$$Z \equiv \begin{bmatrix} P_1^x \\ P_2^x \\ \vdots \\ P_i^x \\ \vdots \\ P_n^x \\ P_1^y \\ P_2^y \\ \vdots \\ P_i^y \\ \vdots \\ P_n^y \\ v_1^x \\ v_2^x \\ \vdots \\ v_i^x \\ \vdots \\ v_n^x \\ v_1^y \\ v_2^y \\ \vdots \\ v_i^y \\ \vdots \\ v_n^y \\ \omega_{DN} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{dZ}{dt} = \begin{bmatrix} v_1^x \\ v_2^x \\ \vdots \\ v_i^x \\ \vdots \\ v_n^x \\ v_1^y \\ v_2^y \\ \vdots \\ v_i^y \\ \vdots \\ v_n^y \\ \frac{1}{m} \left( T_n^x + T_2^x + R_{\tau_{DR_1}}^x + R_{\tau_{DN_1}}^x + F_{M_1}^x + f_{DR_1}^x + f_{DN_1}^x \right) \\ \frac{1}{m} \left( T_1^x + T_3^x + R_{\tau_{DR_2}}^x + R_{\tau_{DN_2}}^x + F_{M_2}^x + f_{DR_2}^x + f_{DN_2}^x \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \left( T_{i-1}^x + T_{i+1}^x + R_{\tau_{DR_i}}^x + R_{\tau_{DN_i}}^x + F_{M_i}^x + f_{DR_i}^x + f_{DN_i}^x \right) \\ \dots \\ \frac{1}{m} \left( T_{n-1}^x + T_1^x + R_{\tau_{DR_n}}^x + R_{\tau_{DN_n}}^x + F_{M_n}^x + f_{DR_n}^x + f_{DN_n}^x \right) \\ \frac{1}{m} \left( T_n^y + T_2^y + R_{\tau_{DR_1}}^y + R_{\tau_{DN_1}}^y + F_{M_1}^y + f_{DR_1}^y + f_{DN_1}^y \right) \\ \frac{1}{m} \left( T_1^y + T_3^y + R_{\tau_{DR_2}}^y + R_{\tau_{DN_2}}^y + F_{M_2}^y + f_{DR_2}^y + f_{DN_2}^y \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \left( T_{i-1}^y + T_{i+1}^y + R_{\tau_{DR_i}}^y + R_{\tau_{DN_i}}^y + F_{M_i}^y + f_{DR_i}^y + f_{DN_i}^y \right) \\ \dots \\ \frac{1}{m} \left( T_{n-1}^y + T_1^y + R_{\tau_{DR_n}}^y + R_{\tau_{DN_n}}^y + F_{M_n}^y + f_{DR_n}^y + f_{DN_n}^y \right) \\ \frac{1}{J} (\tau_f - \tau_{DN}) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Equation (3.29) is solved numerically using a fourth order Runge Kutta method [Chapra et Canale, 2010]. Results are presented in section 3.5. The algorithm has been coded in the MATLAB® environment. However, critical functions used to compute the force vectors on each node have been coded in the C language embedded in MATLAB® MEX-functions to reduce computing time. The system has been solved using different numbers of nodes ( $n$ ), and it has been found that 50 nodes were sufficient to obtain accurate results. Increasing  $n$

beyond this value has no influence on the result but it significantly increases the computing time.

### Belt Properties

The drive belt used in this paper is a high-performance snowmobile belt. Its friction coefficients with aluminum pulleys ( $\mu_s$  and  $\mu_d$ ) are taken from average values of former in-house tests. These values are similar to the experimental results of Yu et al. [Yu *et al.*, 1998] and are consistent with the friction coefficient used in literature [Dolan et Worley, 1985; Sorge, 2004; Cammalleri, 2005; Cammalleri et Sorge, 2009]. Belt stiffness and angular damping parameters have been obtained experimentally, using various custom apparatuses such as a tensioned-belt axial stiffness tester (see Fig. 3.16) and a belt flexural stiffness tester. Parameter values used for simulation are presented in Table 3.1.

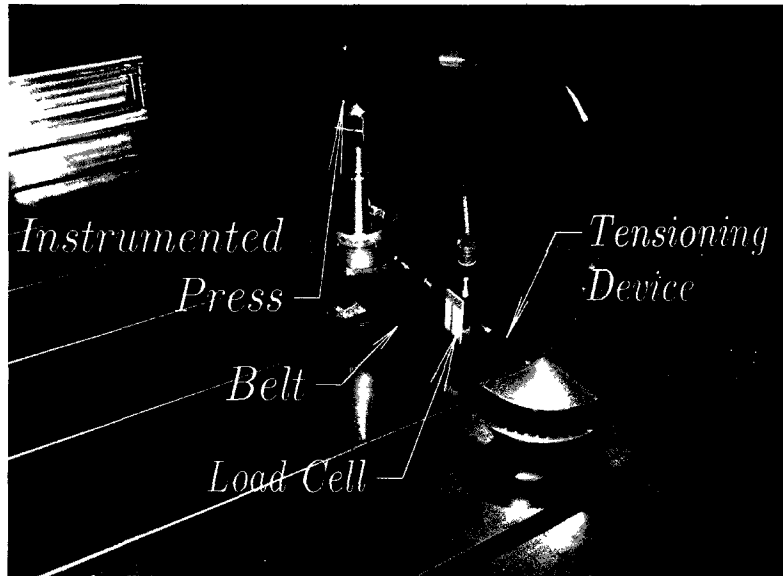


Figure 3.16 Apparatus used to determine  $k_z$

Tableau 3.1 Belt property parameters used for simulation

Parameter	Value	Unit
$\mu_s$	0.55	
$\mu_d$	0.45	
$k$	$57.87 \times 10^6$	N/m
$k_z$	$1.41 \times 10^6$	N/m
$k_{ang}$	5.73	Nm/rad
$c_{ang}$	0.02	Nm.s/rad



## 3.4 Experiments

A representative experimental database had to be created in order to adequately validate the model. High-torque and high-speed test data, currently unavailable in literature, had to be gathered, since these conditions are common for motorsport rubber-belt CVTs.

### 3.4.1 Test bench description

The test bench consists of a 130 hp gasoline engine linked to a hydraulically controlled drive pulley prototype. The output shaft of the CVT is fastened to a Borghi & Saveri® FE-260S dynamometer. The axial force on the drive pulley is applied by a single acting hydraulic cylinder. Hence, the axial force is controlled by varying the supply pressure with a servo-valve, as shown in Fig. 3.17.

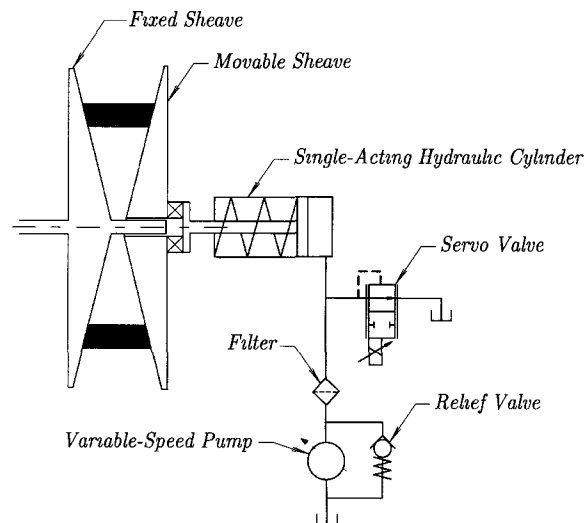


Figure 3.17 Drive pulley prototype operating principle

The drive belt links the prototype pulley to a standard snowmobile driven pulley. The engine and dynamometer are controlled by a D2T-Morphée® automation system. The servo-valve is regulated by a pressure feedback loop implemented in a RT-LAB® rapid control prototyping system. Data acquisition is also made with this device at a sampling rate of 1 kHz. A diagram of the test bench is presented at Fig. 3.18.

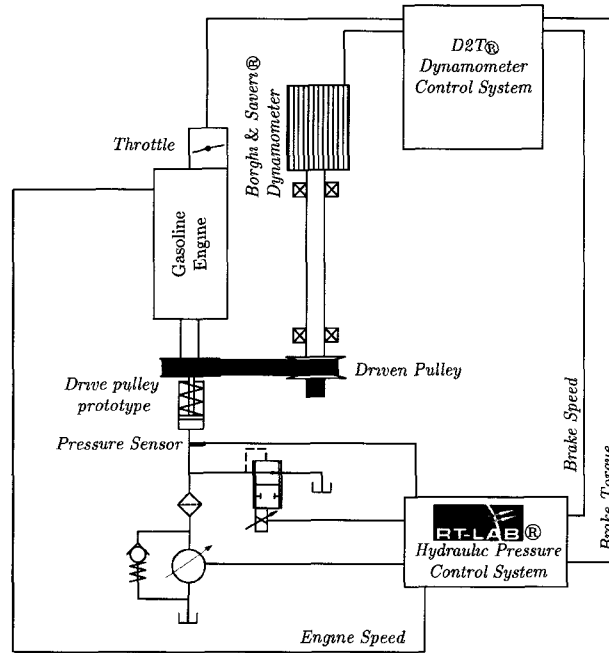


Figure 3.18 Diagram of the test bench

## 3.5 Results and discussion

### 3.5.1 Steady State

Model predictions are compared to experimental results of drive pulley axial force as a function of the transmission ratio in Fig. 3.19(a). Observation of Fig. 3.19 shows a significant dispersion in the experimental data taken at different torque levels (dots, crosses, stars and pentagrams). This could be explained in part by the means of measuring the axial force on the drive pulley. Indeed, the force is deduced from the reading of the pressure sensor, as shown on Fig. 3.18. Hence, piston seal friction is not considered, causing a possible uncertainty. Moreover, the rate and temperature dependent behavior of the belt material induces variability in the measurements, even if precautions are taken to control the environmental variables as much as possible [Chen *et al.*, 1998]. However, the general tendency of the data is very well represented by the proposed model output (lines on Fig. 3.19(a)). Note that in high-ratio and low-torque conditions, a wide range of ratios are associated to the same axial force value. This phenomenon is associated with the transition between the clutching mode and the shifting mode of the CVT, as snowmobile CVTs have no external clutching devices and instead use belt clamping as a start-up clutch. It has been impossible to obtain stabilized prediction for these conditions since the model, in its

current form, cannot deal with large relative velocities  $\|\vec{v}_{rel,t}\| \gg 1 \frac{m}{s}$ . Indeed, a better understanding of the friction mechanics during the clutching phase is needed to make the model account for these conditions and modeling this phase was beyond the scope of this work.

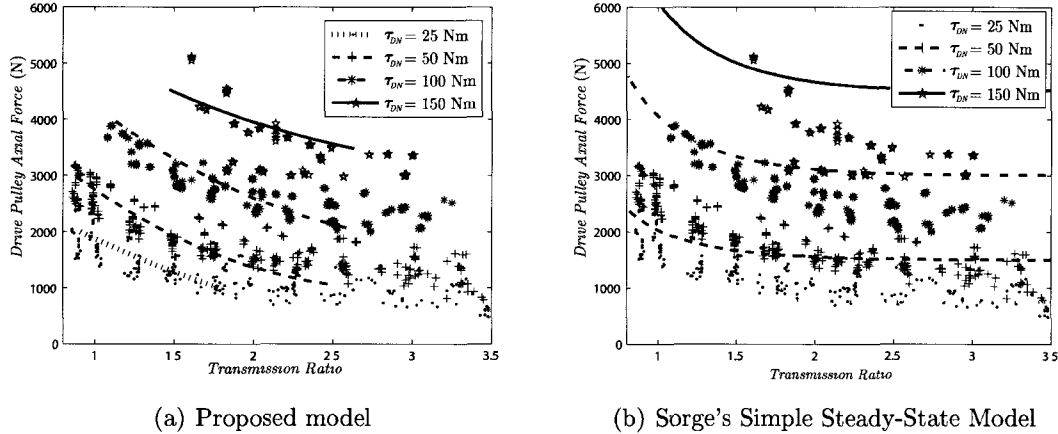


Figure 3.19 Steady-state comparison between experiments and model predictions

Figure 3.19(b) shows a comparison between the experimental results and a simple model for computing CVT steady-state axial forces from Sorge [Sorge, 1996b]. Sorge's model seems to represent adequately the clutching mode at low torque. However, its divergence with the current model and the experimental results at low ratios and high torque make it unfit to accurately predict most of the operating conditions of a recreational vehicle CVT. The better accuracy of the proposed model validates that the discrete approach is a good alternative to represent the physics of a rubber-belt CVT. Moreover, its implementation is straightforward, uses physically measurable parameters and does not require an oversimplification of the physical problem. On the other hand, Sorge's model rapidity could be useful for first order estimations of the required steady-state axial forces in the early stages of a new CVT design, for example.

### 3.5.2 Transient

The time response of the predicted and measured transmission ratio for small up-shifts and down-shifts at low torque are very similar, as shown in Fig. 3.20. This result is significant since these conditions represent a large part of the operation cycle of recreational vehicle rubber-belt CVTs. In order to optimize the transmission efficiency, the drivetrains are usually designed to make the CVT operate mostly at ratios close to 1.0, since this is

their best efficiency condition [Chen *et al.*, 1998]. Indeed, past experience showed that the transmission may run at ratios between 1.0 and 1.5 and under 50 Nm of torque as much as 75 % of a normal driving cycle.

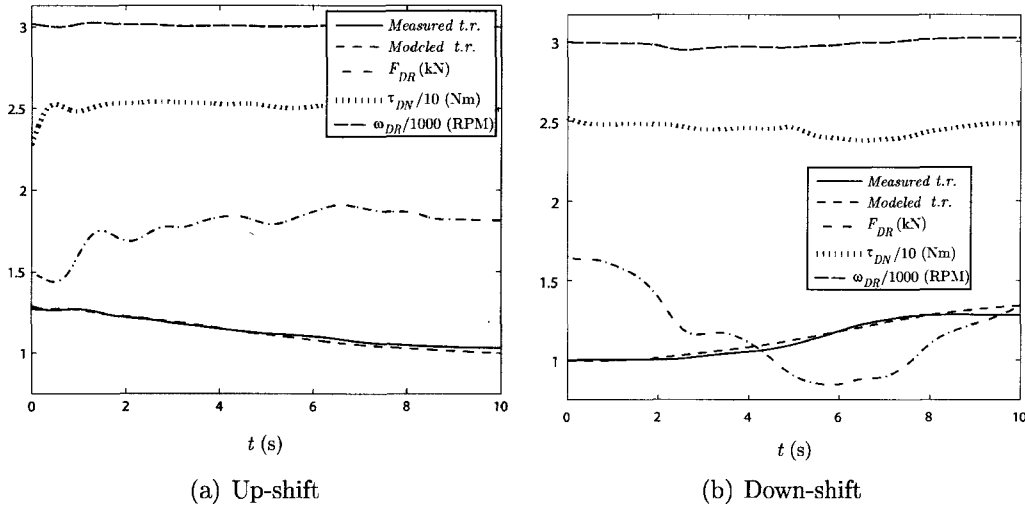


Figure 3.20 Transmission ratio (t.r.) time response for small shifts at low torque

Figure 3.21 shows the time response of the transmission ratio for a large up-shift (Fig. 3.21(a)) and a large down-shift (Fig. 3.21(b)) at high torque, respectively 100 Nm and 150 Nm. Both graphs of figure 3.21 present an important offset between the measured data and the simulation results. The cases presented in Fig. 3.21 are limit conditions of the operative range in terms of torque and ratio. Thus, it is understandable to notice some discrepancies between the model and the experimental results for these conditions. Moreover, it can be noted that the offset remains constant and the difference could be caused by the variability of the experimental transmission ratio for a given axial force (c.f. section 3.5.1). It is important to notice that, disregarding this constant offset, the modeled and measured trends of the transmission ratio over time are very similar.

The validation presented in this section confirms that the proposed model is capable of predicting the transient and stabilized response of the transmission ratio for a rubber-belt CVT. Using this model, it is possible for designers to understand how a rubber-belt CVT and its control system will react to changing driving conditions and inputs, without the need to build and test it.

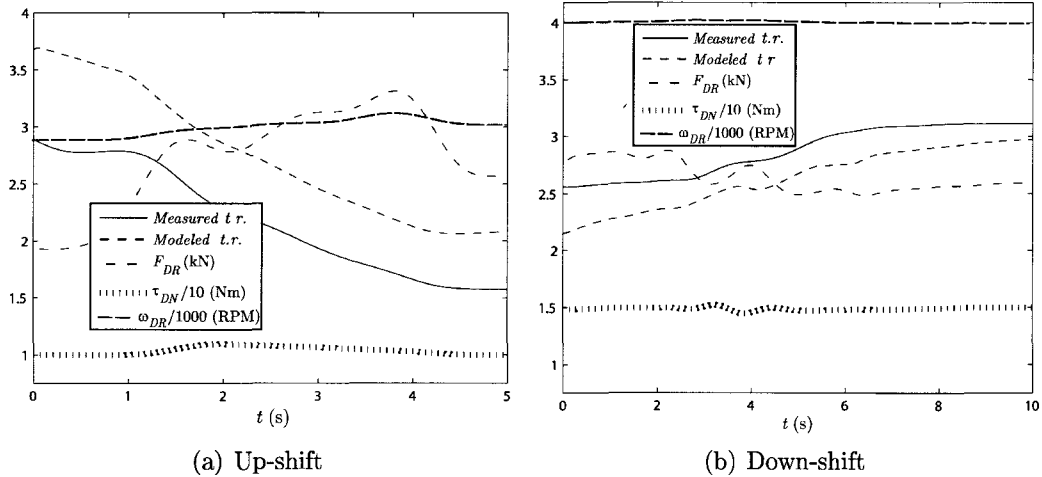


Figure 3.21 Transmission ratio (t.r.) time response for large shifts at high torque

### 3.6 Conclusion

Rubber-belt CVTs are used in many recreational vehicles. Their classical control mechanism make the engine run at constant RPM, regardless of the driving conditions. This behavior is no longer acceptable, considering today's comfort and pollution standards. Better control systems are needed to modulate the transmission ratio in real time. For the development of this new technology, a dynamic model of rubber-belt CVTs is needed to predict the axial force to be applied by the system.

This paper presented a rubber-belt CVT dynamic model using Newton's law of motion on a discretized belt. The model's key building blocks of friction model, belt model and force balance were presented along with the model numerical solution. Simulation results show good fit with experiments for both steady-state and transient conditions. Model accuracy is sufficient for most CVT design purposes. Future work could include more accurate measurement of the axial force on both pulleys. Moreover, improving the controllability of the driven pulley axial force using a device similar to the drive pulley rather than the current torque-cam mechanism would be useful for further validation of the model since it would extend the testing capabilities.

# CHAPITRE 4

## CONCLUSION

La conception de nouvelles générations de CVT à courroie de caoutchouc doit s'appuyer sur des outils de prédiction de la réponse temporelle du rapport de transmission en fonction du régime, de la force axiale appliquée sur la poulie motrice et du couple transmis. Par contre, de tels outils sont présentement inexistantes. Dans ce document, le développement d'un modèle dynamique de CVT à courroie de caoutchouc est basé sur les lois de Newton appliquées sur des éléments de courroie discrétisés. Des relations sont développées afin d'identifier les forces en jeu sur ces éléments et les équations différentielles en résultant sont résolues numériquement.

Le modèle a été validé à partir de données expérimentales couvrant une large bande de rapports de transmission et de couple. De tels résultats expérimentaux étaient jusqu'à maintenant indisponibles dans la documentation scientifique, donc un banc de test conçu pour reproduire les conditions d'utilisation réelles des CVT de véhicules récréatifs fut développé. Les prédictions du modèle concordent avec les données expérimentales en régime permanent, quoiqu'une importante dispersion parmi ces dernières soit observable. Cette dispersion peut être attribuable aux caractéristiques viscoélastiques et aux effets thermiques du matériau de la courroie, ainsi qu'à l'imprécision de mesure de la force axiale. Les résultats du modèle développé ont aussi été comparés avec un modèle existant de CVT à courroie de caoutchouc en régime permanent et ont montré une meilleure correspondance aux résultats de test.

Par ailleurs, le régime transitoire de la CVT testée est bien représenté par le modèle développé lors de conditions d'utilisation normales. Pour les cas extrêmes de couple et de variation de rapports, un décalage constant entre les prédictions et les résultats expérimentaux est visible, mais la tendance des courbes demeure similaire.

En regard du travail effectué et des résultats obtenus, il appert que l'approche discrète utilisée est valable pour la modélisation dynamique des CVT à courroie de caoutchouc et qu'elle permet l'obtention de résultats inatteignables jusqu'ici.

Pour améliorer la validation, les travaux ultérieurs utilisant l'approche discrète de modélisation des CVT à courroie de caoutchouc devraient permettre de mesurer précisément la force axiale appliquée sur chacune des poulies. De plus, l'ajout d'un actionneur similaire à

celui de la poulie motrice sur la poulie menée permettrait d'étendre le domaine de validation, en découplant la force axiale de la poulie menée du couple. Finalement, il pourrait être intéressant de considérer l'aspect énergétique du problème étudié et de comparer les courbes de rendement expérimental et théorique.

# LISTE DES RÉFÉRENCES

- Aaen, O. (1986) *Clutch Tuning Handbook*. Aaen performance, Racine, WI.
- Andersson, S., Söderberg, A. et Björklund, S. (2007) Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts. *Tribology International*, volume Volume 40, Issue 4, p. 580–587.
- Asumi, M., Ishikawa, H., Mori, K. et Matsudaira, N. (2005) Development of electronically controlled belt-type cvt for motorcycles. *SAE Technical Papers*, volume 2005-32-0024.
- Beer, F. P. et Johnston, E. R. (2007) *Vector Mechanics for Engineers, Static and Dynamic*, 8<sup>e</sup> édition. McGraw-Hill, New York.
- Cammalleri, M. (2005) A new approach to the design of a speed-torque-controlled rubber v-belt variator. *Journal of Automobile Engineering*, volume 219, n<sup>o</sup> 12, p. 1413–1427.
- Cammalleri, M. et Sorge, F. (August 30 - September 2 2009) Approximate closed-form solutions for the shift mechanics of rubber belt variators. Dans *DETC2009-86638*. Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, San Diego, USA.
- Carbone, G. (2002) *Shifting Dynamics in Continuously Variable Transmissions*. Thèse de doctorat, Politecnico di Bari, Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Gestionale.
- Chapra, S. C. et Canale, R. P. (2010) *Numerical Methods for Engineers*, 6<sup>e</sup> édition. McGraw-Hill, New York.
- Chen, T., Lee, D. et Sung, C. (1998) An experimental study on transmission efficiency of a rubber v-belt cvt. *Mechanism and Machine Theory*, volume 33, n<sup>o</sup> 4, p. 351–363.
- Dobrovolski, V., Zablonki, K. et Mak, S. (1971) *Elements de machines*. Éditions MIR, Moscou.
- Dolan, J. P. et Worley, W. S. (1985) Closed form approximations to the solution of v-belt force and slip equations. *Journal of Mechanical Design*, volume 107, p. 292–300.
- Farges, R. (s.d.) Poulies et courroies de transmission. *Techniques de l'ingénieur, Traité de génie mécanique*, volume B5680.
- Ferrando, F., Martin, F. et Riba, C. (1996) Axial force test and modelling of the v-belt continuously variable transmission for mopeds. *Journal of Mechanical Design*, p. 266–273.
- Gerbert, G. (1972) Force and slip behaviour in v-belt drives. *Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series*, volume 67, p. 1–101.
- Gerbert, G. (1999) *Traction Belt Mechanics*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 605 p.



- Haessig Jr, D. et Friedland, B. (1991) Modeling and simulation of friction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, volume 113, p. 354–362.
- Halbmann, W. (1986) Zum schlupf kraftschlüssiger umschlingungsgetriebe. *Fortschrittberichte VDI*, volume 1, n° 145.
- Huang, Y. et Hu, B. (2003) Minimum fuel consumption and co emission and optimum speed of the motorcycle with a cvt. *Journal of Energy Resources Technology*, volume 125, n° 4, p. 311–317.
- Karnopp, D. (1985) Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, volume 107, p. 100–103.
- Kim, H., Lee, H., Song, H. et Kim, H. (2002) Steady state and transient characteristics of a rubber belt cvt with mechanical actuators. *KSME international journal*, volume 16, n° 5, p. 639–646.
- Pfeiffer, F., Lebrecht, W. et Geier, T. (2004) State-of-the-art of cvt-modelling. Dans *2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress, San Francisco, USA*. p. 23–25.
- Sheu, K., Chiou, S., Hwang, W., Wang, T. et YAN, H. (1999) New automatic hybrid transmissions for motorcycles. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC (A)*, volume 23, n° 6, p. 716–727.
- Sorge, F. (1996a) A qualitative-quantitative approach to v-belt mechanics. *Journal of Mechanical Design*, volume 118, p. 15.
- Sorge, F. (1996b) A simple model for the axial thrust in v-belt drives. *Journal of mechanical design*, volume 118, n° 4, p. 589–592.
- Sorge, F. (August 2003) Analysis of the ratio shift transient in v-belt variators. Dans Huang, T. (éd.), *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*. China Machinery Press, Tianjin, China.
- Sorge, F. (September 2004) Transient mechanics of v-belt variators. Dans *04CVT-45. CVT 2004 Conference, San Francisco, USA*.
- Srivastava, N. et Ul-Haque, I. (2005) On the transient dynamics of a metal pushing v-belt cvt at high speeds. *International Journal of Vehicle Design*, volume 37, n° 1, p. 46–66.
- Srnik, J. et Pfeiffer, F. (1997) Dynamics of CVT chain drives : Mechanical model and verification. Dans *Proceedings of the 16th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Sacramento, CA, Sept. 14*, volume 17. Citeseer.
- Yang, X., Naishi, C. et Zhaohui, L. (2008) Electro-mechanical control devices for continuously variable transmission of vehicle. *SAE Technical Papers*, volume 2008-01-1687.
- Yavari, A., Nouri, M. et Mofid, M. (2002) Discrete element analysis of dynamic response of Timoshenko beams under moving mass. *Advances in Engineering Software*, volume 33, n° 3, p. 143–153.

Yu, D., Childs, T. et Dalgarno, K. (1998) Experimental and finite element studies of the running of v-ribbed belts in pulley grooves. *Journal of Mechanical Engineering Science*, volume 212, n° 5, p. 343–354.