UNE INGENIERIE DIDACTIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DU THEOREME DE THALES AU COLLEGE

Eric Laguerre

UNIVERSITE DENIS DIDEROT PARIS 7
UFR de MATHEMATIQUES

ECOLE DOCTORALE
Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines

THESE

Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

Spécialité : didactique des mathématiques

Présentée et soutenue publiquement par

Eric LAGUERRE

Le 23 novembre 2005

UNE INGENIERIE DIDACTIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DU THEOREME DE THALES AU COLLEGE

Directeurs de thèse
Michèle Artigue
François Colmez

Composition du jury

M-J. Perrin-Glorian, Professeur des Universités, Université d'Artois	**Président**
R. Straesser, Professeur des Universités, Université de Giessen	**Rapporteur**
A. Rouchier, Professeur des Universités, IUFM d'Aquitaine	**Rapporteur**
A. Kuzniak, Professeur des Universités, IUFM d'Orléans-Tour	**Examinateur**
M. Artigue, Professeur des Universités, Université Denis Diderot Paris 7	**Directeur**
F. Colmez, Maître de Conférences, Université Denis Diderot Paris 7	**Directeur**

Pour nous autres, les grecs, toutes choses sont formes. Nous n'en retenons que les rapports.
Paul Valéry (Eupalinos, ou l'architecte, 1921)

Remerciements

Notre présent travail n'aurait pas pu être mené à bien sans les nombreux et précieux concours dont nous avons bénéficié. Aussi, nous tenons en tout premier lieu à remercier Monsieur François Colmez et Madame Michelle Artigue qui ont bien voulu diriger mes travaux de recherches. Plus précisément, la grande gentillesse, les compétences, les encouragements de Monsieur Colmez ont été une des composantes importantes dans la réussite de ce projet. Ses orientations ont notamment été d'un très grand secours lors de l'élaboration de l'ingénierie et dans la première relecture du manuscrit. Un travail de recherche consiste plus à savoir revenir en arrière sur le chemin que nous venons de baliser qu'à découvrir et simplement défricher de nouvelles voies. A ce sujet, nous remercions tout particulièrement Madame Artigue, notre directrice de recherche officielle, pour les conseils de mise en forme qu'elle nous a prodigués, pour les redressements de nos erreurs et les réorientations fermes, courtoises mais indispensables qu'elle a su donner à notre travail lorsque ce dernier empruntait des voies de traverse trop vastes voire sans issue.

Nous exprimons toute notre gratitude et notre sympathie à Mademoiselle Chassagne, à Messieurs Clemann et Le Flock, professeurs au collège Martin Luther King de Villiers le Bel, à Monsieur Gilbert Hozer, professeur au collège Georges Clémenceau de Paris 20$^{\text{ème}}$, à Madame Andrieux et à Messieurs Bouscara, Durand et Manchon, professeurs au collège Léon Blum de Villiers le Bel, qui nous ont si complaisamment communiqué leurs préparations de cours. Nous tenons à remercier doublement Monsieur Manchon qui a accepté de sacrifier onze séances de cours et l'intrusion d'une caméra dans une classe de quatrième. Par la même occasion, que ses élèves ainsi que ceux de la classe de 3$^{\text{ème}}$ 2 soient remerciés pour leur participation active, leur patience et la pertinence de leurs interventions.

Nous sommes également reconnaissant envers Monsieur Havronsard, chef des travaux au Lycée Mendès France de Villiers le Bel, qui nous a été d'un grand secours pour l'usinage de pièces en bois et envers Monsieur Boukadoum, professeur de technologie au collège Léon Blum de Villiers le Bel, pour sa collaboration à l'assemblage de ces pièces avec les élèves.

Il est encore une déclaration essentielle que nous tenons à ajouter. Pour l'ensemble de notre travail, nous avons eu recours à l'assistance inappréciable de Monsieur Degenne, auquel nous sommes redevable d'un grand service, puisque ce collègue et ami a eu l'obligeance d'en corriger les épreuves. Nous le remercions aussi vivement pour bien des observations pertinentes qui nous ont permis d'améliorer ce texte.

Ces mêmes remerciements sont également destinés à Madame Michèle Denat, ma mère, qui a bien voulu s'acquitter de la tâche ingrate de saisie d'une partie de mon manuscrit sur micro informatique. Nous devons également rendre hommage à la courtoisie toujours en éveil de MME et MM les bibliothécaires toutes les fois que nous avons dû avoir recours aux ouvrages et aux documents de leurs établissements. Nous saluons précisément les bibliothécaires de la Bibliothèque Nationale, de l'Institut Henri Poincaré, de l'Institut National de Recherche Pédagogique qui ont gentiment mis à notre disposition les livres les plus anciens. Nous tenons tout spécialement à remercier Madame Sornaga Annie, responsable de la bibliothèque de l'IREM de l'Université Paris VII Denis Diderot pour le soutien moral qu'elle nous a apporté dans des moments de découragement et de solitude qui sont inhérents à un travail de recherche, quel qu'il soit. Nous remercions tous ceux, fort nombreux, que nous n'avons pas cités et qui, par leurs suggestions, ont apporté leur pierre.

Il serait injuste d'oublier M. Féron, Principal adjoint du Collège Léon Blum à Villiers le Bel, qui nous a permis, en nous libérant la journée du Lundi et le Mardi matin dans notre emploi

du temps et ce durant toute la durée de la thèse, de mener à bien ce travail en six ans au lieu de sept ou huit si cette facilité ne nous avait pas été accordée.

Je remercie Messieurs Rudolf Straesser et André Rouchier pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi que Madame Marie-Jeanne Perrin-Glorian et Monsieur Alain Kuzniak qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.

D'après Marcel Proust, il y a une chose plus difficile encore que de s'astreindre à un régime, c'est de ne pas l'imposer aux autres. Il me serait possible de regretter rétrospectivement d'avoir entraîné ma petite famille dans les affres et les contraintes d'une aventure personnelle aussi longue qu'incertaine. En effet, combien de soirées, de samedis et dimanches, combien de jours de fête et de jours fériés, combien de périodes de vacances scolaires Nathalie, mon épouse, Marion, Camille et Nathan mes enfants ont-ils consenti à passer sans moi, sans savoir si cela en valait réellement la peine puisque nous en doutions nous même ? Combien de jours à supporter les variations de notre moral, nos sautes d'humeur au gré des difficultés rencontrées ? Que leur dévouement soit instamment honoré avec tout l'amour que je leur porte.

A tous les hommes et les femmes de bonne volonté
A la mémoire de mon frère qui aurait eu 21 ans

Table des matières

INTRODUCTION et CADRE THEORIQUE

PREMIERE PARTIE
Etude épistémologique et historique

CHAPITRE 1
Problématique et méthodologie

CHAPITRE 2
La Période de l'Antiquité à la Renaissance

CHAPITRE 3
Le théorème de Thalès et les concepts qui l'entourent au XVII ème siècle

CHAPITRE 4
Le théorème de Thalès au XVIII ème siècle

CHAPITRE 5
Le théorème de Thalès au XIX ème siècle

CHAPITRE 6
Le théorème de Thalès au XX ème siècle

DEUXIEME PARTIE
Variables didactiques et obstacles

CHAPITRE 1
Cadre théorique et échantillon expérimental

CHAPITRE 2
Elaboration et mise en place des expériences. Résultats et interprétations

TROISIEME PARTIE
L'enseignement actuel du théorème de Thalès

CHAPITRE 1
Outils d'analyse des ouvrages et des préparations de cours

CHAPITRE 2
Analyse des programmes et des ouvrages scolaires

CHAPITRE 3
Analyse des préparations de cours

QUATRIEME PARTIE
Ingénierie didactique, élaboration, mise en place et analyse

CHAPITRE 1
Genèse de l'ingénierie

CHAPITRE 2
Elaboration des situations problèmes introduisant le théorème de Thalès

CHAPITRE 3
Mise en place des activités et analyse des productions

CONCLUSION

INTRODUCTION

ET

CADRE THEORIQUE

INTRODUCTION et CADRE THEORIQUE

Table des matières

I. Introduction

Nous avons choisi de travailler sur le théorème de Thalès, car il permet de faire une liaison entre le géométrique et le numérique, mais plus précisément entre parallélisme et proportionnalité, et ouvre ainsi de nombreux horizons mathématiques au collège et les voies de l'homothétie et du barycentre au Lycée.

Le but de notre travail est de construire une ingénierie didactique épistémologiquement satisfaisante. Nous pensons *a priori* que le méso-espace permet de légitimer et d'introduire le théorème de Thalès. La question est de savoir si ses fonctionnalités seront transmises et surtout s'il est possible de les transmettre ?

Notre travail comporte quatre parties (Artigue, 1990).

L'analyse épistémologique des contenus théoriques et didactiques visés par l'enseignement du théorème de Thalès.

Nous analysons les textes de mathématiciens de la période classique (Euclide, Cavaliéri, Galilée, Descartes, Arnauld, Clairaut, Bossut, Bezout, Lamy, Lacroix, Legendre), de la période axiomatique (Hilbert, Hadamard, Dedekind, Borel, Lebesgue...) et de la période contemporaine.

Nous précisons le champ d'insertion de cette propriété dans le corpus mathématique et étudions en particulier les difficultés diverses et les obstacles épistémologiques relatifs aux nombres réels, à la mesure des grandeurs, au continu et à l'infini. Nous les prenons en compte pour l'élaboration de notre ingénierie.

Cette étude nous permet également de mettre en évidence les évolutions et les changements de points de vue sur les diverses notions nécessaires à la démonstration du théorème.

L'analyse des conceptions des élèves, à propos du théorème de Thalès comportant la délimitation du champ conceptuel, le dépistage des indices de difficultés et l'étude de variables didactiques liées aux figures, comme l'orientation du dessin, la prégnance d'une figure sur une autre, la distribution des longueurs.

L'analyse de l'enseignement actuel de ce théorème, en tentant de dégager les habitudes et les effets de l'enseignement contemporain. Pour cela, nous avons étudié les programmes et les commentaires, des manuels scolaires, les préparations de cours de quelques professeurs.

L'élaboration de l'ingénierie et son expérimentation

Les matériaux précédents servent à construire l'ingénierie didactique fondée d'une part sur les concepts d'obstacles épistémologiques et didactiques, sur la notion de variables didactiques et sur les fonctionnalités et le sens du théorème étudié (le méso-espace, la proportionnalité interne et externe, les nombres réels).

L'observation est complétée par un enregistrement des séances au caméscope et les écrits des élèves.

Cette partie se termine par l'analyse *a posteriori* et à l'évaluation de l'ingénierie.

II. Cadre théorique

II.1 Cadres théoriques généraux

Les cadres théoriques généraux retenus concernent quatre domaines principaux.
Un cadre **épistémologique** : les concepts d'obstacles qui sont utiles dans notre première partie mais également dans la partie consacrée aux variables didactiques et aux obstacles.

Un cadre **situationnel** : la théorie des situations qui est employée dans l'analyse des ouvrages et des préparations de cours et également dans la construction de notre ingénierie.

Un cadre **institutionnel** : l'organisation praxéologique permet d'analyser la construction des démonstrations à travers l'histoire. A l'intérieur de ce cadre institutionnel rentre également une grille d'analyse des exercices et des activités mathématiques contemporains.

Un cadre **géométrique** : il concerne les différentes appréhensions des figures, les diverses modifications qu'elles peuvent subir ainsi que les problématiques géométriques, pratique, spatio-géométrique et de modélisation dont peut relever une question de géométrie. Il intervient à de nombreuses occasions mais plus spécifiquement dans la partie réservée à l'étude des obstacles et des variables didactiques.

II.1.1 Cadre épistémologique : les obstacles

Un obstacle, d'après Brousseau (1983, (a)), se manifeste par des erreurs reproductibles et persistantes. Cet auteur en définit diverses formes (1989) :

les **obstacles ontogénétiques ou cognitifs** qui sont liés au développement psychogénétique de l'Homme ; le sujet développe des connaissances appropriées à ses moyens disponibles et à ses buts envisageables à un âge donné.

les **obstacles épistémologiques** qui sont historiquement attestés par une réelle difficulté de conceptualisation de la part des mathématiciens et qui participent au sens que l'on peut donner aux notions auxquelles le savoir se rapporte, ils sont donc constitutifs de la connaissance. Ces obstacles ont résisté longtemps et il est possible qu'ils aient leur équivalent dans la pensée des élèves, bien que leur environnement matériel et culturel n'est plus le même.

D'autres obstacles sont le résultat d'un enseignement particulier qui peut aboutir à des décisions didactiques malencontreuses, il s'agit alors d'**obstacles didactiques**. Ces obstacles semblent ne dépendre que des choix didactiques ou que d'un projet du système éducatif.

Nous nous intéressons aux obstacles épistémologiques.

<u>a) Les obstacles épistémologiques</u>

Un obstacle est épistémologique s'il est lié à l'acte de construction des connaissances scientifiques. Cette définition est suffisamment vaste pour que nous cherchions à savoir, comment, dans notre travail, nous allons pouvoir détecter rationnellement de tels obstacles ?

Nous nous référons à Artigue (1990) qui identifie des processus producteurs d'obstacles à la fois historiquement et dans l'apprentissage des élèves.

- <u>la généralisation abusive</u>.
- <u>la régularisation formelle abusive</u>.

L'auteur prend différents exemples du côté d'erreurs rencontrées chez nos élèves du type $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ou $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- la fixation sur une contextualisation familière.

Ce processus est visible historiquement : par exemples l'attachement de la notion de quantité et de nombre à celle de grandeur ou l'attachement des fractions à la conception partage de l'unité et la tentative de déstabiliser ce point de vue au profit de la commensurabilité.

- l'amalgame des notions sur un support donné.

Cela peut être constaté par exemple chez les élèves qui traitent de la même façon les variations des périmètres et des aires.

La question que nous pouvons légitimement nous poser est de savoir s'il est bien nécessaire de tenir compte des obstacles en particulier épistémologiques, dans le cadre de l'élaboration d'une ingénierie didactique ?

Pour tenter de répondre à cette question, nous citons Brousseau (1989) :

> "Ignorer les obstacles conduit :
> - soit à enseigner, parmi les connaissances "définitives", celles qui semblent pouvoir être comprises des élèves et qui doivent simplement s'ajouter aux précédentes. [...],
> - soit à enseigner les connaissances définitives sous leur forme et leur "organisation" définitive comme un langage, avec le risque d'un usage uniquement formel et dénué de sens, lorsque ce langage peut ne pas être adapté au développement des élèves."

Brousseau différencie, par ailleurs, deux types **d'obstacles épistémologiques** :

- ceux qui ne sont pas évitables, qui sont encore d'actualité et qui ne doivent pas être ignorés ;
- et ceux qui sont évitables, qui peuvent et doivent être contournés pour permettre un accès plus rapide aux significations et aux pratiques modernes.

Duroux (1983) a précisé les conditions que devrait satisfaire une connaissance pour pouvoir être déclarée comme obstacle. Dans le processus d'acquisition, un obstacle doit répondre aux critères suivants :

> "1. Il s'agit d'une connaissance qui fonctionne comme telle sur un ensemble de situations et pour certaines valeurs des variables de ces situations. [...]
>
> 2. L'obstacle est une connaissance qui, en tentant de s'adapter à d'autres situations ou à d'autres valeurs des variables, va provoquer des erreurs spécifiques, repérables, analysables.
>
> 3. L'obstacle est une connaissance stable. Dans les situations qui sortent de son domaine de validité, son rejet coûtera plus à l'élève qu'une tentative d'adaptation à tout prix, même si cela alourdit notablement les processus de résolution employés.
>
> 4. L'obstacle ne pourra donc être franchi que dans des situations spécifiques de rejet et ce rejet sera constitutif du savoir."

A ces notions d'obstacles peut être rattachée la notion de **préconstruit**.

b) Les préconstruits

Les **préconstruits** constituent la base des représentations spontanées de chacun des individus. Ils sont présents à la fois dans la construction scientifique du réel et dans la construction didactique du savoir.

> " L'objet est installé par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion" (Chevallard, 1991 (b)).

Une **première forme de préconstruit** est l'existence acceptée comme évidente d'objets mathématiques plus complexes qu'ils ne paraissent et qui méritent que l'on s'intéresse à leur genèse. Cela consiste à admettre, consciemment ou inconsciemment, des propriétés dont la véracité ne pourrait être établie que par la construction d'une nouvelle théorie mathématique.

Une **deuxième forme de préconstruit** est l'acceptation, par une carence théorique, de propriétés générales qui, de fait, ne sont que localement ou partiellement vraies voire même fausses.

Sierpinska (1989), considère que ces catégories de pensées, ces **préconstruits** peuvent être sources **d'obstacles épistémologiques**. Tout dépend de la façon dont sont introduits les savoirs. Ce à quoi nous nous attachons maintenant.

II.1.2 Cadres situationnels

a) La théorie des situations

Une notion n'est apprise que dans la mesure où elle est utilisable et effectivement utilisée, c'est-à-dire si elle est une solution à un problème. Ce problème constitue la signification de la notion. D'après cette théorie, le maître doit poser une question telle que l'élève, bien qu'il n'en connaisse pas la réponse, puisse finalement y aboutir par sa propre activité.

Si la notion réussit bien et assez longtemps dans un domaine donné, elle est difficile à modifier et à rejeter. Elle devient pour les connaissances ultérieures, à la fois un **obstacle** et un point d'appui.

Pour nous, lors de l'élaboration et de la mise en place de l'ingénierie didactique, il s'agit d'identifier à la fois les étapes de construction de la propriété en jeu et un problème auquel ces étapes sont une réponse. La théorie des **situations** (Brousseau, 1983 (b)) propose de réaliser ce programme :

- en énonçant un problème dont la solution nécessite l'emploi par l'élève de la connaissance seule (si possible sans que d'autres connaissances interviennent). Ce problème doit être non-didactique, c'est-à-dire que son énoncé doit être compréhensible sans que le théorème soit déjà connu et qu'il doit pouvoir se résoudre à l'aide du théorème, s'il est connu, sans interventions didactiques.

- en faisant apparaître les variables dont les changements de valeur provoquent des modifications qualitatives des stratégies optimales, ce qui indique une modification de la signification de la connaissance visée.

- En s'assurant que le problème ainsi obtenu permet d'engendrer, par ce système de variables, tous les problèmes culturellement connus où la connaissance intervient.

Il s'agit également d'examiner les difficultés et les échecs des élèves que permet de prévoir le problème fonctionnant de façon quasi isolée et de confronter ces difficultés aux observations.

- La comparaison des situations réellement utilisées dans les classes avec la situation fondamentale fait apparaître des différences dans les conditions réalisées et permet de les envisager *a priori* comme des causes d'échec de la part de l'enseignant.
- D'autres difficultés peuvent apparaître, causées par divers **obstacles** (**épistémologiques**, **didactiques**, etc.).
- il est alors possible de revenir à la situation fondamentale et d'étudier comment elle peut produire des situations d'apprentissage ou d'enseignement, puis comment ces situations peuvent être enchaînées en différents processus pour provoquer les acquisitions visées.

Brousseau a établi, à ce sujet, une typologie des situations didactiques susceptibles de permettre à l'élève de construire les connaissances dont l'apprentissage est visé, tout en leur donnant du sens. Il a mis en évidence un processus en trois phases qui sont les dialectiques de l'action, de la formulation, et de la validation.

Nous utilisons les concepts théoriques précédents au sujet des problèmes proposés dans des ouvrages historiques, dans les ouvrages scolaires ou dans les préparations de cours actuels afin de comprendre leur mode de construction et de fonctionnement.

Ces réflexions sont également fondées sur la dialectique ancien / nouveau, outil / objet de Douady (1984). Une autre façon d'introduire le savoir se fonde sur l'ostension.

b) L'ostension

Le concept d'ostension a été théorisé par Ratsimba - Rajohn (1977) et a été ensuite approfondie par Berthelot et Salin (1992) qui distinguent principalement deux types d'ostensions. D'une part, l'ostension assumée et d'autre part, l'ostension déguisée. Une troisième composante étant éventuellement l'ostension active.

Par l'intermédiaire de **l'ostension assumée**, l'enseignant présente directement les connaissances en s'appuyant sur l'observation dirigée d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations, et suppose les élèves capables de généraliser et d'en étendre l'emploi à d'autres situations. Dans ce cas, ni une situation de référence où se pose le problème pour l'élève et qui donne du sens à la problématique spatio-géométrique, par exemple, de travail dans le méso-espace et de modélisation de ce travail dans le micro-espace, ni une situation d'apprentissage a-didactique ne sont mises en scène. L'élève a la charge de "problématiser l'espace", c'est-à-dire qu'il doit faire appel à ses connaissances privées pour traduire en questions sur l'espace les questions posées dans le cadre du savoir officiel, pour faire le lien entre les solutions pratiques et les solutions géométriques, pour reconnaître dans d'autres milieux les mêmes modèles géométriques. Dans la résolution des exercices qui suivent cette présentation du savoir, certains élèves sont capables de le transformer en connaissances adaptées. Le plus grand nombre ne peut que se fier aux repères qui sont fournis par le contrat didactique, c'est-à-dire rechercher dans les ressemblances entre la situation de présentation et celle qu'ils ont à résoudre.

A travers plusieurs remarques, Berthelot et Salin indiquent que, même si l'enseignement a fait appel à l'activité de l'élève pendant plus d'un siècle, les parts respectives de l'enseignant et de l'élève, c'est-à-dire la topogénèse, sont bien claires. Les élèves réalisent des manipulations, des actions de mesurages, de pliages, et les savoirs spatio-géométriques sont conçus comme étant extérieurs au sujet et directement accessibles par la lecture de la réalité et non comme étant associés à une action anticipative du sujet au cours de la résolution d'un problème. Cette pratique est qualifiée par les auteurs **d'ostension active** qui relève aussi de l'ostension assumée.

La seconde forme principale de présentation proposée par ces auteurs est **l'ostension déguisée**. A partir des années 1980, le constructivisme piagétien et certains résultats obtenus en didactique des mathématiques concernant l'importance de la résolution active en amont de problèmes de la part des élèves pour la construction de connaissances, ont conduit les rédacteurs des programmes et des Instructions Officielles à modifier leur approche du savoir mathématique et de sa transmission. Berthelot et Salin ont montré que ces modifications superficielles liées à de présumées nouvelles approches d'enseignement, n'engendrent, en définitive, qu'une forme déguisée de l'ostension, laissant l'élève peut-être encore plus démuni que ses prédécesseurs quant au sens à donner aux notions mathématiques. Mais la forme de présentation du savoir n'est pas la seule à donner du sens à un théorème.

II.1.3 Cadres institutionnels

a) Obsolescence interne, obsolescence externe

Il peut arriver que la transposition didactique (Chevallard, 1991 (a)) ne permette pas de fonder clairement la topogenèse du savoir. En effet, lorsqu'il y a amenuisement de la distance qui doit séparer l'apprenant et l'enseignant au sujet du savoir, l'objet d'enseignement subit une **obsolescence externe**. L'objet ne vieillit pas par rapport à la durée naturelle d'un cycle d'enseignement qui correspond au vieillissement ou à une **obsolescence interne** (1991, (b)) rattachée à la **chronogenèse**, mais par rapport à une durée historique. L'entrée dans cette phase de **vieillissement historique** d'un objet d'enseignement rend son étude caduque.
L'obsolescence interne est par contre positive voire indispensable justement pour procéder au renouvellement didactique du savoir. Mais il peut arriver que le **vieillissement interne** ne s'opère plus du fait de la disparition des concepts qui le permettent, ce qui à terme rend totalement inutile, artificielle et stérile l'introduction de la proposition étudiée. Ces notions nous sont utiles tant dans notre partie consacrée à l'étude épistémologique que dans celles relevant de l'analyse de l'enseignement actuel et de la construction de notre ingénierie.

b) L'organisation praxéologique

Bien que nous puissions penser que la théorie des 4T (tâche, technique, technologie, théorie, (Chevallard, 1997)) soit mieux adaptée, par exemple, à l'algèbre qu'à la géométrie, car dans cette dernière, contrairement à l'algèbre, les tâches sont constamment mélangées, nous avons décidé tout de même de l'utiliser en l'adaptant à notre sujet. Une question consiste à savoir comment le quadruplet précédent peut évoluer suivant le niveau de complexité d'une démonstration et le nombre d'arguments utilisés pour justifier un résultat, une méthode ou l'accomplissement d'une tâche.

Partant d'un type de tâches *T*, une œuvre *O*[1] permet d'apporter un type de réponse *R* qui est une organisation formée de :

- un type de tâches *T* associé au type de questions *Q* ;
- une technique τ relative au type de tâche *T ;*
- une technologie θ relative à cette technique τ ;
- une théorie Θ relative à la technologie θ .

[1] Chevallard appelle œuvre toute production humaine dont l'objet est d'apporter une réponse à une ou plusieurs questions théoriques ou pratiques.

Une technique τ est justifiée par une technologie θ qui, de plus, la rend intelligible. Une technologie θ est elle-même produite, justifiée et rendue intelligible par une autre technologie supérieure Θ, plus vaste, qui est appelée théorie. Une théorie Θ se distingue d'une technologie θ par le fait qu'elle a une "générativité" plus grande, c'est-à-dire que davantage de résultats peuvent en être déduits et dérivés plus directement.

Une œuvre est donc vue comme apportant des réponses $R_i = \left(T_i, \tau_i, \theta_i, \Theta_i\right)$ à un ensemble de questions Q_i. Dans ce que nous venons d'écrire, lorsque les quatre niveaux sont fixés, l'organisation mathématique est générée à partir de tâches précises, ce qui correspond au niveau d'une **organisation mathématique ponctuelle**. Mais nous pouvons, par exemple, fixer maintenant le niveau technologique θ et par voie de conséquence également le niveau théorique Θ tout en faisant varier les tâches T_i et les techniques τ_i. Nous obtenons alors une **organisation mathématique locale** : $\left(T_i, \tau_i, \theta, \Theta\right)$. Une autre possibilité est de fixer le niveau théorique Θ tout en faisant varier tous les niveaux inférieurs qu'elle est censée contrôler. Nous obtenons ainsi plusieurs technologies θ_j, relatives à plusieurs techniques τ_{ij} qui elles-mêmes s'appliquent à différents types de tâches T_{ij} et nous avons alors une **organisation mathématique régionale** : $\left(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta\right)$. Enfin, il est également possible, au dernier niveau, de faire varier les quatre éléments du quadruplet, ce qui correspond à une **organisation mathématique globale** : $\left(T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k\right)$. C'est ainsi que plusieurs théories peuvent parfois être nécessaires pour démontrer un théorème faisant lui-même partie d'une autre théorie. Dans le but de comprendre le niveau de complexité d'une leçon sur le théorème de Thalès, nous utilisons cet outil dans notre première partie ainsi que dans l'analyse de l'enseignement actuel. Pour illustrer ces explications, nous renvoyons le lecteur à la partie consacrée aux organigrammes et à l'organisation praxéologique du Livre I des Eléments d'Euclide. Cette organisation mathématique est précisée par l'étude des **champs conceptuels** (Vergnaud, 1981 (a), 1987).

II.2 Cadres géométriques

II.2.1 Problématiques

a) Les trois problématiques

Berthelot et Salin (1992) ont distingué trois problématiques qui peuvent se rencontrer dans un essai de géométrie. Nous allons les illustrer en nous aidant d'une figure permettant de démontrer le théorème de Thalès. ABC est un triangle avec M un point du segment [AB], N un point du segment [AC] de telle sorte que les droites (MN) et (BC) soient parallèles. A un certain niveau de la démonstration, il est nécessaire de démontrer que les triangles ANB et AMC ont la même aire. Trois méthodes peuvent se dégager.

Il est envisageable de mesurer la hauteur et la base de chaque triangle pour ensuite appliquer la formule de l'aire du triangle. Cette solution, qui relève d'une **problématique de modélisation**, correspond à une compréhension du problème dans laquelle les triangles sont matériels et elle s'appuie sur la figure comme milieu objectif. La démarche établit un certain rapport entre le monde sensible et une modélisation dotée de règles propres. La solution est construite dans le modèle.

Une autre solution au problème peut être la fabrication d'un gabarit d'un des triangles ou de l'imaginer par la pensée pour tenter de recouvrir l'autre triangle à l'aide d'une superposition par découpage effectif ou par la pensée. Nous retrouvons d'ailleurs très régulièrement ce principe d'égalité par superposition dans les Eléments d'Euclide. Cette solution **pratique** fait appel à la signification spatiale du concept d'aire, par superposition des grandeurs et non à une connaissance géométrique. La réponse est cherchée par tâtonnement, par un ajustement au niveau de l'action sous le contrôle de la perception.

Pour montrer l'égalité des aires des deux triangles ANB et AMC, il suffit de remarquer qu'en adjoignant au premier le triangle MBC et au second le triangle NBC on obtient le triangle ABC. Il suffit alors de démontrer que les deux triangles MBC et NBC ont la même aire, ce qui est vrai puisqu'ils ont même base et même hauteur. Cette méthode **géométrique** se fonde tout d'abord sur une appréhension discursive de la figure (Duval, 1994), puis sur un concept purement géométrique de calcul d'aire.

b) Utilité d'une modélisation

Les étapes permettant de passer de l'espace à la figure ont été décrites, par exemple, par Mercier, Tonnelle (1992).

Les problèmes spatiaux en relation avec le théorème de Thalès qui sont liés au méso-espace relèvent parfois d'une solution empirique validée (problématique pratique). L'idée principale est que le problème, par arpentage par exemple, peut avoir une solution sans modélisation. Un schéma, sans que soient nommés des points, permet juste d'avoir un discours argumentatif au sujet de l'opération d'arpentage. Le dessin est suffisamment explicite, la preuve se fait par ostension. Alors que les problèmes de géométrie relèvent eux d'une solution mathématique prouvée (problématique géométrique). La modélisation est utilisable lorsqu'il s'agit d'un moyen nécessaire ou seulement plus économique de résoudre des problèmes spatiaux. Mais quoi qu'il en soit, nous tenons compte également d'une autre idée explicitée par Berthelot et Salin (1992) qui consiste à considérer qu'il n'est pas possible d'installer un autre type de problématique sans aborder la problématique pratique.

Le raisonnement se situe sur trois registres en même temps : le registre géométrique (les points, le segment, les droites...), le registre des grandeurs et le registre numérique (les mesures). Ces différents niveaux d'approche de la propriété sont forcément liés aux interprétations qu'il est possible d'avoir de la figure géométrique. Mais le problème est qu'ils ne se réfèrent pas aux mêmes types de perception.

II.2.2 Les figures géométriques

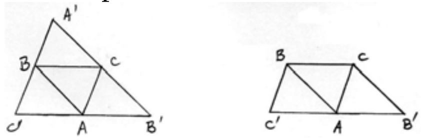
Dans les problématiques pratiques et de modélisation précédentes, l'élève contrôle les données et les propriétés du problème à l'aide de ses sens, en particulier la vue. Les objets de la géométrie font parfois partie de cet espace sensible par l'intermédiaire des dessins, qui ne sont que des représentations des objets idéaux de la géométrie, les figures. Dans notre travail, nous distinguons l'objet idéal auquel nous nous référons uniquement par raisonnement et non par action et objet représentant une situation abstraite sur lequel il est possible d'agir.

a) Les diverses appréhensions et modifications des figures géométriques

Duval (1994) indique qu'il y a quatre types d'appréhension possibles d'une figure. La plus immédiate semble être **l'appréhension perceptive**, c'est à dire celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, rapidement une forme ou un objet grâce à des indicateurs intra-figuraux qui sont, par exemple, des différences de taille ou d'orientation entre certaines unités figurales constituant l'image de ce qui est vu. Le traitement est automatique, c'est à dire immédiat au niveau du contrôle inconscient. Cette appréhension est fondamentale dans notre travail notamment pour la mise en évidence de figures prototypes, pathologiques et pour la prise en compte de la notion de prégnance empruntée à Noirfalise (1991). Par exemple, dans des contextes très différents des auteurs comme Grenier (1988) et Audibert (1982) ont montré que les élèves éprouvaient des difficultés dans la réalisation de constructions géométriques du fait de la prégnance des directions privilégiées par les bords de la feuille que l'élève intègre comme un repère de verticalité et d'horizontalité.

La perception suivante que propose Duval est **l'appréhension discursive**. Une figure est regardée par rapport à une dénomination (Soit un triangle ABC...), une légende ou une hypothèse qui en fixe explicitement les propriétés. Elle conduit à une explicitation déductive des propriétés mathématiques d'une figure autres que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. De plus, **l'appréhension discursive** peut être **congruente** ou non avec **l'appréhension perceptive** ce qui, quand le dessin est fourni, rend l'exercice plus ou moins facile.

La notion de **figure congruente** a été établie par Duval (1988). Il prend, pour l'expliquer, un exemple ; il considère les deux figures suivantes : la figure I a été proposée à des élèves de 3ème avec l'énoncé suivant : les droites (A'C') et (AC), (A'B') et



(AB), (B'C') et (BC) sont parallèles. Montrer que A est le milieu de [B'C']. Juste avant cette question, le même problème avait été posé avec la figure II qui est la sous-figure utile. Et l'énoncé fournissait les hypothèses non plus en indiquant l'existence de droites parallèles mais celles de parallélogrammes. Le passage de la présentation sémantique **congruente** du problème (figure II et hypothèses mentionnant des parallélogrammes) à la présentation **non sémantiquement congruente** (figure I montrant des triangles et hypothèses mentionnant des droites) a entraîné une chute très nette dans le taux des réussites.

L'auteur conclut alors que les élèves se concentrent généralement sur la figure sans revenir à l'énoncé. Cela caractérise une absence de l'attitude qu'il nomme **interprétation discursive** des figures. Les problèmes qui sont alors accessibles à ces élèves sont ceux dont l'énoncé est **sémantiquement congruent** avec la figure construite ou à construire ou avec la version du théorème du cours. La **congruence sémantique** ouvre ou ferme l'entrée dans le problème. Selon qu'elle est congruente ou non à l'énoncé, **l'appréhension perceptive** des figures peut avoir un rôle facilitateur ou inhibiteur sur la compréhension et la résolution d'un problème posé. Cette notion de congruence est employée dans notre travail pour une mise en évidence de catégories au sujet de la mise en équation et de la résolution de cette équation suivant les répartitions des mesures de longueurs sur une figure faisant l'objet d'une application du théorème de Thalès.

L'appréhension séquentielle, qui concerne l'ordre de construction d'une figure, est explicitement sollicitée dans les tâches de construction ou dans les tâches de description ayant pour but la reproduction d'une figure donnée. Cet ordre dépend donc non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques du programme de construction utilisé. Pour le théorème de Thalès, nous avons pensé utiliser cette appréhension dans le cadre de l'étude des figures archétypes définies ci-après.

L'appréhension opératoire fonde la fonction heuristique d'un dessin. Elle donne la possibilité de modifier une figure donnée pour en déduire une autre. A ce titre, Duval distingue trois grands types de modifications.

Tout d'abord, les **modifications optiques** consistent dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure. Viennent ensuite les **modifications positionnelles** consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle du sujet. Ces deux types de modifications sont pris en comptes dans notre travail dans le but de voir jusqu'à quel degré elles peuvent être portées pour qu'une figure puisse être reconnue comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès. Enfin, les **modifications méréologiques**, que nous retrouvons dans l'exemple que nous avons pris pour illustrer la problématique géométrique ci-dessus, consistent à partager une figure en sous-figures, pour les recombiner en une autre figure.

La détermination de ce qu'un dessin représente pour un apprenant dépend du contexte ou des indications discursives qui sont données et surtout retenues par l'élève. Nous en arrivons alors au concept de typicalité, car suivant ce que l'apprenant conserve de significatif d'une figure, pouvant adjoindre à des éléments fondamentaux certaines caractéristiques superflues, l'application de du théorème qui se rapporte à ce dessin peut éventuellement subir des "déviances" plus ou moins caractéristiques, plus ou moins reproductibles.

b) Le concept de typicalité

Notions de gradient de typicalité

La **typicalité**, au sens de la psychologie cognitive, se définit ainsi : certains éléments (sous-catégories exemplaires) constituent de meilleurs exemples que d'autres de leur catégorie d'appartenance : ils sont typiques pour cette catégorie (Cordier F et J, 1991). Ces "bons" exemples se montrent d'une grande stabilité sur des échantillons importants de sujets quand les consignes de construction sont les mêmes. Des schémas de réflexion ou des schémas cognitifs seraient biaisés de façon caractéristique par le fait que certaines propriétés non caractéristiques des figures sont privilégiées par rapport à d'autres, et ce de façon permanente, ce qui engendrerait des erreurs ou des réponses incomplètes à certaines questions. On sait, depuis les travaux de Palmer, Rosch et Chase (1981) que les différentes perspectives dans lesquelles les objets sont perçus par un sujet peuvent être situés sur un **gradient de typicalité**. En l'occurrence, les objets géométriques perçus par un sujet sont fonction des écarts que les représentations présentent avec un objet type, reconnu statistiquement comme tel. Cordier pense que les **représentations typiques** sont activées avant les représentations non typiques, ou encore que leur seuil d'activation est beaucoup plus bas. Nous allons introduire maintenant une autre notion qui est étroitement liée aux **représentations typiques**.

Le concept de prototype

De nombreux chercheurs, comme Rosch (1976), ont travaillé sur la notion de **prototype** qui se rapproche du concept de **représentation typique**. Après enseignement, un rectangle, par exemple, n'est reconnu par un élève que s'il est non carré, s'il a des dimensions caractéristiques ni trop grandes ni trop petites, s'il a des proportions moyennes et s'il est présenté avec les côtés pratiquement parallèles aux bords de la feuille. De même, nous avons observé, comme d'autres professeurs ou chercheurs bien sûr, des élèves du niveau sixième, reconnaissant un losange et surtout pas un carré lorsque ce dernier est représenté "une pointe en haut et une en bas". Mais cette notion de représentation **prototype** n'est sûrement pas l'apanage des élèves. En effet, lors d'une émission radiodiffusée, nous avons entendu un sociologue renommé énoncer clairement que notre société française, n'était plus organisée de façon triangulaire mais sous la forme d'un losange. Dans les deux cas, cet intellectuel fait appel à des figures prototypes de la forme ci-contre. Ces propos relèvent de deux représentations typiques du triangle et du losange qui privilégient implicitement une orientation.

Notre cadre théorique comporte deux axes principaux que sont les cadres théoriques généraux et les cadres géométriques. Plus précisément, les premiers se scindent, dans notre travail, en trois catégories. Tout d'abord, le cadre épistémologique lié aux obstacles et aux préconstruits doit permettre de déceler, au cours de l'étude de l'histoire de la démonstration du théorème de Thalès, les difficultés voire les obstacles ainsi que les propriétés admises consciemment ou inconsciemment par les auteurs. Le but étant d'émettre des hypothèses sur la persistance de ces difficultés pour des élèves et dans un enseignement contemporains. Ensuite, les cadres institutionnels que sont la théorie des situations et les ostensions actives, assumées et déguisées nous permettent de nous interroger sur la réalité d'une mise en action, d'une participation active, d'une construction, au moins en partie, du savoir par les élèves à travers les activités introductrices proposées dans les ouvrages et des préparations de cours actuels et passés. Cela nous engage également à relever des situations susceptibles de nourrir notre ingénierie. Enfin, les cadres institutionnels incarnés par l'obsolescence interne, l'obsolescence externe et l'organisation praxéologique sont nécessaires dans de nombreuses parties de notre travail en particulier dans notre partie historique et notre partie analyse de l'enseignement actuel. Le but étant de déterminer à la fois le niveau de complexité de l'organisation générale de la démonstration du théorème de Thalès au cours de l'histoire et dans l'enseignement contemporain et de percevoir son importance ou sa perte d'influence sur l'organisation mathématique en général d'un ouvrage.

Nous allons à présent nous consacrer à notre première partie qui traite de l'histoire et de l'épistémologie du théorème de Thalès.

PREMIERE PARTIE

Etude épistémologique et historique

PREMIERE PARTIE
Table des matières

CHAPITRE 1
Problématique et méthodologie

CHAPITRE 2
La Période de l'Antiquité à la Renaissance

CHAPITRE 3
Le théorème de Thalès et les concepts qui l'entourent au XVII ème siècle

CHAPITRE 4
Le théorème de Thalès au XVIII ème siècle

CHAPITRE 5
Le théorème de Thalès au XIX ème siècle

CHAPITRE 6
Le théorème de Thalès au XX ème siècle

CHAPITRE 1
PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

Introduction

Cette partie est consacrée à un travail épistémologique fondé sur une étude historique des savoirs mathématiques liés au théorème de Thalès. Nous étudions l'évolution du champ conceptuel dans lequel s'intègre le théorème de Thalès.

Nous déterminons d'abord les fonctions de cette étude dans notre recherche didactique et nous en déduisons un canevas de questions qui forme la trame de notre problématique.

Pour répondre à ce questionnement, différents outils théoriques sont nécessaires ; nous les avons évoqués dans notre introduction.

Puis, nous exposons la méthodologie que nous avons élaborée pour répondre à nos questions.

I. Fonction d'une étude épistémologique dans le cadre d'un travail de didactique

La première fonction de cette étude est la **recherche d'obstacles épistémologiques,** car il peut exister un parallèle entre les obstacles rencontrés au cours de l'histoire et les obstacles liés à l'apprentissage (Sierpinska, 1989).

> "[...] On retrouve chez les élèves certaines attitudes, croyances, structures de convictions ou schémas de pensée analogues à ceux qui ont fonctionné comme obstacles dans l'histoire des mathématiques."

Cet auteur explicite ce parallèle (1988).

- Les obstacles épistémologiques identifiés par l'épistémologie peuvent, parfois, devenir des obstacles didactiques. Ce point de vue est également celui de M. Artigue (1992). D'après G. Brousseau (1989), le didacticien se doit de chercher des obstacles dans l'histoire des mathématiques et de confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage pour établir le caractère épistémologique de ces derniers.

- Une étude épistémologique est une aide pour la **recherche de la fonctionnalité** d'un théorème. A. Sierspinska (1989) a tenté de rapprocher les aspects "obstacles" et "moteur" dans le sens d'une mise en marche de la recherche mathématique ou d'une introduction et d'une prise de sens des conceptions mathématiques dans l'enseignement. Elle écrit à ce sujet :

> "L'analyse épistémologique sert avant tout à **comprendre** *(nous le soulignons)* les concepts mathématiques dont l'enseignement nous intéresse. [...] **Comprendre un concept, c'est aussi savoir pourquoi et quand il est devenu important ou fondamental en mathématiques."**

Ceci dit, l'analyse épistémologique peut ne pas se limiter à une épistémologie conceptuelle. M. Artigue (1990) y apporte une *dimension culturelle* fondamentale :

> "[...]. Au delà de l'analyse conceptuelle, l'épistémologie intervient à ce niveau sur un plan général, car ce que vise l'enseignement des mathématiques, ce n'est pas simplement la transmission de connaissances mathématiques, c'est plus globalement celle d'une culture".

En ce qui concerne le théorème de Thalès, cette culture peut naître de la recherche, au cours de l'histoire, de ses différentes interventions plausibles ou pas, dans la légitimation de l'emploi pratique d'instruments ou de méthodes de mesures de longueurs dans la vie de tous les jours comme le bâton de Jacob, le T , le télémètre ou la mesure de la hauteur d'une pyramide grâce à son ombre.

- L'analyse épistémologique de la construction des connaissances mathématiques facilite **l'évaluation** des apprentissages, des enseignements et du matériel.
- Les points précédents doivent aider à l'élaboration de projets d'enseignements.

A ce sujet, M. Artigue (1992) considère que l'épistémologie historique permet de chercher des *situations problèmes* qui peuvent aider à l'élaboration de séquences d'enseignement.

> "Si la genèse d'un concept chez un élève ne peut être entièrement identique à sa genèse historique, un point commun demeure toujours entre les deux situations : le concept n'apparaît historiquement, n'est assimilable par l'élève, que s'il semble indispensable à la solution d'un problème"
> G. Arsac (1987).

La question est de savoir s'il existe des situations a-didactiques pour le théorème de Thalès ?
De plus, pour M. Artigue, l'étude de l'évolution historique des liaisons entre sciences et école, au sens de la *transposition didactique* définie par Y. Chevallard (1991 (a)) assure une meilleure compréhension du fonctionnement de l'enseignement actuel d'un théorème.

Une étude épistémologique est également nécessaire pour prendre conscience de la distance qui sépare les objets de la science et les objets d'enseignement. C'est ce que Y. Chevallard (1991 (a)) nomme *"exercer sa vigilance épistémologique."*.

D'autres concepts empruntés à la didactique, comme celui de champ conceptuel, de préconstruit, de méso-espace, de topogenèse et chronogenèse (Chevallard, 1991 (a)) d'organisation praxéologique (Chevallard, 1992 (a), Matheron, 2000) et de contrat didactique, sont utiles à notre étude épistémologique.

II. Problématique et questionnement

Notre but est de caractériser l'environnement mathématiques et métamathématique du théorème de Thalès pour comprendre dans quels espaces scientifiques il se situe au cours de l'histoire et pour pointer les raisons de changements à ce sujet.

Nous pensons, avec G. Waldegg (1995) que le travail épistémologique ne peut pas remplacer la recherche didactique. Nous avons fait le choix d'employer cet outil de la façon suivante.

Notre étude épistémologique consiste d'abord à trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques et de les caractériser le plus précisément possible.

Nous pourrons les confronter aux difficultés des élèves que nous mettons en évidence dans notre deuxième partie.

Pour déterminer les fonctions du théorème de Thalès, nous étudions les significations des concepts.

Donner du sens au théorème de Thalès, lui déterminer une fonctionnalité, consiste à se poser plusieurs questions sur les concepts mathématiques tels que les nombres irrationnels et le continu.

II.1 Sur la fonctionnalité du théorème

Les changements dans la démonstration générale du théorème de Thalès sont dus aussi bien à l'évolution de certains concepts mathématiques qu'à des changements d'ordre culturel modifiant l'approche de notions métamathématiques comme celle de rigueur, de démonstration ou d'activité mathématique.

II.1.1 Organisation mathématique et moteurs épistémologiques du théorème de Thalès

Par une étude détaillée de l'organisation des textes historiques, nous tentons de répondre à des questions liées à l'organisation mathématique des textes, à leur cohérence :

Pourquoi et comment tel concept, lié directement ou indirectement à la démonstration du théorème de Thalès, a-t-il évolué au cours de l'histoire ?

En particulier, nous tentons de savoir, pour chaque auteur :

Quel est le champ conceptuel de ce théorème ?

Quelle est l'utilisation qui est faite de ce résultat dans le corpus mathématique des auteurs ?

Au sujet de la transposition didactique, nous nous posons les questions suivantes :

Sur quels critères allons nous nous fonder pour décider si tel texte relève plutôt du savoir savant ? Y a-t-il toujours eu transposition didactique ?

Mais ces questions intrinsèquement liées à la transposition didactique peuvent, dans le cadre de l'élaboration d'une ingénierie didactique, être placées dans cette perspective de genèse de démonstration. Ainsi, nous répondons également à la question suivante :

Quelles sont les contraintes qui pèseront sur la transposition de concepts et plus précisément quels constituants seront difficilement transposables de nos jours?

II.1.2 Contextes métamathématiques dans lesquels a évolué le théorème

Notre étude épistémologique nous permet de donner une historicité à des notions métamathématiques comme celles de rigueur, de démonstration, de conception de la géométrie etc. Afin de mieux comprendre dans quel cadre métamathématique s'est inséré le théorème de Thalès, ainsi que son évolution au cours des siècles, nous cherchons à savoir :

Quels sont les moments de rupture et de changement important dans la démonstration et dans l'approche du théorème de Thalès? Quelles en ont été les raisons ?

Mais ces changements dépendent aussi de la problématique initiale propre à chaque auteur. Ainsi, nous nous demandons :

Dans quelle perspective mathématique se place l'auteur quant aux définitions, à la fonction des figures géométriques et des objets, et de quelle problématique (pratique, géométrique ou de modélisation) relève cette perspective ?

Nous conjuguons ces deux dimensions dans la recherche de *situations fondamentales* permettant d'introduire ce théorème. Ces situations peuvent se trouver, chez les auteurs étudiés, soit en amont soit en aval de la démonstration du théorème de Thalès.

Quel inventaire pouvons-nous faire des classes de problèmes susceptibles de donner *sens* à la propriété et quelles filiations et ruptures existe-t-il entre ces problèmes ?

Mais cette récolte ne suffit pas. Nous essayons de savoir si ces situations ne sont qu'un habillage, qu'un apprêt ou si elles constituent de réelles situations légitimant l'introduction du théorème étudié.

II.2 Sur les obstacles épistémologiques

Dans le cadre d'une ingénierie, il est nécessaire de repérer *les incohérences mathématiques, et les difficultés ou obstacles épistémologiques,* afin de les confronter aux difficultés ou aux obstacles d'apprentissage pour éventuellement établir, *in fine*, leur caractère épistémologique.

A quelles difficultés théoriques se sont heurtés les concepteurs de cette démonstration ? Comment repérer de telles difficultés ?

Nous formulons l'hypothèse que ces difficultés sont liées à des concepts tels que ceux de nombres réels, de continuité, d'infini, à la conception des nombres et des fractions. Nous mettons en évidence, lorsque cela est possible, les moments où le mathématicien admet sciemment ou pas un résultat concernant ces concepts, ce qui constitue une première forme de préconstruit. Nous tentons également de mettre en valeur les propositions énoncées par l'auteur, liées aux concepts précités et qui ne sont que partiellement vraies ou même fausses, ce qui correspond dans les deux cas à la deuxième forme de préconstruit.

III. Méthodologie

Nous avons distingué six périodes dans l'histoire : l'Antiquité, le Moyen Age et la Renaissance et les XVII, XVIII, XIX et XX èmes siècles. Nous avons privilégié des auteurs dans chaque période soit par l'importance de leurs écrits, soit du fait de la disponibilité de leurs oeuvres. Pour chaque ouvrage, nous avons retenu plusieurs choses.

Nous précisons la méthode que nous avons employée.

Organisation du corpus

Pour chaque auteur, notre travail consiste, en premier lieu, à relever toutes les propositions, définitions et axiomes qui sont nécessaires à sa démonstration, à établir les liens de ces objets entre eux.

Pour chaque ouvrage, nous partons de la dernière démonstration et nous remontons le fil des propositions, des définitions et des axiomes jusqu'aux prémisses. Puis, nous produisons un tableau synoptique ainsi que les schémas déductifs faisant apparaître les implications directes ou implications indirectes entre certaines propriétés intervenant dans la démonstration du théorème. Dans ces tableaux, nous attribuons à chaque proposition, notion commune, définition, et demande, un code de reconnaissance qui permet de situer chaque élément dans l'organisation. A partir des organigrammes de démonstration, nous mettons en évidence l'organisation praxéologique, les propriétés, les axiomes et les concepts fondamentaux qui constituent la clef de voûte de l'édifice de la preuve.

Nous ne retenons que les propositions dont le nombre d'interventions dans les démonstrations d'autres propositions est conséquent (supérieur ou égal à 5).

Nous donnons le texte intégral en partie principale, pour les résultats les plus importants et ceux qui amènent le plus de commentaires, et en annexe ceux qui concernent les propositions secondaires.

L'appellation théorème de Thalès ayant fluctué au cours de l'histoire, nous sommes amenés à nommer et à différentier divers énoncés suivant les objets sur lesquels porte le théorème, comme les triangles, les droites sécantes, les bandes parallèles, les angles et suivant les outils qui sont employés, comme la proportionnalité, les vecteurs, les valeurs algébriques, les projections, l'homothétie.

Analyse des connaissances

En suivant la grille de cinq points imaginée par G. Brousseau (1989) explicités ci-dessous, nous donnons du *sens* à ces concepts fondamentaux intervenant dans l'élaboration de la propriété de Thalès. Il s'agit pour nous :

1- de décrire cette connaissance, de comprendre son usage ;

2- d'expliquer quels avantages cet usage procurait par rapport aux usages antérieurs ; à quelles pratiques sociales il était lié, à quelles techniques, et, si possible, à quelles conceptions mathématiques ;

3- de repérer ces conceptions par rapport à d'autres possibles, et notamment celles qui leur ont succédé, afin de comprendre les limitations, les difficultés et finalement les causes d'échec de cette conception, mais en même temps les raisons d'un équilibre qui semble avoir duré suffisamment longtemps ;

4- d'identifier le moment et les raisons de la rupture de cet équilibre et d'examiner alors les traces d'une résistance à son rejet en l'expliquant, si possible, par des survivances de pratiques, de langages ou de conceptions ;

5- de rechercher de possibles résurgences, des retours inopinés, sinon sous la forme initiale, du moins sous des formes voisines, et d'en voir les raisons.

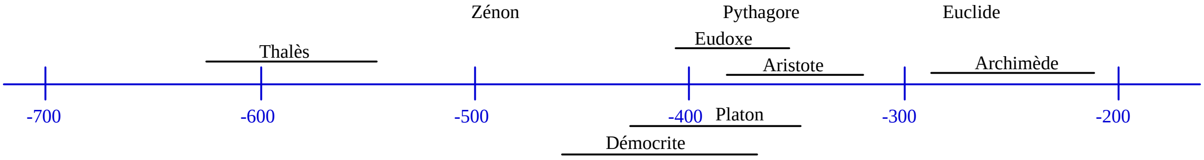
Approche culturelle

Il s'agit d'une réflexion menée sur le sens donné par les auteurs au concept de démonstration mathématique et sur les conceptions de la géométrie qui transparaissent dans l'ouvrage.

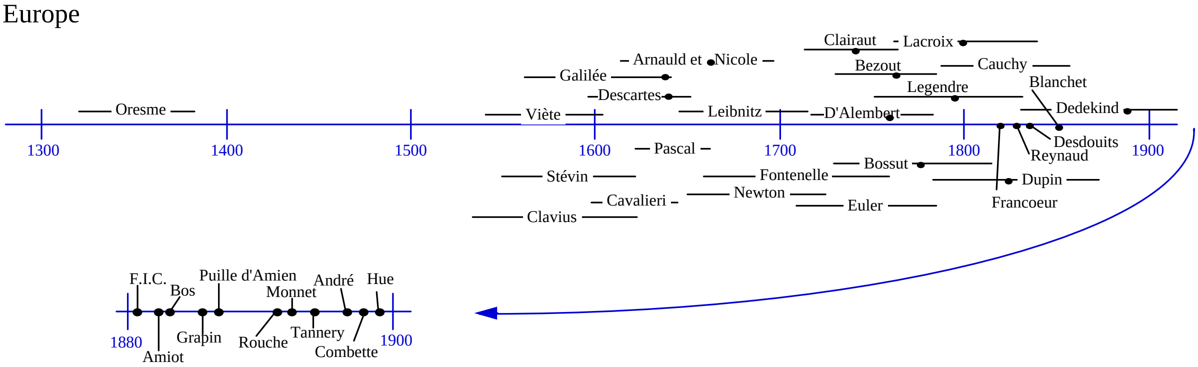
Pour cela, nous notons l'utilisation du ou des résultats et outils sur lesquels se fonde la démonstration du théorème ainsi que l'utilisation des lectures directes des propriétés sur les dessins cela nous aidant à comprendre à quelle problématique (pratique, géométrique ou de modélisation) la démonstration est rattachée et ce qui caractérise les changements de démonstrations.

Chronologie des auteurs cités

Grèce antique



Europe



CHAPITRE 2
LA PERIODE DE L'ANTIQUITE A LA RENAISSANCE

Je pense que la notion de proportion était, depuis une antiquité assez reculée, l'objet d'une méditation qui constituait un des procédés de purification de l'âme, peut être le procédé principal. Il est hors de doute que cette notion était au centre de l'esthétique de la géométrie, de la philosophie des grecs.

Simone WEIL

I. L'Egypte, Babylone et la Chine

Les babyloniens étaient familiers avec le théorème de Thalès (Collette, 1973) et savaient, en outre, sans l'avoir démontré, que les côtés correspondants de deux triangles semblables sont proportionnels. Les géomètres égyptiens semblaient eux aussi en mesure de comprendre la notion de similitude et la proportionnalité, mais n'étaient peut-être pas capable de les conceptualiser. En effet, au XIII ème siècle avant J. C., deux figures similaires, mais de dimensions différentes, furent dessinées sur les murs de la chambre contenant la tombe de Seti 1er. Dans les civilisations égyptiennes et babyloniennes, la preuve en géométrie s'appuie exclusivement sur la figure et non sur la logique, sur une explication de propriétés vues sur un dessin. Ces démonstrations relevaient de ce que nous appelons actuellement une problématique pratique. Les civilisations indiennes et chinoises anciennes, fondaient elles aussi leurs démonstrations mathématiques, que ce soit en géométrie ou en arithmétique, exclusivement sur la figure et non sur la logique (Martzloff, 1987).

II. Le contexte culturel et conceptuel du théorème de Thalès dans la Grèce antique

II.1 Un rejet du constat des propriétés directement sur les dessins

A partir du VI ème siècle avant J. C., une pensée logique faisant des mathématiques une science hypothético-déductive se développe, le raisonnement devenant prépondérant. Dans une société où une importance particulière est accordée à l'art de convaincre l'autre, par exemple dans l'agora, la démonstration pouvait être considérée comme un acte social (Barbin, 1988). En géométrie, de réelles modifications font alors leur apparition comme la rupture entre la géométrie d'observation (tracé de figures, usage d'instruments pour précéder à des vérifications) et la géométrie de déduction. En l'occurrence, nous nous rendons compte qu'une certaine distanciation par rapport à la figure apparaît, dans les Eléments d'Euclide, notamment en ce qui concerne la démonstration du théorème de Thalès.

II.2 Les irrationnels et les remises en cause, les contradictions qu'ils ont engendrées

La découverte des irrationnels, généralement attribuée aux pythagoriciens, s'est effectuée, semble-t-il, par la constatation que certains rapports ne pouvaient pas s'exprimer à l'aide de nombres entiers. Elle remet en cause toute l'approche philosophique des nombres et des grandeurs par l'école pythagoricienne. Pour surmonter cet écueil, il était possible d'introduire des considérations sur l'infini, elles-mêmes liées à une certaine idée du continu. Mais plusieurs "tabous", qui sont à associer à Aristote pour la plupart et à Platon pour certains, ont été un frein à de tels développements. Les notions de l'infini, de nombre, de continu chez Aristote expliquent en partie la pérennité de cette mise en relation quantité, nombre et grandeur. Mesurer une grandeur, cela consiste généralement à comparer celle-ci avec une grandeur de même type. Pour les pythagoriciens, toute grandeur continue, ligne, surface, corps, pouvait être identifiée à un nombre (Wilder, 1981). Eudoxe, puis Euclide sont conduits à redéfinir la notion de mesure indépendamment de l'arithmétique et à fonder une théorie des grandeurs géométriques.

II.3 Les infinis, le continu, les grandeurs et les nombres

A la fin du V ème siècle avant notre ère, un débat sur le continu et les nombres s'est instauré dans différentes écoles philosophiques grecques. Une ligne, les aires, les volumes, le temps, etc., les grandeurs en général, sont-elles indéfiniment divisibles ou sont-elles constituées de parties insécables, "d'atomes" ? A ce sujet, N. Nordon (1995) met en évidence un enjeu d'ordre philosophique. Pour Leucippe et Démocrite, tout est composé d'atomes. Aristote se trouve donc en totale opposition avec la pensée atomiste. Il distingue déjà l'infini en acte et l'infini potentiel. Il montre que le seul infini dont a besoin le mathématicien est l'infini potentiel, c'est-à-dire, en prenant l'exemple de l'arithmétique, celui qui permet de toujours trouver un entier plus grand qu'un autre, de toujours pouvoir diviser une longueur, etc. (Aristote livre III Physique). L'infini est ainsi associé à l'inachevé, à l'indéterminé et contient pour essence, une connotation négative. C'est dans ce sens que nous pouvons comprendre pour quelle raison les mathématiciens grecs, et en particulier Euclide après Eudoxe, se sont évertués à éliminer l'infini de leur discours mathématique.

Les grandeurs incommensurables sont apparues dans *l'anthyphérèse*, qu'Aristote appelait lui *antanérèse* (Arsac, 1987), qui est une méthode de recherche et de construction de la partie aliquote commune la plus grande possible entre deux grandeurs AB et CD. En supposant AB plus grand que CD, on retranche CD de AB, jusqu'à aboutir à un segment A_1B_1 avec $\mathrm{A}_1\ \mathrm{B}_1 < \mathrm{CD}$. Puis, on rapporte autant de fois possible $\mathrm{A}_1\ \mathrm{B}_1$ sur CD pour conserver $\mathrm{C}_1\ \mathrm{D}_1$ avec $\mathrm{C}_1\ \mathrm{D}_1 < \mathrm{A}_1\ \mathrm{B}_1$ et ainsi de suite. K. Ce processus fait référence à l'infini et peut donc être déconsidéré par d'Aristote qui exclut l'infini actuel. Une solution est momentanément imaginée par Eudoxe ici aussi dans la séparation de la théorie des rapports de grandeurs d'une théorie arithmétique. Euclide, dans le livre V de ses éléments de géométrie, reprend les fondements de la théorie des rapports de grandeurs d'Eudoxe qui sont censés éliminer de l'arithmétique et de la géométrie le recours à l'infini lié aux rapports des irrationnels.

Dans le livre V de la Physique, Aristote a longuement développé une notion du continu qui est fortement ancré dans le réel. L'infinie divisibilité du continu est équivalente au postulat d'Archimède qui permet d'associer à tout point un nombre ou à tout segment sa mesure, à ne pas confondre avec ce qu'on appelle l'axiome d'Archimède. Ce postulat permet également de dire que tout intervalle contient une infinité de points. Il est tout de même insuffisant pour construire un continu. Il ne donne pas, en effet, la connexité. Un autre axiome est nécessaire pour cela. Aristote définit également l'indivisible ; "l'indivisible est sans partie", et ne peut donc être mesuré. Il a l'intuition de l'insuffisance de l'infinie divisibilité pour caractériser le continu. Il recherche ce que nous appelons la connexité et qui correspond, du point de vue intuitif, à une absence de trou, mais il ne parvient pas à ses fins. Le cœur du problème est l'infini opposé au fini, le continu opposé au discret. Nous passons maintenant aux résultats que nous avons obtenus pour Euclide.

III. Les Eléments d'Euclide

III.1 Tableaux synoptiques et déductogrammes

Livre I

Notons qu'une tâche à exécuter pour Euclide, comme *"Proposition 1: Sur une droite donnée, construire un triangle équilatéral."*, est généralement inscrite dans une proposition et que la technique pour y parvenir vient de la démonstration. C'est pour cette raison que nous avons associé dans les tableaux tâche $\left(T_{ijk}\right)$ et techniques $\left(\tau_{ijk}\right)$.

La lettre *k* correspond à la théorie Θ_k, la lettre *j* à la dernière technologie θ_{jk} en rapport avec la tâche et la technique *i* en question.

Nous illustrons ces explications par les exemples suivants : sur la quatrième ligne du tableau ci-dessous se trouve la proposition 4 du Livre $1\left(\Theta_1\right)$ qui correspond à un des cas d'égalité des triangles fondamental dans les Eléments d'Euclide. Nous considérons que cette propriété est un élément d'une première théorie. Cette théorie n'est pas caractérisée par un ensemble totalement cohérent de théorèmes mais par des résultats relevant d'un même champ conceptuel et que nous jugeons fondamentaux dans l'ouvrage que nous étudions. Cette première théorie est par ailleurs complétée par la suite, par exemple, par la proposition 8.

La ligne suivante contient la proposition $5\left(\theta_{11}\right)$ sur l'égalité des angles pris sur la "base" d'un triangle isocèle, qui, ne s'agissant pas d'une tâche ni d'une technique, a été classée en tant que première technologie de cette première théorie. Ce classement, relativement subjectif, est légitimé par le fait que cette propriété est moins importante que la proposition 4 de par son utilisation moindre que celle de cette dernière dans la démonstration générale du théorème de Thalès.

Sur la sixième ligne du tableau, la proposition $7\left(\theta_{21}\right)$ correspond à la deuxième technologie de la première théorie et à la ligne suivante la proposition $9\left(T_{121}, \tau_{121}\right)$ représente le premier couple (Tâche, Technique) de la deuxième technologie de la première théorie.

Lorsque aucune technologie ne vient justifier la technique et la tâche, lorsque seul un élément de la théorie Θ_k est présent pour argumenter, l'indice *j* de la tâche et de la technique est égal à 0 par convention, ce qui est le cas à la première ligne qui concerne la proposition 1. Ainsi, les chiffres 1, 0 et 1 qui composent l'indice *ijk* = 101 apparaissant pour ce couple (tâche, technique) représentent, pour *i* = 1, la première (tâche, technique) qui n'est pas légitimée par une technologie (*j* = 0) mais directement par la première théorie (*k* = 1).

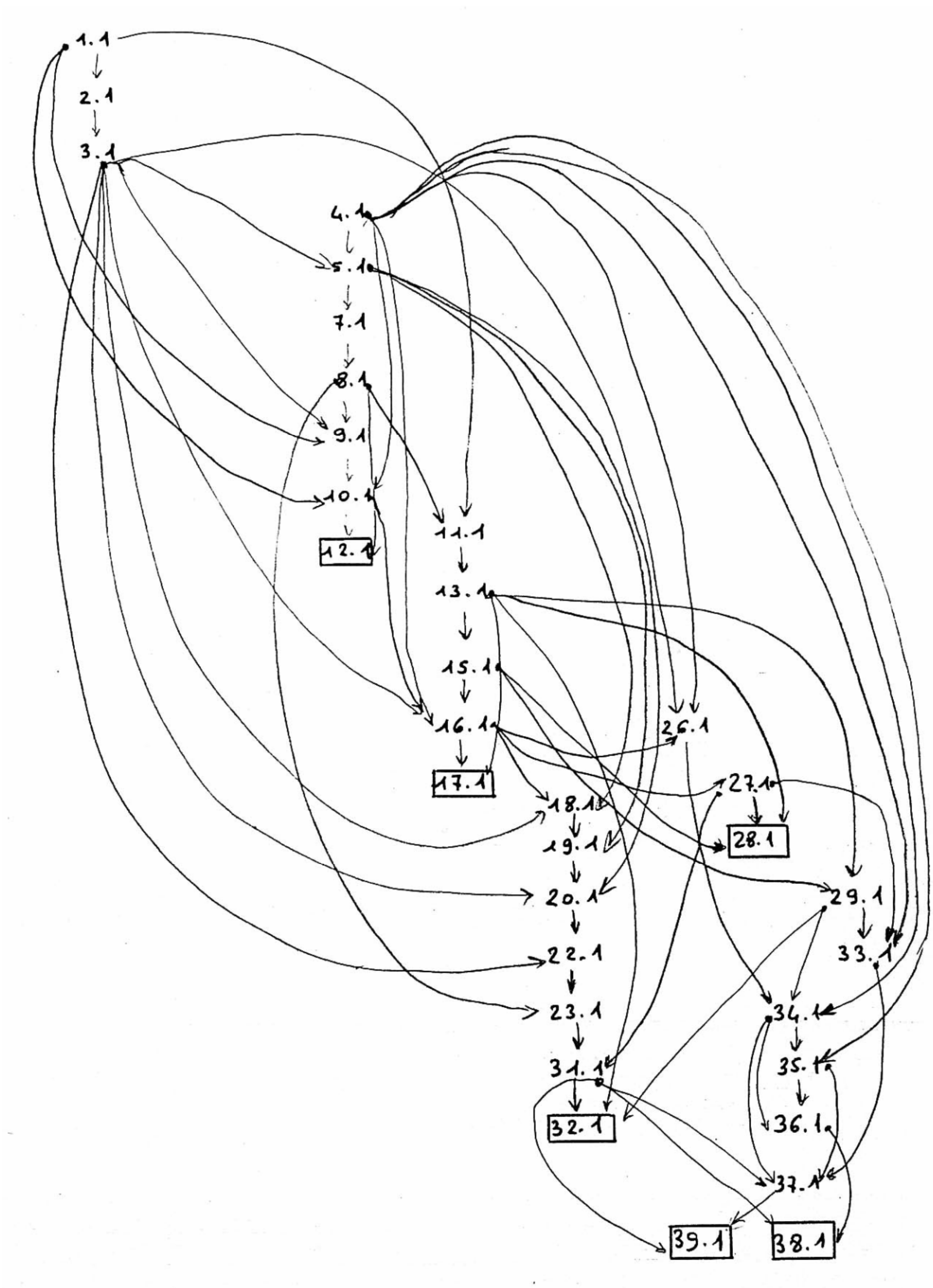
Proposition	**Utilisée dans**	**Nombre total d'occurences**
$1\left(T_{101},\tau_{101}\right)$	2 ; 9; 10 ;11	4
$2\left(T_{201},\tau_{201}\right)$	3	1
$3\left(T_{301},\tau_{301}\right)$	5 ; 9 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 26 ($\times$ 2)	8
$4\left(\Theta_{1}\right)$	5 ($\times$ 2) ; 10 ; 16 ; 26 ($\times$ 4) ; 33 ; 34 ; 35	11
$5\left(\theta_{11}\right)$	7 ($\times$ 2) ; 18 ; 19 ; 20 ; 31 L,3	6
$7\left(\theta_{21}\right)$	8	1
$8\left(\Theta_{1}\right)$	9 ; 11 ; 12 ; 23	4
$9\left(T_{121},\tau_{121}\right)$	10	1
$10\left(T_{221},\tau_{221}\right)$	$12\left(T_{421},\tau_{421}\right)$; 16	2
$11\left(T_{321},\tau_{321}\right)$	13	1
$13\left(\theta_{31}\right)$	15 ($\times$ 2) ; 17 ; 28 ; 29 ; 32 ; 31 L,3	7
$15\left(\theta_{41}\right)$	16 ; 28 ; 29	3
$16\left(\theta_{51}\right)$	$17\left(\theta_{61}\right)$; 18 ; 26 ; 27	4
$18\left(\theta_{71}\right)$	19	1
$19\left(\theta_{81}\right)$	20	1
$20\left(\theta_{91}\right)$	22	1
$22\left(T_{521},\tau_{521}\right)$	23	1
$23\left(T_{621},\tau_{621}\right)$	31	1
$26\left(\theta_{10.1}\right)$	34	1
$27\left(\theta_{11.1}\right)$	$28\left(\Theta_{1}\right)$ ($\times$ 2); 31 ; 33	4
$29\left(\Theta_{1}\right)$	33 ($\times$ 2) ; $32\left(\theta_{12.1}\right)$; 34 ($\times$ 2) ; 35	6
$31\left(T_{721},\tau_{721}\right)$	32 ; 37 ($\times$ 2) ; 38 ($\times$ 2) ; 39	6
$33\left(\theta_{13.1}\right)$	36	1
$34\left(\theta_{14.1}\right)$	35 ($\times$ 2) ; 36 ; 37 ; 38	5
$35\left(\theta_{15.1}\right)$	36 ($\times$ 2) ; 37	3
$36\left(\theta_{16.1}\right)$	$38\left(\theta_{18.1}\right)$	1
$37\left(\theta_{17.1}\right)$	$39\left(\theta_{19.1}\right)$	1

Définition	Utilisée dans	Nombre total d'occurences
9 $\left(\Theta_1\right)$	5	1
10 $\left(\Theta_1\right)$	11 ; 12 ; 13	3
15 $\left(\Theta_1\right)$	1 ; 2 ; 3 ; 11 ; 12 ; 22	6
24 $\left(\Theta_1\right)$	1 ; 2 ; 9 ; 10 ;11	5

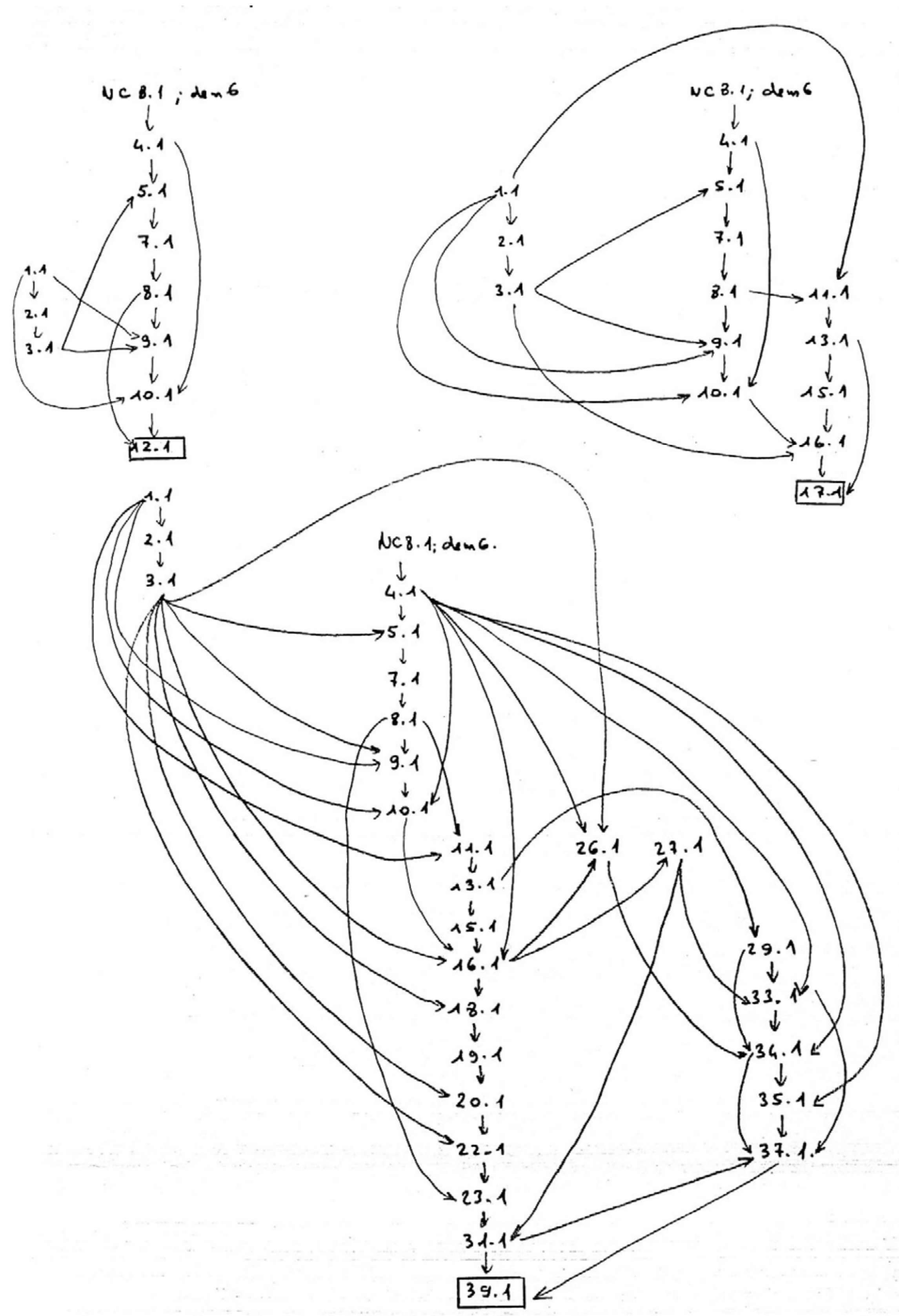
Notion commune	Utilisée dans	Nombre total d'occurences
1 $\left(\Theta_1\right)$	1 ; 2 ; 3 ; 13 ; 15 ; 26 $(\times 2)$; 28 $(\times 2)$29 ; 35 ;36 ; 39	13
2 $\left(\Theta_1\right)$	13 $(\times 2)$; 29 ; 35	4
3 $\left(\Theta_1\right)$	2 ; 5 ; 15 ; 28 ; 35 ; 36	6
4 $\left(\Theta_1\right)$	17 ; 29	2
7 $\left(\Theta_1\right)$	37 ; 38	2
8 $\left(\Theta_1\right)$	4 $(\times 2)$; 8	3
9 $\left(\Theta_1\right)$	7 ; 16 ; 18 ; 20 ; 26 ; 39	6

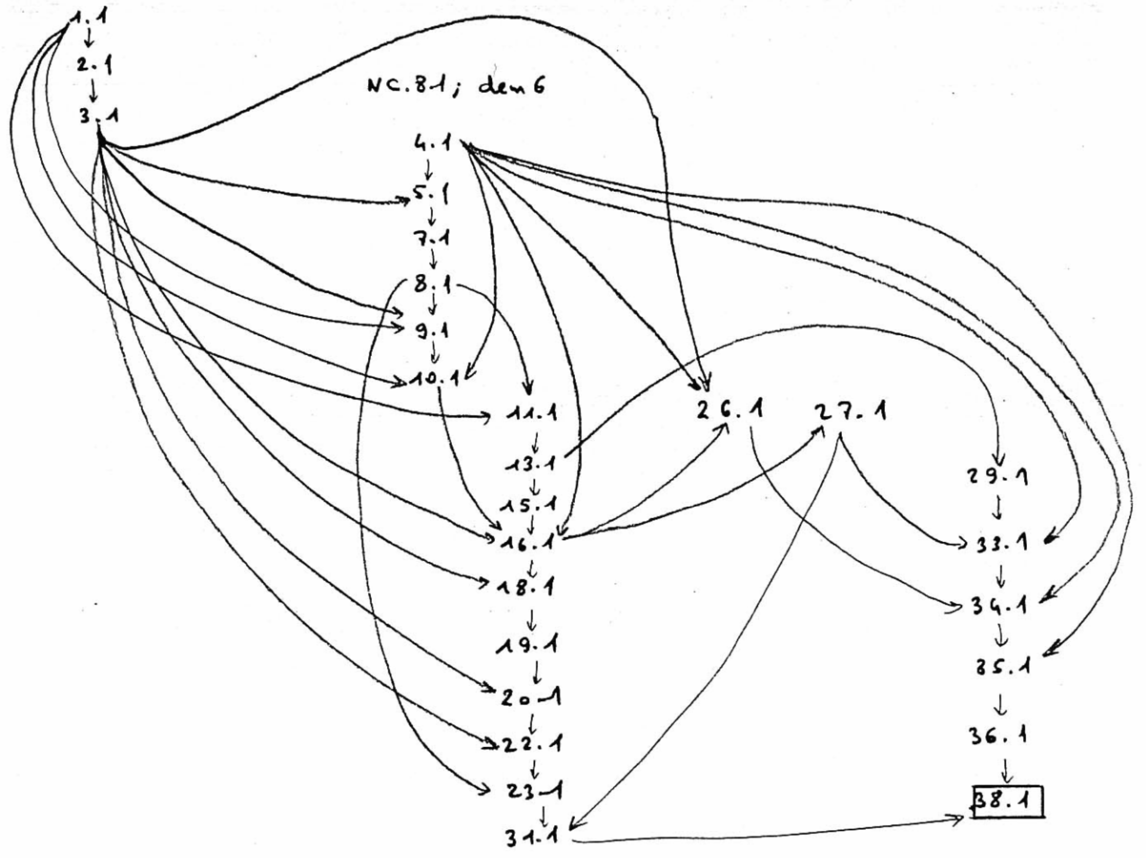
Demande	Utilisée dans	Nombre total d'occurences
1 $\left(\Theta_1\right)$	1 ; 2 ; 9 ; 12 ; 22 ; 18 ; 34 $(\times 2)$; 16 ; 20 ; 26 $(\times 2)$; 31 ; 33 ; 36 ; 39	16
2 $\left(\Theta_1\right)$	5 ; 16 ; 17 ; 20 ; 31 ; 32 ; 36 ; 37 ; 38	9
3 $\left(\Theta_1\right)$	1 ; 2 ; 3 ; 12 ; 22	5
5 $\left(\Theta_1\right)$	29	1
6 $\left(\Theta_1\right)$	4	1

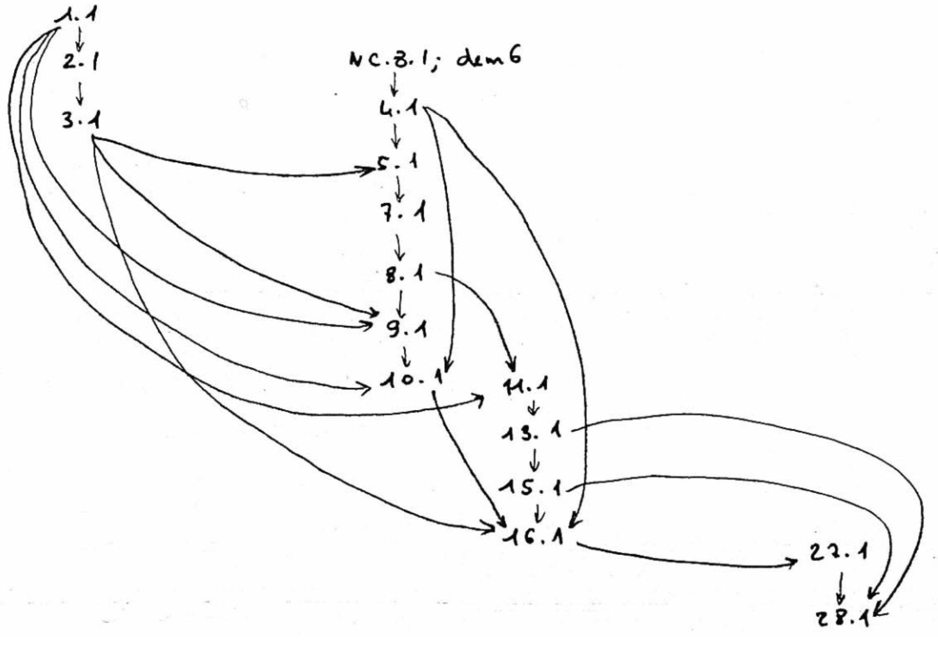
Déductogramme du livre I



Schémas déductifs de chaque proposition terminale complétés des organisations praxéologiques



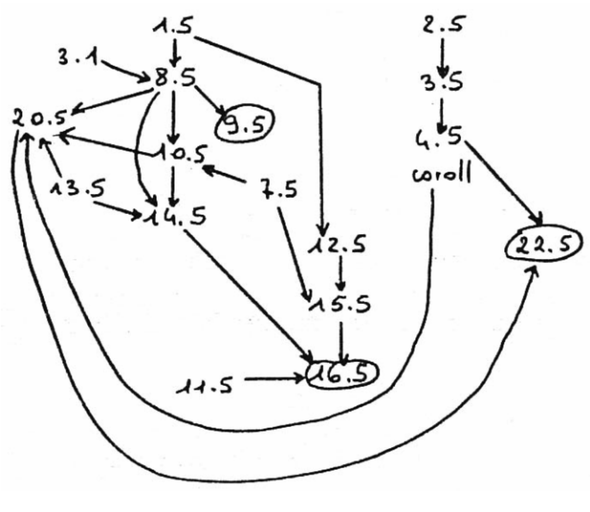

NC.8.1; dem6
1.1
2.1
3.1
4.1
5.1
7.1
8.1
9.1
10.1
11.1
13.1
15.1
16.1
18.1
19.1
20.1
22.1
23.1
31.1
26.1
27.1
29.1
33.1
34.1
35.1
36.1
38.1


NC.8.1; dem6
1.1
2.1
3.1
4.1
5.1
7.1
8.1
9.1
10.1
11.1
13.1
15.1
16.1
27.1
28.1

Livre V

Proposition	**Utilisée dans**	**Nombre total d'occurrences**
1 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	8 L, 5 $(\times 2)$	2
2 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	3 L, 5 ; 12 L, 5	2
3 L, 5$\left(\theta_{12}\right)$	4 L, 5 $\left(\theta_{22}\right)(\times 2)$; 22 L, 5 $(\times 2)$	4
7 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	10 L, 5 $(\times 2)$; 15 L, 5	3
8 L, 5$\left(\theta_{32}\right)$	9 L, 5$\left(\theta_{42}\right)$; 10 L, 5 $(\times 2)$; 14 L, 5 16 L, 5	5
10 L, 5$\left(\theta_{52}\right)$	14 L, 5	1
11 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	16 L, 5 $(\times 2)$	2
12 L, 5$\left(\theta_{62}\right)$	15 L, 5	1
13 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	14 L, 5 ; 20 L, 5 $(\times 2)$	3
14 L, 5$\left(\theta_{72}\right)$	16 L, 5	1
15 L, 5$\left(\theta_{82}\right)$	16 L, 5$\left(\theta_{92}\right)$	1
20 L, 5$\left(\theta_{10.2}\right)$	22 L, 5$\left(\theta_{11.2}\right)$	1
3 L, 1$\left(T_{301}, \tau_{301}\right)$	8 L, 5	$1 \to 9$

Définition	**Utilisée dans**	**Nombre total d'occurrences**
5 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	8 L, 5 $(\times 2)$	2
6 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	4 L, 5 $(\times 2)$; Corol $(\times 2)$; 7 L, 5 $(\times 2)$; 12 L, 5 $(\times 3)$; 13 L, 5 ; 15 L, 5 ; 11 L, 5 $(\times 9)$	20
8 L, 5$\left(\Theta_2\right)$	8 L, 5 $(\times 3)$; 13 L, 5 $(\times 2)$	5



Livre VI

Nous précisons que la proposition 3 du Livre 1 est utilisée, entre autre, pour démontrer la proposition 6 du même Livre mais que nous n'avons pas indiqué cette intervention dans le tableau du Livre I du fait que seule cette proposition 3 est employée pour démontrer la proposition 6 et que cette dernière n'est utilisée à son tour exclusivement qu'au Livre VI. C'est pour cette raison que cette technologie de la première théorie a été notée (θ'_{11}) et que toutes les tâches et techniques qui en découlent ont également été notées θ'.

Proposition	**Utilisée dans**	**Nombre total d'occurrences**	**Total cumulé**
1L,1 (T_{101}, τ_{101})			4
2 L,1 (T_{201}, τ_{201})			1
3 L,1 (T_{301}, τ_{301})	1 L,6 ; 9 L,6 ; 6 L,1	3	11
4L,1(Θ_1)	5 L,6 ; 6 L,6	2	13
5 L,1 (θ_{11})	3 L,6 ; 7 L,6	2	8
6L,1(θ'_{11})	3 L,6	1	1
7 L,1 (θ_{21})			1
8 L,1 (Θ_1)	5 L,6	1	5
9 L,1 (T_{121}, τ_{121})	3 L,6 $(\times 2)$	2	3
10 L,1 (T_{221}, τ_{221})			2
11 L,1 (T_{321}, τ_{321})	13 L,6	1	2
12 L,1 (T_{421}, τ_{421})	8 L,6 ; corol 8 L,6	1	1
13L,1(θ'_{31})	7 L,6	1	8
15L,1(θ'_{41})			3
16L,1(θ'_{51})			4
18L,1(θ'_{71})			1
19L,1(θ'_{81})			1
20L,1(θ'_{91})			1
22 L,1 (T_{521}, τ_{521})			1
23 L,1 (T_{621}, τ_{621})	5 L,6 ; 6 L,6 $(\times 3)$; 7 L,6	5	6
26 L,1 $(\theta'_{10.1})$			1
27 L,1 $(\theta'_{11.1})$			4
29 L,1 (Θ_1)	3 L,6 $(\times 3)$; 4 L,6	4	10
31 L,1 (T_{721}, τ_{721})	1 L,6 ; 3 L,6 ; 9 L,6 ; 10 L,6 $(\times 2)$; 11 L,6 ; 12 L,6	7	13

(suite du tableau)

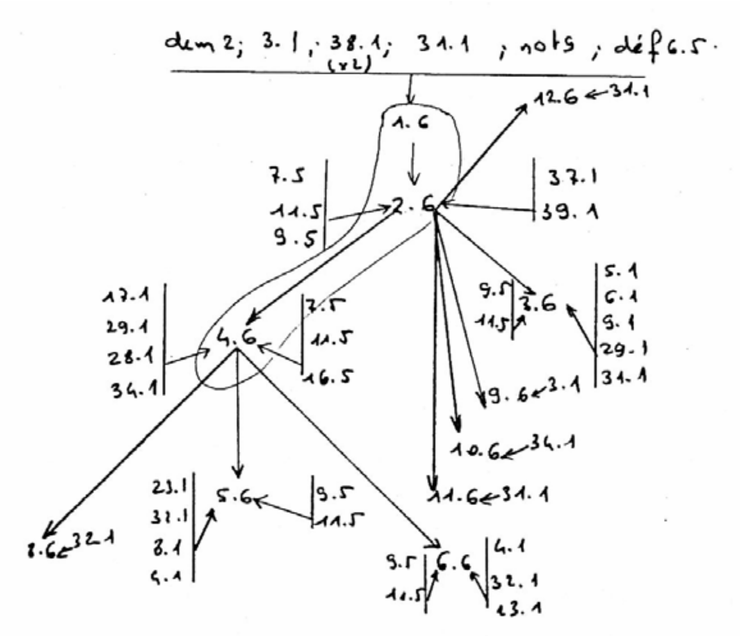
33 L,1 $(\theta'_{13.1})$			1
34 L,1 $(\theta'_{14.1})$	4 L,6 ; 10 L,6	2	7
35 L,1 $(\theta'_{15.1})$			3
36 L,1 $(\theta'_{16.1})$			1
37 L,1 $(\theta'_{17.1})$	2 L,6	1	2

Proposition	**Utilisée dans**	**Nombre total d'occurrences**
17 L,1 (θ'_{61})	4 L,6 ; 7 L,6	2
28 L,1 (Θ_1)	4 L,6 $(\times 2)$	2
32 L,1 $(\theta'_{12.1})$	5 L,6 ; 6 L,6 ; 8 L,6 $(\times 2)$ 7 L,6 $(\times 2)$; 31 L,3	7
38 L,1 $(\theta'_{18.1})$	1 L,6	1
39 L,1 $(\theta'_{19.1})$	2 L,6	1
31 L,3 (θ')	13 L,6	1

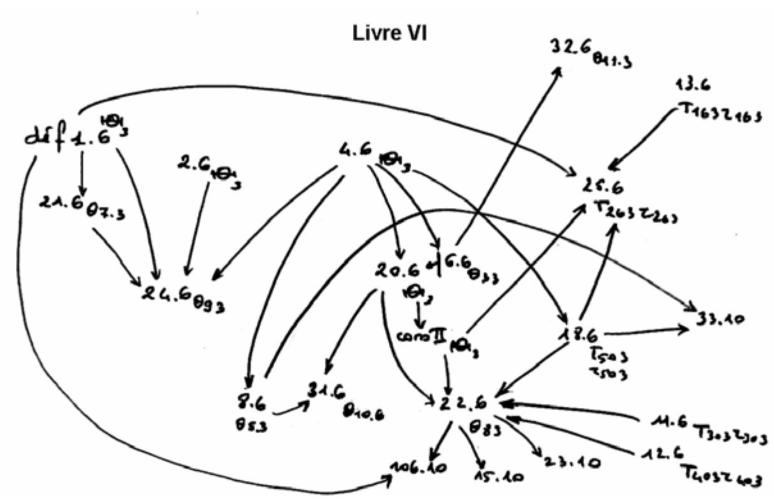
Proposition	**Utilisée dans**	**Nombre total d'occurrences**	**Total cumulé**
1 L,5 (Θ_2)			2
2 L,5 (Θ_2)			2
3 L,5 (θ_{12})			4
7 L,5 (Θ_2)	2 L,6 ; 4 L,6	2	5
8 L,5 (θ_{32})			5
9 L,5 (θ_{42})	2 L,6 ; 5 L,6 $(\times 2)$; 6 L,6	4	4
10 L,5 (θ_{52})			1
11 L,5 (Θ_2)	2 L,6 $(\times 4)$; 4 L,6 ; 5 L,6 ; 6 L,6	7	9
12 L,5 (θ_{62})			1
13 L,5 (Θ_2)			3
14 L,5 (θ_{72})			1
15 L,5 (θ_{82})			1
16 L,5 (θ_{92})	4 L,6 $(\times 2)$	2	2
20 L,5 $(\theta_{10.2})$			1

Définition	Utilisée dans	Nombre total d'occurences	Total cumulé
5 L,5 (Θ_2)			2
6 L,5 (Θ_2)	1 L,6	1	12
8 L,5 (Θ_2)			5

Notions commune	Utilisée dans	Total
$9(\Theta_1)$	1 L,6	7
$1(\Theta_1)$	3 L,6 $(\times 4)$; 5 L,6 ; 6 L,6	19



Applications du théorème au Livre VI



III.2 Analyse

III.2.1 La démonstration des théorèmes (D.P.C.T) et (T.E)

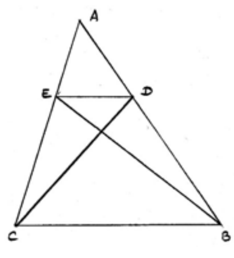
La méthode des aires, qui est une légitimation d'un procédé empirique de découpage et de recomposition des aires permettant d'affirmer que des surfaces sont égales. Nous pouvons noter que la premières fois où cette appréhension opératoire d'une figure est présente dans une démonstration euclidienne est située à la proposition (35LI). Rouche (1992) appelle **équidécomposition** ce procédé de démonstration de l'égalité, au sens d'Euclide, de deux polygones.

Ce mot est également utilisé dans l'enseignement secondaire italien (Céli, 2003). Il s'agit de la décomposition d'un polygone en sous-polygones qui sont rassemblés autrement pour recomposer un nouveau polygone et correspond à une modification méréologique de la figure. Pour le premier cas de figure, la démonstration consiste à montrer que le parallélogramme BEFC est composé du trapèze HEFC et du triangle BHC ; que le parallélogramme ADCB est composé du trapèze ADHB et du triangle BHC, et qu'en outre, les deux trapèzes sont égaux, car ils sont obtenus en retranchant le même triangle DHE aux triangles, par ailleurs égaux, ABE et DCF. Cela relève exactement d'une problématique géométrique (Berthelot et Salin). Euclide a recours à la méthode des aires pour la démonstration de la proposition (1LVI) (Annexe I 4, b, c). L'implicite lié à la somme des surfaces est lu sur le dessin.

Euclide se ramène dès le début au cas général et ceci pour une raison bien simple : au départ, s'il considérait que BC et CD ont une partie aliquote commune de longueur l par exemple BC = $m \times l$ et CD = $n \times l$, grâce à la proposition 38 du Livre I, il assurerait alors le résultat suivant : les triangles de sommet A et de base une partie de longueur l ont la même aire, notée *a*. En utilisant la définition implicite de la somme de figures, nous aurions eu alors : aire ABC = $m \times a$; aire ACD = $n \times a$ et ainsi, les triangles qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Mais lorsque BD et CD n'ont pas de communes mesures, ce raisonnement n'est plus valable. Toute la théorie des proportions trouve là une justification importante. Euclide déplace le problème de l'irrationalité en travaillant sur des grandeurs et non sur des nombres. Mais en toute rigueur, la démonstration exige le recours à la continuité.

Proposition 2

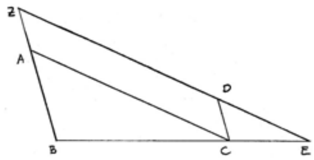
Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle. **Sigle : (D.P.C.T)**



D'après (prop. 37.1), les deux triangles *EBD* et *EDC* sont égaux. D'après (prop. 7.5), on a : le triangle *BDE* est au triangle *ADE* comme le triangle *CDE* est au triangle *ADE* (1). Or, d'après (prop. 1.6), le triangle *BDE* est au triangle *ADE* comme *BD* est à *AD* (2) et de même on a : le triangle *CDE* est au triangle *ADE* comme *EC* est à *EA* (3). A l'aide de la (prop. 11.5), *BD* est à *AD* comme le triangle *CDE* est au triangle *ADE* (4). (3) et (4) avec (prop. 11.5) donne *BD* est à *AD* comme *EC* est à *AE*.
Réciproque : par hypothèse, on a : *BD* est à *AD* comme *EC* est à *AE*. On trace *[ED]*, *[EB]* et *[DC]* (dem. 1). Avec (prop. 1.6), on obtient : *BD* est à *AD* comme le triangle *DEB* est au triangle *EAD* et *CE* est à *AE* comme le triangle *EDC* est au triangle *EAD*.
Donc (prop. 11.5), implique que *EC* est à *AE* comme le triangle *DEB* est au triangle *ADE* et, toujours grâce à prop. 11.5), le triangle *BDE* est au triangle *ADE* comme le triangle *EDC* est au triangle *EAD*. Or (prop. 9.5), dit : les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entre elles ; donc, ici, on obtient :
les triangles *BDE* et *EDC* sont égaux. Ces deux triangles ont la même base, donc d'après (prop. 39.1), les droites *(ED)* et *(CB)* sont parallèles.

<u>Proposition 4</u>

Dans les triangles équiangles, les côtés, autour des angles égaux, sont proportionnels et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues. **<u>Sigle : (T.E)</u>**



On place *BC* en direction de *BE*. Les angles *ABC* et *ACB* sont moindres que deux droits (prop. 17.1) et par hypothèse *angle ACB = angle DEC* donc *angle ABC* et *angle DEC* sont moindres que deux droits et ainsi (prop. 29.1) les droites *(BA)* et *(DE)* se rencontrent en *Z*, car si elles étaient parallèles, les angles intérieurs *angle ABC* et *angle DEC* seraient égaux à deux droits.
Or, *angle DCE = angle ABC* par hypothèse. Donc (prop. 28.1), les droites *(BZ)* et *(CD)* sont parallèles. De plus, toujours par hypothèse, *angle ACB = angle DEC*, donc la droite *(AC)* est parallèle à la droite *(ZE)*. Et ainsi, *ZACD* est un parallélogramme. D'après (prop. 34.1), *ZA = DC* et *ZD = AC*. La (prop. 2.6) donne *BA est à AZ comme BC est à CE*. Mais *AZ = DC*, donc on a *BA est à CD comme BC est à CE* (prop. 7.5) et (prop. 11.5) et ainsi, par permutation, on a (1) *AB est à BC comme DC est à CE* (prop. 16.5). De plus, *BC est à CE comme ZD est à DE* (prop. 2.6). Mais, *ZD = AC*. Donc *BC est à CE comme AC est à DE* et par permutation, on obtient : (2) *BC est à AC comme CE est à DE* (prop. 16.5). Avec (prop. 22.5) appliqué à (1) et (2), on obtient *AB est à AC comme DC est à DE*.

Cet énoncé, que nous appelons théorème des triangles équiangles (T.E), correspond plus à ce que nous reconnaissons aujourd'hui comme étant le théorème de Thalès. En effet, ce dernier exprime la proportionnalité des côtés de triangles semblables obtenus par des droites parallèles et non par des considérations d'angles, ce qui revient au même. La position des triangles actuels diffère par rapport à celle-ci et à celle que nous trouvons dans la proposition 5. Les deux triangles sont juxtaposés alors que dans la version contemporaine, ils sont "gigognes". Cela change totalement la perception de la proportionnalité. Nous avons ici une proportionnalité interne (Rouche, 1992) à chaque triangle. Les rapports sont formés à chaque fois à l'aide de deux segments pris sur le même triangle. Ces propositions relèvent de la théorie des triangles semblables qui est complétée plus loin. Le positionnement des deux triangles que nous trouvons dans les Eléments d'Euclide correspond plus à une modélisation de la méthode que Thalès est censé avoir employée pour mesurer la hauteur d'un pyramidé à l'aide d'un bâton et des ombres des objets en question. Nous renvoyons le lecteur au roman de D. Guedj (1998) pour une tentative de formulation d'hypothèses à ce sujet et pour une critique objective de cette technique, l'article de G. Brousseau (1995) complète cette approche.

<u>III.2.2 Les nombres et grandeurs chez Euclide</u>

Dans les éléments d'Euclide, les grandeurs sont traitées dans deux Livres : le Livre II concerne une théorie des segments et des rectangles, alors que le Livre V porte sur les grandeurs en général, mais représentées par des segments. La proportionnalité des grandeurs est traitée aux Livres V et VI, le Livre V traitant de l'irrationalité. Les nombres, eux, sont étudiés aux Livres VII, VIII et IX et il ne s'agit que de nombres entiers naturels. Cette méthode marque bien la rupture entre la théorie des nombres et la théorie des grandeurs que préconisait Aristote (Organon). Nous nous pouvons dire, avec D. Daumas (1995), que l'étanchéité est telle entre les deux mondes, que les propriétés de la proportionnalité sont systématiquement démontrées pour les nombres, même si elles sont strictement en correspondance avec des propriétés analogues établies dans le cadre de la théorie des grandeurs. Mais la caractérisation des nombres par le biais des grandeurs ou des quantités ainsi que la définition de la multiplication à partir d'additions itérées de l'unité, constitue actuellement un obstacle épistémologique caractérisé sur lequel pratiquement tous les élèves butent (Vergnaud, 1989).

Le Livre V traite ainsi de l'incommensurabilité à travers l'étude des grandeurs et non celle des nombres. Le terme essentiel de la définition (3LV) (Annexe I 3) semble être le qualificatif "homogène". Les rapports entre grandeurs qui ne sont pas de la même catégorie sont à proscrire. Cette règle joue le rôle d'un interdit jusqu'à Euler (Sierpinska, 1989 ; Janvier 1989) La définition

6 permet de définir l'égalité entre deux raisons. En langage moderne, étant données quatre grandeurs A, B, C et D, rangées par couple, il y a égalité de raison (A/B = C/D) où A et B sont de même espèce, ainsi que C et D, mais pas forcément que A et B), si pour tout couple (*m*, *n*) d'entiers naturels non nuls, on a les implications suivantes, selon les trois seuls cas possibles :

si nA > mB alors nC > mD ; si nA = mB alors nC = mD ; si nA < mB alors nC < mD. La comparaison des raisons s'effectue en utilisant l'égalité et l'inégalité. Cela correspond, une fois de plus, aux conceptions d'Aristote (Organon). Conceptuellement, cette définition est exceptionnellement riche. Mais deux critiques peuvent être formulées. En effet, une infinité d'opérations doivent être effectuées pour vérifier la proportionnalité. L'autre objection, plus sociologique, concerne son caractère non naturel pour l'homme de la rue. La notion de proportion a rapidement pris, au cours de l'Histoire, une connotation pratique. La définition d'Euclide connaîtra donc de nombreuses critiques. Les définitions 6 et 8 établissent un ordre total sur les raisons, c'est-à-dire que deux raisons sont toujours comparables.

L'auteur ne définit nulle part ce qu'est une grandeur, ce qui pose, en particulier, un problème de conception de l'égalité. Malgré ce flou théorique, l'incommensurabilité est travaillé uniquement dans le cadre des grandeurs. Une question initiale peut nous intéresser. Euclide a-t-il construit les nombres réels tels que nous pouvons les connaître ? Les raisons ne peuvent pas rentrer dans le même cadre que les nombres entiers ou les nombres rationnels contemporains puisque aucune définition générale de l'addition et de la multiplication n'est donnée. Le problème est précisément qu'Euclide compare deux raisons qui ne sont pas des nombres ce qui ne change qu'au XIX ème siècle avec la construction de l'ensemble de nombres réels. Nous pouvons dire que l'ensemble du Livre V est une bonne solution, pour l'époque, au problème posé par les nombres irrationnels ou les grandeurs incommensurables et que, de plus, il se détache de la figure géométrique, les dessins et schémas ne faisant qu'illustrer les raisonnements. Il n'avait à sa disposition aucun moyen, comme un *axiome de continuité* qui est nécessaire à la démonstration de l'existence d'une quatrième proportionnelle et qui assure la continuité de la droite (Bkouche, 1994(a)) ou comme une *propriété de maximalité*, pour parvenir à l'extension maximale que constitue le corps des nombres réels.

En effet, pour toute grandeur B et pour tout entier n, non nul, il existe une grandeur A de même type telle que nA = B. L'infini est souvent évacué des Eléments, mais nous avons pu nous rendre compte, qu'à l'inverse, pour démontrer l'existence d'un point d'intersection de deux cercles, d'un cercle et d'une droite ou deux droites, un axiome du continu aurait été nécessaire. Sans un axiome du continu, les raisons incommensurables chez Euclide ne correspondent à aucun point sur la droite. Mais certains implicites sont plus fondamentaux puisqu'ils concernent la légitimité de la démonstration. Dans la démonstration de la proposition (35LI), le point H, intersection des droites (DC) et (EB) ne se situe pas forcément à l'intérieur du périmètre délimité par le trapèze ABCF. Et justement, lorsque le point H se situe à l'extérieur, cette démonstration n'est plus valable. Donc, Euclide, par une lecture graphique rapide et un *a priori* implicite, écarte un cas de figure important. Euclide a pratiquement rempli son contrat d'évitement du continu dans le Livre V, sauf pour l'existence de la quatrième dont la généralisation nécessite un axiome de continuité. Il s'agit d'un implicite chez Euclide qui allait de soi (J.L. Gardiers (1988)). La notion est définie à l'intérieur d'une proposition (12 LVI) qui est liée à sa construction (tâche T) sans qu'aucune technologie θ_k ou théorie Θ_k assure son existence indépendamment d'elle même. En effet, seul le théorème (2 LVI), dont la démonstration est indirectement liée à des résultats du Livre V qui admettent l'existence de cette même quatrième proportionnelle, justifie cette construction. Cette quatrième proportionnelle est utilisée souvent dans le Livre V et au Livre XII. Il s'agit d'un préconstruit de second type.

Dans la démonstration que nous étudions, la définition 5LV est nécessaire pour attribuer une raison à toute grandeur continue, mais reste insuffisante pour procéder à l'opération inverse. Un axiome de continuité est là aussi nécessaire. C'est ce même axiome qui assure en particulier l'existence du point d'intersection d'une droite et d'un cercle ou de la quatrième proportionnelle apparaissant à la proposition 12 du Livre VI.

Nous pouvons relever deux obstacles aristotéliciens pour tenter d'expliquer la genèse de la règle de mise en rapport exclusive de deux grandeurs homogènes : le premier concerne la nature même des connaissances mathématiques qui doivent prendre des distances avec la pratique. Le second a un rapport avec la définition du nombre perçu comme un assemblage composé d'unités indivisibles. Cette définition est adoptée dans la suite de l'histoire et ce jusqu'au moyen âge (Halliez et Nordon, 1994).

La seconde question nous amène à formuler l'hypothèse que cette conception pourrait se retrouver chez les élèves sous une forme ou sous une autre et plus précisément lorsque ceux-ci considéreraient que, pour que deux rapports de longueurs puissent être comparés, les quatre longueurs soient exprimées à l'aide de la même unité.

Synthèse

<u>La démonstration du théorème (D.P.C.T), problématique et perspectives :</u>

La fin de la démonstration du théorème de Thalès repose sur la méthode des aires qui semble éviter l'utilisation des nombres réels mais qui, en fait, ne peut s'en passer en amont. Cette démonstration est en rupture avec les résultats égyptiens, babyloniens et chinois qui étaient fondés sur l'observation de la figure. Euclide tente de passer d'une appréhension perceptive des figures à une appréhension discursive. Le meilleur exemple est celui des cas d'égalités des triangles qui remplacent très tôt dans la démonstration le principe d'égalité par superposition. La problématique euclidienne est géométrique.

L'utilisation intensive des cas d'égalité des triangles s'explique d'une autre façon. En effet, le rejet de l'infini de la part d'Euclide entraîne le fait que certains objets, certaines définitions ne sont pas employées dans cette démonstration. Mais la rationalisation n'est que partielle et la démonstration n'est pas entièrement axiomatisée. S'il existe des axiomes ou des définitions mal formulés, des implicites ou des cas de lecture de données sur la figure, ces approximations sont susceptibles de cacher des difficultés conceptuelles. Mais cela peut remettre aussi en cause tout une démonstration comme c'est le cas pour la proposition 35 du Livre I dans laquelle la lecture d'un point d'intersection sur le dessin engendre le fait qu'un cas de figure est oublié.

Les cinq piliers de la démonstration sont le premier cas d'égalité des triangles (4LI), le principe d'égalité par superposition (notion commune 8), notion intuitive et non géométrique pour Euclide qu'il remplace parfois par un raisonnement par l'absurde et les propositions 29 et 31 du Livre I. En ce qui concerne le Livre V, aucune proposition n'est beaucoup plus utilisée que les autres mise à part la définition 6 qui est ainsi le cinquième pilier de la démonstration du théorème (D.P.C.T). Le postulat des parallèles est apparemment peu utilisé dans la démonstration du théorème (D.P.C.T) mais son emploi est latent dans toutes les propositions qui concernent les parallèles. L'organisation mathématique de la démonstration est générale et se fonde sur trois principales théories : Θ_1(4 L,1 ; 8 L,1 ; 29 L,1 ; défi L,1; not L,1 ; dem L,1), Θ_2(Déf L,5 ; 1 L,5 ; 2 L,5 ; 7 L,5 ; 11 L,5 ; 13 L,5), Θ_3(1 L,6 ; 2 L,6 ; 4 L,6 ; 20 L,6 ; coro 20 L,6).

<u>Son rapport aux nombres :</u>

Euclide n'a à sa disposition que les nombres entiers. Les études des nombres et des grandeurs sont bien séparées, à tel point que des propriétés équivalentes dans les deux mondes sont systématiquement démontrées à nouveau. Par contre, l'incommensurabilité n'est traitée que par l'intermédiaire des grandeurs, qui ne sont d'ailleurs pas définies. Les seuls rapports de grandeurs autorisés sont ceux qui sont composés de grandeurs de même type, homogènes. Nous pensons que les élèves pourraient être confrontés à cet obstacle s'ils considèrent par exemple que deux rapports de longueurs sont comparables si les quatre longueurs sont exprimées à l'aide la même unité.

Enfin, même si la définition de l'égalité de raisons est très riche, elle aborde la proportionnalité de façon indirecte et complexe. Il n'est malgré tout pas possible de considérer que la définition 6 du Livre V s'approche d'une définition des nombres réels, puisque d'une part Euclide compose des raisons qui ne sont pas des nombres et d'autre part parce qu'aucune définition de la multiplication et de l'addition des raisons n'est donnée dans les Eléments.

<u>Difficultés, obstacles et préconstruits :</u>

Très souvent, pour dire que deux droites sont sécantes, ou qu'une droite et un cercle se coupent, Euclide utilise, sans le dire ni le savoir, l'axiome du continu qui dit que *"toute droite joignant deux points situés dans deux demi-plans opposés, est sécante à la frontière commune aux deux demi-plans"*. De même il attribut une raison à toute grandeur mais l'inverse lui est impossible. C'est à dire qu'un même type axiome du continu est indispensable pour que tout nombre soit associé à un point de la droite. De plus, un axiome du continu est nécessaire pour démontrer l'existence d'une quatrième proportionnelle. Il s'agit d'un préconstruit de second type.

<u>Interventions des deux théorèmes en tant qu'outil, chaînes trophiques :</u>

Les théorèmes 2 et 4 du Livre VI interviennent dans de très nombreuses démonstrations des Livres X, XI, XII et XIII.

<u>Les champs conceptuels et problème donnant du sens aux deux propositions :</u>

La proposition 33 du Livre VI qui précise que les angles ont les mêmes raisons que les arcs est démontrée à l'aide des mêmes outils que la proposition 1 Livre VI. Il fait de même pour la proposition qui concerne les secteurs. Nous ne pouvons pas dégager de situations donnant du sens aux deux propositions (D.P.C.T) et (T.E).

IV. Les civilisations arabes, perses, le moyen âge et la Renaissance

Nous pouvons dire avec A. Djebbar (2001) que les mathématiciens arabes se sont appropriés les textes anciens et ont beaucoup travaillé particulièrement sur les textes d'Euclide. En ce qui concerne le théorème de Thalès, rien de nouveau n'est à signaler si ce n'est que nous pouvons supposer que des questions pratiques liées à l'arpentage des terres, les problèmes posés par les transactions commerciales pouvaient, à l'époque, justifier l'apprentissage des mathématiques (Djebbar). Des problématiques pratiques légitimaient l'étude de cette science et peut être celle du théorème de Thalès.

En ce qui concerne les rapports de grandeurs, il faut de nombreux siècles avant que les savants considèrent réellement les rapports de grandeurs comme des nombres. L'un des premiers traités, en dehors de celui d'Eudoxe - Euclide qui s'intéresse à la théorie des rapports, est celui d'Oresme intitulé *"De proportionibus proportionum"* composé vers 1360. Il met en évidence trois formes de rapports :

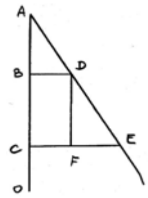
- les rapports rationnels ;
- les rapports irrationnels, mais commensurables à des rapports rationnels ;
- des rapports irrationnels et incommensurables.

Ce dernier type était, à l'époque, difficilement manipulable du fait de l'absence d'une terminologie et de symboles adaptés aux différentes opérations qui étaient :

- ajouter, soustraire, diviser, augmenter, diminuer.

- composition de rapports (produit), de rapports de rapports, étude du caractère rationnel ou non de rapports de rapports.

Oresme affirme dans son étude que les rapports se comportent comme des grandeurs continues dans le sens où il considère qu'entre deux rapports inégaux, il est possible d'insérer autant de moyennes que l'on veut ; un rapport est divisible à l'infini. Il représente le temps par un segment de droite, chaque point du segment correspondant à un instant. Il trace alors à chaque point F du segment AB un autre segment EF perpendiculaire au premier qui représente la vitesse du mobile à l'instant E. Le mouvement étant accéléré uniformément, les segments de vitesse doivent respecter entre eux les rapports qu'ont les vitesses :
Aucune démonstration n'est effectuée dans le cas général. Mais Galilée et Cavalieri s'inspirent de ces diagrammes et de leurs interprétations qui peuvent être considérés comme étant la première approche de la méthode des indivisibles qui est utile à certains savants pour démontrer le théorème de Thalès. Dans ces travaux numériques, Viète s'habitue à considérer les rapports comme des nombres susceptibles de recevoir l'application de techniques opératoires. Il invente une nouvelle méthode, l'analytique qu'il expose dans "In astem analyticem Iragoge". Il s'agit d'une algèbre fondée sur l'arithmétique et la géométrie décrivant une théorie générale des proportions. De la théorie d'Eudoxe - Euclide, il conserve l'homogénéité des grandeurs dans les opérations d'addition et de soustraction et non dans celle des proportions. Cela lui permet de démontrer que quatre grandeurs sont proportionnelles si le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Bien que Viète distingue encore le calcul numérique du calcul spécieux, il tente de les unifier par le calcul littéral.



CHAPITRE 3

LE THEOREME DE THALES ET LES CONCEPTS QUI L'ENTOURENT AU XVII EME SIECLE

I. Contexte mathématique historique dans lequel a été élaboré le théorème de Thalès au XVII ème siècle

I.1.1 Infini divisibilité, grandeurs homogènes et nombre

Nous pouvons dire dès à présent avec J. Guichard (2000), qu'aucune redéfinition de la notion de nombre n'a été opérée depuis les Eléments de géométrie d'Euclide et le Livre V où la théorie des proportions qui était proposée, bien que ne faisant pas référence à un concept de nombre, avait l'avantage, au moins, de donner un statut aux grandeurs incommensurables.

a) Galilée et Cavalieri (Annexe II 1, a)

Une rupture s'est produite avec la pensée ayant eu cours de l'Antiquité jusqu'à la Renaissance grâce à l'avènement des théories galiléennes. En mathématique, de nombreux bouleversements ont lieu. Ainsi, pour Galilée (1632), à l'instar de son disciple indirect Cavalieri qui est lui-même l'inspirateur en mathématique de Pascal, la ligne est constituée de points, d'indivisibles et conclut, à l'inverse d'Aristote, que le nombre d'indivisibles composants une ligne est infini. Il considère la surface composée de lignes et le solide de surfaces. Cela revient à poser l'infini comme actuel et à considérer que le contenu contient des parties non homogènes au tout. Cette idée va aussi à l'encontre de la pensée d'Aristote qui considère que la surface, la ligne, le point, ne sont que des abstractions obtenues à partir du corps et n'ont, par conséquent, pas d'existence. Cette décomposition des corps en surfaces, des surfaces en lignes, constitue la base d'une méthode qui est utilisée par Galilée, Cavalieri et Roberval : la méthode des indivisibles, applicable à la démonstration du théorème de Thalès.

Par contre, le langage euclidien des proportions et non des nombres, est le seul utilisé dans ses ouvrages. D'autres emprunts à l'Antiquité grecque ont été fait.

Cavalieri utilise le concept d'indivisibilité de son maître comme clef de voûte d'une méthode géométrique générale (1635). Mais il ne définit nulle part les indivisibles et caractérise de la sorte les éléments infinitésimaux dont se composent les surfaces et les volumes. Son but n'est pas de "composer le continu avec des indivisibles", c'est-à-dire de strictement considérer les volumes composés de surfaces, les surfaces de lignes et les lignes de points, mais plutôt de comparer les solides entre eux, les surfaces entre elles en comparant respectivement les surfaces et les lignes que l'on peut y découper. Pour cela, il détermine le rapport des volumes ou des aires de figures dont les indivisibles sont dans un rapport constant. Il utilise le théorème 3 et son corollaire. Contrairement à la méthode des limites inventée, comme nous le rappelle R. Bkouche (1994 (b)), par Grégoire de Saint Vincent et qui est reprise lors de l'émergence du calcul infinitésimal, Cavalieri ne somme pas de petites tranches de même nature que la surface ou que d'un volume pour passer ensuite à la limite. L'égalité d'aire s'obtient à partir de l'égalité des éléments constitutifs des surfaces que sont les segments de droites. Il évite de calculer l'aire de la surface comme somme de tous les indivisibles qui la constituent. En application de ce résultat, le premier théorème du livre VII établit que :

> "Les figures planes placées entre deux parallèles dans lesquelles des lignes quelconques, parallèles aux premières, découpent des segments égaux, sont égales."

Cavalieri définit les carrés d'une figure pour permettre des applications plus conséquentes de cette propriété. L'une d'entre elles, la proposition 9, compare deux parallélogrammes de hauteurs égales ce qui permettrait de démontrer ensuite le théorème que nous étudions. Bien que d'un statut ambigu, cette méthode affranchit les calculs d'aires, ou de volumes des lourdeurs de la méthode apagogique, la double réduction par l'absurde, des anciens. Ne pouvant déboucher sur un calcul algébrique autonome et séparé du géométrique, elle connaît tout de même un certain insuccès (Dhombre).

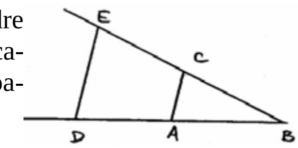
b) Descartes

La méthode de Descartes (1637) consistait à utiliser les représentations graphiques et géométriques par l'intermédiaire de la trajectoire d'un point. Les idées de Newton (1671) au sujet des fluxions semblent aussi lui être venues en considérant la ligne droite comme le lieu d'un point se déplaçant dans l'espace (Mankiewicz, 2001). Nous pouvons remarquer que le mouvement rectiligne est employé par cet auteur pour définir des objets mathématiques tel que la droite par exemple. Sur une droite définie par le mouvement, entre deux points quelconques, il existe d'autres points. Mais cette propriété de densité ne suffit pas à caractériser le continu puisqu'elle est par exemple vérifiée par les points d'abscisses rationnelles d'une droite qui n'est pas un ensemble continu. Malgré tout, Descartes n'insiste pas sur la notion de continuité, renvoyant pour cela aux "arcanes" de la philosophie.

Il représente les grandeurs par des longueurs. Pour cela, il montre (1628) que le choix d'une unité permet de ramener le calcul sur les grandeurs à celui sur les nombres, ce qui justifie en un sens le point de vue de Viète. Les grandeurs sont comparables et divisibles.

Sans démontrer le résultat qui fait l'objet de notre travail, l'auteur l'utilise dans la proposition suivante.

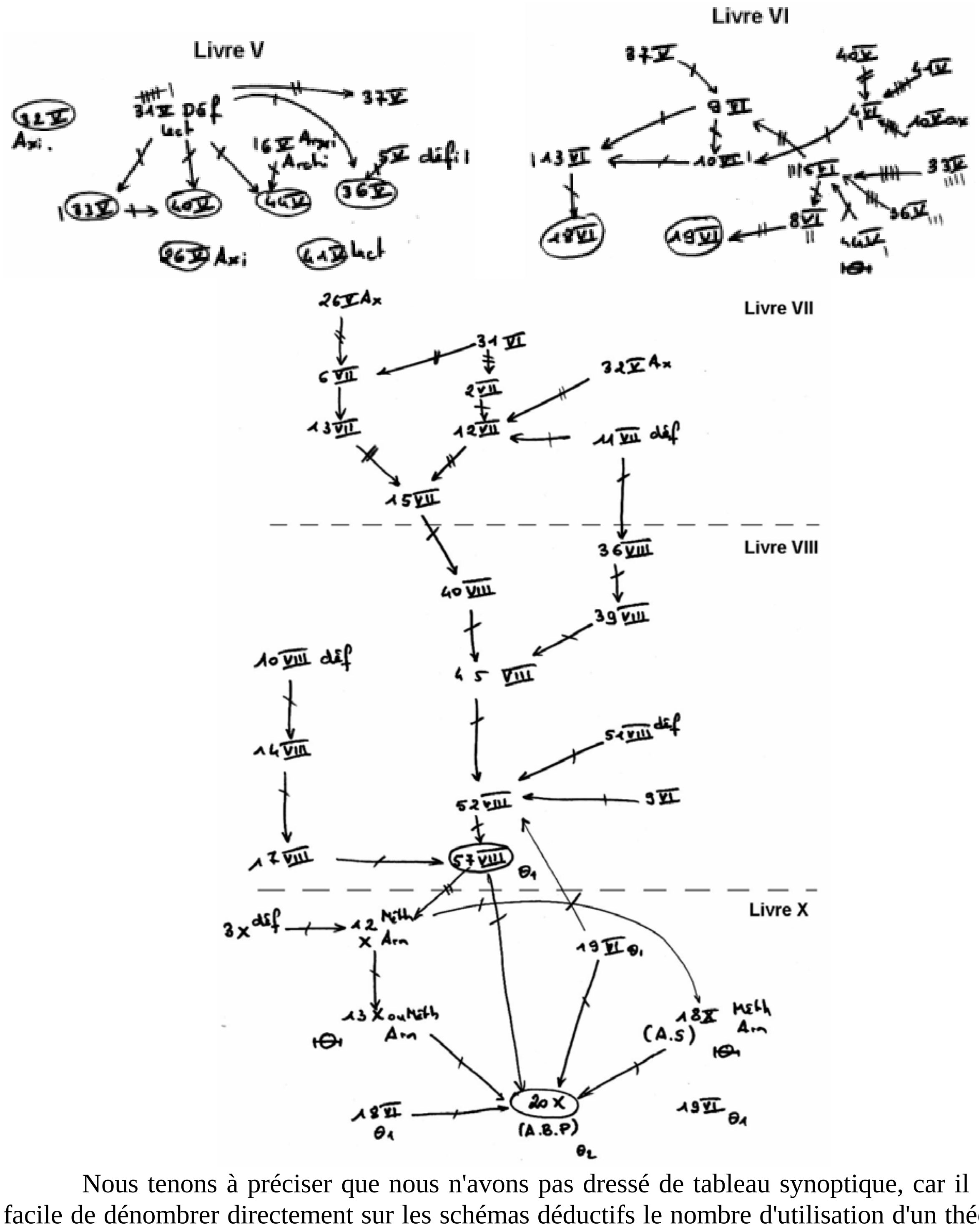
"Soit, par exemple, AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC. Il n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA et BE est le produit de cette multiplication. Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE et BC est le produit de cette division."



Il se place ainsi dans l'optique plus ou moins généralisée au XVII ème siècle de la résolution méthodique de problème. La multiplication des deux segments BD et BC devient un autre segment BE, en ayant pris au départ pour segment unité AB (1/BD = BC/BE). Il est nécessaire de disposer de la quatrième proportionnelle pour parvenir à ces fins. Comme dans les Eléments d'Euclide, étant données une raison A sur B et une grandeur D, le théorème de Thalès fournit C par la construction explicite précédente qui concerne les longueurs. Mais, si D n'est pas une longueur, comme c'est le cas parfois dans l'ouvrage de Descartes, rien ne permet de construire une telle quatrième proportionnelle sans un axiome du continu. L'homogénéité euclidienne que nous avons pu mettre en évidence quant aux rapports de grandeurs disparaît ici et est remplacée par Descartes par une homogénéisation dimensionnelle qui unifie les rapports géométriques, les produits de segments, les aires, les volumes, etc., par l'intermédiaire des longueurs qui peuvent être rassemblées sur une demi-droite. Il se distingue en cela également de Viète qui conservait, dans certains cas, la loi grecque des homogènes. Malgré cela, la demi-droite des réels positifs n'est toujours pas à la disposition des mathématiciens du XVII ème siècle, même si, depuis le XVI ème siècle et l'avènement du symbolisme en mathématiques, les irrationnels sont considérés comme des nombres.

II. Les Eléments d'Antoine Arnauld (1667)

II.1 Schémas déductifs et occurrences des propriétés



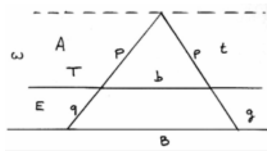
Nous tenons à préciser que nous n'avons pas dressé de tableau synoptique, car il est ici facile de dénombrer directement sur les schémas déductifs le nombre d'utilisation d'un théorème pour démontrer des résultats distincts et le nombre d'emplois de ce même théorème pour démontrer une proposition en particulier. En effet, nous avons fait apparaître ce nombre d'occurrences par des petits traits sur les flèches indiquant l'utilisation du théorème en question.

II.2 Analyse

II.2.1 La démonstration des théorèmes (D.P.C.T) et (T.E)

Comme nous pouvons le remarquer dans le premier lemme - définition du Livre X (Annexe III 7, a), les espaces parallèles, à l'instar des angles, sont infinis. Par conséquent, pour les comparer, Arnauld les insère dans une figure. Les définitions d'un angle permettent de parler d'angles semblables. Une autre version de l'énoncé du théorème de Thalès qui se rapproche de celle actuellement enseignée est proposée par Arnauld au second corollaire de ce théorème. Nous nommons dorénavant cette proposition le théorème de l'angle aux bases parallèles (A.B.P). Tous les différents cas de proportionnalité sont envisagés, sauf les égalités de trois rapports. Il est à noter qu'au cours de l'histoire, nous n'avons pas retrouvé un tel énoncé qui demeure tout de même assez flou. C'est sûrement dû à la polysémie du terme angle chez l'auteur. Mais nous en avons trouvé dans Rivard (1731) la notion d'espaces parallèles. H. Plane (1995) note que la méthode des espaces parallèles est employée dans un ouvrage de Mazeas (1770) au Collège de Navarre.

20. Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouvera diverses sortes de proportions de grand usage. **Sigle : (A.B.P)**



En traçant du sommet une parallèle aux deux bases, il se trouve trois espaces parallèles. D'après le 9ème lemme, **T** étant inclinée dans **ω** que **P** dans **A** et **q** dans **E** ; et de même **t** étant autant inclinée dans **ω** que **p** dans **A** et **g** dans **E**, d'après le 1er théorème, on a **T**.**P** :: **t**.**p** ; **T**.**q** :: **t**.**g** ; **p**.**q** :: **p**.**g** et alternando **T**.**t** :: **P**.**p** ; **T**.**t** :: **q**.**g** ; **P**.**p** :: **q**.**g.**
Par le 2ème théorème, chaque toute et sa première partie sont en même raison que la dernière base et la première : **T**.**P** :: **B**.**b** ; **t**.**p** :: **B**.**b** et alternando **T**.**B** :: **P**.**b** ; **t**.**B** :: **p**.**b**. Ainsi **T.P** :: **t**.**p** :: **B**.**b**.

II.2.2 Nombres, grandeurs et continu chez Arnauld

A la suite de Descartes, Arnauld met en évidence la relation étroite qui existe entre le numérique et le géométrique. L'aspect suranné des rapports euclidiens a aidé les mathématiciens qui ont osé redéfinir ces rapports (Daumas, 1995). Arnauld établit l'égalité de raisons au numéro 29, mais elle ne convient pas aux raisons sourdes, il en donne une autre un peu plus loin au numéro 38. Pour plus de précision, deux raisons A/B et C/D sont égales si, pour toutes aliquotes pareilles des antécédents, c'est-à-dire, par exemple, deux parties partageant A et C en un même nombre de sous parties A/n et C/n, on obtient que ces aliquotes pareilles sont chacune contenues dans B et D de la même façon, c'est-à-dire en même nombre et avec le même reliquat ou reste. On obtient : $p \times (A/n)<B<(p+1) \times (A/n)$ et $p \times (C/n)<D<(p+1) \times (C/n)$. Notons que dans l'édition de 1683 corrigée en 1690, cette définition constitue un théorème démontré. Dans le cas de raisons nombre à nombre, c'est évident. Pour les raisons sourdes, Arnauld considère les raisons a/b et c/d (c'est la notation qu'il utilise dans la troisième édition) telles que les aliquotes pareilles α et β de *a* et *c* sont également contenues dans *b* et *d*, c'est-à-dire que l'on a, avec les écritures actuelles : a = n.α et c = n. β puis, b = p. $\alpha+\varepsilon$ et d = p.$\beta+\eta$ où on a, les raisons étant sourdes : $\varepsilon<\alpha$ et $\eta<\beta$. Ainsi, si a/b et c/d ne sont pas égales, alors soit : a/b > c/d soit a/b < c/d. Arnauld suppose alors a/b > c/d. D'après un axiome, si on augmente le conséquent, on diminue la raison. Donc, on augmente b jusqu'à rende a/b égal à c/d. On peut alors écrire, pour un certain nombre e : a/(b + e) = c/d. On prend alors une partie aliquote α de *a* inférieure à *e*, $\alpha<e$, on a alors a = n.α , c = n.β, d = p.$\beta+\eta$ et on devrait avoir b + e = p.$\alpha+\tau$ avec $\tau<\alpha$. Or, puisque α <*e*, il existe un nombre entier non nul φ tel que e = q.$\alpha+\varphi$ et donc b+e = (p + q).$\alpha+\varphi$ ou $\varphi<\alpha$, ce qui est impossible, car q est supérieur ou égal à

1. Donc, a/b ne peut pas être supérieur à c/d. De même, on démontre que a/b ne peut pas être inférieur à c/d, donc a/b = c/d. Nous pouvons constater qu'Arnauld fait une concession à l'exclusion absolue de la démonstration par l'absurde. En effet, cette méthode dite d'exhaustion, est une double réduction à l'impossible. De plus, implicitement, il admet, lui aussi, l'existence de la quatrième proportionnelle puisqu'il dit qu'il existe un nombre e tel que : a/(b + e) = c/d ; il n'échappe donc pas à un axiome du continu.

L'idée principale chez Arnauld est l'unification des caractéristiques de multiplication et de division à l'infini des nombres et des grandeurs. Il est possible d'effectuer des opérations par rapport aux raisons, que celles-ci soient sourdes ou non. Il s'agit là d'un avantage par rapport aux usages antérieurs. Une autre différence avec les Eléments euclidiens réside dans le fait qu'à l'aide du huitième théorème qui précise que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, Arnauld se rapproche des conceptions modernes des fractions. Il se permet également de multiplier les termes hétérogènes de raisons, ce que se refusait de faire Euclide. Cela lève un premier obstacle lié à la proportionnalité de grandeurs homogènes et donc à la création des rationnels. Nous pouvons avancer qu'Arnauld possédait les prémisses pour construire les nombres rationnels, lui manquant bien sûr, des structures algébriques telles que les groupes et les anneaux pour aboutir réellement à un ensemble de nombres régit par des règles précises et une organisation rigoureuse.

II.2.3 Problématique et perspectives mathématiques

Arnauld et Nicole (1662) reprochent à Euclide de "prouver des choses qui n'ont pas besoin d'être prouvées", comme les propositions 2 et 3 du Livre I, et d'utiliser "la démonstration par l'impossible" car "notre esprit n'est point satisfait, s'il ne sait non seulement que la chose est, mais pourquoi elle est". Newton lui-même récuse les démonstrations par l'absurde (1726). Mais nous avons pu remarquer que ces raisonnements n'ont pas pu être éliminés de cette démonstration par Arnauld (5LII, n°51LV, n°10, 20, 25 Livre VI). Il critique ouvertement les démonstrations d'Euclide qu'il juge peu naturelles, parfois confuses et dépourvues de toute méthode de recherche réutilisable. Liées uniquement à la logique, les preuves euclidiennes s'éloignent forcément, à un moment ou à un autre, de l'objet étudié. Ces idées étaient plus ou moins déjà présentes dans un ouvrage de B. Pascal (1657). Tout cela relève sans doute d'une nouvelle pratique sociale, non plus fondée comme dans la Grèce antique, sur la capacité de convaincre, mais plutôt sur celle d'expliquer le pourquoi des choses. En fait, il peut y avoir une opposition entre savoir conçu comme un produit, qui s'inscrit dans un discours constitué et qui prend cohérence dans ce discours et, à l'opposé, un savoir conçu comme un processus qui est construit à partir de problèmes et qui prend sens dans des pratiques (Charlot, 1990). Ainsi, certaines démonstrations euclidiennes sont adaptées par Arnauld d'autres sont carrément supprimées. La définition et la caractérisation du compas, par exemple, d'après le premier et le deuxième axiome, (Annexe III 3, c) dénote une différence très importante par rapport à la géométrie des Eléments euclidiens. En effet, le compas ne sert plus, comme chez le mathématicien de l'Antiquité ou d'autres des XIX ème et XX ème siècles, uniquement à construire des points d'intersection de deux droites, d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles, mais également à reporter effectivement des longueurs, des segments. Ce qui permet à Arnauld de supprimer les propositions 2 et 3 du Livre I d'Euclide.

De plus, les énoncés de certaines propositions sont transformés en axiomes ou en définition, comme par exemple, le montrent les numéros 31, 32, 33 du Livre II, l'axiome 5 Livre V (Annexe III 3, c), la définition dite plus exacte de la perpendiculaire (Annexe III 3, d), n° 33, 34 et 35 Livre V. L'auteur annonce clairement qu'il juge inutile de tenter de démontrer le postulat des parallèles Il (ax 6LV) pour des raisons épistémologiques. Il est suffisamment clair et de toute façon, une démonstration serait trop longue.

Une autre rupture avec les Eléments de géométrie d'Euclide est à relever. Arnauld hiérarchise les objets et les concepts mathématiques. Ainsi, les lignes étant plus simples que les triangles, il en déduit que les théorèmes qui concernent les lignes ne doivent pas être démontrés à l'aide des triangles. Nous pouvons le voir dans l'axiome (n°32) (Annexe III 3,e). De même, certaines propriétés relevant des triangles chez Euclide, comme par exemple les propriétés des triangles semblables, sont énoncées par Arnauld dans le cadre de l'étude de l'angle, car cet objet est perçu par l'auteur comme étant plus simple que le triangle. Il remplace ainsi le théorème (T.E) d'Euclide par le théorème (18) (A.S). Mais nous analysons le fait que ce changement de méthode, dans le but de se conformer à l'ordre naturel des choses, en particulier le fait de faire disparaître la référence à l'égalité des triangles très utilisée dans les Eléments d'Euclide, engendre chez Arnauld un plus grand nombre de référence à la figure ou à des axiomes, particulièrement aux Livres V, VI, VIII X. Le principe d'égalité par superposition, absent des Eléments d'Arnauld, est en fait remplacé par l'inégalité triangulaire. Ainsi, les démonstrations sur les parallèles ne se fondent ni sur les angles, dont les propriétés sont démontrées dans les Eléments euclidiens par les triangles, ni sur les égalités des triangles mais exclusivement sur l'inégalité triangulaire et sur les lectures de données sur les dessins. Au niveau des nombres, la problématique d'Arnauld se rapproche de la mesure des grandeurs Déf 7 à 10 (Annexe III 2,a). Une mesure est momentanément attribuée à chaque grandeur et inversement, une grandeur peut être attribuée à chaque mesure. Dans la proposition fondamentale du Livre VII (Annexe III 7, a), qui est très utilisée dans la démonstration de résultats liés au théorème de Thalès, une unité étant choisie, la mesure est explicitement employée, celle-ci étant définie par le nombre de fois que le segment contient l'unité, avec peut être un résidu. Il définit pareillement le rapport de deux grandeurs homogènes en prenant une partie aliquote de la première pour unité et reste par là même proche de la pratique de la mesure. La méthode des parallèles ne relève ni d'une problématique pratique, ni de modélisation mais plutôt géométrique. Pour le théorème de Thalès et même en général, cette géométrie est une géométrie de la règle et du compas, de la ligne droite et non plus du triangle comme chez Euclide.

II.2.4 Organisation mathématique

Se référant systématiquement à sa problématique de départ, Arnauld démontre le théorème 20 Livre X uniquement grâce à l'inégalité triangulaire (Ax 1LV), qui constitue un premier pilier nécessitant à chaque fois une lecture raisonnée de la figure, lecture de données sur les dessins qui est elle-même très souvent, pour ne pas dire exclusivement, employée. Aucune proposition ne se détache réellement, sauf la 44 Livre V, qui est le troisième pilier et les 13, 18 Livre X. Nous pouvons dire qu'en fait, sa méthode des parallèles qui est associée dans d'autres Livres à la méthode des indivisibles, est en soi le pivot central de la démonstration du théorème 20 lié au théorème de Thalès.

Organisation praxéologique

Il est indéniable que nous sommes en présence non pas d'une organisation mathématique globale mais plutôt régionale. La théorie est composée de la méthode des indivisibles qui sert à démontrer les propositions 13 et 18 du Livre X, ce dernier correspondant au théorème des triangles équiangles (A.E), de la proposition 44 Livre V, de l'inégalité triangulaire et de l'axiome d'Archimède sur les inégalités. Les autres propositions qui interviennent directement dans cette preuve, 18 et 19 VI et 57 VIII, ne sont démontrées qu'à partir de lecture de propriétés sur les figures. Nous considérons que ces propositions représentent une technologie fondée sur la "théorie" de la lecture raisonnée du dessin qui constitue la clef de voûte, le point sensible de l'édifice. Ce qui est bien sûr remarquable est le fait que les trois cas d'égalité des triangles sont démontrés au Livre XIII et que le troisième de ces cas l'est à partir de la proposition 26 Livre X qui est elle-même déduite de la proposition 18 de ce Livre. Le principal résultat qui sert à démontrer le théorème (n°20) est également utilisé pour prouver un cas d'égalité de triangles. L'ordre d'apparition des théorèmes est réellement inversé par rapport aux Eléments d'Euclide. Dans ceux-ci, un cas d'égalité des triangles fonde, en partie, les propositions 2 et 4 du Livre VI liées au théorème de Thalès, alors que chez Arnauld, indirectement, le théorème 20 Livre X justifie un cas d'égalité des triangles. Une adaptation a été apportée par Arnauld par rapport au savoir savant de son époque qui, en l'occurrence, correspondait aux Eléments de géométrie d'Euclide. Elle relève d'une mise en adéquation des Eléments euclidiens avec les conceptions nouvelles sur l'activité mathématique qui animent Arnauld, et non d'un simple allégement. Nous considérons que les Eléments d'Arnauld procèdent d'une transposition didactique **secondaire** par rapport au savoir savant.

Analyse des influences des résultats 13, 18 et 20 sur le système mathématique

Des problèmes classiques tels que trouver une 4ème proportionnelle, trouver la ligne qui soit à une ligne donnée en raison donnée, diviser une ligne donnée en quelques aliquotes que l'on veut sont traités. Mais la proposition 20 du Livre X qui est le théorème des angles à bases parallèles (A.B.P), n'est employée qu'une seule fois dans les Eléments, à la proposition 25 du Livre XIII. Pour cette raison, nous considérons que nous sommes en présence d'une organisation mathématique locale quant à l'utilisation de ce théorème. La transaction entre passé et avenir n'est pas assurée. Bien sûr, nous pouvons remarquer que les propositions 13 et 18 sont souvent utilisées dans les Livres X, XIII et surtout, en ce qui concerne la proposition 13, au Livre XI du numéro 16 au 82.

Champs conceptuels du théorème 20 Livre X (A.B.P)

Pour déterminer les théorèmes qui relèvent de la même démonstration que celle du 20 Livre X, il est nécessaire de repérer les propositions pour lesquelles est employée la même méthode qu'à la proposition 12 du Livre X. Nous pouvons remarquer que la démonstration du théorème 12, et dans une autre mesure celle également du théorème 13 puisque l'auteur indique qu'il est possible de le démontrer de la même manière, relèvent, chez Arnauld, du même champ conceptuel que le théorème 8 du Livre VII (Annexe III 5, a) qui concerne la proportionnalité des arcs et des angles, le théorème 14 du Livre XIV (Annexe III 8, a) qui a trait à la comparaison des rectangles, et les théorèmes 1er et 2ème du Livre XV (Annexe III 8, b) qui sont en relation avec la comparaison des parallélogrammes. La méthode de démonstration est strictement la même, c'est à dire celle des indivisibles qui a été introduite par Cavalieri. La différence qui existe avec la méthode euclidienne, est précisément qu'Euclide reportait un même nombre de fois les deux longueurs dont il voulait comparer le rapport alors qu'Arnauld divise ces deux mêmes segments en aliquotes. Quoi qu'il en soit, ces théorèmes 12, 13 Livre X, 8 Livre VII, 14 Livre XIV, 1 et 2 Livre XV donnent un certain sens au théorème 20 Livre X des angles aux bases parallèles. Mais les classes de problèmes initiaux pouvant donner également du sens à ce même théorème, ne sont pas apparentes dans l'ouvrage d'Arnauld.

Difficultés théoriques et obstacles

L'infini est inévitable dans le théorème (8LII). Rien n'est évoqué pour signifier que la possibilité de reproduire le procédé indéfiniment entraîne nécessairement l'égalité des raisons. De plus, l'infini et le continu sont présents tout au long du chapitre sur l'arithmétique. Au Livre V, il est à noter que l'auteur utilise, sans l'énoncer, le fait que deux cercles, dans certaines circonstances, se coupent en deux points distincts. De plus, des propriétés topologiques comme "être entre" ne sont bien sûr pas précisées et sont vues sur le dessin. A l'inverse d'Euclide, un axiome du continu est explicité par Arnauld pour préciser que deux lignes se coupent en un seul point (ax5LV)

(Annexe III 3, b). Par contre, le premier lemme Livre VI (Annexe III 4) nécessite un axiome de Pasch. Nous ne pouvons pas dire que cet axiome ne pouvait pas être à la disposition des mathématiciens du XVII ème siècle puisque l'auteur suivant l'explicite. Nous allons nous intéresser à un ouvrage qui est plus dans la continuité des Eléments d'Euclide et en rupture avec les conceptions d'Arnauld.

III. Le traité de géométrie de Gilles-Personne de Roberval

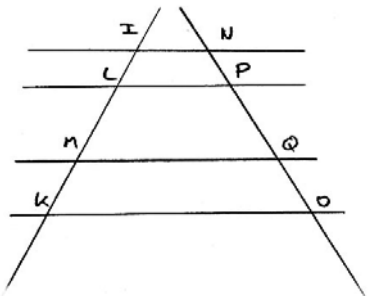
Roberval (1675) reprend souvent textuellement les énoncés et les démonstrations de nombreuses propriétés euclidiennes. A tel point que la démonstration générale du théorème de Thalès est identique à celle proposée par Euclide et que nous pouvons considérer qu'il ne s'agit pas d'une transposition mais du savoir savant. Ainsi, nous ne dressons pas les tableaux synoptiques et nous ne construisons pas les schémas déductifs. Les propriétés et les axiomes fondamentaux dans la démonstration du théorème restent les mêmes. Nous ne donnons donc que les quelques modifications apportées par Roberval.

III.1 Analyse

III.1.1 Démonstration du théorème (D.P.C.T)

Pour parvenir à ses fins, les raisonnements par l'absurde (5LIV), (6LIV) ou les réductions à l'impossible (7LI), (10LI), (16LIV) retrouvent officiellement une place prépondérante dans l'élaboration de nombreuses démonstrations. De plus, des différences avec Euclide apparaissent sur le rajout d'un axiome du continu liés à l'intersection de deux objets comme le deuxième postulat Livre II (Annexe IV 2, a, b) qui est fondamental, à l'existence de la quatrième proportionnelle. L'axiome d'Archimède, deuxième postulat Livre III, est également énoncé. Roberval supprime également quelques propositions comme celle liée au report d'un angle, mais en rajoute quelques-unes qu'il juge démontrables. Lors de la quatorzième proposition du Livre VII qui consiste à diviser un segment en parties égales ou à lui retirer un autre segment donné, Roberval fait explicitement référence à l'existence de la quatrième proportionnelle qui n'est pas prouvée ni même admis dans les éléments d'Euclide.
L'argument essentiel utilisé dans les démonstrations des propositions 1 à 7 (Annexe IV 3, b) est l'inégalité triangulaire à travers, en particulier, la proposition (1LIII). Il s'agit là d'une grande différence par rapport aux démonstrations euclidiennes. Mais les lectures de données sur la figure ne sont pas encore évitées. En effet, par exemple, plusieurs implicites sont lus sur la figure au cours de la démonstration du théorème 8. Le fait que la perpendiculaire CD tombe hors le triangle et que l'angle FCE est une portion de l'angle FCD. Les démonstrations des propositions (9LIV), (15LIV) se fondent aussi en partie sur la lecture de la figure. A propos de la sixième proposition du Livre VII des éléments de Roberval, qui énonce que :

> "Si l'on mène une droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle, laquelle coupe les deux autres côtés prolongés ou non, soit dans le triangle, soit dehors, au-dessous de la base ou au-dessus du sommet, cette parallèle coupera les côtes proportionnellement. Et si les deux côtés du triangle, prolongés ou non, sont coupés proportionnellement, les portions homologues étant de même part, la ligne droite menée par les deux points des sections sera parallèle au troisième côté du triangle."
> **Sigle : (D.P.C.T général)**



Nous pouvons dire qu'il s'agit d'un énoncé généralisé du théorème des droites parallèles à un côté d'un triangle (D.P.C.T Généralisé), ainsi que celui de sa réciproque. Au sujet de la démonstration de cette propriété réciproque, Roberval est obligé de faire une lecture de la figure quant aux "portions homologues de même part". La septième proposition (Annexe IV 5, b) donne la version encore plus générale du théorème dans le cas d'un faisceau de parallèles coupées par des sécantes (F.P). En effet, en complétant la démonstration grâce à la composition de raisons : IL/LM = NP/PQ et LM/MK = PQ/QO. D'où par composée de IL/LM et de LM/MK d'une part et de NP/PQ et PQ/QO d'autre part, on obtient : IL/MK = NP/QO. Nous ne pouvons pas dire, contrairement à ce que nous avons énoncé à propos des Eléments d'Arnauld, que ces Eléments soient une transposition du savoir savant de l'époque représenté en la matière par les Eléments euclidiens. En effet, la démonstration du théorème (D.P.C.T) est reprise exactement des Eléments précités, les seuls changements qui apparaissent ne font que compléter ce corpus, soit en traitant le cas du côté prolongé du triangle en question, soit en matière d'existence d'objet, soit en matière de continu, soit par une tentative de démonstration du *postulatum*. Roberval a l'intuition de l'importance d'un tel énoncé et l'inclut dans l'ensemble des postulats nécessaires à l'élaboration de nombreuses propriétés. L'énoncé de Roberval de l'axiome de Pasch est à rapprocher de l'axiome qui précise que toute droite qui passe par un point intérieur à un angle donné rencontre les deux côtés de l'angle et qui est équivalent au *postulatum* (Hearth). Il pourrait alors se passer du cinquième postulat d'Euclide qu'il tente par ailleurs de démontrer. Mais un nouvel axiome (Annexe IV 3, b), qui remplace le postulatum, est introduit par Roberval.

III.1.2 Nombres, grandeurs et continu chez Roberval

Le nombre (Annexe IV 1, b) est limité aux nombres entiers naturels privés de 1 et de 0. Des différences voient le jour en ce qui concerne l'unification des proportions et des raisons, des grandeurs et des nombres et le fait qu'il compose des grandeurs de genres différents. A ce sujet, cela positionne ces éléments dans l'esprit d'Arnauld. Le livre VI est celui des raisons et des proportions qui remettent en cause l'organisation des éléments d'Euclide qui se divisent à ce sujet entre le livre V et les livres d'arithmétique. Reprenant la quasi totalité du livre V d'Euclide, à la fois dans la forme et dans le fond, il rend suranné les Livres d'arithmétique et assume alors la fin de la distinction entre le Livre des proportions et les Livres d'arithmétique. Les cinq grandeurs de la géométrie permettent à Roberval de construire deux notions nouvelles, d'une part un certain mode de comparaison de deux grandeurs de même genre, ce qui est la raison, et d'autre part la comparaison de ces raisons entre elles, ce qui donne naissance aux proportions. La distinction entre les raisons relatives aux grandeurs d'une part, et celles relatives aux nombres n'est plus faite. La définition 6 (Annexe IV 4, a), comme la 5ème du Livre V d'Euclide, a pour objet de définir l'égalité de raisons. Malgré leur étrange ressemblance, une différence existe entre les deux approches. La définition euclidienne est du type : a/b = c/d si , et seulement si$\forall$ x, y entiers on a ($x\ a > y\ b$ et $x\ c > y\ d$) ou ($x\ a = y\ b$ *et* $x\ c = y\ d$) ou ($x\ a < y\ b$ et $x\ c < y\ d$). La définition de Roberval : a/b = c/d si, et seulement si :$\forall$ (x , y) entiers, on a ($x\ a > y\ b$ alors $x\ c > y\ d$) et ($x\ a = y\ b$ alors x $c = y\ d$) et ($x\ a < y\ b$ alors $x\ c < y\ d$). Dans une remarque qui suit, Roberval insiste sur la différence qu'il fait entre les deux concepts de raison et de proportion. Les premières vont être ordonnées, alors que les secondes ne peuvent être que les mêmes ou en disproportion. Cet auteur évite la définition de l'égalité de raisons par anthyphérèse et n'identifie pas nombres et grandeurs. Trois points fondamentaux vont distinguer ce Livre VI de l'œuvre euclidienne. La construction euclidienne est parfois lacunaire ; des enchaînements manquent ou des déductions ne sont pas fondées. Roberval importe dans ce Livre des propositions issues des Livres d'arithmétique afin de justifier une nouvelle fois l'unification. Il précise également qu'Euclide utilise implicitement l'existence d'une quatrième proportionnelle. Cela l'entraîne à proposer trois propriétés nouvelles qui ne suffissent tout de même pas à assurer l'existence générale de la quatrième proportionnelle à trois grandeurs.

III.1.3 Problématique, perspectives mathématiques et difficultés théoriques

Les éléments de géométrie de Roberval vont à l'encontre de l'esprit qui animait les mathématiciens de Port-Royal (Annexe IV 1, a). Pour lui, tout ce qui peut être démontré doit l'être, car la géométrie est intrinsèquement justifiée. Ses éléments de géométrie sont construits en fait à partir d'une critique du corpus euclidien, mais à l'inverse d'Arnauld, il utilise les méthodes euclidiennes comme soubassement de son œuvre. La convenance est pour lui une opération (Annexe IV 2, a, b). La problématique est géométrique.

Au sujet des définitions et des postulats (Annexe IV1,d) Roberval admet l'infinie divisibilité du continu. Par exemple, un solide, respectivement une surface, une ligne peut être divisé en une infinité continue de superficies, respectivement de lignes et de points, qui sont ses frontières ou les frontières de ses portions. Il se rapproche de Cavalieri dont les notions d'infinie divisibilité ont été également empruntées par Arnauld. L'idée de "tomber au-delà" qui est utilisée à la proposition 27ème Livre IV n'est pas définie et cette notion topologique est simplement vue sur le dessin, de même que le fait de "tomber entre A et B".

IV. Les Eléments d'Euclide expliqués par DESCHALLE (1670)

Nous pouvons nous rendre compte, à la lecture de l'avant-propos (Annexe V 1, a), que cet auteur compte "simplifier" certaines démonstrations des Eléments d'Euclide et surtout qu'il tente de montrer l'utilité de chacune des propositions principales sans pour autant changer d'approche des mathématiques. Il se place sciemment dans le cadre d'un savoir à enseigner au plus grand nombre. La problématique est différente. Par exemple, pour la construction d'un triangle équilatéral, l'auteur donne un usage courant :

> "On peut se servir très utilement du triangle équilatéral pour trouver une distance inaccessible, telle que la largeur d'une rivière". [...]

Il décrit également un usage dans le méso-espace de la proposition 4 :

> "Qu'on doive mesurer la ligne inaccessible AB, je regarde du point C les points A et B. Je regarde du point C, les points A et B. Puis, je mesure l'angle C. Je mesure, avec la toise, les lignes AC, BC, que je suppose être accessibles. Je m'écarte ensuite dans la campagne, je fais un angle DEF égal à l'angle C. Je fais aussi FD et FE égal à CA et CB. Or, suivant cette proposition, les lignes AB, DE, sont égales".

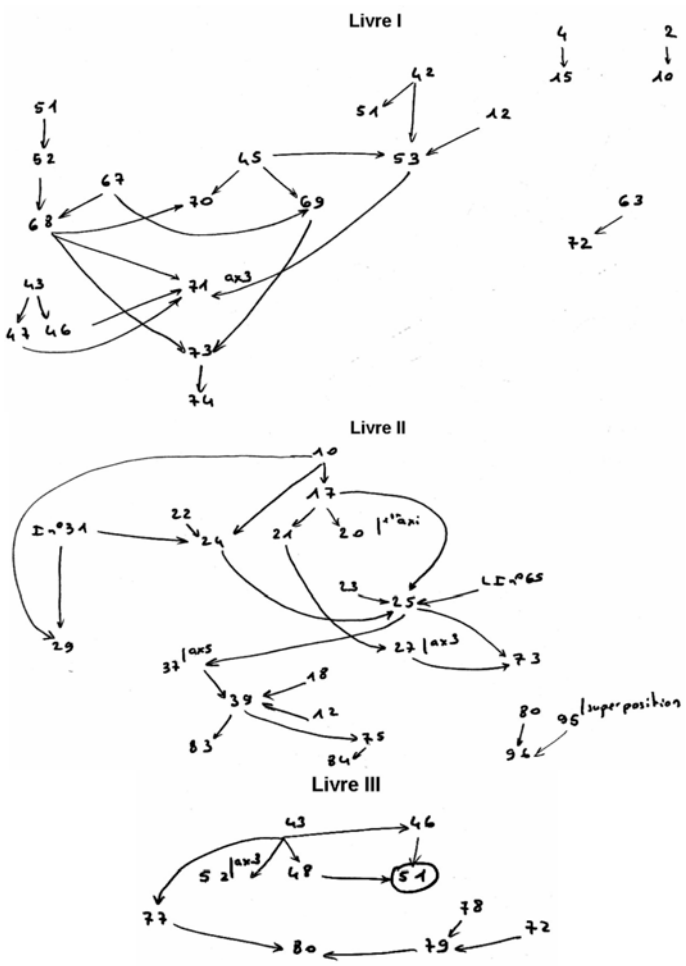
Le report de longueurs nécessite, dans cet espace, le respect de l'alignement. L'application de cette proposition fait appel au géométrique, mais également à des connaissances spatiales relativement complexes. On retrouve cela dans l'usage de la proposition 6 qui concerne le triangle isocèle. L'auteur donne ensuite un autre usage de ce résultat.

> "On peut se servir très utilement de cette proposition pour mesurer l'élévation d'une tour ou d'un obélisque. Ainsi, si l'on voulait savoir l'élévation de l'obélisque AB, il faudrait attendre que le soleil fût élevé de 45 degrés sur l'horizon, pour avoir l'ombre CB égale à la hauteur AB, car nous verrons, par la suite, qu'au triangle rectangle tel que ABC, si l'angle C est de 45 degrés, l'angle A sera aussi de 45 degrés. Par conséquent, le triangle sera isocèle, c'est-à-dire que la hauteur AB sera égale à la longueur de l'ombre CB, laquelle étant connue, on aura ce qu'on cherche".

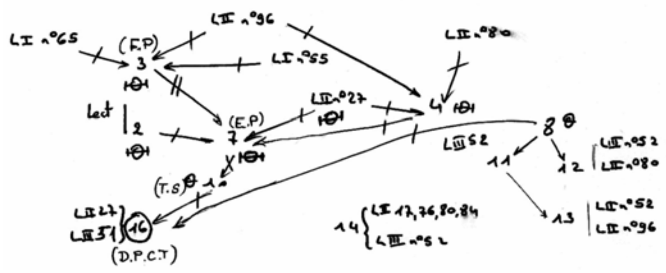
De la propriété des angles opposés par le sommet, Deschalle donne une application "pratique". Un problème de mesure d'un angle du méso-espace est ramené à une situation du micro-espace par l'intermédiaire du tracé d'un triangle puis de la mesure pratique de cette représentation d'angle. L'intérêt aurait été de proposer de mesurer l'angle en question dans le méso-espace. L'auteur considère que certaines propriétés démontrées par Euclide, en particulier la 14, sont inutiles. Dans un souci d'allégement, il en supprime quelques-unes. Il se place là aussi dans une autre otique qu'Euclide. Euclide démontre le théorème 16 en utilisant l'angle opposé au sommet et l'égalité de triangles. Deschalle ici se fonde exclusivement sur la conservation de la mesure des angles par translation. Le reste des démonstrations des propositions liées au théorème de Thalès sont identiques à celles d'Euclide. C'est dans ce sens que les présents Eléments relèvent d'une transposition didactique directe des Eléments d'Euclide c'est à dire par simplification.

V. Les éléments de géométrie de LAMY (1685)

V.1 Les schémas déductifs



Livre IV



V.2 Analyse

V.2.1 Démonstration du théorème (D.P.C.T), les grandeurs et les nombres

Lamy reprend intégralement et littéralement les neuf notions communes des Eléments d'Euclide en les traduisant en langage algébrique. Lamy utilise la méthode de démonstration d'Arnauld pratiquement exclusivement, mais pour certaines propriétés, l'utilisation de la technique euclidienne fondée, par exemple, sur une égalité des triangles, fait ponctuellement son apparition. Il introduit la même notion d'espace parallèle qu'Arnauld. L'inégalité triangulaire invite Lamy à démontrer le théorème qui indique qu'une perpendiculaire est plus courte que toutes les lignes qu'on puisse mener d'un point à une droite et qui est absent des Eléments d'Euclide. Le théorème III (Annexe VI 6, a) (E.P) n'a jamais été rencontrée encore dans notre travail. La démonstration du théorème 1 (T.S), qui précise que deux triangles semblables ont leurs côtés proportionnels, se fonde sur ce théorème. Les cas d'incommensurabilité sont évités. Cela provient sûrement de l'ambiguïté de la relation établie par Lamy entre grandeur et nombre. L'exposant n'est pas un nombre, mais dans le cas commensurable, il se comporte comme un nombre. Le cas des raisons sourdes n'est pas traité par Lamy.

Les démonstrations des théorèmes 3 et 4 section II sont les mêmes qu'Euclide (n° 8), (Livre III n° 52), Livre II n° 80) mais il utilise un cas d'égalité de triangles. Par conséquent, il ne se situe pas entièrement dans l'esprit des éléments de son contemporain. Sa démonstration par l'absurde du théorème 5 est également la même qu'Euclide (Livre II n° 29, n° 76, n° 84, n° 17, n° 80 - Livre IV n° 52). Une distinction importante avec Euclide réside dans le fait que de nombreuses démonstrations euclidiennes sont fondées sur les cas d'égalité des triangles. Lamy évite souvent ces trois théorèmes bien qu'un soit tout de même employé pour les triangles semblables. Le postulat des parallèles paraît être évité mais il est implicitement utilisé dans de nombreuses démonstrations où deux droites se rapprochent l'une de l'autre.

Dans la démonstration du théorème VII (D.P.C.T), Lamy prend modèle sur Arnauld sans aborder, encore une fois, le cas incommensurable. Mais une autre différence avec son contemporain existe, les triangles semblables sont utilisés dans cette démonstration. Les espaces parallèles apparaissent dans la démonstration de la proposition 10 qui concerne les triangles semblables. La méthode de démonstration du théorème des espaces parallèles et du théorème des droites parallèles à un côté d'un triangle n'est pas utilisée dans d'autres occasions. Le quotient lui-même n'étant pas défini, les nombres qui sont considérés sont les nombres rationnels et entiers. Il utilise l'algèbre pour alléger son discours dans toutes les démonstrations des propositions du livre III (Annexe VI 5, b). Il distingue raison de nombre à nombre et raison sourde, mais il n'explicite pas l'égalité des raisons sourdes.

V.2.2 Problématique et perspectives mathématiques

Lamy montre (Annexe VI, a) comment nous pouvons organiser nos savoirs autour d'une problématique, en prenant l'exemple de la section des triangles. Il utilise la méthode d'Arnaud pour "apprendre comment il faut étudier" et il fonde ses Eléments sur le travail d'Euclide, tout en critiquant celui-ci. Cet auteur différencie, dans les avertissements du Livre VI, la méthode d'invention qui sert à trouver ce que l'on ne connaissait pas auparavant et la méthode de doctrine qui consiste à faire comprendre les idées des théorèmes connus. Nous sommes dans la droite ligne des méthodes de démonstrations adoptées par Arnauld qui désirait comprendre pourquoi tel théorème est vrai ? Contrairement à Arnaud, et bien que celui-ci ne puisse s'en passer, Lamy s'autorise textuellement le raisonnement par l'absurde. Lamy désire "alléger" les Eléments d'Euclide afin d'aller à l'essentiel et en faire une méthode de découverte et se place ainsi, encore une fois, dans la lignée d'Arnauld.
Dans la définition des lignes droites perpendiculaires, nous pouvons nous rendre compte encore que Lamy ne se dégage pas de la servitude des sens comme il le propose à travers une citation de Plutarque. Il fonde la démonstration des propositions 3 (Annexe VI 3, a), 1 à 5 (Annexe VI 3, b), 1 à 5, aux théorèmes 2 n°17, 1 n°37 (Annexe VI 4, a) encore une fois sur une lecture de la figure. Ainsi, par exemple, au lemme 1, le fait que Z soit inclinée sur AB entraîne que B rencontre X est un implicite vu sur la figure. De même, au lemme 3, le fait qu'une droite s'approche ou s'éloigne d'une autre est purement une interprétation du dessin. Pour l'auteur, si on s'approche d'un côté, on s'éloigne de l'autre.

V.2.3 Organisation mathématique

Le postulat des parallèles ou les théorèmes d'égalité de triangles ne sont pas mis en évidence. Par contre, la technique de lecture graphique sur le dessin est largement utilisée : définition 5, propositions 3, 6, 7, 8 : Section III, proposition 2 ; Section IV, définition 1 ; propositions 3 n° 69, n° 71. Ainsi, les cas d'égalités des triangles sont le plus souvent remplacés, dans les démonstrations par des lectures directes sur les dessins et parfois par l'inégalité triangulaire, qui est admise comme étant une évidence. Le principe d'égalité par superposition est souvent remplacé par un raisonnement direct sur les figures. La lecture de la figure est employée aux propositions 1 à 5 ; aux théorèmes II et V et au n° 37.

Nous pouvons penser que les théorèmes 1 (n°10) et 7 (n°16) qui concernent les triangles semblables, le théorème des espaces parallèles, et celui des droites parallèles à un côté d'un triangle (D.P.C.T), ne sont qu'une technologie de toute la théorie des parallèles de Lamy, Θ. Cette théorie est composée, pour la démonstration des théorèmes sur les espaces parallèles et (D.P.C.T), des numéros 2, 3, 4, 7 du Livre IV et du n°27 du Livre II. Ensuite, les théorèmes de (D.P.C.T) et (E.P) permettent de résoudre des tâches grâce à des techniques qu'ils fondent. Même si parfois, par exemple, un cas d'égalité de triangles est utilisé, ces interventions sont trop peu nombreuses pour considérer quelles constituent le cadre d'une théorie supplémentaire Ainsi, l'organisation mathématique de cette démonstration est locale. Nous pouvons conclure que ce traité correspond à une transposition didactique des Eléments d'Arnauld qui eux-mêmes sont une transposition des Eléments d'Euclide. Lamy a procédé à une transposition des Eléments d'Arnauld du fait, par exemple, que l'égalité des raisons sourdes ne soit pas définie. Nous considérons qu'il s'agit du niveau tertiaire de transposition correspondant à la transposition d'une démonstration elle-même transposée au niveau secondaire.

Analyse des influences des théorèmes (D.P.C.T) et (E.P) sur le système mathématique

Nous pouvons tout d'abord remarquer que le théorème (D.P.C.T) ne sert pas à démontrer les trois théorèmes sur les triangles semblables qui le précèdent. Nous n'allons pas donner les énoncés de toutes les propriétés qui sont démontrées à l'aide de ce théorème parce que les plus nombreuses sont classiques et relèvent par exemple de la propriété de la bissectrice d'un angle inclus dans un triangle (17) ou de certains problèmes de constructions comme couper une ligne droite semblablement à une ligne qui est déjà coupée (20), diviser une ligne en tant de parties égales que l'on voudra (21), trouver une troisième proportionnelle (23), et une quatrième proportionnelle (24). Celles qui sont situées dans les Livres suivants sont au nombre de deux :

38. Livre V. Deux lignes droites coupées par des plans parallèles sont coupées proportionnellement.
Problème II. Trouver l'axe d'une ellipse.

Dans ces Eléments, nous retrouvons des conceptions aristotéliciennes du continu. Mais comme dans les éléments d'Euclide, l'existence des points d'intersection faisant référence au continu, est admise après une référence au dessin.

Synthèse

La démonstration du théorème (D.P.C.T), problématique et perspectives mathématiques :

Arnauld part du principe que le vrai ordre de la nature ne doit pas être perturbé. Ainsi, considérant que le théorème sur les triangles équiangles ne se réfère qu'aux angles, il énonce un théorème équivalent mais se place dans des angles. De même, les propositions qui traitent des lignes ne doivent pas être démontrées grâce aux triangles. Cela change radicalement la démonstration euclidienne du théorème de Thalès. Ce changement est tel qu'un cas d'égalité des triangles est démontré indirectement par des propositions en rapport avec le théorème de Thalès. L'égalité des triangles n'est pas utilisée et est remplacée par des lectures de données sur les dessins beaucoup plus nombreuses que chez Euclide. L'égalité par superposition est remplacée par l'inégalité triangulaire dans les démonstrations. Tout cela allège la preuve. De plus, Arnaud exclut, par principe, les raisonnements par l'absurde mais nous avons vu qu'il utilise tout de même parfois cette méthode. Les démonstrations doivent correspondre à des méthodes de recherche. Il s'agit d'un changement de perspective important qui a bien sûr une influence sur la démonstration du théorème de Thalès. Ainsi, par exemple, à l'inverse d'Euclide, Arnauld s'autorise à employer un compas pour reporter des longueurs ce qui a pour conséquence de supprimer des propositions dans la démonstration. Il supprime des propositions ou transforme certaines d'entre elles en axiomes ou en définitions. L'organisation mathématique est plutôt régionale. Les principaux piliers sont l'inégalité triangulaire, la lecture des données sur les figures et la méthode des parallèles associée à la méthode des indivisibles. Les changements apportés par Arnauld à la démonstration d'Euclide sont liés à ces conceptions de l'activité mathématique. Il s'agit d'une transposition didactique secondaire du savoir savant encore incarné par les Eléments d'Euclide. Même si le XVII ème siècle correspond à une prise de distance par rapport à Euclide, certains mathématiciens conservent l'esprit et la structure des Eléments. Ainsi, la démonstration du théorème de Thalès par Roberval est calquée sur celle d'Euclide. Les raisonnements par l'absurde et les réductions à l'impossible réapparaissent. Les changements par rapport à l'alexandrin résident dans l'apparition de plusieurs axiomes du continu qui sont l'axiome d'Archimède, l'existence de l'intersection de deux objets mathématiques et l'existence de la quatrième proportionnelle. Les axiomes sont même redondants puisque l'axiome de Pasch peut être considéré comme un équivalent du *postulatum*. Mais ce n'est par le seul changement. Roberval emploie l'inégalité triangulaire. Son objectif est de démontrer tout ce qui est démontrable, c'est-à-dire de réduire au maximum les principes primordiaux comme certaines demandes et notions communes. La problématique est encore géométrique. L'organisation praxéologique de la démonstration est ainsi générale et nous pouvons considérer qu'il s'agit du savoir savant de l'époque et qu'aucune adaptation de ce savoir, aucune transposition n'est effectuée.

Par contre, sans changer fondamentalement le texte d'Euclide même s'il supprime quelques propositions, Deschalle veut montrer l'utilité des principales propositions. Mais ces utilisations sont postérieures à l'introduction des théorèmes. Elles viennent justifier *a posteriori* leur intérêt. De plus, ces applications ne sont pas réellement posées dans le méso-espace puisqu'elles sont modélisées directement dans le micro-espace. Par ailleurs, si ces applications dites pratiques devaient effectivement se passer dans le méso-espace comme indiqué, des connaissances à la fois géométriques et spatiales devraient être mises en œuvre.

La démonstration du théorème (D.P.C.T) de Lamy combine la méthode que nous avons trouvée dans les Eléments d'Arnauld partant des espaces parallèles et de l'inégalité triangulaire avec la méthode euclidienne employant des cas d'égalité des triangles. Mais il évite au maximum l'utilisation de ces cas d'égalité et du *postulatum* qui est tout de même implicite lorsque deux droites se rapprochent l'une de l'autre. Lamy part d'une problématique qui est celle de la section des triangles. Il veut se dégager des sens mais de nombreux recours à des lectures de données sur les dessins sont tout de même effectuées. En particulier, les cas d'égalité des triangles et le principe d'égalité par superposition sont souvent remplacés par des lectures des dessins. L'organisation praxéologique de la démonstration du théorème (D.P.C.T) et des (E.P) est locale, car une seule théorie, composée des propositions 2, 3, 4, 7 du Livre IV et du n°27 du Livre II intervient. Globalement, aucune proposition ne constitue réellement la clef de voûte de l'ouvrage de Lamy. Nous sommes en présence d une transposition didactique des Eléments d'Arnauld qui eux-mêmes étaient une transposition des Eléments d'Euclide. Mais Lamy transpose également directement ces derniers en les simplifiants.

Le rapport aux nombres, aux grandeurs et au continu au XVII ème siècle :

Aucune réelle innovation n'est à indiquer au sujet de l'infini et du continu. Les irrationnels sont manipulés algébriquement comme des nombres, mais ils ne sont pas définis. L'homogénéité des grandeurs est encore de mise pour former et comparer des rapports. Mais Descartes, en associant grandeurs et nombres tend à la supprimer. La ligne est supposée par certains, comme Galilée ou Cavalieri, comme composée d'une infinité de points. Cette idée de considérer un volume constitué de surfaces, une surface composée de lignes et une ligne de points est employée par plusieurs mathématiciens parmi lesquels nous trouvons Galilée, Cavalieri et Roberval, pour mettre au point la méthode des indivisibles. Mais les proportions sont encore en vigueur et ne sont toujours pas remplacée par les nombres. Cavalieri n'applique pas la méthode des limites inventée par Saint Vincent qui consiste à sommer de petites tranches mais il compare par exemple les surfaces entre elles en comparant les lignes qui les composent. Il ne calcule donc par l'aire d'une surface et évite ainsi la somme des indivisibles qui la constituent. Arnauld, comme Descartes, tente aussi de rapprocher les notions de grandeurs et de nombres. En effet, la définition de l'égalité de deux raisons ressemble chez Arnauld à un processus pratique de mesure de longueurs. Sa définition de l'égalité des raisons distingue les raisons exactes des raisons sourdes (irrationnelles). La définition d'Euclide unifiait les deux. Pour Arnauld, les nombres et les grandeurs peuvent être multipliés et divisés à l'infini. Il énonce que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Nous pouvons considérer qu'il avait les outils pour construire les rationnels excepté les structures algébriques. Roberval est aussi en rupture avec les Eléments d'Euclide sur les nombres et les grandeurs. La scission des Livres d'arithmétique et des Livres sur les grandeurs n'existe plus. Mais l'identification pure et simple entre grandeurs et nombres n'est tout de même pas évidente. Dans la démonstration du théorème, Lamy ne fait pas intervenir le cas des raisons sourdes c'est à dire le cas irrationnel. Mais l'exposant qui lui est associé, dans le cas commensurable, respecte des propriétés numériques. L'algèbre simplifie des preuves mais le lien entre grandeurs et nombres demeure encore flou.

Difficultés, obstacles et préconstruits :

Arnauld, pour démontrer l'égalité de deux raisons sourdes effectue une double réduction par l'absurde et admet lui aussi implicitement l'existence de la quatrième proportionnelle à trois nombres. Un axiome du continu lui serait nécessaire. L'infini et le continu sont présents tout au long du Livre sur l'arithmétique. L'approche ensembliste et ponctualiste de l'espace permet à Arnauld d'énoncer un axiome du continu sur le fait que deux lignes se coupent en un point unique. Mais un axiome de Pasch est souvent indirectement employé sans être énoncé par Arnauld alors que Roberval l'énonce. Ce dernier, grâce à trois résultats sur le continu, justifie l'intersection de deux droites, d'une droite et d'un cercle. Il admet l'infinie divisibilité d'une droite, d'une surface et d'un solide. Mais le fait de tomber entre deux points est lu sur les dessins. Dans Lamy, nous retrouvons les conceptions d'Aristote sur le continu. Il ne prend pas la précaution d'admettre l'existence de points d'intersections.

Interventions des propositions, champs conceptuels et problèmes donnant du sens :

Les problèmes classiques de construction sont traités par Arnauld. Mais la proposition (20) (A.B.P) n'est utilisée en tant qu'outil, qu'une seule fois dans l'ouvrage. Les propositions (13) et (18) sont elles beaucoup plus employées. Dans Arnauld de nombreuses propositions sont démontrées de la même façon que la proportion (13). Dans Lamy, les applications des théorèmes (D.P.C.T) et (E.P) aux méthodes de constructions sont classiques mais bien que le théorème 10 semble plus utilisé, globalement, nous pouvons dire que le théorème (D.P.C.T) et la proposition 10 sur les triangles semblables sont très peu employées dans l'ouvrage de Lamy. Il n'utilise pas la méthode de démonstration du théorème (D.P.C.T) dans d'autres occasions. Le champ conceptuel est limité. Deschalle tente de donner du sens aux principaux théorèmes en proposant des applications pratiques mais ces dernières ne sont pas posées dans le bon espace.

CHAPITRE 4
LE THEOREME DE THALES
AU XVIII ème SIECLE

I. L'esprit des éléments de Clairaut (1741)

La démonstration étant pratiquement exclusivement sur des lectures raisonnées de la figure, nous nous attachons à en donner l'essence sans rentrer dans les détails. Dans le premier paragraphe de sa préface (Annexe VII 1, a), Clairaut dénonce un trop grand nombre de définitions, de demandes dans l'enseignement traditionnel de la géométrie. Il ne faut, en aucun cas, ennuyer l'auditeur. Clairaut exprime ensuite le désir à la fois d'intéresser et d'éclairer.

Nous pouvons remarquer, en lisant le deuxième paragraphe que nous avons sélectionné, que Clairaut a cherché la genèse de la géométrie en partant de l'Egypte et des crues du Nil. Il propose alors une géométrie que certains qualifient de problématisée (Barbin, 1991). L'important est de savoir de quelle problématique elle relève. Les savoirs, pour Clairaut, doivent prendre sens et devenir des réponses à une problématique initiale, doivent constituer des outils pour résoudre un problème. Les problèmes proposés par Clairaut s'organisent autour d'une même problématique, celle de la mesure des terrains qui forme, en quelque sorte, le contexte de son expédition en Laponie (Badinter, 1999). L'ordre qui régit l'ouvrage de Clairaut est l'ordre d'invention et non plus l'ordre logico-déductif des anciens. Les concepts ne sont introduits que lorsqu'ils sont nécessaires pour résoudre un problème lié à cette problématique initiale. Il remplace les exigences mathématiques des anciens par le sens de l'observation, le bons sens et l'intuition. Ainsi, le concept d'angle est introduit (Annexe VII 1, b) dans une situation où on ne peut mesurer que deux côtés d'un triangle : il s'agit d'un problème de distance inaccessible.

Nous pensons, avec Glaeser (1983), que les exemples choisis par Clairaut sont captivants non pas parce qu'ils présentent une quelconque utilité ou une quelconque authenticité pour les apprenants, mais simplement parce qu'il s'agit de questions modélisées intéressantes. Deux réflexions peuvent être émises à ce sujet. Peut-on penser que le public mondain trouve une quelconque utilité dans la mesure des terrains ? Ne peut-on pas croire que Clairaut enveloppe ses éléments dans une gangue pseudo - pratique et qu'il n'atteint pas son objectif ? Quoi qu'il en soit, analysons le travail effectif dans le méso-espace. Un arpenteur ayant à calculer l'aire d'un terrain doit faire appel à des connaissances spatiales et géométriques. Imaginons que les côtés du terrain soient rectilignes, pour le vérifier, il doit procéder par visées successives, c'est-à-dire pratiquer une méthode proprement spatiale. Ce qui le guide par la suite dans les choix des éléments qu'il doit contrôler pour parvenir à résoudre son problème, se sont les connaissances de géométrie qui lui permettent, par exemple, après avoir pris des mesures d'angles, de longueurs, de dresser un dessin représentatif de la situation pour calculer l'aire de ce terrain. Mais pour prendre des mesures de longueur, si les distances sont très grandes par rapport à son instrument, il doit reporter son décamètre, par exemple, plusieurs fois et pour cela le contrôle précis de l'alignement des extrémités successives est indispensable. Ainsi, l'arpenteur utilise simultanément des connaissances relevant du contrôle spatial et des connaissances géométriques. Berthelot et Salin (1992) ont montré, grâce à un test s'adressant à des professeurs des écoles en formation, que les connaissances relevant du méso-espace étaient insuffisantes pour parvenir à une solution de visée de même type que celle de l'arpenteur et pour surmonter l'obstacle dû à la lecture du point de vue micro-espace du problème posé. C'est dans ce sens que nous pensons que la problématique de la mesure des terrains, telle qu'elle est introduite et développée par Clairaut dans ses éléments de géométrie, ne dépend pas d'une problématique pratique, contrairement à ce que nous pourrions penser au départ.

Clairaut définit tout d'abord l'égalité des angles en utilisant un instrument (a). Ce report d'un angle ou la comparaison de deux angles chez Clairaut relève, à notre avis, d'une problématique pratique. L'espace, comme pour la problématique de modélisation, est l'espace sensible mais la solution est validée, à l'aide d'un instrument, dans l'espace sensible. La réponse est cherchée par ajustement au niveau de l'action sous le contrôle de la perception.

Par essence, la géométrie de Clairaut relève d'une problématique de modélisation, comme nous le verrons encore dans le cas des figures semblables, mais ponctuellement elle peut être pratique. Cela engendre que les démonstrations des propositions 27 et 28 (Annexe VII 1, c) sont uniquement fondées sur une lecture de la figure. Le postulat des parallèles n'est ni un théorème, ni un postulat, c'est un résultat qui s'observe sur la figure.

S'appuyant sur la mesure des terrains ainsi que sur la mesure des distances accessibles et inaccessibles, il lui semble nécessaire de faire appel à l'échelle pour représenter des parcelles, ce qui le conduit à définir initialement les figures semblables. L'appel initial aux échelles et donc aux figures semblables, confirme qu'il s'agit non pas au départ d'une problématique pratique liée à la mesure des terrains, mais d'une problématique de modélisation.

Nous pouvons dire à travers la démonstration du théorème des triangles équiangles (T.E), seul énoncé présent dans l'ouvrage en connexion avec le théorème de Thalès, que Clairaut a le plus souvent une appréhension perceptive de la figure et pratiquement jamais une appréhension discursive.

II Les éléments de La Caille (1744)

II.1 Théorème des faisceaux de droites parallèles (F.P) et similitudes des triangles

Il semble que ce soit la première fois, au numéro 430 (Annexe VIII), qu'apparaît la figure de type triangulaire dans laquelle sont tracées de nombreuses parallèles à un côté et équidistantes ainsi que d'autres parallèles à un second côté et de même longueur. Cette version est reprise jusqu'au XIX ème siècle et au début de XX ème. La démonstration reste tout de même exclusivement fondée sur une interprétation de la figure comme aux numéros 359, 361, 366, 382, 383, 384, 382, et autre. Parfois, les déductions sont directes sans même faire référence à une telle lecture comme cela est le cas au 384, qui concerne les angles alternes internes, correspondants. Alors que d'autres auteurs, comme Euclide, démontrent la correspondance qui existe entre angle et arc, La Caille, au n°366, se contente de lire la figure. Il se rapproche en cela d'Arnauld et Lamy.

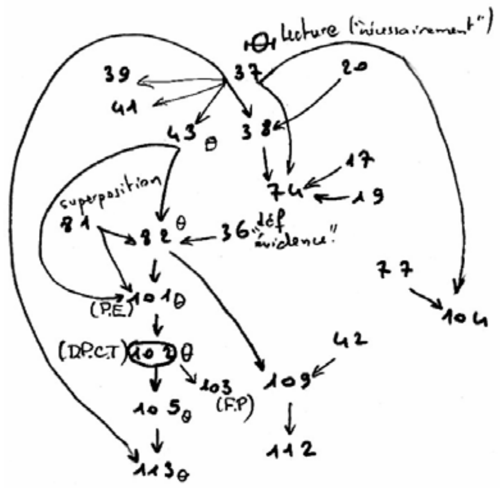
Nous pouvons remarquer que la médiatrice d'un segment fonde de nombreux théorèmes pour La Caille comme en particulier au numéro 377. De plus, dans sa démonstration, il ne se soucie que du cas où les segments sont commensurables.

II.2 Applications

L'auteur donne une application pratique du théorème de mesure de distance inaccessible (435) comme Deschalle l'avait fait également. On remarque l'algébrisation totale du problème qui semble se dérouler dans le méso-espace. Mais une problématique initiale exclusivement liée au méso-espace, qui aurait permis de réellement construire ce savoir, de lui donner du sens, n'en est en fait pas une ici puisque la modélisation dans le micro-espace est immédiate. Comme dans l'ouvrage de Clairaut, l'arpenteur qui doit effectuer les relevés de distance est confronté au problème de visée du point B, au problème d'alignement dans la construction du triangle AGD et dans la mesure de ses côtés. L'intersection des droites BC et AG, la construction de la parallèle (EF) à la droite (CD) sont des procédés qui font appel à des connaissances spatiales qui ne sont en aucun cas explicité dans cet ouvrage. Viennent ensuite les applications à la bissectrice d'un angle, au triangle rectangle, etc.

III. Cours de mathématiques d'Etienne Bezout (1765)

III.1 Schéma déductif



III.2 Analyse

Pour démontrer le théorème (D.P.C.T), Reynaud, commentateur de Bezout, applique la méthode de Lacroix (58) fondée sur le principe d'exhaustion. La méthode de Reynaud est rigoureuse, mais n'est pas une méthode de découverte et, par là même est sujette à de nombreuses critiques. La méthode de Bezout ne fait pas appel à la réduction par l'absurde et constitue une méthode de recherche et de découverte, mais fait à la fois référence à l'infini et à l'imagination. De plus, le continu, comme précédemment, n'est pas absent du raisonnement et il est impossible de l'ignorer. Le type de démonstration n'est pas utilisé ailleurs.

Euler, en introduisant les unités de vitesse (1765), et d'Alembert (1758), en traitant les mouvements uniformes, osent braver l'interdit des rapports des grandeurs de nature différente.

En ce qui concerne l'arithmétique utilisée aux XVIII ème et dans la première moitié du XIXème siècle, les deux ouvrages de référence sont ceux de Bezout (1768) commenté par Reynaud et ceux de Reynaud (1827). Une fraction est obtenue à partir de la division de l'unité.

Les démonstrations de Bezout concernent essentiellement les proportions, alors que celle du traité de Reynaud traitent des fractions numériques. Ce dernier fait des démonstrations sur des cas paradigmatiques servant d'exemple généralisateur.

Bezout commence par les définitions euclidiennes classiques qui concernent les lignes, surfaces, corps. Au sujet de la superposition, citons par exemple d'Alembert (1759) :

> "La superposition, telle que les mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence du reste."

Nous sommes clairement en présence d'une problématique de modélisation. C'est peut-être pour cette raison que le procédé d'égalité par superposition est mieux accepté par des auteurs postérieurs à la période euclidienne. Bezout agit sur l'espace par ajustement et sous le contrôle exclusif de la perception, communique ses résultats sans conceptualisation proprement dite. Mais nous ne pouvons pas dire qu'il s'agit d'une problématique pratique, même en partie, comme pour Clairaut. En effet, le principe d'égalité par superposition se fonde exclusivement sur la figure et sur le mouvement pour obtenir la coïncidence, mais les processus sont mentaux. Nous pouvons dire globalement que la géométrie de Bezout est une géométrie essentiellement fondée sur la lecture raisonnée de la figure (11, 13, 14, 36, 37, 73,74, 104, 83,105). L'appréhension de la figure est donc perceptive.

La démonstration du théorème fondamental 101 (P.E) se fonde sur un théorème de la "théorie" des parallèles et sur un cas d'égalité des triangles et sur le principe de superposition. Cette méthode a été celle de La Caille et de Bossut. Nous pouvons dire que les lectures raisonnées des figures fondent cette démonstration générale des théorèmes liés à Thalès, car que ce soit la proposition 37, la définition et une propriété des parallèles (36) ou un cas d'égalité des triangles nécessaires à cette preuve (81), seule ces interprétations directes des dessins sont utilisées, le vocabulaire trahit ce fait puisque les termes "nécessairement", "évidence" et autre sont très souvent employés. Une seule théorie intervient, celle des parallèles, qui trouve sont fondement sur la perception directe des propriétés ou des évidences sur les dessins. La théorie est composée des numéros 36 et 37 ainsi que des évidences lues sur les dessins. Tout le reste relève de technologies et de techniques. L'organisation praxéologique est encore régionale. Nous qualifions cette transposition didactique de directe, comme pour Deschalle, fruit d'une simplification des Eléments d'Euclide.

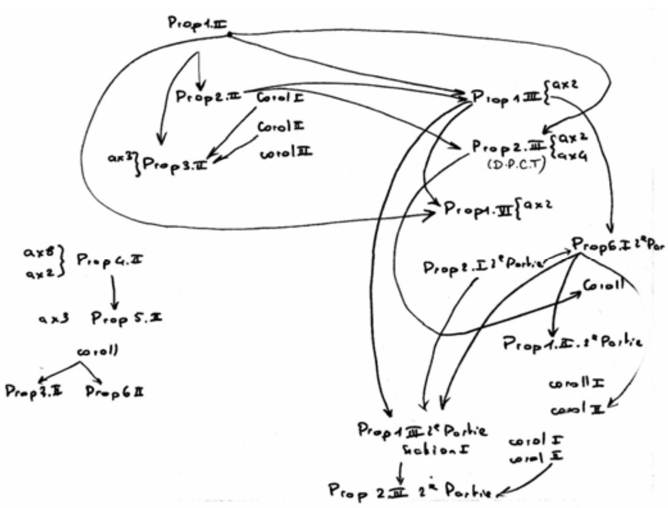
Bezout démontre des résultats (Annexe IX 2, e) sur des faisceaux de sécantes (103), que nous notons (F.S), sur la bissectrice d'un angle d'un triangle (104). Au numéro (107), c'est l'une des premières fois que la figure, que nous nommons papillon, apparaît.

Dans l'illustration du premier cas de triangles semblables (109), le positionnement gigogne des deux triangles diffère de celui adopté, par exemple, par Euclide ou Legendre.

Grâce au numéro (101), Bezout déduit la méthode classique de division d'une ligne en parties égales ou en parties proportionnelles. Mais il rajoute une méthode plus précise à appliquer lorsque la ligne à diviser est petite ou lorsque les parties de la division sont également petites. Pour cela, il emploie la même méthode des échelles que Lacroix (70).

IV. Le traité de géométrie de Bossut (1775)

IV.1 Schéma déductif



IV.2 Analyse

Dans la démonstration de la proposition 1 (Annexe X 1, c) qui concerne l'équivalence en aire d'un parallélogramme et d'un rectangle, nous reconnaissons le principe d'équidécomposition. La proposition 2 permet d'énoncer que l'aire du rectangle est égale au produit de ses deux côtés, ce que Bossut démontre facilement lorsque ces côtés ont une commune mesure. Mais lorsque deux segments sont incommensurables, il ne donne pas de démonstration. Bossut en déduit, à travers trois corollaires, les aires du parallélogramme, du triangle, ainsi que le fait que deux parallélogrammes ou deux triangles ayant même hauteur sont entre eux comme leur base. Il communique les formules de l'aire du rectangle du triangle et du parallélogramme pour passer ensuite aux démonstrations liées aux lignes proportionnelles. Mais Bossut, comme Legendre après lui, n'utilise pas les deux premiers corollaires dans les démonstrations des théorèmes qui concernent les lignes proportionnelles. Il démontre un premier résultat classique sur des parallèles qui découpent sur les côtés d'un angle des segments égaux (F.P) (Annexe X 1, c). Puis, il en déduit deux corollaires dont l'un fait apparaître l'égalité de trois rapports. Dans un second théorème, il démontre, en partageant un côté AB en une infinité de parties égales et en menant des parallèles par tous les points de la division, une proposition sur une parallèle à un côté d'un triangle coupant les deux autres côtés en segments proportionnels et réciproquement. Les remarques sont identiques à celles que nous avons émises pour Bezout et Clairaut. On peut relier cette preuve aux indivisibles de Cavalieri.

Par l'intermédiaire d'un premier corollaire, Bossut obtient les égalités des trois rapports qui constituent une version du théorème de Thalès de la fin du XXème siècle. Viennent ensuite trois autres corollaires. Le premier concerne une version rattachée à deux droites sécantes et non plus à un triangle et rejoindrait ainsi l'énoncé actuellement enseigné en classe de troisième. Les deux autres concernent le partage d'un segment en parties égales pour l'un et la bissectrice d'un angle d'un triangle pour l'autre.

Dans le troisième théorème, Bossut démontre le résultat sur les faisceaux de droites sécantes coupés par deux parallèles (F.S).

L'introduction de la première partie (Annexe X 1, a) légitime entièrement le théorème sur les lignes proportionnelles. Pour introduire les notions, nous pouvions donc penser que Bossut partirait, comme annoncé, d'une problématique de réduction à l'échelle d'un problème du méso-espace, mais cela n'est le cas. Seuls des problèmes modélisés du méso-espace viennent enrichir le théorème mais à la fin, toujours en application. Or, le problème initial doit recevoir des réponses plus complètes que celles apportées par la modélisation. Le méso-espace apparaît ici encore comme le lien privilégié de l'application du théorème de Thalès. Mais encore faut-il qu'un problème posé dans cet espace ne soit pas immédiatement transporté dans le micro-espace, sans description de cette opération et surtout sans manipulation dans le méso-espace.

L'ensemble de sa démonstration repose sur le principe de superposition et sur une lecture raisonnée de la figure. Ces éléments de géométrie correspondent, pour partie, à une transposition directe des Eléments d'Euclide, c'est à dire à un allégement de ces derniers par un recours beaucoup plus systématique et voyant à la figure, et pour la fin à une adaptation de la méthode des indivisibles de Cavalieri. Ces deux mathématiciens se situent, avec Clairaut, dans la problématique d'Arnauld renforcée par les conceptions sur l'infini de Fontenelle et de Cavalieri.

V. Les éléments de Legendre (1794)

V.1 Tableaux synoptiques et déductogrammes

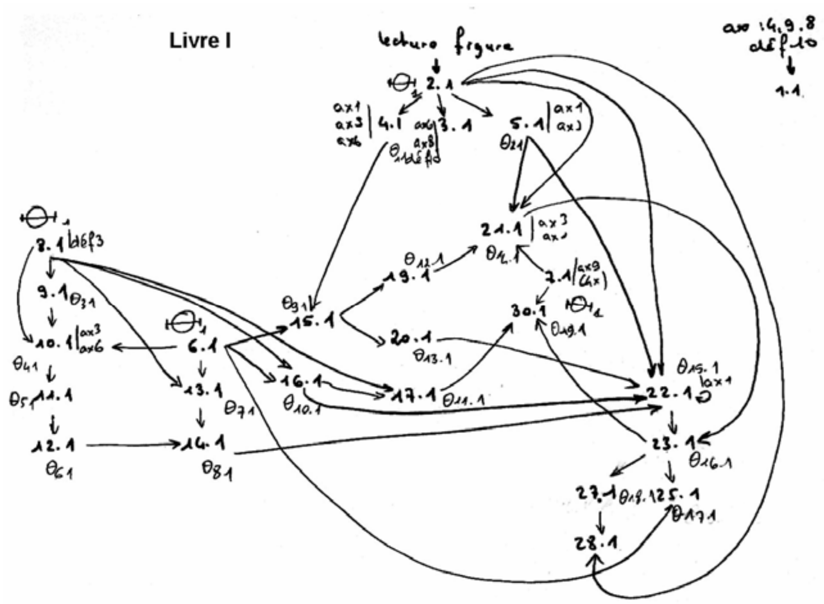
Livre I

Axiomes	Propositions	Total
1	4.1 ; 5.1 ; 15.1 ; 21.1	4
2	27.1	1
3	4.1 ; 5.1 ; 10.1 ; 21.1	4
4	1.1	1
5	17.1	1
6(Θ_1)	3.1 ; 4.1 ; 10.1 ; 13.1 ; 20.1 ; 22.1	6
8	1.1 ; 15.1 ; 3.1	3
9(Θ_1)	1.1 ; 5.1 ; 7.1 (x4) ; 25.1	7

Définitions	Propositions
3	8.1
10	1.1 ; 3.1
17	30.1 (x 2)

Propositions	Utilisées dans	Nombre total d'occurences
1.1	A chaque fois qu'un angle droit apparaît	
2.1(Θ_1)	3.1 ; 4.1 ; 5.1 ; 21.1 ; 22.1 (x 2) ; 28.1	7
4.1(θ_{11})	15.1	1
5.1(θ_{21})	21.1 ; 22.1	2
6.1(Θ_1)	10.1 . 13.1 ; 15.1 ; 16.1 (x 2) ; 25.1	6
7.1(Θ_1)	21.1 ; 30.1	2
8.1(Θ_1)	9.1 ; 10.1 (x 2) ; 14.1 ; 16.1 ; 17.1	6
9.1(θ_{31})	10.1	1
10.1(θ_{41})	11.1	1
11.1(θ_{51})	12.1	1
12.1(θ_{61})	14.1	1
13.1(θ_{71})	14.1	1
14.1(θ_{81})	22.1	1
15.1(θ_{91})	19.1 ; 20.1 (x 3)	4

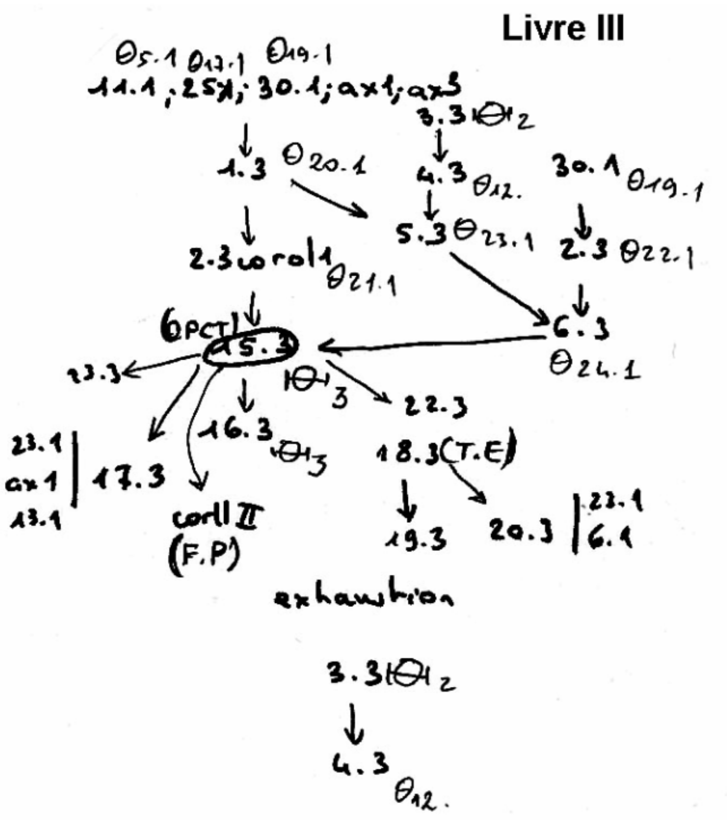
16.1(θ_{101})	17.1 ; 22.1	2
17.1(θ_{111})	30.1	1
19.1(θ_{121})	21.1	1
20.1(θ_{131})	22.1	1
21.1(θ_{141})	23.1 (réciproque)	1
22.1(θ_{151})	23.1	1
23.1 (corollaire 1)(θ_{161})	25.1 (θ_{171}); 30.1(θ_{191})	2
27.1(θ_{181})	28.1	1



Livre III

Axiomes	Propositions	Total
1	1.3	5
3	1.3 x (2)	6

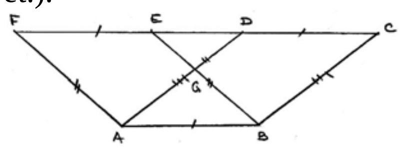
Proposition	Utilisée dans	Total	Total cumulé
25.1(θ_{171})	1.3	1	1
30.1(θ_{191})	1.3	1	1
11.1(θ_{51})	1.3	1	2
1.3(θ_{201})	2.3 ; 5.3	2	2
3.3(Θ_2)	4.3 x 2	2	2
13.1(θ_{71})	17.3	1	2
23.1(θ_{161})	17.3	1	3
15.3(Θ_3)	16.3	1	1



V.2 Analyse

Dans la préface, Legendre indique qu'il utilise une démarche analogue à Euclide. L'auteur précise tout de même que l'algèbre est un outil qui allège certaines démonstrations. Malgré ce retour vers Euclide, Legendre se situe exactement au niveau des critiques formulées par Roberval qui, rappelons le, a voulu tenter de démontrer tout ce qui est supposé être démontrable. Legendre supprime certains axiomes qu'il tente de démontrer, comme l'égalité des angles droits. C'est dans un esprit de partir d'un minimum de propriétés jugées évidentes qu'il propose de démontrer le postulatum ou des résultats implicitement admis par Euclide comme le fait que deux droites qui ont deux points en commun coïncident.

Un changement se produit par rapport à certains mathématiciens du XVII ème siècle comme Arnauld, par exemple. Le raisonnement par l'absurde au sens large est de nouveau admis. La réduction à l'impossible est utilisée six fois 3, 4, 15, 19 (Annexe XI 1, c), la réduction à l'absurde une fois (14LI). Dans la démonstration de la proposition 11, Legendre utilise la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire la double réduction à l'absurde dans une démonstration. En ce qui concerne la démonstration de la proposition 1 (Annexe XI 1, e), nous reconnaissons la méthode des aires d'Euclide. Mais Legendre fait une lecture de la figure et oublie un cas comme son prédécesseur. Ce cas de figure est inadapté à cette méthode, car des différences de longueurs et d'aires ne sont plus alors définies (DE - DC , DE - EF, aire ABED - aire ADF, et.).

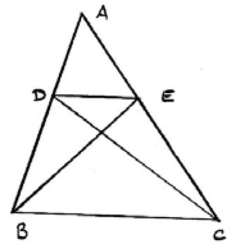


Ensuite, la démonstration est faite pour des parallélogrammes construits sur la même base. Il manque la démonstration du cas où les bases sont uniquement égales et non confondues. Les ingrédients de la démonstration du théorème des droites parallèles à un côté d'un triangle (D.P.C.T) par la méthode des aires sont alors réunis.

Proposition 15

La ligne DE menée parallèlement à la base d'un triangle ABC divise les côtés AB et AC proportionnellement de sorte qu'on a : AD : DB :: AD : EC. Sigle : (D.P.C.T)

On joint B et E, D et C. Les deux triangles BDE et DEC ont la même base DE et ont la même hauteur puisque les sommets B et C se situent sur une parallèle à la base (prop. 25-1). D'après (prop. 2 - 3 coroll. 3), ces triangles sont équivalents. De plus les triangles ADE et DBE sont entre eux comme leurs bases, car ils ont le somme E en commun et même hauteur (prop. 6 - 3 coroll) donne :
ADE : BDE :: AD : DB. De même pour les triangles ADE et DEC : ADE : DEC :: AE : EC.
Or DEC = BDE, donc AD : DB :: AE : EC d'après (arith. Rey 174).



La méthode des aires devient une méthode de calcul confondant calcul numérique et calcul spécieux. Mais cette méthode n'est pas entièrement algébrisée puisque, par exemple, Legendre n'utilise pas l'expression de l'aire du triangle qu'il a obtenu à la proposition 6. Il se fie à la lecture du dessin pour démontrer la réciproque (proposition 16). C'est en effet le cas de figure où Legendre voit que AE < AO et EC > OC. De plus par rapport à Euclide, un raisonnement sur les triangles est remplacé par une réflexion fondée sur des propriétés arithmétiques qui assurent qu'à tout segment correspond une mesure. Viennent ensuite des propriétés liées aux figures semblables et en particulier celle qui fait apparaître la bissectrice d'un angle (17). La proposition suivante (18) est retenue, car elle correspond au théorème des triangles équiangles (T.E). La démonstration est strictement identique à celle des éléments d'Euclide, mis à part que l'existence du point F, intersection de deux droites, n'est pas démontrée, elle est vue sur la figure. L'expression finale est : AB : CD :: AC : DC :: BC : CE.

L'extrait de programme d'admission à l'école polytechnique (Belhoste, 1995) (Annexe XI 1, a) nous indique que l'infini n'était pas accepté à cette époque dans l'enseignement secondaire et supérieur et ce jusqu'en 1837 où officiellement, les infiniment petits sont réintroduits. A lecture de la suite 1 du *nota bene* Livre III (Annexe XI 1, d), nous pouvons voir que contrairement à Euclide, les proportions entre grandeurs sont ici reliées à des proportions de nombres. A une grandeur est en principe associé un nombre. L'approche des nombres, qui est encore un peu plus précisée dans la suite 2 du N.B, est à l'opposé de celle d'Euclide. Legendre mêle ainsi, à l'instar de Descartes, le calcul numérique et le calcul spécieux, c'est-à-dire le calcul sur les grandeurs, grâce au lien qui existe entre le géométrique et le numérique et qui est incarné par la mesure.

L'utilisation du compas par Legendre se rapproche plus du sens étymologique du terme (du latin *compassare* : mesurer avec le pied) qu'Euclide qui refuse de reporter des longueurs. La démonstration du théorème de Thalès relève d'une problématique géométrique et absolument pas pratique ni de modélisation. Les objets mathématiques sont inventés, représentés pour s'appliquer au réel. L'ensemble de la démonstration correspond à une transposition didactique secondaire des Eléments de géométrie de Roberval et d'Euclide.

Nous remarquons, par rapport aux éléments d'Euclide, que dans la première partie de la démonstration au Livre I, seuls apparaissent les éléments d'une théorie et des technologies qui en sont déduites. Les tâches et les techniques sont absentes. Dans les Eléments d'Euclide, nous avions pu voir que les tâches et des techniques liées à une théorie et à des technologies étaient décrites. A partir de cette description et de la suite de la démonstration, nous avions conclut que l'organisation mathématique était globale. De plus, le théorème de Thalès et des résultats qui lui étaient liés correspondaient à leur tour à une nouvelle théorie de laquelle était déduites des technologies, des techniques qui permettaient d'effectuer de nouvelles tâches.

En ce qui concerne la première partie de la démonstration du théorème de Thalès des Eléments de Legendre, cette première approche ne nous permet pas nous prononcer quant à l'organisation. En général, que l'organisation soit ponctuelle, locale, régionale ou globale, la caractérisation commune à chacune est le fait qu'elles répondent à un objectif final bien précis qui est d'établir et de justifier des techniques ou des méthodes pour résoudre des tâches. Cette première partie des Eléments de Legendre ne rentre pas dans ce cadre, le concept d'organisation praxéologique ne s'appliquant pas.

Les axiomes les plus employées, 6 et 9, concernent le principe d'égalité par superposition. Trois propositions sont très souvent utilisées, les propositions 2, 6 et 8. La deuxième concerne les angles adjacents. La sixième est le premier cas d'égalité des triangles et la huitième traite de l'inégalité triangulaire qui est fondée exclusivement sur la définition trois.
Ces résultats ou définitions pourraient se répartir en trois groupes : celui qui concerne l'égalité par superposition (axiome 9) à laquelle s'ajoute les cas d'égalité de triangles 6 et 7, celui qui est à rattacher à l'inégalité triangulaire et au régionnement du plan par la médiatrice et donc aussi à la proposition 8, et afin le groupe sur les angles qui ne comprend que la proposition 2. Nous pourrions penser que nous avons affaire à trois théories distinctes, mais sachant que tous ces résultats sont principalement fondés sur une lecture raisonnée du dessin, nous les rassemblons dans une seule et même théorie. Notons que le postulat des parallèles, qui devient ici un théorème, n'est utilisé qu'une seule fois par Legendre alors qu'il constituait un élément essentiel dans les Eléments d'Euclide. Nous obtenons un premier groupe d'axiomes, de définitions et de propositions qui constitue la première théorie fondant la démonstration générale du théorème. Θ_1 = (ax 6, ax 9, défi 3, prop 6, prop 7, pro 8, pro 2). Globalement, nous pouvons dire que l'inégalité triangulaire, employée 6 fois, allège les démonstrations d'Euclide. Seules des technologies et une théorie Θ_1 sont présentes pour démontrer un résultat représentant une nouvelle théorie Θ_3. La proposition 3 du Livre III peut se définir comme étant une théorie Θ_2 de par l'originalité de sa démonstration, qui peut être reproduite dans d'autre cas, mais cette théorie n'est pas utilisée dans la démonstration du théorème (D.P.C.T). Les tâches et les techniques voient le jour en application des résultats liés directement au (D.P.C.T). Ainsi, nous pouvons dire que nous sommes en présence d'une organisation mathématique qui devient pleinement régionale avec les applications du théorème.
L'inégalité triangulaire est utilisée là où seules des considérations sur des angles apparaissent chez Euclide. Elle permet à Legendre, entre autre, de comparer les perpendiculaires et les obliques, de caractériser le régionnement du plan par une médiatrice, ce qui est une partie absente des éléments grecs. L'utilisation des cas d'égalités de triangle est remplacée dans certains cas par l'inégalité triangulaire et le régionnement du plan, propositions 16 et 17 (Annexe XI 1, c), qui est elle-même parfois remplacée par le mouvement par pliage comme à la démonstration du théorème 25 (Annexe XI 1, c). L'inégalité triangulaire entraîne une réorganisation des propositions sur les inégalités dans le triangle.

Plusieurs problèmes classiques de construction sont proposés : troisième et quatrième proportionnelle, partager un segment en segments de longueur égale. La participation au système mathématique des propositions directement liées au théorème de Thalès chez Legendre ressemble fortement à celle d'Euclide.

Notons que Legendre utilise la même méthode pour montrer la proportionnalité des angles au centre et des arcs, et pour l'expression de l'aire du rectangle mais que cette méthode n'est curieusement pas employée pour démontrer la proposition 15 (D.P.C.T).

L'infini est absent des propositions. Seule la définition de deux droites parallèles fait référence, mais comme pour Euclide, Legendre n'utilise pas cette définition pour démontrer le parallélisme. En ce qui concerne le continu, un axiome est nécessaire à la démonstration de deux propositions. L'axiome de Pasch est indispensable à la preuve des propositions 7, 10 et 17(Annexe XI 1, c). La continuité sur un compact de l'application projection et la mise en bijection de la droite géométrique avec la droite réelle sont nécessaires à la démonstration de la proposition 20, qui correspond au postulatum. Certains axiomes manquaient dans les Eléments de Roberval mais un axiome de Pasch était clairement rédigé. Chez Legendre un tel axiome du continu permettant entre autre de conclure que deux droites distinctes non parallèles ont un point commun et un seul, est absent. Pour démontrer que deux rectangles qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases à la proposition 3, Legendre utilise la méthode d'exhaustion. L'existence du point O est assurée par la propriété arithmétique des proportions numériques qui admet l'existence de la quatrième proportionnelle après avoir admis que, une unité de longueur étant donnée, à tout nombre correspond une longueur (arith. Bezout 179). De même, pour l'existence d'un point I entre E et O, Legendre se fonde sur le dessin alors que cette propriété relève également d'un axiome du continu lié à la construction des nombres réels par les coupures par exemple.

VI. Les modifications apportées par Blanchet (1850)

Nous pouvons voir dans la démarche qui est exposée dans les avertissements (Annexe XII 1, a) que Blanchet suit les instructions déjà citées de 1837 préconisant l'emploi des infiniment petits dans les démonstrations de la géométrie et les instructions de 1842 imposant les éléments de géométrie de Bezout qui utilise cette même méthode. Ce qui différencie le plus les deux ouvrages est le fait que Blanchet tente de retirer la réduction par l'absurde de son livre (14) (Annexe XII 1, b).

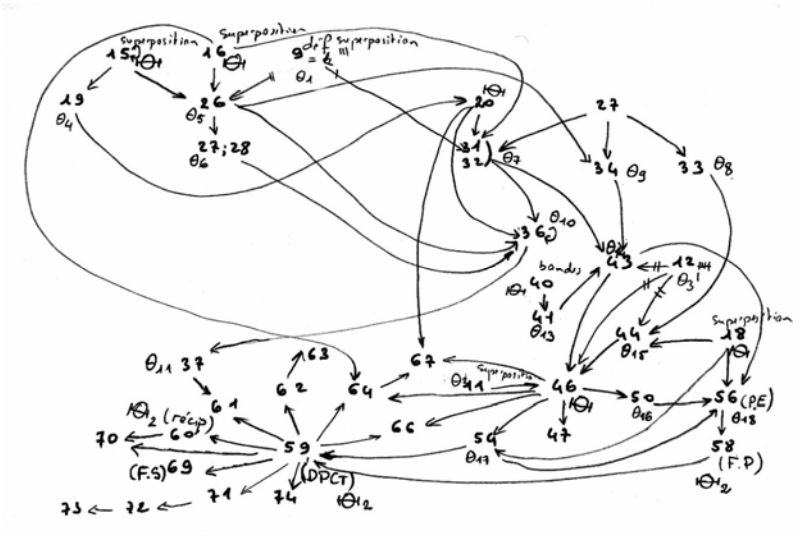
Contrairement à Legendre, Blanchet tente de démontrer l'existence d'une perpendiculaire en faisant varier l'ouverture d'un angle de zéro à 180°. Il s'agit de la première démonstration qui illustre très bien l'utilisation d'implicites vus sur la figure, en l'occurrence le fait que dans ce cas une demi-droite passe par une position intermédiaire, suppléant à une absence d'explicitation de nombreux axiomes liés au continu. Il s'agit d'un préconstruit de seconde catégorie, lié au théorème des valeurs intermédiaires, c'est à dire que l'auteur admet implicitement un résultat qui n'est vrai que s'il est complété par un autre.
Il se propose de résoudre un problème fondamental (18) qui sert de support à de nombreuses démonstrations. Il s'agit de trouver la commune mesure de deux lignes. Pour cela, Blanchet use de l'infini. Les nombres réels sont nécessaires. L'auteur a seulement démontré que deux segments incommensurables n'ont pas de rapport rationnel. De plus, le fait de pouvoir rendre les restes aussi petits qu'on le souhaite, revient à considérer que cette suite converge vers 0. Or la notion de limite, à l'époque de Blanchet, a déjà clairement été définie et construite. Blanchet aurait tout aussi bien pu utiliser une méthode d'encadrement. Or il précise uniquement le fait qu'il est possible de rendre les restes aussi petit que l'on veut. Ainsi, il s'agit d'une transposition didactique directe du savoir savant de l'époque qui est le concept de limite. Cette méthode est appliquée plusieurs fois par Blanchet. Par exemple au problème 19 qui consiste à chercher la commune mesure de deux angles donnés. Notons qu'ici encore, dans le cas des nombres irrationnels, la preuve n'est pas faite. Les démonstrations des propositions 3 et 16 du Livre III utilisent également cette méthode.

Blanchet démontre, au début du Livre III, que deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, mais sa démonstration ne peut pas être considérée comme finie à l'instar du problème 18. Il démontre à la proposition 16 que toute parallèle à un côté d'un triangle divise les deux autres côtés en segments proportionnels en demandant, dans le cas incommensurable, de se reporter à la résolution du problème 18. Les démonstrations sont identiques que ce soit pour les rectangles, les angles ou le théorème (D.P.C.T).

VII. Les éléments de Lacroix (1798)

VII.1 Tableau synoptique et schéma déductif

Proposition	Utilisée dans	Total
superpo (Θ)	9 ; 11 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 34	7
9 (θ_1)	26 (x 2) ; 31	3
11 (θ_2)	46 (x 4)	4
12 (θ_3)	43 (x2) ; 44 (x 2) ; 46 (x 2)	6
15 (Θ)	26 ; 19 (x3)	4
16 (Θ)	26 (x 2) ; 31 ; 64 ; 20	5
18 (Θ)	44 ; 54 ; 56 ; 20	4
19 (θ_4)	20	1
20 (Θ)	31 ; 36 ; 54 ; 67	4
26 (θ_5)	27 ; 28 ; 34 ; 31	4
27 (θ_6)	31 (x2) ; 33 ; 34	4
31 (θ_7)	36 ; 43 (x 2)	3
32 (θ_7)		
33 (θ_8)	44	1
34 (θ_9)	43	1
36 (θ_{10})	36 (2°) ; 37	2
37 (θ_{11})	61	1
40 (Θ)	41	1
41 (θ_{13})	43	1
43 (θ_{14})	46 ; 56	2
44 (θ_{15})	46	1
46 (Θ)	47 ; 50 (x 2) ; 54 (x 3) ; 64 ; 66 ; 67	9
50 (θ_{16})	56	1
54 (θ_{17})	56	1
56 (θ_{18})	58 (x 2)	2
59 (Θ_2)	61	1
64	67	1



VII.2 Analyse

Les éléments de Lacroix reprennent parfois des preuves euclidiennes ou celles de Legendre. Ainsi, la démonstration du troisième cas d'égalité des triangles (20) (Annexe XIII 2, a) est identique à celle de Legendre. Mais quelques modifications sont apportées à d'autres preuves. Par exemple, la démonstration du premier cas d'égalité de deux triangles (angle égal compris entre deux côtés égaux) s'effectue classiquement, comme dans Euclide et Legendre, par superposition des deux côtés égaux et des deux angles égaux. Mais il n'y a plus de référence à deux droites renfermant un espace comme dans Euclide (prop. 4 - Livre I), ni à l'unicité d'une droite passant par un point de Legendre (prop. 6 - Livre I). La proposition (58) est le théorème des droites parallèles coupées par deux sécantes (F.D). Ce théorème ressemble à la version de La Caille.

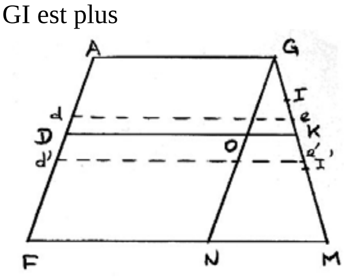
8 - <u>Théorème</u> : Trois parallèles AG, DK, FM coupent toujours deux droites quelconques AF et GM en parties proportionnelles ou de manière que l'on a : AD : DF :: GK : KM. <u>Sigle (F.P)</u>

Il peut arriver deux cas :

1°) Que AD soit commensurable avec AF.

Je suppose par exemple qu'on a : AF : AD :: 47 : 25. Menant par toutes les divisions de AD et AF des parallèles à AG, la droite GM se trouvera divisée en 47 (56) parties égales dont 25 composeront GK et 22 composeront KM. On aura donc AD : DF :: 25 : 22 et GK : KM :: 25 : 22. D'où il suit AD : DF :: GK: KM (arith. 174) et de plus AF : AD :: 47 : 25 ; GM : GK :: 47 : 25. Donc on a :AF : AD :: GM : GK (arith. 174).

2°) Si AF et AD sont incommensurables, on prouvera que le rapport ne peut être ni plus petit ni plus grand que celui de GK à GM. Soit d'abord I un point tel que AF : AD :: GM : GI, avec GI plus petit que GK. On peut toujours diviser AF en parties assez petites, pour qu'une des parallèles (de) passe entre les points I et K. On aura d'après ce qui précède : AF : Ad :: GM : Ge. Les deux proportions ont les mêmes antécédents, donc d'après (arith 175), AD : Ad :: GI : Ge. Ce qui est absurde puisqu'AD est plus grand que Ad et GI est plus plus petit que Ge. Soit maintenant AF : AD :: GM : GI', GI' étant plus grand que GK. En divisant AF de manière qu'une des parallèles (d' e') tombe entre les points K et I', on aura AF : Ad' :: GM : Ge' et ainsi (arith. 175) AD : Ad' :: GI : Ge' (56). Résultat encore absurde, puisqu'AD est plus petit que Ad', GI' est plus grand que Ge'. Il faut donc nécessairement que le quatrième terme de la proportion formée des droites AF, AD et GM soit GK. De la proportion AF : AD :: GM : GK, on tire AF - AD : AD :: GM - GK : GK (arith. 184) ou DF : AD :: KM : GK, ou enfin (arith. 181) AD : DF :: GK : KM.



La différence essentielle avec la démonstration de Legendre réside dans le fait que ce dernier applique la méthode des aires d'Euclide sans trop de modification bien qu'un résultat obtenu pour les rectangles par la méthode d'exhaustion peut la simplifier, alors que Lacroix utilise la méthode d'exhaustion directement. Cette méthode offre l'avantage d'éviter toute considération sur l'infini, mais pas sur la composition du continu. L'idée du "vrai ordre de la nature" héritée d'Arnauld et Nicole et même de Condillac (1746), conduit Lacroix à s'appuyer sur les lignes et non plus sur les aires. Notons enfin que l'approximation de rapports de grandeurs incommensurables évoquée au (5) n'est pas utilisée ici. L'ouvrage de Lacroix marque ainsi un nouvel abandon dans les traités d'enseignement de la méthode des aires, après Arnauld et d'autres. Nous pouvons nous demander si les définitions de la ligne comme étant une longueur sans largeur, de la surface comme ayant seulement longueur et largeur et surtout du point dont la partie est nulle, n'ont pas contribuées au retardement de démonstrations du théorème de Thalès du type de celle proposée par Lacroix.

Un autre point essentiel, mais qui n'apparaît pas ici, est le fait que Lacroix utilise les mesures et se ramène ainsi à un calcul purement numérique. En cela, il se distingue encore de Legendre qui mélange calcul numérique et calcul spécieux.

Dans l'extrait de la circulaire liée aux programmes de l'école polytechnique (Annexe XIII 1, a), nous pouvons remarquer que Lacroix évite l'utilisation de ce concept abstrait qu'est l'infini, en particulier dans les lignes proportionnelles et va à l'encontre des méthodes de Bezout, Arnauld, Blanchet et d'autres encore. Ainsi, à l'instar de ce qui se passe au cours de l'histoire au sujet de l'utilisation du raisonnement par l'absurde, l'utilisation de l'infini dans la démonstration du théorème de Thalès a souffert d'allers et retours, de retours en arrières réguliers et souvent inexplicables.

Les éléments de Lacroix s'appuient explicitement, comme pour la plupart des auteurs, sur une théorie arithmétique à laquelle est rattachée, contrairement à Euclide, la théorie des proportions. Lacroix travaille avec les nombres entiers et les nombres rationnels alors que Legendre, son contemporain, mélange calcul numérique et calcul spécieux. Les nombres irrationnels n'apparaissent pas dans ces éléments de géométrie, bien que Lacroix, dans les premières pages de son ouvrage, indique une méthode pour trouver la commune mesure de deux segments commensurables ou pas, cette méthode étant comparable à la recherche du **pgcd** de deux nombres, distinguant deux cas pour les segments suivant que l'opération s'arrête ou non. Cette méthode est identique à celle qu'adopte également Blanchet qui faisait tendre les restes vers zéro alors que Lacroix se contente de dire que le résultat est approché. Cela n'est pas un hasard puisque cet auteur refuse dès le départ l'utilisation de l'infini potentiel.

Une des différences avec certains prédécesseurs du XVII ème siècle est que la rigueur est un objectif supplémentaire. Cette rigueur liée à la logique incite justement Lacroix à employer certaines méthodes de démonstration, réduction à l'impossible (31, 33, 34), réduction à l'absurde (37), principe d'exhaustion, qui ont été vivement critiquées par le passé. En particulier, la méthode d'exhaustion a été considérée par les mathématiciens du siècle précédent comme trop longue, artificielle et comme ne relevant pas d'une méthode de découverte. Lacroix a tenté de concilier ordre de la nature et rigueur. Mais l'élimination de la lecture d'implicites vus sur les figures et ceci pour de nombreux théorèmes (11, 15, 16, 18, 27, 36, 40, 50, 60, 67) est impossible.

La démonstration est fondée sur une théorie qui est composée du principe d'égalité par superposition appliqué aux segments et aux angles, utilisé 8 fois, l'inégalité triangulaire, de laquelle se déduit le régionnement du plan par la médiatrice d'un segment et qui est beaucoup plus utilisé ici que dans les Eléments de Legendre, de différents cas d'égalités des triangles (16, 18, 20) remplacés parfois par des réflexions liées à l'inégalité triangulaire ou au régionnement du plan par la médiatrice à un segment, et de deux résultats qui concernent les parallèles (40, 46). Ici encore, bien que nous pourrions penser que les propositions qui sont liées aux triangles sont complètement distinctes de celles qui concernent les droites parallèles et qu'ainsi nous aurions pu rassembler ces théorèmes dans deux théories distinctes, il n'en est rien. En effet, même si l'immixtion des cas d'égalité des triangles dans les preuves des propositions sur les droites parallèles

est moins flagrante que dans les Eléments d'Euclide, il est tout de même incontestable que ces liens existent. Les numéros 43 et 44 utilisent directement des cas d'égalité des triangles alors que l'alexandrin utilise en partie les angles pour démontrer sa proposition (29). C'est pour cette raison que nous considérons la théorie Θ composée de :
Θ = (superposition, 15, 16, 18, 20, 46). Même si le premier cas d'égalité des triangles est utilisé, incontestablement, il l'est moins et de façon beaucoup plus diluée que dans les Eléments d'Euclide (13 occurrences). Lacroix use de la méthode des limites, proche de celle d'Arnauld ou de Blanchet, pour trouver la commune mesure à deux segments. Il aurait pu en faire autant pour démontrer le théorème (D.P.C.T). Cela nous indique une certaine hésitation entre la méthode rigoureuse d'exhaustion - deux points concernant le continu devant être admis - d'aspect peu naturel et la méthode des limites peu rigoureuse sauf si des encadrements sont utilisés, mais empruntant des chemins plus naturels.

Contrairement à d'autres auteurs, Lacroix propose parfois des tâches à résoudre accompagnées des techniques adéquates, comme à la proposition (31). Mais il est indéniable que tous les autres résultats, mis à part ceux qui composent la théorie et celui que nous venons de citer, composent une technologie. Fondée principalement sur une théorie de laquelle découle une technologie, et même si les tâches et les techniques ne sont pas nombreuses, l'organisation de la démonstration des théorèmes (F.P) et (D.P.C.T) est régionale.
Outre les applications immédiates des propositions rattachées au théorème de Thalès à la mesure de distances inaccessibles, à la bissectrice d'un angle (61), au problème qui consiste à trouver la quatrième proportionnelle (62), aux faisceaux de droites sécantes (69), à la division d'une droite de la manière qu'une autre est divisée (70), au triangle rectangle dans lequel est tracé une hauteur (74), on retrouve, comme chez Bezout, la construction d'échelles (71), (72) et enfin (73). A partir de cette théorie qui est constituée, pour l'instant, des propositions (58), (59) et (60), Lacroix propose des tâches à résoudre ainsi que les technologies qui permettent d'y parvenir. L'organisation est aussi régionale. Les numéros 63, 64, 66 et 67 traitent des triangles semblables et complète la deuxième théorie.

N'ayant pas à notre disposition tous les livres de Lacroix, nous nous trouvons dans l'impossibilité de tenter de percevoir l'influence réelle qu'a pu avoir le théorème (D.P.C.T) sur ses écrits. Ce que nous pouvons simplement dire c'est que les résultats sur les triangles semblables ont eu une grande utilité dans ces Eléments de géométrie plus que les théorèmes (58, 59, 60). En effet, l'auteur emploie ces résultats pour démontrer des propositions liées à la puissance d'un point par rapport à un cercle, pour démontrer tous les résultats sur les polygones semblables, comme par exemple le théorème indiquant que les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables. Le théorème 58 proprement dit n'intervient qu'au numéro (175) pour démontrer, après avoir facilement obtenu l'aire du trapèze, que cette aire :

> "Se mesure par le produit de sa hauteur multiplié par une ligne menée à égale distance des deux bases parallèles".

Les théorèmes (59) et (66) interviennent à la proposition (295) pour démontrer que :

> "Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à un arc quelconque d'un demi-cercle deux portions de polygones réguliers du même nombre de côtés, et qu'on fasse tourner le demi-cercle autour de son diamètre, avec les portions de polygones, il sera toujours possible de rendre la différence entre l'aire du corps décrit par la portion inscrite, et l'aire du corps décrit par la portion circonscrite, aussi petite qu'on voudra".

Notons que la méthode est utilisée plus loin pour démontrer le théorème sur les arcs (109), pour le calcul de l'aire du rectangle (166) et (167) et pour démontrer que les parallélépipèdes rectangle de même base sont entre eux comme leurs hauteurs (255). Plus étrangement, cette méthode à également ses faveurs dans la démonstration du théorème (154) qui indique que les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres. Il précise que quel que soient différents les deux cercles considérés, il est toujours possible de concevoir un polygone régulier plus grand que l'un et plus petit que l'autre. Ce détail nous incite à penser que Lacroix imaginait que ces cinq théorèmes relevaient de mêmes conceptions. Cette classe de problème est susceptible de donner du sens au théorème (D.P.C.T) et aux autres qui sont reliés au théorème de Thalès.

Une traditionnelle pierre d'achoppement est le continu à travers l'axiome de Pasch qui manque parfois pour justifier l'existence d'un point d'intersection de deux droites ou le fait qu'après la graduation d'une droite un point de cette graduation se retrouve forcément entre deux points donnés au départ, (propositions 15, 19, 28, 36 LI). Dès le début de la démonstration du théorème 40 qui concerne une tentative de démonstration du postulat des parallèles, plusieurs implicites sont vus sur la figure. Le fait de ne pas pouvoir remplir l'espace déterminé par les deux côtés de l'angle droit par des bandes similaires à la bande EDFG en constitue un premier. Le second consiste à pouvoir comparer l'espace déterminé par un angle et celui défini par une bande. Cela relève de la comparaison de deux espaces infinis. Ce procédé reste flou et est fondé sur l'axiome d'Archimède appliqué, après lecture d'une figure, à l'angle. Le fait qu'un angle ne puisse pas rester à l'intérieur d'une bande, simplement parce qu'il est supposé être plus grand, n'est pas un résultat que l'on peut considérer comme rigoureusement établi par Lacroix. De même, au théorème (58) (Annexe XIII 2, a), le fait de pouvoir diviser AF de façon à obtenir un point **e** entre I et K relève d'un axiome du continu. Comme Legendre, pour l'existence des points I et I', Lacroix admet l'existence de la quatrième proportionnelle. Il évite l'infini mais pas le continu.

Synthèse

La démonstration du théorème (D.P.C.T), problématique et perspectives mathématiques :

Clairaut veut avant tout intéresser et éclairer le lecteur ce qui l'entraîne à dénoncer les postulats et axiomes euclidiens. Son ouvrage s'organise autour de la problématique de la mesure des terrains. Le travail dans le méso-espace fait appel à des connaissances spatiales et géométriques ce qui nous fait penser que la problématique initiale de Clairaut n'est pas pratique mais de modélisation. La mesure de distances inaccessibles le conduit à introduire les échelles. Les concepts ne sont définis que lorsqu'ils sont nécessaires à la résolution d'un problème lié à la problématique initiale. Mais en nous référent par exemple à l'égalité des angles obtenu par Clairaut grâce à un instrument dont il modélise ensuite l'utilisation, la problématique est en partie pratique, car la solution est validée dans l'espace sensible. Cette double problématique engendre le fait que le théorème (T.E) est démontré par des lectures de données sur les dessins. L'appréhension des figures est presque exclusivement perceptive et non discursive. Le projet de Clairaut était de construire les savoirs de la géométrie élémentaire à partir de problèmes concrets. Mais ceux-ci relèvent plus d'un habillage ou d'une mise en scène du savoir que d'une réelle prise en compte d'une problématique liée au méso-espace.

Dans la démonstration du théorème (P.E), Bezout utilise les proportions alors que son commentateur, Reynaud, emploie les fractions. Une seule théorie intervient dans l'organisation mathématique, celle composée des propositions 36 et 37. Cette organisation praxéologique est encore régionale. Bezout transpose directement les Eléments d'Euclide sans adopter de points de vue totalement différents par rapports aux démonstrations et aux objets mathématiques. Il fait apparaître la figure papillon.

Bossut emploie la méthode d'équidécomposition pour tous les résultats qui concernent les aires mais remplace cette méthode par celle des infinis pour démontrer les théorèmes sur les lignes proportionnelles. L'ensemble de la démonstration des théorèmes (F.S), (D.P.C.T) et (F.P) repose sur le principe d'égalité par superposition, sur le mouvement dans l'espace et sur la lecture raisonnée de figures. Bossut a transposé les Eléments d'Euclide en appliquant la méthode des infinis pour la fin.

Legendre annonce clairement qu'il reprend les Eléments d'Euclide tout en portant quelques critiques. Comme Roberval, il souhaite démontrer tout ce qui est démontrable et transforme ainsi certains axiomes euclidiens en propositions. Par exemple, il propose de démontrer le *postulatum*. De plus, le raisonnement par l'absurde est à nouveau admis. Legendre démontre le théorème (D.P.C.T) de la même façon qu'Euclide mais en y adjoignant l'algèbre. Mais il n'a pas utilisé la formule des aires qu'il a pourtant établie avant ce théorème. Sa méthode diffère totalement de celle sur les infinis employée par Bossut et Bezout. La problématique de Legendre est géométrique. La démonstration du théorème (D.P.C.T) de Legendre se prête mal à une analyse praxéologique, car peu de tâches sont accomplies et justifiés par des technologies. Nous pouvons dire que cette partie du Livre I s'appuie principalement sur le principe de superposabilité à travers les axiomes 6 et 9 et les propositions 6, 7, 8 et 2 qui concernent un cas d'égalité des triangles et l'inégalité triangulaire et également sur la définition 3 qui précise que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, ce qui est une nouveauté par rapport aux éléments d'Euclide. Toutes ces propositions étant démontrées grâce à des lectures sur les dessins, nous considérons qu'elles font partie d'une même théorie. Les cas d'égalités des triangles sont parfois remplacés par Legendre par l'inégalité triangulaire qui est elle-même remplacée parfois par la notion de pliage dans l'espace. Nous pouvons dire que l'inégalité triangulaire allège la démonstration euclidienne. Mais une fois le théorème (D.P.C.T) démontré, plusieurs tâches sont accomplies et sont justifiées par une théorie et une technologie. A partir de ce moment-là, l'organisation est réellement régionale.

Blanchet, commentateur des Eléments de Legendre, réintroduit les infiniments petits pour démontrer le théorème. Il reprend les l'ouvrage de Legendre en éliminant les raisonnements par l'absurde.

Dans Lacroix, nous retrouvons des résultats et des méthodes de démonstrations que nous avons également rencontrés dans les Eléments d'Euclide et de Legendre. Mais la version du théorème (F.P) est à rapprocher de celle de La Caille. Lacroix s'éloigne de la méthode des aires de Legendre et d'Euclide pour appliquer la méthode d'exhaustion. Il s'appuie sur les lignes et non sur les aires et les triangles. C'est une nouvelle rupture, après Arnauld, avec la méthode des aires. Les considérations sur l'infini sont alors évitées, puisque l'infini potentiel est explicitement exclu de l'ouvrage de Lacroix et des programmes qu'il a en partie rédigés, mais absolument pas celles liées au continu. L'idée de Lacroix est d'associer l'ordre de la nature et la rigueur des démonstrations. Cette démonstration est une transposition de celle d'Euclide dans le sens où ces Eléments sont revisités par le biais d'une nouvelle méthode de preuve tout en conservant certains points essentiels comme le principe d'égalité par superposition, les cas d'égalité des triangles. La démonstration des théorèmes (F.P) et (D.P.C.T) est fondée sur une théorie comprenant le principe d'égalité par superposition, l'inégalité triangulaire et le régionnement du plan par la médiatrice d'un segment, les cas d'égalité des triangles (16, 18, 20) et deux propositions sur les parallèles (40 et 46). Les résultats sur les parallèles sont encore parfois démontrés par l'intermédiaire des triangles. L'organisation praxéologique de la démonstration du théorème (F.P) est régionale même si peu de techniques servant à résoudre des tâches sont justifiées et proposées. Par contre l'utilisation en tant qu'outil des théorèmes (F.P), (D.P.C.T) et ceux liés aux triangles semblables, considérés comme une théorie à part entière, permet de mettre en évidence une organisation vraiment régionale.

Le rapport aux nombres, aux grandeurs et au continu au XVIII ème siècle :

L'introduction du symbolisme a joué un rôle important dans la conception des nombres, et l'arithmétique pratiquée en ce siècle a allégé la démonstration de Thalès. Nous pouvons dire qu'au milieu du XVIII ème siècle, les nombres sont clairement séparés de la géométrie. Par exemple, Legendre mélange calcul numérique et calculs spécieux (irrationnels). Lacroix, dans sa démonstration du théorème (F.P) n'aborde que le calcul numérique fondé sur les entiers et les rationnels. Pourtant, cet auteur donne une méthode naturelle mais peu rigoureuse, la méthode des limites pour trouver la commune mesure de deux segments dans le cas général.

Un axiome du continu est nécessaire aux auteurs, comme Blanchet, qui considèrent qu'une droite balayant l'espace de 0° à 180° passe forcément pas une étape médiane. Blanchet transpose le savoir savant de l'époque au sujet des limites d'une suite. Il dit qu'il est possible de rendre des restes aussi petits que l'on veut alors que la convergence vers zéro fût établie à son époque. Lacroix ne fait plus référence à l'infini dans sa démonstration du théorème (F.P).

Mais le continu est traditionnellement et implicitement présent à chaque fois que deux objets mathématiques sont censés se couper en un seul point. La méthode d'exhaustion utilisé par Lacroix pour démontrer le théorème (F.P) emploie un axiome du continu car il est indirectement admis par l'auteur qu'aussi fine soit une graduation d'une droite, il existe toujours un point de la graduation entre deux points donnés au départ sur la droite. L'axiome d'Archimède est présent lorsque l'auteur tente de remplir un angle droite par des bandes identiques.

Difficultés, obstacles et préconstruits :

Il nous semble possible de nous interroger sur le lien qui peut exister entre des démonstrations fondées sur des encadrement de points, comme dans la preuve par exhaustion de Lacroix, en clair entre l'abandon de la méthode des aires et les définitions des points, lignes, surfaces et volumes observés non plus en tant qu'objet à une, deux trois ou aucune dimension, mais en tant qu'intersection.

Les champs conceptuels et problème donnant du sens aux deux propositions :

Bossut semble vouloir partir de la problématique de réduction à l'échelle pour introduire des propriétés. Mais dans les faits, ce n'est pas le cas. En effet, seules des applications pratiques viennent illustrer les théorèmes (D.P.C.T), (F.S) et (F.P).

Legendre emploie la même méthode pour démontrer le théorème sur les angles et les arcs de cercles identiques et la formule de l'aire du rectangle alors qu'il utilise une méthode différente pour le théorème (D.P.C.T). A l'inverse de Legendre, Blanchet use de la même méthode sur les infiniments petits pour démontrer ces trois résultats. Le champ conceptuel est le même mais il n'est pas abordé de la même façon.

Chez Lacroix, Legendre ou Blanchet, aucune situation problème ne vient donner du sens au théorème. Mais dans Lacroix, le théorème (F.P) est démontré de la même façon que quatre les autres propositions que sont les théorèmes sur les arcs et les angles, sur l'aire du rectangle, sur les circonférences des cercles qui sont entre elles comme leurs rayons et sur le fait que des parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

CHAPITRE 5
LE THEOREME DE THALES
AU XIX ème SIECLE

I. Les deux grandes approches des nombres réels

Cassirer (1910) nous indique que deux pistes sont possibles pour aborder les nombres irrationnels jusqu'au début du XIXème siècle : les rapports de longueurs de segments et les équations algébriques. Bolzano (1817) distingue, à l'instar d'Euclide, les nombres des grandeurs et pour lui seuls les nombres entiers sont des nombres, tout le reste appartenant au monde des grandeurs. Ces grandeurs sont caractérisées non pas par le fait de pouvoir être additionnées, mais par des propriétés d'ordre. Dedekind, bien que des différences majeures subsistes entre les deux conceptions, utilise la définition (6LV) d'Euclide pour construire les nombres réels (1872). Dedekind (1888) pose des principes sur la continuité de la droite.

> "Si tous les points d'une ligne droite sont séparés en deux classes telles que chaque point de la première est à gauche de chaque point de la seconde, alors il existe un et un seul point qui produit cette séparation de tous les point en deux classes".

Il part de l'ensemble des nombres rationnels et il en fait une partition en deux classes d'équivalences A_1 et A_2, $A_1 = \{a_1 \in Q, a_1 \prec a\}$, $A_2 = \{a_2 \in Q, a_2 \succ a\}$ de sorte que tout nombre appartenant à A_1 soit plus petit que tout nombre de A_2 ; si aucun rationnel ne fait la coupure, il crée un nombre nouveau, nommé irrationnel x parfaitement défini par cette coupure. Gardier (1986) montre que l'ouvrage de Dedekind ne fait principalement appel qu'aux nombres entiers naturels pour construire les rationnels.

La seconde façon d'introduire les nombres réels est de partir de la définition des suites de Cauchy (1823) (Heine, 1872, Cantor, 1872) qui présuppose l'existence des nombres réels : $(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N), (\forall n, p \in N), (n > N, p > N) \Rightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon$. Au XIX ème siècle, cette construction concerne plutôt l'enseignement supérieur et plus particulièrement les ouvrages destinés aux classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques. Entre Cantor et Dedekind, la définition des nombres rationnels correspond à deux conceptions du continu géométrique opposées. Le point pour Dedekind est une séparation de la droite alors que pour Cantor, il s'agit d'une limite à un parcours.

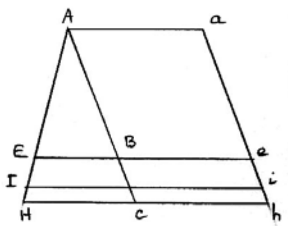
II. Le cours de mathématiques générales de Francoeur (1819)

Francœur fonde sa démonstration du théorème qui nous occupe sur un résultat d'algèbre (Annexe XIV 1, a). Mais les incommensurables ne sont toujours pas considérés comme des nombres. On ne sait pas encore les approcher aussi près que l'on veut par des rationnels. La méthode consiste à épuiser une surface ou un volume par une somme infinie de surfaces polygonales ou de volumes polyédraux. Nous nommons la méthode employée par Francoeur la méthode des limites.

L'auteur parle au numéro (156), qui est consacré à la mesure d'un segment, de rapport et non de proportions. La démonstration de Francoeur suit celle de Lacroix mis à part les pliages qui évitent souvent l'utilisation de l'égalité des triangles et simplifie d'autant plus les démonstrations. La superposition des angles et de segments est également très utilisée. Nous pouvons dire que ces Eléments de géométrie sont une transposition directe des Eléments de Lacroix.

A l'instar de Lacroix, Francoeur démontre un théorème sur des droites parallèles tracées à partir de points équidistants (210) (P.E) pour ensuite démontrer un théorème (211) (F.P). (Annexe XIV 2, d)

211 - Deux droites AH et ah sont coupées en parties proportionnelles par trois parallèles quelconques Aa, Ea, Hh et AE/EH = ae/eh**, car** **<u>Sigle : (F.P)</u> :**



1 - Si les parties AH et EH sont commensurables, en portant la commune mesure sur AH, elle sera contenue un nombre de fois exact dans AE et EH. On retombera donc dans le cas ci-dessus.
2 - Si AE et HE sont incommensurables, divisons AE en un nombre arbitraire de parties égales et portons l'une d'elles de E vers H. Soit I le point de division le plus près de H. AE et EH étant commensurables, on a EI/EA = ei/ea et comme EI = EH - EI et ei = eh - hi, il vient EH/EA - HI/EA = eh/ea - hi/ea.
. Or les distances HI et hi peuvent être rendues aussi petites qu'on voudra, en prenant le nombre de divisions de AE de plus en plus grand, de sorte que les points H et h sont les limites de I et de i. Puisque les deuxièmes termes décroissent indéfiniment, le principe fondamental (n° 113) donne donc encore : EH/EA = eh/ea.

Francœur utilise cette méthode pour démontrer le (168) sur le rapport des angles et des arcs, mais il l'utilise également pour prouver que "les rectangles de même base sont comme leurs hauteurs". Nous pouvons conclure, comme nous l'avons fait avec Lacroix et d'autres encore, que ces situations relèvent d'un même champ conceptuel lié au nombre réel et au continu.

De plus, cette méthode des limites, même si elle se trouve beaucoup plus formalisée que chez Clairaut et Bezout, par exemple, se fonde sur l'intuition de convergence vers 0. Cette intuition prend elle-même appuie sur le caractère continu d'un segment de droite. Un affinement du procédé apparaît dans la deuxième moitié du XIXème siècle.

III. Ouvrage du Baron Dupin (1825)

Dupin tente de trouver la légitimité de l'introduction de notions ou de théorèmes dans les tâches qui sont proposées, par exemple, dans l'industrie (Annexe XV 2, a). Cela s'explique en partie par le fait que cet auteur, officier supérieur du génie maritime et de l'institut. Notons qu'il a eu une certaine influence sur l'enseignement que nous pouvons qualifier de technique. Pour constater cela, il suffit de ce reporter au programme de 1849 (Annexe XV 1) .

A la lecture du début de la cinquième leçon, nous pouvons voir que Dupin reste fidèle aux **bandes parallèles** dont les propriétés sont démontrées à l'aide de l'égalité des triangles à l'inverse de ce que nous trouvons chez Arnauld ou Lamy.

Remarquons tout de même qu'aucune démonstration n'est donnée de ce que Dupin appelle *la règle de trois en géométrie* et qui correspond au théorème des faisceaux de sécantes appliqué à deux droites parallèles elles-mêmes coupées par trois sécantes. L'auteur se place uniquement dans une perspective d'applications qui justifient, *a posteriori*, l'introduction du théorème. Les conceptions sont tout à fait pratiques dans le sens où la réponse à une question est cherchée par tâtonnement, par un ajustement au niveau de l'action sous le contrôle de la perception sans avoir recours au raisonnement construit dans la symbolique d'un modèle. Mais aucune réelle situation problème ne vient légitimer, *a priori*, l'étude de la propriété. Le type de géométrie n'est pas problématique.

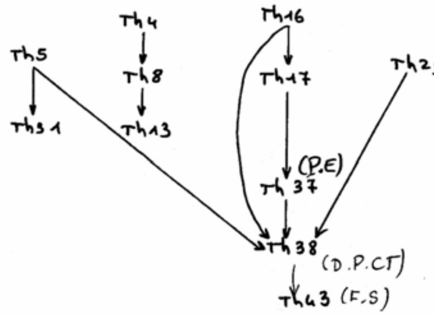
IV. Eléments de géométrie de Desdouit (1834)

Au théorème 15 (Annexe XVI 1, a), la technique de la charnière est celle de Clairaut. Ici aussi, le dessin est plus qu'un support pour la démonstration, il est l'essence de celle-ci. Les démonstrations des théorèmes 4 et 5 sont obtenues par superposition à la fois des segments et des angles. En ce qui concerne la démonstration 28 qui se conclut par le fait que les arcs sont entre eux comme les angles, nous pouvons nous référer au n° 58 de Lacroix. A la différence de ce dernier, Desdouits admet explicitement que "dans des cercles égaux, des angles au centre égaux interceptent des arcs égaux et réciproquement". Démonstration 37 identique à celle du n° 56 de Lacroix, mis à part que ce théorème 56 concerne deux droites quelconques coupées par un nombre quelconque de parallèles.

Théorème 38 : Toute parallèle à la base d'un triangle divise les côtés en parties proportionnelles de sorte qu'on aura CG : GA :: CH : BH. Sigle (D.P.C.T)

L'auteur suppose les longueurs commensurables et utilise le théorème 37. Puis, il en vient aux segments incommensurables et utilise la méthode du théorème 28.

Contrairement à l'accoutumée, les deux cas de figures, triangulaire et papillon, sont pris en compte pour démontrer la réciproque.

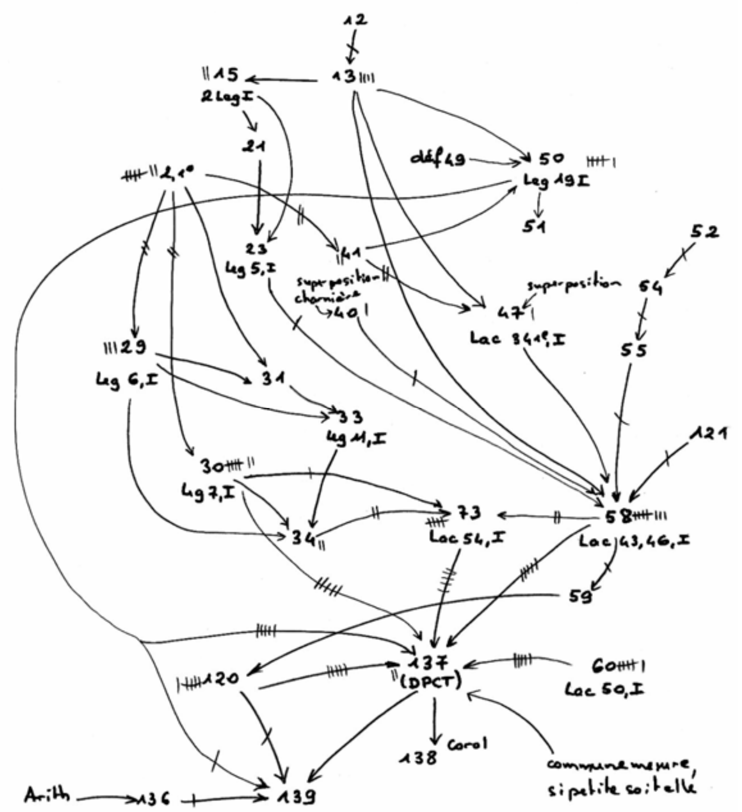


Pour la suite, l'auteur a eu recours nécessairement à la méthode de Lacroix pour démontrer le théorème fondamental. L'originalité vient du fait que Desdouits démontre directement, pour la première fois, le théorème dans le triangle. L'ordre qui apparaît dans les programmes de 1833 (Annexe XVII) reste immuable pendant plusieurs décennies. L'une des principales applications du théorème des droites parallèles est alors la mesure des distances inaccessibles. A la lecture des commentaires des programmes de 1837, nous pouvons nous rendre compte que les éléments de Bezout sont ici jugés plus rapides et moins rigoureux que ceux de ses successeurs. Au vu des programmes des années 1840, 1841 et 1842, il s'agit d'un retour aux infiniment petits, afin de délaisser des méthodes plus rigoureuses, mais beaucoup plus difficiles d'accès.

Il semblerait que ce soit le programme de 1849 qui, tout en conservant les énoncés sur les lignes proportionnelles, impose le premier de supprimer les expressions faisant apparaître des proportions pour les remplacer par des égalités de rapports.

V. Cours de géométrie de Guilmin (1859)

V.1 Schéma déductif



V.2 Analyse

V.2.1 Démonstration du théorème (D.P.C.T)

Ce que nous pouvons dire, c'est que Guilmin admet des résultats que certains autres auteurs comme Euclide, Legendre ou Lacroix démontrent.

Legendre avait besoin, pour démontrer le résultat 12, du premier cas d'égalité des triangles, de la proposition 4 et des axiomes 1, 3 et 6 et pour démontrer le 13, qui est sa première proposition, de plusieurs données lues sur des figures. Chez Guilmin, l'unicité et l'existence de la perpendiculaire allège les démonstrations. Le diagramme général en est modifié. Pour la suite de la démonstration générale du théorème de Thalès, Guilmin suit ce que nous avons trouvé dans Legendre puis dans Lacroix.

Legendre et Lacroix, cherchant à démontrer le *postulatum* dont une version possible se trouve au numéro 54 de Guilmin, ont donné des démonstrations beaucoup plus complexes que ce dernier. De plus, seules les propositions 1, 10, 15 de Legendre, qui correspondent à la 13, 31, 41 chez Guilmin, reçoivent une démonstration différente de celle de son prédécesseur. Pour la confection des déductogrammes, les énoncés et les démonstrations étant identiques à ce que nous avons trouvé soit dans l'ouvrage de Legendre soit dans celui de Lacroix, nous donnons les numéros correspondant à chaque l'auteur auquel est emprunté la proposition. Lorsque Guilmin propose une démonstration ou un énoncé original, nous attribuons à cet énoncé un numéro propre.

Pour démontrer le fait que toute droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels (137), Guilmin utilise la méthode de Lacroix (56 La, I), non plus pour deux droites quelconques coupées par un certain nombre de parallèles mais dans un triangle, comme l'a déjà fait Desdouit ; d'abord dans un cas particulier où l'on a un rapport de 4/7, puis il conclut en disant :

> "Ce raisonnement démontre le théorème pour tous les cas où il y a une commune mesure, si petite qu'elle soit, entre les segments AD, DB du même côté AB ; ce théorème est donc vrai en général".

En cette moitié de XIX ème siècle, la méthode des aires semble définitivement abandonnée, et elle l'est pendant très longtemps encore. Il faut attendre la fin du XX ème siècle pour la voir réapparaître, et encore sous forme d'activité introductrice partielle ou d'activité de fin de chapitre. La démonstration de Guilmin est fondée sur une partie de celle de Lacroix mais la démonstration finale n'ayant rien à voir. Ainsi, Lacroix raisonnait par l'absurde, dans un trapèze (58 La, I) et en encadrant les points en question, dans le cas incommensurable, par des sections bien choisies. Cette méthode par exhaustion, également utilisée par Legendre uniquement pour un théorème qui concerne le rectangle et non pour démontrer le théorème des lignes proportionnelles, n'est absolument pas présente ici.
Les explications de Guilmin sur une commune mesure si petite quelle soit se retrouve chez de nombreux auteurs du début du XX ème siècle.

V.2.2 Nombres, grandeurs et continu chez Guilmin

A la lecture des préliminaires (Annexe XVIII 2, a), nous pouvons noter que les nombres sont directement et pourrait-on dire uniquement rattachés à la mesure des longueurs de segments que nous qualifions de physiques. Ainsi, il n'y a aucune raison qu'un apprenant ne considère pas qu'il est parfois impossible de trouver la mesure exacte d'un segment, sauf s'il ne considère que les objets physiques. Cela pourrait représenter une difficulté voire un obstacle épistémologique fondée sur une contextualisation ou une modélisation familières. Nous approfondissons cela dans notre deuxième partie. Viennent ensuite, les définitions de moyenne proportionnelle et de produit de deux longueurs. Un des points de Guilmin correspond à une propriété fondamentale démontrée par Bezout (1768) ou par Reynaud (1827), mais la démonstration de ces auteurs paraît plus complexe, employant encore les termes de conséquens, de raison et d'antécédents. L'algébrisation des proportions se poursuit.

V.2.3 Organisation mathématique

Le théorème (D.P.C.T), n°137, est démontré par Guilmin grâce à une théorie de la droite et des droites parallèles constituée d'une propriété de la droite qui stipule que par deux points il ne passe qu'une seule droite n°2, de l'unicité d'une droite parallèle à un autre et passant par un point extérieur à cette dernière n°6 et de la méthode de construction de cette droite qui vient bien plus loin n°120, du théorème lié aux angles formés par deux parallèles et une sécante n°58. Cette théorie est complétée par le théorème d'égalité des triangles n°30. Ce qui est caractéristique est le fait que l'ensemble de ces résultats soient directement utilisés dans la démonstration du théorème 137 (D.P.C.T). Nous considérons que l'organisation praxéologique est régionale.

Ce résultat permet, à Guilmin, de résoudre divers problèmes de construction. Pour le numéro 144 : "Une droite DE parallèle à l'un des côtés d'un triangle ABC détermine un second triangle ADE semblable au premier", la démonstration se fait par le tracé, classique, d'une autre parallèle. Notons que la figure dite papillon n'est pas présente. Les points (145), (146), (147), (148), (149), traitent divers cas de similitude des triangles. Les cas d'égalité de triangles sont utiles ensuite pour démontrer des propositions dans le triangle rectangle (153). Après manipulation de diverses égalités liées aux deux points du numéro (153), il est déduit classiquement le théorème de Pythagore (154). Un autre résultat est déduit en quelque sorte du théorème des lignes proportionnelles, c'est le théorème sur la puissance d'un point par rapport à un cercle. En cela, l'auteur suit le découpage de Legendre. Dans l'espace, ce théorème (137) sert à démontrer son correspondant avec des plans (254). Il est également utilisé dans l'espace pour la mesure des pyramides et des cônes. Par exemple, nous avons le résultat (301). Les lignes trigonométriques ne sont pas étudiées dans cet ouvrage, qui s'adresse aux élèves de troisième et de seconde.

Le théorème prend naissance dans un contexte précis, puis vit et évolue dans un environnement riche et varié. Cette niche écologique assure sa stabilité et sa pérennité. Six chapitres sur trente-quatre de l'ouvrage de Guilmin sont directement concernés par le théorème (D.P.C.T). Mais neuf leçons sont absolument nécessaires aux démonstrations de résultats qui sont eux-mêmes absolument indispensables pour légitimer le théorème des lignes proportionnelles. Donc à peu près la moitié des leçons concernent directement ou indirectement ce résultat.

Champs conceptuels du théorème 137 (D.P.C.T)

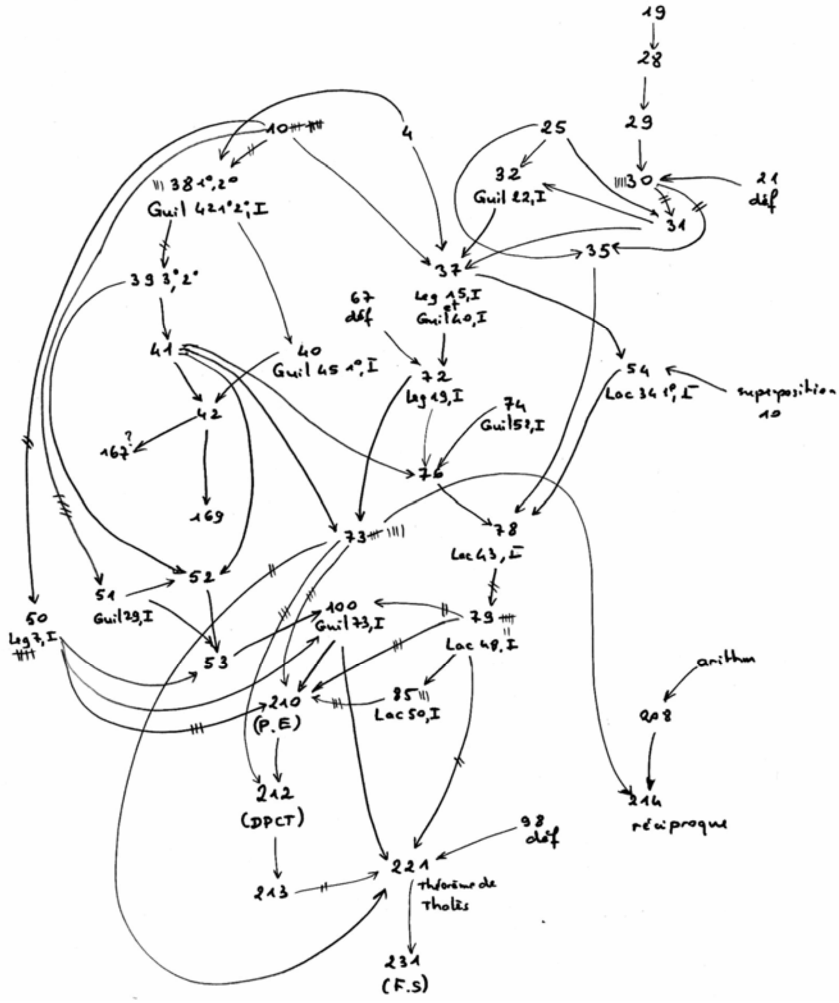
Pour le théorème correspondant à la mesure des angles, l'auteur donne plus de précisions (105). Il se place encore dans la perspective de la mesure des longueurs avec une unité de mesure décimale. L'incommensurabilité semble ainsi un peu plus abordable par les nombres décimaux. Comme nous pouvions nous y attendre, la même méthode est employée pour démontrer que l'aire du rectangle est obtenue en multipliant sa longueur par sa largeur. L'auteur commence par traiter le cas où base et hauteur sont exprimées par des nombres entiers. Vient ensuite le cas où les dimensions du rectangle sont exprimées par des nombres décimaux. Il change alors les unités de référence de longueur et d'aire pour décomposer, comme précédemment, le rectangle en sous carrés qu'il dénombre.

> " Cette démonstration réussit, quelque petite que soit la subdivision de l'unité qui sert de mesure à l'une ou à l'autre dimension du rectangle ; nous pouvons donc dire en général, dans le sens indiqué : un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur".

VI. Le cours de F.I.C. (1881)

Nous ne pouvons que constater, à la lecture des instructions datant de 1863 (Annexe XIX 1, a) contrairement, à l'esprit de l'époque, un certain retour à Euclide dans l'enseignement de la géométrie en classe de 4ème et de 3ème de la section lettre. Même si les éléments de Clairaut sont encore privilégiés, cela est accompagné d'une critique assez nette de cet ouvrage qui semble manquer de rigueur au goût du ministre.

VI.1 Schéma déductif



VI.2 Analyse

La première remarque que nous pouvons faire au sujet de la définition (207) (Annexe XIX 2, b) est que ces auteurs admettent implicitement qu'à toute ligne, à tout segment, peut être associé un nombre et deux segments peuvent être mesurés grâce à la même unité.

La démonstration du théorème (210) (P.E) est identique à celle de Lacroix à quelques petits détails près. La démonstration du théorème (D.P.C.T) (212) est faite d'abord dans le cas où les deux segments considérés ont une commune mesure. Puis à la fin il est indiqué :

> "La démonstration pouvant se répéter quelque petite que soit la mesure commune entre AD et DB, le théorème est vrai dans tous les cas. Donc toute parallèle à un côté...* Note de bas de page : *Dans le cas où les segments AD et DB n'auraient pas de commune mesure, on expliquerait la proposition comme dans le cas des angles (n°144, renvoi)".

Au numéro (213), par l'intermédiaire des scolies I et II, les auteurs donnent tous les rapports possibles construits soit avec des segments pris d'un même côté du grand triangle soit avec des segments choisis de part et d'autre du triangle. Il apparaît ainsi une double approche de la proportionnalité. La position respective des points les uns par rapport aux autres n'est encore pas indiquée dans l'énoncé de la réciproque (214). La démonstration particularise la figure et utilise un résultat qui concerne l'unicité du point pour lequel le rapport des distances à deux autres points donnés A et C est constant (208).

Pour prouver le théorème de Thalès (221) dont le nom apparaît pour la première fois ici, les auteurs démontrent d'abord que les angles des deux triangles en question sont égaux chacun à chacun puis ils tracent une parallèle à un côté et appliquent le (213) : AD/AB = AE/AC et AD/AB = FC ou DE/BC.

Dans la démonstration de la proposition (144), le fait que le point E se trouve obligatoirement entre deux points de division fait appel à un axiome du continu. Les notions d'infini et de continu sont absolument nécessaires d'une part pour dire que le point F se trouve entre deux points de division et pour admettre que la différence de deux rapports extrêmes,1/n, peut devenir aussi petite que l'on veut et donc tend vers 0. L'arithmétique s'éloigne officiellement, depuis 1849, des algorithmes des proportions pour s'orienter vers les égalités de rapports.

Ce que nous pouvons d'ores et déjà expliciter, c'est que les nombres ont maintenant une existence propre, indépendante, *a priori*, de toute référence géométrique ou pratique même si au début de cet ouvrage, les nombres se réfèrent encore à la mesure des grandeurs. Dans les opérations sur les rapports ou les proportions, le travail s'effectue à l'aide des fractions, dont les propriétés sont démontrées à partir de définitions numériques.

Au numéro (10), nous retrouvons la définition du principe d'égalité par superposition.

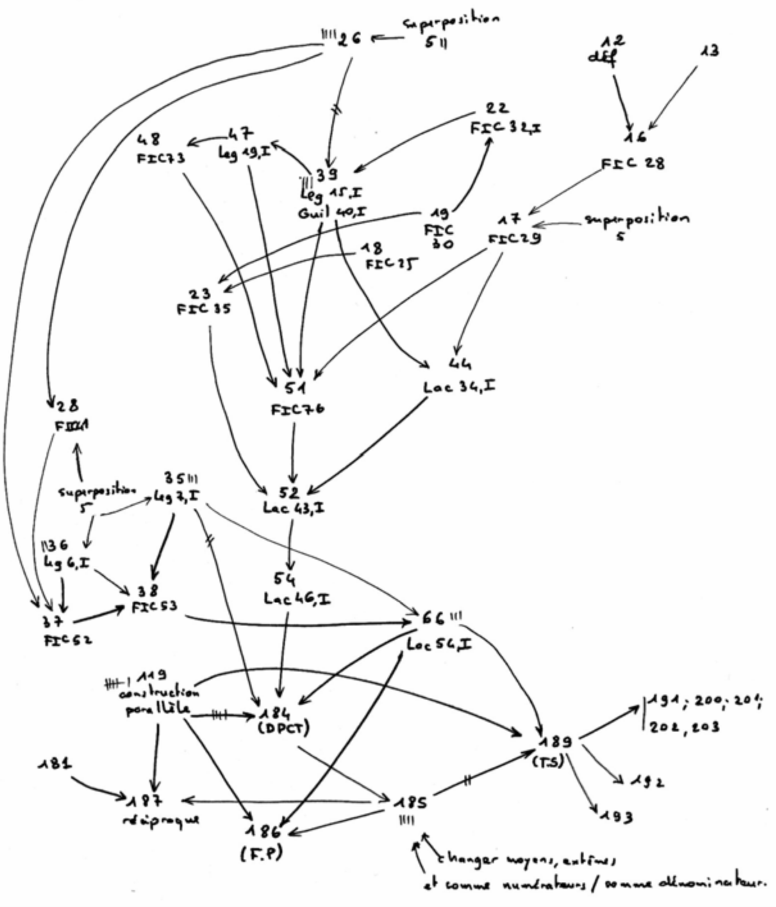
Nous pouvons nous rendre compte que les points les plus utilisés sont les numéros 10, 41, 50 et 73 qui correspondent respectivement au principe d'égalité par superposition, à une caractérisation de la médiatrice, au premier cas d'égalité des triangles et enfin au tracé d'une droite passant par un point et parallèle à une autre droite donnée. Nous notons que ces propositions, en particulier celle qui concerne un cas d'égalité d'un triangle (n°50), sont très peu directement utilisées pour la démonstration du théorème (D.P.C.T) ce qui était moins le cas avec par exemple Guilmin. Ainsi, nous pouvons conclure que F.I.C, évite d'utiliser directement le principe d'égalité par superposition ou un cas d'égalité des triangles dans la démonstration du théorème en introduisant et en faisant usage de la médiatrice. L'organisation mathématique de la démonstration du théorème et de son utilisation est plutôt régionale.

Les théorèmes (212) et (213) (D.P.C.T) servent à démontrer immédiatement les résultats classiques sur les bissectrices extérieures et intérieures d'un angle et à définir des points conjugués. Les applications immédiates concernent également les trois cas de similitude des triangles (223, 225, 226), le cas des triangles rectangles semblables (224), le théorème des faisceaux de droites concourantes (231) et (232), ce qui est assez original pour l'époque. Le théorème (225) sur les triangles semblables sert à démontrer plusieurs résultats sur les polygones semblables. Le théorème de Thalès, par l'intermédiaire du théorème (223) sur les triangles semblables, sert directement à démontrer des résultats sur des relations numériques de lignes dans le cercle, comme la puissance d'un point par rapport à un cercle. Globalement, les interventions du théorème de Thalès restent classiques. Grâce à la proposition (224), les auteurs démontrent le théorème dans le triangle rectangle qui concerne la hauteur et l'hypoténuse (247). Ces auteurs algébrisent ces résultats ce qui permet de déduire le théorème de Pythagore. A cela s'ajoute des applications dans les figures de l'espace, comme les pyramides et les cônes, et aux coniques. La grande nouveauté est une utilisation de l'algèbre encore plus accrue que précédemment.

La méthode de démonstration du numéro (212) est réutilisée dans F.I.C. au numéro (311) pour démontrer que deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.
Le volume du parallélépipède relève également de cette méthode.

VII. L'ouvrage de BOS (1884)

VII.1 Schéma déductif



VII.2 Analyse

La propriété sur la perpendiculaire et les obliques (40) ou (42 G, I) n'est pas utilisée par l'auteur dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles. Elle est remplacée par des résultats sur les figures symétriques (26). La définition et les théorèmes qui concernent les parallèles utiles à la démonstration du théorème (D.P.C.T) sont identiques à ceux de Guilmin, sauf pour le (51, perpendiculaires à deux droites parallèles) qui reçoit une nouvelle démonstration. Alors que Guilmin le démontrait à l'aide du résultat sur la perpendiculaire et l'oblique à la même droite, Bos donne la même démonstration que nous avons trouvée dans F.I.C. (1881) (51 FIC, I) ; ainsi cet auteur se trouve réellement en rupture avec la théorie des perpendiculaires et des obliques, chère aux auteurs qui désiraient démontrer le *postulatum*. La démonstration du théorème (184) (D.P.C.T) est identique à celle de Guilmin (1859) (137 G, III) également pour un seul cas de figure, mis à part qu'ici, la précaution qui concerne la commune mesure aussi petite qu'elle soit n'est pas prise. Hue et Vagnier (1899) utilisent la même méthode. Au numéro (185), en changeant les moyens de place et en utilisant le (182) qui concerne la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs, cet auteur donne aussi d'autres égalités. La démonstration de la réciproque (187) est identique à celle que nous avons trouvée dans Guilmin, sachant que Bos utilise pour conclure une propriété des proportions qui ont trois termes en commun (181), alors que son prédécesseur utilisait un résultat lié à un point qui divise un segment en un rapport donné. Notons qu'il s'agit bien de la réciproque de la propriété invoquée, puisqu'en parlant des côtés du triangle, il n'y a pas lieu de préciser que les points sont situés de la même façon sur les côtés ou sur leurs prolongements. Les définitions (180) et (181) nous montrent qu'il y a, chez cet auteur, une équivalence entre proportion, fraction, et rapport. Il semble que cette équivalence soit définitivement acquise chez les auteurs d'ouvrages élémentaires.

Toutes les propriétés sur la symétrie axiale qui sont décrites au numéro (26) sont fondées sur des rabattements, sur le principe d'égalité par superposition, et globalement sur une lecture raisonnée de figures. La symétrie est employée par cet auteur pour démontrer des théorèmes dont les démonstrations antérieures étaient fondées de toute façon sur ce principe d'égalité par superposition par l'intermédiaire des cas d'égalité des triangles, et pour certaines sur des propositions dont les preuves étaient complexes comme celle qui concerne les perpendiculaires et les obliques. Au numéro (28) il s'agit de la proposition (41) de F.I.C. Mais la démonstration en est toute différente, puisque F.I.C. utilisaient les perpendiculaires et les obliques et que Bos use encore une fois de la symétrie (26). En ce qui concerne les cas d'égalité des triangles, la démonstration du dernier cas (37) repose sur un dessin que nous avons trouvé également dans F.I.C, son esprit est également (52) similaire mis à part que les prédécesseurs de Bos utilisaient le théorème sur les obliques est les perpendiculaires alors qu'ici, la définition et les propriétés de la symétrie des figures, lues sur les dessins, remplacent ce résultat et allègent de nombreuses démonstrations.

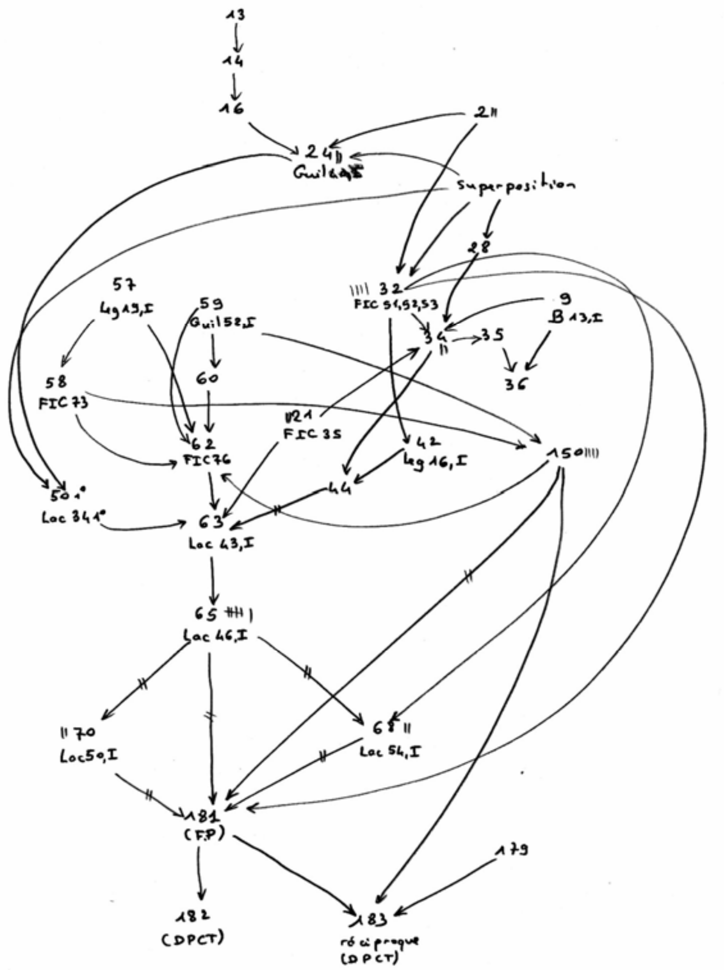
Le théorème (185), et par conséquent le théorème sur les lignes proportionnelles, sert à démontrer, d'une façon classique (parallèle, parallélogramme et 185), une première proposition sur les triangles semblables (189). Ce dernier résultat est rédigé sous la forme triangles semblables, mais à la fin de la démonstration, nous voyons bien apparaître les égalités des trois rapports. Il est utilisé, comme à l'accoutumée pour démontrer les résultats sur les triangles semblables (191, 192, 193) et pour résoudre des problèmes de construction, (200), (201) et (202). Mais les autres applications que nous pourrions également rencontrer comme la puissance d'un point par rapport à un cercle, sont absentes ici.

VIII. L'ouvrage de Grapin (1886) (Annexe XXI)

La démonstration du théorème (283) est identique à celle de la propriété 56 de Lacroix. La démonstration du théorème de Thalès est faite, grâce au (283), dans un cas particulier de commune mesure. Il s'agit de la troisième fois depuis F.I.C. (1881) que nous voyons apparaître le terme de théorème de Thalès dans un ouvrage scolaire pour désigner la proportionnalité des segments déterminés par deux parallèles à un côté d'un triangle. Les programmes attendront beaucoup plus longtemps pour utiliser et officialiser ce terme. En ce qui concerne le cas lié à l'incommensurabilité, au numéro (285), nous retrouvons le commentaire de Guilmin. Amiot (1883) distingue lui aussi les rapports de deux grandeurs incommensurables et les rapports de deux grandeurs commensurables. Dans le second cas, il indique qu'il est impossible de mesurer la première en prenant la seconde pour unité. Mais cet auteur semble plus précis que Grapin, puisqu'il dit que lorsque deux grandeurs incommensurables sont données, il est toujours possible de trouver une troisième grandeur qui soit commensurable à la seconde et qui diffère aussi peu que l'on veut de la première.

IX ROUCHE et COMBEROUSSE (1891)

IX. 1 Schéma déductif



IX.2   Analyse

Les démonstrations des cas d'égalité des triangles (32) se fondent sur des figures symétriques. Au théorème (36) qui concerne l'inégalité triangulaire, ces auteurs retrouvent la tradition euclidienne de la proposition (20) du Livre I. Pour les auteurs refusant l'inégalité triangulaire comme étant un axiome, il y a deux écoles, celle par exemple d'Hadamard (1898) qui utilise le théorème de l'angle extérieur à un triangle et celle de Rouche et Comberousse qui n'usent justement pas de ce résultat mais de la propriété qui stipule qu'un plus grand côté est opposé à un plus grand angle. La première partie de la démonstration du théorème (182) (D.P.C.T) est calquée exactement sur celle de Lacroix. Par contre pour le cas de l'incommensurabilité, Rouche et Comberousse fondent leur démarche sur une conception de la proportionnalité élaborée que nous retrouvons dans Hadamard (1898) et Tannery (1894). Lacroix encadrait le point litigieux pour aboutir à une absurdité grâce à la méthode d'exhaustion ; ici, il suffit de démontrer la correspondance dans l'égalité et dans la somme pour conclure. Monnet (1892) démontre le théorème (D.P.C.T) de la même façon en disant finalement :

> "Le théorème étant vrai pour des segments qui ont une commune mesure, si petite qu'elle soit d'ailleurs, il est encore vrai, quand les lignes sont incommensurables."

A la différence de Tannery, qui s'appuie sur une construction des nombres réels fondée sur l'approche de Dedekind, Rouche et Comberousse travaillent directement sur les grandeurs, les nombres irrationnels étant introduits pour mesurer des grandeurs qui n'ont pas de communes mesures avec une unité choisie. Ils passent ensuite à la mesure de grandeurs et aux incommensurables grâce aux limites. Pour cela, ils introduisent la notion de valeur approchée et démontrent l'existence et l'unicité de cette dernière limite. Notons qu'ils admettent implicitement la propriété qui précise que tout ensemble non vide de R majoré admet une borne supérieure qui permet de démontrer la convergence de deux suites définies par ces auteurs ainsi que le théorème des suites adjacentes. Comment justifier l'existence d'une limite, et par suite la définition d'un nouvel objet mathématique, par une propriété implicitement admise que doit vérifier justement cet objet que l'on est en train de définir ?
Cette propriété est largement utilisée par la suite, notamment pour définir les opérations sur les incommensurables.

Le vieillissement interne des propriétés (D.P.C.T) et (TS), la transaction entre ancien et nouveau ou la dialectique outil-objet sont assurés par les démonstrations de nombreux résultats et l'introduction de nombreuses notions. Citons par exemples :
• Le théorème et sa réciproque sur les bissectrices intérieures et extérieures(184), (185) ; ces auteurs introduisent des segments additifs et soustractifs, conjugués harmoniques (186).
•Les lignes proportionnelles dans le cercle : (189) à (196), les antiparallèles par rapport à un angle, la puissance d'un point par rapport à un cercle.
•La similitude des polygones (197), définition.

Notons que les trois cas de figures du lemme (198) sont envisagés et démontrés de façon classique. Les numéros (200), (201), (202) traitent les cas de similitude des triangles et permettent de déduire le (203) :

> "Scolie : Il en résulte de 200 que, dans un triangle, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés, et réciproquement. Cette propriété fondamentale, dont la découverte est attribuée à Thalès (639-548 av. J.-C), ne subsiste pas pour des polygones quelconques".

Ainsi ces auteurs donnent le nom de théorème de Thalès au fait qu'il y a équivalence entre égalité des angles de deux triangles et proportionnalité des côtés. Il s'agit de la première fois que nous rencontrons une telle version. De plus, dans l'appendice du Livre III, ils traitent l'homothétie à l'aide des théorèmes (181) et (182).

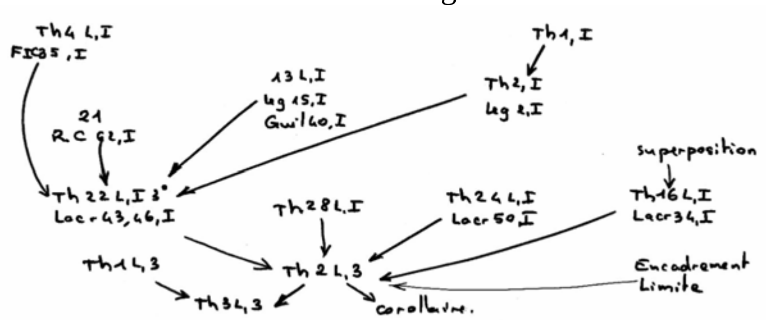
Notons encore une fois, comme nous pouvons le constater à la lecture du théorème (125) situé au Livre II, qu'un auteur rattache cette méthode aux démonstrations d'autres résultats, comme celui de la mesure des angles. A cela s'ajoute un corollaire (126). Vient ensuite le résultat sur la mesure des angles. Par ailleurs, cette technique est utilisée au Livre VI pour démontrer que l'aire du rectangle est égale à sa longueur fois sa largeur (417).

Dans André (1897), le théorème (207) (D.P.C.T) (Annexe XXIV) est démontré directement d'une façon classique, dans le cas où les côtés ont une commune mesure, mais sans passer par le premier cas intermédiaire de deux droites quelconques coupées par des parallèles équidistantes. Depuis Desdouits et Guilmin, André est l'un des premiers à se placer directement dans le triangle. Nous voyons apparaître au corollaire qui suit (210), des rapports que nous nommons de projection. Il s'agit d'une proportionnalité externe aux segments alors que dans la proposition précédente, la proportionnalité est interne.

La lecture de données sur la figure est inévitable dans la version de la réciproque proposée (211). Notons que cette méthode avait déjà été employée par Legendre (Prop 16.3) ou par D. Puille d'Amiens (1887).

X. COMBETTE (1898)

Le début de la démonstration du théorème de Thalès qui correspond au théorème (2) (Annexe XXV) du Livre III, concerne, comme toujours, le cas où deux segments sont commensurables. La méthode est exactement la même que celle employée dans Guilmin (137), (F.I.C), ou dans Bossut qui travaille directement dans le triangle.



Jacquet et Laclef (1904) utilisent aussi cette méthode. Mais contrairement à Guilmin, qui concluait en disant que ce raisonnement étant valide dans les cas où il y a une commune mesure, si petite qu'elle soit, ce théorème est vrai dans tous les cas, Combette donne plus de précision en traitant le cas où les deux longueurs sont incommensurables. Il prend bien soin d'indiquer, dans sa remarque finale, que les droites parallèles ne rencontrent pas forcément les côtés eux-mêmes. Il obtient alors le second cas de figure. Vient ensuite le théorème qui correspond au théorème de Thalès actuel sur deux droites coupées par deux parallèles.

Le continu et l'infini semblent abordés en ce qui concerne les nombres mais pour ce qui est de la géométrie, des préconstruits ou des implicites subsistent encore. Vintejoux (1909) utilise la méthode que nous avons rencontrée dans Combette.

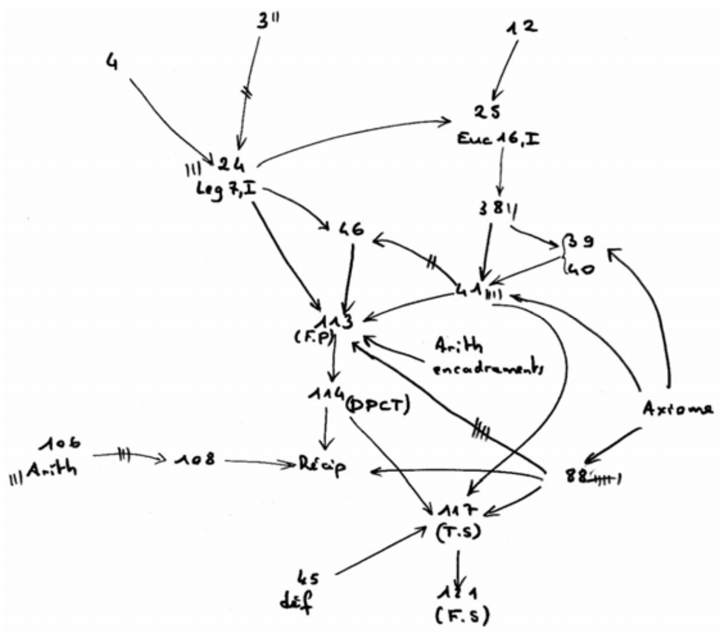
A la lecture des notions préliminaires, nous pouvons voir que la mesure est définie soit par un nombre entier ou fractionnaire lorsque les grandeurs sont commensurables, soit comme limite de valeurs approchées. Par exemple, on partage B en n parties égales µ et on reporte µ autant de fois que l'on peut dans A ; on trouve par exemple $mx < A < (m + 1)x$. D'où $m/n < A/B < (m + 1)/n$ et ainsi $0 < A/B - m/n < 1/n$. Si l'on prend pour n une valeur suffisamment grande, on aura une valeur de A/B aussi approchée que l'on veut. L'existence de cette limite est admise. L'arithmétique ainsi obtenue unifie les mathématiques et en particulier des concepts et des résultats constituant des champs conceptuels propres, comme le théorème de Thalès, la mesure des angles, des aires et des volumes.

Le théorème sur les lignes proportionnelles, permet également à l'auteur de résoudre différents problèmes classiques. Il intervient également en tant qu'outil pour démontrer les résultats classiques sur les bissectrices d'un angle au théorème 4 Livre III.

Le théorème 7 et par conséquent le théorème de Thalès, sert, encore une fois, à démontrer les résultats sur les triangles semblables. 8, Livre III ; 11, Livre III, ce qui correspond au (200, R.C, III). Viennent ensuite les applications aux faisceaux de droites. Les deux cas de figures sont envisagés dans la démonstration du théorème 13 du Livre III qui concerne un faisceau de droites coupé par deux parallèles. Cela correspond exactement à ce que nous avons déjà rencontré chez Rouche et Comberousse aux numéros(214) et (215) du Livre III. Notons que Combette n'utilise pas les segments additifs, ou les valeurs algébriques, ce qui représente un écueil important dans la démonstration. Les relations métriques dans le triangle, en particulier le théorème de Pythagore, sont, comme dans l'ouvrage que nous venons de citer, démontrées également grâce au théorème de Thalès et ces conséquences.

XI. HADAMARD.J (1898)

XI.1 Schéma déductif



XI.2 Analyse

L'énoncé du théorème fondamental (113) (F.P) correspond à celui que nous avons également trouvé dans Rouche et Comberousse au n°181. Pour le cas où les segments sont égaux, la démonstration est rigoureusement identique à celle de Lacroix (56).
Le fait que les points I' et II' soient entre C' et D' et que le point II' soit au delà de D' est lu sur la figure. Cela relève, comme nous l'avons déjà remarqué, de la croissance de la projection liée également à une propriété du continu de la droite. Pour démontrer le théorème (114) (D.P.C.T), l'auteur utilise le précédent théorème (113) en faisant passer l'une des parallèles par un sommet du triangle.

Hadamard ne communique pas explicitement une construction des nombres, mais il fait ouvertement référence dès le numéro (105) au traité de Tannery (1894) Nous pouvons donc considérer qu'il s'appuie sur une construction des nombres réels par les coupures de Dedekind et que les notions de mesure des grandeurs et de proportionnalité se fondent sur une forme de graduation de la droite. Nous rajoutons que l'auteur admet l'existence de la quatrième proportionnelle.
Dans la note B sur le postulatum d'Euclide, l'auteur indique, à l'instar de ce que Roberval avait déjà écrit :

> "On remarquera aussi que les notions de ligne droite et de plan, dérivent de celle de déplacement, sans laquelle on ne peut les définir."

Il exprime en fait, comme de nombreux autres mathématiciens de la fin du XIX ème siècle d'ailleurs, que le *postulatum* se résume à la définition de la ligne droite et que celle-ci se ramène à la question des invariants par un groupe de déplacements.

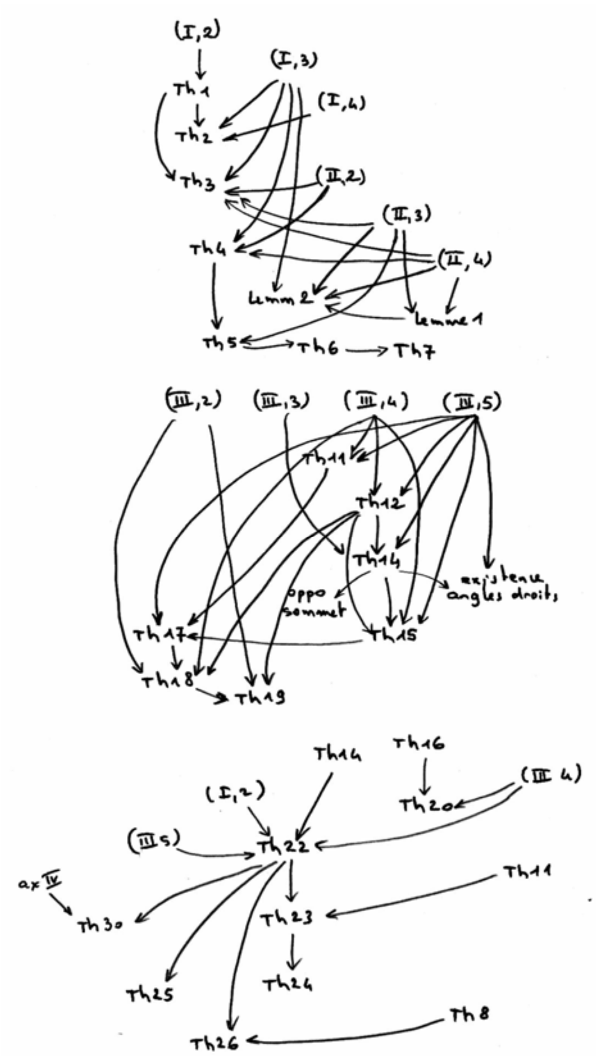
Peu de propositions constituent réellement des piliers pour cette démonstration. Le retournement permet à Hadamard de beaucoup moins utiliser les cas d'égalité des triangles, les perpendiculaires et les obliques. L'organisation praxéologique est régionale pour la partie géométrique de la démonstration. L'utilisation du théorème (114) en tant qu'objet se produit en premier lieu, lors de la démonstration des théorèmes sur les bissectrices intérieures et extérieures et de sa réciproque, sur une parallèle à un côté d'un triangle qui forme deux triangles semblables (117) (T.S) puis sur les trois cas de similitude des triangles.

Deux résultats sur les faisceaux de droites viennent ensuite (121). Dans le chapitre III qui traite des relations métriques relatives aux triangles, de nombreux résultats liés au triangle rectangle sont mentionnés. Le premier (123) est démontré grâce à un résultat lié au triangles semblables c'est à dire grâce en partie au théorème sur les lignes proportionnelles.
De là l'auteur en déduit traditionnellement le Théorème de Pythagore**.** Viennent ensuite de nombreux autres résultats liés au triangle rectangle, aux médianes et aux bissectrices, aux auteurs et le rayon du cercle circonscrit.

Le chapitre IV est consacré à l'introduction et à l'étude de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Le premier théorème (131) est démontré grâce aux triangles semblables, donc en partie grâce au théorème qui nous occupe.

Le théorème sur les lignes proportionnelles et les suivants permettent donc une transaction entre ancien et nouveau. Ces résultats permettent également d'introduire l'homothétie au chapitre V. Mais les similitudes des triangles permettent également de démontrer les deux principaux théorème de ce chapitre V, les théorèmes (141) et (142). La réciproque du n°114 sert à démontrer le (141) et le théorème sur les triangles semblables le (142). Notons encore une fois que cette méthode est employée par l'auteur pour démontrer les théorèmes équivalents qui concernent pour le premier (70) les angles au centre et les arcs qu'ils interceptent et pour le second l'aire du rectangle (247).

XII. HILBERT. D (1899) (Annexe XXVII)



Nous pouvons remarquer que l'axiome (II,4) qui concerne le fait que toute droite entrant dans un triangle en ressort par un côté et un seul, est fondamental puisqu'il est utilisé dans cette partie pas moins de 9 fois. Le théorème (D.P.C.T) (42) est démontré grâce au calcul segmentaire introduit auparavant et grâce au théorème de Pascal. En transformant les points en nombres, Hilbert peut traduire tous les concepts et axiomes géométriques fondamentaux en concepts et axiomes arithmétiques.

Grâce au calcul segmentaire qui suit le théorème de Pascal (40), Hilbert construit les nombres réels à partir d'une axiomatique de la géométrie du plan euclidien.

Une conception axiomatique et formaliste, fondamentalement différente de la construction choisie par exemple par Euclide, est adoptée. Les notions de point, droite, et de plan sont détachées de la réalité. Par exemple, le problème de l'égalité n'est pas résolu grâce au principe de superposition, largement voire exclusivement employé jusqu'à présent, mais par l'introduction des axiomes de congruence. Ayant défini ces trois systèmes d'objets, l'auteur énonce les relations primitives qui lient ces termes.

Le raisonnement mathématique ne repose plus sur les objets et les figures concrets mais sur les relations de ces objets. Nous notons qu'il est fait tout de même référence à la lecture d'une propriété de la figure lorsque l'auteur parle de "l'intérieur est du côté donné de la droite a'." axiome III 4. Le théorème 23 (un plus grand angle est opposé au plus grand côté), le fait qu'un angle est plus grand qu'un autre, les deux ayant le même sommet, est vu sur le dessin. En ce qui concerne les axiomes d'ordre ("entre") Euclide n'en avait pas besoin et en fait ne se posait sûrement pas la question quant à son utilité ou sa nécessité, car une simple lecture de la propriété sur la figure ne satisfaisait.

Synthèse

La démonstration du théorème (D.P.C.T), problématique et perspectives mathématiques :

La méthode employée par Francoeur pour démontrer le théorème est la méthode des limites qui consiste, par exemple, à épuiser une surface par une somme infini de surfaces polygonales. Même si elle est un peu plus formalisée que dans Clairaut ou dans Bezout, la convergence de suites qui est sous-jacente n'est pas établie. La démonstration des théorèmes (P.E) et (F.P) sont calquées sur ce que nous avons déjà trouvé dans les Eléments de Lacroix mis à part le fait que les pliages font leur apparition pour remplacer les démonstrations utilisant les cas d'égalité de triangles. Desdouit démontre le théorème (D.P.C.T) de la même façon que Lacroix mais il se place directement dans le triangle. Dans les années 1840, c'est un retour des infiniments petits afin de délaisser des méthodes jugées trop complexes.

Pour ce qui concerne le théorème (D.P.C.T) ou celui des lignes proportionnelles, le programme de 1849 rompt avec la tradition de les énoncer à l'aide des proportions en imposant pour la première fois les égalités de rapports. Suivant la position que le mathématicien adopte par rapport au *postulatum*, suivant qu'il cherche à le démontrer ou pas, d'une part les schémas déductifs sont modifiés et d'autre part, de nouvelles propositions, parfois dont les démonstrations sont complexes, apparaissent. Pour la fin de la démonstration du théorème (D.P.C.T), Guilmin n'emploie pas la méthode d'exhaustion. Il démontre le résultat en prenant une commune mesure précise et conclut en disant que le théorème est vrai aussi petite que soit cette commune mesure.

F.I.C utilisent la même méthode que Lacroix pour démontrer le théorème (P.E). Mais ils rendent la différence, 1/n, de deux rapports aussi proche de zéro que souhaité et concluent à l'égalité des rapports. De plus, les deux approches interne et externe de la proportionnalité sont abordées par ces auteurs, c'est à dire qu'ils forment des rapports de mesures de segments pris d'un même côté du triangle ou sur les deux côtés. Dans une proposition qui suit, nous voyons apparaître pour la première fois l'expression théorème de Thalès.

La démonstration du théorème (D.P.C.T) se fonde ici sur le principe d'égalité par superposition, sur un cas d'égalité des triangles ainsi que sur une caractérisation de la médiatrice d'un segment. L'organisation praxéologique de cette démonstration est régionale. La propriété sur les perpendiculaires et les obliques disparaît complètement au cours de cette période et est remplacée par la médiatrice ou par des propositions sur les figures symétriques comme dans Bos. Dans la démonstration du théorème (D.P.C.T) nous retrouvons le contenu de ce que nous avions trouvé dans Guilmin mis à part justement les perpendiculaires et les obliques.

Ce que nous pouvons dire c'est que dans la démonstration générale du théorème de Thalès, nous sommes passés de l'utilisation fondamentale et presque exclusive des cas d'égalités des triangles, qui a durée très longtemps depuis Euclide, à l'introduction de l'inégalité triangulaire puis des résultats concernant les perpendiculaires et les obliques qui, en apparence, semblaient diminuer l'emploi de ces cas d'égalité des triangles et par conséquent de l'égalité par superposition, pour poursuivre cette distanciation par l'introduction de propriétés de la symétrie par des pliages et des charnières, ce qui correspond à une conception réaliste de la démonstration, procédé qui est par ailleurs, parfois détaché du pratique par l'intermédiaire de propriétés des symétries purement mathématiques.

Rouche et Comberousse utilisent la même méthode que Lacroix pour démontrer le théorème (D.P.C.T). Ce qu'ils nomment théorème de Thalès est le fait qu'il y a équivalence, pour deux triangles, entre l'égalité des angles chacun à chacun et la proportionnalité de leurs côtés. Dans le cas incommensurable, ils élaborent une théorie sur la proportionnalité liée à la correspondance dans l'égalité et dans la somme. Cette théorie se retrouve dans Hadamard et dans Tannery à la différence près que ce dernier travaille sur les nombres alors que Rouche et Comberousse travaillent sur les grandeurs ce qui ne les empêchent pas de passer à la limite. Ils admettent implicitement la propriété de la borne supérieure de R. Combette démontre le théorème (D.P.C.T) comme Lacroix mais en travaillant directement dans un triangle.

Dans Hadamard, l'énoncé du théorème (F.P) est identique à celui de Rouche et Comberousse mais la démonstration se calque sur celle de Lacroix. Mais en fait peu de propositions fondent cette démonstration dont l'organisation praxéologique est régionale. Il énonce le fait que le *postulatum* revient à définir la droite par des déplacements et que cela consiste à étudier les invariants par un groupe de déplacements.

Hilbert démontre le théorème (D.P.C.T) grâce au calcul segmentaire, au théorème de Pascal et à l'axiome du continu sur une droite entrant et ressortant d'un triangle. Le principe d'égalité par superposition est remplacé par des axiomes de congruence. La problématique est géométrique.

Le rapport aux nombres, aux grandeurs et au continu au XIX ème siècle :

Jusqu'au début du XIX ème siècle, les irrationnels ne sont perçus qu'à travers les mesures de longueurs et les équations algébriques. Deux façons sont possibles alors pour aborder les nombres réels. La méthode de Cantor et Bolzano Weierstrass, qui posent un principe d'ordre sur les grandeurs, et celle des coupures de Dedekind par l'intermédiaire de la définition du continu. Ce dernier utilise et réactualise la définition 6 du Livre V des Eléments d'Euclide. Heine et Cantor utilisent les suites de Cauchy.

Ces deux approches relèvent de conceptions par rapport au point totalement différentes. Pour Dedekind, le point sépare et pour Cantor via Cauchy, c'est une limite. Peut être peut-on y trouver en filigrane les conceptions anciennes dimensionnelles et ensemblistes du point qui engendrent, suivant le cas, des démonstrations du théorème de Thalès par la méthode des aires ou par la méthode des infinis, des indivisibles ou d'exhaustion.

Dans le premier ouvrage élémentaire du XIX ème siècle que nous avons étudié, Francœur fonde la démonstration du théorème sur un résultat de l'algèbre. Mais les incommensurables ne sont toujours pas considérés comme des nombres. Pourtant, pas sa méthode des limites, l'auteur a les moyens de définir deux suites adjacentes convergeant vers une même limite.

Dans (F.I.C) les nombres sont indépendants de toute référence géométrique. Les proportions sont abordées grâce aux fractions dont la définition est numérique. Pour Bos également il y a équivalence entre proportion, rapport et fraction. Dans Combette la mesure est définie soit comme un nombre entier ou une fraction soit comme limite de valeurs approchées à 1/n près. L'existence de cette limite est implicitement admise. L'unicité du point divisant un segment dans un rapport donné est admise par F.I.C. De même le fait qu'un point d'une droite se trouve obligatoirement entre deux points d'une division de cette droite est admis.

Dans Combette et pour de nombreux élèves de cette époque, l'infini et le continu sont abordés en ce qui concerne les nombres mais pas en géométrie en particulier pour l'existence des points d'intersection.

Interventions des propositions liées au théorème de Thalès en tant qu'outil :

Guilmin utilise le théorème (D.P.C.T) dans six chapitres de l'ouvrage. Il sert à démontrer les résultats classiques ainsi que le théorème de Pythagore, la puissance d'un point par rapport à un cercle, le théorème équivalent pour des plans et les propositions qui concernent le calcul de longueurs dans l'espace. De plus, neuf chapitres sont nécessaires à sa démonstration. De même, dans F.I.C, le théorème de Thalès et ses applications immédiates ont une influence importante sur les démonstrations de nombreux résultats. Rouche et Comberousse appliquent le théorème (D.P.C.T) à de nombreux domaines et en particulier aux lignes proportionnelles dans le cercle et à l'homothétie. Dans Combette, le théorème (D.P.C.T) est employé pour démontrer des résultats classiques de construction mais également pour introduire la puissance d'un point par rapport à un cercle, les faisceaux de droites et les relations métriques dans le triangle rectangle.

Les champs conceptuels et problème donnant du sens aux deux propositions :

Francoeur use de la même méthode de démonstration pour démontrer les théorèmes sur les angles et les arcs, sur les rectangles de même base qui sont entre eux comme leurs hauteurs que celle employée pour démontrer les théorèmes (P.E) et (F.P). Le Baron Dupin tente de légitimer l'étude des notions et théorèmes mathématiques à partir des problèmes de l'industrie.

Mais en fait ces justifications ne viennent qu'a *posteriori*. Guilmin, F.I.C. démontrent le théorème (D.P.C.T), sur les arcs et les angles et sur l'aire du rectangle de la même façon. Dans Combette, cette unification des démonstrations est obtenue grâce à des concepts, numériques, indépendants de la géométrie, contrairement à ce qui se passait jusqu'à la fin du XVIII ème siècle et au début du XIX ème.

CHAPITRE 6
LE THEOREME DE THALES
AU XX ème SIECLE

I.1 BOS, BOURLET, FORT et DREYFUS

Pour démontrer le théorème des lignes proportionnelles et également pour mesurer les angles, Bos (1901) utilise la méthode des encadrements à 1/n près, que nous avons déjà abordée avec F.I.C (1881) et que nous retrouvons chez plusieurs auteurs. Mais paradoxalement, pour trouver "la plus grande commune mesure de deux droites", cet auteur change de technique et use de la méthode de Blanchet alors qu'il aurait pu utiliser la même pour tous ces théorèmes.

> "Les résidus r, r', r", r'", ... vont décroissant et peuvent devenir plus petits qu'une longueur donnée quelconque, si l'opération se prolonge indéfiniment. D'autre part, si les lignes a et b ont une commune mesure d, elle doit être contenue exactement dans les longueurs b, r', r" ; donc ces longueurs ne peuvent pas être inférieures à d, ce qui exigeeque l'opération se termine."

I.1.1 Les programmes

A la lecture des programmes de 1905, nous pouvons nous rendre compte que le théorème des lignes proportionnelles intervient directement ou indirectement à tous les niveaux jusqu'à la classe terminale du secondaire. Même s'il ne s'agit parfois que de révisions, cette propriété intervient en tant qu'outil, par exemple pour introduire l'homothétie. Les cas de triangles semblables sont également revus en terminale, ce qui leur confère une certaine importance dans tout le cursus secondaire. L'étude d'une proposition à plusieurs niveaux de la scolarité correspond à une réforme de la pédagogie (Prost, 1968).

> Instructions au cycle B " Au point de vue de l'explication des faits, le professeur devra faire appel à l'expérience et admettre résolument comme vérité expérimentale tout ce qui semble évident aux enfants."
>
> Instructions au cycle A "Le professeur pourra laisser de côté, s'il juge à propos, toute théorie un peu abstraite[...] Les démonstrations ne seront données qu'autant qu'un nombre suffisant d'élèves seront en état de les comprendre."

I.1.2 Le théorème de Thalès dans Bourlet, Fort et Dreyfus, Grévy

L'option de l'enseignement fondée sur l'expérience, est clairement signifiée par le premier auteur :

> "La réforme de méthode consiste dans l'abandon de la géométrie classique d'Euclide pour lui substituer une géométrie plus moderne où les déplacements jouent un rôle prépondérant. Cette nouvelle méthode consiste essentiellement à rattacher la notion du parallélisme à celle de la translation."

De nombreux autres auteurs jusque dans les années trente reprennent cette méthode qui fonde les démonstrations sur les translations ou les symétries. Les translations glissières sont utilisées par Fort et Dreyfus (1908) en particulier pour démontrer les résultats sur les parallèles. Nous trouvons ici un exemple assez rare pour que nous le signalions, d'un énoncé de théorème de Thalès (Annexe XXIX) qui englobe la propriété directe et sa réciproque.

En ce qui concerne le théorème de Thalès, Bourlet retrouve l'esprit de la démonstration de Lacroix mais d'une façon un peu différente. En effet, il introduit au préalable la notion de translation glissière le long d'une droite et évite ainsi d'utiliser deux propositions, l'une sur les angles dont les côtés sont parallèles et l'autre sur les angles correspondants. Mais cette translation glissière se réfère d'autant plus à une lecture raisonnée de la figure. Ce qui semble gagné en clarté et en concision est perdu en rigueur. La démonstration du théorème (P.E) (163) par Grévy (1905), (56) par Marijon (1931) se fonde également sur celle de Lacroix.

Dans une autre publication (1909), le théorème (D.P.C.T) (182) (Annexe XXX) diffère légèrement de celle que l'auteur a donnée en 1905. En effet, dans ce théorème direct, il énonce clairement qu'il existe plusieurs cas de figure. L'auteur donne les trois cas de figure et ne procède qu'à la démonstration du premier. Un cas générique est étudié lorsqu'une commune mesure existe et lorsque les segments n'ont pas de parties aliquotes communes, il divise AD, D se trouvant entre A et B, en 6 et il suppose que BD contient 8 de ces parties mais pas 9 et déduit des valeurs approchées à 1/6 près. Il s'agit de la première fois que nous voyons apparaître des valeurs algébriques.

L'esprit de la démonstration du théorème réciproque du théorème (D.P.C.T) (187) ne change pas si ce n'est que l'auteur part des rapports de vecteurs (longueurs algébriques). Cela pose tous les problèmes liés d'une part au fait que ces vecteurs et leurs sens sont obtenus par lecture directe de figures, et d'autre part aux calculs dont la rigueur est remise en cause par le fait qu'il est impossible, par exemple, de multiplier deux longueurs algébriques qui ne dépendent pas du même repère.

I.2 BOREL (1910) (Annexe XXXI)

Les Eléments d'Euclide ne sont pas jetés aux oubliettes mais "modernisés" grâce aux notions de symétrie, de rotation et de translation. Nous retrouvons, au début de la première partie, l'exemple pratique qui a déjà permis à de nombreux auteurs d'introduire la droite du plan. La définition de la translation et la propriété fondamentale qui lui est rattachée se fondent sur l'expérience et l'utilisation des sens. La symétrie par rapport à un axe est introduite comme retournement ou comme pliage. Cette notion permet d'étudier la notion de perpendiculaire et le triangle isocèle. Le mouvement de translation conduit à la définition des droites parallèles et au parallélogramme. Borel énumère les principales propriétés du plan et de la droite pour donner ensuite la définition de l'égalité de deux figures par superposabilité. Malgré tout, ce principe d'égalité est moins utilisé que par le passé, les applications du plan remplaçant cette notion dans bien des démonstrations. La notion de symétrie par rapport à un axe sert notamment à définir la perpendiculaire à une droite. Pour le théorème qui nous occupe, seules les applications du plan telles que la symétrie par rapport à un point, la translation et la rotation, ainsi que le principe d'égalité par superposition sont utilisés. La lecture de données sur les figures est rendue indispensable et paraît directement dans chaque démonstration à l'inverse de ce que nous avons pu observer chez de nombreux auteurs où cette lecture raisonnée des dessins est artificiellement éliminée par la démonstration de propriétés qui sont utiles tout au long des preuves.

La méthode employée pour démontrer le premier théorème sur les lignes proportionnelles (A.B.P), dans le cas où le rapport est entier, est à rapprocher de celle que Clairaut a utilisée pour démontrer les numéros 39 et 430. Pour le cas général, l'auteur divise AB_1 en 10, ou 100, ou 1000 parties égales et cherche alors combien AB_2 contient l'une de ces parties notée AB. Il donne alors l'exemple pour lequel AB_2 est compris entre les 6 dixièmes et les 7 dixièmes de AB_1, entre les 62 centièmes et les 63 centièmes de AB_1, entre les 627 millièmes et les 628 millièmes de AB_1. Ce qui permet de dire que si nous prenons AB_1 pour unité, ma mesure de AB_2 serait 0,627 à un millième près par défaut. Ce nombre est alors appelé le rapport de AB_2 et AB_1. L'auteur complète son propos en énonçant qu'il est possible de faire la même chose pour une division en centièmes, en millièmes etc., et ainsi, tous les chiffres étant les mêmes ont peut conclure que l'égalité est vraie. Implicitement, il utilise la propriété qui précise que deux grandeurs sont égales si nous pouvons rendre leur différence aussi petite que nous le voulons. La méthode de démonstration est utilisée pour ce qui concerne le calcul des aires, mais pas pour la mesure des angles, comme l'a déjà fait Hadamard.

Borel nous fait part dans sa définition des grandeurs proportionnelles de l'existence de deux types de proportionnalité. Il déduit alors des égalités qui concernent le théorème de Thalès dans la version angle (A.S). De la première définition, correspond : $AC_2/AC_1 = AB_2/AB_1$. Le fait que toutes les grandeurs soient de même nature, permet de donner des rapports en liaison avec les deux définitions. Pour la seconde définition, il obtient : $AB_1/AC_1 = AB_2/AC_2 = AB_3/AC_3 =$... Cette constante k ne dépend pas du choix du point B, mais uniquement de l'angle a et de la direction à laquelle les droites concernées sont assujetties à être parallèles.

Nous nous trouvons en présence d'une approche de la proportionnalité dans le théorème (A.S) qui fait appel à la version interne et externe. Nous considérons qu'il s'agit là de l'un des points essentiels de fonctionnalité du théorème de Thalès. Ce théorème est directement employé pour introduire, dans le paragraphe suivant, le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu. Au paragraphe VII, les cas de similitudes des triangles sont démontrés encore une fois à partir du théorème (A.S). Borel aborde le cas d'une parallèle à un côté d'un triangle, ce qui correspond au théorème tel qu'il est rédigé actuellement, puis les trois autres cas de similitude.

La dialectique entre ancien et nouveau, la dialectique outil/objet sont également assurées par l'introduction de la puissance d'un point par rapport à un cercle et les propriétés liées aux bissectrices d'un triangle. L'horloge didactique est relancée dans le cadre même de ce cours, par l'introduction de l'homothétie au paragraphe IX.

I.3 VALLORY (1911)

Au paragraphe 2 du chapitre II (Annexe XXXII) l'auteur énonce l'Axiome d'Archimède et il en déduit qu'étant donné un segment A, on peut trouver n assez grand pour que le segment A/n soit plus petit que n'importe quel segment donné ε. Dans la recherche de la plus grande partie aliquote commune à deux segments (56), c'est l'axiome d'Archimède qui permet de conclure à un encadrement de A entre deux termes de cette suite. Dans cette recherche de partie aliquote commune, il s'agit exactement de la méthode utilisée par Tannery au paragraphe IV sur la recherche de la commune mesure. Vallory indique qu'à chaque nombre rationnel a, on peut faire correspondre sur une demi-droite Ox un point A d'abscisse a, ce point étant plus éloigné de l'origine O que son abscisse est plus grande.
La bijection qui existe entre la droite géométrique et les nombres réels via l'abscisse des points de cette droite, contrairement à ce que font la plupart des auteurs qui admettent ce résultat, est ici démontrée par le partage des nombres rationnels en trois classes (80). Ce sont les coupures de Dedekind.
$(a') = \{r \in Q, r < a\}$; $(a'') = \{r \in Q, r > a\}$; $\{a\}$. Il caractérise alors les différentes classes les unes par rapport aux autres. Il utilise, pour démontrer l'existence d'une coupure de type III (82), l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté de mesure 2, résultat qu'il a auparavant démontré géométriquement. Il définit les nombres irrationnels (84). Il donne une méthode (117) pour trouver une valeur approchée de nombres rationnels et irrationnels, méthode fondée sur l'axiome d'Archimède et qui revient en quelque sorte à définir la partie entière d'un nombre. En effet, le premier encadrement de OA revient à admettre l'existence de la partie entière d'un nombre. Il s'agit d'un préconstruit de première espèce, c'est à dire que le résultat est sous-jacent, mais il est vrai dans le cas général. La méthode de démonstration sert à de nombreuses reprises à commencer pour démontrer le théorème sur la proportionnalité des angles et des arcs, au numéro (170). Lorsqu'il y a commensurabilité, la démonstration de ce résultat est fondée sur le fait que l'angle étudié étant la somme de m angles, l'arc correspondant est la somme de m arcs.

L'auteur nous dit que la démonstration du théorème fondamental (173) est identique à celle du théorème qui montre la proportionnalité des angles aux arcs qu'ils interceptent (170). Ce résultat est rigoureusement le même que celui démontré par Tannery : celui-ci donnait une démonstration générale sans passer par une graduation décimale.

Les démonstrations des énoncés particuliers du théorème de Thalès (300) se font grâce au numéro (299). Vallory applique le théorème de Thalès aux constructions classiques que sont, la quatrième proportionnelle, la division d'une droite en n parties égales, la division d'une droite AB dans un rapport k.

I.4 NIEWENGLOWSKI (1912) (Annexe XXXIII)

Niewenglowski préconise d'évoquer l'action de mesure de distance inaccessible à partir des situations représentées dans le micro-espace.

La démonstration du théorème de Thalès (8) n'est faite que dans un cas commensurable se fonde sur le point (6). Cette méthode se retrouve dans les démonstrations de théorèmes qui concernent les aires de polygones.

Les applications et les résolutions de problèmes que ce résultat permet d'obtenir sont multiples comme à l'accoutumée. En premier lieu, nous trouvons la construction de la quatrième proportionnelle, le théorème précédent ramené au cas du triangle avec trois cas de figure (12), partager une droite AB en deux segments AM, MB dont le rapport est donné, les propriétés des bissectrices d'un triangle et enfin celles qui concernent les théorèmes directs et réciproques des faisceaux de droites à travers deux cas de figures qui sont démontrées grâce au numéro 12. Au chapitre II, sont présents les trois cas de triangles semblables démontrés avec le théorème de Thalès.

Le vieillissement interne est assuré ici par l'introduction, au chapitre IV, de l'homothétie et du pantographe. Les polygones semblables sont alors étudiés, au chapitre V, grâce à l'homothétie et non plus directement à l'aide du théorème de Thalès et des triangles semblables. La dialectique outil/objet et des transactions entre ancien et nouveau font leur apparition dans de nombreux chapitres, notamment le chapitre VI consacré à la trigonométrie. Le chapitre VII est également concerné par les dialectiques ancien/nouveau et outil/objet. Les propriétés métriques classiques du triangle rectangle y sont démontrées alternativement soit par la trigonométrie, c'est-à-dire indirectement avec le théorème de Thalès, soit directement grâce à ce même théorème.

Le théorème de Pythagore est encore classiquement démontré à l'aide de deux propriétés liées à la similitude de triangles (Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse) et donc encore une fois au théorème de Thalès. Les lignes proportionnelles dans le cercle et en particulier la puissance d'un point par rapport à un cercle, sont introduites et leurs résultats démontrés à l'aide des triangles semblables et donc du théorème qui nous intéresse. Il s'agit d'un des ouvrages pour lequel le théorème de Thalès et ses conséquences directes constituent véritablement l'ossature des différentes démonstrations et de diverses introductions de concepts et notions.

I.5 VACQUANT et MACE de LEPINAY ANDRE (1916)(Annexe XXXIV)

Dans la démonstration de l'existence et de l'unicité d'une perpendiculaire à une droite passant par un point, ces auteurs prennent soin de préciser un axiome de Pasch.

En ce qui concerne la démonstration complète du théorème de Thalès, aucune différence n'est à noter par rapport à l'ouvrage publié en 1917. Ils concluent, dans le cas de l'incommensurabilité de deux segments, que :

> "Si AD et BD n'ont pas de commune mesure, on remarque que le théorème, étant vrai quelque petite que soit la commune mesure entre les deux longueurs AD et BD, est encore vraie quand ces longueurs sont incommensurables."

Pour mesurer une grandeur (1917), ces auteurs prennent communément, pour unité, une grandeur de référence de même espèce. Ils définissent ensuite deux grandeurs commensurables et deux grandeurs incommensurables. Dans ce dernier cas, ils encadrent par deux fractions le quotient de deux grandeurs, comme d'autres d'ailleurs Comberousse, Hadamard, Combette etc. Ils définissent ainsi les nombres incommensurables et l'égalité de deux de ces nombres en rendant leur différence aussi petite que possible lorsque n est rendu aussi grand que l'on veut. Pour démontrer le théorème du Livre III :

> "**262.** Sur une droite indéfinie qui passe par deux points donnés A et B, il y a deux points tels que le rapport des distances de chacun d'eux aux deux points A et B soit égal à un rapport donné, et il n'y en a que deux. L'un de ces points est situé entre les deux points A et B, l'autre en dehors de ces points, sur le prolongement de la droite AB.",

ils utilisent la méthode que nous avons fréquemment rencontrée et qui consiste à faire circuler un point M sur cette droite et de noter les variations des longueurs MA et MB. Ils indiquent à un moment de la preuve que :

> "Ce rapport allant toujours en augmentant ne peut passer plus d'une fois par la valeur donnée."

Or un théorème important permet bien sûr de conclure de cette façon : une fonction définie sur une partie A de R sur R strictement monotone est injective.

La démonstration du théorème sur les deux droites parallèles coupées par une sécante et formant plusieurs angles, est semblable à celle de Lacroix. Elle se fonde sur le tracé d'un milieu et sur la construction d'une perpendiculaire. L'esprit des ouvrages de Lacroix est donc encore présent en ce premier quart de XX ème siècle.

La démonstration du théorème (D.P.C.T) (271) se fait en deux temps, comme dans F.I.C (1881). Mais à la différence de ce dernier ouvrage, il n'y a pas ici de propriété introductrice comme le n°209 de F.I.C. La démonstration s'effectue directement dans le triangle et non dans le cas de deux droites sécantes dont le point d'intersection n'est pas apparent.
Les deux étapes sont traditionnellement représentées par le cas commensurable, ici nous avons le rapport 4 sur 3, suivi du cas incommensurable. Dans le premier cas, les auteurs utilisent une propriété du parallélogramme, les angles correspondants ainsi que la propriété des angles aux côtés parallèles et de même sens, et un cas d'égalité de triangles.
Pour le cas incommensurable, les auteurs font référence au raisonnement qu'ils ont employé au n°193 sur les rapports angles arcs. La démonstration est exactement identique à celle que nous avons trouvée dans F.I.C. Les auteurs en déduisent classiquement les propriétés des bissectrices des angles d'un triangle, (276) et (277), et des triangles semblables, (282) (T.S) pour lequel trois cas de figures sont envisagés, (286), (288) et (289).

> "**275. Théorème.** Réciproquement. Toute droite qui détermine sur deux côtés d'un triangle des segments proportionnels est parallèle au troisième côté du triangle, pourvu toutefois que les points de rencontre de la droite avec les deux côtés du triangle soient tous deux sur ces côtés non prolongés, ou tous deux sur leur prolongement."

La démonstration est classique et se fonde sur le théorème direct et également sur une propriété d'unicité n°262 du point qui partage un segment en un rapport donné. Ils utilisent le théorème pour construire une échelle comme l'ont fait avant eux Bezout et Bossut et Lacroix.

I.6 LEBESGUE (1931)

A partir de 1925 (Annexe XXXV), la géométrie ne commence qu'en classe de 4ème ce qui renvoie le théorème des lignes proportionnelles au niveau troisième. Les instructions sont claires. Seul l'intitulé du chapitre qui nous concerne change : "Droites parallèles et lignes proportionnelles" et non plus simplement " Lignes proportionnelles". Mais son contenu et sa place dans les programmes restent inchangés. L'aspect dit "concret" est abandonné pour être remplacé par un esprit de déduction et un entraînement à la démonstration.

Les axiomes de la théorie d'Eudoxe Euclide sont nécessaires pour attribuer ce qui est appelé une raison à toute grandeur continue. Mais cela n'est pas suffisant pour parvenir à l'opération inverse. La démarche d'Euclide prend sa source dans le géométrique pour parvenir à la fin dans le monde des raisons. Mais le voyage réciproque, comme nous venons de le dire, n'est pas possible. L'association raison grandeur nécessite d'autres outils. Lebesgue semble, le premier, résoudre ce dilemme.

> "remplacer en arithmétique les chapitres sur les fractions, sur les nombres décimaux, sur les fractions décimales, sur les fractions décimales périodiques, sur les calculs approchés par un unique chapitre sur la mesure des longueurs et les opérations sur les nombres".

Ce procédé géométrique pour aborder le problème des nombres irrationnels avait déjà été utilisé, sous une autre forme en utilisant des approximations décimales, par Du Bois-Reymond (1887) qui considérait que tout nombre décimal s'approche autant que l'on veut d'une valeur limite. Cet auteur établit clairement la mesure d'un segment grâce à un autre segment de référence pris pour unité (Annexe XXXVI). L'auteur se demande :

> "Si toute suite de chiffres indéfinie vers la droite, et comportant une virgule, est un nombre. C'est à dire si cette suite provient de la comparaison d'un segment AB avec l'unité U."

La question est donc de savoir si à toute proportion il correspond un segment ou un point B qui, associé à un autre point A donné au départ, représente cette raison quelconque. Pour cela, Lebesgue indique qu'il est nécessaire que pour toute suite de segments emboîtés, c'est à dire une suite de segments décroissante et dont la longueur tend vers zéro (le fait que l'une majore l'autre est déduit de la convergence vers 0), il existe un point B commun à tous les segments en question et qu'il n'y en a qu'un. La première condition relève d'un axiome de continuité et la seconde de l'axiome d'Archimède. La convergence de ces suites est assurée par le théorème de la borne supérieure : toute suite croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) de nombres réels converge et sa limite est égale à la borne supérieure (respectivement inférieure) des valeurs prises par la suite. L'existence de la borne supérieure étant engendrée par le fait que tout ensemble non vide de réels majoré admet une borne supérieure.

Nous retrouvons, au numéro (21) lors de la démonstration du théorème de Thalès, la méthode qui a été utilisée par Borel dans l'ouvrage de 1910. L'auteur indique que la méthode qu'il vient d'employer pour le théorème de Thalès l'est également pour d'autres domaines. C'est le cas pour la mesure des aires. Lebesgue montre bien que la conception très ancienne d'augmentation et de diminution permettant de définir une grandeur est difficilement acceptable puisqu'elle regroupe des notions qui sont assez éloignées les unes des autres. De nombreux auteurs du XIX ème siècle ont défini la proportionnalité par le fait qu'il y avait conservation par somme et égalité.

I.7 CHENEVIER (1931), ESTEVE et MITHAULT(1935), VIEILLEFOND(1937)

La rédaction du théorème réciproque (325) (Annexe XXXVII 1) permet d'évacuer le problème du positionnement des points les uns par rapport aux autres. Mais quoi qu'il en soit, la définition de cette notion de points homologues est fondée sur la lecture d'une figure.

Esteve et Mithault (Annexe XXXVII, 2) fondent leur définition du rapport de deux vecteurs dont les supports sont parallèles (40) sur la lecture d'une figure. Ils démontrent ensuite un théorème sur les projections de deux vecteurs équipollents (50). Par translation, ils amènent les deux vecteurs l'un "sous" l'autres ce qui permet, grâce à une propriété du parallélogramme de déduire que les projections sont égales. Après avoir démontré le théorème de Thalès (51), les auteurs déduisent ensuite que deux parallèles étant données, à un point a, ce théorème ne fait correspondre qu'un point a' et un seul. Ainsi, la réciproque est vraie.

Les programmes de 1938 apportent des nouveautés de par les mots employés. Ainsi, nous voyons apparaître pour la première fois l'expression théorème de Thalès (Annexe XXXVIII). Les termes proportionnalité d'un segment projeté et de sa projection sont également nouveaux. Pour l'introduction du nom du théorème de Thalès, d'après ce que nous avons pu observer dans les ouvrages anciens, les concepteurs des programmes n'ont fait qu'officialiser la pratique de nombreux auteurs scolaires depuis la fin du XIX ème siècle.

La translation a une importance primordiale dans les démonstrations de Viellefond (Annexe XXXIX), à l'instar de ce que nous avons déjà rencontré chez Borel (1910) ou Vallory. De cette notion, l'auteur déduit qu'il y a équivalence entre les notions de droites superposables par translation et la notion de droites ne se rencontrant pas, c'est à dire les droites parallèles. Il obtient par la même occasion un moyen de tracer une droite parallèle à une autre passant par un point. Dans le lemme (388), l'égalité des triangles ainsi que les propriétés des parallélogrammes sont obtenues grâce aux translations, au mouvement pratique par glissière. La glissière, la définition de la translation qui en découle et la notion de projection sont les seuls outils que l'auteur emploie pour démontrer le théorème de Thalès (392). Le principe d'égalité par superposition est moins présent que par le passé.

I.8 ITARD et LECONTE (1940), LEBOSSE et HEMERY (1940)

La démonstration du théorème des bandes à bords parallèles (21) (Annexe XL) est fondée sur un théorème lié aux droites parallèles et un autre aux cas d'égalité des triangles. Ce théorème est à mettre en relation avec la méthode employée par Arnauld, mais surtout avec celle de Vallory. Ce théorème sert à démontrer le théorème de Thalès qui est envisagé dans tous les cas possibles (22). La démonstration se fait dans le cas où la fraction est égale à trois quarts et se fonde sur le n°21.

L'approche du second cas du théorème de Thalès (23) est intermédiaire entre une démonstration faisant clairement apparaître un encadrement quelconque du rapport de deux longueurs ainsi qu'un passage à la limite et une preuve admettant que le résultat reste vrai même dans le cas des nombres réels. Ici, les auteurs adoptent un point de vue qui consiste à donner deux encadrements décimaux pour finalement extrapoler afin de parvenir à admettre la conclusion.

Au cours de la démonstration de la réciproque, l'unicité d'un point intérieur à un segment, partageant ce segment dans un rapport donné est admise. Le théorème de Thalès est appliqué au numéro 28 au triangle, les bandes étant obtenues, dans les trois cas de figures, grâce au tracé de la parallèle à un côté du triangle passant par le sommet opposé. Nous avons pu remarquer que cette méthode des bandes adaptée ensuite au triangle s'est généralisée pendant une courte période.

Le début du cours de Lebosse et Hémery (Annexe XLI) correspond à ce que nous rencontrons dans l'ouvrage publié par ces auteurs en 1947. Le théorème de Thalès est rédigé suivant la méthode des projections et précède les propriétés sur les projections. Viennent ensuite les différentes constructions classiques. Les auteurs donnent tout d'abord la définition des triangles semblables et le théorème concernant la parallèle à l'un des côtés d'un triangle déterminant deux triangles semblables (181).

I.9 BRACHET, DUMARQUE et GOUET(1940), BENOIT(1941)

En 1941, l'esprit des programmes est à nouveau modifié :

> "L'enseignement de la géométrie doit être essentiellement concret. [...] On multipliera les problèmes de construction." Instructions de quatrième.

Nous retrouvons l'idée de bandes au théorème (208) (Annexe XLII) qui est largement employée à cette époque pour démontrer le théorème de Thalès. La démonstration de la propriété réciproque est fondée sur l'égalité de deux rapports de vecteurs qui permet de montrer que deux points sont confondus, car ils partagent A'B' dans le même rapport.

Les auteurs appliquent le théorème des bandes parallèles et sa réciproque au triangle (212), en traçant une parallèle à un des côtés et passant par le sommet opposé à ce côté. Par une double application de la proposition directe, ils obtiennent également :

> "**213.** Si une droite DE, parallèle au côté BC d'un triangle, rencontre AB en D et AC en E on a, quel que soit le cas de figure : $\frac{\overline{\vec{AD}}}{\overline{\vec{AB}}} = \frac{\overline{\vec{AE}}}{\overline{\vec{AC}}} = \frac{\overline{\vec{ED}}}{\overline{\vec{CB}}}$."

Benoit (Annexe XLIII) reprend, pour définir le rapport de deux nombres, l'approche que nous avons trouvée dans Niewenglowski :

> "On appelle rapport de deux nombres arithmétiques ou algébriques donnés a et b le nombre qui, multiplié par b, donne un produit égal à a. Une proportion est une égalité dont les deux nombres sont des rapports."

Grâce à des démonstrations algébriques, l'auteur donne ensuite des propriétés liées à des transformations de proportions : changement des "extrêmes et des moyens", somme ou différence des numérateurs et des dénominateurs. Il définit alors le produit d'un segment par une fraction comme étant la fraction que l'on obtient en divisant le segment donné par le dénominateur de la fraction et en multipliant par le numérateur. Le rapport de deux segments est alors le nombre entier ou rationnel par lequel il faut multiplier le deuxième pour obtenir le premier.

La valeur approchée par excès d'un rapport de deux nombres est obtenue si le numérateur est une valeur approchée du premier par excès et le dénominateur une valeur approchée du second par défaut.

L'auteur utilise, pour démontrer le théorème de Thalès (29) (D.P.C.T), une propriété qu'il a précédemment démontrée précisant que si des droites parallèles déterminent sur une droite des segments égaux, les segments qu'elles déterminent sur une autre droite quelconque sont aussi égaux. Ce théorème est utilisé lors d'une application au triangle dans trois cas de figure proposés. Viennent ensuite les applications classiques de construction de la quatrième proportionnelle, de la propriété des bissectrices d'un angle d'un triangle etc.

Au chapitre VI, nous nous trouvons en présence d'une définition des vecteurs qui se rapproche de très près de la définition qui est actuellement largement répandue dans l'enseignement au collège : un vecteur est la donnée d'un sens, d'une longueur et d'une direction.

La définition (33) du rapport deux vecteurs qui ont même support permet à Benoit de donner un théorème de Thalès algébrique. Dans cette nouvelle version, le fait que le sens des vecteurs ne change pas est une propriété lue sur la figure.

I.10 CAMMAN(1942) (Annexe XLIV)

Au numéro (26), nous retrouvons, un peu plus sophistiqué, le critère d'égalité par superposition fondé sur les déplacements. Ce principe est également appliqué, par exemple, pour démontrer l'existence et l'unicité de la bissectrice d'un angle. Outre la définition, l'auteur présente la projection d'un vecteur sur une droite et la décomposition de deux vecteurs concourants, qui donne la résultante de deux vecteurs. Cette projection est utilisée à la fin du chapitre sur la trigonométrie, et c'est l'occasion de démontrer un théorème à l'aide du théorème de Thalès. Les définitions des vecteurs, des vecteurs équipollents (244) et (245) et les propositions qui lui sont liées ne sont fondées que sur les sens. L'unicité du point divisant un segment dans un rapport donné (255) est obtenue de façon algébrique.

La démonstration du théorème sur les lignes proportionnelles (257) est identique à celle que nous avons relevée chez Lacroix, à la différence près que Camman ne parle pas des parallèles comprises entre des parallèles mais tout simplement de parallélogramme. L'auteur suppose qu'il existe une commune mesure aux deux segments initialement pris en compte, mais le cas de l'incommensurabilité n'est pas du tout évoqué.

L'auteur considère, sans plus de justification, que des segments pris sur une sécante sont de même sens que les deux segments correspondants sur l'autre sécante. Il obtient ainsi une égalité de rapports algébriques. Le théorème de Thalès est déduit immédiatement en donnant deux points confondus.

Les applications et constructions graphiques demeurent classiques. Le théorème de Thalès est appliqué aux faisceaux de droites concourantes, à la division harmonique, aux faisceaux harmoniques, aux propriétés des bissectrices, aux relations dans le triangle rectangle (théorème de Pythagore...), à la puissance d'un point par rapport à un cercle ainsi qu'à l'introduction de l'homothétie. Les lignes trigonométriques ne sont pas introduites avec le théorème de Thalès puisqu'elles sont prises sur un demi-cercle trigonométrique. Seule la signification géométrique de la tangente est donnée dans le paragraphe consacré à la projection. Nous pouvons de toute façon considérer que le vieillissement interne du théorème de Thalès est assuré.

I.11 LEBOSSE et HEMERY(1947) (Annexe XLV)

Les auteurs démontrent l'énoncé général du théorème de Thalès (20) lorsque le rapport est égal à 3/5 puis ils orientent les droites et lisent directement les valeurs algébriques sur la figure. La démonstration de la première forme particulière (22) (D.P.C.Tr) se fonde sur le théorème général. Les trois cas de figure sont envisagés ensuite pour prouver la seconde forme (23) (D.P.C.T). Les fractions obtenues sont construites également avec des longueurs algébriques de nature différente.

La réciproque concerne ensuite le trapèze et le triangle. Deux points partagent un segment dans le même rapport algébrique ce qui permet de conclure qu'ils sont confondus. Les auteurs remarquent ensuite que si l'on considère des rapports arithmétiques, il faut vérifier que les points considérés ont bien la même disposition.

I.12 DOLLON et GILET(1950), LESPINARD et PERNET(1952)

Dollon et Gilet (Annexe XLVL) étudient le rapport suivant lequel un point M partage un segment AB ou ses prolongements. Mais contrairement à ce que nous avons déjà pu rencontrer, le point ne se déplace pas virtuellement sur la droite. La solution au problème est algébrique. Les auteurs utilisent implicitement le fait que l'application qui à x associe le point M tel que MA = x.AB est une bijection de R sur la droite réelle. La continuité de cette application est indispensable pour établir cette bijection. Que ce résultat soit abordé grâce au mouvement d'un point sur une droite ou par l'algèbre, le continu est inévitable.

Nous retrouvons les traces de Bezout et Lacroix dans le théorème des parallèles équidistantes (325). Ce théorème est utilisé immédiatement pour démontrer le théorème de Thalès (326). La démonstration pour le cas commensurable est bien sûr fondée sur le théorème précédent. Dans le cas où les segments sont incommensurables, les auteurs procèdent comme dans Combette ou Vacquant et Macé de Lépinay. Seules les valeurs algébriques sont rajoutées. La rédaction et la démonstration du théorème réciproque sont identiques à ce que nous trouvons dans Lespinard et Pernet (1952).

Dans Lespinard et Pernet (Annexe XLVII), nous retrouvons, à travers la propriété sur les parallèles équidistantes et sa réciproque (100), la méthode de Dupin (1825). Nous trouvons cette méthode également dans Hemeret et Lermusiaux (1962). Les égalités des triangles occupent une place encore très importante. Les deux démonstrations sont identiques à celle de Dollon et Gilet numéro (325). Seul le cas commensurable est indiqué dans la démonstration du théorème de Thalès pour trois parallèles (173). Une sécante est divisée en segments égaux et par les points de divisions de ces segments consécutifs égaux, des parallèles sont menées. Donc, d'après un résultat précédent, ces parallèles sont équidistantes et déterminent en second lieu des segments consécutifs égaux sur l'autre sécante.

Une autre forme du théorème est évoquée au numéro (174). Après une application de la réciproque au triangle (176), une généralisation du théorème de Thalès suit alors au numéro (177). Dans ce théorème, il s'agit de segments correspondants, c'est à dire que les segments qui composent chaque rapport appartiennent chacun à l'une des deux droites.

Une autre application immédiate est liée aux triangles homothétiques qui correspondaient jusqu'à présent aux triangles semblables. Lespinard et Pernet communiquent des constructions classiques du type partage d'un segment en parties proportionnelles à plusieurs segments, la quatrième proportionnelle, la construction des points d'une droite divisant un segment de cette droite dans un rapport donné.

Ils donnent ensuite un théorème sur le rapport de projection des segments d'une même droite. Dans la généralisation, il s'agissait déjà de rapports de projections sans en parler, mais la nouvelle rédaction fait clairement apparaître ce concept de projection.

Il est indéniable que les applications du plan prennent de l'importance dans les énoncés et les démonstrations des propositions. Les exemples les plus flagrants sont le remplacement des triangles semblables par les triangles homothétiques et le complément fait au théorème de Thalès en exprimant exactement la même propriété mais en usant de la notion de projection.

I.13 DUBREIL (1964)

Dans les programmes de troisième moderne (enseignement court) de 1959 (Annexe XLVIII 1), même si les contenus ne sont pas trop modifiés, les instructions demandent de partir en mathématique de situations "concrètes". A partir d'expériences, une propriété est dégagée. Notons que les programmes qui suivent (1962, 1963 arrêté du 23 juin 1962, 1965, arrêté du 26 octobre 1964, 1966, décret du 10 juin 1965), jusqu'en 1969, reprennent textuellement ceux de 1959. En ce qui concerne le théorème de Thalès, au premier abord, peu de modifications ont été apportées depuis les programmes de 1902. Le programme de géométrie plane n'a pratiquement pas évolué depuis cette époque si ce n'est l'apparition de nouveaux termes. Ce que nous pouvons remarquer, de prime abord, c'est la richesse de la niche écologique dans laquelle le théorème de Thalès évolue.

Le programme de quatrième donne à étudier des applications particulières de ce théorème aux parallèles équidistantes et aux théorèmes dits des milieux. Son étude en classe de troisième est précédée de celle des rapports de longueurs arithmétiques et de mesures algébriques de segments. Cet objet théorème de Thalès occupe-t-il une fonction particulière dans la suite du programme ? Est-il utilisé, par exemple, en tant qu'objet ? La section 2 du programme (1959) précise :

"Triangles semblables. Cas de similitude."

Après cette partie sur les triangles semblables, il est possible d'introduire les lignes trigonométriques, de démontrer des relations métriques dans le triangle rectangle, et enfin d'établir la puissance d'un point par rapport à un cercle. Le théorème de Thalès intervient également pour établir le rapport des aires de deux triangles semblables. En ce qui concerne la géométrie dans l'espace, ce théorème de Thalès est évoqué dans le cadre du parallélisme de droites et de plans.

En algèbre, ce théorème permet, dans le cadre de ce programme, de démontrer que les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines sont des droites. La chronogenèse est clairement apparente, la transaction entre passé et avenir propre à assurer le vieillissement du savoir et le double aspect outil-objet semblent donner à cet objet d'étude une place privilégiée dans ces programmes de 1959 qui restent en vigueur pendant longtemps.

Pour ce qui est des programmes de seconde 1961, ils débutent par la définition du produit d'un vecteur par un nombre réel. Le théorème de Thalès permet d'introduire les homothéties qui, en classe classique C et moderne, permettent de démontrer les principales propriétés des vecteurs, comme la distributivité par rapport à l'addition de la multiplication.

Dans l'ouvrage de Dubreil (Annexe XLVIII 2), nous reconnaissons dans le rapport de deux segments une méthode d'encadrement d'une longueur qui permet de parvenir à une approximation de celle-ci couramment employée par de nombreux auteurs. Les auteurs de cette collection considèrent connue la division et la multiplication d'un segment par un nombre entier. Ils rappellent ensuite des propriétés liées aux nombres entiers :

m.(AB + PQ) = m.AB + m.PQ ; (m + m').AB = m.AB + m'.AB ; k.(m.AB) = (k.m).AB.

Ces propriétés sont démontrées tout d'abord pour des nombres rationnels, le passage à la limite permettant de parvenir aux égalités avec les réels. Ils supposent connue la division et la multiplication d'un segment par un nombre entier et en déduisent ainsi la définition de la multiplication d'un segment par une fraction.

L'étude du rapport de deux vecteurs colinéaires est censée faciliter le travail pour déterminer le point qui partage une droite dans un rapport donné mais les obstacles liés à une lecture raisonnée des dessins, aux concepts de continuité et de nombres ne disparaissent pas.

Le théorème (1) permet de conclure, dans la démonstration du théorème (2), que les vecteurs A'B' et C'D' sont de même sens puisque AB et CD le sont au départ. Les auteurs précisent alors qu'il suffit de démontrer qu'ils ont même longueur. Pour cela, la méthode est fondée sur les angles correspondants, sur un cas d'égalité des triangles et sur une propriété des parallélogrammes qui concerne l'égalité des longueurs des côtés parallèles. Les deux premières droites forment une première bande et les deux suivants une seconde. Malgré la connaissance des transformations du plan, la démonstration demeure donc classique, les vecteurs et la conservation du sens lue sur les dessins, s'ajoutent simplement.

En ce qui concerne le théorème de Thalès (3), rien ne différencie cette démonstration par encadrement pour obtenir des valeurs approchées, de ce qui pouvait être rencontré au début du siècle ou à la fin du XIX ème siècle si ce n'est la référence aux vecteurs dont le quotient pose une difficulté conceptuelle.

> "Cette relation ne doit pas être confondue avec une proportion entre nombres ; on ne peut pas permuter les moyens (ou les extrêmes) car les vecteurs AB, A'B' n'étant ni colinéaires, ni parallèles, leur support n'est pas défini."

Peu d'auteurs prennent cette précaution qui est fondamentale que ce soit, d'ailleurs, pour les vecteurs que pour les valeurs algébriques. Un corollaire suivant tient compte lui des mesures algébriques. L'égalité de rapports "vectoriels" du théorème 3 est transformée immédiatement en égalité de rapports algébriques.

Pour démontrer la réciproque du théorème de Thalès (5), la méthode est classique. Ils en déduisent : $\overrightarrow{AB'_1} = r.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB'}$. Et par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AB'_1}$, $\overrightarrow{AB'}$ sont équipollents. Ils poursuivent en disant qu'ayant la même origine, leurs extrémités coïncident. Même si la forme de la démonstration a quelque peu changé par rapport à ce que nous avons déjà rencontré à ce sujet, de par l'introduction des vecteurs, la coïncidence des deux extrémités est lue sur la figure. Même si une étude est ébauchée à ce sujet dans le cadre de la recherche de points partageant un segment en un rapport donné, nous avons pu nous rendre compte que cette étude algébrique du problème ne peut dispenser d'une réflexion sur les nombres réels et sur la "continuité" de la droite réelle.

La réciproque part de l'égalité des deux rapports vectoriels, cela semblant éluder le positionnement respectif des points en question, mais en fait, pour obtenir le sens de chaque vecteur, une lecture des figures est indispensable. La démonstration du théorème direct s'effectue après avoir complété la figure d'une parallèle afin d'obtenir un parallélogramme.

Les différentes propriétés qui découlent de cette étude sont pratiquement identiques à celles que nous avons mainte fois rencontrées mais dans une version vectorielle. Par exemple, les propriétés des bissectrices dans un triangle sont exprimées grâce à des rapports vectoriels.

I.14 ITARD et HUISMAN(1964), THERON, COUTURIER et GALMARD(1965)

Itard et Huisman (Annexe XLIX 1) admettent implicitement qu'il y a une bijection entre les abscisses des points de la droite géométrique et les nombres réels. Il s'agit d'un préconstruit de premier ordre. Ces auteurs usent eux aussi de l'algèbre pour démontrer le théorème sur les points qui partagent un segment dans un rapport donné en étudiant les variations de ce rapport. Mais la construction ou l'hypothèse de l'existence de l'ensemble des nombres réels sont encore absentes du corpus.

Les auteurs fondent la démonstration du premier théorème de la leçon XXI sur une proposition de la classe de quatrième. La méthode générale d'encadrement de nombres réels par des valeurs approchées effectives a déjà été relevée chez Borel (1910) par exemple. Cette démonstration ne concerne que des rapports de longueurs algébriques comparés aux rapports des longueurs algébriques unités, mais par soustraction, les auteurs obtiennent le résultat général annoncé.

La démonstration est fondée sur l'énoncé qui est propre aux auteurs du théorème de Thalès, mais la méthode est classique.

Dans la démonstration du théorème (151) par Théron (Annexe XLIX 2), la bijectivité de la fonction et le fait que la relation évoquée soit une fonction sont des propriétés en fait admises.

Les auteurs se fondent sur le programme de quatrième à travers l'application d'un résultat sur l'axe médian de deux droites parallèles et sécantes à une troisième droite pour démontrer le résultat sur la correspondance entre segments.

La méthode utilisée pour démontrer le point a) du théorème (153) est originale et se trouve dans la droite ligne des instructions et des programmes de l'époque qui préconisent l'utilisation des transformations du plan pour ce genre de démonstration. Le fait que la symétrie centrale conserve les longueurs est une propriété admise dans le cours de quatrième et qui aurait pu relever, en son temps, de l'égalité par superposition.

Les auteurs démontrent ensuite un résultat qui concerne la multiplication d'un segment par un nombre entier pour commencer, rationnel et irrationnel pour finir. L'étude de la correspondance va permettre d'énoncer le théorème de Thalès vectoriel (159). La démonstration de ce théorème se fonde sur la définition de l'égalité vecteurs abordée en classe de quatrième.

La propriété réciproque du théorème de Thalès est démontrée au (161). Les auteurs parviennent à une égalité de deux rapports algébriques qui leur permet de conclure que deux points sont confondus du fait que ces deux points divisent un vecteur dans le même rapport.

I.15 ITARD et HUISMAN(1967), Collection DURRANDE(1967)

Nous trouvons dans l'ouvrage Itard Huisman (Annexe L 1) les termes du programme et de la grande réforme de 1969 qui suit. Les applications du plan sont largement utilisées. Mais cela n'enlève rien aux difficultés liées aux nombres réels, à la lecture de données sur les figures. Même si ici un langage élaboré est employé, la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, la linéarité de la projection sont des notions dont le sens et la justification reposent sur des objets matériels et sur des manipulations abstraites d'objets concrets.

Les auteurs de cet ouvrage appliquent la technique qui consiste à étudier une situation dite matérielle comme la projection effective sur une droite, en observant des propriétés vérifiables par la pensée ou par expérience directe sur la situation. Tout ce qui est lié aux coordonnées vectorielles ou ponctuelles est interprété directement sur le dessin par une expérimentation pour ensuite constituer un modèle abstrait de cette situation de projection qui permet de définir des relations entre objets et des propriétés qui régissent ces relations. A partir de ces fondements, il est déduit des théorèmes comme le théorème de Thalès. Il est sûr que grâce à cette approche projective, la démonstration du théorème de Thalès en est allégée mais sans que pour cela les problèmes et les obstacles qui lui sont intrinsèquement liés disparaissent.

Au théorème (3) que nous notons (T.V), il s'agit d'une application immédiate de la linéarité de la projection des vecteurs du plan, sur une droite parallèlement à une direction. Mais en fait, rien n'est réellement démontré au sujet de la linéarité de la projection.

Une première application de ce théorème est le théorème de Mélénaos et sa réciproque (4).
L'homothétie en est une application, notamment lorsqu'il s'agit de démontrer que toute homothétie autre qu'une translation admet un point invariant qui est le centre de l'homothétie.

L'ouvrage Durrande (Annexe L 2) est relativement caractéristique d'une volonté de transition entre deux conceptions des mathématiques. La réforme des mathématiques modernes n'est pas encore passée par là, mais elle est promue dès la fin des années 60. Les définitions euclidiennes des objets mathématiques étaient d'un côté repoussées pour être remplacées par des axiomes et des transformations du plan et les applications linéaires. Cela est significatif dans cet ouvrage lorsque les auteurs se proposent de démontrer que l'application projection d'une droite sur une autre parallèlement à une troisième est une application linéaire, ce qui est une version possible du théorème de Thalès. Pour cela, ils reviennent aux méthodes d'encadrement que nous avons déjà souvent rencontrées. Commençant par le cas rationnel en utilisant le résultat sur les parallèles équidistantes vu en quatrième, ils poursuivent par le cas réel en prenant pour cas générique l'exemple $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}.\vec{u}$. Par encadrements rationnels qui permettent d'appliquer le résultat obtenu pour les fractions, ils concluent que les points M' et N' peuvent être rendus aussi voisins l'un de l'autre que l'on veut ; il suffit alors de prendre des valeurs décimales de $\sqrt{3}$ de plus en plus approchées, 1,732 ; 1,733...

I.16 QUEZANNE - REVUZ(1968) (Annexe LI)

Ces auteurs consacrent un chapitre à une approche intuitive des nombres réels. Ils définissent la graduation $Z/10^p$, avec p nombre entier, dont les extrémités sont respectivement les valeurs décimales approchées de 1/3 à 10^{-p} par défaut et par excès. Cela donne aux auteurs une autre idée pour encadrer racine de 2. Ils considèrent qu'il est possible de définir, pour tout entier p, une racine carrée approchée à 10^{-p} par défaut, qui est le nombre $a/10^p$ défini, pour 2, par : $(a/10^p)^2 < 2 < ((a + 1)/10^p)^2$ Ils construisent deux suites adjacentes qui permettent d'appliquer le théorème des segments emboîtés. Ce théorème se déduit de l'axiome de la borne supérieure de R.

Ainsi, nous pouvons nous demander si les notions liées aux nombres réels que nous trouvons dans cet ouvrage destiné aux élèves de troisième, relève d'une réelle transposition didactique, comme cela a été longtemps le cas chez de nombreux auteurs, ou si ces notions ne relèvent pas tout simplement du savoir savant ?

Ce qui est adapté est l'axiomatisation de cet ensemble puisque les auteurs admettent les principales propriétés de R qui font de $(R,+,\times)$ un corps commutatif totalement ordonné. Cette approche, nous la retrouvons avec les justifications de l'introduction des nombres réels en classe de quatrième dans un exposé de Dehame (1970).

Les auteurs en déduisent alors la propriété d'Archimède dans R. Vient alors un théorème que nous n'avons pas eu l'habitude de rencontrer jusqu'à présent, et qui concerne l'image d'un segment par une projection b).

Ils passent alors à l'étude du théorème de Thalès qui n'est qu'une application de tout ce qui précède. La démonstration du théorème de Thalès (14,c) est fondée sur le théorème des segments emboîtés dont les suites de segments définissent chacune un et un seul nombre réel et sur la croissance de la projection.

A un vecteur, ils associent systématiquement un bipoint. Le théorème de Thalès est appliqué dans ce contexte, pour démontrer un résultat lié à la géométrie vectorielle de distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de deux vecteurs. Il intervient ici en tant qu'outil et non plus en tant qu'objet. Une transaction entre un objet dit "ancien" le théorème de Thalès et un objet nouveau, les vecteurs et leurs propriétés, se produit. Le théorème de Thalès n'intervient plus dans les démonstrations. Il en est de même pour la trigonométrie, dont les fonctions sont déduites de l'étude du demi-cercle trigonométrique et de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Le théorème de Thalès perd de son influence et de son importance. Il n'est plus alors le point central des mathématiques du collège à tel point que certains auteurs vont jusqu'à le prendre pour axiome, ou d'autres jusqu'à le déduire des propriétés d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.

Le théorème de Thalès est utile pour démontrer la linéarité de la projection vectorielle. Pour cela ces auteurs se ramènent à des représentants de ces vecteurs sous forme de bipoints. Un nouvel énoncé du théorème de Thalès faisant apparaître les quotients de deux vecteurs, est alors rédigé.

I.17 La réforme de 1969

Dans le programme de la seconde A, le théorème de Thalès vient à la toute fin du texte. Il ne permet plus d'introduire l'homothétie affine. L'obsolescence interne n'est plus assurée. Le théorème de Thalès disparaît même du programme de la seconde C. Seule subsiste la multiplication d'un vecteur par un réel. A partir de la réforme de 1969, les aspects axiomatisation et modélisation sont privilégiés.

Dans l'ouvrage Mauguin (1969) (Annexe LII 1), la symétrie centrale remplace les cas d'égalité de triangles, mais les propriétés de cette transformation sont obtenues grâce au même raisonnement sur les figures. Le résultat lié au centre de symétrie d'une bande est fondamental dans les démonstrations qui suivent, en particulier en ce qui concerne les droites parallèles équidistantes. Il semble que les cas d'égalité des triangles disparaissent de l'enseignement secondaire à partir de cette époque. Aucune tentative de leur réintroduction n'a été entreprise jusqu'à ce jour. Seuls quelques articles vantent leur légitimité (Baucry, 1991).

Bien que publié en 1971, l'ouvrage Queysanne Revuz (Annexe LII 2) n'est pas concerné par le changement de programme qui entre en vigueur à la rentrée 1971 - 1972. Les auteurs définissent la projection parallèle dans le plan. Mais pour démontrer que le projeté d'un segment est un segment, ils se munissent d'un axiome.

Il est intéressant de nous référer au 2$^{\text{ème}}$ groupe d'axiomes, n°4 de l'ouvrage publié par Hilbert (1899) (II,4). En effet ce mathématicien exprime d'une autre façon exactement la même chose. D'une façon intuitive, il nous dit après l'énoncé de l'axiome :

> "Si une droite entre dans un triangle, elle en sort."

Dans la démonstration de la propriété 2, pour démonter que l'image d'un segment est effectivement un segment, il faudrait rajouter la démonstration du fait que si deux points M' et N', images respectives des points M et N par la projection en question, sont pris dans le segment [A'B'], alors le segment [M'N'] est inclus dans le segment [A'B'].

Ils donnent ensuite une définition des graduations décimales et de la droite graduée équivalente à la version 1968. La conservation du milieu d'un segment par projection parallèle permet alors de démontrer sans difficulté que toute graduation décimale de rang n sur D se projette en une graduation décimale de même rang n sur D'. Vient alors l'énoncé du théorème de Thalès.

Pour le démontrer dans la version (C.A), les auteurs partent d'un encadrement décimal de l'abscisse de M. Ils obtiennent ainsi une suite numérique de segments emboîtés aux extrémités desquels sont associés les points correspondants. Ces points sont projetés et ont la même abscisse que les antécédents. Ils ont alors la même suite de segments (numériques) emboîtés, ce qui permet de conclure, grâce à l'unicité de la limite, que l'abscisse du point M' appartenant à tous ces segments est la même que celle du point M.

I.18 Les années 1971à 1978

I.18.1 Programmes (Annexe LIII 1)

Jusqu'en 1970, les modifications de programme ne faisaient apparaître que des changements de structure de l'enseignement. Ce n'est pas le cas avec ces nouveaux textes dans lesquels l'esprit des mathématiques modernes domine. Avant 1970, la géométrie même démonstrative s'appuyait sur l'expérience et sur l'observation de figures. A partir de ces nouveaux programmes, les déductions ne sont plus faites, en principe, à partir d'observations et de constructions. Mais une certaine contradiction demeure. D'après Chevallard et Joschua (1982), les objets ne sont plus réellement étudiés, mais le travail porte plus sur la construction du cadre de cette nouvelle géométrie. Les instructions précisent, en ce qui concerne notre sujet :

> "La propriété de Thalès apparaît comme un axiome et non plus comme un théorème."

Il relie en fait les structures des droites du plan et est enseigné au début du cours de géométrie de quatrième. Ces nouveaux programmes sonnent définitivement le glas des triangles semblables et des relations métriques dans le triangle rectangle. Au niveau de la chronogenèse de la propriété de Thalès, il n'intervient plus dans la définition des lignes trigonométriques, le cosinus étant introduit en classe de troisième par l'intermédiaire de l'étude du cercle.

I.18.2 BREARD (1971), VISSIO (1971)

Le point de vue adopté dans la collection Bréard (Annexe LIII 2) est l'algèbre linéaire qui nécessite de connaître les notions de relation, de fonction, de bijection, de nombres réels, d'opération interne, de groupe et d'opération externe. Par exemple, le premier chapitre traite des espaces vectoriels et donne les axiomes de ces espaces et leurs conséquences immédiates. Le chapitre suivant s'intitule *Plan vectoriel*, et donne les axiomes du plan et introduit ensuite les notions de parallélisme, de direction et de projection.

Le troisième chapitre introduit la droite réelle sachant que l'axiome de bijection est implicitement admis ; sont définis alors la droite graduée, le repère ; l'abscisse d'un point, les changements de repère ; le bipoint, le théorème de Chasles etc.

Les trois derniers chapitres concernent l'étude du plan affine réel qui nécessite deux nouveaux axiomes que sont l'axiome de la droite réelle affine et l'axiome du rapport de projection qui est en fait le théorème de Thalès pris ici pour axiome. Une construction d'une bijection du plan sur R^2 est alors proposée. Après ces deux axiomes du plan affine réel, il établit l'équipollence du plan et de R^2. Il utilise pour cela deux droites de Π sécantes. Grâce à une bijection, il met en place une bijection du plan sur R^2 qui, à un point M, associe ses coordonnées. Nous pouvons remarquer que dans l'énoncé du théorème de Thalès (17.13), il s'agit d'une application directe de l'axiome de Thalès, ou en quelque sorte une nouvelle forme de cet axiome.

Dans Vissio (Annexe LIII 3), le cours sur les translations débute par une expérimentation concrète du glissement à l'aide d'une maquette. Les définitions de la translation des bipoints équipollents et des vecteurs suivent ensuite. Le produit par un nombre réel est bien sûr admis. La structure de groupe que confère cette définition de somme de deux vecteurs à l'ensemble des vecteurs du plan est admise ; de même que les propriétés de distributivité, de multiplication d'un vecteur par un nombre réel et autres qui permettent de donner à cet ensemble une structure d'espace vectoriel sont également admises comme axiomes.

Ces auteurs s'écartent en cela de l'axiomatique et de la structure du cours préconisées par le programme. En effet, le théorème de Thalès (§2 IV Géométrie) précède l'étude des vecteurs (§3 IV Géométrie) dans les instructions du programme officiel. Cette théorie permet de démontrer le théorème de Thalès et sa réciproque grâce au calcul vectoriel. Viennent ensuite les applications de ces résultats à des problèmes de construction qui s'énoncent d'une manière quelque peu différentes que ce que nous avons pu rencontrer jusqu'à présent comme le montrent les exemples suivants :

> "Construire C tel que $\overline{A}\vec{B} = n.\overline{A}\vec{C}$ "ou construire $Bar\big((A,a)(B,b)\big)$ avec $a+b \neq 0.$"

I.18.3 QUEYSANNE et REVUZ (1973), MONGE, PECASTAINGS (1974)

Queysanne et Revuz (Annexe LIII 4) commencent par étudier la droite réelle en en donnant une définition. Trois axiomes d'incidence sont alors posés pour permettre l'étude des droites parallèles et sécantes. Pour le théorème de Thalès, une construction de la droite euclidienne est produite par ces auteurs. Ils tentent de démontrer mais en fait ils admettent indirectement qu'il existe une famille de bijections g de la droite (D) sur R telles que pour deux quelconques de ces bijections g et g' et pour tout point M de la droite (D), il existe deux réels a et b tels que g'(M) = ag(M) + b. Les auteurs de cet ouvrage définissent ensuite une distance associée à une graduation avant d'énoncer l'axiome de Thalès (19), $P_2)$.

Le théorème de Thalès ou la propriété devient ici un axiome. Mais la forme axiomatique de ce théorème n'est pas plus dérangeante que le fait d'admettre des axiomes nécessaires à sa démonstration.

La "réciproque" de l'axiome de Thalès, qui est le théorème qui suit l'axiome $P_2)$ de Thalès, est assurée par cet axiome de Thalès et par le fait que la graduation est une application bijective. La conservation de la barycentration de deux points par projection intervient ensuite au paragraphe 2. Le problème consistant à partager un segment dans un rapport donné est alors transformé en la construction graphique du barycentre de deux points.

Il est montré ensuite, grâce à l'axiome de Thalès, qu'étant choisies deux graduations sur deux axes et une projection p de l'un sur l'autre, il existe un nombre réel k, appelé rapport de projection, tel que quel que soit le couple de points (M,N) d'un axe, on a : $\overline{p(M)p(N)} = k \times \overline{MN}$.

Les cas d'incommensurabilité et de commensurabilité n'ont plus lieu d'être puisque les nombres réels sont supposés exister. Cet objet se résume comme étant un outil indispensable à un moment donné à la construction du plan mais qui ne suffit plus pour étudier d'autres notions comme celles de produit scalaire ou d'orthogonalité. L'obsolescence du savoir est liée à la présentation axiomatique de ce résultat et est donc assurée par justement la carence d'axiomes, liés aux projections orthogonales, qui permettent de définir le plan euclidien.

De plus, cette réforme influe également sur la topogenèse, c'est à dire les places respectives occupées, par rapport au savoir, par l'enseignent et l'enseigné. La théorie est entièrement construite par le professeur, sans qu'il y ait une réelle dévolution d'un quelconque problème, l'apprenant n'ayant juste à vérifier que cette théorie est complète ou incomplète pour décrire tel objet du plan physique. Nous nous trouvons en fait dans un enseignement ostensif complet.

Dans le paragraphe consacré à l'axiome de Thalès, Monge et Guinchan (Annexe LIII 5) se placent, comme il est courant de le faire à cette période, dans le plan physique, et étudient les points d'abscisses entières et leurs projections. Les mesures algébriques sont alors envisagées. La suite de l'axiome de Thalès ressemble à ce que nous avons déjà pu rencontrer dans l'ouvrage précédent. Nous retrouvons la méthode dans Mauguin(1975) (Annexe LIII 7).

I.18.4 GIRARD, GERLL, COHEN, GERL (1975)

Dans l'ouvrage de Girard (Annexe LIII 6), nous nous trouvons dans une présentation exactement inverse de celle que nous avons pu rencontrer dans l'ouvrage de Queysanne et Revuz (1971) où tous les axiomes qui précèdent (les quatre premiers, joints au fait que l'espace en question muni de l'addition est un groupe abélien, permettant de dire que nous avons un espace vectoriel) étaient démontrés en fait grâce au théorème de Thalès. Ils s'écartent en cela de la ligne tracée par les programmes en vigueur.

Pour démontrer le théorème de Thalès, les auteurs donnent les abscisses x, y, z des points M, N et P et d'après le paragraphe précédent, ils concluent que les points M', N ' et P' ont pour abscisses respectives x, y et z. Ainsi les longueurs algébriques MN et M'N' sont égales (à y-x) et de même pour les longueurs algébriques MP et M'P'. Ils en déduisent évidemment les égalités de deux rapports annoncées.

I.19 Les années 1978 à 1989

I.19.1 Programmes de 1978 (Annexe LIV 1)

Dans ces nouveaux programmes apparaît un changement d'état d'esprit dans le sens où les axiomes sont largement évités. Le vocabulaire est allégé et la géométrie plane dite euclidienne est réintroduite en classe de quatrième. Les espaces vectoriels n'ont plus la même importance en classe de seconde. L'énoncé de Thalès n'est plus considéré comme un axiome mais redevient une propriété démontrée.

Mais à la différence du théorème, ici, la propriété n'est pas forcément démontrée de façon rigoureuse. Pour le théorème de Thalès, le rapport de projection subsiste, mais il est restreint à la projection orthogonale. De plus l'application de ce résultat aux triangles n'est plus inscrite dans les programmes. Il n'y a plus de construction des réels et la bijection qui lie ces nombres à la droite est explicitement évoquée mais préconstruite.

Entre la ligne consacrée au théorème de Thalès et celle réservée au théorème de Pythagore, se trouve mentionnée une ligne « rapport de projection orthogonale ». Cette notion sert de transition entre les deux théorèmes importants. En effet, une fois établie la symétrie du rapport de projection orthogonale d'une première droite graduée sur une seconde, peuvent être établies les relations métriques dans le triangle rectangle dont, en particulier, le théorème de Pythagore. Le cosinus peut alors être introduit de la même façon, grâce au rapport de projection orthogonale.

Ainsi ces nouveaux programmes de 1978 assurent à nouveau au théorème de Thalès, qu'ils précisent être une notion ou une propriété fondamentale, une place centrale en géométrie. Le produit d'un vecteur par un nombre réel permet par la suite, de le dépasser par l'homothétie et le barycentre, la dialectique ancien-nouveau et le vieillissement interne, indispensable à l'assimilation d'un concept, s'en trouvant ainsi renforcés.

I.19.2 MONGE (1978), BLAQUIERE

Monge (Annexe LIV 2) admet l'existence de R comme étant l'ensemble de nombres permettant de mesurer toutes les longueurs. Mais cet ensemble n'est plus construit comme dans le programme de 1971. Après vérification sur un exemple pratique, les auteurs admettent la propriété de Thalès. Grâce à des calculs sur les fractions, les auteurs en déduisent un résultat qui concerne l'égalité de deux rapports qui sont formés à l'aide de longueurs algébriques de segments "disjoints". S'en suivent les applications à la projection du milieu d'un segment, l'application au triangle et l'établissement de la réciproque de la propriété de Thalès.

Vient alors un long paragraphe sur l'établissement de la multiplication d'un vecteur par un réel. Ils appellent vecteur toute classe d'équivalence pour la relation d'équipollence. La multiplication d'un vecteur par un nombre réel se démontre ici comme cela a été fait dans l'ouvrage de 1974 mais, dans le premier cas, en remplaçant les égalités de vecteurs par l'équipollence.

En ce qui concerne la dialectique ancien-nouveau, dans la continuité de l'étude de ce théorème de Thalès qui s'exprime ici avec des mesures algébriques, nous trouvons dans les programmes la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. L'ouvrage que nous étudions développe en effet la multiplication d'un vecteur par un scalaire de façon à établir les quatre axiomes des espaces vectoriels. En classe de seconde, ces résultats permettent l'introduction et l'étude de l'homothétie et du barycentre. Ainsi, le vieillissement du théorème de Thalès, son obsolescence interne est assurée et est parachevée en classe de première avec l'étude des espaces vectoriels.

Dans l'ouvrage du niveau quatrième de Blaquière (Annexe LIV 3), le livre du professeur, ces auteurs expliquent l'introduction des nombres réels dès le début du cours, même s'ils considèrent que cela n'est pas utile. Nous voyons bien que ces nombres, même s'ils ne sont pas nommés, sont pleinement caractérisés.

En ce qui concerne le théorème 1 sur le projeté d'un segment, il ne s'agit que d'une lecture du dessin. Etre entier dans un demi-plan n'est pas une notion définie mathématiquement par les auteurs. Le fait que le point m appartienne au segment [ab], ne résulte pas non plus de l'application d'un théorème ou d'une définition. Même si tous les outils théoriques ne sont pas donnés par des auteurs précédents comme Queysanne, l'avantage est au moins que des axiomes du continu, qu'une approche des nombres réels, de la croissance de l'application projection permet de démontrer ce même résultat sans exclusivement avoir recours au visuel.

Dans un ouvrage de 1980, la démonstration se scinde en trois parties. Tout d'abord, les auteurs cherchent l'image d'un point ayant une abscisse entière sur D. De proche en proche, d'après le théorème précédent sur la projection du milieu d'un segment, le résultat est rapidement obtenu. En second lieu, ils recherchent l'image d'un point ayant pour abscisse sur D un nombre décimal. Ils considèrent tout d'abord que l'abscisse de ce point ne comporte qu'un chiffre après la virgule. Ils partagent ainsi en 10 parties égales le segment auquel appartient le point M en question. Le segment projeté est aussi partagé en 10 parties égales. Et le point M' appartient à la même subdivision que celle à laquelle appartient le point M sur D. Lorsque l'abscisse est supposée avoir deux chiffres après la virgule, le partage se fait en 100 parties égales. Et le raisonnement est identique au précédent. Le dernier cas envisagé est celui d'une abscisse réelle r. Dans ce cas, il est dit que le point M peut être encadrés par deux points dont les abscisses représentent une valeur approchée de r aussi proche que l'on veut. Les projections des deux points dont les abscisses sont décimales sont deux points dont les abscisses sont respectivement égales aux précédentes. Les auteurs admettent alors que ce résultat demeure pour l'abscisse réelle puisqu'il est vrai quelle que soit la valeur approchée de r.
Hormis l'emploi des projections, nous retrouvons la méthode utilisée au début du siècle par Borel et plus tard par Itard et Leconte (1940), Itard et Huisman (1964).

I.19.3 POLLE (1980), AGUADO (1980), GALLION (1980)

Dans Polle (Annexe LIV 4) la symétrie centrale et les translations sont des moyens pour démontrer de nombreuses propriétés. Les auteurs définissent la multiplication d'un vecteur par un nombre rationnel (II). Les trois démonstrations des propriétés dites des espaces vectoriels sont faites, à partir de cas génériques, à l'aide de cette définition. Une fois les propriétés liées aux rationnels démontrés et après avoir défini la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, les auteurs précisent qu'elles restent vraies dans le cas réel. Ils introduisent ensuite les notions de coordonnées de vecteurs et de vecteurs indépendants. Vient alors le théorème de Thalès vectoriel (IV). Le théorème réciproque fait l'objet de plusieurs tentatives et versions possibles pour finalement aboutir à l'énoncé suivant :

> Si A, B et C sont trois points d'une droite A', B', C' trois points d'une autre droite tels que :
> $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k.\overrightarrow{A'B'}$ alors les droites (AA') et (CC') sont parallèles.

Pour démontrer ce résultat, les auteurs utilisent le théorème direct et les projections afin de démontrer que deux points sont confondus et conclure ainsi que deux droites sont parallèles.

Au chapitre II, Aguado (Annexe LIV 5) donnent tout d'abord la définition de la multiplication d'un vecteur par un réel. Un vecteur AB multiplié par un nombre réel k est défini par le point M tel que les points A, B, et M soient alignés et que les longueurs algébriques AM et k.AB soient égales. Les cas particuliers ou k est égal à 0, 1, ou -1 sont donnés ensuite. Les trois autres propriétés qui correspondent en fait aux axiomes des espaces vectoriels, ceux des groupes abélien exclus, sont démontrées en donnant à chaque vecteur un représentant et à chaque représentant la longueur algébrique correspondante. Sont alors admises l'associativité de la multiplication dans R, la relation de Chasles pour les valeurs algébriques, l'associativité et la commutativité de la somme de vecteurs.

Dans le chapitre suivant, les auteurs définissent les triangles homothétiques comme ayant un sommet en commun et vérifiant trois égalités vectorielles :

$$\overline{A}\vec{B}' = k.\overline{A}\vec{B}, \overline{A}\vec{C}' = k.\overline{A}\vec{C}, \overline{B}'\vec{C}' = k.BC.$$

Ils démontrent facilement alors, à partir de ces égalités que les droites (BC) et (B'C') sont alors parallèles. Ils passent ensuite des égalités vectorielles aux égalités de longueurs algébriques.

L'énoncé de ce qui est ici appelé le théorème de Thalès ne vient qu'au paragraphe (II) suivant. Dans la démonstration de ce théorème, un premier cas traite les droites Δ et Δ' parallèles. Il s'agit alors de parallélogrammes et les trois rapports algébriques sont égaux à 1. Dans le second cas, les deux droites précédentes sont sécantes. Trois droites, (AA'), (BB'), et (CC'), parallèles à d et coupant Δ et Δ' sont alors envisagées. Deux triangles homothétiques sont alors mis en évidence, ce qui permet d'écrire plusieurs égalités de rapports algébriques.

Dans Gallion, les vecteurs sont introduits dans un chapitre dans lequel ils sont définis par les longueurs égales, les droites à supports parallèles et de même sens. La multiplication n'est envisagée que dans le cas entier et rationnel sur des exercices génériques mais le cas réel est bien évidemment admis. Toutes les propriétés des espaces vectoriels sont supposées être vérifiées par les vecteurs ainsi définis. L'auteur obtient "facilement" par cette méthode la démonstration de son premier théorème de Thalès. Par contre, un vieillissement interne de cette propriété est clairement assuré par son utilisation dans l'introduction du sinus et du cosinus.

I.19.4 DELEDICQ (1984)

Quatre "activités préparatoires" précèdent le cours. La première, très classique, concerne un trapèze auquel les élèves doivent appliquer le théorème des milieux, pour parvenir à la "conservation" du milieu par projection. La seconde activité propose trois tableaux afin que l'élève puisse déterminer ceux qui correspondent à des tableaux de proportionnalité. La troisième activité concerne la construction de divers projetés de points sur une droite. La dernière activité consiste à placer quatre points sur une droite de telle sorte que des longueurs données soient respectées pour ensuite projeter ces points sur une autre droite parallèlement à une troisième. L'élève doit alors mesurer les longueurs des segments projetés et calculer des valeurs approchées des rapports.

> **Propriété : Enoncé de Thalès.** Soit une projection d'une droite d sur une droite d' selon une direction d''. Toute suite de mesures de segments sur d est proportionnelle à la suite des mesures des segments projetés sur d'.

Les auteurs énoncent ensuite la "réciproque" de cette propriété en utilisant les rapports formés de la longueur d'un segment et de son projeté. La démonstration est classique puisque partant de l'égalité supposée être vérifiée, une parallèle est tracée et d'après l'axiome il est déduit que deux autres rapports sont égaux. Une définition de deux triangles homothétiques est alors donnée. Un lien est fait entre cette définition est deux égalités vectorielles qu'elle engendre. En changeant les moyens à partir de l'égalité obtenue par application de l'axiome de Thalès, ces égalités sont vites obtenues. Ensuite, à partir de ces deux égalités vectorielles utilisant le sommet en commun des deux triangles homothétiques, par soustraction vectorielle de ces deux égalités, les auteurs aboutissent finalement à l'égalité de deux vecteurs qui ont pour support les deux côtés parallèles.

> " Cette propriété est une autre manière d'exprimer la propriété de la multiplication des vecteurs par un réel qui s'écrit : $k.\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right)=k.\overrightarrow{OM}-k.\overrightarrow{ON}$."

Le fait remarquable est que les deux approches, aspect projectif et triangles homothétiques, sont clairement différenciés en fin de cours grâce aux différents cas de figure. Nous retrouvons cette scission dans l'ouvrage Terracher (1989).

I.20 Programmes de 1989 (Annexe LV 1)

Depuis la mise en œuvre des programmes de 1989, plus aucune référence n'est faite aux nombres et l'étude du théorème en question se réduit au cas du triangle. La propriété de Thalès est maintenant appelée énoncé de Thalès ce qui sous-entend encore plus qu'une démonstration ne s'impose pas. Il se limite au triangle et s'applique aux problèmes de construction et à la notion d'agrandissement réduction. Nous pouvons nous rendre compte que cela non seulement perturbe la chronogenèse mais que l'utilisation du cosinus dans la "démonstration" du théorème de Thalès est un truisme, une vérité d'évidence.

Les commentaires faits sur les programmes de seconde de 1990 sont assez clairs. A aucun moment le mot de démonstration n'est employé. C'est dire que nous nous trouvons à un autre moment de changement crucial des programmes de mathématiques du secondaire. Peut être sous l'influence de la didactique, les mathématiques prennent une autre dimension liée au sens. L'esprit change également puisqu'apparaît une certaine forme utilitariste des mathématiques qui doivent servir dans la vie de tous les jours et dans d'autres disciplines, et peut être également pour la prise de sens dont nous venons de parler.

Les questions que nous nous posons sont de savoir ce que signifie "avoir du sens" ; ce que l'on peut considérer comme une activité mathématique qui donne justement du sens aux concepts ; le terme "outil", abondamment présent dans les textes, correspond-il, dans les programmes de 1998-1999, au concept didactique ? De toutes ces remarques, nous pouvons déduire l'apparition d'un nouveau contrat institutionnel (Chevallard, 1989 (b)).

I.20.1 SUCH DURRANDE (1989), ISTRA (1989), Fauvergue (1989)

Dans la mouvance de la fin des années 80, Such Durrande (Annexe LV 2) proposent une activité qui est censée introduire le théorème annoncé. Pour cela, il est donné un triangle et la question posée est simple :

> "Comment, par un simple coup de ciseaux, découper un modèle réduit de ce triangle?".

En fait aucune initiative n'est laissée dans cet énoncé même si le professeur dans la classe peut éventuellement demander de ne pas lire les instructions. Sous forme d'activité questions réponses, une solution est immédiatement proposée. Il est effectivement demandé aux élèves de mesurer différentes longueurs après avoir tracé une parallèle à un des côtés. La référence aux objets matériels est évidente.

L'exemple étudié pour démontrer le théorème de Thalès est supposé représenter les cas les plus généraux lorsque les longueurs sont commensurables. Pour le cas réel, rien n'est dit même au sujet du fait que dans ce cas le théorème est admis. La conservation des milieux par projection est employée pour démontrer ce cas particulier.

La réciproque est abordée à travers une "activité" dans laquelle seules les mesures sont données. Deux cas sont proposés ; ces deux cas correspondent à ceux qui interviennent dans l'énoncé de cette réciproque. Aucun contre-exemple, même visuel, n'est donné pour montrer l'importance de la position relative des points B' et C' dans la démonstration de cette réciproque.

Les applications demeurent très classiques même si nous ne les retrouvons pas toutes : construire une quatrième proportionnelle, construire un point d'abscisse donné, partager un segment dans un rapport donné.

Dans Istra (Annexe LV 3), le premier théorème qui est supposé connu est démontré grâce au théorème des milieux et à la "conservation" du milieu par projection. Sur un exemple, dans une activité 2 où deux côtés d'un triangle sont découpés par six parallèles, l'égalité de trois rapports est montrée. Puis vient la démonstration qui se veut générale à travers l'activité 4. La méthode de démonstration du théorème de Thalès part tout d'abord du théorème des milieux pour démontrer le résultat mais pour des longueurs entières.

Le cosinus sert ensuite à démontrer le résultat en général. Il s'agit d'une rédaction assez ancienne qui ne donne pas les rapports égaux explicitement, le choix est donc possible. Nous nous trouvons devant une version du théorème de Thalès où la proportionnalité est interne. La proportionnalité externe va apparaître à travers l'activité 5. En effet, dans cette activité, les auteurs se proposent de démontrer le théorème suivant :

> "Dans un triangle, toute parallèle au support d'un côté forme, avec les supports des deux autres côtés, un nouveau triangle. Les côtés de ce nouveau triangle sont proportionnels à ceux du premier triangle."

La démonstration demeure classique, puisqu'une parallèle à un second côté est tracée, ce qui permet d'appliquer par deux fois le résultat précédent. Dans l'ouvrage Terracher(1993), par contre, cette double approche n'intervient pas. Seule la proportionnalité des côtés des deux triangles est institutionnalisée. De plus la démonstration, dans ce cas, diffère quelque peu de ce que nous venons de voir. Par des manipulations algébriques, les auteurs parviennent à l'égalité voulue. Les applications sont les mêmes que précédemment.

Les auteurs de la collection Mistral commencent par une activité introductrice faisant intervenir une piscine et ses lignes d'eau. A travers cet exemple dit concret, ils tentent de montrer une propriété concernant des parallèles équidistantes. Mais seule une lecture de la figure qui modélise la situation est demandée. Une activité reprend les parallèles équidistantes mais dans le triangle. Sur un côté AB du triangle, 7 segments consécutifs de même longueur sont indiqués. Le point B' est placé sur le troisième. Des parallèles sont classiquement tracés et on obtient ainsi le point C'. Les questions concernent bien sûr les valeurs de plusieurs rapports qui sont lues sur les dessins.

Le résultat obtenu est "démontré" dans une autre activité grâce au cosinus. Cette démonstration est strictement identique à celle que nous avons rencontrée dans l'ouvrage de la collection Istra. Admettre que pour deux triangles rectangles ayant un angle égal à un angle, et par conséquent tous les angles égaux, les rapports du côté adjacent sur l'hypoténuse de chaque rectangle sont égaux, c'est justement admettre le théorème de Thalès.

> "**Théorème de Thalès relatif au triangle.** Dans un triangle, toute parallèle à un côté fait apparaître des segments sur chacun des deux autres côtés. Le quotient des longueurs de deux segments portés par l'un des côtés est égal au quotient des longueurs des segments correspondants portés par l'autre côté." **Sigle : (D.P.C.T)**

> "**Triangle à côtés proportionnels.** Dans un triangle, toute parallèle au support d'un côté forme, avec les supports des deux autres côtés, un nouveau triangle. Les côtés de ce nouveau triangle sont proportionnels à ceux du premier triangle."

I.20.2 PYTHAGORE Coll (1989)

Cet ouvrage commence par la citation d'un passage d'un ouvrage de Jules Verne dans lequel il s'agit d'utiliser les rayons du soleil et un bâton pour mesurer la hauteur d'une falaise inaccessible. Dans l'activité 2, la propriété partielle, c'est à dire qui ne concerne que les longueurs latérales et qui est la seule pour laquelle est proposée ici une démonstration, est établie dans le cas particulier du triangle rectangle. La démonstration se fonde, en partie, sur la démonstration d'Euclide avec l'algèbre et les expressions des aires en particulier en plus.

La démonstration fait ensuite appel au cosinus qui a été vu en classe de quatrième. Elle se poursuit dans un triangle quelconque grâce au tracé d'une hauteur de ce triangle qui fait apparaître deux figures dans lesquelles il est possible d'appliquer le résultat précédent. Le cas de la figure "papillon" est traité ensuite.

Dans la boîte à outils, la réciproque fait explicitement référence à la lecture de trois types de dessins pour lesquels cette réciproque s'applique, sans insister sur l'ordre des points. Les activités se terminent par la mise en évidence des coefficients d'agrandissement des aires et des volumes.

Les interventions de ce théorème en tant qu'outil que nous pouvions escompter ont disparu des ouvrages, et ce pour plusieurs raisons. D'une part, pour certains résultats, il n'est plus possible de faire intervenir le théorème de Thalès pour les démontrer, puisque leur étude se situe en classe de quatrième. C'est le cas pour le théorème de Pythagore, pour le cosinus. Mais nous pourrons voir, à partir de 1998, que même la présence simultanée du cosinus et de la propriété de Thalès dans le programme de la même classe ne change pas la situation.

En ce qui concerne l'équation d'une droite, aucun ouvrage n'utilise la propriété de Thalès pour l'établir. Seules des applications à l'espace et le réinvestissement de cette propriété aux cônes de révolution et aux pyramides apparaissent.

Le découpage des cours, entre la quatrième et la troisième, sont tels que la dialectique ancien/nouveau, le vieillissement interne du savoir ne peuvent plus s'opérer, sauf éventuellement avec l'introduction de l'homothétie au Lycée en classe de première. Nous pouvons craindre alors que ce résultat soit dans une phase de vieillissement historique ou externe.

I.20.3 IREM Strasbourg (1989), Terracher (1989)

Les activités proposées dans l'ouvrage IREM ne sont pas utilisées pour introduire une nouvelle notion ou un nouveau théorème, mais pour simplement appliquer un nouveau résultat. Les théorèmes sont admis. Viennent ensuite les applications classiques à des constructions. Les auteurs proposent de démontrer trois égalités qui concernent les segments déterminés par une parallèle à un côté d'un triangle et coupant les deux autres côtés. La réciproque de ce théorème est démontrée grâce au résultat obtenu par construction des points qui divisent un segment dans un rapport donné.

Une activité liée aux projections et consistant dans un premier temps à partager un segment en trois parties de longueurs égales est tout d'abord proposée dans Terracher. Un tableau mettant en évidence les deux côtés non parallèles des triangles fait intervenir l'approche projective. Et un autre tableau de proportionnalité concernant les trois côtés des triangles distingue le côté homothétie. L'énoncé final ne limite pas la proportionnalité à des égalités de rapports :

> "Dans la configuration de deux triangles, les côtés sont proportionnels aux côtés associés de l'autre."

Notons que cette double approche, projection/homothétie, est abandonnée dans la version 1993. La plupart des ouvrages scolaires de cette époque et également ceux utilisés actuellement énoncent le théorème de Thalès sous la forme d'égalités de rapports sans préciser que cela doit être relié à la proportionnalité.

I.20.4 Transmath (1989), Transmath (1993), Terracher (1993)

La démonstration de l'égalité des deux rapports obtenus avec les segments définis par deux parallèles est effectuée grâce au cosinus. L'égalité du troisième rapport est admise comme une conséquence. Une activité pratique mettant en évidence l'importance des positions relatives des points pour avoir le parallélisme est simplement proposée en guise de justification de l'énoncé de la réciproque.

Dans l'ouvrage de 1997, une activité de mesure de longueurs sur trois "figures types" de Thalès est tout d'abord proposée. Il s'agit pour les élèves de mesurer quatre longueurs et de vérifier, avec la calculatrice, que les quotients AM/AB et AN/AC sont proches l'un de l'autre.
Le cas de la figure papillon n'est pas envisagé dans cette démonstration et est admis. Pour obtenir les égalités des trois rapports, le dernier étant celui formé par les longueurs des segments pris sur les deux parallèles, les auteurs tracent une seconde parallèle afin d'obtenir un parallélogramme. Deux applications du résultat précédent permettent de conclure. Les applications suivent alors : partager un segment dans un rapport donné, représenter la quatrième proportionnelle, calcul de la hauteur d'un arbre.

Le théorème réciproque est admis. Seule une activité faisant apparaître l'importance de la position relative des points les uns par rapport aux autres, est mise en place. Les côtés sont partagés en parties égales et le prolongement de l'un également. Les rapports indiqués sont égaux sans que les droites soient parallèles. La version du théorème direct est celle liée à l'homothétie et seulement celle-là.

Les auteurs de Terracher commencent par un rappel sur la projection du milieu d'un segment, résultat vu en classe de quatrième. Puis, dans un premier temps, le côté BC d'un triangle en partagé en 4 et des points de subdivision sont tracées des droites parallèles à un autre côté de ce triangle. Par une application successive du théorème des milieux, les élèves sont censés démontrer une égalité de rapports. Deux cas de figures sont envisagés. Pour le cas dit général, la perpendiculaire aux deux parallèles et passant par le sommet opposé est tracée et il est demandé aux élèves de justifier des égalités de rapports. Seul le cosinus est en fait à leur disposition. Pour le rapport des longueurs de segments situés sur les deux parallèles, un projeté est construit. La démonstration est ensuite classique. Vient ensuite une illustration du résultat dans le cadre de la mesure de la hauteur d'une pyramide.

La réciproque est admise. Ce qui différentie cette publication de la précédente (1989), c'est qu'un énoncé utilisant les projections n'est plus apparent ici. Certes deux formes d'expression de la proportionnalité sont encore citées, l'une rédigée en une phrase en français l'autre faisant apparaître des égalités de trois rapports, mais l'aspect projectif disparaît complètement.

Synthèse XX ème siècle

La démonstration du théorème (D.P.C.T), problématique et perspectives mathématiques :

Pour démontrer le théorème (D.P.C.T), Bos utilise la même méthode que F.I.C par approximation à 1/n d'un rapport. Mais pour trouver la commune mesure à deux segments, il change de méthode et emploie celle de Blanchet sur les résidus rendus aussi petits que l'on veut. Grévy (1909), qui emploie pour la première fois des valeurs algébriques dans l'énoncé de ce théorème, fonde sa démonstration sur une approximation mais la particularise au cas 1/6.

Les longueurs algébriques sont également employées dans l'énoncé et la démonstration de la réciproque mais cela ne résout pas le problème de lecture sur les dessins pour les alignements dans un certain ordre des points.

En 1905, les programmes prévoient officiellement de faire référence au concret et aux propriétés observés sur les dessins. Des auteurs comme Bourlet, Fort et Dreyfus, remplacent des notions trouvées dans les Eléments d'Euclide par les déplacements en particulier en ce qui concerne les droites parallèles qui sont introduites par les translations glissières. Bourlet, par exemple, reprend la démonstration de Lacroix, mais les translations glissières permettent de supprimer des propositions.

Souvent, la démonstration n'est faite que dans le cas commensurable. Borel modernise les Eléments d'Euclide en introduisant les symétries, les rotations et les translations. La démonstration du théorème de Thalès est fondée sur les transformations du plan. Même le principe d'égalité par superposition est revisitée par la symétrie axiale.

Pour démontrer le théorème (A.B.P) Borel utilise la méthode que nous avons rencontrée dans Clairaut. Dans le cas rationnel, il fait une démonstration sur un cas générique et dans le cas irrationnel, il divise un segment en 10, 100, 1000 parties égales pour obtenir une approximation du rapport au dixième, centième ou millième près. Pour généraliser, il utilise implicitement l'idée que deux grandeurs sont égales si toutes leurs valeurs approchées le sont. Dans sa version du théorème (A.S), deux types de proportionnalités, interne et externe, sont présents.

Niewenglowski parle explicitement d'application du théorème de Thalès pour la mesure de distances inaccessibles par l'intermédiaire d'une représentation de la situation.

A partir de 1925, les programmes s'éloignent du concret et reviennent aux démonstrations. Le mouvement est abandonné. Les transformations ne sont plus au goût du jour.

Esteve et Mithault rédigent un théorème à l'aide de rapports de vecteurs. Mais les difficultés sont les mêmes qu'avec les mesures algébriques. L'expression théorème de Thalès apparaît dans les programmes en 1938. L'approche avec les projections date également de cette année.

Itard et Leconte emploient la même méthode que Vallory pour démontrer le théorème (B.P). Ils encadrent et passent à la limite tout en admettant le cas général. Le théorème de Thalès en est déduit ensuite. De nombreux auteurs adoptent cette démarche à cette époque. Les programmes de 1941 redeviennent concrets comme ceux de 1959 et ceux qui suivent d'ailleurs. Les vecteurs sont employés par Brachet et Dumarque, Camman et d'autres.

Dubreil revient à une démonstration utilisant les cas d'égalité des triangles sans les transformations. Cet auteur utilise en fait la méthode d'approximation de rapports de mesures de longueurs à 1/n près mis à part qu'il parle lui de rapports de vecteurs.

Le type de démonstration de Camman a déjà été trouvé dans l'ouvrage de Lacroix. Le théorème réciproque est donné grâce aux mesures algébriques.

Dans Dollon et Gilet, nous retrouvons le théorème des parallèles équidistantes de Lacroix et Bezout. Le théorème de Thalès, dans le cas incommensurable est démontré grâce à la méthode que nous avons déjà rencontrée dans Combette ou Vacquant.

Dubreil part de l'égalité de deux vecteurs pour démontrer la réciproque du théorème de Thalès mais cela n'évite qu'en apparence la position relative des points en question, car tout ce qui concerne les vecteurs est également lu sur le dessin.

Itard et Huisman (1964) utilisent la méthode d'encadrement pour démontrer le théorème de Thalès. En ce début des années 1960, nous pouvons observer un retour à l'utilisation des transformations du plan pour démontrer ce théorème. Mais de nombreuse propriétés à leur sujet sont admises. Huisman Itard (1967) utilisent les propriétés, qui sont admises, de la linéarité des projections et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel pour démontrer le théorème de Thalès.

Durrande démontre la linéarité de la projection par encadrement pour en déduire aussi le théorème de Thalès en rendant des points aussi voisins que l'on veut dans le cas où le rapport est irrationnel.

Dans Queysanne et Revuz (1968), le théorème de Thalès se fonde sur les suites de segments emboîtés qui définissent un seul réel et sur la croissance de la projection. En 1969, les transformations du plan sont privilégiées. Mais les propriétés liées par exemple aux symétries centrales qui remplacent les cas d'égalités des triangles dans la démonstration du théorème de Thalès font toujours appel à des lectures sur les dessins.

Dans Mauguin, le théorème sur les parallèles équidistantes est présent mais il est démontré grâce aux symétries centrales et non plus avec les égalités de triangles comme dans Lacroix. Les cas d'égalité des triangles ne sont plus utilisés dans la démonstration du théorème de Thalès depuis cette époque.

En 1971, Queysanne et Revuz énoncent un axiome de Pasch. Puis, ils poursuivent en définissant les graduations décimales d'une droite et en démontrant, grâce au théorème des milieux, la conservation de cette forme de graduation par projection. Le théorème des milieux dans la version conservation des abscisses est alors facilement démontré par encadrement de l'abscisse d'un point d'une droite qui est projeté sur une autre droite. Ils obtiennent ainsi une suite de segments emboîtés sur la première droite qui se projette de la même façon sur la seconde.

La réforme de 1970 impose le théorème de Thalès comme un axiome. Ainsi, le point de vue adopté par Bréard est celui des espaces vectoriels, d'une axiomatisation de la droite et du plan. Vissio part du concret, du glissement, pour définir la translation mais ensuite la structure d'espace vectoriel est tout de suite donnée.

En 1973, Queysanne et Revuz construisent une bijection de la droite sur les nombres réels par l'intermédiaire d'une graduation. Thalès est un axiome qui n'est plus vraiment un objet d'étude.

Les programmes de 1978 marquent un abandon des axiomes. Les espaces vectoriels, la construction d'une bijection entre les réels et la droite sont supprimés. Le théorème de Thalès est à nouveau une proposition dont l'importance est tout de même encore amoindrie par rapport au passé. Ainsi, la projection orthogonale est un outil beaucoup plus souvent employé que le théorème de Thalès pour introduire de nouveaux concepts ou théorèmes. Mais ce dernier intervient tout de même à de nombreuses reprises. Il retrouve une place importante dans les programmes du collège.

Certains auteurs (Polle, 1980 ; Aguado, 1980 ; Gallion, 1980) continuent à tout d'abord définir la multiplication d'un vecteur par un réel pour en déduire ensuite le théorème de Thalès. Dans Delédicq (1984), le théorème des milieux appliqué au trapèze est démontré dans une activité mais la généralisation au théorème de Thalès est vérifiée par des prises de mesure. Les aspects projectifs et homothétiques du théorème sont clairement dissociés.

En 1989, le théorème de Thalès n'est pas systématiquement démontré.

A partir du milieu des années 1980, de nombreux ouvrages introduisent le théorème de Thalès par l'intermédiaire "d'activités". Mais nous avons pu constater que peu d'initiatives sont laissées aux élèves et que ces activités se résument bien souvent à un jeu de question/réponse sans qu'il y soit fait référence à une situation problème que les élèves pourraient faire leur.

Par exemple, dans Such Durrande, les élèves doivent simplement vérifier le théorème en prenant les mesures de certaines longueurs.

Dans Istra, le théorème des milieux sert à démontrer le théorème de Thalès dans le cas où un côté du triangle est partagé en un nombre entier de segments de même longueur. Mais dans le cas général, comme dans les ouvrages de la collection Transmath (1989, 1993), c'est le cosinus qui est employé ce qui pose bien sûr problème. Il est à remarquer que dans cet ouvrage la proportionnalité est abordée de deux façons : externe et interne.

Dans Mistral, une activité liée aux lignes d'eau d'une piscine modélise la propriété des parallèles équidistantes. Mais les élèves n'ont qu'à constater la véracité de ce théorème. Cette proposition est appliquée dans le cas où le côté d'un triangle est partagé en sept parties égales. Le cas général est démontré grâce encore au cosinus.

Pythagore Coll commence par une activité présentant un extrait de Jules Verne consistant à utiliser les rayons du soleil pour mesurer la hauteur d'une falaise, mais tous les détails sont donnés directement par l'énoncé. Le théorème (D.P.C.T) est démontré dans le cas du triangle rectangle à l'aide de la méthode d'Euclide et l'algèbre. Mais là encore aucune initiative n'est laissée aux élèves. Les activités de début de cours consistent même parfois à appliquer le théorème en cours d'étude (Irem Strasbourg).

Le rapport aux nombres, aux grandeurs et au continu au XX ème siècle :

Vallory traite les grandeurs en suivant la méthode de Tannery et les nombres par celle de Dedekind. Ainsi, d'une part l'axiome d'Archimède et d'autre part les coupures sont fondamentaux. La bijection qui existe entre l'ensemble des nombres et la droite géométrique est établie par cet auteur.

Vacquant et Macé de Lépinay prennent la précaution d'énoncer un axiome de Pasch.

Lebesgue semble être le premier, du moins dans les ouvrages élémentaires, à clarifier réellement la mise en bijection entre la droite et les réels à l'aide de l'axiome d'Archimède et du théorème des segments emboîtés. Il rassemble les fractions, les décimaux et les calculs approchés dans un même chapitre fondé sur la mesure des longueurs. Il conteste la définition des grandeurs comme tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution et également la définition de la proportionnalité par la conservation de la somme et de l'égalité que nous avons trouvée chez de nombreux auteurs du XIX ème siècle. L'algèbre permet maintenant d'obtenir facilement les propriétés des rapports.

Queysanne et Revuz encadrent la racine de deux par deux suites adjacentes qui leur permettent d'appliquer le théorème des segments emboîtés. Ce que les auteurs admettent est la structure algébrique de l'ensemble des nombres réels. A partir de 1978, les nombres réels sont supposés exister par les auteurs mais l'ensemble n'est plus construit comme en 1971.

Monge vérifie le théorème de Thalès de façon pratique puis admet le théorème. A partir de 1989, plus aucune référence n'est faite aux nombres réels dans les programmes. En ce qui concerne la démonstration du théorème de Thalès, plus aucune référence n'est faite par rapport aux nombres réels. Aucune indication n'apparaît sur le fait que dans le cas irrationnel ce théorème est admis.

Interventions des propositions liées au théorème de Thalès en tant qu'outil :

Au tout début du XX ème siècle, le théorème des lignes proportionnelles est étudié jusqu'en terminale. Dans cette classe, de nombreux résultats sont revus et ce théorème permet d'introduire l'homothétie.

Borel utilise le théorème (A.S) pour introduire la trigonométrie, la puissance d'un point par rapport à un cercle et l'homothétie, pour démontrer les relations dans le triangle rectangle et les théorèmes sur les triangles semblables, sur les bissectrices d'un triangle. Dans Vallory, les applications existent mais sont moins nombreuses.

Niewenglowski, qui accorde par ailleurs une très grande importance à la notion de similitude et au théorème de Thalès, introduit aussi l'homothétie, la trigonométrie et la puissance d'un point par rapport à un cercle comme cela.

Vacquant et Macé de Lépinay utilisent le théorème pour construire une échelle comme Bezout, Bossut et Lacroix.

Dans Camman, le théorème de Thalès est utilisé dans tous les domaines que nous venons de citer sauf pour la trigonométrie.

Avec Dubreil et d'autres encore, dans les années 1960, les applications du théorème de Thalès demeurent classiques mais sont explicitées maintenant à l'aide des vecteurs.

A l'inverse de ce que font d'autres auteurs de l'époque, Queysanne et Revuz (1968) utilisent le théorème de Thalès pour démontrer la propriété de distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de deux vecteurs et la linéarité de la projection et en 1970 pour définir la multiplication d'un vecteur par un réel. Mais il s'agit des deux seules applications. Ce théorème perd de son importance au profit des transformations du plan à telle enseigne que certains auteurs le considèrent comme un axiome.

Au cours de la réforme de 1969, cette perte d'importance du théorème de Thalès s'accentue. Les programmes de seconde C le font disparaître, seule la multiplication par un nombre réel est conservée. L'approche axiomatique est privilégiée.

En 1970, les applications immédiates du théorème de Thalès ne changent pas radicalement mais leurs formulations diffèrent. Ainsi, il n'est plus fait référence au partage d'un segment en un rapport donné mais à la recherche d'un barycentre.

En 1978, le théorème de Thalès permet de définir la multiplication d'un vecteur par un nombre réel puis, en seconde, il permet l'introduction de l'homothétie et du barycentre. Enfin, en première, le vieillissement de toutes ces notions est assuré par la théorie des espaces vectoriels. Mais certains auteurs de cette époque définissent d'abord la multiplication d'un vecteur. A partir de 1989, le vieillissement interne et la mise en place d'une dialectique outil/objet du théorème de Thalès ne sont plus vraiment possibles. En effet, la trigonométrie et le théorème de Pythagore sont abordés dès la classe de quatrième et l'homothétie est mise en place en seconde. Les applications du théorème de Thalès en tant qu'objet se résument à construire une quatrième proportionnelle, à construire un point d'abscisse donné, et à partager un segment dans un rapport donné. Le théorème de Thalès est utilisé depuis 1989 pour effectuer des calculs en rapport avec les pyramides et les cônes de révolution. Le vieillissement interne est incertain, ce qui pourrait à terme engendrer un vieillissement externe du théorème.

Les champs conceptuels et problème donnant du sens aux deux propositions :

Borel emploie le même type de démonstration pour démontrer le théorème (A.B.P.) que pour l'aire du rectangle mais, comme Hadamard, change en ce qui concerne les angles et les arcs. Par rapport à ce que nous avons pu dire dans les chapitres précédents, rien de nouveau n'est à signaler au sujet des problèmes qui peuvent donner du sens au théorème de Thalès.

Conclusion de la première partie

Dans cette partie, nous avons étudié l'évolution du théorème de Thalès au cours de l'histoire en cherchant ce qui pourrait être déterminant dans son apprentissage actuel au regard du sens et des fonctionnalités que nous pouvons lui attribuer. Nous organisons les principaux résultats autours des deux dimensions suivantes :
- les fonctionnalités externes que peuvent lui conférer des situations construites en dehors des mathématiques et
- le sens interne que ce théorème peut prendre selon trois axes :
    - les énoncés du théorème,
    - les démonstrations associées et leurs obstacles, les problématiques, les organisations praxéologiques dont elles relèvent ainsi que les champs conceptuels dans lesquels s'est successivement inscrit ce théorème,
- et enfin, les fonctions qui ont été les siennes à travers d'une part les chaînes trophiques c'est à dire les interventions du théorème de Thalès dans l'introduction et la démonstration de notions et de propositions nouvelles et d'autre part son vieillissement interne.

Nous commençons par l'approche externe. Les situations de références nous permettent de cerner le **référent** de la propriété étudiée au sens où l'entend Vergnaud (1990) c'est à dire l'ensemble des situations qui donnent du *sens* au concept.

I. Approche du sens externe

I.1 Absence de problèmes pratiques

Certains ouvrages ne contenaient pas de problèmes dits pratiques. Ainsi, aucune situation problème n'est décelable dans les Eléments d'Euclide, d'une part parce que sa problématique initiale de rationalisation des mathématiques ne permet pas d'en faire spontanément éclore et peut être surtout parce que l'espace en tant qu'objet d'étude proprement dit est absent du corpus euclidien. L'absence de problèmes pratiques dans des Eléments d'Euclide est justement à l'origine des critiques qui naissent au XVII ème siècle. Simplement, nous pouvons dire, en paraphrasant Descartes, qu'Euclide s'adressait à des doctes et les éléments du XVII ème siècle s'adressaient aux curieux.

I.2 Problèmes modélisés liés au méso-espace et à la recherche d'échelles

Il semble que ce théorème ait permis très tôt de résoudre des problèmes dits pratiques de mesures de distances inaccessibles dans le méso-espace. Nous avons relevé globalement deux catégories de situations. Une première catégorie comprenait des problèmes liés à deux types de calculs de distances inaccessibles qui ont été inscrits dans les programmes dès 1849. D'une part le calcul de distances inaccessibles sur le sol, à l'instar de la largeur d'un ravin, et d'autre part le calcul de hauteurs également inaccessibles. Une seconde catégorie, avec Bezout et Lacroix, concernait la recherche *a posteriori* d'échelle.

Mais il faut noter que ces problèmes ne servaient que très rarement à introduire le théorème et venaient s'insérer le plus souvent à la fin de son étude pour illustrer son "utilité" pratique, professionnelle ou dans la vie de tous les jours. En termes plus contemporains, il ne s'agissait pas de situations problèmes comme nous pourrions l'entendre. De plus, même s'il concernait le méso ou le macro-espace, cette échelle était immédiatement évacuée et le problème posé dans le micro-espace, donc déjà mathématisé. Ainsi, par exemple chez Deschalle (1670) ou chez la Caille (1744), des problèmes pratiques liés au méso-espace étaient non seulement présentés *a posteriori* en application d'un théorème mais ils étaient déjà modélisés dans le micro-espace. Les auteurs prouvaient l'utilité du théorème sans en expliquer les fonctionnalités.

Ces deux faits sont compréhensibles,
d'une part parce que les dimensions avec lesquelles les auteurs travaillent sont liées à celles du livre et d'autre part, parce que les situations introduisant un théorème ne sont proposées que depuis peu.

Par exemple, dans les éléments d'Arnauld de nombreux résultats viennent donner du sens après coup au théorème 20 livre X (A.B.P) mais aucune situation ne vient légitimer initialement son étude. Arnauld cherche à simplifier les Eléments d'Euclide en supprimant certaines démonstrations et en introduisant de nouveaux objets (inégalité triangulaire, espaces parallèles) et non à justifier au préalable l'étude d'un théorème. Il semble que ce soit Lamy (1685) qui, le premier, ait eu le souci de partir d'une "problématique" initiale. Elle est liée à la section des triangles et n'est pas pratique.

Enfin, mis à part Clairaut (1741), Bossut (1775) ou Dupin (1825), la problématique des auteurs était généralement géométrique et non de modélisation ou pratique. Même chez Clairaut, pour qui le savoir est censé prendre du sens et être construit à partir d'une situation initiale, nous avons pu nous rendre compte que les problèmes introductifs étaient beaucoup plus un habillage qu'une réelle prise en compte d'une problématique pratique liée au méso-espace. Il en va de même chez Bossut qui introduit le rapport de grandeurs en parlant de longueurs sur le terrain qu'il faut réduire grâce à une échelle de rapport. Mais rien n'est dit sur le passage d'un espace à l'autre ce qui semble là encore légitime puisque ce souci de modélisation au sein des mathématiques élémentaires est une préoccupation tout à fait récente. De même, Dupin propose des applications à l'industrie qui justifient l'étude du théorème, mais aucune démonstration n'est faite. Enfin, nous notons que ces auteurs destinaient leurs ouvrages à un enseignement technique pour Dupin ou un auditoire de salon pour Clairaut.

I.3 En conclusion

le principal résultat que nous avons obtenu est le fait que les modifications de rapport au théorème de Thalès pendant les différentes époques étudiées n'ont pas modifié deux caractéristiques principales. Lorsque des situations du méso-espace liées au théorème de Thalès étaient présentes dans un ouvrage, elles étaient là comme références plus ou moins implicites et apparaissaient *a posteriori* dans un statut d'application. Et même lorsqu'un auteur leur faisait jouer un rôle de motivation, ces situations étaient modélisées immédiatement dans le micro-espace.

Pour l'élaboration de notre ingénierie, nous retenons les situations fondamentales de départ de **mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace**, qu'elles soient horizontales ou verticales, avec un travail initial dans cet espace et de **modélisation** de ces actions dans le micro-espace.

Et il s'agira de savoir si l'ingénierie construite fait réellement vivre le théorème de Thalès dans le méso-espace.

Nous allons maintenant donner nos résultats quant à l'approche interne du sens du théorème de Thalès. Nous parlons successivement des énoncés, puis des démonstrations, ~~à~~ (les problématiques et les champs conceptuels dans lesquels elles s'insèrent), enfin des fonctionnalités internes du théorème.

II. Approche du sens interne

II.1 Les énoncés du théorème direct

Ce que montre l'étude historique sur ce plan c'est d'abord la diversité des formes sous lesquelles le théorème s'est exprimé, une diversité que nous structurons en distinguant deux perspectives : la version que nous avons appelée proportionnalité et celle que nous nommons l'approche homothétie rattachée à la proportionnalité externe pour les triangles. Pour chaque théorème, nous avons donné un nom et un sigle afin de reconnaître la version proposée par les auteurs. L'année entre parenthèses correspond à la première fois que nous avons rencontré le théorème dans notre recherche.

II.1.1 L'approche proportionnalité

L'approche proportionnalité s'est déclinée sous diverses formes. Tout d'abord, le théorème des droites parallèles à un côté d'un triangle (D.P.C.T)**,** de loin la version qui a été la plus fréquente depuis les Eléments d'Euclide jusqu'à nos jours, qui fait référence à une proportionnalité interne pour les segments : **toute droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels.** Elle existe aussi en version trapèze (Dreyfus, 1908), ou angle (Arnauld XVII ème siècle), faisceau de parallèles (Roberval et jusqu'aux années 1950), faisceau de sécantes (Bezout, Bossut et Legendre), espaces parallèles (Lamy), bandes parallèles (Vallory, 1911) ou parallèles équidistantes (Bezout et jusqu'aux années 1950). Trois types de dessins sont possibles : un triangle dont deux côtés sont coupés par une parallèle au troisième côté ; deux sécantes sont coupées par deux droites parallèles qui "débordent" de ces deux sécantes, leur point d'intersection étant visible sur le dessin ; deux sécantes sont coupées, cette fois-ci, par trois parallèles, leur point d'intersection n'étant plus présent sur la figure.

Dans les années 1970, cette forme d'énoncé est quelque peu modifiée par l'emploi d'un axiome de conservation des abscisses par projection (Queysanne et Revuz (1968), (1971) (1973)) ou par la définition axiomatique du rapport de projection (Bréard (1971)).

Une version projective utilisant des segments ou des vecteurs et se référant toujours à la proportionnalité interne, a également été proposée par certains auteurs, et ce jusqu'aux années 1980 (Aguado), (Delédicq, 1984) : **les projections des segments de même support sont proportionnelles aux longueurs de ces segments. Le rapport des longueurs de deux segments de même support est égal au rapport de leurs projections. Dreyfus (1908)**. Cet énoncé correspond à une adaptation du précédent aux nouveaux outils mathématiques disponibles dans les programmes.

I.1.2 L'approche homothétie

Au sujet de l'approche homothétie, ce qui est d'abord apparu est une version triangles équiangles dans les Eléments d'Euclide, "Dans les triangles équiangles, les côtés autours des angles égaux sont proportionnels.", suivie des triangles et des angles semblables, "Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.", que nous avons trouvée dans Arnauld et Borel (1910), et tout au long de l'histoire jusqu'au XX ème siècle.

Jusqu'à Bossut, il n'y avait à chaque fois que deux proportions exprimées. Dans Bossut (1775) ou Legendre (1794) une proportion entre deux triplets de longueurs était présente. Mais il ne s'agissait pas encore d'égalité. Il faut attendre 1849 pour que les algorithmes des proportions disparaissent au profit des égalités de rapports. Il semble que la première apparition de l'appellation du théorème tel qu'il est enseigné actuellement se trouve dans F.I.C (1881).

Une version vectorielle de cette approche homothétie a également vue le jour à la fin du XX ème siècle : **Si A, B, C sont trois points d'une droite, et r le réel tel que vect AC= r.vec AB ; si A', B', C' sont trois points distincts d'une autre droite, et r' le réel tel que vecA'C'=r'vecA'B' ; si de plus les droites (AA'), (BB') et (CC') appartiennent à la même direction : alors r = r'. (V)** (Vissio (1971), Polle (1980)). Ici encore, il s'agit d'une simple adaptation aux outils disponibles.

Nous nous sommes interrogés sur la coexistence de deux catégories d'énoncés dans un même ouvrage au cours de l'histoire. Nous avons déjà pu remarquer que dans les éléments d'Arnauld, à la proposition 20 du livre X, la double approche de la proportionnalité est présente dans le même théorème. Dans F.I.C (1881) également, la proportionnalité interne pour les segments, la proportionnalité interne pour les triangles et la proportionnalité externe pour les segments sont présentes. Il faut attendre Vacquant et Macé de Lépinay, en 1917, pour voir réapparaître toutes ces formes de proportionnalité. Dans Benoit (1940), le théorème de Thalès concerne trois droites parallèles au moins et deux sécantes. Les rapports proposés sont d'une part internes pour les droites et d'autre part externes. Nous trouvons dans l'ouvrage de Théron, Couturier datant de 1965 une approche interne et externe mais à chaque fois portant sur les segments.

Dans les ouvrages de Delédicq (1984) et de Terracher (1989), les approches projectives et homothétiques sont clairement énoncées. Dans Istra 1989, Mistral (1989), Irem Strasbourg (1989) et Terracher (1989), nous trouvons une proportionnalité interne et une proportionnalité externe. Malgré ces exemples, la double approche de la proportionnalité pour le théorème de Thalès n'a pas été souvent employée au cours de l'histoire.

II.2 Les énoncés du théorème réciproque de Thalès

Au sujet de l'ordre des points, lorsque deux droites parallèles coupent deux droites sécantes, nous avons pu nous rendre compte qu'une lecture des dessins est nécessaire quel que soit le type de rédaction du théorème choisi.

II.2.1 L'ordre des points ne pose pas de problème

Pour le seul énoncé des auteurs qui ne parlent que de deux côtés d'un triangle coupés par une droite, l'ordre est implicitement donné et l'ordre des points ne pose donc pas de problème. Euclide énonce la réciproque du théorème (D.P.C.T) en même temps que le théorème direct. Il parle, comme Legendre, Lacroix, Guilmin, F.I.C, Bos, Combette etc., d'une droite coupant les côtés d'un triangle ce qui exclut le cas de la figure "papillon".

II.2.2 L'ordre des points dans la démonstration

D'autres énoncés ne font pas apparaître *a priori* le positionnement des points mais ce dernier est donné dans la démonstration. Ainsi, Hadamard parle de division intérieure ou extérieure mais uniquement au cours de la preuve. De même Vallory parle de côtés partagés par une droite de la même manière. Nous comprenons ce que signifie cette expression uniquement à la lecture de la démonstration. Elle signifie pour lui que les côtés sont coupés intérieurement ou extérieurement. Borel fait simplement la remarque qu'il faut faire attention aux signes sur les côtés de l'angle.

II.2.3 L'ordre des points dans l'énoncé

Roberval parle lui d'une droite coupant les côtés d'un triangle prolongés ou non, soit dans le triangle soit en dehors, au-dessous de la base ou au-dessus du sommet. Grévy parle également de deux points pris en même temps sur les côtés d'un angle d'un triangle ou sur leurs prolongements. D'autres auteurs, comme Brachet et Dumarque (1922), utilisent des côtés coupés intérieurement ou extérieurement. Vacquant et Macé de Lépinay (1917) parlent aussi de côtés d'un triangle, prolongés ou pas. Ils précisent que les points de rencontre de la parallèle avec les deux côtés doivent être tous deux sur les côtés non prolongés ou tous deux sur leurs prolongements. Certains auteurs, à l'instar de Guichard (1913), usent de rapports égaux en grandeur et en signe.

La notion de points homologues permet de définir la position des points les uns par rapport aux autres. Grâce à des droites parallèles, à un point pris sur une droite correspond un point sur une deuxième droite. Chenevier (1931) utilise cette notion et celle de division semblable dans son énoncé de la réciproque du théorème de Thalès.

Une autre façon d'énoncer le théorème réciproque consiste à employer des rapports de longueurs algébriques comme dans Benoit (1940), Camman (1942), Roux et Miellou (1945) ou de vecteurs, comme dans Marijon (1931), Brachet et Dumarque (1940), Dubreil (1964), Itard et Huisman (1964). La notion de points alignés ou qui se succèdent dans le même ordre comme dans Vieillefond (1937), ou de points occupant des positions analogues sur (AB) et sur (AC) comme dans Istra (1989) et Mistral (1989), ou enfin la notation $B' \in [AB]$, $C' \in [AC]$ comme dans Such et Durrande (1989) permettent également d'énoncer le théorème réciproque. Les valeurs algébriques ne font que condenser l'idée d'intérieur ou d'extérieur à un segment. Le problème demeure puisque ces valeurs sont lues de toute façon sur le dessin. De plus, elles ne concernent pas la même droite orientée et munie d'un repère ce qui pose bien sûr des problèmes pour le sens des calculs. Que les rapports soient exprimés à l'aide des vecteurs ou des valeurs algébriques, le sens des vecteurs ou le signe des valeurs algébriques sont lus sur le dessin.

Enfin, nous avons rencontré des versions vectorielles sans expression de rapports, comme dans Vissio (1971) et Polle (1980). Des égalités vectorielles entraînent le parallélisme.

II.2.4 En conclusion

Même si des outils, comme les valeurs algébriques ou les vecteurs, ont permis de les rendre moins flagrantes, les références aux figures sont constantes dans tous les énoncés de la réciproque du théorème de Thalès glanés au cours de l'histoire. A l'inverse, le théorème (D.P.C.T) peut se passer de telles références puisque la position des points est de fait communiquée.

D'autre part, nous pouvons dire que les deux grandes catégories d'énoncés du théorème de Thalès, aspect proportionnalité et aspect homothétie, sont présents tout au long de l'histoire et ce dès les Eléments d'Euclide. Historiquement, en ce qui concerne le théorème direct, des changements ont lieu, mais ceux-ci ont plus trait à l'approche des nombres réels, au type de démonstration adopté qu'à la forme de l'énoncé.

C'est ce que nous allons aborder maintenant. Rappelons tout d'abord que R est le seul ensemble totalement ordonné, archimédien et complet et que la connexité de R se traduit par le fait que cet ensemble n'admet pas de trous. Dans la démonstration générale du théorème de Thalès, nous avons rencontré des axiomes du continu liés aux nombres réels et ceux rattachés à la continuité de la droite. Dans certains cas, les auteurs les ont énoncés dans d'autres ils étaient implicitement employés.

II.3 Les démonstrations

II.3.1 Théorème de Thalès

Nous avons rassemblé les nombreux types de démonstrations du théorème de Thalès en deux catégories. Il y a celles qui traitent les nombres réels dans la démonstration finale du théorème et celles qui abordent le problème ailleurs, ce qui l'élimine de la preuve, du moins en apparence. Ainsi, nous avons dû remonter chaque démonstration pour cibler les endroits dans lesquels les nombres réels sont employés. Nous allons maintenant mettre en lumière les diverses preuves qui se trouvent dans ces deux catégories en revenant sur les raisons d'être de cette diversité.

a) Première catégorie

Dans la première grande catégorie, caractérisée par une absence apparente de l'utilisation des nombres réels à la fin de la démonstration du théorème de Thalès,

Aires

Nous pouvons y classer la démonstration par les aires d'Euclide reprise par Roberval. Le résultat préliminaire de son théorème (D.P.C.T) est la proposition 1 du livre VI qui précise que deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Cette proposition est démontrée par report de longueurs et par juxtaposition de triangles. Euclide évacue les nombres réels en donnant au livre V la définition (8) de l'égalité de deux raisons qui ne sont pas des nombres. Mais nous avons vu que le continu était indispensable à plusieurs endroits en amont de la démonstration finale. Ainsi, dans le Livre V, le concept de continuité est sous-jacent à la notion indirectement évoquée d'infinie divisibilité de toute grandeur. Un axiome du continu est également nécessaire pour admettre l'existence de la quatrième proportionnelle. Roberval, à l'inverse de son prédécesseur, admet ou prouve suivant le cas, le caractère archimédien des lignes, des surfaces, des angles rectilignes, des nombres et des solides. Il utilise la continuité pour justifier l'intersection de deux cercles, d'une droite et d'un cercle. Mais un axiome du continu est nécessaire à la proposition 15 du livre VI sans que cela soit explicité. Dans un cas, le continu est pris en compte par Roberval et dans un autre non.

La méthode des aires sous cette forme a été abandonnée pendant longtemps mais un retour s'est opéré dans les années 1980 en y adjoignant bien sûr l'expression algébrique de l'aire du triangle, ce qui voile encore plus l'importance des nombres réels. En effet, ces nombres sont indispensables pour démontrer que l'aire du rectangle est égale à sa longueur par sa largeur et en déduire ensuite l'aire du triangle. Le problème est simplement déplacé.

Raisons sourdes et espaces parallèles

Arnauld remplace le théorème préliminaire d'Euclide et de Roberval sur les triangles de même hauteur qui sont entre eux comme leurs bases par une proposition fondamentale qui concerne deux lignes également inclinées dans deux espaces parallèles[2] différents qui sont entre elles comme les perpendiculaires de ces espaces. Pour démontrer cette proposition dans le cas commensurable, il divise des segments en quelques aliquotes qu'il veut et trace ensuite des parallèles. Il se réfère alors à sa seconde définition des égalités des raisons simples qu'il donne au Livre II, fondée sur la mesure de longueurs. Deux raisons sont égales lorsque toutes les aliquotes identiques des antécédents sont contenues de la même façon dans les conséquents. Pour les raisons qu'il appelle sourdes, un double raisonnement par l'absurde lui est nécessaire. Si les raisons en question sont différentes, la première est soit plus grande soit plus petite que la seconde et

[2] Pour Arnauld, un espace parallèle est l'espace compris entre deux droites parallèles.

dans les deux cas, il démontre que l'hypothèse est absurde. Pour cela, un axiome du continu lié à l'existence d'une quatrième proportionnelle est indispensable.

Infiniment petits

Bezout utilise le théorème des parallèles équidistantes coupant deux droites en segments de même longueur et la méthode des infiniments petits. Dans le cas incommensurable, il considère possible de découper un segment AF en un nombre de segments aussi petits que l'on veut de telle sorte que l'un des points de la division tombe forcément sur un point D quelconque choisi au départ. Dans le même ordre d'idée, toujours en partant du théorème préliminaire des parallèles équidistantes, Bossut partage un segment en une infinité de parties égales et mène par les points obtenus des parallèles. Guilmin, Amiot ou Vacquant et Macé de Lépinay (1916) coupent les côtés d'un triangle en segments de même longueur. Il suppose AD et DB commensurables et disent que la méthode est vraie aussi petite que soit la commune mesure et donc qu'elle est vraie tout le temps. Cet argument est très souvent avancé dans cette période allant de 1870 à 1916.

Partie aliquote commune par la méthode du "pgcd"

Certains auteurs emploient la méthode de recherche de la plus grande commune mesure à deux segments par reports successifs de segments. Nous avons trouvé deux niveaux de démonstration de ce type. Au premier niveau, les auteurs calculent effectivement les restes et admettent que cette suite tend vers zéro et au second niveau les auteurs ne calculent pas la suite des restes.

Ainsi, pour démontrer le théorème (D.P.C.T) Blanchet utilise les parallèles équidistantes et renvoie à la méthode de recherche de la plus grande commune mesure. Dans cette dernière, il utilise l'algorithme d'Euclide des divisions successives appliqué à la recherche d'un pgcd. Il démontre effectivement, après reports successifs d'un segment dans un autre, que le reste peut être rendu aussi petit que l'on veut et qu'ainsi, dans le cas incommensurable, après un certain nombre n d'opérations, on peut le négliger et la plus grande "commune" mesure est alors le reste de rang n - 1.

Plus tard, Brachet et Dumarque (1927), utilisent aussi la méthode du "pgcd" pour trouver une partie aliquote commune à deux longueurs et considèrent qu'en pratique, il est toujours possible de trouver un diviseur commun au bout d'un certain temps sans entrer dans les détails.

Dans les deux cas, que ce soit la méthode utilisant les infiniments petits ou celle employant l'algorithme d'Euclide, les incommensurables sont contournés.

Nombres réels

D'autres auteurs se sont proposé de construire l'ensemble des nombres réels avant de démontrer les théorèmes qui les utilisent comme le théorème de Thalès. C'est le cas de Tannery. Mais ce n'est pas pour cela que cet ouvrage ne présente pas d'implicites au sujet des nombres réels. Ainsi, à la proposition 413, la densité de l'ensemble des rationnels dans l'ensemble des réels est admise.

Rouche et Comberousse pour démontrer l'existence et l'unicité des irrationnels, utilisent des implicites liés à la propriété de la borne supérieure, aux suites adjacentes et aux suites de Cauchy. C'est un préconstruit de première catégorie. La propriété de la borne supérieure est implicitement admise et utilisée par ces auteurs à bien des endroits, en particulier pour définir l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et la commutativité de la multiplication des incommensurables.

Au début des années 1970, les nombres réels sont introduits au niveau du Collège. Le théorème de Thalès est une conséquence de la distributivité de la multiplication d'un vecteur par un réel appliquée aux espaces affines et devient un truisme.

Seul le cas commensurable est traité

Dans certains ouvrages que nous avons rencontrés, seul le cas commensurable est traité. Ainsi, Lamy démontre le théorème de la même façon qu'Arnauld. Mais lorsqu'apparaît le problème de grandeurs incommensurables, il commence par le cas commensurable puis il dit pouvoir démontrer la même chose s'il y avait un reliquat**,** sans le faire. La Caille non plus ne se soucie pas du cas incommensurable. Dans l'ouvrage de Clairaut, le théorème des triangles équiangles n'est démontré que dans le cas fractionnaire et pratiquement toutes les propriétés sont lues sur les dessins.

Dans des textes datant de la première moitié du XX ème siècle, parfois aussi, seul le cas commensurable est démontré dans le théorème (D.P.C.T). Du début à la fin de la démonstration du théorème de Thalès, aucun commentaire n'est fait au sujet des incommensurables. Dans les années 1980, le théorème des milieux dans un triangle est démontré à partir des propriétés du parallélogramme qui permet de déduire un résultat équivalent dans un trapèze. Notons que l'importance des parallélogrammes remplace celle des cas d'égalité des triangles. Puis, les auteurs démontrent un résultat qui concerne un triangle dont un côté est partagé en trois segments de même longueur à partir desquels deux parallèles à un deuxième côté sont tracées. Ces droites coupent le troisième côté en segments de même longueur. Le cas du partage en quatre est très rarement démontré. Mais ce qui est constant est le fait que là encore rien n'est dit pour le cas irrationnel.

b) Seconde catégorie

Dans cette seconde catégorie, nous trouvons les auteurs qui ne tentent pas d'occulter les difficultés liées aux nombres réels en fin de démonstration du théorème de Thalès.

Indivisibles

Nous retrouvons Cavalieri qui utilise la méthode des indivisibles fondée sur l'hypothèse qu'une surface est composée d'une infinité de droites et qu'un volume est structuré par une infinité de surfaces parallèles. Cette démarche se réfère au continu mais Cavalieri n'en donne aucune définition précise.

Méthode d'exhaustion

Legendre emploie lui la méthode d'exhaustion pour démontrer que deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases (prop 3) pour en déduire l'aire du rectangle puis celle du triangle qui lui sert ensuite à démontrer que les triangles sont entre eux comme leurs bases. Il démontre tout d'abord le cas où les deux longueurs AB et AE des deux rectangles sont commensurables. Dans le cas incommensurable, il applique la méthode d'exhaustion qui consiste à effectuer un double raisonnement par l'absurde. Il suppose que deux rectangles ABCD et AEFD ont leurs longueurs AE et AB incommensurables avec tout d'abord AO > AE et ABCD:AEFD::AB:AO, la longueur AO étant censée exister grâce à la quatrième proportionnelle. Il divise AB en parties égales et plus petites que EO, un point I de cette section tombant entre E et O. Il parvient à une contradiction. De même lorsqu'il pose que AO < AE et ainsi AO = AE et le théorème est démontré. L'existence de la quatrième proportionnelle et celle du point I aussi fine que soit la division du segment AB font appel à un axiome du continu. Cette méthode est également adoptée par Lacroix. Le théorème des droites équidistantes qui coupent deux droites en segments égaux est utilisé dans le cas commensurables et dans le cas inverse, la méthode d'exhaustion est préférée. Lacroix, comme Legendre, refuse d'avoir recours aux infiniments petits trouvés par exemple dans Bezout ou Blanchet.

Encadrements

A partir de la fin du XIX ème siècle et jusqu'aux années 1970, nous avons trouvé la méthode des limites par encadrement. Nous distinguons trois niveaux de positionnement théorique à ce sujet.

Les segments emboîtés

Ainsi, par exemple, Queysanne et Revuz (1971), emploient explicitement le théorème des segments emboîtés pour démontrer le théorème de Thalès. Par contre, Lebesgue utilise, sans le dire, dans ses démonstrations sur le théorème de Thalès ou sur les aires, un résultat qui concerne la convergence des suites réelles adjacentes.

Encadrements fractionnaires

A un autre niveau, F.I.C, Combette, Jacquet et Laclef, Vacquant et Macé de Lépinay (1917) et d'autres encore, après avoir appliqué le théorème des parallèles équidistantes, en toute fin de démonstration du théorème de Thalès encadrent deux rapports AD/AB - AE/AC par des fractions m/n et (m + 1)/n. Ils obtiennent un encadrement de la différence par - 1/n et 1/n et considèrent alors qu'un point D est forcément sur un segment de la division aussi grand que n soit pris. Ces deux aspects font appel au continu et aux nombres réels. De plus, sans qu'ils le disent, ces auteurs ont besoin de l'axiome d'Archimède pour démontrer qu'un segment est contenu moins d'un nombre entier de fois dans un autre et plus d'un nombre entier de fois. Vallory et Tannery énoncent cet axiome. Il permet à Vallory de déduire qu'il est possible de trouver un nombre entier n pour rendre A/n aussi petit que l'on veut. Il permet également de déterminer des encadrements d'un segment par des termes consécutifs d'une suite de segments. L'axiome d'Archimède aurait dû intervenir dans sa démonstration d'existence de la partie entière qui est par ailleurs absente de ses éléments. Or l'existence d'un tel objet est implicitement utilisée par Vallory pour démontrer le fait que le rapport de deux segments est égal au rapport de leurs mesures.

Une variante de ce second niveau de la démonstration est proposée par Dubreil (1964) qui utilise les encadrements de rapports de deux vecteurs par m/n et (m + 1)/n. Le rapport de deux vecteurs pose bien sûr problème. Un autre exemple recoupe l'esprit de la démonstration, il s'agit de Blaquière (1980), qui démontre un résultat sur des abscisses entières par la conservation du milieu par projection, puis, il passe aux points d'abscisses décimales avec tout d'abord un chiffre après la virgule (partage en 10), puis deux chiffres après la virgule (partage en 100). Pour les points d'abscisses réelles r, il encadre par des points d'abscisses décimale aussi proche que l'on veut de r. Il admet implicitement que tout nombre réel r peut être encadré par une suite de nombres décimaux, valeurs approchées de r aussi proche que l'on veut de ce nombre.

Encadrements décimaux

Au troisième niveau de positionnement théorique, Borel (1910), pour démontrer le théorème dans le cas général, divise un côté par 10, 100, 1000... et donne ainsi une approximation des rapports au dixième, au centième, au millième... près comme le font d'ailleurs Itard et Leconte (1940).

Grandeurs correspondant en somme et en égalité

Une dernière approche des nombres liée à une conception de la proportionnalité a été relevée. Hadamard, Rouche et Comberousse pour démontrer que deux droites sécantes sont coupés en parties proportionnelles par une série de droites parallèles, démontrent qu'à deux segment égaux de la première droite correspondent deux segments égaux sur la seconde et qu'à la somme de deux segments sur la première correspond la somme de deux segments sur la seconde. L'application au théorème (D.P.C.T) est ensuite immédiate. Hadamard fait explicitement référence au cours d'arithmétique de Tannery (1894 n°493) qui démontre effectivement que la correspondance en somme et en égalité de deux espèces de grandeur (G) et (G') mesurables équivaut à leur proportionnalité.

I.3.2 Théorème réciproque de Thalès

Toutes les démonstrations sont fondées sur une même idée. Supposer, en ayant des rapports égaux, que les deux droites en question ne soient pas parallèles et en tracer une. On obtient alors des égalités de rapports puis de longueurs.

Les démonstrations se différencient selon la manière dont est traitée l'unicité d'un point partageant un segment dans un rapport donné. Nous avons pu nous rendre compte qu'une lecture des dessins est nécessaire quelle que soit la méthode de démonstration choisie par l'auteur.

Euclide,

démontre le théorème réciproque en utilisant la proposition sur les triangles égaux, construits sur la même base qui sont forcément compris entre les mêmes parallèles. L'existence d'un certain point d'intersection n'est pas justifié et est uniquement vue sur le dessin. Il utilise ici aussi l'axiome de Pasch. De plus, l'auteur emploie la notion commune 9 qui stipule que le tout est plus grand que la partie.

Legendre,
démontre tout d'abord la véracité de la proportion AO:OC::AE:EC et arrive à mettre en évidence une absurdité en voyant sur le dessin, sur lequel les points A, O, E, et C sont alignés dans cet ordre, que AE>AO et que EC<OC.

Roberval,
utilise des "portions homologues de même part" pour lesquelles seul le dessin est encore pris en référence. D'une égalité du type AE = AE', Lacroix et Bos concluent eux, sans donner de précision, que les deux points E et E' sont confondus.

A partir de la fin du XIX ème siècle,
de nombreux auteurs étudient plus ou moins précisément les variations du rapport MA/MB où M est un point circulant sur une droite (AB).

A un premier niveau de conceptualisation, Guilmin dit, sans plus de précisions, que l'on ne peut déplacer le point M sans altérer le rapport MA/MB et conclut ainsi sur l'unicité de ce point M. F.I.C utilisent eux aussi, en la vérifiant sur un dessin et sans la démontrer, la propriété explicitant le fait qu'il n'y a qu'un seul point qui divise un segment dans un rapport donné. Bourlet admet également ce résultat.

A un deuxième niveau, des auteurs comme Vacquant et Macé de Lépinay, Chenevier et Desbrosse constatant que les rapports augmentent, ou diminuent suivant la portion de la droite sur laquelle le point se trouve, ils ne peuvent passer plus d'une fois par une position. Trois cas sont envisagés. Le premier est celui où M se situe entre A et B et se meut de A vers B. Dans ce cas MA augmente et 1/MB également donc MA/MB aussi. Le deuxième cas est celui où M se trouve sur la demi-droite [By) et s'éloigne de B et MA/MB = (MB + BA)/MB = 1 + BA/MB et le rapport diminue "sans cesse" (ce qui correspond à la stricte monotonie). Le dernier cas concerne le point M situé sur la demi-droite [Ax) et s'éloignant de A : MA/MB = (MB - AB)/MB = 1 - AB/MB et le rapport augmente sans cesse.

A un troisième niveau, les auteurs comme Rouche et Comberousse étudient les augmentations et les diminutions des numérateurs avec plus de précision. Ils font parcourir une droite (xy), sur laquelle sont placés deux point A et B, par un point M. En partageant l'étude en trois cas, comme précédemment, ils parviennent à la conclusion qu'à "gauche de A le rapport considéré décroît de 1 à 0, de A à O, milieu de [AB], le rapport croît de 0 à 1, de O à B il croît de 1 à l'infini et à droite de B il décroît de 1 à l'infini. Pour cela, Rouche et Comberousse emploient la notion de segments additifs ou soustractifs. Ainsi, [MA] et [MB] sont additifs si M appartient au segment [AB] et soustractifs si la longueur AB est obtenu par soustraction des longueurs MA et MB. Les segments additifs, soustractifs sont utilisés par Combette, par Monnet, Chenevier et Desbrosse (1922) et par Lespinard et Pernet (1952).

Il y a enfin les auteurs qui, pour étudier les variations du rapport MA/MB, comme Camman (1942), et d'autres encore, ou pour étudier les variations du même rapport mais à l'aide de vecteurs, comme dans Itard et Huisman (1964), Dubreil (1964), expriment algébriquement ce rapport. Mais en filigrane de cette démonstration se trouve le fait que l'application de R sur D qui à un réel x associe le point M tel que MA = xAB est bijective et continue. Dollon et Gilet (1950) se refusant d'utiliser le mouvement pour étudier le rapport MA/MB, utilisent intuitivement la continuité de l'application qui à M associe MA = xAB et sa bijectivité.

Dans ces études, que ce soit dans une approche liée au mouvement sur la droite (AB) ou par l'intermédiaire de l'algèbre, le continu est indispensable. La complétude de R est nécessaire pour démontrer l'existence du point M et la propriété d'une fonction monotone qui est injective si et seulement si elle est strictement monotone pour prouver l'unicité.

Lorsque les auteurs utilisent les vecteurs, le plus souvent, pour conclure que les extrémités de deux vecteurs se confondent, soit ils lisent sur le dessin le sens des deux vecteurs soit, comme dans Dubreil (1964), ils obtiennent des vecteurs équipollents de même origine. Dans les deux cas le sens des vecteurs est lu sur les dessins.

Pour finir, nous allons nous consacrer à l'influence qu'a pu avoir le théorème de Thalès sur l'introduction de nouveaux concepts, sur l'organisation des cours de mathématiques en exposant les chaînes trophiques rencontrées au cours de l'histoire.

II.3.3 En résumé

a) A la fin de la démonstration du théorème de Thalès

Mis à part le cas des ouvrages dans lesquels les nombres réels ont été construits, dans tous les autres, quelle que soit la méthode, des propriétés ont été admises à un moment ou à un autre à leur sujet.

Ainsi, dans la méthode d'exhaustion, l'existence de la quatrième proportionnelle et un axiome du continu pour la droite sont admis. Lorsque des auteurs emploient la méthode du "pgcd" pour rechercher la plus grande commune mesure à deux longueurs, dans le cas incommensurable, ils sont obligés de négliger les restes en mettant en évidence avec plus ou moins de précision le fait qu'ils tendent vers zéro.

Ou bien alors, sans construction des nombres irrationnels, le problème a été soit déplacé, comme c'est le cas lorsque l'on démontre le théorème de Thalès à l'aide de la méthode des aires et des expressions algébriques, soit évité lorsque seul le cas rationnel est traité ou comme par exemple dans la méthode qui consiste à démontrer le théorème sur les droites équidistantes et a considérer que dans le cas irrationnel, il est possible de procéder à une division à l'infini d'un segment en parties égales.

Sans construire l'ensemble des nombres réels, des auteurs ont utilisé, à plusieurs niveaux différents, la méthode des limites qui consiste à encadrer des différences de deux rapports par des fractions de plus en plus proches de zéro. Mais les différences n'ont pas été détectées uniquement en toute fin des diverses démonstrations du théorème de Thalès.

b) En amont de la démonstration finale du théorème

Les explications de la diversité entre les démonstrations, qui demeurent un peu hypothétiques, sont elles-mêmes diverses. Ces différences pouvaient être dues, par exemple, au refus de l'infini comme pour Euclide. L'empreinte laissée par le corpus aristotélicien a été profonde et durable. Euclide emploie l'infini potentiel dans sa définition de deux droites parallèles qui n'est jamais utilisée pour démontrer une proposition. Seules des considérations sur des angles et donc sur des triangles sont utilisées. Sa comparaison de deux angles est caractéristique. Elle passe par l'insertion de ces derniers dans des triangles pour éviter en même temps le recours à l'infini et au principe d'égalité par superposition. Cela montre l'importance des triangles dans les Eléments d'Euclide.

De même, pour Arnauld, l'infini n'est pas du ressort de l'homme. Malgré cela, son utilisation est inévitable dans de nombreuses démonstrations comme celle du théorème 8 du livre 2. Legendre utilise très peu la notion d'infini sauf dans une définition de deux droites parallèles qui, comme dans Euclide n'est pas employée.

D'autres différences étaient occasionnées par le refus du raisonnement par l'absurde, comme dans Arnauld ou chez Newton ou aux tentatives de démonstration du cinquième postulat d'Euclide, comme dans Legendre. Ce dernier admet implicitement que l'application projection est croissante et continue. En effet, pour considérer le fait que deux points se trouvent entre deux autres mais qu'un troisième se trouve au delà utilise implicitement la croissance de la projection et la continuité de la droite géométrique. Il s'agit d'un préconstruit de premier type. Dans une tentative de démonstration du *postulatum*, l'axiome d'Archimède est nécessaire à Lacroix pour admettre que la juxtaposition de plusieurs angles identiques déborde d'une bande. Pour montrer l'existence et l'unicité de la perpendiculaire à une droite passant par un point, Blanchet, par le mouvement d'une droite, dit qu'elle passe par une position où deux angles sont égaux. Ce qui est implicitement admis ici est à rapprocher de ce que Legendre admet lui aussi implicitement pour démontrer la proposition 20 du livre 1 et qui lui sert pour tenter de démontrer les *postulatum*. Cette idée de deux grandeurs inégales, de somme constante, variant à l'inverse l'une de l'autre, l'une grandissant et l'autre diminuant, passant forcément à un endroit où elles sont égales et qui est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, est une idée qui est reprise par plusieurs auteurs, et ce jusqu'au XX ème siècle. Citons par exemple Desdouit, Guilmin pour l'angle droit et la perpendiculaire à une droite, Salomon, Ligel, Lebosse et Hémery, Vacquant et Macé de Lépinay etc.

Nous avons pu nous rendre compte que le principe d'égalité par superposition via les cas d'égalités des triangles a été pendant longtemps l'un des piliers fondamentaux de la démonstration générale du théorème de Thalès. Mais au cours de l'histoire, ces cas d'égalité des triangles ont été remplacés successivement par l'inégalité triangulaire et le régionnement du plan par la médiatrice d'un segment, comme dans Legendre par exemple, puis par les perpendiculaire et les obliques. A partir du moment où les auteurs ne tentent plus de démontrer le *postulatum*, les perpendiculaires et les obliques sont remplacées par les pliages, comme dans Francoeur, ou les charnières, qui eux-mêmes sont remplacés par les retournements, comme dans Hadamard, et la symétrie axiale, comme chez Boss, Rouche, Borel. L'égalité par superposition est remplacée par Hilbert par des axiomes de congruence. Dans les années 1970, l'algèbre linéaire prend la place des cas d'égalité. Nous pouvons considérer que les principales simplifications en amont ont été occasionnées par l'abandon des démonstrations du cinquième postulat d'Euclide. De plus, pendant longtemps, les propriétés en rapport avec le parallélisme de deux droites sont démontrées le plus souvent justement grâce aux angles et aux égalités des triangles. Mais Legendre, qui par ailleurs utilise encore les cas d'égalité des triangles, les remplace dans ce cas par des propriétés sur les droites perpendiculaires. D'autres auteurs utilisent les angles directement sans employer les cas d'égalité des triangles, d'autres encore utilisent la symétrie centrale (Grévy) ou la translation glissière (Bourlet, Viellefond, Borel, Vallory, Camman etc.).

D'autres différences étaient le fruit de conceptions conscientes ou implicites de l'auteur par rapport au continu et liées aux nombres réels ou à la droite et présentes. Nous pouvons classer dans le premier groupe l'existence de la quatrième proportionnelle à trois grandeurs, qui est implicite dans de nombreux ouvrages comme ceux d'Euclide, de Roberval, d'Arnauld, de Lacroix qui l'utilise implicitement à de nombreuses reprises. Ce préconstruit de première catégorie[3] demeure pendant longtemps non évoqué par les auteurs. Dans ce premier groupe se trouve aussi, l'infini divisibilité des grandeurs et des lignes également implicites chez Cavalieri, chez Clairaut. Dans le second groupe, nous trouvons les démonstrations faisant apparaître l'existence d'un point d'intersection entre deux droites. A ce sujet, Arnauld et Roberval prennent la précaution, à l'inverse d'Euclide, de Lamy, de Bezout, de Legendre, de Blanchet, de Francoeur, de F.I.C et de bien d'autres encore, d'admettre que deux droites distinctes se coupent, au plus, en un point. L'approche de l'espace d'Arnauld, liée à celle de Descartes caractérisé par le point, lui permet

[3] Ce qui correspond à une propriété, vraie en toute généralité, qui admise implicitement par l'auteur et dont on pourrait prouver la véracité grâce à une théorie plus complexe. A la différence d'un préconstruit de seconde catégorie dont la justesse n'est que partielle.

cette idée ensembliste de la figure, ce que ne pouvait pas faire Euclide. Mais à d'autres endroits de l'ouvrage d'Arnauld, ces précautions ne sont pas prises. Par exemple, lorsqu'il parle d'un point entre deux autres (37 livre V). Il faut attendre Hilbert pour que soit énoncé cet axiome dans un ouvrage de géométrie élémentaire. Un axiome de Pasch est de plus indispensable dans les démonstrations de nombreuses propositions comme la quatrième du livre VI ou le lemme de la 6ème section. Roberval est l'un des premiers à rédiger un tel axiome. Vacquant et Macé de Lépinay sont aussi de ceux, peu nombreux par ailleurs, qui l'énoncent clairement.

II.4 Les problématiques

Des modifications pouvaient également être occasionnées par des points de vue sur les mathématiques et par des problématiques initiales différents.

II.4.1 Les changements

a) Euclide

Avec le changement opéré par Euclide par rapport aux civilisations égyptiennes et babyloniennes, les mathématiques hypothético-déductives font évoluer les problématiques. Toute la démonstration du théorème (D.P.C.T) d'Euclide repose sur les axiomes ou notions communes, des demandes et des définitions. Les trois principes fondamentaux de la logique aristotélicienne organisent l'ensemble. Même si le but principal de l'ouvrage est de justifier au maximum les propriétés et les constructions géométriques, il arrive que l'appréhension perceptive d'une figure remplace les autres appréhensions. Mais l'ensemble ne relève tout de même pas d'une géométrie pratique ni même problématisée. En effet, aucun problème initial ne vient justifier l'étude de certains résultats. La démonstration du théorème (D.P.C.T) que nous trouvons dans les Eléments d'Euclide et peut-être dans toutes celles de l'ouvrage, sont difficilement classables. Gonseth et Kuzniak utilisent l'expression de géométrie axiomatique naturelle. Nous ne pouvons pas dire que l'énoncé et l'approche du théorème de Thalès, ou un énoncé équivalent, étaient moins rigoureux dans les civilisations égyptiennes et babyloniennes que dans le Grèce antique puisque dans les deux cas les problématiques et les types de géométrie étaient totalement différents.

b) Arnauld

critique la rigueur des Eléments d'Euclide et change de point de vue sur les mathématiques. En mettant en avant des méthodes de recherche de la vérité plutôt que la vérité seule, il veut savoir mais également pourquoi et comment on sait. L'une des principales différences est que la méthode des aires est abandonnée, car il trouve qu'elle n'est pas naturelle et lui préfère la méthode des indivisibles. A son avis, un résultat sur les lignes doit être démontré à l'aide des lignes et non des surfaces. De plus, la géométrie d'Arnauld est plutôt celle de la ligne droite et des obliques et non plus celle du triangle et plus précisément du triangle équilatéral comme pour Euclide.

c) Le XVIII ème siècle

Mais ce rejet des Eléments euclidiens est annulé au XVIII ème siècle. Globalement, les Eléments de Legendre marquent un retour à Euclide. Au XX ème siècle, et ce jusqu'en 1969, la structure des ouvrages est calquée sur les Eléments d'Euclide. Certains auteurs, comme Guillard, Marijon (1931) expriment clairement ce fait même s'il considère que des innovations liées aux transformations du plan sont à apporter aux démonstrations.

II.4.2 Types de problématiques

Nous avons pu nous rendre compte qu'au cours de l'histoire, la plupart des problématiques liées à la démonstration du théorème de Thalès sont **géométriques**. Les instruments utilisés par des auteurs sont parfois pratiques, comme le papier calque pour vérifier, entre autre, l'égalité de deux figures, mais cela n'enlève en rien le caractère géométrique de la problématique.

Lamy se trouve également en décalage par rapport aux Eléments d'Euclide comme Deschalle d'ailleurs qui veut lui s'adresser à un public le plus large possible. Les lectures raisonnées sur les dessins sont alors beaucoup plus nombreuses. Il adopte un autre objectif qui est, mathématiquement, de partir de la section des triangles. Dans l'ouvrage de Deschalle, la géométrie est assez pratique sans être problématisée.

Clairaut lui aussi avait le désir de s'adresser au plus grand nombre, mais sa réelle problématique est une **problématique de modélisation**. C'est par exemple le transport d'un instrument dans l'espace qui permet de s'assurer de l'égalité de deux angles. La solution est cherchée pratiquement, par tâtonnement sous le contrôle de la perception. Elle est validée dans l'espace sensible après modélisation. Partant de l'espace sensible, le problème et la solution sont modélisés directement dans le micro-espace. Clairaut agit sur l'espace sans forcément conceptualiser. La plupart des problèmes posés ou des propositions qui sont démontrées font certes référence à l'espace sensible mais les solutions sont construites complètement dans le système symbolique du modèle. Il y a une représentation immédiate de la pratique de mesure des terrains, de sa résolution par un problème et une résolution dans le modèle lié au micro-espace. Clairaut veut partir de situations pratiques, mais sauf exception, la problématique réelle est de modélisation. De même, l'appel rapide aux échelles et ainsi aux figures semblables est à rattacher encore une fois à une problématique de modélisation. Dupuis se place dans la perspective d'une géométrie pratique. Les réponses sont cherchées par tâtonnement, par ajustement au niveau de l'action sous le contrôle de la perception.

Legendre adopte une problématique liée au pliage, à la superposition des angles qui est d'autant moins pratique qu'elle est fondée sur des axiomes précis. Elle n'est pas non plus de modélisation mais géométrique. Les démonstrations sont idéalisées puisque les objets mathématiques sont inventés pour être éventuellement appliqués au réel.

Dans F.I.C, comme dans de nombreux ouvrages de cette époque d'ailleurs, deux problématiques coexistent. La problématique est à la fois de modélisation, du fait de la présence de vérifications par des instruments et géométrique, les démonstrations étant idéalisées.

Chez Hilbert, les mathématiques sont axiomatiques. Les raisonnements concernent plus les relations entre objets que les objets eux-mêmes. Mais la problématique est encore géométrique. Malgré cela, le principe d'égalité par superposition est encore très souvent utilisé. Mais il ne relève plus d'une problématique pratique où l'on vérifie directement ou par la pensée, que deux figures coïncident mais d'une problématique qui consiste à trouver par le raisonnement les conditions nécessaires et suffisantes de cette égalité.

Dans Itard et Huisman (1967), des manipulations sont faites dans le réel pour entrevoir des propriétés liées aux projections qui fondent la démonstration du théorème de Thalès. L'expérience permet de vérifier des propriétés qui servent de modélisation pour l'étude des projections. La problématique est de modélisation.

Dans les programmes de 1969, nous pouvons voir apparaître un souci de modélisation et d'axiomatisation. Queysanne et Revuz (1971), par exemple, énoncent un axiome de Pasch et un autre exprimant le fait que la projeté du milieu d'un segment est le milieu du projeté du segment. Ce dernier pourrait être démontré mais les auteurs préfèrent le considérer comme un axiome. De même, le point de vue dans Bréard est clairement axiomatique et formel. L'algèbre linéaire est largement exploitée par l'intermédiaire des espaces vectoriels. Des axiomes du plan vectoriel et du plan affine réel structurent l'ensemble de l'ouvrage. Le théorème de Thalès est un axiome. A ce sujet, nous faisons nôtre les propos de Bkouche (1991) :

> "[...] Autrement dit, on peut considérer qu'un énoncé plus classique *(du théorème de Thalès)* permettant l'étude de la proportionnalité géométrique et de la similitude convient plus à l'enseignement de la géométrie élémentaire, l'énoncé vectoriel intervenant avec la mise en place du calcul vectoriel".

En 1978**,** la problématique change à nouveau. Certes, il est recommandé de partir du concret, des manipulations des instruments, mais à l'inverse de ce qui est préconisé dans les programmes de 1971, il n'est plus demandé d'en déduire des axiomes. La problématique n'est plus du tout axiomatique. Les programmes font explicitement référence à l'intuition. On retrouve, par exemple, les pliages pour définir la symétrie axiale dans Blaquière (sd).

II.5 L'organisation praxéologique

Mis à part ceux d'Euclide et d'Hilbert pour lesquels plusieurs théories viennent justifier des technologies légitimant elles-mêmes des techniques servant à accomplir des tâches, aucun livre ne confère à la démonstration du théorème de Thalès une organisation mathématique générale, ce qui semble naturel puisque les ouvrages qui proposent une telle organisation ne s'adressent pas au même public que les autres. Ainsi, jusqu'à nos jours, l'organisation est au mieux régionale, comme dans les éléments d'Arnauld, de Bezout, de Lacroix ou de Guilmin où une seule théorie permet de justifier plusieurs technologies.

Elle peut être parfois considérée comme locale. C'est le cas dans l'ouvrage de Lamy et de Clairaut, car même si certains théorèmes sont employés dans la démonstration du théorème de Thalès, peu de choses viennent les justifier.

Pour Legendre, le fait qu'il s'attarde sur l'unicité de certains objets mathématiques sans tenir compte de leur existence ni de la façon de les obtenir a une influence sur la démonstration du théorème de Thalès. Ainsi, les tâches et les techniques sont absentes et il est alors difficile d'appliquer la notion d'organisation praxéologique.

Nous avons par ailleurs perçu deux truismes dans les démonstrations que nous avons rencontrées au cours de l'histoire. Le premier consiste à admettre la distributivité de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel par rapport à l'addition de deux vecteurs et à utiliser cette propriété dans les espaces affines dans le but de déduire ensuite le théorème de Thalès qui devient une vérité d'évidence. Le second est apparu dans les années 1989. Le théorème de Thalès était démontré parfois à l'aide du cosinus comme dans Terracher, Pythagore, Istra, Transmath, Mistral etc. Mais admettre que la valeur du cosinus d'un angle est indépendante du triangle rectangle dans lequel il est apparent revient à admettre également le théorème de Thalès.

II.6 La transposition didactique

Nous avons pu dégager plusieurs niveaux de transposition. Pour commencer, il est clair que la démonstration du théorème de Thalès située dans les Eléments d'Euclide correspond, par le biais de la traduction, au savoir savant de l'époque. Nous pouvons considérer que certains auteurs, comme Roberval, malgré quelques modifications qu'ils ont apportées à la démonstration du théorème de Thalès, se sont placés au niveau de ce savoir savant. Même pour Vallory, nous pouvons nous demander s'il ne s'agit pas du savoir savant du début du XX ème siècle. Mais ce savoir a, le plus souvent, été l'objet de transposition jusqu'au XX ème siècle.

Un premier niveau, que nous avons nommé transposition directe, consiste à juste simplifier et à alléger les démonstrations liées au savoir savant, comme dans les ouvrages de Deschalle, de Bezout ou plus près de nous de Queysanne et Revuz (1968) et (1970) qui transposent directement la construction des nombres réels en admettant le théorème des segments emboîtés, sans avoir recours à de nouvelles méthodes ni de nouvelles problématiques.

Au deuxième niveau de transposition didactique, que nous nommons transposition secondaire, des changements de points de vue, de problématique ou d'outil viennent modifier le savoir. Nous pouvons prendre les exemples des démonstrations du théorème de Thalès contenues dans les éléments d'Arnauld et ceux de Clairaut, qui correspondent à un changement de méthode et de points de vue par rapport aux mathématiques, aux raisonnements par l'absurde d'Euclide. Chez le premier, le sens est censé venir des mathématiques alors que chez le second il vient de l'extérieur, de la vie quotidienne. Chez Legendre, l'arithmétique permet de se passer de certaines propositions sur les triangles. Mais cela ne relève en rien d'un simple allégement. Les expressions des aires sont clairement formulées et démontrées. Ce qui est un enrichissement des Eléments euclidiens.

A un dernier niveau, nous situons le niveau de transposition tertiaire où l'auteur transpose le savoir d'un auteur qui se situe lui-même au niveau de transposition secondaire comme pour la démonstration de Blanchet par rapport à celle de Legendre, celle de Francoeur par rapport à celle de Lacroix, celle de Guilmin par rapport à celles de Legendre et de Lacroix ou celles de Mazéas, Rivard et Lamy par rapport à celle d'Arnauld. Il serait bien sûr alors possible de poursuivre à des niveaux inférieurs, mais en ce qui concerne le théorème de Thalès, nous n'avons rencontré que ces trois-là. A partir de la fin du XIX ème siècle, ces types de transpositions du théorème de Thalès tendent à disparaître. Les auteurs paraissent emprunter des concepts à plusieurs auteurs ou en créer eux-mêmes.

II.7 Les champs conceptuels

Dans le cadre de l'étude de sa démonstration, nous avons également choisi de nous situer par rapport aux champs conceptuels du théorème de Thalès. Sauf pour quelques rares auteurs, comme Arnauld, Legendre, Borel et Vacquant, l'aire du rectangle, le volume du parallélépipède, le rapport angle arc et le théorème de Thalès ont été pendant très longtemps quatre objets étudiés de la même façon. Le champ conceptuel du théorème de Thalès ne bouge pas au fil de l'histoire mais c'est plutôt la façon de l'approcher qui change pour les quelques auteurs cités ci-dessus.

Ainsi, dans les éléments d'Arnauld, le théorème 8 du livre VII sur la proportionnalité des arcs et des angles, le théorème 14 livre XIV sur la comparaison des rectangles et les deux premiers théorèmes du livre XV concernant la comparaison des parallélogrammes, qui relèvent du même champ conceptuel que le théorème 20 livre X (A.B.P), sont démontrés à l'aide de la même méthode des indivisibles. En revanche, nous n'avons pas trouvé de propositions démontrées de la même façon que le théorème des espaces parallèles ou celui des droites parallèles à un côté d'un triangle.

De même, Legendre a employé une méthode différente pour démontrer le théorème (D.P.C.T) et pour prouver les théorèmes sur les angles ou sur l'aire du rectangle. La méthode d'exhaustion aurait pu être utile pour le théorème des droites parallèles à un côté. Legendre a employé la méthode des aires, c'est à dire une méthode tout à fait différente. Il est partagé entre le fait de rester fidèle à la démonstration euclidienne du théorème (D.P.C.T) et l'idée d'utiliser des méthodes plus contemporaines pour la mesure des angles et des aires des rectangles.

Dans l'ouvrage d'Hadamard, la même méthode de démonstration est employée pour démontrer les résultats sur les angles et les arcs qu'ils interceptent, les aires (du rectangle par exemple) et le théorème (D.P.C.T). Mais dès la troisième édition, le théorème sur les angles qui relevait pour l'auteur du même champ conceptuel que les deux autres résultats que nous venons de citer, trouve une nouvelle place dans l'ouvrage. L'auteur considère que les angles et les arcs

doivent être étudiés en même temps. D'où le changement de méthode de preuve. Borel (1910) et Vacquant et Macé de Lépinay (1916) séparent également la propriété sur les angles.
La rupture vraie arrive en 1970 : plus aucun des théorèmes liés aux quatre objets déjà cités n'est démontré de la même façon. Depuis les années 1980, soit plus rien n'est démontré, soit les démonstrations en questions sont différentes. Nous assistons à un appauvrissement de l'approche du champ conceptuel lié au théorème de Thalès.

II.8 Les fonctionnalités internes

La vie du théorème de Thalès peut se déterminer par les propriétés qui précèdent son énoncé. Ainsi, nous avons vu au paragraphe consacré à sa démonstration qu'elle était assurée par des précurseurs comme les triangles de même hauteur qui sont entre eux comme leurs bases pour Euclide, Roberval et Legendre qui ont été remplacés un temps, à la fin du XX ème siècle par l'expression de l'aire du triangle, ce qui cache encore plus la présence des nombres réels. Cette vie est aussi assurée par d'autres propositions comme les lignes également inclinées dans deux espaces parallèles différents qui sont entre elles comme les perpendiculaires de ces espaces pour Arnauld et Lamy, les droites parallèles équidistantes coupant deux droites en segments de même longueur pour Lacroix, Bezout La Caille, Bossut, F.I.C, Combette, Borel etc., la correspondance en somme et en égalité de segments pris sur des droites sécantes pour Hadamard, Rouche et Comberousse, les espaces affines dans les années 1970, le théorème des milieux, la conservation du milieu par projection, le cosinus à la fin des années 1980. Mais nous avons également remarqué que le théorème des (D.P.C.T) facilite la démonstration du théorème de Thalès tel qu'il est rédigé de nos jours et dans les trois cas de figure. Le premier est un précurseur du second.

La vie du théorème peut également se définir par les théorèmes qui lui succèdent. Quatre périodes se détachent quant à la filiation du théorème de Thalès avec d'autres propositions, à son emploi en tant qu'outil introductif ou de démonstration.

Pendant très longtemps, jusqu'aux années 1970, et pour de nombreux auteurs, sauf pour Arnauld et Lamy, les chaînes trophiques du théorème de Thalès, dans ses versions proportionnalité (D.P.C.T) et homothétie, ont été très riches. En effet, la première forme (D.P.C.T) a très souvent été employée, par exemple, pour construire une quatrième proportionnelle à trois nombres, pour l'introduction du cosinus ou du rapport de projection, pour démontrer les théorèmes sur les bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle. Mais aucune notion plus vaste ne vient réellement assurer le vieillissement interne du théorème sous cette forme. Dans sa version liée à la proportionnalité externe aux triangles, le théorème a servi à introduire les triangles et les polygones semblables, les similitudes, la puissance d'un point par rapport à un cercle. Il a également été utilisé pour démontrer des relations métriques dans le triangle rectangle puis le théorème de Pythagore, pour démontrer son équivalent dans l'espace et pour mesurer pyramides et cônes. Pour cette approche, nous pouvons dire que l'introduction des triangles semblables ou des homothéties participe de son vieillissement interne. Le plus souvent chez pratiquement tous les auteurs, comme par exemple Euclide, Legendre, Lacroix, nous avons pu montrer que l'organisation mathématique de tout ce qui suivait le théorème de Thalès et l'utilisait en tant qu'outil était régionale.

Dans les années 1970, un changement s'opère. Le théorème de Thalès n'est plus un pilier porteur sur lequel s'appuie la démonstration de propositions et l'introduction de notions. La distributivité de la multiplication d'un vecteur par un réel par rapport à la somme externe, qui est admise, permet de démontrer le théorème de Thalès dans une version vectorielle. Ainsi, son vieillissement interne ne peut plus être assuré.

A partir de 1978, ce théorème, qui est parfois admis sans que cela soit demandé dans les programmes, est utilisé pour établir un résultat sur le projeté du milieu d'un segment, dans l'application au triangle et dans la multiplication d'un vecteur par un réel. D'autres applications classiques viennent compléter cet ensemble comme la construction d'un point partageant un segment dans un rapport donné, la quatrième proportionnelle. La dialectique ancien/nouveau fonctionne grâce à la mise en place de la multiplication externe d'un vecteur. L'homothétie et le barycentre sont introduits grâce à ce théorème. Ainsi, l'obsolescence interne de Thalès est à nouveau assurée. Elle est parachevée en classe de première grâce à l'introduction et à l'étude des espaces vectoriels. Le théorème de Thalès assure une cohérence aux cours de mathématiques. Le retour de la projection orthogonale permet l'utilisation du théorème de Thalès version proportionnalité pour démontrer des relations métriques dans le triangle rectangle, le théorème de Pythagore et pour l'introduction du cosinus.

Mais dès 1989, le théorème de Thalès n'est à nouveau plus utilisé en tant qu'outil permettant une réelle introduction d'un nouvel objet d'étude. Il intervient pour des calculs dans l'espace mais son vieillissement interne n'est plus assuré. Seules des applications classiques et immédiates subsistent : partage d'un segment en un rapport donné, recherche d'une quatrième proportionnelle, placer un point d'abscisse donnée. Par le peu d'implication dans les programmes et d'application dont ce théorème fait l'objet, nous pouvons imaginer une obsolescence externe.

DEUXIEME PARTIE

Variables didactiques et obstacles

DEUXIEME PARTIE
Table des matières

CHAPITRE 1
Cadre théorique et échantillon expérimental

CHAPITRE 2
Elaboration et mise en place des expériences. Résultats et interprétations

CHAPITRE 2
LA PERIODE DE L'ANTIQUITE A LA RENAISSANCE

Je pense que la notion de proportion était, depuis une antiquité assez reculée, l'objet d'une méditation qui constituait un des procédés de purification de l'âme, peut être le procédé principal. Il est hors de doute que cette notion était au centre de l'esthétique de la géométrie, de la philosophie des grecs.

Simone WEIL

Introduction

L'objet de cette deuxième partie est de mettre en place et d'analyser les résultats obtenus à des tests qui concernent deux groupes de variables didactiques, les unes étant figurales et les autres numériques. Pour chacune des cinq expériences, nous explicitons son élaboration puis nous exposons et analysons l'issue de sa passation.

En ce qui concerne les variables figurales, le but initial est de montrer l'existence de figures produites en nombre significatif par les élèves avant enseignement du théorème de Thalès, et d'autres produites après enseignement, pour ensuite mettre en évidence leur rôle dans l'apparition d'erreurs dès que les figures proposées s'en éloignent. Ainsi, dans un premier temps, nous complétons notre cadre théorique par les définitions de deux nouvelles notions que sont les figures archétypes et prototypes. Les erreurs types rencontrées après avoir fait varier les paramètres des prototypes obtenus, nous amènent à définir également les figures pathologiques et les figures pathogènes.

En ce qui concerne les variables numériques, nous cherchons à comprendre l'influence, sur une figure prototype, de la distribution des longueurs dans l'apparition d'erreurs caractéristiques statistiquement significatives sur trois plans : l'écriture des rapports littéraux, la mise en équation et sa résolution. Nous cherchons également connaître les conceptions des élèves au sujet de la mesure des longueurs. Les résultats que nous obtenons dans cette partie sont pris en compte dans l'élaboration de notre ingénierie.

I. Compléments du cadre théorique

I.1 Figures archétypes et figures prototypes

Pour préciser le concept de **typicalité,** nous introduisons deux notions nouvelles dont nous postulons l'existence : les **figures archétypes** et les **figures prototypes**.

Les **figures archétypes**[4] sont des produits culturels prégnants liés à des objets mathématiques antérieurs aux notions auxquelles ces dessins se rapportent directement.

Les **figures prototypes**[5] sont des dessins types produits très fréquemment par les élèves après un enseignement ayant pour principal sujet le résultat concerné par ces dessins. La forme que prend l'enseignement imprègne directement, de façon plus ou moins explicite, les représentations géométriques de l'élève en rapport à ce théorème. Ce sont des figures insufflées par l'enseignement du théorème auxquelles elles se rapportent ou des figures archétypes renforcées par une utilisation répétée. Nous avons déjà pu remarquer que les élèves, lorsqu'il leur est demandé de reproduire ou de construire une figure décrite oralement ou par écrit, placent presque toujours les deux parallèles du même côté du point d'intersection des deux premières droites, même si nous devons nuancer, car le positionnement des parallèles par rapport au point d'intersection peut dépendre aussi de l'angle que font les deux sécantes. L'identification et la reconnaissance des figures géométriques, et notamment des figures de Thalès, dépendraient de l'activité personnelle

[4] Dans Platon, les archétypes sont des idées, des formes, des modèles qui ont déterminé toutes les conditions de l'Univers.

[5] Un prototype, d'après le petit Robert, est un premier type, un modèle premier, un standard, un type, une forme de fabrication. Au sens figuré, cela désigne ce qui est conforme au modèle habituel, ce qui est sans originalité.

de l'élève qui lui ferait développer des représentations et des modèles spontanés qui joueraient un rôle décisif dans ses acquisitions.

A l'inverse des figures archétypes, les figures prototypes sont institutionnalisées. Notre attention a en effet été attirée par l'institutionnalisation des figures dites "clefs de Thalès" que nous avons pu trouver dans de nombreux ouvrages et dans certaines préparations de cours de professeurs que nous analysons dans la partie suivante. Ces dessins sont reproduits, à peu de choses près, de la même façon dans tous les ouvrages scolaires que nous avons consultés.

Pour compléter notre propos, les **figures archétypes** liées à une proposition correspondraient à un amalgame de **figures prototypes** antérieures à l'étude de cette proposition. C'est dans ce sens que ces **figures archétypes** sont également culturelles. Peut-être existe-t-il des **archétypes** en géométrie indépendants de tout prototype, mais cette hypothèse demanderait à être étudiée sur une vaste échelle, pour des cultures différentes, ce qui n'est pas l'objet de notre travail.

Ce qui caractérise aussi bien les **figures prototypes** que les **figures archétypes** est le fait qu'elles laissent des empreintes lors de l'application d'un théorème ou d'une définition. Une telle figure, dont les propriétés ajoutées ou reconnues comme importantes par l'élève sont des composantes contextuelles, comme, dans le cadre de notre étude sur le théorème de Thalès, la manière de lire une figure de haut en bas, a été appelé par Wermus (1976, 1978), un **prédicat amalgamé**. Ces sont les caractéristiques réelles ou erronées qui sont rattachées à une figure en dehors de toute description explicite faite dans un énoncé ou dans un théorème.

Ce qui nous décide à classer des dessins du côté des **figures archétypes** est leur fréquence d'apparition, significativement importante (plus de 35%), avant enseignement du théorème auquel ces dessins se rapportent. Pour une fréquence significative obtenue après introduction du dit théorème, nous parlons de **figures prototypes**.

I.2 Figures pathologiques et figures pathogènes

Pour tenter de répondre à certaines questions liées aux variations qu'il est possible de faire subir aux figures prototypes pour qu'elles puissent encore être reconnues par une majorité d'élèves, nous avons besoin de définir encore deux nouvelles notions. En utilisant le vocabulaire de la médecine, nous définissons : les **figures pathologiques**[6] et les **figures pathogènes**[7].

Nous formulons l'hypothèse que dans certains cas où il lui serait demandé d'identifier un dessin, le sujet ne repérerait pas sur la figure les relations indispensables à sa connaissance. La figure dans laquelle un théorème serait susceptible d'être appliqué ne serait même pas reconnue. Nous appelons alors ces figures des **figures pathologiques**.

Mais un autre cas pourrait se présenter. La figure serait reconnue mais entraînerait des erreurs caractéristiques et fréquentes, à des endroits précis de l'application du théorème et peut-être liées à des prédicats amalgamés. Dans ce cas, nous la qualifions de **figure pathogène**.

Nous allons à présent décrire de l'échantillon sur lequel porte les expériences avant de nous attarder, dans le chapitre 2, sur la description de leur élaboration et de leurs objectifs.

[6] D'après le Littré ; pathologique : "Relatif à l'état de maladie ; qui dénote un mauvais état de santé ; qui s'écarte du type normal d'un organe".
[7] D'après le Petit Robert ; pathogène : "Qui cause une maladie".

II. Présentation de l'échantillon

Les tests sont posés dans des classes de quatrième et de troisième de trois Collèges différents, Léon Blum et Martin Luther King de Villiers le Bel et George Clémenceau Paris $20^{ème}$, ayant en commun le fait d'être classés en Zone d'Education Prioritaire. Ainsi, les résultats sont un peu plus homogènes. Ayant moi-même enseigné dans le premier collège cité, et l'établissement suivant, tout récent, étant composé principalement d'anciens professeurs du collège Léon Blum qui a été scindé en 1998, nous avons eu la chance de pouvoir faire collaborer tous les professeurs de ces deux établissements à nos travaux de recherche. De plus, la connaissance d'un collègue très investi dans la vie du collège parisien nous a également facilité les mises en rapport avec les enseignants. Ceci nous a permis de disposer en tout de 12 classes de $3^{ème}$ et de 11 classes de $4^{ème}$, chaque classe ne participant à toutes les expériences.

La population de ces trois Collèges est très fréquemment d'ascendance étrangère et de milieux sociaux économiques le plus souvent défavorisés. Le Collège Léon Blum, par exemple et nous pourrions prendre n'importe quel des trois établissements, comporte 34 nationalités différentes. Chaque établissement possède entre 24% et 35% d'élèves d'origine étrangère.

Entre 34% et 40% des élèves ont 1 an de retard ; entre 12,5% et 19% ont 2 ans de retards et entre 0,50% et 3% ont 3 ans et plus de retards scolaires. Les taux de redoublements, d'années en années, en $4^{ème}$ et en $3^{ème}$, sont sensiblement les mêmes pour les trois collèges : entre 8% et 11% en $3^{ème}$. Les taux de passages en seconde se situent entre 43% et 58% pour les années scolaires comprises entre 1994 et 2001. Les taux d'obtention du Brevet National des Collèges se situent eux entre 54% et 70% et sont encore une fois comparables d'un Collège à l'autre. En classe de $6^{ème}$, le taux de réussite aux évaluations, entre 1994 et 2001 sont : en français de 51,2% à 59,8% et en mathématiques : de 45,5% à 57,2%. De plus, 35% à 37% des élèves sont boursiers. Répétons le, pour tous ces critères, ces trois établissements sont similaires et reflètent bien les établissements classés en ZEP.

CHAPITRE 2

ELABORATION ET MISE EN PLACE DES EXPERIENCES

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Introduction

Nous présentons dans ce tableau les objectifs des différents tests ; nous les détaillons ensuite.

N° de l'expérience et n° du test	Posée en classe 4ème	Posée en classe 3ème	Objectifs
Première expérience test 1 A	oui	oui	Recherche de **Prototypes**
Première expérience tests 2, 3, 4 A	oui	oui	Recherche **Archétypes**
Deuxième expérience	à partir du prototype I	à partir des prototypes I et II	Recherche figures : **pathologiques**, **pathogènes**
Troisième expérience	oui, sur le prototype I	oui, prototypes I et II	Tester la variable répartition des longueurs pour des calculs de longueurs
Expérience 3 : test supplémentaire	non	oui	Tester influence du prototype II sur le prototype I / répartition longueur
Quatrième expérience test n°3 1ère partie	non	oui	conceptions élèves / mesures de longueurs dans Thalès
Quatrième expérience test n°3 2ème partie	non	oui	conceptions élèves / mesures des longueurs et aux réels
Cinquième expérience	non	oui	Tester la variable répartition des longueurs pour le parallélisme

Par la première expérience, nous cherchons s'il existe chez les élèves des figures archétypes dont nous supposons qu'elles dépendent de la méthode de construction et de l'approche séquentielle du modèle. Ainsi, nous demandons aux élèves de construire quatre figures en suivant quatre programmes distincts de construction menant chacun à une figure de Thalès. Nous avons également remarqué qu'une seule version du théorème et de la figure qui lui est rattachée est souvent privilégiée dans les ouvrages scolaires et par les enseignants. Nous tentons de savoir si cette version correspond à un ou des archétypes. Dans un second temps, en ce qui concerne les prototypes relevant de l'appréhension perceptive des figures, nous demandons aux élèves, après enseignement du théorème, de construire quatre figures distinctes, sans programme de construction imposé, dans lesquelles il peut s'appliquer. Nous émettons l'hypothèse que certaines de ces formes géométriques apparaissent avec une fréquence plus notable que d'autres. Nous ne retenons que les deux premières productions pensant qu'il s'agit de celles qui sont mobilisées en priorité par les élèves. La question est de savoir également si les figures archétypes et prototypes sont les mêmes.

Au cours de la deuxième expérience, nous faisons varier les paramètres qui caractérisent les figures prototypes pour tenter de mettre en évidence des figures pathologiques ou pathogènes. Nous obtenons un très grand nombre de figures, ce qui nous incite à les répartir de façon aléatoire par élève et par classe. L'une des questions est de savoir le rôle que jouent les figures archétypes et prototypes dans l'apparition de figures pathogènes ou pathologiques dont elles seraient responsables.

Dans notre troisième expérience, nous travaillons à partir de figures prototypes en proposant toutes les répartitions des longueurs possibles et en recensant, en regroupant les erreurs commises par les élèves dans l'application l'écriture des rapports littéraux, dans la mise en équation et dans la résolution de ces équations. Nous tentons de trouver des erreurs récurrentes et nous montrons qu'elles se regroupent autour de conceptions de la part des élèves.

Dans notre quatrième expérience, nous tentons d'établir le caractère épistémologique de certains obstacles d'apprentissage par confrontation aux obstacles historiques. Nous formulons l'hypothèse que des erreurs persistantes à propos de la propriété de Thalès sont causées, en partie, par des conceptions sur la mesure des longueurs et leur comparaison. En particulier, nous cherchons à savoir si les élèves ne considèrent pas qu'il est nécessaire d'exprimer les mesures des longueurs à l'aide de la même unité pour appliquer le théorème de Thalès (Vergnaud, 1979) ou bien que la mesure d'un tout segment peut être trouvée de façon pratique quitte à changer d'unité.

Enfin dans notre cinquième et dernière expérience, nous reproduisons celle qui concerne l'influence de la répartition des mesures de longueurs sur les figures non plus sur l'application du théorème de Thalès mais sur sa réciproque.

I. La première expérience

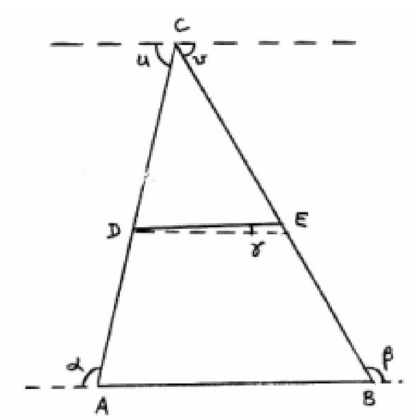
I.1 Objectifs et élaboration

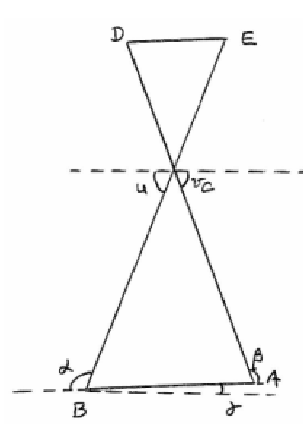
La primauté de l'appréhension perceptive sur l'interprétation figurale mise en évidence par Duval (1988, 1994), nous incite à prendre en compte, tout d'abord, les dessins réalisés par des élèves comme figures génériques. Nous faisons l'hypothèse que la représentation cognitive typique chez les élèves de cette situation ne comprend pas seulement les caractéristiques essentielles du théorème, mais également des propriétés superflues, qui s'y trouvent mêlées au moment de l'apprentissage ou de façon naturelle et spontanée de la part de l'élève. C'est en ce sens que les représentations typiques seraient à la source d'erreurs que nous mettons en évidence ultérieurement.

En mettant en évidence la fréquence de production de dessins liés au théorème de Thalès (Cordier, 1989), dont nous différencions la part due à l'enseignement (**prototypes**) de celle propre aux élèves et indépendante de cet enseignement (**archétypes**), il s'agit de construire une norme de **typicalité** pour ce théorème.

I.1.1 Mise en évidence des figures prototypes

Cette méthode passe par une catégorisation des réponses en rassemblant celles qui sont jugées de même type afin de caractériser une forme prototypique de la figure de Thalès. Pour cela, nous mettons en évidence une certaine fréquence, dans les productions, de valeurs des paramètres suivants (reportés sur ces deux figures) :





- L'orientation de la figure.

- La mesure et la caractéristique de l'angle commun aux deux triangles : aigu ou obtus.
- La position des parallèles par rapport aux côtés de la feuille ; nous établirons un intervalle auquel appartiendra la mesure de l'angle formé par une droite en question et le haut de la feuille.
- Le nombre de parallèles.
- Le nombre de sécantes.
- La figure dominante (papillon ou classique).
- L'angle commun étant fixé (on fait l'hypothèse qu'il sera en majorité aigu), mesures des angles extérieurs formés par les droites parallèles et les côtés.
- Mesure de l'angle formé par la parallèle passant par le sommet commun , le côté supérieur et un côté ; mesure de l'angle formé par la parallèle à la longueur de la feuille passant par le sommet commun et un côté des deux triangles.
- Rapport des longueurs des segments formés par les deux parallèles sur les côtés ou les deux sécantes. (quotient supérieur ou inférieur à 1).

Afin de faire apparaître des figures prototypes, le test 1.A (Annexe I 1, a) consistant à demander aux élèves de construire quatre figures différentes pour lesquelles le théorème de Thalès est censé s'appliquer, a été posé à des classes de 3ème et 4ème ayant déjà étudié le théorème de Thalès. Nous rappelons que la version triangle est au programme de quatrième alors que la version droites sécantes est enseigné au niveau troisième.

La phase a été collective et une durée de 5 à 10 mn était accordée pour répondre. Notons que trois tests qui suivent ont en fait été posés avant celui-là, puisque ces derniers devaient concerner des élèves n'ayant pas encore vu le théorème de Thalès, ou revu pour les élèves de troisième.

Nous communiquons tout d'abord, pour chacune des quatre figures reproduites par les élèves et en nous référant au dessin explicatif de base ci-dessus, le tableau récapitulant tous les types de dessins qui ont été obtenus, leur pourcentage d'apparition et enfin les dessins se rapportant à ce tableau.

Ensuite, pour mettre en évidence des figures prototypes, nous ne tenons compte que des deux premières figures en classe de 3ème. En effet, il est nécessaire de prendre en considération deux dessins puisque deux figures sont au programme de cette classe. Nous ne retenons uniquement que la première en classe de 4ème, puisqu'un seul type de figure est à l'étude. En classe de troisième, nous parlons de **figures prototypes** pour les dessins les plus fréquents aux productions A et B et pour les classes de quatrième au dessin A. Nous relevons, si elle existe, à partir de tableaux, la situation la plus représentative ainsi que les représentations moins ou peu représentatives. Les situations absentes de ces tableaux sont bien sûr non représentatives mais nous ne concluons pas pour autant que le théorème de Thalès n'est pas mobilisable de la part des élèves face à ces figures.

I.1.2 Mise en évidence de figures archétypes

Pour mettre en évidence d'éventuelles **figures archétypes**, nous devons tenir compte de **l'appréhension séquentielle** des figures. Dans une seconde partie de cette première expérience, il s'agit ainsi de connaître le degré de représentativité, auprès des élèves, des figures géométriques susceptibles d'être utilisées pour l'application du théorème de Thalès. Dans ce but, nous mettons en place une tâche de reproduction de ces situations.

Nous avons construit trois tests qui regroupent les différents types de constructions séquentielles d'une figure pour laquelle le théorème de Thalès peut s'appliquer, (deux droites parallèles puis deux sécantes, deux sécantes puis deux parallèles, un triangle et une parallèle à un des côtés, deux sécantes puis une parallèle à l'une des deux et une dernière droite coupant les trois premières). Ces tests, 2.A, 3.A, 4.A (Annexe I 1, b), ont été posés à différentes classes pour lesquelles la propriété étudiée n'avait pas encore été abordée. L'expérimentation se déroulait collectivement dans chaque classe. Un temps de 5 à 10 minutes par test, était imparti.

I.2 Résultats et interprétations

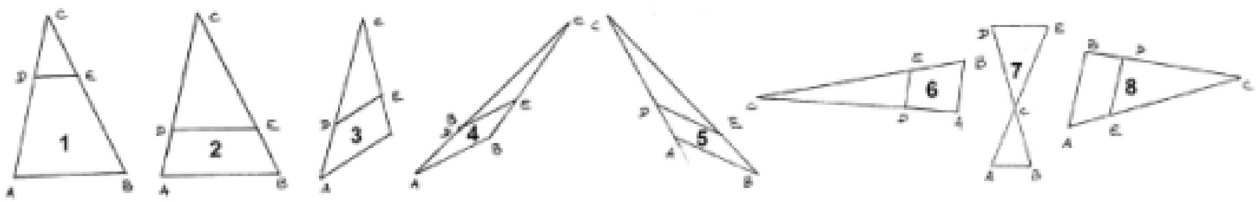
I.2.1 Test 1.A

1) Productions obtenues

Nous allons maintenant consigner les résultats obtenus dans les classes de 3ème. Les nombres des élèves étaient les suivants : (3ème 1 : 26 élèves, 3ème 3 : 25 élèves, 3ème 4 : 23 élèves, 3ème 5 : 25 élèves). Au total, 99 élèves ont participé à ce test.

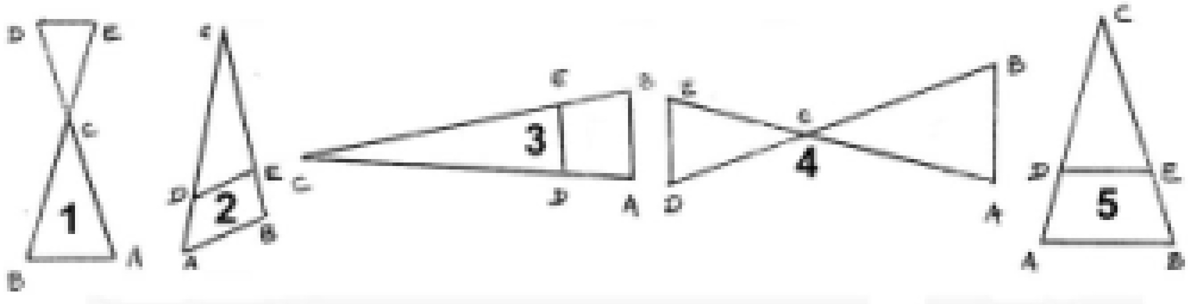
Variables	Valeurs	Description des figures A							
Angle α	obtus	×	×	×	×	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×	×	×	×	×
Angle c	aigu	×	×	×	×	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×		×	×	×
	obtus					×			
Angle *v*	aigu	×	×	×		×	×	×	×
	obtus				×				
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×	×					×	
	$\gamma \geq 10$			×	×	×	×		×
Type figure	1	×	×	×	×	×	×		×
	2							×	
Orientation	"droite"	×	×	×	×	×		×	
							×		
									×
CD/CA	≤ 1	×						×	
	≥ 1		×	×	×	×	×		×
Fréquence %		12	56	2	2	14	6	1	1
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4	figure 5	figure 6	figure 7	figure 8
		total 68							

Figures non complètes ou fausses : 5



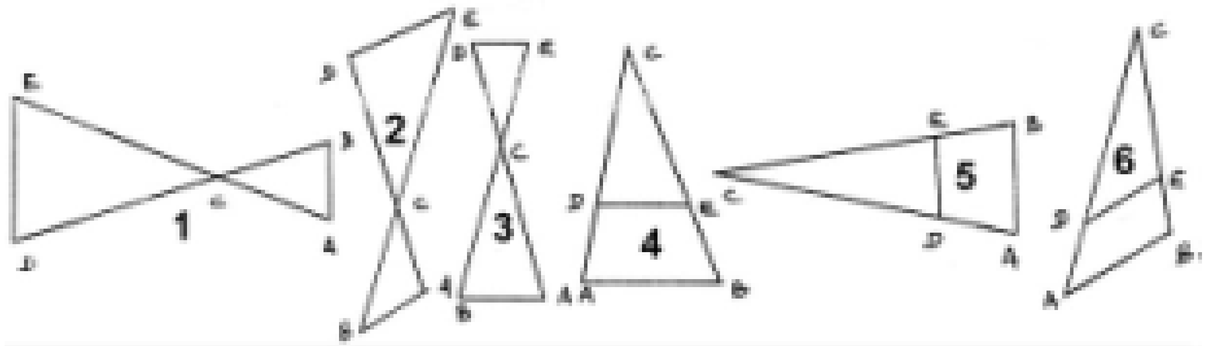
Variables	Valeurs	Description des figures B				
Angle α	obtus	×	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×	×
	obtus					
Angle *v*	aigu	×	×	×	×	×
	obtus					
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×				×
	$\gamma \geq 10$		×	×	×	
Type figure	1		×	×		×
	2	×			×	
Orientation	"droite"	×	×			×
				×		
					×	
CD/CA	≤ 1	×			×	
	≥ 1	×	×	×		×
Fréquence %		70	2	5	5	4
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4	figure 5

Figures non complètes ou fausses : 13



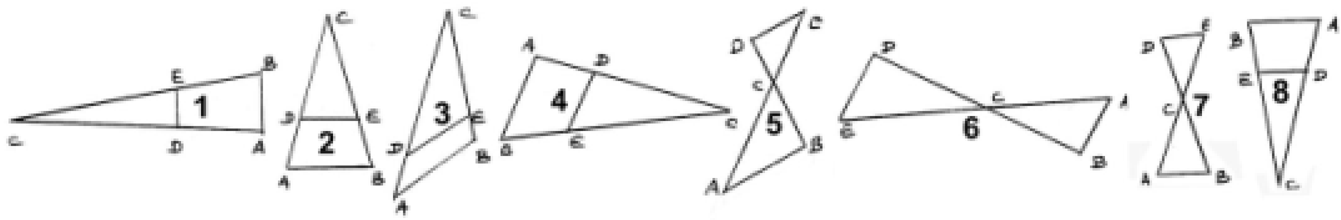
Variables	Valeurs	Descriptions des figures C					
Angle α	obtus	×	×	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×	×	×
	obtus						
Angle *v*	aigu	×	×	×	×	×	×
	obtus						
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$			×	×		
	$\gamma \geq 10$	×	×			×	×
Type figure	1				×	×	×
	2	×	×	×			
Orientation	"droite"		×	×	×		×
						×	
		×					
CD/CA	≤ 1			×			
	≥ 1	×	×		×	×	×
Fréquence %		2	1	16	28	20	8
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4	figure 5	figure 6

Figures non complètes ou fausses : 24



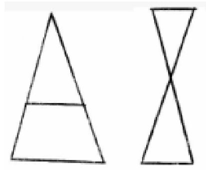
Variables	Valeurs	Description des figures D							
Angle α	obtus	×	×	×	×	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×	×	×	×	×
	obtus								
Angle *v*	aigu	×	×	×	×	×	×	×	×
	obtus								
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×	×					×	×
	$\gamma \geq 10$			×	×	×	×		
Type figure	1	×	×	×	×				×
	2					×	×	×	
Orientation	"droite"		×	×		×		×	
		×					×		
					×				
									×
CD/CA	≤ 1					×			
	≥ 1	×	×	×	×		×	×	×
Fréquence en %		6	32	2	2	9	12	3	3
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4	figure 5	figure 6	figure 7	figure 8

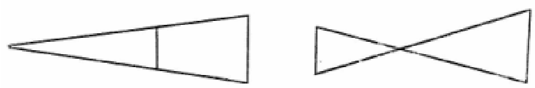
Figures non complètes ou fausses : 30



2) Analyses des productions

De toute évidence, il existe deux figures prototypes, celle représentée à 68% dans les productions A et celle représentée à 70% dans les productions B. Cela donne les représentations ci-contre. Notons que ces prototypes I et II sont également sur représentés aux productions C et D respectivement à 28%, 32% pour le prototype I et 16%, 9% pour le II. Une variante du prototype I, est de le représenter, toutes variables conservées par ailleurs, moins "droit", c'est à dire avec l'angle $\hat{\gamma} \geq 10°$. Pour les autres dessins qui apparaissent aux productions A et B, les fréquences sont trop basses pour que nous puissions considérer qu'il s'agit de prototypes. De même, les schémas C et D ne sont pas des prototypes ; au vu des pourcentages, tout au plus nous disons que ces figures sont pour les élèves représentatives de la situation de Thalès.





Figures représentatives III et IV

Ces résultats sont confirmés pour les quatre classes de 4ème auxquelles nous avons proposé un test similaire, tout au moins pour le prototype I et ses variantes. L'introduction de la seconde figure de Thalès en 3ème ne perturbe pas la fréquence à laquelle est représenté le premier **prototype**. Le fait qu'au niveau de cette classe le théorème soit réintroduit à partir de deux droites sécantes et non plus à partir d'un triangle comme en 4ème ne change en rien le très grand nombre de figures triangulaires de type I. Or, nous allons le voir maintenant, une construction qui débuterait par deux droites sécantes engendrerait inévitablement une figure de type II. Nous pouvons formuler l'hypothèse que le prototype I est prégnant même éventuellement dans l'application complète du théorème.

I.2.2 Test 2.A

Nous passons maintenant aux résultats obtenus aux tests 2.A, dans les classes de 3ème et de 4ème.

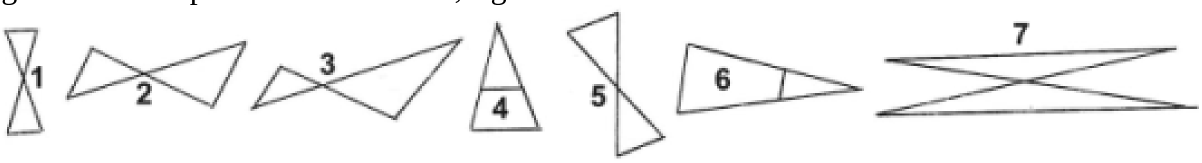
Rappelons que pour ce test, il s'agit de tracer tout d'abord deux droites sécantes, puis de construire deux droites parallèles qui coupent les deux premières. Les types de figures obtenues ne sont pas très variés, et les plus fréquents constituent des archétypes pour chaque mode de construction.

1) Productions et interprétations obtenues pour les classes de troisième

Le nombre d'élèves étaient les suivants : $3^{ème}$ 1 : 26 élèves ; $3^{ème}$ 3 : 24 élèves ; $3^{ème}$4 : 23 élèves ; $3^{ème}$5 : 25 élèves. Soit au total : 98 élèves.

Variables	**Valeurs**	**Description des figures de Troisième.**						
Angle α	obtus	×	×		×	×	×	×
	aigu			×				
Angle β	obtus	×	×	×	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×	×	×	
	obtus							×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×	×	×	×
	obtus							
Angle *v*	aigu	×	×	×	×	×	×	
	obtus							×
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×			×			
	$\gamma \geq 10$		×	×		×	×	×
Type figure	2	×	×	×		×		×
	1				×		×	
Orientation	"droite"	×			×	×		×
			×	×				
							×	
Fréquence en %		27	32	7	6	7	1	1
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4	figure 5	figure 6	figure 7

Figures non complètes ou fausses : 5 ; figures fausses mais récurrentes : 12



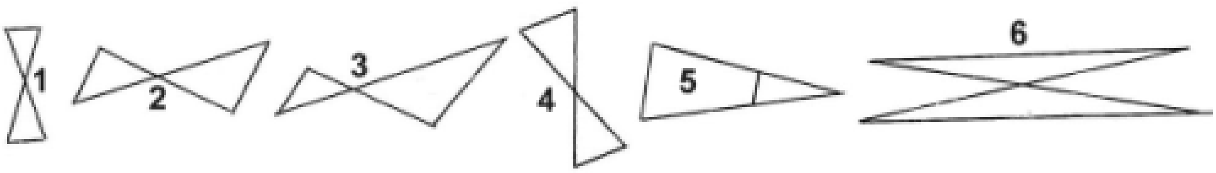
74% sont des figures papillons ; les deux figures **archétypes**, préexistantes dans l'esprit des élèves avant enseignement du théorème de Thalès, lorsque l'ordre du traçage est celui-là, sont les deux premières figures papillons précédentes c'est à dire le prototype II et la figure représentative IV. Encore une fois, bien que la version du théorème au programme de $3^{ème}$ parte de deux droites parallèles, et que la figure papillon ait été introduite à ce niveau, la **figure prototype** par excellence reste la figure I. Ce prototype et ses caractéristiques doivent être bien ancrés dans l'esprit des élèves. Cela posera sûrement quelques problèmes ultérieurement.

2) Productions et interprétations obtenues pour les classes de quatrième

$4^{ème}1$: 23 élèves ; $4^{ème}3$: 23 élèves ; $4^{ème}4$: 25 élèves ; $4^{ème}5$: 24 élèves ; $4^{ème}6$: 24 élèves ; $4^{ème}7$: 26 élèves. Soit 145 élèves.

Variables	**Valeurs**	**Description des figures de Quatrième.**					
Angle α	obtus	×	×		×	×	×
	aigu			×			
Angle β	obtus	×	×	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×	×	
	obtus						×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×	×	×
	obtus						
Angle *v*	aigu	×	×	×	×	×	
	obtus						×
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×					
	$\gamma \geq 10$		×	×	×	×	×
Type figure	2	×	×	×	×		×
	1					×	
Orientation	"droite"	×			×		×
			×	×			
						×	
Nombre		23	24	14	16	9	7
Fréquence en %		16	16,5	10	11	6	5
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4	figure 5	figure 6

Figures non complètes ou fausses : 32 soit 22% ; figures fausses mais récurrentes : 20 soit 13,5%.



Dans les tableaux qui précèdent ce dernier, nous n’avons pas fait figurer les effectifs du fait qu’ils étaient sensiblement égaux aux pourcentages. 58,5% des figures sont des figures papillons. Non pas que le premier type de dessin soit plus présent qu'en $3^{ème}$, mais cette différence est plutôt due aux nombreux dessins erronés.

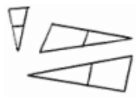
La conclusion générale de ce test 2.A, est que la figure papillon prédomine lorsque l'on commence par tracer deux droites sécantes. Il s'agit d'une **figure archétype** pour cette méthode de traçage mais en aucun cas il ne s'agit du **prototype** principal de la figure de Thalès. Malgré son fort pourcentage de présence ici, malgré la version en classe de $3^{ème}$ partant de deux droites sécantes, le **prototype** fondamental, après enseignement du théorème demeure le I, même si la figure II reste un **prototype** important, dans un second temps.

I.2.3 Test 3.A

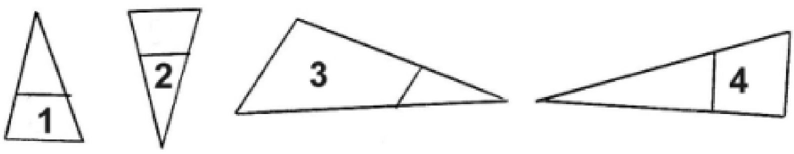
Nous allons à présent nous intéresser aux archétypes liés à la méthode de traçage suivante qui débute par le tracé d'un triangle et se poursuit par la construction d'une droite parallèle à l'un des côtés du triangle.

1) Productions et interprétations obtenues pour les classes de troisième :

Le nombre d'élèves dans chaque classe de 3ème est le même que précédemment, car ce test a été posé à la suite du test 2.A. Il y a en tout 98 élèves.

Variables	**Valeurs**	**Figures de Troisième**			
Angle α	obtus	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×
Angle *v*	aigu	×	×		×
	obtus			×	
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×	×		
	$\gamma \geq 10$			×	×
Type figure	1	×	×	×	×
Orientation	"droite"	×			
			×		
				×	
					×
Nombre		51	2	21	20
Fréquence en %		55	2	21	20
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4

Figures non complètes ou fausses : 2 soit 2%.



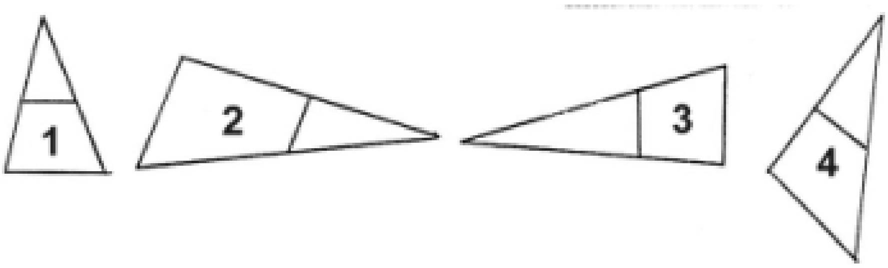
La **figure archétype**, pour cette méthode de construction en classe de 3ème, est clairement le prototype I que nous avons déjà abordé. L'enseignement du théorème de Thalès semble renforcer cet **archétype** qu'il transforme en **prototype**. Ce prototype très marqué par les variables d'orientation et des différents angles pourrait être prégnant dans l'application du théorème. Nous pouvons remarquer, comme cela a déjà été fait dans d'autres travaux entre autres ceux de Grenier[8] et d'Audibert[9], que des directions sont privilégiées par les bords de la feuille ou du cadre limitant le dessin, direction que l'élève ramène ici à son propre repère dans les activités liées au micro-espace. L'archétype I et les prototypes I et II sont fortement marqués par cette prégnance de "l'horizontale" et de la "verticale". Cela peut provenir en partie des habitudes, en occident, de

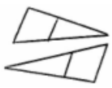
[8] GRENIER (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement secondaire en géométrie euclidienne.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble.
[9] Idem (1982).

balayage d'une feuille de gauche à droite, en pour les écritures allant dans ce sens, et de haut en bas.

2) Productions et interprétations obtenues pour les classes de quatrième :

Le nombre d'élèves dans chaque classe de 4ème est le même que précédemment, car ce test a également été posé à la suite du test 2.A. Il y a en tout 145 élèves.



Variables	Valeurs	Figures de Quatrième			
Angle α	obtus	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×
Angle *v*	aigu	×	×		×
	obtus			×	
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×	×		
	$\gamma \geq 10$			×	×
Type figure	1	×	×	×	×
Orientation	"droite"	×			×
			×		
				×	
Nombre		88	30	6	9
Fréquence en %		61	21	4	6
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4

Figures non complètes ou fausses : 12 soit 8%.

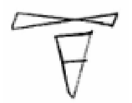
Nous retrouvons les résultats obtenus avec les élèves de troisième. La conclusion générale pour ce mode de construction est que **l'archétype** correspond à la figure I du début de ce chapitre. En partant de deux droites parallèles, la figure la plus fréquente est la figure papillon classique, alors qu'en partant d'un triangle, il s'agit de la figure I.

I.2.4 Test 4.A

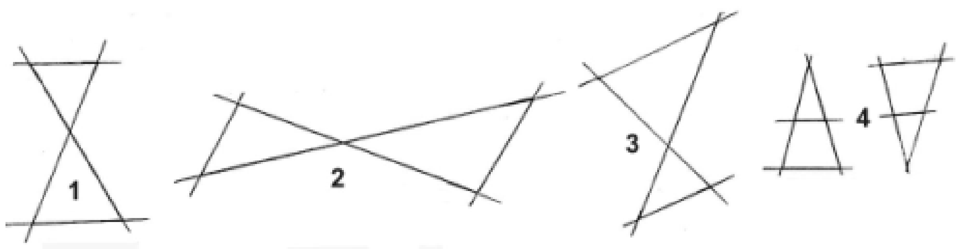
Nous allons maintenant traiter le dernier test. Le premier programme de construction consiste à tracer deux parallèles puis deux sécantes coupant ces deux parallèles et le second à tracer deux sécantes, une parallèle à l'une des deux et enfin une sécante à ces trois droites.

1) Productions et interprétations obtenues pour la classe de troisième :

(3ème 1 : 26 élèves, 3ème 3 : 25 élèves, 3ème 4 : 22 élèves, 3ème 5 : 26 élèves) soit au total 99 élèves.

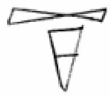
Variables	Valeurs	Figures troisième			
Angle α	obtus	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×
Angle *v*	aigu	×	×	×	×
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×			×
	$\gamma \geq 10$		×	×	
Type figure	2	×	×	×	
	1				×
Orientation	"droite"	×		×	×
			×		
					×
Nombre		88	30	6	9
Fréquence en %		61	21	4	6
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4

Figures non complètes ou fausses : 8 soit 8%.

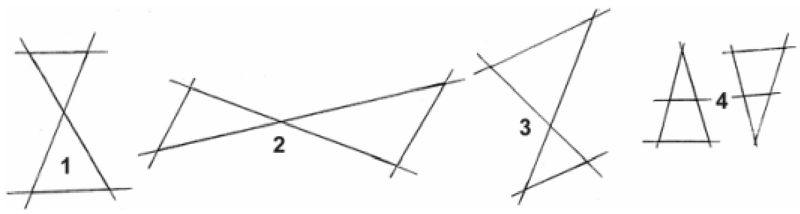


2) Productions et interprétations obtenues pour la classe de quatrième :

4ème1 : 23 élèves ; 4ème3 : 23 élèves ; 4ème4 : 22 élèves ; 4ème5 : 24 élèves ; 4ème6 : 25 élèves ; 4ème7 : 26 élèves. Soit 143 élèves.

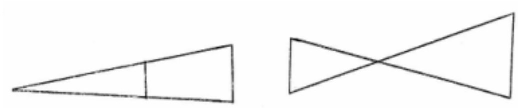
Variables	**Valeurs**	**Figures quatrième**			
Angle α	obtus	×	×	×	×
Angle β	obtus	×	×	×	×
Angle *c*	aigu	×	×	×	×
Angle *u*	aigu	×	×	×	×
Angle *v*	aigu	×	×	×	×
Angle γ	$0 \leq \gamma \leq 10$	×			×
	$\gamma \geq 10$		×	×	
Type figure	2	×	×	×	
	1				×
Orientation	"droite"	×		×	×
			×		
					×
Nombre		54	6	24	13
Fréquence en %		38	4	17	9
		figure 1	figure 2	figure 3	figure 4

Figures non complètes ou fausses : 15 soit 11% ; figure fausse mais récurrente : 31 soit 21%.



La figure archétype dans ce cas, est encore la figure papillon droite. Il en va de même pour le dernier programme de construction dont nous n'avons pas donné les tableaux, car les résultats sont identiques.

En conclusion, nous allons rappeler les résultats que nous avons obtenus. Deux figures prototypes ont été dégagées dans un premier temps. La figure I prédomine, mais le prototype II, en classe de 3ème est tout de même très présent également. D'autres orientations sont apparues, mais de façon beaucoup moins fréquente ; nous considérons ces cas comme représentatifs mais non comme des prototypes.



De plus, différents archétypes ont été mis en évidence. Sauf dans le cas du 3ème test où **l'archétype** est de type I, dans tous les autres tests, les **archétypes** sont de type II, avec des orientations relativement variées. **L'archétype** I domine lorsque la version de la construction de la figure choisie est la version triangle. Dans tous les autres cas, le papillon est largement majoritaire. Cela devrait donc être le cas pour les **prototypes** en troisième puisque la version choisie pour le théorème de Thalès est alors celle des deux droites sécantes. Mais nous avons pu voir que ce n'est pas du tout le cas.

II. Deuxième expérience

II.1 Objectifs et élaboration

Nous avons établi une première approche de la typicalité des représentations à la fin de la première expérience. A partir de ces figures typiques que nous avons mises en lumière, que nous appelons **prototypes** et pour lesquelles nous avons mis en évidence une certaine stabilité des variables que nous avons retenues et jugées pertinentes, nous allons maintenant faire varier tous ces paramètres. Ces variables sont, rappelons le (confer dessins de la première expérience : l'orientation, l'angle commun aux deux triangles (aigu ou obtus), les angles $c.\hat{\alpha},\hat{\beta};d.\hat{\gamma};e.\hat{u},\hat{v}$, et le rapport CD/AD (<< 1 ou >> 1).

Nous repérons tout d'abord les élèves pour lesquels les taux de réussites sont très élevés afin de confirmer le caractère prototype de certains dessins. Puis, pour ces mêmes élèves, nous observons l'évolution de ces taux de réussites suivant la figure concernée. Nous mettons en évidence les caractéristiques et les variables de **figures pathologiques** sous forme d'intervalles en les considérant comme telles lorsque leur taux de reconnaissance de la part des élèves compris entre 0% et 5%.

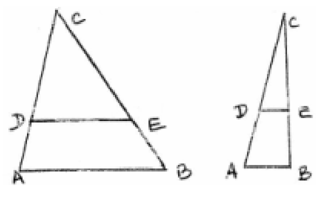
Nous mettons également en lumière des **figures pathogènes** en comparant les pourcentages de réussite obtenus à l'ensemble des figures prototypes I par rapport aux pourcentages relevés aux mêmes figures mais "retournées".

II.1.1 Les différentes variations que nous faisons subir aux dessins

a) Déformation du prototype I

Dans ce test réservé aux classes de quatrième sous cette forme, le prototype I va évoluer, dans la position "redressée", de la situation A à la situation G que nous allons décrire maintenant. A chaque fois, les positions des parallèles varierons de positions médium à des positions extrêmes, c'est à dire que nous pourrons avoir CD/AD << 1 ou CD/AD >> 1.

Situation A



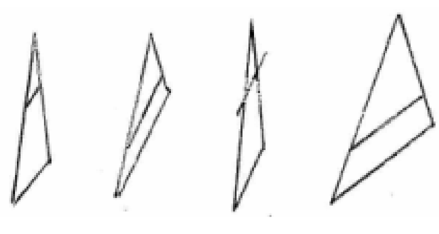
Angle $\hat{c}$ aigu, angles $\hat{u}$ et $\hat{v}$ aigus,

$1 \leq \hat{\gamma} \leq 10 \Rightarrow \hat{\alpha},\hat{\beta}$ obtus

L'angle $\hat{c}$ mesure 50° ou 10° ; de plus, les positions des parallèles varient de positions médianes à des positions extrêmes, c'est à dire : CD/AD << 1 ou CD/AD >> 1.

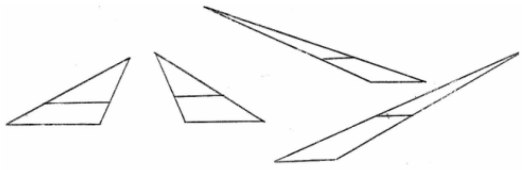
Nous obtenons alors 6 figures à partir des deux précédentes. Notons que nous ne pouvons pas reproduire toutes les figures de cette expérience, même en annexe.

Situation B



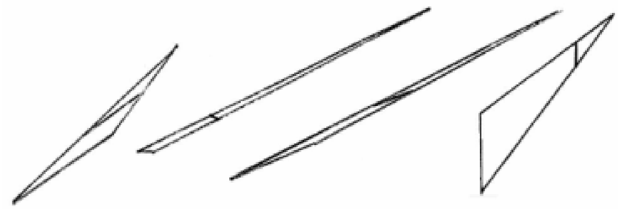
Angle $\hat{c}$ aigu , angles $\hat{u}$ et $\hat{v}$ aigus, $\hat{\gamma} \geq 10 \Rightarrow \hat{\alpha}$ aigu et $\hat{\beta}$ obtus. On prendra $\hat{\gamma}$ =30° et $\hat{\gamma}$ =55°. De plus les parallèles sont "montantes" ou "descendantes" et l'angle $\hat{c}$ mesure 50° ou 10°. En croisant toutes ces variables, on obtient 32 cas de figures.

Situation C



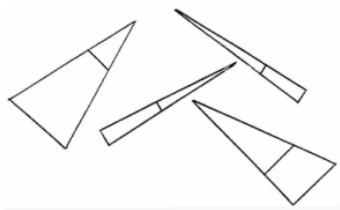
Angle $\hat{c}$ aigu. Angle $\hat{u}$ aigu et angle $\hat{v}$ obtus. $\Rightarrow \hat{\alpha}$ aigu et $\hat{\beta}$ obtus. $0 \leq \hat{\gamma} \leq 10$ Nous avons 8 figures médium et 8 maximum, soit en tout 16 figures.

Situation D



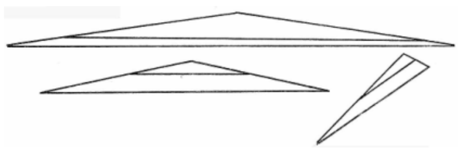
Angle $\hat{c}$ aigu.
Angle $\hat{u}$ aigu et angle $\hat{v}$ obtus.
$\hat{\gamma} \geq 10 \Rightarrow \hat{\alpha}$ aigu et $\hat{\beta}$ obtus.
On prend $\hat{\gamma}$ =30°et $\hat{\gamma}$ =55°.
Les deux droites parallèles vont jusqu'à se retrouver "verticales" par rapport aux côtés "verticaux de la feuille. En tenant compte des figures médium et des figures maximum, c'est à dire déformées au maximum, nous obtenons un nombre de 120 dessins.

Situation E



Angle $\hat{c}$ aigu.
Angle $\hat{u}$ aigu et angle $\hat{v}$ obtus.
$\hat{\gamma} \geq 10 \Rightarrow \hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ obtus.
Nous obtenons 12 figures différentes.

Situation F

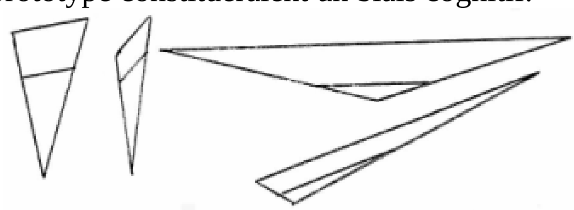


Angle $\hat{c}$ obtus $\Rightarrow$ angles $\hat{u}$ et $\hat{v}$ aigus
$0 \leq \hat{\gamma} \leq 10$ $\Rightarrow \hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ obtus
2 figures médium et deux figures maximum.

Situation G

Angle $\hat{c}$ obtus $\Rightarrow$ angles $\hat{u}$ et $\hat{v}$ aigus
$\hat{\gamma} \geq 10 \Rightarrow \hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ obtus. Troisième dessin ci-dessus.
En tenant compte de toutes les variantes, des médiums et des maximums, nous obtenons 12 figures.

Nous reprenons ensuite toutes les figures précédentes que l'on "renverse", c'est à dire, le "sommet" vers le bas. L'angle aigu et la figure prototype constitueraient un biais cognitif.



L'orientation "couchée", dans les deux sens, complète cet éventail de figures. Mais tous les cas du premier type ne sont pas transposables ici. Nous gardons seulement les variantes, A, B, F, et G.

Le prototype I dans ses transformations comprend 272 figures qui sont réparties sur un carnet.

b) Déformation du prototype II

En ce qui concerne le prototype II, nous reprenons les variations précédentes, A B C D E F G. La seule différence réside dans le fait qu'au niveau de l'orientation, il n'y a que deux cas : "redressée" et "couchée". Bien sûr ces cas ne seront posés qu'aux élèves de 3ème puisque cette figure n'est pas au programme de la classe de $4^{ème}$. Toutes ces figures se rapprochant du prototype II ont été rassemblées et séparées de celles constituant des variations sur le type I.

II.1.2 Description de l'expérience

Des cahiers de 17 feuillets ont été proposés aux élèves. Sur chaque feuille étaient représentées 6 figures différentes. Un exemplaire de chaque cahier a été reproduit cinq fois, c'est à dire que cinq élèves, indépendamment les uns des autres, ont réfléchi sur le même exemplaire. Mais notons tout de suite, à ce sujet, que les petits groupes excluant toute analyse statistique, cette étude ne peut avoir qu'une valeur clinique. La place de chaque figure a été tirée au sort. Les élèves ont eu 3 mn 30 s pour traiter une feuille. Le professeur faisant passer les tests a chronométré et a donné le signal à chaque fois qu'il a fallu changer de page. Ce test a été proposé à trois classes de $4^{ème}$ et à trois classes de $3^{ème}$ différentes des classes précédentes, du fait du temps matériel que ce type d'expérience demande. Le texte liminaire était rédigé comme suit :

> "Pour chacune des figures qui vont suivre, vous déciderez si la propriété de Thalès est applicable ou pas. Pour cela, vous pouvez, si vous le désirez, utiliser les instruments de la géométrie, prolonger des droites afin de vérifier sur le dessin qu'elles sont parallèles ou pas. Lorsque vous déciderez d'appliquer la propriété de Thalès, vous écrirez les égalités des trois rapports."

Puis dans chacune des six cases de chaque feuille, la question était rédigée de la façon suivante :

On peut appliquer le théorème de Thalès : oui ? non ? Si oui : $\frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

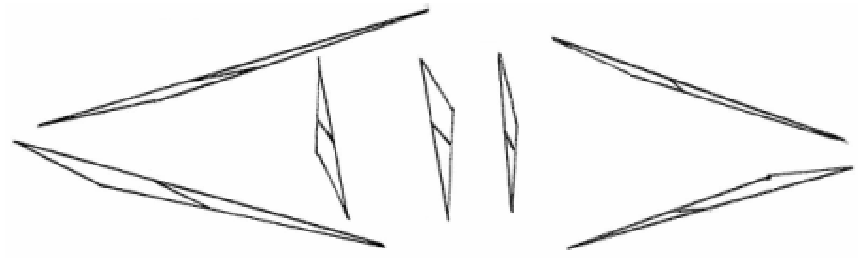
L'expérimentateur doit signaler qu'un certain nombre (non précisé) de figures géométriques ne permettent pas l'application du théorème de Thalès, et que dans ce cas, il faut l'écrire.

Certains artefacts peuvent fausser notre expérience. En effet, il faut veiller à mélanger les types de figures et faire attention à leur association, car il peut s'installer un phénomène de reproduction ou d'apprentissage. Par exemple, si nous voulons tester l'angle commun aux deux triangles, si les figures prototypes I et II sont placées successivement, une fois l'exercice 1 résolu, si le 2 est placé immédiatement après, on peut craindre que le 1 reste prégnant. Un risque non négligeable est bien lié à la répétitivité des épreuves et au fait que cette expérience nécessite pour être plausible, le test de nombreux cas de figures.

II.2 Résultats et interprétations

II.2.1 Les figures pathologiques

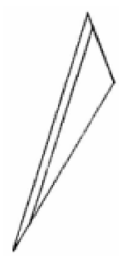
Nous commençons par donner les caractéristiques des **figures pathologiques** qui concernent le théorème de Thalès. Les figures qui, à tort, ne sont pas reconnues comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès sont indéniablement celles pour lesquelles au moins deux variables parmi les précédentes sont poussées à l'extrême. Donnons quelques exemples : l'angle commun aigu et l'angle $\hat{\gamma}$. L'angle commun aigu, la figure renversée et l'angle $\hat{\gamma}$.



L'angle commun aigu, la figure renversée et l'angle $\hat{\gamma}$.

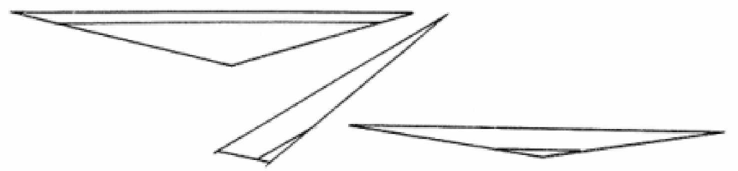
Notons tout de même qu'une figure caractérisée par l'angle commun très aigu et par les deux droites parallèles "verticales", ne peut pas être considérée comme pathologique puisqu'elle est reconnue à 42%, de même si on rajoute en plus CP/PL > 1. Voici deux autres figures pathologiques :

L'orientation, l'angle $\hat{\gamma}$, les angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ très aigus.

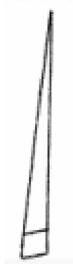


L'angle commun aigu, l'orientation, l'angle $\hat{\beta}$ très aigu et l'angle $\hat{\alpha}$ très obtus.

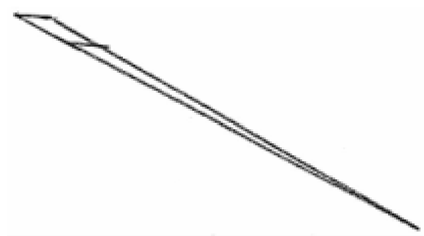
L'angle commun obtus, figure renversée, CP/PL > 1ou CP/PL < 1. L'orientation, CP/PL < 1.



L'angle commun aigu et CP/PL > 1.



L'angle commun aigu, l'orientation.



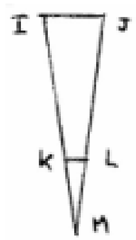
Notons que ces résultats sont valables pour les classes de 3ème et de 4ème. Intéressons-nous aux figures **pathogènes**.

II.2.2 Les figures pathogènes

Au niveau 4ème, le taux de réussite aux exercices faisant apparaître une figure du premier type est de 83%, alors que le taux qui concerne les mêmes figures mais "retournées" n'est plus que de 13%. L'orientation du prototype I aurait une prégnance sur l'application du théorème de

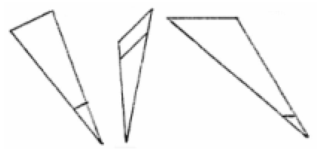
Thalès à la figure renversée. Nous pensons que ce type premier de figure fixe l'élève sur une lecture verticale..

La principale erreur est la suivante : JL/JM = IK/IM = IJ/KL

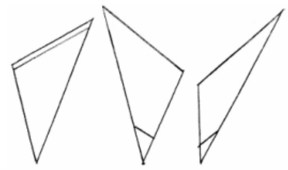


Le même type d'erreur, avec un pourcentage de réussite à ces exercices de 12%, se retrouve pour les mêmes figures renversées mais avec, par exemple $\hat{u}$ aigu et l'angle $\hat{v}$ obtus tout en étant une figure reconnaissable.

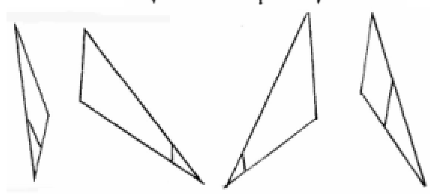
Nous obtenons trois dessins :



Une figure renversée avec CP/PL > 1ou CP/PL < 1 tout en demeurant encore une fois reconnaissable, engendre ce même type d'obstacle, avec un taux de réussite toujours de 12%. Nous avons également trois dessins.

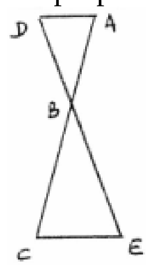


Une figure renversée complétée d'un angle aigu renforce ces erreurs. (10%)



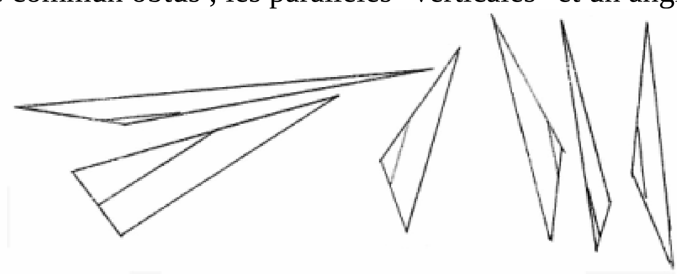
Nous notons que les pourcentages qui apparaissent entre parenthèses désignent les pourcentages de réussite qui concerne la figure dont nous parlons sur le moment.

Précisons que pour les classes de 3ème, des figures dites papillons ont également été proposées. Une lecture verticale a été observée lorsque le dessin était redressé comme ci-contre : (23%). Nous avons par exemple, AB/AC = DB/DE = AD/EC.

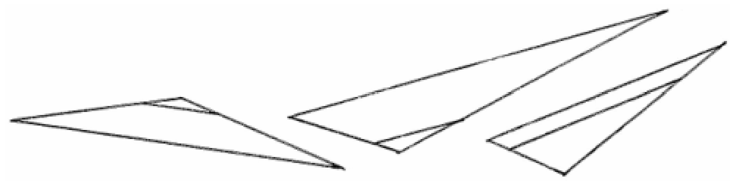


Dans ce cas, le prototype I influerait également sur l'application du théorème à la figure II dite papillon. Le prototype I aurait un autre type d'influence. En effet, l'angle commun aigu et l'orientation "redressée" engendre des obstacles caractéristiques tels que ceux que nous avons relevés sur les figures suivantes : même s'il ne s'agit pas de dessins renversés ni redressés, un angle aigu situé vers le haut de la feuille entraîne une lecture verticale de la figure. Cet angle aigu associé au prototype I engendre un biais cognitif.

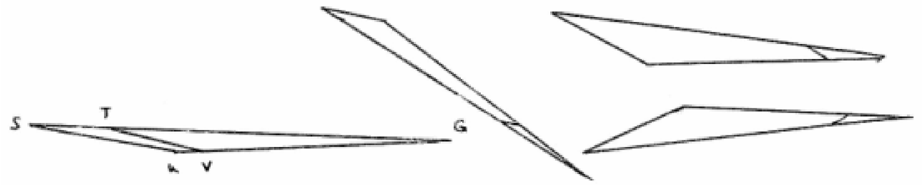
L'angle commun obtus ; les parallèles "verticales" et un angle aigu vers le haut.



La figure allongée III entraînerait une lecture de gauche à droite. Plus précisément, la présence d'un angle aigu "allongé" et une lecture de gauche à droite engendrerait un biais cognitif. L'angle commun obtus, les parallèles pratiquement "horizontales", et un angle aigu prononcé.(15%)

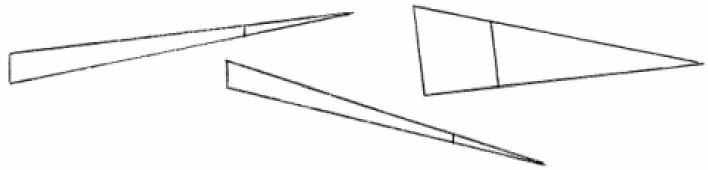


L'angle commun aigu, un angle aigu prononcé sur la gauche. (13%)
On obtient alors : ST/SG = UV/UG = UG/SG.

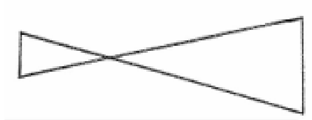


La lecture de gauche à droite laisse indéniablement son empreinte sur d'autres dessins.

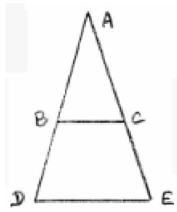
L'angle commun aigu, prononcé ou pas, l'angle $\hat{v}$ presque nul, ce qui donne l'impression que la figure est "allongée" , les parallèles verticales. (9%)



En 3ème ces résultats sont confirmés par des pourcentages à peu près identiques et, de plus, nous obtenons les mêmes figures pour la version papillon. Mais la figure papillon est également touchée par cet obstacle de lecture de gauche à droite des figures (38%).



Remarquons enfin, pour conclure cette partie, qu'une erreur type a été commise lors de l'application du théorème au prototype I. La figure étant réellement un prototype I, les élèves écrivent parfois : AB/BD = AC/CE = BC/DE. En classe de 4ème, cette erreur a été commise à un pourcentage de 6%, soit 35% des erreurs.
En 3ème, ce taux passe à 12%, soit 50% des erreurs au total.



Nous émettons l'hypothèse que la figure papillon, et la fragmentation effective des mesures des longueurs sur la figure accentuent cet obstacle en 3ème.

Il est admis dans de nombreux domaines que les habitudes de balayage visuel d'une figure font aller le regard de gauche à droite et de haut en bas. En ce qui concerne les erreurs apparaissants lors de l'application du théorème à un dessin dit "renversé", nous pensons que ces habitudes de lecture rentrent en ligne de compte pour la compréhension de ce phénomène. Mais nous pensons que ces habitudes sont renforcées, dans le cas du théorème de Thalès, par la présentation type des configurations dites de "Thalès".
En ce qui concerne la lecture que certains élèves font d'une figure dite "allongée", nous pensons que les habitudes de lectures de gauche à droite n'interviennent pas et qu'il s'agit plutôt, encore une fois, de la prégnance de certaines caractéristiques de figures représentatives de Thalès (III), en l'occurrence la présence d'un angle aigu. Il apparaît alors une polarisation visuelle pour cet angle aigu situé "sur la gauche", comme cette polarisation visuelle existe également lorsqu'un angle aigu se trouve en haut.
Conclusion : les élèves associent souvent le théorème de Thalès à une seule situation, un seul type de figure et un seul type de distribution des longueurs. Ce théorème ne semble acquis que dans des cas prototypes et donc dans des cas stéréotypés.

III. La troisième expérience

Nous nous intéressons maintenant aux différentes façons dont les mesures de longueurs peuvent se répartir sur une figure dite "de Thalès", ce qui devrait constituer, nous en faisons l'hypothèse, une variable didactique d'importance.

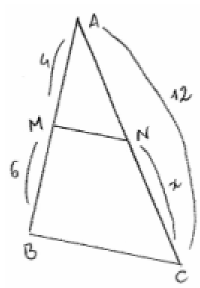
III.1 Objectifs et élaboration

III.1.1 En ce qui concerne la fragmentation

Nous cherchons à savoir s'il n'apparaît pas de théorèmes en acte, lorsque les côtés extérieurs sont fragmentés, qui inciteraient la plupart des élèves à utiliser telles quelles les données communiquées par le dessin. La question est de savoir en plus si cet hypothétique théorème en acte ne serait pas amplifié par l'introduction de la figure papillon en 3ème. Nous tentons également de savoir si les données sur la figure n'accentuent pas les erreurs sur les quotients littéraux en comparant ces résultats avec ceux obtenues aux tests précédents et qui faisaient apparaître ces fragmentations littérales. Pour cela, nous comparons les erreurs commises sur les quotients littéraux et ensuite sur les quotients numériques. Plus précisément, nous comparons les résultats obtenus par les élèves pour les figures à fragmentation unique et à congruence de l'autre côté avec les figures à fragmentation unique et les longueurs intérieures et également avec les figures à double fragmentation. Cela nous permet de mettre en évidence le fait que les fragmentations des longueurs, dans certains cas, constituent une difficulté conséquente.

III.1.2 Etablissement d'un gradient de difficulté

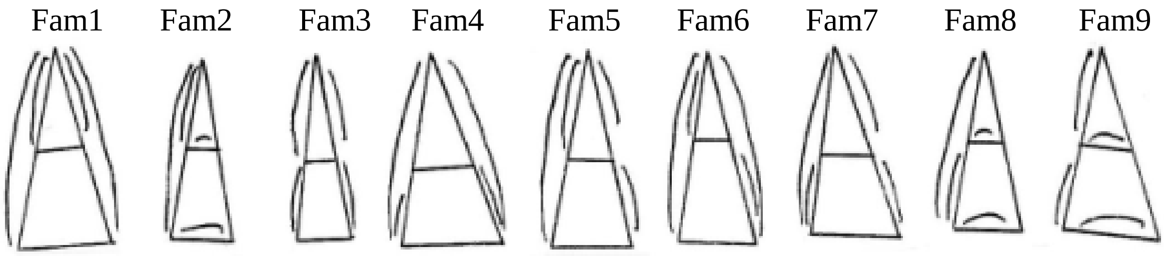
La version actuelle du théorème de Thalès engendrerait un grand nombre de figures non congruentes qui seraient à l'origine d'erreurs caractéristiques dans l'application du théorème et dans les mises en équations. Par exemple, la forme même de l'énoncé actuel générerait une surcharge cognitive chez les élèves caractérisée par des considérations purement algébriques. Donnons un exemple parmi d'autres : $4/(4 + 6) = (12 - x)/12$. Nous pouvons dire que nous considérons qu'il y a surcharge cognitive lorsque les pourcentages de réussite sont inférieurs à 20% et que la mise en équation est du type précédent.



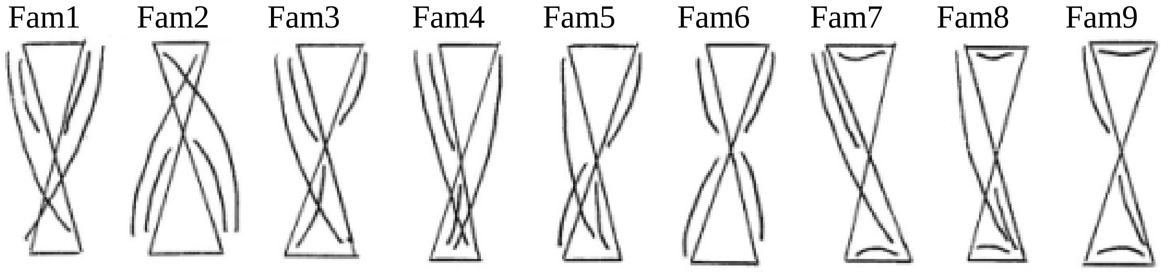
Ainsi, cette expérience consiste également à tenter d'établir une hiérarchie entre toutes ces répartitions des longueurs. Nous essayons d'établir un gradient de difficultés.

<u>1) Niveau d'organisation d'une figure par rapport à la distribution des longueurs :</u>

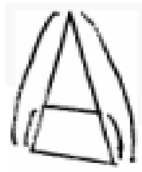
Nous nous intéressons tout d'abord aux résultats globaux suivant toutes les familles distributions types, en rajoutant à chaque fois que cela est possible, les "symétriques".
Les neuf familles ci-dessous reproduisent toutes les positions possibles de quatre mesures de longueurs, dont une, x, est inconnue, nécessaires pour calculer cette longueur x.



Comme pour le prototype I, nous avons répertorié toutes les figures possibles de part la répartition des longueurs, à partir du prototype II.



Afin de savoir si la répartition gauche droite a de l'importance, nous donnons ces résultats pour tous les cas en distinguant, lorsque cela est possible, les types gauches des types droits. Ensuite, pour chaque grande famille, nous faisons des comparaisons internes suivant la position de x, la longueur inconnue. Nous disons que l'on a affaire à un type de **distribution homogène**, par exemple difficile D, facile F, moyen M d'après le pourcentage de réussite, si à l'intérieur de cette famille de figures, suivant la position de la longueur dont on cherche la mesure, il n'y a pas de pourcentage qui se démarque réellement.



2) Méthode employée pour scruter ce gradient de difficultés

Nous avons tout d'abord utilisé la figure prototype I. Sur cette figure, nous avons répertorié tous les cas possibles de distribution de la longueur inconnue, uniquement sur les côtés extérieurs. Il y a alors deux choix possibles pour le côté sur lequel se trouve x, et sur ce côté, trois places sont possibles. La place étant choisie, il reste deux choix possibles pour la position de l'autre longueur ; et enfin, pour l'autre côté, il y a trois possibilités de distribution au total. Soit finalement 48 dessins envisageables.

Nous avons par ailleurs répertorié toutes les figures pour lesquelles les longueurs se répartissent à l'extérieur et à l'intérieur. Cela donne trois groupes de quatre. Nous doublons ce nombre, quitte à reproduire deux fois la même figure, pour que la répartition, par rapport aux figures ayant au départ huit versions possibles, soit plus équitable. Les élèves ont à écrire les rapports littéraux, puis numériques et enfin trouver la solution en résolvant une équation. Pour chaque cas de figure, nous nous intéressons aux pourcentages de réussite dans les rapports littéraux, dans les rapports numériques et dans les résolutions des équations.

Ce test a été posé à trois classes de 3ème (3ème3 : 25 élèves ; 3ème2 : 26 élèves ; 3ème4 : 25 élèves) et à trois classes de 4ème (4ème1 : 27 élèves ; 4ème4 : 24 élèves ; 4ème7 : 26 élèves). Sur la page de garde se trouvaient les indications générales :

> "Pour chacune des figures qui vont suivre, vous considérerez que les droites qui paraissent parallèles sont réellement parallèles. Vous appliquerez la propriété de Thalès sans rappeler les données.
> Vous compléterez, à chaque fois : . les rapports littéraux égaux.
> . l'égalité que vous conserverez pour calculer la longueur cherchée.
> . l'équation que vous obtenez.
> . suivie de sa résolution.
> Les longueurs portées sur le dessin ne sont pas réelles."

Puis, chaque page contenait quatre dessins accompagnés des inscriptions suivantes, que l'élève devait compléter :

* — = — = —   * On garde :.— = —

* Equation :.   * Résolution :

Chaque dessin a été tiré au sort afin d'obtenir une distribution aléatoire. L'ensemble des figures était réparti en deux groupes. Ces deux parties étaient constituées chacune de six feuilles et chaque feuille contenait quatre dessins. Les parties étaient reproduites, suivant le nombre d'élèves dans la classe, en 12, 13 ou 14 exemplaires pour les classes de 4ème et en 12 ou 13 exemplaires dans les classes de 3ème. Ce qui donne un échantillon de 38 ou 39 élèves pour chaque dessin en 4ème et de 37 ou 39 en 3ème. Les élèves avaient 10 minutes par feuilles, sachant que les tests allaient de toute façon déborder des 50 minutes de cours habituels ; le professeur étant prévenu de ce fait, il dut alors chronométrer le temps imparti pour chaque feuille.

Nous précisons que ce test a été posé aux 4ème après l'étude du théorème sur les droites parallèles dans le triangle et aux classes de 3ème juste avant le début du cours sur le théorème de Thalès afin de pouvoir éventuellement étudier l'influence de la figure papillon dans le test ultérieur. Mais une séance de révision composée d'exercices classiques a été mise en place en 3ème pour rafraîchir leur mémoire.

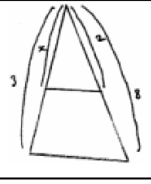
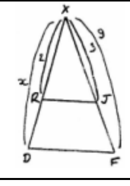
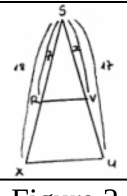
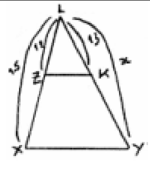
Pour le prototype II, nous obtenons 60 figures différentes qui sont tirées au sort, groupées par quatre sur une feuille, chaque élève ayant six feuillets à résoudre ou bien trois feuillets. Le temps par feuille est toujours de 10 minutes. Nous pensons retrouver les erreurs suivantes : pour les rapports littéraux, une lecture de haut en bas, imposée par le prototype I ; pour les fractions numériques, une lecture directe des données sur la figure ou une surcharge cognitive renforcée ici par un croisement des zones de regard.

III.2 Les résultats obtenus

III.2.1 Pour le prototype I

A gauche de chaque figure se trouvent les résultats niveau 4ème, et à droite niveau 3ème. Le premier pourcentage de chaque colonne correspond aux quotients littéraux justes, le second aux mises en équations justes et le dernier aux résolutions de ces équations correctement menées. Nous avons donné une appréciation globale (Difficile, Facile, Moyen) pour chaque figure *a posteriori*.

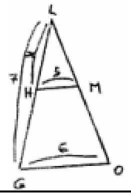
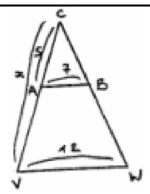
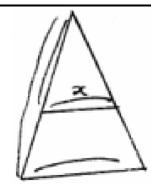
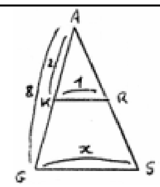
Famille 1 :

							
4e Figure 1	3e	4e Figure 2	3e	4e Figure 3	3e	4e Figure 4	3e
97%	97,5%	98%	97,5%	97%	97,5%	98%	97,5%
97%	94,5%	98%	97,5%	97%	94,5%	98%	97,5%
94,5%	93%	92%	95%	94,5%	93%	92%	95%
F	F	F	F	F	F	F	F

Analyses et interprétations

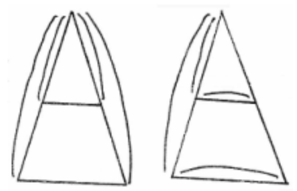
Les figures de cette famille sont congruentes. D'après les résultats homogènes que nous avons obtenus, nous pouvons considérer que nous sommes en présence d'un niveau **d'organisation homogène**. Les résultats étant très proches, ce premier type de distribution est **homogène**. Nous allons donner ultérieurement d'autres types de distributions **homogènes**, mais ces derniers le sont du fait d'un taux de réussite assez faible aux mises en équation. Pour le moment, nous communiquons un même type de résultats pour une autre famille.

<u>Famille 2 :</u>

							
4^{e} Figure 1	3^{e}	4^{e} Figure 2	3^{e}	4° Figure	3°	4^{e} Figure 4	3^{e}
100%	97,5%	95%	97%	97%	97,5%	95%	97%
100%	97,5%	95%	97%	97%	94,5%	95%	97%
97,5%	95%	95%	95%	94,5%	94,5%	92,5%	95%
F	F	F	F	F	F	F	F

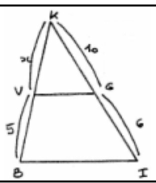
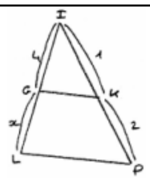
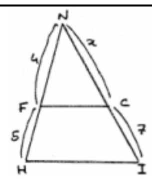
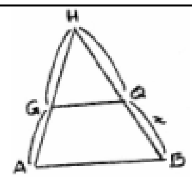
<u>Analyses et interprétations</u>

Comme précédemment, les dessins sont ici congruents. De plus, les résultats sont également homogènes. Ces résultats comparés de chaque figure étant encore très proches, le type de distribution est **homogène**. Dans ces deux familles, même la présence de la longueur inconnue au dénominateur d'une fraction ne constitue pas une difficulté. Notons également que la présence de la longueur inconnue sur la partie droite ou gauche n'a pas non plus d'importance. Pour toutes ces raisons, nous regroupons ces deux familles 1 et 2 dans un grand groupe que nous notons : Groupe I



<u>Groupe I</u>

<u>Famille 3</u>

							
4° Figure 1	3^{e}	4^{e} Figure 2	3^{e}	4^{e} Figure 3	3^{e}	4^{e} Figure 4	3^{e}
87%	90%	84%	92%	87%	92%	90%	90%
26%	38%	24%	23%	21%	38%	13%	39,5%
8%	20,5%	5%	20,5%	8%	20,5%	2,5	36%
D	D	D	D	D	D	D	D

Dans la version actuelle du théorème de Thalès, ces figures ne sont pas congruentes. Les erreurs que nous avons relevées sont à peu près toutes du même type ici. Sur la première figure, pour les quotients littéraux, les erreurs sont systématiquement du genre suivant : KV/VB = KG/GI = VG/BI. Les élèves lisent directement les données sur le dessin. De plus , la figure papillon accentuerait ce processus en classe de 3ème. Nous le voyons un peu plus loin.

Même lorsque les quotients littéraux sont justes, des erreurs relevant du même type d'amalgame se produisent.
Cela donne alors les quotients numériques suivants : x/5 = 10/6 ou x/5 = 6/10.
Ces égalités seraient vraies si la présence des rapports littéraux KV/VB = KG/GI = VG/BI ne les rendaient fausses. Et encore, elles ne correspondraient pas au théorème de Thalès tel qu'il est enseigné actuellement.
Aucune erreur du type x/5 = 10/6 ou x/(x + 5) = 10/6 n'a été relevée. Cela signifie que ces types de figures constituent une difficulté avérée et qu'en aucun cas il ne s'agit d'une surcharge cognitive comme cela est le cas pour d'autres exemples.
Enfin, les rapports littéraux peuvent être justes, les rapports numériques également, mais les erreurs peuvent provenir de la résolution des équations. Notons au passage que la méthode de résolution est systématiquement le "produit en croix" même lorsque cela alourdit l'étude. Dans le cas que nous avons retenu, l'équation que les élèves ont a résoudre est la suivante :

$$x/(x + 5) = 10/6.$$

Un premier type d'erreur rencontré est l'oubli des parenthèses :

(α) $16x = x + 5 \times 10$ puis, $16x = x + 50$.

Le deuxième type d'erreur qui a été rencontré est l'absorption d'une constante par un terme en x :

(β) $16x = 50 + 10x$ puis, $16x = 60x$.

Pour les classes de 3ème, ces erreurs algébriques sont moins nombreuses ; nous pouvons penser que cela est dû au fait que les techniques de résolution d'équations de ce type sont un peu mieux acquises à ce niveau.

Analyses et interprétations

L'analyse et l'interprétation que nous pouvons faire de ces résultats obtenus pour la famille 3 est que la fragmentation des longueurs constitue une variable didactique liée à la figure, à la fois pour ce qui concerne les rapports littéraux et les mises en équations. Les raisonnements qui sont liés à la résolution de ce type de questions se situent sur trois niveaux : le niveau géométrique lié aux figures (points droites segments etc.), le niveau des grandeurs ici les longueurs et le niveau numérique lié à la mesure de ces grandeurs. Cette expérience nous indique que non seulement les élèves ne maintiennent pas ces trois niveaux en même temps mais que la scission est parfois telle que soit le niveau géométrique prédomine directement sur le niveau numérique (les données sont lues directement sur le dessin que ce soit pour les rapports littéraux que pour les rapports numériques), soit dans un second temps, ce niveau numérique supplante l'approche géométrique initiale, c'est à dire qu'une fois les fractions littérales correctement exprimées, certains élèves reviendraient à une lecture directe des données numériques pour la mise en équation.

La première hypothèse que nous pouvons faire est que nous sommes en présence d'un **concept en acte** (Cortes, 1995), impliquant en l'occurrence l'identification d'une relation numérique entre deux ensembles de nombres indépendamment de la figure et des relations géométriques. Notons que ces deux ensembles de nombres sont représentés, sur ce type de dessin, pratiquement comme dans un tableau. Nous pouvons remarquer que le passage d'une fonction dite géométrique qui consisterait à mettre en correspondance des objets géométriques, à une fonction associant des mesures en relation avec les mêmes figures n'est pas automatique.

Mais plus qu'un concept en acte, ces procédés pourraient relever, pensons nous, d'un **habitus** qui désigne chez Bourdieu (1980) un ensemble de dispositions qui portent les sujets à agir et à réagir d'une certaine manière. Les dispositions engendrent des pratiques, des perceptions et des comportements qui semblent réguliers sans être consciemment coordonnés ni régis par aucune règle ou mécanisme. Par exemple, la distribution des longueurs est telle ici, qu'elle gommerait dès le départ ou éventuellement après avoir écrit correctement les rapports littéraux, l'approche géométrique.

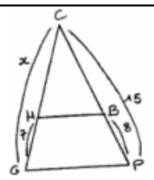
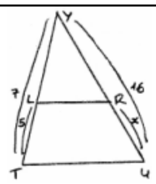
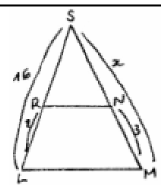
Un autre **concept en acte** ou **habitus** de ce type a été révélé par un autre auteur (Pfaff, 1995), mais pour l'approche projective du théorème de Thalès. L'auteur proposa l'exercice suivant. Les droites (VX) et (LR) sont sécantes et trois droites parallèles (VL), (UR) et (XS) les coupent respectivement en V et L, U et R, X et S. On a, en centimètres, LR = 3, LS = 6 et VU = 6. On demande de calculer VX. L, R, et S sont alignés dans cet ordre. Sans relier le dessin à une projection, les élèves de seconde professionnelle interrogés à ce sujet sont nombreux à dire que puisque pour passer de LR à LS il faut rajouter 3 il en va de même pour passer de VU à VX. Seule une relation "logique" rattachée aux nombres et indépendante encore une fois des propriétés propres de la figure proposée semble disponible spontanément chez les élèves.

Un autre exercice de ce type était proposé par Pfaff. La figure, l'orientation mise à part, était sensiblement la même, mais les nombres n'étaient plus 3, 6, 6 mais respectivement LR = 4, LS = 6 et VU = 10. On demande de calculer UX. Un élève raisonnait de la façon suivante : on passe de 4 à 10 en multipliant 4 par 2 et en rajoutant 2. Donc on passe de 6 - 4 = 2 en multipliant par 2 et en ajoutant 2 soit 6. L'auteur considère que l'élève a identifié la fonction projection mais qu'il n'identifie pas la linéarité de la fonction numérique projection et la remplace par une fonction affine. Nous pensons encore une fois que le raisonnement de cet élève est totalement indépendant de l'aspect géométrique de la tâche et que seule la recherche d'une relation logique entre les trois nombres guide l'élève dans sa quête de solution.

Ainsi, nous imaginons dans ces deux cas, et aussi dans celui que nous avons également étudié dans le cadre de la famille 3, qu'il ne s'agit pas réellement d'un **théorème en acte**, mais que l'attrait des nombres est tel qu'au premier abord, les élèves recherchent avant tout une relation qui lierait éventuellement ces nombres, indépendamment de l'énoncé de l'exercice, du contexte, ce qui peut aller à l'encontre des tâches à effectuer. C'est pour cette raison que nous considérons qu'il s'agit d'un **habitus**.

Dans les exemples de Pfaff, la version du théorème n'avait pas été imposée, chaque élève travaillant grâce à ces souvenirs de collège. Alors que dans notre activité, la version du théorème a été imposée, ce qui entraîne le fait que le "morcellement" des segments n'a engendré qu'un seul genre de relation numérique type que l'attente d'égalités de rapports impose. Nous pouvons penser que dans le cas où la version n'aurait pas été imposée, comme dans le cas où les élèves, au Lycée par exemple, auraient à mobiliser cette connaissance dans le cadre de la résolution d'un exercice pour lequel les longueurs latérales sont fragmentées et suivant les valeurs de ces longueurs, d'autres relations numériques auraient vu le jour qu'elles soient additives, multiplicatives ou mixtes (affines). Un autre type de distribution, qui concerne la famille 4, se rapprocher de ce cas et constituer également une difficulté caractéristique.

Famille 4 :

			
4^e Figure 1 3^e	4^e Figure 2 3^e	4^e Figure 3 3°	4^e Figure 4 3^e
98% 97,5%	98% 97,5%	97% 97,5%	98% 97,5%
24% 41,5%	26% 42%	21,5% 40,5%	21,5% 42%
8% 13%	10,5% 15,5%	8% 15,5%	8% 21%
D D	D D	D D	D D

Analyses et interprétations

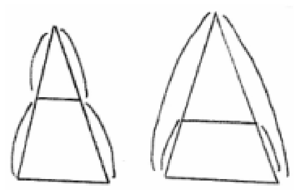
Contrairement à la famille précédente, les erreurs sur les quotients littéraux sont relativement rares. Elles sont, si nous nous référons à la figure 2 de cette famille, de la forme suivante : GH/GC = PB/PC.

Le dessin, symétrique, fait référence. Mais il est moins prégnant que le précédent. De plus, pour une conclusion du théorème de Thalès correcte, nous avons trouvé des mises en équations équivalentes à ce que nous avons déjà vu : 7/x = 15/18 ou 7/x = 8/15.

Un seul type d'erreur liée à une mise en équation complexe et non à la prégnance de la figure, est à noter : (x - 7)/(x +7) = 7/15, mais cela semble assez rare.

Ce type de distribution provoque moins d'erreurs dans les expressions littérales ou même dans les mises en équations que le dernier exemple, mais il en demeure quelques-unes tout de même. La difficulté provient principalement de la résolution des équations ou les types d'erreurs (α) et (β) se sont également retrouvées.

Bien que des différences subsistent entre les deux familles surtout quant aux écritures littérales, nous considérons qu'elles définissent le groupe II.

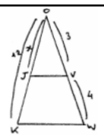
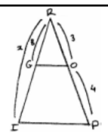
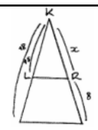
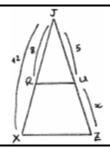
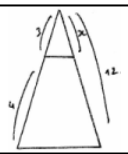
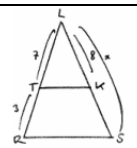
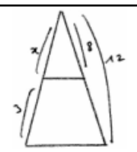
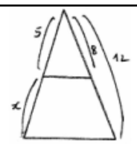


Groupe II

Globalement, nous avons trouvé jusqu'à présent quatre familles dont les distributions types sont **homogènes**, c'est à dire qu'à l'intérieur de chaque groupe, il n'y a pas de différences significatives du point de vue des résultats récoltés. Les deux premières familles ne représentent pas de difficultés majeures, à la différence des deux suivantes. En effet, les familles 3 et 4, représentent une difficulté de par, surtout pour la famille 3, la fragmentation des longueurs. Les élèves lisent les données directement sur le dessin qui est caractéristique et qui, en quelque sorte, imprègne leur esprit. **L'appréhension perceptive** prend le pas sur **l'appréhension opératoire**, qui permettrait de rendre la **figure congruente** directement avec la version actuelle du théorème, voire l'appréhension discursive, bien qu'il ne s'agisse pas d'une réelle tâche de démonstration. Pour les figures en question, il y a congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique possible.

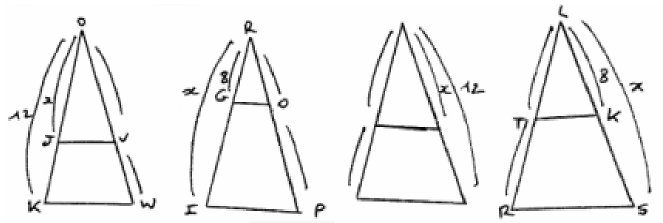
Notons que l'adoption d'une version du théorème de Thalès "interne", comme nous la présentons dans l'ingénierie, rendrait possible ce type d'argument pour les familles 3 et 4, c'est à dire le **Groupe II**, puisqu'alors les figures seraient rendues congruentes.

Famille 5 :

			
4° Figure 1 3^e	4° Figure 2 3^e	4° Figure 3 3^e	4° Figure 4 3^e
100% 100%	100% 100%	100% 97,5%	97% 100%
68% 71%	66% 73%	31% 40,5%	31% 42%
68% 71%	66% 71%	15% 20,5%	13% 21%
M M	M M	D D	D D
			
4° Figure 5 3^e	4° Figure 6	4° Figure 7 3^e	4° Figure 8 3^e
100% 100%	97% 100%	100% 100%	97% 100%
71% 74%	76% 79%	39% 47%	26% 42%
71% 74%	74% 74%	13% 21%	15% 24%
M M	M M	D D	D D

Analyses et interprétations

Encore une fois, l'orientation gauche droite n'a apparemment pas d'importance. Mais nous ne sommes tout de même pas ici en présence d'un type de distribution **homogène**. Mises à part les expressions littérales, les dessins semblent ce rassembler en deux groupes qui se définissent suivant le fait que la longueur cherchée se trouve sur les côtés fragmentés ou pas. En clair, le premier ensemble comprend les figures pour lesquelles le côté congruent contient x, et le second les figures où x n'est pas du côté congruent. Les figures du premier ensemble ne peuvent pas être classées dans le **Groupe I**, par le seul fait de la différence des pourcentages concernant les quotients numériques et la résolution des équations, qui sont plus faibles ici. Ces figures ne sont pas non plus concernées par le **Groupe II**, pour les mêmes raisons, les pourcentages en question étant alors plus élevés. Nous nous trouvons à un niveau non homogène. Nous obtenons ainsi un groupe III qui est complété par d'autres figures qui sont analysées ultérieurement.



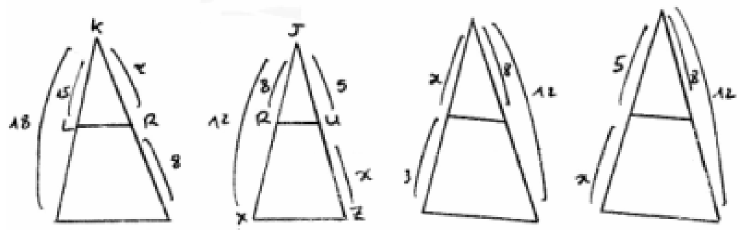
Groupe III

Les deux premiers groupes que nous avons mis en évidence ne peuvent pas être complétés de la même façon, même si des pourcentages globaux se rapprochent des leurs, du fait qu'ils représentent deux types de **distributions homogènes**.

Les erreurs rencontrées à la mise en équation sont du même type que celles déjà rencontrées pour le groupe II : pour la figure 1 : $x/12 = 3/4$.

Les résolutions d'équations n'ont pas posé de difficultés notables.

Lorsque la longueur inconnue se trouve du côté fragmenté, les pourcentages 2 et 3 sont encore différents de ce que nous avons pu relever jusqu'à présent. Ils sont relativement stables, les uns par rapport aux autres, pour les figures (3), (4), (7) et (8). Ces résultats sont plus élevés que ceux obtenus pour les figures du groupe II et moins importants que ceux du groupe I. De plus, en ce qui concerne les figures de la même famille et rassemblées dans le groupe III, des différences significatives sont à noter dans les mises en équation. Cela provient du fait de la présence de la longueur du segment inconnue du côté des longueurs fragmentées. Les élèves semblent avoir plus de mal à mettre en équations dans ce cas. Il s'agit d'une nouvelle difficulté significative. Pour ces raisons, nous rassemblons les figures (3), (4), (7) et (8) de la famille 5 dans le groupe IV non homogène.

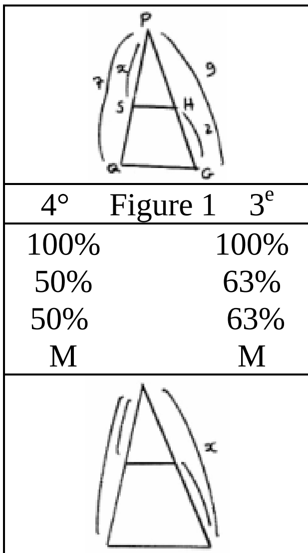
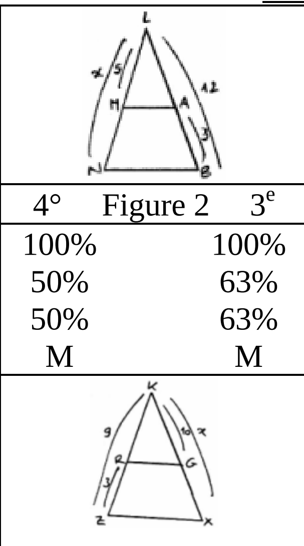
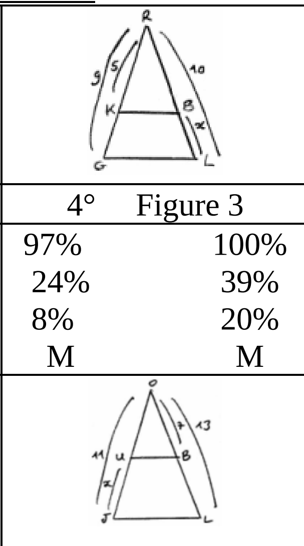
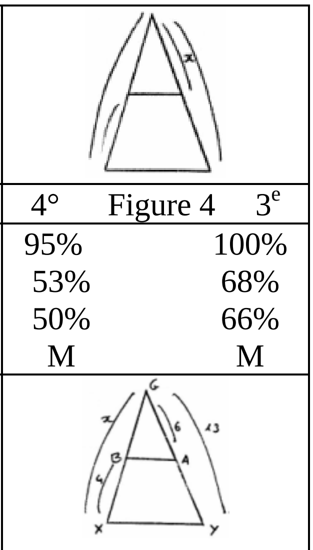


Groupe IV

Avant de donner explicitement les caractéristiques de ce groupe, nous détaillons les types d'erreurs rencontrées. Les mises en équations erronées ont déjà été rencontrées antérieurement, dans le groupe II ; elles sont du type, pour la figure 3 : $15/18 = x/20$.
Mais nous avons vu apparaître également l'erreur suivante : $4/12 = 5/5x$ (figure 4).

En ce qui concerne les résolutions d'équations, les erreurs $^{(\alpha)}$ et $^{(\beta)}$ sont également présentes. Une nouvelle, simplification fractionnaire pour une addition, est mise à jour lors de la résolution de l'équation de la figure 4 : $^{(\delta)}$ $4(5 + x) = 125$; $4x = 12$; $x = 12/4$.

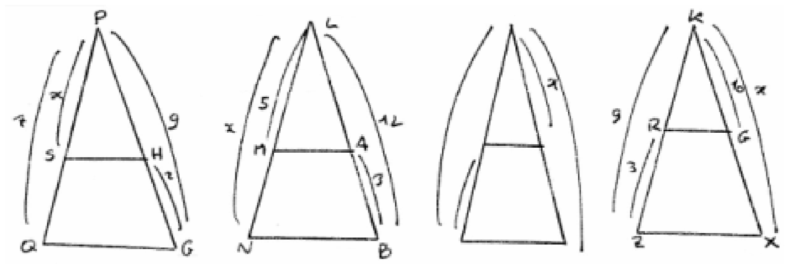
Famille 6 :

			
4° Figure 1 3^e	4° Figure 2 3^e	4° Figure 3	4° Figure 4 3^e
100% 100% 50% 63% 50% 63% M M	100% 100% 50% 63% 50% 63% M M	97% 100% 24% 39% 8% 20% M M	95% 100% 53% 68% 50% 66% M M
4° Figure 5 3^e	4° Figure 6 3^e	4° Figure 7 3^e	4° Figure 8 3^e
100% 100%	100% 100%	100% 100%	100% 100%

21%	37%	55%	66%	21%	34%	24%	37%
10,5%	16%	55%	66%	8%	13%	10,5%	13%
D	D	M	M	D	D	D	D

Analyses et interprétations

Ces distributions non symétriques ne semblent pas poser des difficultés comme cela a été le cas pour les familles 3 et 4. Les figures 1, 2, 5, et 6, au vu des résultats, sont regroupées. Malgré tout, nous ne les insérerons pas dans le groupe III, car les erreurs de mises en équation sont ici plus importantes, même si par la suite, les résolutions de ces équations ne posent aucun problème. Les erreurs sur les fractions quotients sont typiques : (figure1) x/7 = 2/9 ou x/7 = 9/2. Les données sont lues sur la figure, bien que les premières égalités soient justes. Les résultats étant tout de même proches de ceux obtenus au groupe III, sauf pour les quotients littéraux, nous créons le groupe III bis.



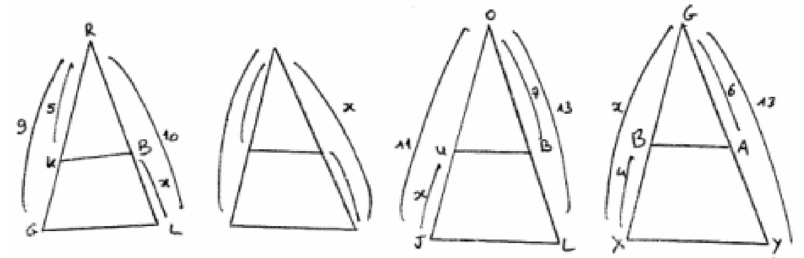
Groupe III bis

Les figures restantes pourraient être éventuellement rapprochées du groupe IV ; mais les résultats aux fractions littérales et aux fractions numériques sont différents. Les erreurs sont tout de même du même type :

- lectures directes pour les premières du type, c'est à dire pour la figure 3 : 5/9 = x/10
  ou, pour la figure 7 : 11/x = 7/13,
- erreurs $^{(\alpha)}$ et $^{\beta)}$ pour les secondes.

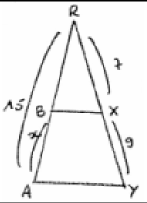
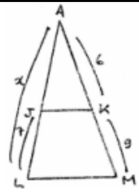
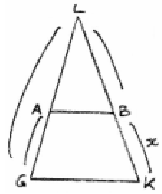
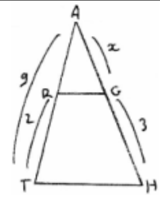
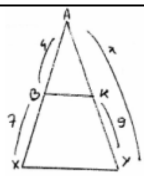
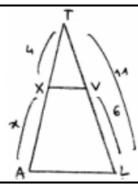
Pour autant, la position de x, grand côté ou reliquat, ne paraît pas importante pour les mises en équations de ces types de distributions des figures 3, 4, 7, 8.

Pour tout de même montrer le rapprochement que l'on peut faire, nous créons le groupe IV bis.



Groupe IV bis

Famille 7 :

			
4° Figure 1 3^e	4° Figure 2 3^e	4° Figure 3 3^e	4° Figure 4 3^e
100% 100% 10,5% 10,5% 2,5% 5% TD TD	97% 100% 8% 15% 0% 8% TD TD	100% 100% 2,5% 8% 0% 5% TD TD	97,5% 100 % 5% 15,7% 2,5% 8% TD TD
			
4° Figure 5 3^e	4° Figure 6 3^e	4° Figure 7 3	4° Figure 8 3^e
100% 100% 8% 17,9% 0% 8% TD TD	100% 100% 2,5% 13% 0% 8% TD TD	100% 100% 8% 10% 0% 2,5% TD TD	100% 100% 8% 10% 2,5% 5 TD TD

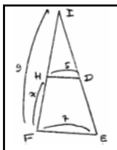
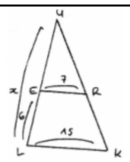
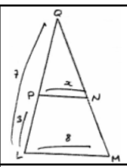
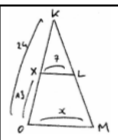
Analyses et interprétations

Nous pouvons considérer qu'il s'agit d'un type de **distribution homogène**, mais différent du premier groupe par le seul fait que les pourcentages de réussite sont diamétralement opposés. La position de l'inconnue x n'est pas prépondérante. Les quotients littéraux ne constituent pas une difficulté. Par contre, les fractions numériques comportent des erreurs que nous avons déjà rencontrées et d'autres nouvelles. Nous les répertorions en prenant la seconde figure pour référence : x/7 = 6/9 ou x/7 = 6/15 ; x - 7/x = 6/9 ou x - 7/x + 7 = 6/9. L'élève a pu se concentrer sur un côté pour que le quotient soit juste, 6/15, et le fait que l'autre partie soit également **non congruente** mais d'une autre forme, ne lui permet pas de trouver le quotient correct (x/7). Pour ces types de figures, les erreurs sont plus dues à une surcharge cognitive que pour les figures rencontrées dans les familles 1, 2, 3, 4, 5 et 6 car soit les caractéristiques du dessin constituaient en soi un biais cognitif, soit seul un côté n'était pas congruent. Les figures de cette famille comportent les distributions des longueurs les plus complexes et constituent un nouveau groupe, le groupe V.

Groupe V

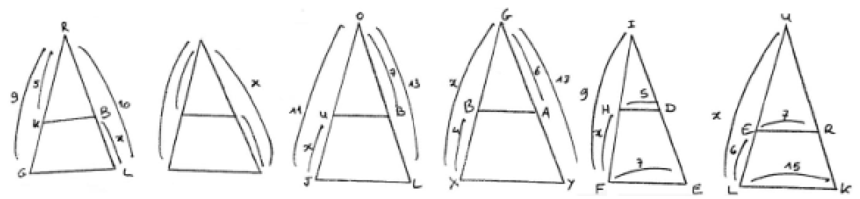
Les erreurs sont souvent ici liées à la résolution des équations $^{(\alpha)}$ et $^{(\beta)}$.Ont été répertoriés également des absences de réponses, et des erreurs liées au "produit en croix" et à la transposition. Nous passons maintenant à la famille suivante. Nous ne donnons les résultats que pour quatre figures, la symétrie n'ayant toujours pas d'influence.

<u>Famille 8 :</u>

							
4^{e} Figure 1	3^{e}	4^{e} Figure 2	3^{e}	4^{e} Figure 3	3^{e}	4^{e} Figure 4	3^{e}
100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
20%	31,5%	24%	34	50%	66%	55%	66%
8%	16%	8%	13%	50%	66%	55%	66%
D	D	D	D	M	M	M	M

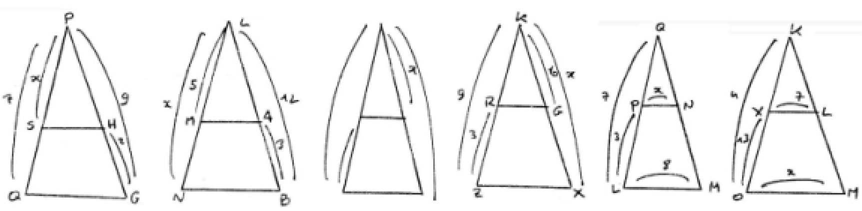
<u>Analyses et interprétations</u>

Les erreurs caractéristiques liées aux figures 1 et 2, sont très proches de celles liées aux figures 7 et 8 de la famille 6. Les pourcentages sont également très proches, à tous les niveaux. Par conséquent, nous complétons ce groupe IV bis avec ces deux figures.



<u>Groupe IV bis complété</u>

Nous pouvons de même remarquer que les figures 3 et 4 présentes sont à rapprocher du groupe III bis, de par les pourcentages de réussite très proches et du fait que les erreurs, que nous ne détaillons pas d'ailleurs, sont de même type. Nous complétons donc le groupe III bis par ces deux figures.



<u>Groupe III bis complété</u>

III.2.2 Pour le prototype II

Il ne reste qu'une colonne de pourcentages, car seuls les élèves de troisième ont été testés.

Famille 1 :

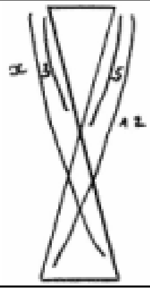
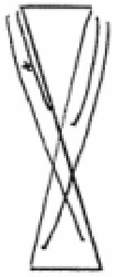
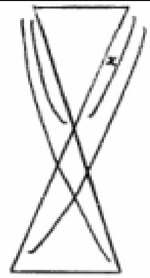
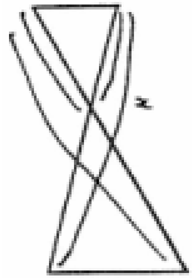
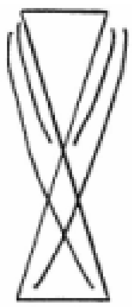
			

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
93% 72% 50% M	97% 74% 54% M	100% 70% 50% M	97% 78% 56% M

Analyses et interprétations

Les résultats sont suffisamment proches pour rassembler ces figures dans le même Groupe A.

:



Groupe A

Les erreurs commises aux quotients littéraux sont du même type ; si nous prenons la première figure pour référence, on obtient : AB/AC = DB/DE = AD/EC (a). La lecture de la figure de haut en bas, sur le modèle de ce qui est correct pour le prototype I, est adoptée ici à tors. Le prototype I semble prégnant sur cette figure. La position de la longueur inconnue n'a apparemment pas d'importance. Les erreurs commises pour les mises en équations relèvent soit d'une lecture directe des données sur la figure 3/x = 5/12, soit d'une inadéquation des fractions littérales avec les fractions numériques qui pourraient pourtant être justes : 3/x - 3 = 5/7 alors que l'élève à initialement marqué AB/AC = DB/DE = AD/EC, soit d'une surcharge cognitive : 3/x = 5/7, 3/x - 3 = 5/7.

Famille 2

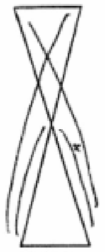
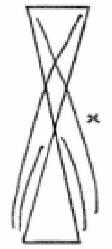
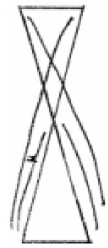
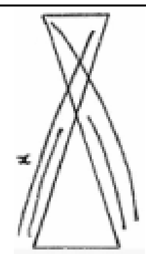
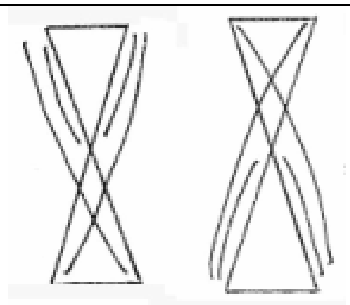
			

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
97% 70% 52% M	94% 72% 55% M	95% 76% 51% M	100% 75% 52% M

:



Groupe A

Analyses et interprétations

L'ensemble de ces figures sont rattachées au groupe A précédent du fait de la similitude des pourcentages et des difficultés rencontrés par les élèves dans les deux familles. Le même type d'erreurs sur les quotients littéraux sont apparues ici ; une lecture verticale est sûrement encore à l'origine de ce fait. Les obstacles liés aux mises en équations et les erreurs liées à leur résolution sont également similaires.

Famille 3

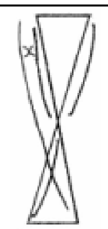
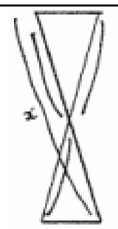
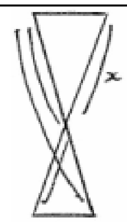
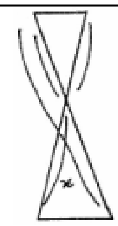
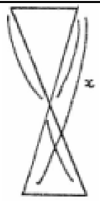
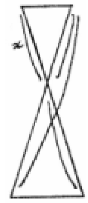
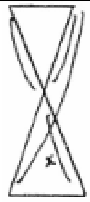
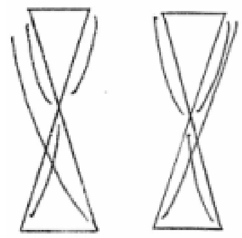
			

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
97% 62% 48% M	95% 60% 45% M	95% 58% 45% M	100% 60% 45% M

			
Figure 5	Figure 6	Figure 7	Figure 8
95% 58% 42% M	97% 58% 48% M	100% 60% 45% M	95% 58% 42% M

Analyses et interprétations

Les résultats sont suffisamment proches pour considérer que ces figures font partie du même groupe. Mais, par rapport au groupe A, les seconds pourcentages, qui correspondent aux rapports littéraux, sont nettement plus bas. C'est pour cette raison que nous créons le nouveau groupe B.



Groupe B

Famille 4 :

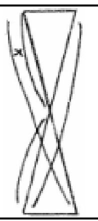
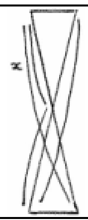
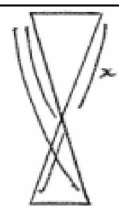
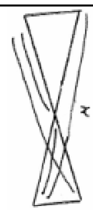
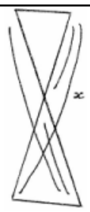
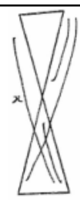
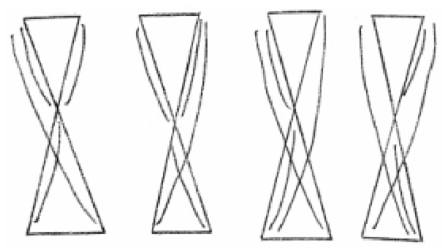
			

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
100% 62% 42% M	97% 65% 45% M	95% 60% 42% M	95% 60% 40% M
			
Figure 5	Figure 6	Figure 7	Figure 8
100% 58% 42% M	95% 58% 45% M	97% 62% 42% M	95% 60% 40% M



Groupe B

Famille 5 :

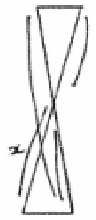
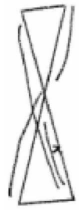
		

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
100% 82% 63% M	97% 80% 65% M	95% 84% 60% M	97% 82% 65% M

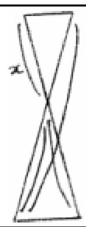
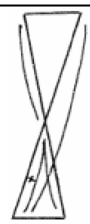
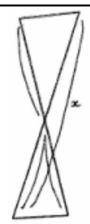
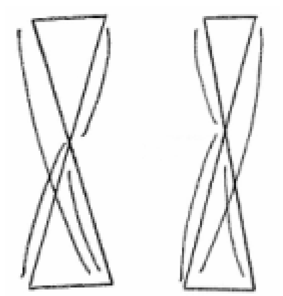

			

Figure 5	Figure 6	Figure 7	Figure 8
100% 80% 60% M	97% 80% 63% M	95% 80% 65% M	97% 82% 63% M



Groupe C

Famille 6 :

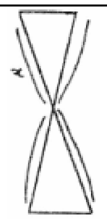
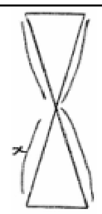
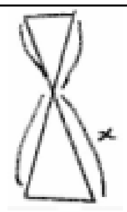
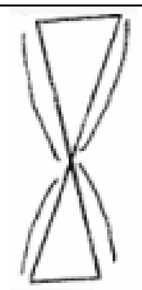
			

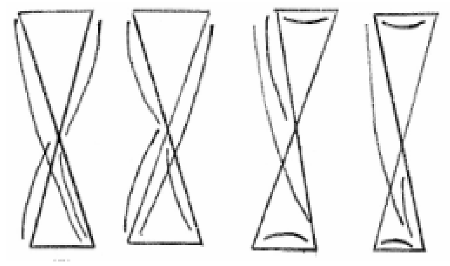
Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
100% 92% 92% F	97% 97% 97% F	95% 92% 90% F	100% 97% 97% F

Les figures sont ici congruentes. Les erreurs sur les quotients littéraux sont dues à une lecture verticale de haut en bas. Les erreurs concernant les fractions numériques sont, d'une part, très peu nombreuses et d'autre part peu significatives. De plus les résolutions sont systématiquement correctes. Nous sommes en présence d'un nouveau type d'organisation non homogène.



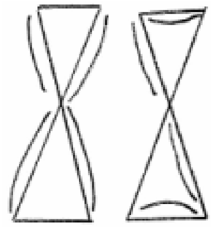
Groupe D

Les résultats des familles 7 et 8 sont similaires à ceux que nous avons relevés pour la famille 5. Ainsi, le groupe C est complété par ces deux nouvelles familles.



Groupe C complété

Les résultats de la dernière famille, la famille 9, nous permettent d'inclure celle-ci dans le groupe D.



Groupe D complété

III.3 Conclusion partielle

Pour la Quatrième, nous avons ainsi obtenu un **gradient de typicalité** caractérisé par l'existence de cinq groupes distinctifs de I à V complétés de deux sous groupes, les groupes II bis et IV bis. Le groupe I se caractérise par des figures qui ne posent pas de difficultés importantes aux élèves que ce soit au niveau des quotients littéraux, numériques ou lors de la résolution des équations. Par contre, certaines figures représentent des difficultés de par l'approche perceptive erronée qu'elles peuvent engendrer (groupe II). **L'appréhension perceptive** de la figure dont les caractéristiques semblent prégnantes, domine **l'appréhension opératoire** qui permettrait, par une adaptation simple des données, de rendre compatible la distribution des données avec la version apprise du théorème à appliquer. En fait non seulement l'aspect géométrique est très vite évacué, mais la mise en équation et la résolution de ces équations sont stéréotypées.

D'autres sont définies par une lecture directe des données sur la figure et par une mise en équation plus ardue. Suivant que la longueur inconnue se trouve ou non sur un côté congruent, on obtient un échelon différent (groupe III ou IV).

Et certaines distributions entraînent des **surcharges cognitives** (groupe V). Il est tout à fait notable que ces surcharges sont plus flagrantes lorsqu'elles concernent des figures non congruentes des deux côtés, ou lorsque le côté non congruent comprend la longueur inconnue.

Au niveau Troisième, nous pouvons dire que nous nous sommes trouvés, à chaque fois, au contact d'un type de **distribution homogène**. Les obstacles rencontrés sont identiques que ceux du prototype I, à la différence près que ici, comme nous pouvions nous y attendre, les erreurs dues à une **surcharge cognitive** sont plus importantes.
L'orientation des deux types de figures joue également un rôle. Afin de tenir compte des variables précédentes, nous envisageons deux cas : test de la variable hypothétique "orientation" , en tenant compte des longueurs "latérales" ; puis en utilisant les longueurs "latérales" et "centrales". Dans la mesure du possible, nous faisons varier une variable didactique hypothétique en essayant de fixer les autres.

Dès à présent, nous allons émettre des hypothèses liées aux deux prototypes mis précédemment en évidence. Le croisement, c'est à dire la figure "papillon", pourrait créer une inversion spatiale qui perturberait certains automatismes. Cette figure "papillon" influerait sur l'application de la propriété à la première figure, notamment aux figures "fragmentées". L'introduction de cette figure en classe de 3ème influerait sur l'application de la propriété en général. Toutes les égalités des rapports latéraux étant vraies sauf si l'on rajoute le troisième rapport. En clair, la figure papillon est-elle une figure prégnante (Noirfalise, 1991) ?

Pour cela, un test supplémentaire est posé à ce niveau.

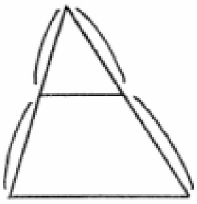
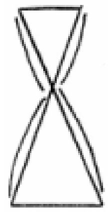
III.4 Etude de l'influence du prototype II fragmenté sur le prototype I fragmenté

III.4.1 Elaboration

Ce nouveau test contient la partie du test précédent concernant uniquement les huit figures fragmentées. On remplace uniquement huit figures par huit figures papillons de type fragmenté. Pour avoir une référence de réussite et pour éviter au maximum un phénomène d'apprentissage, nous y adjoignons huit figures du groupe I. Les figures sont encore tirées au sort, à la différence près que cette fois-ci, une figure papillon prototype et "fragmentée" est systématiquement associée à un prototype I également fragmentée. Cela donne un test composé de six feuillets comprenant chacun quatre figures, soit en tout 24 figures. Le professeur collaborateur chronomètre encore l'épreuve. A peu près 10 minutes par feuilles. Les classes testées sont les mêmes que les trois dernières classes de $3^{ème}$; l'effectif total est de 74. Même si certains élèves sont absents et ont été remplacés par d'autres, nous considérerons que l'échantillon n'est pas modifié et qu'il est en fait beaucoup plus représentatif.

Nous ne retenons que les cas pour lesquels les taux de réussite aux exemples prototypes du groupe I sont élevés. De plus, les pourcentages de réussite pour ces prototypes ne sont pas communiqués. Seuls les pourcentages des figures papillons et des prototypes I fragmentés le sont. N'ayant pas relevé de différences significatives concernant les quatre figures prototypes I fragmentées possibles, et de même pour la figure prototype II fragmentée, nous donnons les résultats globaux.

III.4.2 Résultats et interprétations

<u>Figure prototype I fragmentée :</u> 92% 19% 16%	<u>Figure prototype II fragmentée :</u> 80% 78% 78%
	

Les erreurs sur les quotients littéraux sont classiques, pour les deux types de figures :
I TB/RB = TA/TS = BA/RS. II MA/MB = LA/LR = ML/RB II. L'un des obstacles doit être relié à la prégnance de la figure fragmentée, l'appréhension perceptive de la figure prenant le pas sur l'appréhension opératoire ou discursive.

Pour la seconde figure, l'obstacle que nous avons déjà rencontré est la prégnance de la lecture d'une figure de haut en bas, lorsque justement cette figure est orientée de cette façon. Le prototype I et son orientation caractéristique, influe sur l'application du théorème de Thalès à la figure précédente. En ce qui concerne les fractions numériques, les erreurs typiques que nous avons déjà relevées et qui caractérisent le groupe II et plus précisément les figures fragmentées (x/7 = 5/10), sont amplifiées ici par la présence, à notre avis, de la figure papillon qui constitue une difficulté particulière. La figure papillon peut être considérée comme prégnante dans le cas de l'application de la propriété à une figure fragmentée de type I. L'appréhension perceptive est faussée par la partition de la figure papillon et par l'apparente similitude du prototype I fragmenté avec cette partition.

Une conclusion intermédiaire nous permet de classer les figures suivant différentes difficultés que nous avons pu mettre en évidence.

Le prototype I a une influence sur l'application du théorème à certaines figures. La lecture verticale des données est une des caractéristiques pour les dessins renversés de type I, ou pour la figure papillon en position dite redressée. De plus lorsque les côtés sont fragmentés, c'est à dire lorsqu'il y a une partition de la figure par le positionnement des longueurs, cela peut entraîner de façon significative des erreurs remarquables sur les quotients littéraux, ces erreurs étant renforcées par la présence d'une figure papillon fragmentée. Par ailleurs, même si les fractions littérales sont correctes, la prégnance peut se produire à propos des fractions numériques. L'appréhension perceptible prend le pas sur les autres appréhensions des figures. Ces quotients numériques pourraient être corrects si n'étaient pas précédés des égalités littérales déjà citées. Mais il y a incompatibilité entre la version actuelle du théorème et ces fractions.

La position dite allongée d'une figure prototype I engendre également des erreurs significatives pour les rapports littéraux, renforcées parfois par une lecture de gauche à droite des productions. Ce type erroné de lecture s'applique également à la figure papillon. Enfin certaines erreurs sont dues à une surcharge cognitive ou a une lecture directe des données sur les dessins. Nous rappelons que nous avons délibérément choisi de ne pas traiter les temps de résolution pour mettre en évidence les situations les moins représentatives. Nous allons maintenant nous intéresser à l'expérience suivante.

IV. La quatrième expérience

IV.1 Objectifs et élaboration.

Cette nouvelle expérience a pour principal objectif de mettre en lumière des conceptions - obstacles liés à la mesure des longueurs, à leur rapport, à la proportionnalité. Nous sommes en particulier attentifs pour savoir si les erreurs que nous relevons chez les élèves sont à imputer aux carences liées aux grandeurs ou au théorème de Thalès. En ce qui concerne les notions d'obstacle et les diverses formes que ce concept peut prendre, de conception et de théorème en acte, nous renvoyons le lecteur au chapitre premier de cette partie consacré au cadre théorique.

Nous formulons l'hypothèse générale que les nombres réels et la mesure des grandeurs, indirectement, constituent des obstacles à la fois épistémologiques et ontogénétiques pour les élèves et génèrent des conceptions précises.

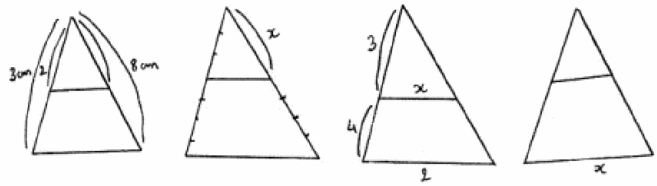
IV.1.1 Sur la mesure des longueurs dans l'application du théorème de Thalès

Des **conceptions** seraient liées à la mesure de longueurs ; les élèves considéreraient que pour que le théorème de Thalès soit applicable, il est nécessaire que les longueurs de tous les segments concernés soient exprimées à l'aide de la même unité. Une confusion entre mesure, qui relève des grandeurs, et rapport, qui relevait anciennement de raisons, se trouverait dans leur esprit. Nous avons construit en première partie du test 3 (Annexe I 2, a) un questionnaire pour vérifier ces conceptions.

1) Les conditions de passage du test

Ce test n°3 a été proposé à une classe de troisième composée de 27 élèves du collège Georges Clémenceau. Différents cas de distributions et d'unités sont proposés sur le prototype I.

La même unité partout : en centimètre ou en unité segmentaire. Quatre figures sont proposées : 1.a 2.a 1.b 2.b

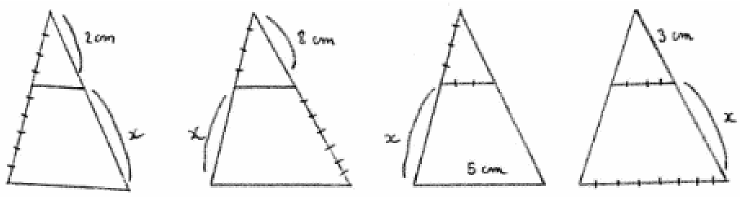


Deux unités identiques sur les trois données :

En unité segmentaire : a. du même côté, b. des deux côtés, c. un côté et un intérieur, d. deux intérieurs. α le dernier côté en unité segmentaire différente.

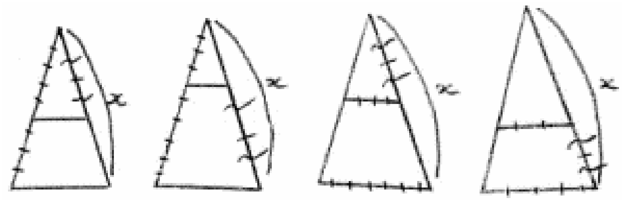
β le dernier côté en centimètre. On obtient huit figures.

1.α.a 1.α.b 1.α.c 1.α.d



Des variantes sont possibles :

1.β.a 1.β.b 1.β.c 1.β.d

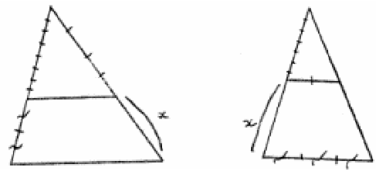


En centimètre : a. du même côté, b. des deux côtés, c. un côté et un intérieur, d. deux intérieurs. α le dernier côté en unité segmentaire différente.

β le dernier côté en décimètre.

On obtient huit figures semblables aux précédentes.

Aucunes unités identiques :



2) Les hypothèses plus précises

Les figures 1.β.a,1.β.b,1.β.c,1.β.d sont identiques aux figures 1.α.a,1.α.b, 1.α.c 1.α.d mais nous testons ici l'effet de la donnée d'une unité MKSA ; cela change-t-il quelque chose ? De même, les figures 1.α.a et 1.α.d sont proches, mais nous testons ici le fait que deux segments, en d , sont disjoints.

Nous essayons de savoir si la présence d'unités connues mobilise d'autres réactions. Les unités en cm et en dm engendrent - elles des conversions ?

Les figures 1.α.b,1.α.c se ressemblent également beaucoup, mais nous voulons savoir s'il elles subissent un traitement différent, car elles ne relèvent pas exactement des mêmes concepts : d'un côté, il y a une somme de deux unités différentes puis une fraction de deux unités différentes et de l'autre une fraction directement de deux unités différentes.

Ce test a été mis en place pour voir si un segment étalon est reconnu comme tel par les élèves, comme unité permettant, entre autre chose, l'application du théorème de Thalès. La résolution mathématique est possible uniquement lorsque les membres de chaque quotient sont exprimés avec la même unité. Mais là encore, cela dépend de la méthode algébrique utilisée ultérieurement.

3) Les réactions et les erreurs attendues de la part des élèves

Les erreurs liées au test pourraient provenir de différents domaines :

- En premier, d'une réelle impossibilité mathématique de calculer, liée à la proportionnalité. Nous avons à chaque fois deux ensembles de grandeurs A et B. Pour pouvoir comparer des fractions de A avec celles de B, les grandeurs de A doivent être exprimées avec la même unité et les grandeurs de B également mais pas forcément la même unité que celle des grandeurs de A. Pour la multiplication d'une longueur de A par une grandeur de B, la même unité doit être utilisée pour exprimer les dites grandeurs ; cela rejoint en quelque sorte les difficultés rencontrées avec la version du théorème avec les longueurs algébriques.

- En second lieu, de la version actuelle du théorème de Thalès d'une part, de la mise en équation d'autre part et enfin de la méthode de résolution.

En ce qui concerne la figure $1.\alpha$ .a, certains élèves peuvent répondre oui à la question. Avec la version actuelle du théorème de Thalès, la mise en équation est possible $\left(\dot{5}/\dot{8} = \overline{2}/(x+\overline{2}\right)$, mais la résolution de cette équation grâce au produit en croix est impossible. En effet, les produits $\overline{2}\times\dot{8}$ et $\dot{5}\times(\overline{x}+\overline{2})$ n'ont pas de sens.
D'autres peuvent répondre non en invoquant le fait qu'il est nécessaire d'avoir la même unité partout. Ce n'est pas la raison, puisque seule la méthode de résolution est en cause (produit en croix impossible). En conservant la fraction $\dot{5}/\dot{8}$ telle quelle, il est possible de s'en sortir.

En ce qui concerne les figures $1.\alpha$ .b et $1.\alpha$ .c, deux cas peuvent également se présenter. Si un élève répond que le calcul est possible, au vue de la version actuelle du théorème, il y a erreur car, pour la figure $1.\alpha$ .b, dans l'égalité $\left(\dot{5}/(\dot{5}+\dot{x}) = \dot{2}/(\dot{2}+\overline{2}\right)$, l'écriture de la somme $\dot{2}+\overline{2}$ et a fortiori de la fraction $\dot{2}/(\dot{2}+\overline{2})$ est impossible.

Pour le dessin $1.\alpha$ .c, c'est l'écriture de la fraction $\dot{4}/\overline{3}$ qui est incorrecte. En conservant justement ces unités, il est possible de se ramener au cas précédent. Par exemple, nous pouvons écrire 8u/7v = xu/14v ce qui donne alors, (14/7)8u = xu. Mais il est incorrect de noter directement : 8/7 = x/14. Par contre si la réponse négative invoque également le fait qu'il faille la même unité partout, c'est également une réponse fausse, car seule la place des unités est à avancer.

Enfin, un dernier type de réponse peut être donné. A la figure $1.\alpha.d'$, un élève peut répondre que le calcul de la longueur inconnue est possible, ce qui n'est pas vrai avec les méthodes actuelles de résolution des équations quotients. L'équation $\dot{4}/1\dot{9} = \overline{2}/x$ peut et doit se résoudre en conservant la fraction $\dot{4}/1\dot{9}$, ce qui est impossible si on utilise le produit en croix puisqu'alors le produit $1\dot{9}\times\overline{2}$ n'est pas légitime.

IV.1.2 Sur la mesure des longueurs en général, sur les nombres réels

Les intuitions culturelles des élèves à ce niveau se situeraient actuellement sur le fait que tout serait mesurable avec la même unité et que par conséquent ce qui a fait la pierre d'achoppement durant des siècles ne ferait pas partie de leur questionnement. Ils ne peuvent pas spontanément avoir une approche des objets idéalisés. Ces **préconstruits de seconde catégorie** paraissent tout à fait "naturels". Nous vérifions cette hypothèse aux exercices 1 à 3 qui composent la seconde partie du test 3 (Annexe I 2, b).

En ce qui concerne l'exercice 4, nous vérifions, dans un cadre plus général, nos hypothèses émises pour le théorème de Thalès pour la première partie du test trois. L'exercice cinq teste les réactions des élèves devant toutes les écritures possibles d'égalité de deux rapports lorsqu'une droite est parallèle à un côté d'un triangle. Une dernière classe du collège déjà citée a fait l'objet de cette étude.

Dans ces trois puis deux items, il était indiqué au départ que l'usage de la règle graduée et du compas n'était pas autorisé. Ce test a été posé a une autre classe de 3ème du Collège Clémenceau composée de 26 élèves. Nous précisons que le cours d'arithmétique et notamment sur l'irrationalité de racine de deux introduite grâce à la diagonale du carré, a précédé de deux mois le chapitre consacré au théorème de Thalès.

IV.2 Résultats et interprétations

IV.2.1 Première partie du test 3

Des élèves répondent par la négative sur la légitimité de tels calculs en invoquant le fait que
pour qu'ils soient réalisables, il est nécessaire que les longueurs de segments appartenant aux mêmes côtés soient exprimées à l'aide de la même unité, ce qui est tout à fait légitime.

Mais une forte proportion (34%) considère qu'il est nécessaire d'avoir la même unité pour toutes les grandeurs et une autre pas moins négligeable ne s'embarrasse pas pour effectuer des calculs illégitimes ($\overline{2}\times\dot{8}$ par exemple). La différenciation des rapports, à rattacher à la proportionnalité, avec des nombres que l'on peut retrouver justement dans les produits précédents n'est pas claire pour eux.

Nous avons également noté le fait que les unités différentes soient un mélange d'unités du système métrique et d'unités segmentaires ne change rien quant aux réponses. De plus, la présence exclusive du centimètre et du décimètre n'entraîne aucunement une conversion. Enfin, les fractions de sommes de longueurs exprimées à l'aide d'unités différentes et les quotients directs de grandeurs pour lesquels deux unités différentes sont utilisées ne sont pas traités différemment de la part des élèves.

IV.2.2 Deuxième partie du test 3 exercices 1, 2, 3

1) Les résultats aux trois items :

Question	Réponses exercice 1
a)	oui à 96%
b)	non à 50%, exemple $\sqrt{2}$
c)	oui à 96%
d)	oui à 96%

Question	Réponses exercice 2
1.a)	oui à 100%
2.a)	4 unités et 12 unités
1.b)	non à 100%
2.b)	3 unités et 3 unités

Question	Réponses exercice 3
1.a)	oui à 100% ; [AB] à 100%
1.b)	oui à 96% ; 2 fois à 96%
2.a)	oui à 100% ; [EF] à 100%
2.b)	non à 88% ; 1,5 ou $3/2$ à 12%
3.a)	non à 100%
3.b)	De même longueur : 77%
4.a)	oui à 100% ; [MN] à 100%
4.b)	non à 88% ; 1,5 ou $3/2$ à 12%

2) Les analyses :

Exercice 1

Les réponses faites à la question a) dénote dans l'esprit des élèves l'existence certaine d'une partie aliquote commune à deux segments, ce qui correspond à un **préconstruit de second type**. Le cours sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$ n'a pas effacé l'intuition culturelle qui s'est instaurée en tant qu'obstacle épistémologique au cours des siècles et qui consiste à penser qu'il existe toujours une commune mesure à deux segments.

La principale pierre angulaire du corpus mathématique durant des siècles incarnée par la mesure des longueurs, les nombres et l'irrationalité ne fait manifestement pas partie du questionnement des élèves alors que cela semblerait possible. Mais la question que nous pouvons également nous poser est de savoir si les élèves de ces niveaux sont réellement amenés à ce questionner effectivement au sujet de ces notions mathématiques importantes. Nous avons pu remarquer, à l'aide des différentes analyses que nous avons menées, que la réponse risque souvent d'être négative.

La majorité des élèves a répondu par l'affirmative aux questions c) et d). Ils s'occupent ici comme à la question a) également, des objets réels et des grandeurs physiques, ce qui permet de leurs faire penser qu'il est toujours possible de trouver une unité "suffisamment petite" pour mesurer tout segment, pour avoir l'abscisse de tout point, ou pour mesurer simultanément deux segments quelconques. Une figure construite permet d'effectuer des mesures qui pour eux sont forcément exactes ; il n'y a pas pour les élèves de problèmes d'approximation (Bergue, Borreani et Poulain (1991)). C'est à dire que même pour $\sqrt{2}$, qui est cité dans les réponses de la question b), en changeant d'unité, on peut obtenir la mesure exacte d'un tel segment, ce qui constitue un obstacle important dans l'approche que pouvait avoir par exemple Lebesgue (1931) des nombres réels.

Les élèves semblent se placer par rapport aux segments de droite, au niveau géométrique. Les grandeurs mathématiques, idéalisées n'ont pas leur place pour eux et n'existent peut-être pas.

En ce qui concerne la question b), les élèves ont rencontré dans leur cours la diagonale du carré et ont montré son irrationalité de façon algébrique. Ici, ils se placent du côté de la mesure et du côté des nombres. Encore une fois ils se réfèrent aux objets et aux grandeurs dites réelles ou concrètes et non aux objets mathématiques idéalisés et aux classes d'équivalences qui les régissent. Lorsqu'ils reviennent à l'approche géométrique des objets et en particulier des segments de droite, les intuitions culturelles resurgissent. C'est peut être cela qui leur fait penser que l'on peut trouver tout le temps la mesure exacte d'un segment, mais cette idée qui paraît naturelle aux élèves est loin d'être rattachée, comme nous avons pu le remarquer déjà, à des concepts triviaux puisqu'elle renvoie à des concepts de continuité, et des notions liées aux concepts d'infinis.

Nous pouvons nous poser la question de savoir s'il est réellement nécessaire d'aborder ce genre de problème lié aux nombres réels avec des élèves de collège. Il suffirait de dire que tout est mesurable puisque, en effet, c'est une des caractérisations des nombres réels. Le problème est justement que, chez les élèves, cette phrase n'a pas le même sens que nous lui attribuons en tant que didacticien ou mathématicien. Pour les élèves du collège, le fait que tout est mesurable consiste à penser qu'en changeant d'unité, en adoptant une unité de plus en plus fine, il est possible de trouver la mesure exacte de n'importe quel segment. L'élève se réfère aux objets physiques et non aux objets mathématiques idéaux. Pour eux, une scission s'effectue entre le niveau géométrique, les objets dits réels et le niveau numérique. C'est justement cela qui pourrait constituer un **obstacle**.

Les programmes en vigueur en 2005 font apparaître la démonstration soit géométrique soit algébrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Malgré cela, et malgré le fait de poser, dans nos tests, des questions liées à la mesure de longueurs, les élèves ne semblent pas changer de conceptions au sujet des nombres dont l'écriture fait apparaître un radical. Ils ne rattachent toujours pas les racines carrées au géométrique. Considérant que les nombres décimaux, les entiers naturels et les fractions - bien que certains pensent que les fractions sont des opérations à effectuer au même titre qu'une addition - sont les seuls nombres existant, et qu'un nombre sert, en partie à mesurer, les élèves sont amenés à constater, de façon erronée, que tout segment possède une mesure entière ou décimale voire fractionnaire.

Pour illustrer notre propos d'un exemple tiré d'un travail effectué par un autre chercheur à ce sujet, nous citons Jacquier (1996). Lors de la correction d'un exercice de calcul d'une longueur, sont apparues les écritures suivantes $BD = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Ces écritures sont déconcertantes pour les élèves au point que l'un d'entre eux s'est exclamé :

"Il faut écrire BD = 7,07 car $\sqrt{50}$, pour une longueur, ça ne veut rien dire".

Un peut plus loin dans son étude, l'auteur pose la question, "$\sqrt{2}$ est-il un nombre ?" A peu près 50% des réponses sont négatives et l'un des commentaires est caractéristique :

"Non $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre, car c'est comme si 1/3, 3×2 ou 4 + 6 étaient des nombres ! "

Pour ces élèves, $\sqrt{2}$ est reconnu comme un nombre par l'intermédiaire de l'écriture décimale donnée par la calculatrice. Le lien avec la définition et le cadre géométrique ne se produit pas.

En tenant compte des résultats précédents et de par le fait qu'une démonstration, même "approximative", du théorème de Thalès nécessite, de la part des élèves une prise de conscience de l'existence de nombres qui n'ont pas d'écriture fractionnaire, il paraît intéressant de développer quelques réflexions à ce sujet. Notre propos n'est pas bien sûr d'établir une construction rigoureuse de l'ensemble des nombres utilisés au collège, mais de rattacher les radicaux au géométrique, à la mesure des longueurs et de tenter de faire prendre conscience aux apprenants qu'il est légitime de se poser ce type de questions si l'on veut traiter du théorème de Thalès.

Exercice 2

Il semblerait, au vu des résultats que nous avons obtenus à cet item, que le niveau des grandeurs, des classes d'équivalence de segments obtenues par superposition mentale et le niveau numérique, la catégorie des mesures entières soient bien dissociés par les élèves. Aucun obstacle n'est à dénoter. La distinction est, par exemple, bien faite entre longueurs égales et mesures différentes exprimées dans des unités différentes et longueurs inégales et mesures égales exprimées encore une fois à l'aide d'unités différentes.

Exercice 3

En ce qui concerne l'exercice 3, le fait que les mesures des longueurs ne s'expriment pas à l'aide de la même unité ne gène pas les élèves pour les comparer. Ils remarquent à la question a) que l'un des segments est un multiple entier de l'autre. Mais lorsque l'une des unités est une sous - unité de l'autre et qu'un segment est un multiple décimal ou fractionnaire de l'autre, une majorité d'élèves ne peut pas savoir de combien un premier segment est plus grand qu'un second segment. Il en est de même lorsque les deux segments unités sont les mêmes (4.a).

IV.2.3 Les résultats obtenus pour les items 4 et 5

1) Les résultats

Question	Réponses exercice 4	Question	Réponses exercice 4
1.a)	oui à 96%	4.a)	oui à 78%
1.b)	non à 96%	4.b)	oui à 93%
1.c)	non à 96%	4.c)	oui à 74%
2.a)	oui à 96%	5.a)	non à 74%
2.b)	non à 96%	5.b)	oui à 93%
2.c)	non à 74%	5.c)	non à 96%
3.a)	non à 74%	6.a)	non à 93%
3.b)	non à 96%	6.b)	oui à 56%
3.c)	oui à 78%	6.c)	non à 96%

2) Les commentaires et analyses

Exercice 4

Pour les questions 1.b) et 1.c), les réponses ont été unanimement justifiées par l'argument suivant : " il n'y a pas les mêmes unités"; alors que pour la question 1.a), contrairement aux réponses données au même type de question mais dans le cadre du théorème de Thalès, la quasi majorité des élèves considère, à juste titre, que ces écritures sont légitimes. 34% des élèves ont pensé qu'il était nécessaire que la même unité soit utilisée pour toutes les longueurs pour exprimer des rapports dans le cadre du théorème en question. Cela semble typiquement lié à cette propriété.

En ce qui concerne la question 2.a), l'impossibilité de cette écriture n'a pas été perçue. Il semblerait plus facile pour les élèves de percevoir une différence d'unité lorsque les grandeurs observées font partie de deux groupes différenciés. Les réponses à la question suivante corroborent cette hypothèse. Par ailleurs, une majorité des élèves qui a répondu non à la question suivante a justifié cette réponse en disant qu'en fait l'égalité correcte était la suivante : CD/DE = FG/GH = 4/9. L'influence du théorème de Thalès se fait peut-être ressentir ici. De plus, la différence d'unité au sein de chaque ensemble de grandeurs n'est pas perçue comme un obstacle pour écrire des fractions les faisant intervenir.

Encore une fois, l'utilisation de différentes unités pour des longueurs d'un même groupe n'est pas rédhibitoire aux questions 3.a) et 3.c). Mais à la question 3.a), la raison invoquée pour justifier le fait que l'on ne puisse pas écrire les rapports proposés est identique à celle donnée à la question 2.c). A la proposition 3.b), la différence d'unité dans deux groupes de grandeurs servant à former deux fractions rend, à tors, pour les élèves, les écritures de ces fractions impossibles.

Il s'agit à la question 4 des mêmes rapports que précédemment, mais nous avons voulu savoir si le fait que les deux segments principaux avaient la même longueur influait sur les réponses ; en fait, ce n'est pas le cas. Nous obtenons les mêmes pourcentages et les mêmes types de justifications.

A la question 5, les résultats précédents sont encore une fois confirmés.

Pour la question 6.a), la raison invoquée pour justifier l'impossibilité d'écrire les rapports proposés est toujours la même. Par contre, pour ce qui suit, il semblerait que les niveaux géométriques et numériques ne sont pas, encore une fois, mobilisables simultanément par les élèves ; en effet, ceux qui ont répondu négativement aux questions 6.b) et 6.c) ne pensent pas à simplifier les fractions qu'ils ont à comparer et ceci dans les deux cas de figure où les fractions sont formées à l'aide de deux grandeurs du même groupe ou bien lorsque les deux rapports sont constitués de deux longueurs de deux groupes différents. Cette dichotomie se retrouve dans l'exercice suivant.

Exercice 5

Les arguments utilisés pour justifier le fait que des écritures de la partie a) n'étaient pas légitimes sont toujours les mêmes : " les rapports qui se déduisent de l'application de théorème de Thalès sont les suivants : AB/AC = AD/AE = BD/CE." Par conséquent, toute égalité ne résultant directement de celles-ci est refusée par les élèves. Par exemple l'égalité AB/AD = AC/AE n'est pas acceptée par une grande majorité d'entre eux, bien que résultant des égalités précédentes. Là encore, nous pouvons remarquer que les manipulations algébriques ne sont mises en marche que dans le cadre d'une résolution d'équations ; très peu d'élèves ont l'idée de transformer une des égalités pour tenter d'obtenir celle-ci. Enfin, les égalités qui sont correctes, comme par exemple BA/BC = DA/DE, correspondant encore moins aux égalités typiques du cours actuel sur le théorème de Thalès, sont également rejetées. En conclusion de cette section a) cinquième exercice, nous dirons que les seules égalités qui sont reconnues comme légitimes, même sans parler d'une application immédiate du théorème - nous avons pris la précaution de ne pas préciser s'il s'agissait d'égalités résultant de l'application directe du théorème de Thalès - sont uniquement celles qui correspondent exactement au cours. Toute manipulation algébrique sur les quotients littéraux est refusée, et toute autre version est encore plus refoulée.

Les mêmes arguments ont été invoqués pour ne pas rendre légitimes des écritures de fractions au b), lorsque nous demandions si les droites étaient parallèles, d'après une égalité de rapports. Seules les égalités tirées directement du cours justifient le parallélisme de deux droites. Une manipulation algébrique simple sur ces égalités n'est pas mise en œuvre et des égalités du type HS/HR = IS/IV le sont encore moins. Que les égalités proposées permettent ou ne permettent réellement pas de conclure que les droites en questions ne sont pas parallèles, le même argument utilisant l'égalité du cours est proposé systématiquement par l'élève, lorsqu'une justification est donnée.

Lors de la construction de notre ingénierie, nous tenons compte de ces résultats. En particulier, dans le but d'approcher une démonstration du théorème de Thalès, nous mettons en évidence l'existence de nombres irrationnels. Nous travaillons également sur les constitutions légitimes des rapports de mesures de longueurs dans le cadre d'une application du théorème de Thalès.

V. La cinquième expérience

V.1 Objectifs et élaboration

Même si nous avons déjà mis en place des tests ayant pour sujet le parallélisme, cette nouvelle expérience a pour objectif d'étudier, sur des cas simples, d'une part, l'influence des distributions des données sur l'écriture des égalités de fractions qui permettent de démontrer le parallélisme de deux droites et d'autre part si les élèves prennent l'habitude de raisonner en introduisant des étapes intermédiaires à des questions que le nécessitent. Bien sûr, un biais pourrait surgir si certains élèves ont déjà résolu, dans le passé, un exercice tout à fait du même type, mais nous avons pris des précautions pour cela, en demandant au professeur de la classe de nous préciser si les exercices en questions avaient été cherchés antérieurement, ce qui n'a pas été le cas.

Il est également testé les démonstrations du parallélisme de deux droites sans calculs numériques, uniquement à l'aide de calculs littéraux. Les figures en question sont, pour les unes, composées de deux ou trois figures de Thalès de type I ou II adjacentes.
Les difficultés peuvent alors venir du fait qu'il est difficile de considérer qu'un segment puisse faire partie de deux figures ou également de l'obligation de se servir de la transitivité de l'égalité sans indication. Cela concerne les dessins 7, 13, 18, 19, 22 et 28.

Nous utilisons uniquement les longueurs latérales pour le premier prototype et la distribution congruente des côtés "latéraux" pour ce qui concerne le second prototype. Vingt figures relèvent de ce type de question. Nous ne tenons pas compte des erreurs de raisonnement dues au fait que l'élève soit parti des égalités littérales.

Un autre type de figure est rattaché à ce style d'exercice, deux figures représentant deux cercles concentriques, les dessins 14 et 33. Il n'est pas question de transitivité de la relation d'équivalence "égalité" mais d'investir la définition du cercle pour démontrer l'égalité de deux rapports. Nous obtenons au total 30 figures qui sont rassemblées par groupe de six par feuille. Le test comprend six feuilles. Il a été proposé à des élèves de 3$^{\text{ème}}$ du collège Martin Luther King de Villiers Le Bel qui disposèrent d'une heure et demi pour répondre aux questions.

V.2 Les résultats et les interprétations

Nous avons consigné l'énoncé et les résultats en Annexe I 2, c. Le premier pourcentage désigne les rapports littéraux écrits correctement et le second correspond aux justifications numériques correctes.

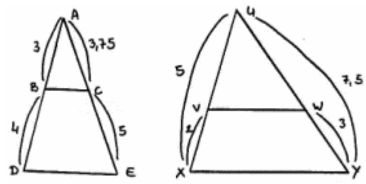
V.2.1 Les figures prototypes

Au vu des résultats, nous allons pouvoir créer, comme pour des tests précédents, des groupes suivant les pourcentages obtenus et les types d'erreurs commises. Nous pouvons d'ores et déjà regrouper ensemble les figures 1, 2, 3, 5, 15, d'une part et d'autre part les figures 4, 8, 10, 21, 20 et 32. Les premières constituent le groupe α et les secondes le groupe β.

Les figures 1, 2, 3, 5, 15, 31 font partie, en quelque sorte, de par le type de figure et la distribution des longueurs du **Groupe II**. Que les élèves partent directement de l'égalité - ce qui est illégitime - surtout s'ils ne précisent pas au départ :
"si les droites étaient parallèles, nous aurions :

Groupe α

AB/AD = AC/AE or nous avons : AB/AD ≠ AC/AE donc..."



- ou qu'ils se proposent de calculer séparément deux fractions, les erreurs notables que nous avons pu relever sur des cas de figure de type 1 sont les suivantes :
BA/BD = CA/CE.

Pour les figures identiques, au dessin 3, les quotients littéraux erronés étaient de la forme suivante : XV/XU = YW/YU. Les pourcentages d'erreurs de ce type étaient moins importants que ceux qui concernent les figures semblables à la 1ère. Ces résultats sont identiques à ceux obtenus à l'expérience 3 pour les familles 3 et 4.

De même, comme pour le test précédent, des lectures directes des longueurs sur les figures ont été faites. Bien que les quotients littéraux soient justes, les élèves ont souvent vérifié les égalités ou les inégalités de fractions numériques du type, pour la figure1, ¾ = 3,75/5 ou, pour la figure 2, ½ = 3/4. De même pour la figure 3 : 2/5 = 3/7,5. Ces distributions des longueurs représentent un obstacle également lorsqu'il s'agit de déterminer si deux droites sont parallèles ou non.

Mais sur des cas bien précis, une erreur caractéristique a fait son apparition. Des élèves ont argumenté en substance, pour le dessin 5, pour le 2 ou pour le10, de la façon suivante : OP + 1 = PR et OQ + 1 = QS donc OP/OR = OQ/OS. Cette erreur a déjà été rencontrée par Michonneau et Pfaff (1990). Ces deux auteurs ont observé une erreur due à une conception non linéaire de la projection ; elles l'ont d'ailleurs appelée " erreur additive". La version du théorème de l'époque était telle que pour la figure 5 qui nous concerne, les élèves auraient justifié le parallélisme des droites (PQ) et (RS) en écrivant : la projection de OP est PR, la projection de OQ est QS et que OP + 1 = PR et OQ + 1 = QS. Ajouter 1 a une telle attraction, d'après les auteurs, que ces élèves se trompent à la fois sur les correspondances et sur la proportionnalité. L'un des élèves complète même en écrivant que les grandeurs sont proportionnelles.

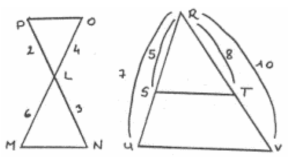
Nous concluons pour notre part que cette écriture de la proportionnalité n'est attachée qu'au contexte géométrique et non à la version choisie du théorème. Additionner 1 ou soustraire 1 a un effet attractif incontestable sur les élèves. D'une propriété qu'ils remarquent, ils en déduisent, sans raisonnement, une autre. Notons que ce type d'erreur concerne aussi bien les figures de type I que les prototypes II. En fait, nous pouvons considérer que cet obstacle lié aux erreurs additives ressemble aux erreurs de lectures de données sur le dessin, dans des cas bien précis comme pour le groupe α . L'aspect symétrique de la situation, de la caractéristique des longueurs qui s'obtiennent symétriquement à partir de l'une en ajoutant une unité, ont un attrait irrépressible sur les élèves qui font part de ces observations directes et remarquables pour conclure d'une façon erronée ou inappropriée. Les erreurs additives ne sont bien sûr pas valides alors que les erreurs commises sur les quotients numériques obtenus par une lecture directe sur les dessins peuvent se transformer en réponses valables dans un certain cadre lié à une version du théorème de Thalès englobant la proportionnalité interne et externe.

Les figures 33 et 14 ont eu plus de réponses correctes, bien que relevant également de démonstrations. Mais les raisonnements ne concernent ici qu'une figure de Thalès. Seule la définition du cercle est utilisée pour parvenir directement aux égalités recherchées. Malgré tout, le nombre de réponses justes pour ces deux figures reste faible. Il s'agit d'une autre catégorie de figures.

Les figures 4, 8, 10, 20, 21, et 32 sont congruentes. Les taux de réussite sont naturellement très élevés. Les méthodes, employées par les élèves, pour vérifier que deux fractions sont égales ou pas sont multiples et variées. Les uns effectuent le "produit en croix", les autres tentent de réduire les fractions et enfin nombreux sont ceux qui utilisent la calculatrice. Dans certains cas c'est tout à fait acceptable. Toujours est-il que les élèves semblent avoir le réflexe de s'éloigner du géométrique pour parvenir le plus rapidement possible aux calculs numériques. Mais d'après ce que nous venons de voir, nous pouvons aller plus loin en énonçant que les calculs numériques paraissent être fuis à leur tour tant le recours à la calculette est un réflexe quasiment systématique.

L'ensemble de ces figures constitue un nouveau groupe β

Les erreurs additives que nous avons précédemment relevées se retrouvent également, nous l'avions déjà noté pour les prototypes II. Nous allons maintenant nous intéresser aux exercices faisant apparaître des figures un peu plus complexes.



Groupe β

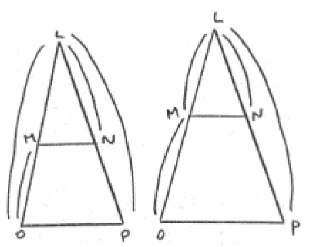
V.2.2 Les figures plus complexes

Il est aisé de remarquer que pour les figures 13, 18 et 22, aucune réponse n'a été fournie. Ce fait peut s'expliquer de plusieurs façons. D'une part, la démonstration du parallélisme correspond ici, à chaque fois, à une réelle démonstration, sans calculs numériques, puisque deux résultats littéraux doivent être rassemblés pour aboutir à la conclusion. Les élèves de cette classe, qui pourtant ont déjà pratiqué une fois ce type d'activité, ont sûrement été perturbés par le fait qu'il n'y ait pas de questions intermédiaires. Même si des détails avaient été donnés, il aurait tout de même été difficile pour les élèves de relier entre eux deux résultats littéraux grâce à la transitivité de l'égalité.

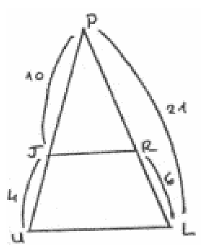
Nous pensons pouvoir également relier ces comportements à la représentation micro-spatiale pour laquelle seuls existent les objets. Leurs contours n'existent pas indépendamment d'eux, en particulier, un contour ne peut être commun à deux objets distincts (Vurpillot, 1972).

Pour les figures restantes, le classement semble se faire de façon naturelle. D'une part, sont rassemblées les figures dont un côté est congruent (figures 6, 9, 11, 16, 24, 23, 29,) et d'autre part, les figures dont aucun côté n'est congruent (figures 12, 17, 27, 31) .

Groupe a_1



Groupe a_2



Pour ce type d'exercice, aucune lecture directe des données sur le dessin n'est à relever. Nous confirmons donc le fait que les lectures directes des longueurs que nous avons notées précédemment, comme les erreurs additives dépendent exclusivement de la forte prégnance exercée par ces figures et de la distribution des données.

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, nous avons étudié la façon dont les élèves appréhendent les figures associées au théorème de Thalès et comment ils les engagent dans les calculs qui leur sont proposés. Ainsi, dans nos expériences, nous avons testé deux groupes de variables. Le premier est lié aux caractéristiques de la figure et le second concerne la répartition des longueurs sur cette figure. Pour cela, nous avons introduit quatre nouvelles notions. Les deux premières relèvent de figures produites par les élèves et les deux autres sont rattachées aux effets qu'elles génèrent sur eux au sujet de l'application d'un théorème.

Les **figures archétypes** sont des dessins produits en grand nombre par les apprenants avant enseignement du théorème. Elles sont peut-être le fruit culturel de l'enseignement antérieur mais pas celui du dit théorème. A l'inverse, les **figures prototypes** sont des dessins exécutés en nombre significatif par des élèves après enseignement du théorème dont elles relèvent.

Les **figures pathologiques** ne sont pas reconnues comme pouvant faire l'objet de l'application du théorème donné. Les **figures pathogènes** sont reconnues pour une telle application mais engendrent des erreurs caractéristiques statistiquement significatives.

Nous avons également mis en évidence des conceptions des élèves au sujet de la mesure des longueurs et de leur rapport. Nous rappelons à présent les buts et les conditions de passations des questionnaires.

I. Objectifs des quatre expériences

I.1 Objectifs de la première expérience

L'objectif de notre première expérience était de révéler l'existence de figures archétypes et prototypes pour le théorème de Thalès caractérisées par une certaine fréquence, dans les productions, de valeurs de paramètres tels que l'orientation de la figure, la mesure et la caractéristique de l'angle commun aux deux triangles, la position des parallèles par rapport aux côtés de la feuille etc.

I.1.1 Les figures archétypes

En ce qui concerne les figures archétypes, nous avons mis en place des questionnaires qui ont été posés successivement, au cours de la même séance, à 145 élèves de quatrième n'ayant pas encore abordé le théorème de Thalès et à 98 élèves de troisième n'ayant pas encore révisé ni complété le théorème qu'ils ont vu dans la classe précédente. Ces tests consistaient à construire des figures en suivant quatre programmes de constructions distincts permettant d'aboutir à des dessins dans lesquels le théorème de Thalès s'applique. La phase a été collective et a duré 5 à 10 minutes pour chaque test.

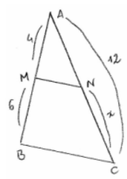
I.1.2 Les figures prototypes

Après plusieurs semaines, pour mettre en évidence l'existence de figures prototypes, nous avons demandé aux 144 et 99 élèves de ces mêmes classes de quatrième et de troisième - mais ayant alors, pour les uns, étudié et, pour les autres, révisé et complété le théorème de Thalès - de construire quatre figures différentes (A, B, C et D) dans lesquelles ils jugeaient que le théorème pouvait s'appliquer. La phase collective a duré de 5 à 10 minutes. Nous avons fait l'hypothèse que l'ordre d'apparition des figures est fonction de leur disponibilité chez les élèves. Ainsi, nous avons privilégié les deux premiers dessins (A et B) sur les quatre produits par les élèves (A, B, C, D) et nous avons décidé de parler de figures prototype pour ceux qui sont apparus à plus de 68%.

I.2 Objectifs de la deuxième expérience

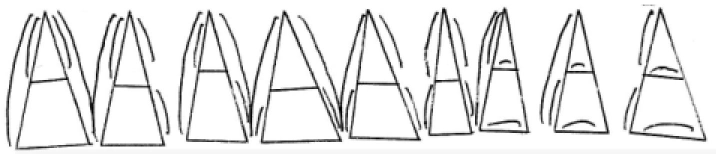
Le but de notre deuxième expérience était de mettre en évidence des figures pathologiques et pathogènes. Ainsi, une fois les caractéristiques des figures archétypes et prototypes relevées, nous avons fait varier ces paramètres afin de savoir jusqu'où, statistiquement, un dessin était reconnu par les élèves comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès et, une fois reconnu comme tel, quel type de figure engendrait alors des erreurs spécifiques. Ces déformations que nous avons fait subir aux prototypes ont généré de très nombreux dessins qui ont été répartis de façon aléatoire sur des cahiers de 17 feuillets, chaque feuille contenant 6 figures. Les cahiers ont été reproduits en cinq exemplaires, ce qui signifie que cinq élèves différents ont travaillé sur chacun d'entre eux. Ces questionnaires ont été posés à trois classes de troisième et trois classes de quatrième différentes des classes précédentes. Les élèves devaient dire si le théorème de Thalès pouvait s'appliquer ou pas et, dans l'affirmative, ils devaient écrire les égalités des trois rapports littéraux correspondants. Le travail sur chaque feuille était chronométré. Au bout de 3 minutes 30, le professeur donnait le signal pour changer de feuille.

Les caractéristiques des correspondances entre les grandeurs en jeu dans l'application du théorème de Thalès rendent plus ou moins directe l'écriture des égalités de rapports et joue aussi sur la complexité des calculs algébriques à mener ensuite, comme le montre l'exemple ci-contre : $4/(4 + 6) = (12 - x)/12$.



I.3 Objectifs de la troisième expérience

Ceci nous a amené à distinguer dans notre troisième expérience, pour chaque prototype, un certain nombre de configurations possibles pour les données. Par exemple pour le prototype I, nous avons envisagé neuf cas de répartition. De plus, pour chacune de ces neuf familles, nous cherchons à savoir si les résultats dépendent du positionnement de la longueur inconnue en envisageant tous les cas possibles.



L'ensemble des figures obtenues était réparti sur des cahiers de six feuilles chacun, chaque feuille comprenant quatre dessins répartis au hasard. Les élèves de trois classes de quatrième et de trois classes de troisième devaient, d'une part, écrire les rapports littéraux déduits de l'application du théorème de Thalès et, d'autre part, mettre en équation et résoudre cette équation. Le professeur rythmait la séance à raison de 10 minutes par feuille. Nous avons jugé les difficultés de ces distributions au regard des trois types de réponses que devaient donner les élèves et, suivant les pourcentages de réussite obtenus, nous avons classé les dessins en différentes catégories en montrant comment les résultats se différencient parfois suivant les configurations ou même à l'intérieur d'une même configuration. Notre cinquième expérience consistait a étudier les répercutions de ces mêmes distributions de longueurs sur l'application de la réciproque du théorème de Thalès. Les élèves devaient écrire pour chaque figure proposée, les deux rapports littéraux testés ainsi que les deux rapports numériques dont il fallait démontrer l'égalité ou la différence.

I.4 Objectifs de la quatrième expérience

Dans notre quatrième expérience, nous avons testé des hypothèses liées à la mesure des longueurs et à leur rapport. A travers un questionnaire posé à des élèves de troisième et de quatrième, nous avons en particulier cherché à savoir s'ils ne considéraient pas qu'il est possible de trouver de façon pratique la mesure exacte de n'importe quel segment quitte à employer des unités de mesures de plus en plus fines. Nous avons également testé le fait que les élèves considèrent, pour pouvoir appliquer le théorème de Thalès, qu'il est nécessaire que les mesures des longueurs composants les rapports soient exprimées à l'aide de la même unité rejoignant en cela les conceptions des grecs de l'antiquité sur la proportionnalité.

II. Les résultats obtenus

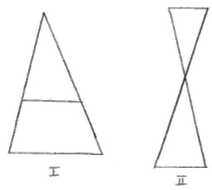
II.1 Au sujet des variables figurales

Nous pouvons maintenant nous consacrer aux résultats que nous avons obtenus pour les prototypes et les archétypes. Nous ne retenons que les pourcentages jugés significatifs.

II.1.1 Les prototypes

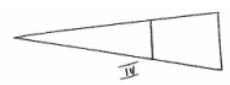
Tableau des pourcentages d'apparition pour les prototypes

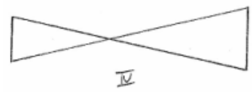
	Ordre de la figure			
Figure produite	A	B	C	D
I	68%	...	28%	32%
II	...	70%	16%	9%
III	6%	5%	20%	6%
IV	...	5%	2%	12%



Il existe des figures prototypes associées à deux configurations, que nous avons nommées gigogne pour le prototype I et papillon pour le prototype II, et à deux directions privilégiées : vertical et horizontal. Nous avons retrouvé ces deux prototypes avec des pourcentages assez élevés aux productions C et D des élèves. Cela signifie que même lorsque nous demandons de varier les dessins, ils ne produisent pas autre chose.
Nous avons noté que l'introduction de la figure papillon en classe de troisième ne change rien à l'importance du nombre de figures I.

Deux autres dessins sont apparus mais de façon moins massive. Nous avons considéré que ces deux figures III et IV étaient des figures représentatives pour les élèves du théorème de Thalès.





II.1.2 Les archétypes

En ce qui concerne les figures archétypes, pour tous les programmes de construction sauf un, nous avons trouvé un archétype de la forme II ou IV avec les mêmes proportions, la même orientation et la même taille.

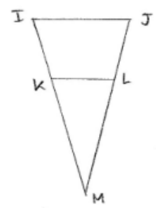
Par contre, dans le cas de la construction d'un triangle et d'une parallèle à un côté de ce triangle, l'archétype trouvé, que ce soit en quatrième ou en troisième, est de type I. Ce qui est surprenant est le fait qu'après enseignement du théorème de Thalès en version droites sécantes, le prototype en $3^{ème}$ soit de type I et non de type II comme l'archétype que nous avons trouvé dans ce cas. Il est représenté par les élèves dans ces conditions à 55% alors que le prototype, c'est à dire après enseignement et sans consignes de construction, était représenté à 68%. Nous en déduisons que l'enseignement renforce l'archétype chez les élèves. La figure archétype I résulte d'un enseignement puisqu'en classe de troisième, la figure II ne résiste pas au prototype I enseigné l'année précédente.

II.1.3 Les figures pathogènes et pathologiques

Les prototypes renforcent la tendance naturelle de lecture verticale de haut en bas, et horizontale de gauche à droite, et ceci conduit à des erreurs lorsque l'on s'éloigne des formes prototypiques, d'où l'identification des figures pathogènes A, A', B et C (dessinées ci-dessous) pour lesquelles des erreurs caractéristiques se sont reproduites dans plus de 85% des cas sauf pour la figure pathogène B que nous avons tout de même retenue.

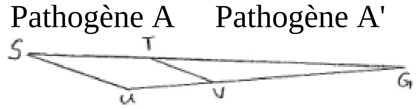
	Prototype I	Pathogène A	Pathogène A'	Pathogène B	Pathogène C
Pourcentage de réussite aux rapports	83%	13%	12%	57%	13%

Ainsi, en ce qui concerne la figure pathogène A, les élèves écrivent très souvent :JL/JM = IK/IM = IJ/KL. De plus, la présence d'un angle aigu en haut d'une telle figure "renversée" renforce cette erreur typique (Pathogène A'). Nous avons montré que la lecture verticale est également présente pour la figure papillon. Le prototype I influe sur le II : AB/AC = DB/DE = DE/CE. (Pathogène B) D'autre part la présence d'un angle aigu prononcé "allongé" et une lecture de gauche à droite de la figure engendre : ST/SG = UV/SG = SU/ST



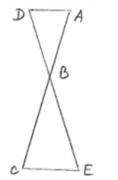
Pathogène A

Pathogène A'



Pathogène C

La figure papillon est aussi touchée par cette lecture de gauche à droite en particulier dans le cas de la figure représentative IV



Pathogène B

Nous avons jugé les figures comme étant pathologiques lorsque le pourcentage de reconnaissance de la part des élèves était compris entre 0% et 5%. Très nombreuses, nous ne les reproduisons pas ici.

II.2 Au sujet des variables numériques

II.2.1 Catégories des figures par répartition de longueurs suivant les pourcentages de réussite obtenus

La troisième expérience nous a permis de mettre en évidence plusieurs catégories de figures de type I et II suivant la répartition des longueurs et des résultats obtenus par les élèves. Les principales erreurs qui ont été commises sont les suivantes : (α) oubli des parenthèses, (β) absorption d'une constante par un terme en x, (δ) simplification fractionnaire pour une addition, (χ) Erreur dans la transposition.

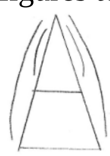
Dans le tableau ci-dessous, nous consignons un résumé de nos résultats en pourcentages de réussite des élèves arrondis au dixième. Nous avons rassemblé dans un même groupe les dessins de familles distinctes pour lesquels les trois taux de réussite aux écritures des rapports, à la mise en équation et à la résolution de cette équation sont similaires à cinq pour cents près. Pour un tel groupe, lorsque la place de la longueur inconnue n'a de répercutions sur aucun de ces trois pourcentages, nous avons jugé le niveau de distribution **homogène**. Dans le cas contraire, ce niveau est jugé **non homogène** et entraîne une scission du groupe. Suivant les pourcentages de réussite obtenus, le niveau de difficulté est jugé très difficile, difficile, moyen ou facile.

Tableau des réussites pour le prototype I

Groupes	Rapports		Mise équation		Résolution	
prototype I	4ème	3ème	4ème	3ème	4ème	3ème
I	97,1	97,4	97,1	96,3	94,1	94,5
II	92,4	94,3	22,1	37,8	7,3	20,2
III	99	100	70,3	74,3	70	72,5
III bis	99	100	52,2	59	51,7	59
IV	98,5	99,3	31,7	42,8	14	21,6
IV bis	99,5	100	22,3	35,4	8,8	15,1
V	99,3	100	6,5	12,5	0,9	6,1

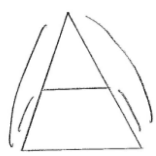
Groupe I :

Le niveau de distribution est **homogène**, c'est à dire que pour toutes les figures testées de ce groupe, il n'y a pas de différence significative du point de vue des résultats suivant la position de la longueur inconnue. Le niveau de difficulté est jugé **facile**.




Groupe II :

Le niveau de distribution est **homogène** et le niveau est jugé **difficile**. Des erreurs de type (α) et (β) sont commises avec de très bas taux de réussite pour les rapports numériques et la résolution des équations à

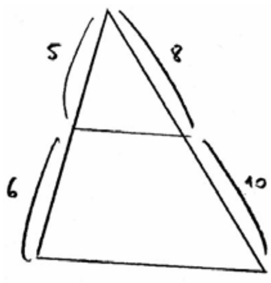
peu près similaires pour la première et la seconde figure. La variable didactique est caractérisée par la fragmentation des mesures de longueurs tant pour les rapports littéraux que pour les rapports numériques. Cela est sans doute dû à une identification d'une relation numérique entre les deux ensembles de nombres indépendamment des fonctions numériques liées par exemple à la projection ou à l'homothétie.

Nous avons pu mettre en évidence le fait que même lorsque les rapports littéraux écrits par les élèves sont liés à l'homothétie, les rapports numériques qui suivent peuvent différer totalement. Nous ne pensons pas que cette différence soit due à une identification d'une projection (Pfaff, 1995) mais plutôt, d'une part, à des distributions de données particulières et d'autre part à une lecture uniquement numérique de la figure.

Une fragmentation des longueurs est perçue comme un simple tableau à quatre cases de nombres que les élèves utilisent directement pour construire leurs rapports. Plus précisément, même lorsque les nombres ne permettent pas aux élèves d'exprimer le théorème en acte qui relie la proportionnalité à une propriété d'addition comme dans l'exemple

3	7
5	9

c'est la disposition des nombres sur une figure du groupe II qui les incite à écrire : 5/6 = 8/10.



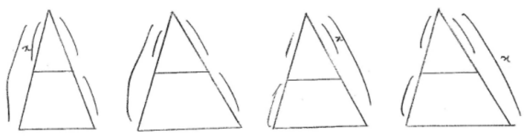
Il y a une rupture entre l'appréhension numérique et l'appréhension géométrique.

• Soit le géométrique est primordial et les données sont lues dès le départ sur la figure ;

• soit le numérique prédomine et ainsi, bien que les rapports littéraux soient corrects, les élèves lisent parfois les données numériques sur la figure qui n'est plus perçue comme un objet géométrique.

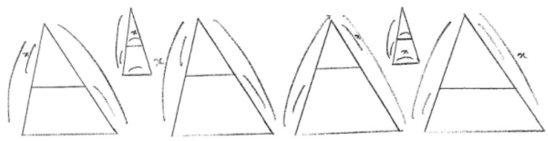
Groupe III :

La distribution est ici **non homogène,** car la position de la longueur inconnue est importante et le niveau de difficulté **moyen**.



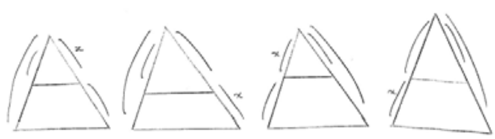
Groupe III bis :

La distribution est ici **non homogène,** car la position de la longueur inconnue est importante. Le niveau de difficulté est **difficile**. Les erreurs de mise en équation sont plus importantes que pour le Groupe III.



Groupe IV :

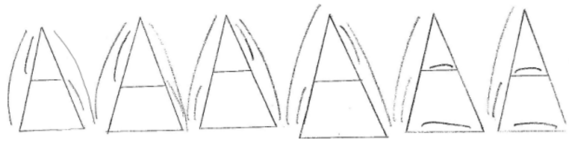
Le niveau de distribution est **non homogène**. La présence de l'inconnue du côté des segments fragmentés engendre des mises en équation encore plus **difficiles** pour les élèves que dans les groupes III et III bis.



Les erreurs de résolution sont du type (α), (β) et (δ). Pour ces quatre figures, les trois pourcentages de réussite sont similaires.

Groupe IV bis :

Le niveau de distribution est **non homogène** et le niveau est **difficile**. Les erreurs sont de même type qu'au groupe IV mais les pourcentages sur les fractions numériques sont différents de ceux du groupe IV.



Groupe V :

La distribution est **homogène** et le niveau de difficulté est **très difficile**. Des erreurs caractéristiques dues à une surcharge cognitive ont été commises. Ces erreurs sont du type (α), (β), (χ). Des absences de réponse ont également été relevées. Les deux côtés sont non congruents.
Globalement, nous pouvons dire que des erreurs se produisent :
soit dans le cas où l'inconnue est du côté non congruent
soit lorsque la figure est non congruente des deux côtés.

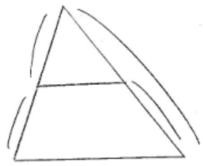
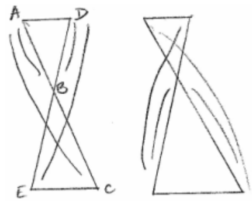


Tableau des réussites pour le prototype II

Groupes	Rapports		Mise équation		Résolution	
prototype II	4ième	3ième	4ième	3ième	4ième	3ième
A	X	96,6	X	75,8	X	52,5
B	X	96,8	X	59,9	X	43,6
C	X	97,3	X	81,3	X	63
D	X	98	X	94,5	X	94

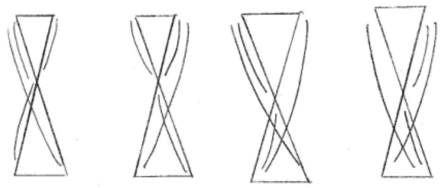
Groupe A :

Le niveau de distribution est **homogène** et le niveau de difficulté **moyen**. Le prototype I semble prégnant du fait de la présence d'une lecture de haut en bas dans les rapports littéraux : AB/AC = DB/DE = AD/EC. Les erreurs commises dans les mises en équation sont dues à des lectures directes des données sur le dessin, à une inadéquation entre les fractions littérales et les numériques ou à une surcharge cognitive.



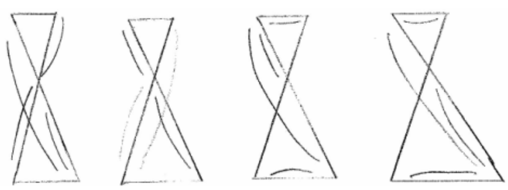
Groupe B :

Le niveau de distribution est **homogène** et ne niveau de difficulté **moyen**. Les pourcentages des rapports littéraux sont plus bas que pour le groupe A.



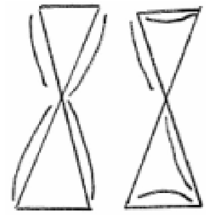
Groupe C :

Le niveau de distribution est **homogène** et le niveau de difficulté **moyen**.



Groupe D :

Le niveau de distribution est **homogène** et le niveau de difficulté **moyen**. Les figures sont ici congruentes. Les erreurs sont principalement dues à une lecture verticale pour les quotients littéraux. Peu d'erreurs ont été commises pour les mises en équation et les résolutions.



II.2.2 Distinctions entre les deux prototypes et leurs influences réciproques

Globalement, nous pouvons dire que la surcharge cognitive est plus importante pour le prototype II que pour le prototype I

Nous avons également testé et confirmé la prégnance de la figure papillon sur le prototype I fragmenté. Cette figure ainsi qu'une lecture de haut en bas influeraient sur l'application du théorème au prototype II. Inversement, la figure papillon influe sur le prototype I fragmenté en augmentant les erreurs qui, sans cela, sont tout de même nombreuses. L'appréhension perceptive prend le pas sur les autres appréhensions. Pour les deux prototypes I et II, nous avons également trouvé l'influence d'une lecture de gauche à droite pour les figures dites allongées. L'élève applique le théorème pour très vite se dégager de la figure par une mise en équation stéréotypée.

II.2.3 Les variables numériques pour la réciproque du théorème

La distribution des longueurs telle qu'elle apparaît pour les familles 4 et 6 de l'expérience 3 est une variable importante dans le cadre du parallélisme. Les erreurs dans ce cas sont semblables à celles commises au cours de l'application du théorème direct pour le calcul d'une longueur.

Des erreurs caractéristiques, que nous nommons additives, ont été relevées quant à la proportionnalité. Les élèves remarquent par exemple que l'on passe de deux nombres à deux autres nombres en ajoutant 1 et concluent alors que ces quatre nombres sont en situation de proportionnalité.

Pour démontrer l'égalité de deux fractions les élèves utilisent en priorité le produit en croix, les simplifications de fractions ou la calculatrice.

II.3 Sur la mesure des longueurs

Les résultats de la première partie du test n°3 qui compose notre quatrième expérience montrent que les élèves considèrent à 24% qu'il est nécessaire d'avoir la même unité pour mesurer tous les segments qui composent les rapports après application du théorème de Thalès. Il y a une confusion entre la comparaison de quatre mesures et la proportionnalité, entre la notion de grandeur et celle de rapport.

Une autre forte proportion d'élève, 30%, effectue des calculs illégitimes. L'analyse des résultats que nous avons obtenus aux exercices 1, 2, 3 de la deuxième partie du test n°3 nous permet d'affirmer que les élèves pensent pratiquement à l'unanimité qu'il existe toujours une partie aliquote commune à deux segments. Le cours sur la racine de deux n'a pas effacé chez les élèves de troisième ce préconstruit de second type.

En ce qui concerne la mesure des longueurs, les élèves se réfèrent systématiquement aux objets réels. Ils pensent alors que toute tout segment peut être directement et exactement mesuré de façon pratique.

III. Ce que nous retenons pour notre ingénierie

En ce qui concerne la construction de notre ingénierie et les choix que nous faisons à cette occasion, nous retenons le fait que le prototype I et son orientation ont une prégnance sur l'application du théorème à une figure ayant une orientation "renversée" (figure pathogène A), sur la figure papillon (figure pathogène B) et que la lecture de droite à gauche d'un dessin en a une autre (figures pathogènes C et C'). Les variables de répartition des longueurs, en particulier celles du groupe II, sont prises également en compte dans le choix que nous faisons de la version du théorème de Thalès et de sa réciproque.

Un des objectifs de notre ingénierie est de mieux faire comprendre aux apprenants la légitimité ou l'illégitimité de l'écriture de certains rapports, ce qui oriente nos choix de versions du théorème. Mais nous prenons aussi en compte les idées émises par les élèves au sujet de la mesure des longueurs et des rapports de longueurs. En particulier, dans une construction d'une démonstration du théorème de Thalès, nous retenons celles qui consistent à penser que deux segments sont toujours commensurables et qu'il est possible de trouver de façon pratique la mesure de tout segment. Nous allons maintenant nous consacrer à l'analyse des ouvrages et des préparations de cours en utilisant en partie nos résultats sur les figures prototypes et archétypes.

TROISIEME PARTIE

L'enseignement actuel du théorème de Thalès

TROISIEME PARTIE
Table des matières

CHAPITRE 1
Outils d'analyse des ouvrages et des préparations de cours

CHAPITRE 2
Analyse des programmes et des ouvrages scolaires

CHAPITRE 3
Analyse des préparations de cours

CHAPITRE 1

OUTIL D'ANALYSE DES OUVRAGES ET DES PREPARATIONS DE COURS

Introduction

L'objet de cette troisième partie est d'analyser l'enseignement actuel du théorème de Thalès. Dans un premier temps, nous procédons à une étude détaillée des programmes et des textes officiels ainsi que des manuels des classes de 4ème et de 3ème. Nous complétons et croisons les données issues de cette étude avec les notes de préparation de cours d'enseignants et les textes de contrôles que ces professeurs ont proposés sur ce thème. Pour ces analyses, nous employons, d'une part, les deux notions de prototypes et d'archétypes ainsi que les groupes de répartitions des longueurs que nous avons dégagés dans la partie précédente et, d'autre part, un outil d'analyse de tâches présenté ci-après. Compte tenu de l'ambition que nous avons dans notre ingénierie de motiver solidement l'introduction du théorème de Thalès, nous accordons à l'analyse des activités introductrices une attention particulière. Nous cherchons à pointer les similarités et les différences entre les éléments du corpus. Nous dégageons également, grâce à la grille d'analyse précitée et à une sélection *a priori* de variables, un classement des exercices par la définition de quatre univers distincts obtenus suivant la difficulté liée à ces variables figurales et situationnelles.

I. Outils d'analyse du contenu des activités et des exercices

Nous construisons notre outil en nous appuyant sur un travail de Robert (1998), destiné à l'analyse des tâches au niveau du Lycée et de l'enseignement supérieur et sur la thèse de doctorat de Hache (1999). Nous adaptons ces travaux à nos propres besoins tant du point de vue du niveau des élèves auxquels les ouvrages analysés et les préparations de cours s'adressent que de l'objectif premier de cette analyse qui est de tirer des conclusions utiles à la construction d'une ingénierie didactique.

Nous différencions quatre dimensions d'analyse des contenus à enseigner. Ces quatre dimensions concernent en premier lieu le contexte mathématique, en second lieu le déroulement chronologique et le scénario proposé puis l'analyse des tâches prescrites et enfin l'analyse des attentes des enseignants.

La dimension du contexte mathématique est scrutée suivant un ensemble de quatre axes composés, pour le premier, de la dialectique outil/objet, de l'ostension et des situations de références. Les trois axes suivants concernent respectivement le statut de la notion à enseigner quant à son insertion dans le paysage mathématique des élèves, le niveau de conceptualisation et enfin le niveau de mise en fonctionnement des connaissances des élèves. Les trois premières dimensions relèvent des caractéristiques strictement liées aux notions et à leur domaine d'application, la dernière s'intéressant aux mises en fonctionnement de ces notions dans des problèmes.

En plus des interrogations sur la dialectique outil/objet, la principale question que nous nous posons en empruntant notre premier axe est de savoir si la présentation actuelle du théorème de Thalès ne relève pas de l'ostension. Plus précisément, nous nous interrogeons sur l'apprentissage a-didactique des connaissances spatiales liées au théorème de Thalès en cherchant une situation de référence qui donne du sens à la problématique spatio-géométrique liée au méso-espace, composante importante que nous avons retenue pour ce théorème.

En ce qui concerne le deuxième axe, nous détectons, d'une part, des franchissements éventuels d'obstacles didactiques ou épistémologiques que permettrait la situation et, d'autre part, des problèmes culturellement connus où le théorème de Thalès intervient et que le système de variables de la situation permet de poser.

Afin de déterminer le statut de la notion à enseigner, nous nous interrogeons sur le degré de généralisation, d'unification et de formalisation du théorème de Thalès qui peut être par exemple perçu comme une réponse à un problème précis énoncé mais pas résolu avec les connaissances antérieurs. Il peut permettre aussi d'aborder autrement certains problèmes. Ainsi, les statuts de la notion à enseigner sont :

- formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (FUG) ;
- réponse à un problème (RAP) ;
- extension de notions ;
- seulement l'introduction d'un nouveau formalisme.

Le troisième axe permet de savoir si le niveau de conceptualisation de l'activité correspond au niveau attendu de la part des élèves en question.

Pour le quatrième axe lié au niveau de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves, nous retenons les trois niveaux définis par Robert : le niveau technique, le niveau des connaissances mobilisables et le niveau des connaissances disponibles.

Le déroulement chronologique et le scénario proposé, qui incarnent notre deuxième dimension d'analyse des contenus, s'articulent autour des notions de chronogenèse, d'organigramme et de topogenèse. Nous cherchons en particulier à savoir si le théorème de Thalès subit ou pas un phénomène d'obsolescence externe liée à la topogenèse, ou si une obsolescence interne, rattachée à la chronogenèse, assure un autre vieillissement de cette proposition.

L'analyse des tâches prescrites s'effectue, *a priori*, suivant les deux axes principaux d'analyse des tâches et des activités attendues de la part des élèves. En particulier, la théorie des 4T (Tâche, Technique, Technologie, Théorie) de Chevallard nous permet de pénétrer avec plus de précision dans les tâches qui sont proposées. Nous tentons à ce sujet de classer dans quatre univers les exercices et les activités en sélectionnant les variables figurales, numériques et didactiques qui les caractérisent.

Univers des Gammes

Les auteurs des énoncés appartenant à cet univers ne font varier - sur une figure simple existante ou à construire et pour une application immédiate de la proposition avec une seule étape - que des variables contextuelles telles que l'orientation de la figure, et surtout la distribution des données, c'est à dire la congruence de la figure, la position de l'inconnue dans l'équation, le nombre de longueurs à calculer, ou un simple habillage pratique.

Univers des Gammes Soutenues

L'Univers des Gammes Soutenues comprend des exercices où la question est posée indirectement ("Montrer que le triangle est isocèle", "Calculer le périmètre du parallélogramme", "Tu as fait une erreur !"), ou pour lesquels la configuration est un peu plus complexe et impose donc d'extraire une figure plus simple, ou qui nécessitent d'employer le théorème comme outil dans un cas très simple. L'élève doit parfois inférer et prendre de petites initiatives pour, par exemple, trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement, pour pouvoir justifier l'application du théorème. Plusieurs théorèmes doivent parfois être appliqués en même temps et être reliés entre eux, mais d'une façon assez simple et directe, dans une configuration épurée.

Similitudes entre les deux Univers

Les énoncés des exercices de ces deux univers sont fermés. Aucun changement de cadre n'est a effectuer. Aucune transformation de la propriété n'est utile. On indique clairement ce qu'il y a à démontrer et à calculer. Il n'y a pas réellement plusieurs pas de raisonnement, mis à part le fait qu'il faille parfois vérifier que l'on se trouve bien dans les conditions d'application du théorème. Il n'y a qu'une seule question d'un seul type. Aucune conjecture, interprétation ou raisonnement reliant des résultats entre eux ne sont nécessaires. La tâche principale est souvent calculatoire.

La difficulté, si elle existe, peut provenir de la non congruence des figures et par conséquent de la mise en équation et de la résolution. Lorsqu'il y a congruence, nous avons classé les exercices dans l'Univers des Gammes et dans le cas contraire dans l'Univers des Gammes Soutenues. A travers ces exercices routinisés (Chevallard), les élèves sont censés acquérir un savoir faire (t, T) composé de tâches t et de techniques T, partie pratico-technique du savoir.

Univers des Recherches Conséquentes

L'Univers des Recherches Conséquentes regroupe des exercices qui nécessitent plusieurs pas de raisonnement ou la recherche de contre exemples. De plus, la figure est généralement plongée dans une configuration plus complexe que précédemment.

Un des buts principaux de ce type d'exercices, est de faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement et de parfois mettre en fonctionnement le théorème en tant qu'outil. L'élève doit mettre en relation des résultats de façon moins évidente que pour les exercices faisant partie de l'Univers des Gammes Soutenues, il doit prendre des initiatives et parfois trouver des astuces. La difficulté peut provenir du fait qu'il faut appliquer plusieurs fois le théorème ou le théorème et sa réciproque. Mais il ne s'agit pas de réels problèmes, car il n'y a pas de conjecture à faire et les questions sont très détaillées et fermées.

L'Univers des Problèmes

Il s'agit, pour résoudre les tâches qui relèvent parfois de vraies démonstrations, de faire des raisonnements à plusieurs pas, d'effectuer plusieurs types d'enchaînement, d'inférer, d'appliquer plusieurs fois de suite une méthode qui doit être choisie, d'utiliser plusieurs outils anciens et nouveaux sans être guidé dans la démarche par des questions intermédiaires. L'élève doit encore inférer et rassembler des résultats et parfois deux possibilités s'offrent à lui pour résoudre la tâche. Plusieurs résultats sont souvent indispensables pour résoudre l'exercice. De plus, des enchaînements logiques non triviaux sont à la charge de l'élève et le domaine de contextualisation rend parfois la tâche difficile du fait qu'il n'y a, par exemple, que des calculs littéraux à effectuer ou une astuce à trouver.

Les divers niveaux d'organisation praxéologique et les champs conceptuels rattachés au théorème de Thalès sont parfois engendrés par des problématiques initiales différentes de la part des auteurs. Ces deux notions sont utiles pour pointer les attentes de l'enseignant.

Nous pouvons à présent détailler notre grille d'analyse.

a) Première dimension : le contexte mathématique

i) Premier axe : outil/objet, situation de référence, situation a-didactique et ostension

- Les notions apparaissent-elles comme outils ou comme objet ?
- Le savoir est-il présenté dès l'entrée dans la situation didactique ?
- Existe-t-il une ou plusieurs situations a-didactiques d'apprentissage où l'élève peut se situer en "résolveur de problème" ?
- Existe-t-il une situation de référence liée au méso-espace qui donne du sens au théorème de Thalès ?

ii) Deuxième axe : le statut de la notion à enseigner quant à son insertion dans le paysage mathématique des élèves et dans les programmes.

- Le problème permet-il de franchir un obstacle didactique, épistémologique ?
- La situation permet-elle d'engendrer, par son système de variables, des problèmes culturellement connus où la connaissance intervient ?

- Quel intérêt du théorème de Thalès met-elle en évidence ?
- S'agit-il d'un savoir nouveau ou ancien ?
- Comment s'effectue l'intégration du nouveau par rapport à l'ancien ?
- L'activité fait-elle apparaître une généralisation ?
- Quel est le degré de nouveauté, de 1 à 3 ?
- Quelle version de la propriété mathématique est choisie ou est à choisir ?
- Y a-t-il introduction d'un nouveau formalisme ?
- Quel est le statut de la notion à enseigner ?

iii) Troisième axe : les niveaux de conceptualisation

iv) Quatrième axe : niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves

- Le niveau technique

Les mises en fonctionnement sont encore indiquées, isolées et mettent en jeu des applications immédiates de théorèmes, de propriétés de définitions, de formules, etc. Il s'agit de contextualisations simples, locales, sans étapes, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations. Les connaissances utilisées ne sont pas nécessairement acquises par l'élève qui ne se les est pas forcément appropriées.

- Le niveau des connaissances mobilisables

Les mises en fonctionnement sont encore indiquées, mais dépassent l'application simple d'une propriété à la fois. Ces mises en fonctionnement nécessitent :

- d'adapter ses connaissances,

ou - de changer de point de vue ou de cadre,

ou - d'appliquer plusieurs fois de suite ou d'utiliser plusieurs choses différentes,

ou - d'articuler, de rapprocher deux informations différentes.

- Le niveau des connaissances disponibles

Il faut, ici, savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, aller chercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir. Il faut, par exemple :

- trouver un contre-exemple ;
- changer de cadre sans suggestion ;
- employer des méthodes non explicitées dans l'énoncé.

b) Deuxième dimension : le déroulement chronologique et le scénario didactique proposé

- Quelle est la place de la séance dans le cours : préliminaire (révision), introduction (se rapprochant d'une activité introductrice), cours (annoncés comme tels ou non), ou après le cours (travaux pratiques, exercices) ?
- Quels sont les organigrammes possibles indiquant les antériorités à respecter dans l'étude des chapitres, sachant qu'il y a toujours plusieurs ordres possibles
- Détermination de la chronogénèse et de la topogenèse.

c) Troisième dimension : analyse des tâches prescrites

i) Premier axe : analyse des tâches (*a priori*)

* Y a-t-il des étapes ? Les questions sont-elles liées ou indépendantes ?
* Ouverture de l'énoncé (grande liberté, quelques initiatives, très fermé).

- Une méthode (respectivement cadre ou un registre) est-elle indiquée ? Quelles méthodes (respectivement cadre, registre) peuvent (doivent) être utilisées ?

* Y a-t-il une modélisation à effectuer ? Y a-t-il un simple habillage ?
* Quel est le degré de décontextualisation de la tâche ?
* Démonstration

- Quels types de raisonnement sont en jeu ? (Application directe, implications, raisonnement par l'absurde ou contraposé, calcul numérique, raisonnement linéaire, arborescent, etc.) ; raisonnement par analyse synthèse. Quelle version du théorème est choisie ?

* <u>Sur quoi porte l'énoncé</u> ?

- Un résultat, une méthode, une démarche ? Un théorème, une définition, une propriété, une analogie, une construction, ...

* <u>Correction mathématique</u>

- relevé d'incorrections ou de présentations sujettes à caution
- des définitions ;
- de la rédaction du théorème de Thalès et de sa réciproque en particulier au sujet de la proportionnalité.

* <u>Quelle est la production demandée</u> ?

* <u>Quels sont les moyens de contrôle des élèves</u> ?

* <u>Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé</u> ?

<u>ii) Deuxième axe : les activités attendues des élèves (analyse a priori)</u>

* <u>Les calculatrices sont-elles utilisables</u> ?

* <u>Pour entrer dans la tâche</u> :

- Y a-t-il lieu de reconnaître : un type de problème, un type de justification, un type d'information, de conjecturer, de modéliser, de faire des mises en relations, d'interpréter, de changer de cadre ou de registre, de point de vue mathématique ou autre ?
- Faut-il adopter (transformer, sélectionner) ?
- Faut-il choisir une méthode, un outil ?

* <u>Pour résoudre la tâche</u> :

- Quels théorèmes ou raisonnements appliquer ?
- Quelle technique appliquer et liée à quelle technologie et théorie ?
- Y a-t-il lieu d'introduire des étapes, de développer plusieurs arguments à la fois, de répéter un argument, de gérer plusieurs variables à la fois ?
- Quelles sont, *a priori*, les difficultés et les échecs que l'on peut prévoir ?

* <u>Y a-t-il lieu, pour utiliser le(s) théorème(s) (définition, propriété, ...) de</u> :

- contextualiser, réappliquer deux ou plusieurs fois à la suite, reconnaître ou identifier et appliquer, changer de point de vue : il y a une modification à faire, transformer, sélectionner, perdre de l'information, introduire quelque chose (un intermédiaire, un objet, un point, un nom, un formalisme, notation), interpréter, mettre en relation, articuler deux ou plusieurs informations, faire une analogie, généraliser (décontextualiser), transférer, ...

* <u>Pour rédiger, quelle production est prévue</u> ?

<u>d) Quatrième dimension : analyse des attentes de l'enseignant</u>

Nous allons nous consacrer à l'analyse effective des ouvrages, des notes de préparations de cours et des contrôles.

CHAPITRE 2

ANALYSE DES PROGRAMMES ET DES OUVRAGES SCOLAIRES

Introduction

Nous débutons notre étude par une analyse des programmes de la classe de quatrième (arrêté du 10 janvier 1997) et de la classe de troisième (arrêté du 18 juin 1999) encore en vigueur à la rentrée 2005, année de rédaction définitive de cette partie.

Nous poursuivons par l'analyse des ouvrages que nous avons sélectionnés en commençant par une étude globale des activités introductrices qui effectue grâce aux outils que nous avons précités et ce dans le but de comparer leur contenu avec ce que nous pouvons légitimement attendre d'une activité. Nous terminons par une tentative de classement des exercices proposés en fin de chapitre.

La classification s'effectue suivant deux axes principaux qui sont : les objectifs méthodologiques et didactiques poursuivis par les auteurs et les niveaux cognitifs dont les exercices relèvent. Nous tenons compte également de nos résultats obtenus dans notre deuxième partie à propos des figures prototypes, pathogènes et des familles de distributions des longueurs. Ce que nous recherchons est une classification générale des exercices liés au théorème de Thalès qu'il est possible de trouver dans les ouvrages contemporains et non une description précise de leurs énoncés. Pour cela, nous consignons notre analyse dans un tableau reprenant à chaque fois les variables figurales et didactiques de la situation. Pour les exercices qui demandent plus de précision, nous donnons l'énoncé auquel nous appliquons l'outil d'analyse que nous avons proposé précédemment. A travers cette analyse - synthèse, différents univers (Hache, 1999) sont mis en évidence.

Nous procédons de même pour l'étude des préparations de cours de professeurs et des contrôles qui en ont découlé.

I. Analyse des programmes

Pour commencer, nous pouvons dire que la noosphère, influencée par les résultats de la didactique, a pratiquement imposé les activités dans les programmes ce qui engendre leur présence au début de chaque chapitre des manuels scolaires. Elle a repris le déroulement théorique complet d'une activité. En ce qui concerne le théorème de Thalès, il reste à savoir de quelle façon cette appropriation se traduit dans les ouvrages scolaires et les commentaires des programmes ?

Les programmes de la classe de quatrième sont entrés en application à la rentrée 1997 (Annexe I 1, a). La propriété des droites parallèles coupant deux sécantes est nouvelle en classe de quatrième et, ajoutée aux autres, doit permettre de développer des capacités de démonstration.

Il est explicitement précisé dans les commentaires que l'égalité des trois rapports est admise, après avoir éventuellement étudié certains cas particuliers. La figure "papillon", ainsi que la réciproque du théorème sont renvoyées à la classe de 3ème. L'approche de cette propriété s'effectue par le biais d'un triangle pour lequel on trace une parallèle à l'un de ses côtés. Les programmes sont clairs sur le statut de la propriété. Il s'agit de donner une nouvelle configuration illustrant une situation fondamentale de proportionnalité. Ces nouveaux programmes semblent avoir pour objectifs de rendre la propriété de Thalès accessible à tous en le restreignant à la configuration triangulaire simple en quatrième. Cette répartition sur deux classes ne concerne pas que la propriété de Thalès, mais également la trigonométrie pour laquelle le cosinus est introduit en quatrième et les sinus et tangente au niveau troisième. Nous pouvons légitimement nous demander si ce parti pris d'apparente simplification par divisions successives du savoir n'a pas été mise en place au détriment de la prise de sens de ces résultats chez les élèves.

En ce qui concerne les éventuelles explications liées aux activités, rien n'est précisé dans ces programmes. Pour en obtenir, il est nécessaire de se rendre au texte de présentation générale des programmes de $5^{ème}$ et $4^{ème}$ (Annexe I 1, b). L'expression activité mathématique est employée dans ce texte. Mais ces activités ne sont rattachées qu'à des expériences bien précises. Le sens des définitions et des théorèmes doivent être donnés par ces "études expérimentales". Ces études relèvent explicitement de mesures, de représentations à l'aide d'instruments de dessins.

Les programmes de la classe de 3ème sont applicables depuis la rentrée scolaire 1999 (Annexe I 1, c) et le sont encore en 2004. Dans leur explicitation, la démonstration paraît centrale. L'accent est également mis sur l'initiative des élèves.

En ce qui concerne le théorème de Thalès, nous ne sommes plus placés ici dans le triangle. Il s'agit d'un cas un peu plus général du théorème de Thalès, tenant compte de la figure papillon. La formulation de la réciproque doit tenir compte de l'ordre relatif des différents points alignés. Nous avons déjà vu que divers procédés permettaient jadis de formaliser cette lecture du dessin : les segments additifs et soustractifs ou les côtés d'un triangle et leurs prolongements. Nous voyons également apparaître, dans les commentaires, l'importance des situations de proportionnalité et en particulier, celles qui sont traitées dans le cadre de la géométrie du plan et de l'espace. Cet aspect est donc central dans l'élaboration et l'application du théorème de Thalès.

Alors qu'une cohésion pourrait être trouvée grâce à une utilisation raisonnée du théorème de Thalès pour introduire plusieurs concepts ou propriétés, les programmes ne s'attachent qu'à mettre en valeur la possibilité de manipuler des expressions algébriques dans les comparaisons d'aires et de volumes. Le local semble privilégié par rapport à une organisation plus ambitieuse mais surtout plus cohérente voire structurante par rapport à l'assimilation des savoirs.

La seule référence aux activités introductrices concerne la possibilité d'utiliser l'outil informatique pour montrer aux élèves l'égalité des rapports. Aucune référence à la mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace n'est faite. La micro-informatique remplace la règle et le compas que les élèves utilisaient pour remarquer par eux-mêmes, sur leur dessin, l'égalité de certains rapports. Cela multiplie les possibilités de changement de ces rapports ce qui permet éventuellement de mettre en évidence les invariants des figures. Il semble, tant dans le programme de quatrième que dans celui de troisième, que l'activité de l'élève soit conçue comme une vérification pratique d'une propriété, comme une manipulation directe des objets que sont les figures géométriques qui représentent le théorème à l'étude.

II. Analyse des ouvrages retenus

Afin d'étudier la transposition didactique du théorème de Thalès tel qu'il est enseigné actuellement, nous appuyons notre étude sur une analyse d'ouvrages qui nous paraissent significatifs et qui semblent portés par l'esprit des programmes actuels. A titre d'information, une enquête a été menée en 1990 par la DEP au sujet des ouvrages utilisés cette année-là par les professeurs. L'échantillon expérimental sur lequel portait cette enquête, était composé de 3000 professeurs répandus sur toute la France. Les résultats ont été les suivants :
Pythagore 44% ; Transmath 23% ; Bordas 12% ; Istra IREM Strasbourg 9% ; et à 4% : Istra Mistral, Magnard, Hachette Terrache.

Même si la date de cette enquête ne correspond pas à la période de mise en place des nouveaux programmes, nous pouvons augurer que les quelques changements survenus dans ce programme n'ont pas fortement modifié les habitudes de choix des ouvrages scolaires de la part des professeurs. Ainsi, nous pensons que les ouvrages scolaires que nous avons sélectionnés sont représentatifs des livres employés dans les classes des collèges français. Nous ne donnons que les résultats finaux des analyses mettant en évidence ce qui rapproche et différencie les livres en question.

II.1 Les deux ouvrages Pythagore

II.1.1 Analyse des activités introductrices

a) Activités 1 à 4 du livre niveau quatrième (Annexe I 2, a)

Le caractère outil du théorème des milieux est utilisé dans un seul cadre, la géométrie euclidienne. Le registre principal est le registre littéral pour l'activité 1 et la lecture graphique, le numérique pour la suite. Seule cette activité 1 fait appel à des connaissances antérieures qui sont réinvesties. Mais la transition entre ancien et nouveau n'est pas pleinement exploitée. Les notions sont certes reliées au théorème des milieux pour l'activité 1 qui rend légitime le théorème de Thalès dans le cas de côtés du triangle partagés en trois. Un savoir nouveau est mis en place tout au long des quatre activités. L'intégration du nouveau (le théorème de Thalès) par rapport à l'ancien (le théorème de milieux), la transition de l'un à l'autre, qui seraient possibles en plusieurs étapes, au moins deux de plus, ne sont pas faites ici. Ainsi, l'énoncé porte sur l'amorce d'une extension d'un théorème qui n'est pas réalisée. Le vieillissement interne aurait pu être assuré par cette nouvelle propriété et la chronogénèse aurait eu des phases bien définies.

Un problème particulier sert de réinvestissement de la propriété de la droite des milieux. Le niveau de fonctionnement visé est le niveau technique. Pour entrer dans la tâche les élèves doivent reconnaître un type de justification et choisir une méthode. Mais les étapes sont présentes dans l'énoncé. Pour résoudre la tâche, le théorème des milieux est à appliquer. La démonstration principale relève d'un raisonnement séquentiel simple par double application du théorème des milieux. La technique à appliquer est liée à la technologie du parallélogramme, qui est caractérisé de trois façons différentes, vues en classe de cinquième, justifiée par la théorie des parallèles. Mais nous ne pouvons pas considérer que la démonstration qui se trouve dans l'activité 1 justifie, même en partie, le théorème de Thalès. En effet, aucune transition n'est assurée avec l'activité de mesure suivante. L'organisation mathématique ne peut pas être globale ni régionale. Des tâches sont effectuées grâce à des techniques qui sont elles-mêmes justifiées par la technologie théorème de Thalès, mais celui-ci ne se fonde sur aucun résultat théorique, alors que cette activité pouvait laisser présager qu'une théorie, celle des parallèles, et qu'une technologie, celle du théorème des milieux appliquée à plusieurs figures, aurait permis de le démontrer dans le cas de rapports de deux entiers. Les points d'intersections des droites parallèles à (BC) passant les points E et F avec le segment [AC] mériterait un axiome du continu.

L'activité 2 est une lecture graphique de longueurs sur un quadrillage et un mesurage de longueurs pour calculer, à la machine, des valeurs approchées de rapports. L'activité ne fait pas vraiment apparaître de généralisation ni pour les rapports rationnels et encore moins pour les rapports irrationnels. La production demandée est le calcul approché de rapports de longueurs obtenues par la lecture d'un dessin.

Le type de problème dont relèvent les énoncés des activités 2 et 3 est la vérification pratique, la lecture ou la mesure des longueurs. L'activité 4 est un exercice d'application immédiate. L'énoncé du théorème prend place dès la première vérification pratique sur quadrillage. La partie A de l'activité 4 le rôle de l'institutionnalisation. Mais cette institutionnalisation n'intervient pas après un débat, mais juste après une vérification pratique de la propriété sur un cas particulier. L'enchaînement des épisodes des activités est clair. On passe d'une activité de démonstration liée à un cas particulier simple, à une lecture et une évaluation de fractions pour finir par la mesure de segment. Une étape aurait pu être introduite pour montrer que les "graduations" étaient conservées par "projection".

Pour ces activités 2 à 4, il n'y a pas lieu de conjecturer, de reconnaître une justification, de modéliser, de mettre en relation.

Il y a lieu, dans l'activité 3, de contextualiser et de le réappliquer deux fois comme nous venons de le voir. Aucun changement de point de vue n'est à faire. Toutes les informations sont nécessaires. Il n'y a pas lieu d'articuler deux informations, d'interpréter, de généraliser, de transférer. Ainsi, l'indice de complexité est faible pour l'activité 1 et très faible pour les activités 2, 3, 4. Aucun risque de décalage n'est à attendre entre les activités attendues et les tâches prescrites puisque tout est détaillé.

Pour l'activité 1, il s'agit d'introduire partiellement un théorème et de familiariser les élèves avec ce résultat, par la pratique liée aux figures géométriques. Aucune formulation, validation ne sont à mener par l'élève. Seule une vérification pragmatique leur est demandée. Le théorème est en fait juste illustré. Les activités suivantes sont, soit des exercices d'application, soit des programmes de construction.

En ce qui concerne l'utilisation de la propriété de Thalès dans le système didactique de l'ouvrage en tant qu'outil, nous pouvons remarquer qu'il est utilisée pour introduire le cosinus dans un triangle rectangle. Cette technologie sert à justifier une autre technologie qui permet d'accomplir des tâches de calculs de longueur ou de mesures d'angles. Mais c'est le seul cas d'intervention dans tout l'ouvrage.

b) Activités 5 à 8

Ces activités situent après le cours, en séances de travaux pratiques. Il n'y a pas d'enchaînement des épisodes. Il s'agit, à chaque fois, d'un exercice particulier, contextualisé. L'activité 8 fait l'objet d'une reprise dans un exercice de la partie "Savoir faire". Seul caractère objet de la notion apparaît. Les registres sont, pour les activités 5 et 7, les registres littéraux et calculatoires, et pour les activités 6 et 8, les graphiques et constructions.

Les connaissances qui sont en jeu dans les activités 5 à 8 sont le théorème de Thalès et ses applications abordées dans les activités précédentes.
Les activités 5 et 7 sont des applications qui se veulent pratiques. La production demandée est un résultat numérique. Mais, en fait, au lieu d'être posée réellement dans le méso-espace, la situation est immédiatement transposée dans le micro-espace. Il ne s'agit que d'un simple habillage et non d'une modélisation d'une situation à faire par l'élève. De plus dans l'activité 5 A où il est demandé de ramener la première modélisation à la seconde, purement schématique, des implicites liées à l'ombre d'un objet, aux rayons du soleil sont présents.

Les activités 6 et 8 exposent deux méthodes de construction. La production demandée est une construction justifiée par une démonstration. L'une correspond au partage d'un segment dans un rapport donné et l'autre la construction de la quatrième proportionnelle. L'accomplissement de ces deux tâches est étroitement guidé par un programme de construction totalement détaillé. Aucune dévolution de la tâche n'est possible. Ainsi, il ne s'agit pas d'une (RAP). C'est l'évocation du théorème de Thalès, dont la charge de l'application incombe totalement à l'élève ("Mesurer OD. Que constate-t-on ? Expliquer pourquoi on retrouve x.") qui justifie la mise en œuvre de la technique décrite aux différents points permettant d'obtenir le partage du segment demandé ou la quatrième proportionnelle, et rend compréhensible et légitime la technique engagée, notamment le fait d'avoir tracé deux demi-droites de même origine, d'y avoir reporté trois segments de même longueur et enfin d'avoir tracé une parallèle. De même pour la quatrième proportionnelle. Le support sur lequel s'appuie la réalisation de ces tâches constitue la manière de faire, la technique qui permet d'accomplir les deux taches données au départ. Ces techniques sont justifiées par la technologie que constitue le théorème de Thalès. Mais nous venons de voir que, contrairement à ce que nous pourrions attendre de la première activité, ce théorème n'est pas démontré. L'agrégation de ces différentes organisations ponctuelles, liées à différents types de tâches que nous venons de décrire, autour du théorème de Thalès qui constitue un élément technologique non démontré, même partiellement, nous incite à considérer cette organisation praxéologique comme une organisation mathématique locale.

Globalement, pour entrer dans les tâches qui sont de niveau technique, il y a lieu de reconnaître un type d'information et de justification. La méthode à choisir est en fait imposée. Une légère adaptation est à prévoir dans l'activité 5 (B). Aucune étape n'est à introduire si ce n'est pour justifier l'égalité AF = FH = HJ = JL = LC. Il n'y a pas lieu de développer plusieurs arguments à la fois, ni de gérer plusieurs variables à la fois. Nous pouvons considérer que nous nous trouvons dans le cas d'une ostension déguisée.

Ainsi, l'indice de "complication" de 1 à 5 pour l'activité 5 A : 1 l'activité 5 B : 2, les activités 6 et 8 : 1 et activité 7 : 2. La nouveauté réside dans les deux méthodes de construction qui sont proposées.

Pour les concepteurs des activités, il s'agit de familiariser les élèves avec les calculs liés au théorème de Thalès, avec également des questions indirectes. Le but des activités 6 et 8 est d'exposer des méthodes de construction. Les questions sont fermées, sauf pour la question de l'activité 7 B 2 : "Que peut-on dire du triangle BXY ?". Mais la réponse se lit sur le dessin.

Nous allons maintenant avoir le même cheminement pour l'analyse des activités niveau troisième du "nouveau Pythagore"

c) Activités 1 à 4 du livre Pythagore niveau troisième (Annexe I 2, b)

Seul le caractère objet est abordé dans les activités 1 à 4. C'est un habillage lié au "concret".

L'activité 1 fait appel au théorème de Thalès déjà introduit en classe de quatrième. Il s'agit d'un problème de révision sur une application simple. Il est demandé aux élèves de produire un calcul numérique. Après adaptation pour obtenir les longueurs adéquates, l'élève doit appliquer quatre fois le théorème de Thalès.

Dans l'activité 2, il s'agit d'une lecture de données sur une figure pour compléter des phrases. Il s'agit de lire des données sur une figure pour évaluer des rapports de longueurs et des aires : lecture de côtés de carré et du nombre de carrés.

Seule l'activité 3 fait apparaître une tentative de démonstration. Cette activité fait appel, en partie, à la propriété de Thalès 4ème et à la symétrie centrale abordée en classe de 5ème. Le parallélisme d'une droite et de son image par une symétrie centrale ainsi que la conservation des longueurs sont deux résultats de la classe de 5ème qui ne sont pas démontré dans les ouvrages scolaires et représentent deux technologies.

L'organisation de la démonstration est plutôt locale. Le type de problème est donc une démonstration de l'extension à la figure dite "papillon" de la propriété abordée en quatrième. Il s'agit d'un savoir ancien généralisé aux trois figures possibles. L'ancien sert en partie à "démontrer" le nouveau. Le problème de la position des parallèles par rapport au sommet commun et l'une par rapport à l'autre est abordé avec l'ancien : symétrie par rapport à un point, propriété de Thalès dans le triangle. Dans cette activité, il est donc nécessaire d'articuler, de mettre en relation des résultats obtenus grâce à l'application du théorème de Thalès et d'une propriété des symétries centrales. Il est demandé aux élèves de produire une démonstration guidée pas à pas.

L'activité 4, qui concerne une approche empirique de la réciproque du théorème de Thalès, relève d'un constat fait sur différentes figures. Sur trois cas particuliers, il s'agit de faire comprendre à l'élève l'importance de l'ordre des points. Dans les mathématiques dont dispose l'élève de troisième, le théorème de Thalès complet permet d'aborder autrement le calcul de certaines longueurs. La propriété réciproque, introduite grâce à l'activité 4, permet d'aborder, par le biais du calcul, le parallélisme de deux droites. Il pourrait s'agir d'une extension d'une notion déjà introduite, pour l'activité 4.

Les activités 1, 2 et 4 sont du niveau des connaissances techniques. Les mises en fonctionnement sont indiquées et mettent en jeu des applications immédiates d'un théorème ou une lecture directe de propriétés vues sur un dessin.

Nous pouvons considérer que l'activité 3 est du niveau des connaissances mobilisables, car les mises en fonctionnement sont encore indiquées, mais dépassent l'application simple d'une propriété à la fois. Elles nécessitent d'adapter ses connaissances, d'appliquer deux fois de suite un théorème et d'utiliser deux choses différentes (théorème de Thalès et une propriété liée à la symétrie centrale).

Globalement, il y a à chaque fois des étapes qui sont indiquées et les questions sont liées. Les méthodes sont, soit indiquées, soit le contexte de l'énoncé impose le théorème à appliquer (Activité 1).

Dans les activités 2 à 4, les notions liées au théorème de Thalès apparaissent comme objet. La symétrie est employée, dans l'activité 3, comme outil. Nous pouvons dire que toutes ces activités relèvent encore une fois d'une ostension déguisée puisque les auteurs donnent l'illusion que les questions sont ouvertes et qu'une grande liberté d'interprétation est laissée aux apprenants, mais il n'en est rien. En effet, nous avons pu nous rendre compte que non seulement les questions sont le plus souvent détaillées mais que lorsque ce n'est pas le cas, leur position dans l'énoncé induit l'application d'un résultat.

L'énoncé du théorème de Thalès prend place après la démonstration de la propriété dans les deux derniers cas de figure. L'énoncé de la réciproque se situe après une approche empirique mettant en évidence l'importance de la position respective des différents points alignés. L'activité 1 est un préliminaire, l'activité 2 une introduction et les activités 3 et 4 constituent le cours.

Le degré de complication de l'activité 1 est estimé à 1, des activités 2, 3, 4 à 2.

d) Les activités 5 à 8 du niveau troisième Nouveau Pythagore

Il s'agit du caractère objet qui est abordé à chaque fois. L'activité 5 a fait appel aux expressions de l'aire et du volume de la sphère, d'un cylindre et d'un parallélépipède, qui sont supposée être disponibles pour les élèves, dans le but de trouver un rapport entre les variations des longueurs et celles des aires puis entre celles des longueurs et celles des volumes. Le théorème de Thalès n'intervient pas. La fonction de ces formules est d'aider l'élève à établir une relation entre les aires d'objets de forme régulière ainsi que leurs volumes avant et après réduction. La production demandée est une formule, dans des cas particuliers. Les procédures attendues sont de compléter les tableaux proposés à l'aide de la définition d'une échelle et des formules donnant les aires de la sphère, du cylindre et leurs volumes. Les problèmes ne sont pas abordés avec le l'ancien, en l'occurrence le théorème de Thalès, pour aboutir à une propriété nouvelle, comme cela aurait pu se faire pour l'aire : triangle→ rectangle→ etc.

L'activité 6 est une application d'un résultat de l'activité précédente. Il faut adapter ses connaissances : on aborde, en effet, le problème en termes de pourcentages et non plus en terme d'échelle. On admet implicitement que les formules $A' = k^2A$ et $V' = k^3V$, établies dans des cas particuliers non génériques et qui ne sont justifiées par aucune technologie ni théorie, sont vraies en général. Un outil est à choisir mais il n'y a pas lieu de changer de point de vue, de transformer, d'introduire quelque chose. Le théorème de Thalès n'est toujours pas utilisé en tant outil, ce qui aurait pu bien évidemment se faire. La production demandée à l'élève est un calcul numérique, après application d'une formule non établie et non institutionnalisée. L'activité 6 permet d'aborder autrement le calcul d'aires sans faire intervenir ce qui vient d'être mis en évidence.

Le cadre principal, pour les activités 5 et 6 est le cadre du calcul numérique. Le type de problème dont relèvent les énoncés des activités 5 et 6 est le calcul de valeur. Il s'agit du niveau des connaissances mobilisables. Il faut, en effet, articuler deux informations différentes et rassembler plusieurs résultats. On peut prévoir un certain décalage entre les activités attendues et les tâches prescrites pour les calculs concernant l'aire de la sphère dans l'activité 5 et l'aire d'un cube dans l'activité 6B. Les propriétés effleurées dans ces activités s'insèrent mal dans une chronogénèse. Il serait intéressant, dans l'organigramme, que soit abordé, avant cela, le chapitre 13 qui concerne la sphère et l'espace, où le théorème de Thalès est utilisé pour la seule et unique fois en tant qu'outil.

Pour les concepteurs, il s'agit de familiariser l'élève avec les répercutions que génèrent les agrandissements - réductions sur les volumes et les aires. Mais aucun lien n'est créé avec le théorème de Thalès.

Le cadre des activités 7 et 8 est le cadre de la géométrie métrique. Le registre principal est littéral et calculatoire et relève du calcul de deux fractions. Les critères d'égalité de fractions servent, à l'aide des différentes figures, à mettre en avant deux cas litigieux de parallélisme de deux droites. La production demandée aux élèves est une construction et un calcul. Le type de problème dont relèvent les activités 7 et 8 est l'étude de configurations par l'intermédiaire de calculs. Elles complètent, en quelque sorte, le cours sur la propriété de Thalès. Nous sommes au niveau des connaissances techniques.

Dans les activités 5 à 8, aucun énoncé de propriété ne suit le scénario. Il y a plusieurs étapes, mais elles sont à chaque fois indiquées et ainsi, aucune initiative n'est laissée à l'élève. Les questions sont toutes fermées et la méthode de résolution est imposée, sauf à l'activité 6 B ; mais elle est alors suggérée par ce qui précède. Il n'y a pas à faire un choix d'outil, ou si c'est le cas, ce choix est implicitement orienté par l'activité 5. Il s'agit, à chaque fois, dans chaque activité, d'un cas particulier. Les questions des activités 5 et 6 sont pourtant nouvelles. Il n'y a pas lieu de changer de point de vue, de transformer, de sélectionner, d'introduire quelque chose. Il faut interpréter des résultats obtenus pour des cas particuliers dans l'activité 5 et interpréter les données des figures par rapport aux calculs dans les activités 7 et 8. Le degré de complication de l'activité 5 est estimé à 2, de l'activité 6 à 3 et des activités 7 et 8 à 1.

II.1.2 Analyse et classifications des exercices

Nous commençons par le niveau 4$^{\text{ème}}$ (Annexe I 2, c).

Calculs et constructions

A - <u>Calculs sur une figure simple</u> Types 1 à 7.

Seule la figure de Thalès est présente. Les variables qui sont retenues dans cette série sont : l'orientation de la figure, la distribution des longueurs et, par conséquent, la congruence de la figure. Nous avons obtenu des résultats dans la partie consacrée aux variables didactiques, en particulier au sujet d'un classement de figures prototypes, représentatives, de figures pathogènes et de distribution des longueurs que nous allons utiliser dans nos tableaux. D'autres variables sont ici le nombre de longueurs à calculer, le nombre de parallèles et de sécantes étant à chaque fois, bien sûr, fixé à deux. Dans cette série type, il peut s'agir du calcul d'une longueur imposée sur une figure congruente (1 et 2), du calcul d'une longueur imposée sur une figure non congruente (3, 4 et 7), du calcul d'une longueur (non imposée) sur une figure congruente (5) ou du calcul de plusieurs longueurs (imposées) sur une figure congruente (6).

La plupart des énoncés sont fermés. Un seul est à moitié ouvert (5), puisque l'on demande qu'elle longueur peut-on calculer ? Les questions ne comportent qu'une seule étape ; l'élève n'a pas à inférer. Il n'y a pas plusieurs ou pas de raisonnement dans la démarche à adopter. Il n'y a, la plupart du temps, qu'une seule question, ou qu'un seul type de question répété plusieurs fois. Même s'il n'est pas précisé qu'il faut appliquer le théorème de Thalès, la position des exercices dans le paragraphe ne laisse aucun doute là dessus.

Un seul outil est à mettre en fonctionnement dans les questions. La difficulté, lorsqu'elle existe, provient de la mise en équation et de la résolution de cette équation quotient et non pas, bien sûr, d'un changement de registre, de l'extraction d'une figure dans laquelle le théorème de Thalès serait applicable.

Le but est de faire appliquer la propriété de Thalès sans aucune transformation. Les difficultés ne proviennent pas de la complexité de la question ni d'imbrications d'éléments, mais de l'orientation de la figure et de la distribution des données. La plupart de ces exercices sont des exercices didactiques utiles pour s'entraîner et acquérir des mécanismes et font partie de l'Univers des Gammes. Cependant, certains d'entre eux, que nous classons dans l'Univers des Gammes Soutenues, correspondent à des exécutions de tâches plus techniques comme ceux dont une partie de la solution consiste à aboutir puis à résoudre une équation du type :
(x - 7)/x = 1/3 ; x/(x + 9) = 5/(5 + 7) ; 2/(2 + x) = 8/9 (7). Nous sommes en présence de 17 (UG) et de 8 (UGS). Ces exercices ne mélangent pas les difficultés. Par exemple, la position pathogène I' de la figure n'est pas associée à une répartition des longueurs rendant la mise en équation plus complexe et inversement.

Quatre exercices relevant de calculs d'une longueur dans une configuration simple, mettent en évidence un "habillage" pratique (Type 18). Les situations font référence au méso-espace, mais leur résolution s'effectue directement dans le micro-espace sans modélisation. Nous classons ces exercices dans l'Univers des Gammes. La difficulté pourrait porter sur une modélisation et non sur la résolution elle-même.

B - <u>Calculs sur une figure plus complexe</u> Types 8 à 11, 19

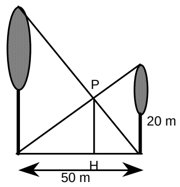
Dans cette série, la figure est plus complexe et il s'agit d'un calcul de plusieurs longueurs (8), (9), d'une longueur (10) et (11). La figure est plongée dans une configuration complexe pour la plupart de ces exercices ; l'élève doit extraire la figure-clef ou justifier que le dessin se trouve dans les conditions d'application du théorème (parallélisme, etc.).

Toutes les questions sont encore fermées. On indique clairement ce qu'il y a à démontrer et à calculer, même si une question peut être indirecte comme au type (9). Les questions comportent plusieurs étapes et l'élève doit parfois inférer.

Aucun changement de cadre n'est à effectuer. Plusieurs questions et calculs s'enchaînent, l'élève doit prendre des initiatives, mais il s'agit encore de tâches techniques. La notion apparaît en tant qu'outil.

Il s'agit de faire appliquer une définition et un théorème avec une difficulté sur le domaine de contextualisation, du fait de la complexité relative des configurations. Il faut faire reconnaître un théorème à appliquer avec une discussion pour être dans le champ d'application pour le parallélisme (11). Aucune conjecture n'est à faire, ni de changement de point de vue, ni de cadre. La tâche principale est calculatoire. Mais il est parfois nécessaire de relier des résultats entre eux et cela est explicite. Les types (8), (9) et (11) relèvent malgré tout de l'Univers des Gammes Soutenues. Les auteurs s'attachent à faire apprendre à rédiger tout en vérifiant des connaissances immédiates.

Un seul exercice se différencie du reste : Histoire d'arbres (Type 19).
Il s'agit réellement d'un petit problème de recherche. Contrairement à tout ce qui a été déjà vu jusqu'à présent, il s'agit, pour le résoudre, de faire des raisonnements à plusieurs pas, sans être guidé dans la démarche par des questions intermédiaires, d'effectuer plusieurs types d'enchaînements. Ici, on dit ce qu'il y a à calculer (PH), mais on n'indique pas comment y parvenir. Il y a un choix de méthode à faire parmi deux, mais pas de conjecture.



La question comporte plusieurs étapes : l'élève doit inférer et rassembler des résultats ; il y a plusieurs pas de raisonnements dans la démarche à adopter.

Le but est de faire appliquer un théorème par deux fois, en l'occurrence le théorème de Thalès. La difficulté provient de la complexité de la résolution, du domaine de contextualisation et sur les transformations auxiliaires nécessaires à la résolution de l'équation.
(1) PH/30 = BH/50 et **(2)** PH/20 = AH/50. Membre à membre PH/30 +PH/20 = 1, puis on calcule PH. Ou autre méthode : BH = 50 - AH, d'où dans **(1)** PH/30 = (50 - AH)/50 soit

PH/30 = 1 - AH/50, soit avec **(2)** PH/30 = 1 - PH/20. Nous considérons, du fait de l'initiative à prendre de la part de l'élève pour amorcer la résolution, du fait qu'il doive appliquer un théorème dans deux figures qu'il doit extraire d'une configuration complexe, du fait qu'il y ait deux résultats à mettre en relation et que ce lien n'est possible qu'en utilisant une propriété ancienne ($M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB$) que cet exercice fait partie de l'univers des Problèmes (1).

C - <u>Constructions</u> Type 12

Il s'agit d'applications directes du cours qui consistent à s'entraîner et à acquérir des mécanismes et relèvent de l'Univers des Gammes.

Nous notons pour finir que dans cette partie, un seul exercice est entièrement ouvert (13). De plus, la propriété est utilisée en tant qu'outil. En voici l'énoncé :

> Dans un avion, 18 des 75 passagers sont Belges.
> a) Représenter graphiquement le pourcentage de passagers (prendre 1 cm pour 10 passagers et 10 cm pour 100%).
> b) Vérifier ce pourcentage par le calcul.

Mais ce type de tâche peut ne pas être entièrement nouveau pour les élèves ayant abordé l'activité 8.

1 - Démonstrations

A - <u>Démonstrations sur une figure clef seule</u>

Ces démonstrations s'effectuent uniquement en référence à la seule figure de Thalès. Les intentions méthodologiques des concepteurs sont simples. L'élève doit être capable de recouper deux informations pour inférer un résultat qui lui-même doit correspondre à une interprétation liée à la question initiale. Le but est d'établir une égalité ou en général un résultat qui n'est plus lié au numérique.

En ce qui concerne le type (14), une seule question est posée dans laquelle on indique ce qu'il y a à démontrer sans préciser comment. Les questions comportent deux étapes et l'élève doit inférer et rassembler deux résultats. Ainsi cet exercice est semi-ouvert. Le type (15) paraît plus simple. On indique ce qu'il y a à démontrer et comment le faire. La question est fermée et il n'y a aucun résultat à rassembler.

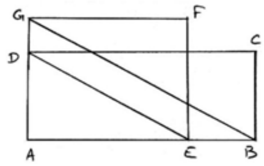
Type (14) : deux outils sont à mettre en marche, sans indications. L'un est lié à l'égalité de deux côtés d'un triangle isocèle ou de trois pour un triangle équilatéral, l'autre étant le théorème de Thalès pour aboutir finalement à l'égalité AM = AN ou AM = AN = MN. Une seule possibilité existe pour résoudre l'exercice. Il s'agit de la généralisation de l'activité 7 A et B proposée dans le cours sur un cas particulier. Pour le type (15), un seul outil est à employer.

Pour le type (14), il faut à la fois appliquer un théorème et trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement, raisonner et relier deux résultats entre eux et ceci de façon implicite. Un pas de raisonnement est nécessaire pour parvenir au résultat. Le type (15) consiste à faire appliquer le théorème de Thalès, mais par contraposition et de façon décomposée pour montrer que deux droites ne sont pas parallèles à l'aide des mesures de longueurs, la question étant détaillée. D'après les descriptions que nous venons de faire, nous considérons que le type (14) relève de l'Univers de Recherche Conséquente et que le type (15) de l'Univers des Gammes Soutenues.

B - <u>Démonstrations dans une configuration complexe</u>

Les intentions sont de faire extraire, d'une configuration complexe, une figure pour laquelle le théorème de Thalès est applicable. Une analyse est donc nécessaire de la part de l'élève. La configuration est complexe et laisse apparaître, en particulier, plusieurs figures de Thalès. On indique ce qu'il y a à démontrer sans préciser comment. Chaque question comporte une seule étape. L'élève doit rassembler et inférer plusieurs résultats obtenus dans des réponses à des questions différentes.

Deux outils sont à faire fonctionner : d'une part le théorème de Thalès et sa contraposée, pour démontrer le non parallélisme de droites (16), le théorème de Thalès et l'aire d'un rectangle pour le type (17). Les indications sont suggérées par la rédaction même des questions ("en déduire", "si les droites étaient parallèles"...). La difficulté provient du fait que les manipulations de fractions se font ici sans nombre. Pour le type (17), le produit en croix permet d'aboutir à l'égalité des aires demandée. Mais sans indications extérieures, les élèves auront du mal à effectuer cette manipulation. La difficulté provient de l'imbrication avec d'autres éléments anciens ou nouveaux. Après avoir démontré l'égalité AE/AB = AD/AG sans longueurs explicites, on demande de déduire que des rectangles ABCD et AEFG ont la même aire.



La nature de l'activité consiste à faire conjecturer ou à faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. Elle consiste également à mettre en relation, et à faire relier des résultats entre eux. Ces deux types d'exercices appartiennent à l'univers de recherche conséquente. Mais il ne s'agit pas de réels problèmes, car des questions intermédiaires facilitent la résolution de la principale question.

34 exercices sur 45 consacrés au théorème de Thalès, soit 76%, sont classés dans l'Univers des Gammes ou des Gammes Soutenues. Une minorité est consacrée aux exercices des univers de recherche conséquente et des problèmes. Même si certains d'entre eux pourraient relever du niveau des connaissances disponibles, les circonstances font qu'au maximum, il s'agit du niveau mobilisable. Par exemple, si l'exercice de type (9) n'intervenait pas après l'institutionnalisation du théorème de Thalès ce dernier devrait être disponible. Mais cet exercice, nous pouvons le supposer, suit de nombreux exercices d'application directes, c'est à dire relevant du niveau de connaissances techniques, succédant eux-mêmes à l'énoncé de la propriété. Les élèves savent qu'ils doivent appliquer cette formule et nous pouvons penser que leur recherche se limite à trouver à quel moment elle intervient. Le niveau est au plus celui des connaissances mobilisables.

En classe de troisième, (Annexe I 2, d), les exercices dont nous venons de parler pour la classe de quatrième, sont situés principalement dans la partie "consolider" de l'ouvrage. 14 exercices composent le paragraphe "consolider", 28 le paragraphe "savoir-faire", soit en tout 58 % du total. Nous pensons que les exercices de quatrième que nous avons classés dans la catégorie Univers des Gammes Soutenues sont à reclasser, même si la figure est de type papillon, dans l'Univers des Gammes en troisième. Ce dernier est composé de 42 exercices. Le caractère objet de la propriété est seul utilisé et les énoncés sont fermés. Au niveau troisième s'ajoutent d'autres types d'exercices.

Démonstrations

A.1 - Droites parallèles ou non par le calcul d'une longueur intermédiaire Type 17

On indique ce qu'il y a à démontrer, mais pas comment y parvenir. Malgré tout, des indices externes peuvent servir de repère.

Il y a deux outils à mettre en fonctionnement. Après l'application du théorème de Pythagore, on obtient un nombre entier où un radical qui doit être conservé pour appliquer la réciproque du théorème de Thalès. Les indications sont suggérées par la place de l'exercice et les symboles apparaissant sur le dessin. La difficulté vient éventuellement du fait qu'il faille conserver les radicaux pour calculer séparément deux rapports et conclure. Le contexte est suffisamment explicite pour exprimer ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. L'élève doit malgré tout relier deux résultats entre eux. Les deux exercices de ce type font partie de l'univers des gammes soutenues.

A.2 - Droites parallèles ou non par des calculs littéraux sans mesure

Types (18) et (19) Les intentions sont ici de faire manipuler les élèves des fractions littérales. Le théorème de Thalès ne doit pas apparaître comme exclusivement calculatoire dans ses applications.

Pour le (18), deux cercles étant concentriques, il s'agit de démontrer que deux droites sont parallèles et pour le (19), deux figures de Thalès sont placées côte à côte. La question est fermée mais la méthode est ouverte, la difficulté provenant du fait qu'il faille interpréter l'énoncé pour aboutir à des égalités de rapports littéraux.

Dans le type (18), un théorème est à appliquer une fois avec une difficulté relevant à la fois du domaine de contextualisation et des transformations auxiliaires à apporter aux données de l'énoncé. Il est nécessaire de relier deux données entre elles. Cet exercice relève de l'univers des gammes soutenues. Dans le type (19), l'élève doit appliquer deux fois la propriété de Thalès et rapprocher, grâce à la transitivité de l'égalité, les deux résultats obtenus exprimés uniquement avec des lettres. L'élève doit faire le choix de deux figures de Thalès parmi quatre. L'exercice appartient à l'Univers des Problèmes.

B - <u>Mise en évidence d'un contre exemple</u> Type (21)

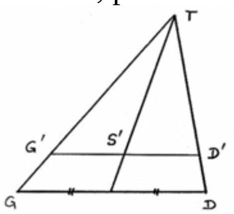
Construction guidée d'un contre exemple. Cela relève de l'univers de recherche conséquente

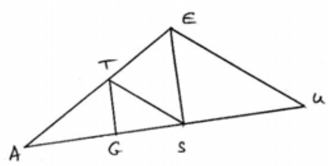
C - <u>Démonstration de théorèmes antérieurs :</u> Type (22)

Théorème des milieux est démontré à partir du théorème de Thalès ; ou d'autres théorèmes qui auraient pu faire partie du cours, sont également démontré en exercice. Tout est détaillé.

D - <u>Démonstrations d'égalités littérales</u> Type (23)

Les objectifs didactiques des auteurs sont d'initier les élèves à des calculs algébriques, ne faisant donc pas intervenir de nombres, après application du théorème de Thalès. Ce théorème apparaît alors comme un outil de démonstration et non plus comme un outil de calcul. Il est nécessaire d'appliquer la propriété deux fois, puis d'utiliser des propriétés sur les fractions.





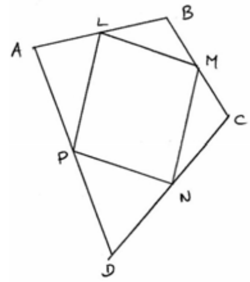
Démontrer que S' est le milieu de [G'D']   Démontrer que AG × AU = AS²

Les deux énoncés sont ouverts quant à la méthode à employer. Il y a plusieurs raisonnements dans la démarche à adopter sans qu'il soit donné d'indications.

Il y a plusieurs outils à mettre en fonctionnement. Une seule possibilité s'offre à l'élève pour résoudre l'exercice. L'élève doit appliquer deux fois la propriété de Thalès après avoir extrait les figures adéquates de la configuration initiale, puis il doit manipuler les fractions littérales obtenues en se référant à l'énoncé de l'exercice, pour aboutir au résultat demandé. Il doit interpréter d'une part ce que signifie "milieu d'un segment", et pour l'autre exercice, ce que signifie l'égalité AG × AU = AS². Pour toutes ces raisons, ces deux exercices font partie de l'univers des problèmes.

E - <u>Répéter une méthode</u> Type (20)

Il s'agit réellement d'un exercice de démonstration. Les élèves doivent apprendre à appliquer successivement plusieurs fois le même théorème et à rassembler les résultats obtenus grâce à une propriété intermédiaire. Ce qu'il y a à démontrer n'est pas indiqué, la méthode non plus. Il y a trois à quatre outils à mettre en fonctionnement : le théorème réciproque de Thalès, dans le cas d'une méthode, le théorème de Thalès direct, la transitivité du parallélisme et une des caractérisations du parallélogramme.



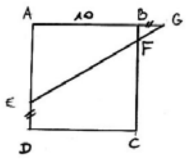
AL/AB = 3/7; CM/CB = 3/7 ; CN/CD = 3/7 ; AP/AD = 3/7.Que dire du quadrilatère LMNP ?

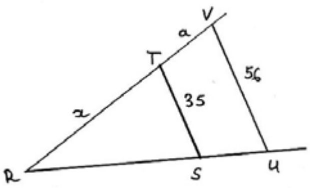
Mais nous pouvons dire que d'après la forme qu'ont prise actuellement le théorème de Thalès et sa réciproque, il n'est pas possible d'admettre qu'un élève puisse dire que d'après l'égalité AP/AD = CN/CD la réciproque du théorème de Thalès permet de conclure que les droites (PN) et (AC), ou que cette même égalité engendre, sans calcul, l'égalité DP/AD = DN/CD et donc le parallélisme. Ainsi, pour pouvoir appliquer la réciproque du théorème à l'étude, des calculs sur les fractions sont nécessaires.
Le théorème réciproque de Thalès est à appliquer deux ou quatre fois suivant la méthode adoptée. Puis, soit on utilise le fait qu'un quadrilatère ayant les côtés parallèles deux à deux constitue un parallélogramme, soit la caractéristique liée aux côtés parallèles de même longueur pour un quadrilatère convexe. Dans ce dernier cas, après avoir démontré le parallélisme des droites (LM) et (PN), il est nécessaire d'appliquer deux fois le théorème direct pour démontrer justement l'égalité par exemple des longueurs LM et NP. Les difficultés proviennent du fait qu'il faille conjecturer et trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. L'élève doit raisonner, relier des résultats entre eux, ceci n'étant pas explicite. L'énoncé est totalement ouvert. Cet exercice fait partie de l'univers des problèmes.

Calculs et constructions

A - <u>Etude d'un exemple, puis généralisation</u>

Calcul d'une longueur en fonction d'une autre. Calcul d'une longueur dans une configuration complexe, puis généralisation. Les intentions didactiques semblent être d'ouvrir les énoncés afin que les élèves prennent des initiatives.





BG = ED = 3 puis ED = BG = x. Calculer BF.   Calculer x si a = 42 puis a en fonction de x
On indique ce qu'il y a à démontrer ; on indique implicitement comment parvenir à ses fins. Il y a un outil à mettre en fonctionnement : le théorème de Thalès.

La complexité de la question provient de la résolution de l'équation. Il n'y a pas à conjecturer, ni à interpréter, ni à mettre en relation des résultats. La difficulté de la tâche, dans l'expression de x en fonction de *a* qui est demandée au second exercice, réside dans la distinction qui est à faire entre variable et paramètre. Le but est aussi de faire généraliser après l'étude d'un cas particulier. Ces exercices relèvent de l'univers de recherche conséquente.

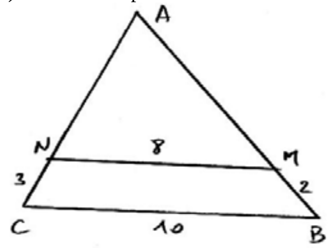
B - <u>Mélange, pour le calcul, de deux théorèmes</u> Type (10)

Le but est de mettre les élèves devant une situation d'une double application de théorèmes qui se suivent. On indique ce qu'il y a à démontrer et, en quelque sorte, comment y parvenir grâce à des interprétations de l'énoncé. Ainsi, des implicites, comme la formulation de la question "en considérant les triangles AID et PIB, calculer BP" ou la présence du symbole exprimant que deux droites sont perpendiculaires, permettent d'être orientés sur les méthodes adaptées pour résoudre l'exercice. Dans un exercice, le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore sont à appliquer.

Une première difficulté provient de l'expression des longueurs. Pour un exercice, elles sont exprimées en unités segmentaires et pour un autre, un radical est employé. Dans les deux cas, le domaine de contextualisation est source de difficultés. La justification du parallélisme de deux droites n'est pas demandée, mais est absolument nécessaire. Dans d'autres cas, il s'agit de faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. L'élève doit raisonner et relier des résultats. Théorème de Thalès→Théorème de Pythagore→Théorème de Thalès ; ou Théorème de Pythagore→Théorème de Thalès pour arriver à $TR = 4\sqrt{5}/5$. L'élève doit conserver les nombres exprimés à l'aide de radicaux pour obtenir le résultat escompté. Une autre difficulté peut également provenir de l'égalité obtenue MT/MR = 3/5,4 alors que l'on demande MT/MR = 5/9. Toutes les questions étant détaillées, mais des enchaînements et des justifications étant à faire de la part de l'élève, ces trois exercices appartiennent à l'univers de recherches conséquentes.

C - <u>Construction</u> Type (14)

Construire le triangle suivant avec (MN) et (BC) deux droites parallèles.

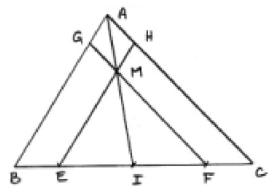


Les intentions didactiques des concepteurs sont de mettre les apprenants devant un exemple d'utilisation du théorème de Thalès pour effectuer un calcul qui n'est pas demandé mais qui sert à la construction d'une figure géométrique. Ce théorème intervient clairement en tant qu'outil. On indique la tâche à accomplir, mais la méthode est entièrement à découvrir. La question comporte plusieurs étapes : analyse de la question, méthode, calculs et construction. La difficulté provient de l'analyse qui doit être faite de la situation afin de relier la construction demandée au calcul lié au théorème de Thalès.

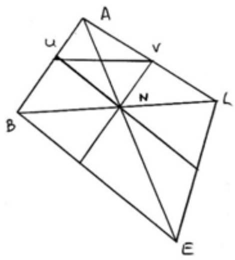
Il s'agit de faire construire une figure décrite par un dessin. La méthode de construction doit être justifiée par un calcul. L'originalité de la question par rapport aux autres types déjà rencontrés et la semi - ouverture de celle-ci rendant la recherche de la solution consistante. Nous terminons par l'énoncé de deux exercices (Type 11).

<u>Histoire de milieu</u>

I milieu de [BC]. Par M, point de [AI], on trace les parallèles à (AC) et à (AB) coupant ces droites respectivement en G, F et H, E. Démontrer que I est le milieu de [EF].



ABEL est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en N, intérieur à ABEL. Par N, on trace deux droites parallèles respectivement à (AB) et à (BE) et coupant (AL) en V et (AB) en U. Montrer que (BL) et (UV) sont parallèles.



Il s'agit de démonstrations au sens strict du terme. Ce qu'il y a à démontrer est indiqué, mais sans la méthode. L'énoncé est semi-ouvert. La question comporte quatre étapes pour le premier exercice et trois pour le suivant. Trois outils sont à mettre en fonctionnement. Pour le premier exercice : une double application du théorème de Thalès, la transitivité de l'égalité et une caractérisation du milieu d'un segment. Aucune indication n'est suggérée. Il y a une seule possibilité pour résoudre l'exercice. Une double application de Thalès et la transitivité de l'égalité pour le 2ème exercice.

Nous venons de le voir, le théorème de Thalès est à appliquer deux fois dans chaque exercice. La transitivité de l'égalité permet de conclure pour l'un et de poursuivre pour l'autre. Pour le premier exercice : IM/IA = IE/IB et IM/IA = IF/IC donc IE/IB = IF/IC. Or I milieu de [BC] donc IB = IC et ainsi IE = IF et I est le milieu de [EF]. Pour le deuxième exercice : AU/AB = AN/AE et AN/AE = AV/AL donc AU/AB = AV/AL, et ainsi les droites (UV) et (BL) sont

parallèles. La difficulté provient de l'imbrication de plusieurs éléments et du domaine de contextualisation, qui n'est pas lié au numérique. Ces deux exercices font partie de l'univers des problèmes.
22 exercices sur 40, soit 55%, appartiennent à l'univers des gammes ou des gammes soutenues. La première remarque que nous pouvons faire est que les exercices relèvent très souvent du niveau de connaissance technique. Même si certains d'entre eux pourraient relever du niveau des connaissances disponibles, les circonstances font qu'au maximum, il s'agit du niveau mobilisable.

Plusieurs constantes sont apparues à la fois au niveau quatrième et au niveau troisième. L'énoncé est quasiment toujours fermé quant à une éventuelle conjecture à faire. Aucun changement de cadre n'est à effectuer et la propriété apparaît presque toujours en tant qu'objet.

II.2 Les deux ouvrages Bordas

II.2.1 Analyse des activités introductrices

a) Activité 3 niveau quatrième (Annexe I 3, a)

Le livre de 4ème débute par deux activités qui concernent le théorème des milieux. La dernière activité, l'activité 3, relève seule de la propriété de Thalès. Nous n'analysons que cette dernière. Le caractère objet de la propriété de Thalès est abordé dans l'activité 3. Par contre, le théorème des milieux est abordé par le biais du caractère outil dans la seconde partie de l'activité. Le registre est numérique pour la première partie et celui de la démonstration pour la seconde partie. La notion introduite est reliée aux tableaux de proportionnalité obtenus par le mesurage de longueurs, ce qui relève du niveau des connaissances techniques, puis elle se rattache au théorème des milieux. La première notion de proportionnalité permet de vérifier le théorème sur un cas particulier et la seconde notion permet de démontrer ce théorème dans un autre cas particulier. Le théorème des milieux déjà exposé et démontré au début du chapitre n'est utilisé que pour légitimer un cas particulier. Aucune extension n'est suggérée. C'est une vérification pragmatique. Le type de problème dont relève l'énoncé est double : observation et mesurage en premier lieu, réflexion en second lieu. L'épisode considéré se place au niveau de conceptualisation correspondant à la classe. L'énoncé porte, en premier lieu, sur une vérification pratique du théorème de Thalès, puis, en second lieu, sur la démonstration de ce même théorème, dans le cas particulier où un côté d'un triangle est partagé en trois parties égales. La production demandée est un résultat numérique et une démonstration par une lecture du dessin d'une part, et par la réflexion suivant des indications, d'autre part.

Dans la seconde partie, question 2° a), b), c), d), les mises en fonctionnement sont encore indiquées, mais dépassent l'application simple d'une propriété. Ces mises en fonctionnement du théorème des milieux nécessitent d'adapter ses connaissances, d'appliquer plusieurs fois de suite la propriété. Le raisonnement, par l'intermédiaire de la transitivité de l'égalité, est linéaire. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître une justification, le théorème des milieux, et un type d'information. Pour la résoudre, le théorème des milieux est à appliquer deux fois dans deux figures prototypes. La technologie incarnée par le théorème sur les droites parallèles à un côté d'un triangle est justifiée par la propriété des milieux qui est elle-même une technologie, liée à une théorie relevant du parallélogramme. Les étapes sont toutes détaillées. Pour rédiger, la production prévue est de compléter un texte à trous. L'organisation praxéologique est plutôt globale. Il s'agit du niveau des connaissances mobilisables.

La place accordée à ce chapitre dans l'organigramme de cet ouvrage est peu importante. Eventuellement, le chapitre intitulé "proportionnalité calcul" pourrait être placé avant. L'énoncé prend place à la fin de la deuxième partie du scénario, après la démonstration du cas particulier.

L'institutionnalisation est faite à ce moment précis. La séance est une activité introductrice suivie d'une justification partielle de la proposition. L'ouvrage précédent débutait par une activité correspondant à la seconde partie de cette activité 3. Il poursuivait sur un cas particulier lié à un quadrillage. Même si le vieillissement de la notion antérieure (théorème des milieux) n'apparaissait pas, il était tout de même possible, ce qui n'est pas le cas ici. Mais aucune explication n'est donnée sur le passage rapide fait entre la conclusion apportée au cas particulier et le théorème général. Le degré de complication évalué de 1 à 5 est de 2.

Pour les concepteurs, il s'agit de familiariser dans un premier temps l'élève avec la nouvelle situation de proportionnalité qui est introduite dans un second temps grâce à un cas particulier. Ils attendent d'une part que les élèves mesurent les longueurs demandées et qu'ils consignent ces mesures dans le tableau prévu à cet effet pour finalement calculer des valeurs approchées de rapports. D'autre part, ils attendent des élèves qu'ils réinvestissent la propriété abordée aux deux activités précédentes en expliquant des égalités qu'il proposent et en en complétant d'autres. Aucune explication n'est donnée sur le passage rapide fait entre la conclusion apportée au cas particulier et le théorème général.

b) <u>Activités 1 à 4 niveau troisième</u> (Annexe I 3, b)

Le livre scolaire Bordas 3ème débute le chapitre sur le théorème de Thalès et sa réciproque par deux exercices de rappel. Quatre activités suivent alors. L'activité 1 ressemble à l'activité 3 du livre "Le nouveau Pythagore". On demande de reproduire et de tracer deux symétriques. Pour des raisons de proximité avec ce que nous avons vu précédemment, nous n'effectuons pas l'analyse dans les détails. Nous rajoutons simplement que la troisième question "que peut-on dire des droites (MN) et (M'N') ?" est plus ouverte que sa correspondante dans le nouveau Pythagore. Les auteurs n'indiquent ni ce qu'il faut démontrer, ni la méthode pour y parvenir, contrairement à ce qui apparaît dans l'autre ouvrage cité. De plus, le présent ouvrage conclut la première activité par une version du théorème de Thalès explicitement liée à la proportionnalité, ce qui est très rare.

<u>Activités 2 et 4</u>

A travers la question - titre de cette activité "A quoi sert le théorème de Thalès ?", nous pouvons penser que le caractère outil de la notion est abordé. L'activité 4 fait apparaître réellement le caractère outil du théorème. Les deux activités sont exclusivement reliées au théorème de Thalès. Elles mettent en évidence le fait que ce résultat peut servir à calculer une longueur, à démontrer qu'une droite n'est pas parallèle à une autre droite, à justifier la construction d'un point qui partage un segment en un rapport donné. Seul le caractère pratique est mis en valeur. Aucune intégration du nouveau par rapport à l'ancien n'est à faire. Il n'y a pas de généralisation, ni de notions nouvelles mises en évidence. Il s'agit de simples applications d'un théorème ce qui ne relève bien sûr pas d'une activité introductrice.

Le type de problème dont relève l'énoncé de la question 1 de l'activité 2, est un calcul de mesure de longueur. Pour la question 2, il s'agit d'une réflexion guidée pas à pas dans le but de montrer que le théorème de Thalès sert aussi à démontrer que deux droites ne sont pas parallèles. Une adaptation est à mettre en place dans la deuxième partie de l'activité 2. Dans la première partie de l'activité 2, et dans l'activité 4, le théorème de Thalès est à utiliser d'une façon plus classique. L'élève doit étudier une configuration afin de comprendre une méthode de construction.

Les énoncés de ces deux activités prennent place juste après la tentative de démonstration du théorème de Thalès généralisé à la figure papillon pour l'une et à la suite d'une activité liée à la réciproque pour l'autre. Une institutionnalisation est prévue pour préciser que le théorème de Thalès peut être utilisé pour calculer une longueur ou bien pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles. A la fin de l'activité 4, les conclusions faites au sujet d'un exemple générique jouent le rôle de l'institutionnalisation de la méthode de mise en évidence.

La seule démonstration à faire consiste à raisonner par contraposition. La production attendue est un résultat numérique après calcul pour la première partie de l'activité 2. Une démonstration par contraposition et plutôt calculatoire pour la seconde partie. Le niveau de fonctionnement visé est technique. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type d'information. Pour la seconde question de l'activité 2, un type de justification est à découvrir. Le degré de complication n'est pas très élevé du fait des questions détaillées. Il est possible, par extrapolation, de généraliser les méthodes. Nous pouvons éventuellement nous attendre à une absence de justification pour la dernière question de la seconde partie de l'activité 2 du fait qu'il faille un minimum raisonner. Pour les concepteurs, il s'agit de familiariser l'élève avec trois applications possibles du théorème de Thalès. Les procédures attendues sont clairement définies grâce à la précision et au nombre des questions.

L'activité 3 troisième Bordas

Cette activité concerne la réciproque du théorème de Thalès. Le type de problème dont relève l'énoncé est une démonstration suivie de l'observation d'une configuration. L'énoncé porte sur la démonstration de la réciproque du théorème de Thalès dans deux cas particuliers de fractions simples. Le savoir à mettre en fonctionnement est encore une fois le théorème des milieux dont le caractère outil est utilisé. La version courante du théorème des milieux concluant sur le parallélisme de deux droites est à choisir, mais la forme de l'énoncé de l'activité ne laisse pas de doute sur l'objet à utiliser. Ce résultat permet de démontrer le parallélisme de deux droites dans les cas où les rapports sont égaux à 1/2 ou 1/4. Deux applications directes sont à mettre en jeu ; l'une dans une figure prototype, l'autre après avoir extrait la figure d'une configuration un peu plus complexe. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type d'information, ainsi qu'un type de justification. L'élève doit appliquer deux fois le théorème des milieux, ainsi que la transitivité du parallélisme. Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes. La seule mise en relation à effectuer consiste à rassembler les deux résultats suivants : les droites (IJ) et (BC) sont parallèles ; les droites (MN) et (BC) sont parallèles pour conclure que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

Le niveau de fonctionnement visé est le niveau technique. La généralisation possible n'apparaît pas et le caractère unificateur du théorème des milieux non plus. Il s'agit du niveau technique, car les mises en fonctionnement sont indiquées et mettent en jeu des applications immédiates du théorème des milieux. La contextualisation est simple, sans réel travail préliminaire de reconnaissance, la rédaction de l'énoncé mettant l'élève sur la voie. L'énoncé du théorème prend place à la fin de l'activité. Les auteurs n'assurent pas réellement, malgré leur tentative, le vieillissement d'une notion antérieure.

Si les simples applications du théorème des milieux sont assimilées, il n'y a pas de risque de décalage. Le degré de complication est de 2.

Pour les concepteurs, il s'agit d'introduire et de légitimer un résultat. Les élèves n'ont pas à réagir, ni à formuler, ni à valider. Les questions sont fermées. Le passage sur la généralisation est rapide. Il est attendu la procédure suivante :

AI/AB = 1/2, et AJ/AC = 1/2, donc (IJ) et (BC) sont parallèles.

AM/AB = 1/4, et AN/AC = 1/4, donc M et N sont les milieux de AI et AJ

et ainsi (IJ) et (MN) sont parallèles et par conséquent (MN) et (BC) également.

II.2.2 Analyse et classifications des exercices

Pour les types d'exercices déjà répertoriés et analysés précédemment et qui réapparaissent dans les ouvrages publiés par Bordas, nous nous contentons de compléter les tableaux dressés pour les ouvrages Pythagore sans effectuer d'analyse détaillée complémentaire. Seuls les types nouveaux font l'objet d'un tel travail. Niveau 4ème (Annexe I 3, c)

A - <u>Calcul sur une figure simple</u> Types (14) et (12)

On indique ce qu'il y a à démontrer, mais la méthode n'apparaît pas, alors qu'il faut en trouver une pour pouvoir appliquer le théorème en question. Après avoir complété le dessin, l'élève doit justifier le parallélisme de deux droites, la longueur d'un segment, puis appliquer la propriété de Thalès. Il y a deux outils à employer.

Les difficultés portent sur le domaine de contextualisation et sur les transformations auxiliaires que l'élève doit apporter à la figure. L'exercice consiste à faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement pour démontrer le parallélisme de deux droites : dans un triangle isocèle, l'axe de symétrie est la médiatrice issue du sommet formé par l'intersection des deux côtés de même longueur. L'élève doit raisonner et relier des résultats entre eux. Au départ, IOS est un triangle isocèle en I. Nous connaissons les longueurs des trois côtés. N est un point du côté [SO] tel que, en cm, ON = 1,5. La perpendiculaire à (SO) coupe (OI) en M. Il faut calculer OM. Du fait qu'il faille trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement pour pouvoir justifier l'application de la propriété de Thalès pour trouver une longueur, nous considérons qu'il s'agit d'un petit problème que nous classons dans l'univers des recherches conséquentes.

Dans l'exercice Type (12) on indique ce qu'il y a à démontrer mais pas comment y parvenir. L'énoncé, malgré sa présence dans un chapitre consacré à la propriété de Thalès, est semi-ouvert. Un choix de méthode est à effectuer. La question comporte plusieurs étapes : l'élève doit rassembler des résultats ; il y a plusieurs pas de raisonnements dans la démarche à adopter et plusieurs outils à mettre en fonctionnement dans la question. Il n'y a qu'une seule possibilité, au niveau de cette classe, pour résoudre l'exercice puisqu'appliquer un coefficient de réduction pour calculer l'aire demandée n'est pas au programme de quatrième. L'élève doit d'abord construire une figure composée d'un triangle dont on donne la mesure de deux côtés et la mesure d'une hauteur. Une stratégie de construction doit être mise au point par l'apprenant. Il est ensuite demandé de construire une parallèle à un côté passant par un point appartenant à un second côté et placé à une certaine distance du sommet.

> "1° Construire un triangle ABC tel que : BC = 7, AB = 5 et de hauteur AH = 4.
> 2° Placer le point E sur [AB] tel que : AE = 3,5. Tracer la droite parallèle à (BC) passant par E qui coupe (AH) en I et (AC) en F. Calculer l'aire du triangle AEF."

Il s'agit ici de faire appliquer une définition et un théorème. Il faut appliquer deux fois de suite la même chose, en l'occurrence le théorème de droites parallèles dans un triangle, la difficulté provenant du domaine de contextualisation (calcul d'aire). Le but est de faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement et surtout comment le mettre en fonctionnement. L'élève doit extraire deux figures de Thalès afin de calculer deux longueurs nécessaires au calcul de l'aire d'un triangle. Le plus difficile est de justifier le fait que les rapports AE/AB, AI/AH et EF/BC sont égaux. La transitivité de l'égalité doit être un outil pour parvenir à ce résultat. D'après le théorème de Thalès, nous avons : AE/AB = AI/AH et par conséquent, AI = $4 \times (3{,}5/5)$. En appliquant le théorème de Thalès dans une nouvelle figure de Thalès, on obtient : EF/BC = AE/AB et par suite : EF = $7 \times (3{,}5/5)$. L'aire du triangle AEF s'en déduit. Nous classons cet exercice dans l'Univers de Recherche Conséquente.

Un autre type d'exercice que nous n'avions pas mis en évidence dans le paragraphe consacré au livre Pythagore concerne le calcul de trois longueurs au sein d'une configuration complexe.

B - <u>Calculs sur une figure plus complexe</u> Type (13)

Les intentions méthodologiques des concepteurs sont de faire appliquer trois fois successivement le théorème de Thalès dans des figures que l'élève doit déterminer et choisir.
L'analyse de la figure est donc nécessaire. On indique ce qu'il y a à démontrer ou à calculer et l'outil théorème de Thalès à employer est implicitement indiqué. Il y a trois questions du même

type ; les étapes ne sont pas articulées. L'élève doit tout de même justifier le parallélisme de deux droites qui sont perpendiculaires à une troisième et ensuite appliquer le théorème de Thalès. Il doit reconnaître l'application d'un résultat, le théorème de Thalès, avec une discussion initiale pour montrer que les conditions d'applications sont requises. La figure est une figure de Thalès à laquelle il a été adjoint une perpendiculaire aux deux droites parallèles et passant par le sommet. Une seule possibilité existe pour résoudre l'exercice. Pour ces raisons, nous considérons que l'exercice fait partie de l'Univers des Gammes Soutenues. Nous allons compléter à présent la liste des exercices types du niveau 3ème. (Annexe I 3, d).

A - <u>Calculs ou réciproque dans une figure simple</u> Types (16) et (22)

Au premier type (16), les intentions didactiques des auteurs sont de confronter les élèves avec des erreurs fréquemment rencontrées dans les solutions d'exercices simples. On n'indique pas ce qu'il y a à démontrer ou à modifier. Il y a plusieurs questions dans l'exercice et les étapes sont articulées. Seul le théorème de Thalès ou sa réciproque sont à utiliser. La difficulté provient d'une astuce à mettre en œuvre pour parvenir à une solution. Il s'agit de faire appliquer un théorème, la difficulté provenant du domaine de contextualisation. Une solution avec erreur est proposée, il faut trouver et corriger l'erreur : soit les aspects projection et homothétie ont été mélangés pour le calcul d'une longueur ADE étant un triangle, B étant un point du segment [AD] et (BC) étant la parallèle à (DE), l'élève écrit par exemple AB/BD = BC/DE ; soit l'égalité des rapports est reconnue, à tort du fait que des fractions soient déclarées égales à partir de leurs arrondis ; soit la solution part de l'égalité pour parvenir à une contradiction. De par la forme de la question et la difficulté à trouver les erreurs, nous considérons que ces exercices font partie de l'univers (URC).

Les intentions méthodologiques des auteurs du type (22) sont de montrer qu'une démarche s'impose ici pour démontrer que deux droites sont parallèles. Les élèves pourraient être tentés d'appliquer le théorème de Thalès pour calculer la première longueur alors que les deux droites en question ne sont pas forcément parallèles. On indique ce qu'il y a à démontrer. Les conditions de la construction de la figure suggèrent fortement les deux méthodes pour parvenir à répondre à la question. Il s'agit de faire appliquer deux, voire trois théorèmes. Il n'y a pas d'indication, mais la simplicité de la figure et ses caractéristiques imposent pratiquement le choix de la méthode. Dans la résolution de la première question, les élèves pourraient être induit en erreur par le parallélisme qui est apparent sur le dessin mais la démonstration n'est demandée qu'à la question 2). Pour la dernière question, il y a deux possibilités pour résoudre l'exercice, le théorème de Thalès ou le théorème de Pythagore, et l'énoncé n'en privilégie aucune. Application tout d'abord du théorème de Pythagore, puis de la réciproque du théorème de Thalès. Enfin, l'élève a ensuite le choix entre le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès. (UGS) (1).

B - <u>Calculs sur une figure plus complexe</u> Types (15), (17), (19),

L'objectif de l'exercice (15) est d'acquérir des facilités pour extraire une figure d'une configuration plus complexe et de faire appliquer le théorème de Thalès en demandant des justifications pour certaines longueurs.

On indique ce qu'il y a à démontrer et également comment y parvenir sauf pour la donnée d'une longueur. La question principale comporte deux étapes qui sont articulées. L'élève doit rassembler des données. Il est explicitement demandé d'appliquer le théorème de Thalès dans une figure précise.

Il s'agit de faire appliquer une caractérisation du parallélogramme comme ayant les côtés parallèles deux à deux et de même longueurs et le théorème de Thalès. Cet exercice relève d'une exécution de tâches techniques du fait de la nature de la question et de l'indication de la figure dans laquelle le théorème de Thalès doit être appliqué. Malgré cela, il appartient à l'Univers des Gammes Soutenues (UGS) (1), car cette application demande tout de même deux justifications.

Pour un autre exercice de ce même type (15), il s'agit d'utiliser le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu pour connaître la valeur d'un rapport de deux longueurs 1/2. (UGS) (1).

Les intentions didactiques des auteurs du (Type17) sont de faire appliquer deux fois le théorème de Thalès dans deux figures distinctes extraites d'une même configuration dans le but de démontrer une égalité utilisant ces longueurs mais qui pourrait être démontrée littéralement sans avoir recours aux mesures. On indique ce qu'il y a à démontrer ou à calculer et la méthode est implicite. L'énoncé comporte plusieurs étapes articulées : construction de la figure, extraction de deux figures de Thalès utilisées pour des calculs. Le seul outil à employer est le théorème de Thalès. Si l'élève utilise les mesures calculées aux deux premières question, une seule possibilité existe pour résoudre l'exercice. Notons que l'égalité finale $AC^2 = AE \times AF$ pourrait être démontré sans utiliser les mesures des longueurs, comme dans l'exercice type (11) niveau $3^{ème}$ Pythagore. Sachant que cette égalité est facilement obtenue en utilisant les nombres appropriés, cet exercice est à classer dans (UGS) (1).

Les intentions didactiques des concepteurs du type (19) sont de faire intervenir deux théorèmes pour calculer des longueurs. On indique ce qu'il y a à démontrer ou à calculer, mais les méthodes sont omises. Il y a deux outils mis en fonctionnement dans la question 2 (nouveau pour Thalès et ancien pour Pythagore). La difficulté provient du nombre de longueurs à calculer. Il y a plusieurs possibilités pour résoudre une des questions.

"ABCD est un rectangle tel que, en cm, AB = 12 et AD = 9. M est un point du segment [BC] tel que BM = 3. La parallèle à la diagonale (BD) passant par M coupe le segment [CD] au point N.
1° Faire une figure.
2° Calculer BD, CN, DN et MN.

Il s'agit tout d'abord de faire construire une figure. Faire appliquer successivement le théorème de Pythagore pour BD et le théorème de Thalès pour CN, et enfin, le théorème de Pythagore ou de Thalès pour MN, le choix étant laissé à l'élève. Il faut donc appliquer plusieurs fois la même chose, la difficulté provenant également de l'imbrication de nombreux éléments. Il faut que l'élève trouve ce qu'il y a à mettre en fonctionnement et doit relier des résultats entre eux. Il a le choix entre deux méthodes pour un dernier calcul. (URC) (1).

C - <u>Droites parallèles ou non avec l'utilisation initiale d'un autre théorème</u>

Type (18) Des questions intermédiaires doivent être résolues avant d'appliquer le théorème en question. On indique ce qu'il y a à construire, ce qu'il y a à calculer et à démontrer mais il n'y a pas d'indication pour y parvenir. Chaque question comporte deux étapes : construction, puis calcul. L'élève doit inférer et rassembler deux résultats. Il y a deux outils à utiliser, le théorème de Pythagore et le théorème réciproque de Thalès. De la façon dont est rédigé l'énoncé, il n'y a qu'une seule possibilité pour résoudre l'exercice. Pourtant, il aurait été possible de démontrer le parallélisme de (IJ) et (AC) sans calculer la longueur BD et donc la longueur OB. Mais il n'est pas demandé aux élèves de déduire ce parallélisme de cette dernière mesure de longueur. Donc nous pouvons considérer que deux méthodes permettent de répondre à la dernière question.

"ABCD est un rectangle de centre O, tel que, en cm : AB = 5,2 ; BC = 3,9. J est le point du segment [BC] tel que BJ = 2,6. I est le point du segment [BD] tel que BI = 1/3.BD.

a) Faire une figure. Calculer BD.
b) Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

La complexité provient de l'imbrication avec d'autres éléments anciens. Il n'y a pas de conjecture à faire ; mais l'élève doit penser à appliquer la propriété de Pythagore nécessaire au calcul de BD et utile ensuite à une application ultérieure du théorème de Thalès. Il n'y a pas d'interprétation, ni de généralisation à effectuer. Construction→Théorème de Pythagore puis calcul de OB et OI→construction→Thalès réciproque. Avec le calcul intermédiaire de BD qui donne ensuite les longueurs BI et BO, nous pouvons considérer que cet exercice fait partie de (UGS)

(1). Il en aurait été autrement si la longueur AB n'avait pas été donnée et si la seule question posée avait été la dernière, c'est à dire le parallélisme de (IJ) et (AC).
BI = 1/3.BD, BO = ½.BD donc BI/BO = 2/3. Or BJ/BC = 2,6/3,9 = 2/3.
Dans ce cas, l'exercice ferait partie de l'Univers des Problèmes.

D - <u>Exercices dits de recherche</u> Types (20), (21), (24), (25), (26),

Nous pouvons nous attendre à des exercices demandant une certaine recherche sur l'outil à mettre en fonctionnement et sur la manière de la faire fonctionner. Il n'en est pas toujours ainsi. Un exemple est donné avant les énoncés de deux exercices du type (20). Il suffit de calquer la solution sur celle-ci. Nous pouvons supposer *a priori* qu'il n'y a pas réellement de recherche. On indique à la fois ce qu'il y a à démontrer et la méthode pour y parvenir. Les questions comportent une étape de mise en équation et une étape de résolution. Il y a un outil algébrique à mettre en place. Toutes les indications sont données initialement. Il s'agit de faire réappliquer une méthode qui est donnée en exemple. Ce qu'il y a à mettre en fonctionnement est indiqué : IA/IB = 3/4, AB = 42. Calculer IA et IB. Il suffit de suivre le modèle qui incite l'élève à appeler x la longueur IA et à exprimer IB en fonction de x et de la longueur AB qui est donnée (UG) (2). Il ne s'agit pas réellement d'un exercice de recherche.

L'exercice de type (21), il ne s'agit pas vraiment d'un exercice de recherche, comme nous allons le voir. Les intentions didactiques sont de montrer sur un exemple que pour calculer une longueur par application du théorème de Thalès dans une configuration complexe, le choix de la figure extraite est fondamental. On indique ce qu'il y a à démontrer, mais également la méthode et la figure à extraire de la configuration où s'applique le théorème. Les questions comportent deux étapes : la figure à tracer ou à compléter, suivie de l'application de la proposition. Il y a plusieurs possibilités pour résoudre la tâche, mais l'énoncé impose la méthode. Il s'agit tout d'abord de faire construire une figure. Puis de faire appliquer, en premier lieu le théorème de Pythagore pour calculer une première longueur, puis le théorème de Thalès, la méthode étant imposée. Dans ce cas, deux possibilités sont envisageables, mais l'une, imposée en premier lieu, permet d'aboutir à une mise en équation plus simple que la seconde option, imposée par les auteurs en second lieu. Les méthodes étant imposées, il ne s'agit pas réellement d'un exercice de recherche mais fait plutôt partie de l'Univers des Gammes Soutenues.

L'exercice de type (24) est effectivement un exercice de recherche, bien que des indications de méthode soient données. On demande de comparer OA/OC,OB/OD et OC/OE et de calculer OC. Les questions comportent plusieurs étapes. L'énoncé est ½ fermé. Il y a plusieurs outils à utiliser : le théorème de Thalès, le produit en croix, les racines carrées. Les indications sont relativement explicites. La difficulté provient de la multiplicité des outils, tous différents, à mettre en œuvre. Il s'agit de faire appliquer deux fois le théorème de Thalès ; la transitivité de l'égalité permet d'aboutir à OA/OC = OC/OE, puis la résolution de l'équation conduit à l'égalité 1/OC = OC/1,75 à la suivante : OC² = 1,75 et ainsi OC = $\sqrt{1{,}75}$.
La difficulté provient d'une part du domaine de contextualisation, la figure faisant apparaître deux figures-clefs imbriquées l'une dans l'autre, et d'autre part des transformations auxiliaires, de l'imbrication avec d'autres éléments anciens posant souvent problème aux élèves, tels que la transitivité de l'égalité, le produit en croix et la racine carrée. Il faut trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement pour calculer la longueur cherchée. Il est nécessaire d'interpréter et de mettre en relation des résultats, l'élève doit raisonner : OA/OC = OB/OD et OC/OE = OB/OD, ... De par ces mises en relation de résultats et ces mises en fonctionnement multiples, nous classons cet exercice de la façon suivante : (UP) (1).

Pour les exercices de type (25), les intentions didactiques sont de voir si des connaissances sont disponibles afin de les appliquer dans un contexte d'utilisation du théorème de Thalès ou de sa réciproque. On indique ce qu'il y a à démontrer, mais pas la méthode. Il n'y a qu'une seule question par exercice. Il y a plusieurs outils à utiliser à la fois nouveaux et anciens. Aucune indication n'est donnée. Il n'y a qu'une seule possibilité pour résoudre ou accomplir la tâche. Il s'agit faire appliquer la réciproque de la propriété de Thalès, en utilisant initialement, une propriété des médianes pour un des exercices, et pour l'autre, en introduisant deux figures intermédiaires pour évaluer séparément deux rapports de longueurs grâce à un quadrillage.

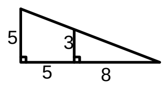
> "ABCD est un tétraèdre, G et H sont les centres de gravité (point d'intersection des médianes du triangle) respectifs des triangles ABC et BCD. Démontrer que les droites (GH) et (AD) sont parallèles."

Les difficultés proviennent du domaine de contextualisation (tétraèdre), des transformations auxiliaires à faire subir à la figure (faire apparaître, à l'aide d'un quadrillage, deux figures-clefs supplémentaires), et de l'imbrication avec des éléments anciens (centre de gravité 2/3, 1/3).

L'élève doit trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement, interpréter, raisonner et relier des résultats entre eux (IH = 1/3.ID, IG + 1/3.IA, centre de gravité, donc IH/ID = IG/IA, ou pour l'autre : BS/BC = 5/7 et BR/BA = 5/7, grâce au quadrillage qui fait apparaître deux autres figures-clefs.) P, (UP) (2).

Pour les concepteurs du type (26), le but est de savoir si les connaissances sont mobilisables. On indique ce qu'il y a à démontrer, mais en aucune façon, la méthode n'est évoquée. La question principale comporte plusieurs étapes et l'élève doit inférer, imaginer et rassembler des résultats. Il y a plusieurs outils à utiliser : la contraposée du théorème de Thalès, le théorème de Pythagore.

> "1° Construire en vraie grandeur la figure suivante : ABCD est un trapèze rectangle en A et D ; BDE est un triangle rectangle en D.
> 2° démontrer que les points B, E et C ne sont pas alignés."



Il s'agit de faire appliquer, par deux fois, le théorème de Pythagore, pour calculer deux longueurs. Ou alors, appliquer directement la contraposée du théorème de Thalès en précisant que du fait de l'alignement des points A, D, B et du parallélisme des droites (AC) et (ED), les points C, E, B ne peuvent pas être alignés. "L'originalité" de la question rend difficile le fait de trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. L'élève doit interpréter l'énoncé pour, par exemple, montrer que les droites (AL) et (DE) sont parallèles, il doit raisonner et faire appel à la logique. C'est exactement la contraposée de l'implication suivante : (AC) // (ED), A, B, D alignés, C, E, B, alignés $\Rightarrow$ BE/BC = BD/BA = ED/AC. Si BD/BA $\neq$ ED/AC, alors C, E, B, ne sont pas alignés, car s'ils l'étaient, puisque (AC) et (ED) sont deux parallèles et A, B, D, sont trois points alignés, nous aurions BD/BA = ED AC. (U.P) (1)

Dans l'ouvrage 4ème, 86% des exercices font partie des univers des gammes, des gammes soutenues. Seulement 14% font partie de l'univers de recherche conséquente. Il n'y a pas d'univers de problèmes. Dans l'ouvrage de 3ème, 73% des exercices peuvent être classés dans les univers des gammes, de gammes soutenues et des habillages et le reste dans les univers de recherche conséquente ou les problèmes.

II.3 Les deux ouvrages Transmath

II.3.1 Analyse des activités introductrices

a) Activités du livre niveau quatrième (Annexe I 4, a)

Deux activités, au niveau quatrième, sont consacrées à la propriété de Thalès. L'activité P 178 est identique à l'activité 3 1ère question du livre de 4ème publié chez Bordas. La démonstration de l'énoncé est effectuée dans un cas particulier, conformément au programme dans l'activité 4 qui correspond à l'activité 1 du livre 4ème Pythagore mais en étant beaucoup plus détaillée que cette dernière. Dans le Pythagore, certaines questions intermédiaires disparaissent. Les ressemblances avec des activités que nous avons déjà analysées étant telles que nous ne nous attardons pas sur le contenu des activités Transmath niveau quatrième. Nous passons aux activités du niveau 3ème.

b) Activités 1 et 2 niveau troisième Transmath (Annexe I 4, b)

La première et la deuxième partie de l'activité1 correspondent à l'activité 1 Bordas 3ème. Seule la conclusion sur la proportionnalité des longueurs est absente. Il ne nous reste plus qu'à analyser l'activité 2 qui concerne la réciproque. Le type de problème dont relève l'énoncé est l'étude de plusieurs configurations pour tenter de découvrir les prémisses de la propriété réciproque de Thalès. Cela relève d'une étude pratique d'une configuration à travers des calculs et une analyse du dessin. L'énoncé porte sur un théorème, mais également sur une démarche. En effet, la première partie détaille une méthode permettant de démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

Le caractère objet de la notion est seul abordé. Il y a plusieurs étapes et les questions sont liées dans le sens où elles permettent de comprendre cette propriété réciproque dans sa globalité. Aucune initiative n'est laissée à l'élève. L'énoncé est totalement fermé.

Mais, dans la dernière partie, ce théorème est également utilisé pour "démontrer" la propriété réciproque. Pour comprendre le fonctionnement de la réciproque, il y a lieu de mettre en relation plusieurs informations liées à un théorème, ainsi qu'à l'observation de plusieurs figures. Les mises en fonctionnement, de niveau technique, sont indiquées et mettent en jeu des applications immédiates d'un théorème, pour les parties 1 et 2.

Pour la troisième partie, même si les mises en fonctionnement sont encore indiquées, elles nécessitent une adaptation des connaissances, une articulation de deux informations et un raisonnement. Cela relève des connaissances mobilisables. Pour entrer dans la tâche, il a lieu de reconnaître un type d'information et de conjecturer à l'aide d'un dessin. Il n'y a pas lieu de modéliser, ni de changer de cadre ou de registre, ni de point de vue mathématique. La méthode est imposée. Pour résoudre la tâche, les élèves doivent en premier lieu, utiliser la "contraposée" du théorème de Thalès : $5/6{,}9 \neq 6{,}5/9$ donc (MN) et (BC) ne sont pas parallèles, car si elles l'étaient, nous aurions AM/AB = AN/AC, ce qui n'est pas le cas. Pour la seconde partie, il y a lieu de conjecturer.

La dernière partie repose sur l'application du théorème de Thalès qui correspond à une technologie qui n'est pas réellement justifiée par une théorie dans le cours. L'organisation de cette démonstration est locale. AM/AB = AN/AC ; (MN') parallèle à (BC) donc on a : AB/AM = AC/AN' ou encore AM/AB = AN'/AC **(2)**. De (1) et (2) on déduit que AN/AC = AN'/AC et donc AN = AN'. Le fait que l'égalité AN = AN', avec N et N' du même côté de A après la lecture de la figure entraîne que les points N et N' sont confondus, est un implicite qui devrait demander de plus amples développements. Les risques de décalage proviennent du fait que les élèves éprouvent sans doute beaucoup de difficultés à utiliser la transitivité de l'égalité. AM/AB = AN/AC et AM/AB = AN'/AC donne AN/AC = AN'/AC. De plus, il est peu probable qu'ils pensent ensuite à conclure, alors que AN = AN' et ainsi N et N' sont confondus.

Le degré de complication est de 3. Pour rédiger, la production prévue est finalement la rédaction d'un énoncé de théorème à compléter à la fin du scénario. La séance peut être perçue comme une activité introductrice pour les deux premières parties et comme du cours à travers une tentative de démonstration en fin de séance. L'enchaînement des deux premières questions doit entraîner, en principe, la formulation de l'hypothèse manquante pour obtenir le parallélisme. La nouveauté vient du fait de pouvoir démontrer le parallélisme de deux droites, grâce à un calcul. Nous sommes dans un enseignement ostensif déguisé.

Pour les concepteurs, il s'agit à la fois de familiariser l'élève avec un emploi important du théorème de Thalès et, à la fois, d'introduire et de tenter de démontrer la réciproque. Les questions, malgré les apparences, ne sont pas très ouvertes, tout au moins en ce qui concerne les deux premières parties.

II.3.2 Analyse et classifications des exercices

Nous allons donner les différents types d'exercices que nous avons trouvés dans ces deux ouvrages ainsi que les tableaux synoptiques. Nous ne donnons, pour certains, que les références des types d'énoncés que nous trouvons dans cet ouvrage de niveau 4ème et que nous avons déjà rencontrés précédemment.

Exercices

- Exercice Type 3 (4e Nouveau Pythagore) : 5 UG ; Exercice Type 1 (plusieurs longueurs Bordas 3ème) (bis) : 5 UG ; Exercice Type 7 (4e Nouveau Pythagore) : 1 UGS ; Exercice Type 3 (4e Bordas) : 1 UG ; Exercice Type 10 (4e Nouveau Pythagore) : 1 URC ; Exercice Type 9 (4e Nouveau Pythagore) : 1 UGS ; Exercice Type 18 (4e Nouveau Pythagore) : 2 UG ; Exercice type 18 (3e Nouveau Pythagore) : 1 URC

Exercice type 11 (4e Nouveau Pythagore) : 2 UGS.

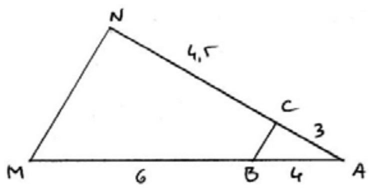
Notons que la grande majorité des exercices portent sur des démonstrations qui concernent le théorème des milieux. 74% sont des exercices relevant des univers des gammes ou des gammes soutenues et 26% des univers de recherche conséquente ou de problèmes. Nous complétons nos tableaux précédents par des exercices de types nouveaux annexés en I 4, c. Les énoncés sont suffisamment explicites pour que nous les analysions dans le détail.

Exercice type1 (3e Nouveau Pythagore) : 4 UG ; Exercice type 1 (3e Nouveau Pythagore) bis : que dire de ABCD ? (trapèze) : 1 UG ; Exercice type 2 (3e Nouveau Pythagore) : 2 UG ; Exercice type 9 (4e Nouveau Pythagore) avec figure à construire : 1 UG ; Exercice type 3 (3e Nouveau Pythagore) : 2 UG ; Exercice type 3 (3e Nouveau Pythagore) bis : construction de la figure : 1 UG ; Exercice type 18 (4e Nouveau Pythagore) : 6 UG avec éventuellement un mélange (étage - mesure en mètre) ; Exercice type 1 (4e Nouveau Transmath) : 1 UGS ; Exercice type 16 (3e Nouveau Pythagore) : 2 UG ; Exercice type 15 (3e Nouveau Pythagore) : 3 UG ; Exercice type 15 (3e Nouveau Pythagore) bis : figure à construire 1UG ; Exercice type 10 (3e Nouveau Pythagore) : 5 UG ; Exercice type 7 (3e Nouveau Pythagore) : 2 UG ; Exercice type 22 (3e Nouveau Pythagore) : 1 URC ; Exercice type 2 (4e Nouveau Transmath) : 1 UGS ; Exercice type 11 (3e Bordas) + indications : données : réseau logique 1 URC ; Exercice type 8 (3e Nouveau Pythagore) : 6 UG ; Exercice type 25 (3e Bordas) : 1 UP ;

Nous allons analyser dans le détail des exercices de types nouveaux qui correspondent à ceux qui se trouvent consignés en annexe I 4, d.

A - Droites parallèles ou non dans une figure simple Type (2)

Les objectifs didactiques du Type 2 sont simples. Il s'agit de faire trouver aux élèves ce qui doit être mis en fonctionnement et surtout comment cela doit être fait. Une seule question comporte plusieurs étapes. Deux outils sont à utiliser dans l'exercice sans indication : la réciproque du théorème de Thalès et la propriété des angles correspondants. La difficulté provient de la forme de la question. En effet, il n'est pas explicitement demandé de démontrer le parallélisme de deux droites, mais les élèves doivent faire le lien entre cette propriété et les mesures des angles données par l'énoncé. Il s'agit de faire appliquer la réciproque du théorème de Thalès pour conclure que les droites (MN) et (BC) sont parallèles et qu'ainsi, grâce aux angles correspondants, les angles ABC et AMN sont égaux. Malgré cette difficulté de trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement, l'exercice ne relève tout de même que de l'Univers des Gammes Soutenues.



ABC = 55°, AMN = 50°. "Tu as fait une erreur !"

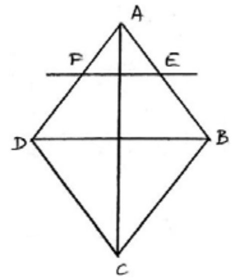
B - <u>Droites parallèles ou non dans une figure complexe</u> Type (1)

Les intentions didactiques des concepteurs du Type 1 sont simples. Il s'agit de donner des exemples d'application de la propriété réciproque dans une figure un peu plus complexe que la figure donnée dans le cours. Le seul travail pour les élèves est de reconnaître le dessin dans lequel le théorème s'applique. On indique ce qu'il y a à démontrer et la méthode est implicitement indiquée. Les deux questions comportent une seule étape. L'élève doit produire tout d'abord un dessin, puis il doit appliquer la réciproque du théorème de Thalès dans une figure complexe.

Il n'y a pas de réelle difficulté, car même si le dessin est un peu plus compliqué qu'à l'accoutumée, les éléments qui se rajoutent sont connexes à la figure dite de Thalès dans laquelle il est nécessaire d'appliquer la réciproque. 1 UG

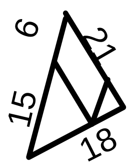
C - **<u>Démonstrations</u>** Types (3), (4), (5), (6)

Pour le Type (3), nous pourrions penser qu'il s'agit d'un exercice que nous avons déjà rencontré, dans le Pythagore 4$^{\text{ème}}$, par exemple type 9, ou dans le Bordas 3$^{\text{ème}}$, type 2, mais les calculs ne sont ici que littéraux. Les intentions méthodologiques sont de remettre en ordre un raisonnement dont tout le schéma déductif est proposé. Les efforts de l'élève doivent donc se porter sur la rédaction d'une solution que l'élève n'a plus qu'à rédiger en français.
ABCD losange $\Rightarrow$ AB = AD ; Thalès $\Rightarrow$ AE/AB = AF/AD et ainsi AE = AF et AEF est un triangle isocèle. Il y a plusieurs outils mis en fonctionnement : une propriété du losange ; la propriété de Thalès. Il y aurait une autre possibilité pour accomplir cette tâche, à l'aide des angles correspondants par exemple, mais la solution est en fait donnée et imposée. Aucune conjecture, aucun raisonnement nouveau, aucune interprétation ne sont à faire. 1 UGS



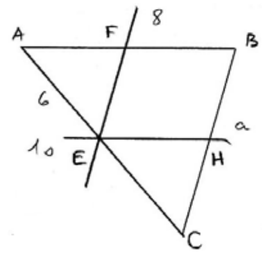
Pour l'exercice type (5), les intentions méthodologiques sont de réappliquer plusieurs fois un théorème dans des figures distinctes. On indique ce qu'il y a à démontrer ou à calculer, mais sans en préciser la méthode. La question comporte plusieurs étapes et ces étapes sont articulées. L'élève doit trouver implicitement par quel calcul de longueur il doit commencer, s'il ne veut pas se retrouver dans une impasse. Il y a deux possibilités pour résoudre la tâche et aucune n'est préférée dans l'énoncé. Une petite astuce, hors du champ du théorème de Thalès, est à mettre en œuvre pour trouver une première longueur indispensable pour la suite.

Il s'agit de faire appliquer par deux fois le théorème de Thalès ainsi qu'une caractérisation du parallélogramme, ou bien de faire appliquer trois fois le théorème de Thalès. Dans cette option de résolution, la difficulté provient de l'imbrication de l'ancien dans du nouveau. Mais une autre solution est possible en appliquant une fois le théorème de Thalès dans la figure constituée des triangles ABC et MNB et deux fois dans la figure formée des triangles ABC et PNC. Ainsi, pour calculer le périmètre du triangle PNC, l'élève doit d'abord inférer qu'APNM est un parallélogramme (car (AM) // (PN) et (AP) // (MN) et qu'ainsi PN = AM = 6. Puis, seulement à ce moment, le théorème de Thalès est applicable. Soit il choisit de calculer la



mesure de la longueur NC grâce au théorème de Thalès : (18 - x)/18 = 9/15, puis la mesure de PC et de PN. Pour le fait que l'élève doive choisir une méthode et que pour chacune d'entre elle, une difficulté, certes différente à chaque fois, existe, nous classons l'exercice dans : URC

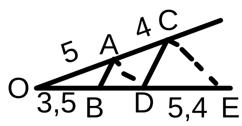
Pour le type (4), il semblerait qu'il faille réussir à employer de multiples résultats pour résoudre l'exercice. Nous en avons déjà rencontré qui faisaient intervenir de nombreuses propriétés, mais cet énoncé est suffisamment caractéristique pour que nous lui consacrions un classement à part. Il y a plusieurs questions, qui ont souvent deux étapes. Pour certaines, rien n'est indiqué, ni ce qu'il y a à démontrer, ni la méthode pour y parvenir. Il y a plusieurs outils à utiliser : le théorème de Thalès ; deux caractérisations du parallélogramme ; une caractéristique du losange ; le théorème de Pythagore après avoir conclu que pour avoir un rectangle l'angle ABC doit être droit, ce qui n'apparaît pas sur le dessin. Et enfin, la trigonométrie. La difficulté provient du nombre de notions à mobiliser, des transformations auxiliaires à faire subir à l'énoncé et du fait que les questions doivent parfois être interprétées pour pouvoir mettre en fonctionnement un théorème pour lequel la figure proposée ne semble pas, pourtant, être adaptée. Une seule possibilité existe pour résoudre chaque question sauf pour la dernière.



- ☞ Calculer EH ; exprime CH en fonction de *a*.
- ☞ Quelle est la nature du quadrilatère EHBF ? En déduire BF. Exprimer BH en fonction de *a*.
- ☞ Calculer *a* pour que EHBF soit un losange.
- ☞ Calculer *a* pour que EHBF soit un rectangle. Calculer alors l'angle BCA.

Nous classons cet exercice dans l'Univers des Problèmes.

La question du type (6) est "ouverte" : les droites (AD) et (CE) sont-elles parallèles ? De plus, elle comporte deux étapes. L'élève doit répondre à une question intermédiaire qui n'est pas posée. Il y a deux outils à mettre en fonctionnement : le théorème direct et le théorème réciproque de Thalès. Une seule possibilité existe pour aboutir. Nous pouvons penser qu'il s'agit du type 22 du livre de 3ème de la collection Pythagore, ou du type 12 Bordas 3ème, mais ici, des mesures de longueurs sont données. L'élève doit effectivement calculer une longueur intermédiaire qui lui permet ensuite de déterminer si les droites en question sont parallèles ou pas.
La difficulté provient du fait que l'élève doit conjecturer et trouver ce qu'il doit mettre en fonctionnement pour pouvoir tenter de répondre à la question. Les droites (AD) et (CE) sont-elles parallèles ? URC



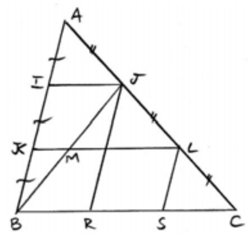
87% des exercices niveau troisième sont dans les univers des gammes ou des gammes soutenues. Seulement 13% sont dans les univers des problèmes ou des recherches conséquentes.

II.4 Les deux ouvrages cinq sur cinq

II.4.1 Analyse des activités introductrices

a) Activités niveau quatrième (Annexe I 5, a)

En ce qui concerne le théorème de Thalès, deux activités sont proposées au niveau 4ème. Elles correspondent exactement à l'activité 4 du Nouveau Transmath de quatrième, mis à part la dernière partie de la démonstration qui consiste à démontrer l'égalité du troisième rapport avec les deux premiers. Nous précisons simplement que la démonstration de la propriété est produite uniquement dans un cas particulier pour lequel les côtés du triangle sont partagés en trois parties égales. Grâce au théorème des milieux, on démontre en traçant, comme dans le nouveau Transmath, la droite (JB), que : AJ = JL = LC. On parvient ainsi à :



AI/AB = AJ/AC = 1/3. Mais dans cet ouvrage Transmath, on adopte, pour le troisième quotient, une autre méthode que celle-ci : KM/IJ = ½ ; KL/IJ = 2 ; ML/IJ = KL/IJ - KM/IJ = 3/2 ; ML/BC = ½. D'où : (ML/BC)/(ML/IJ) = IJ/BC = (1/2)/(1/3) = 1/3. En effet, en traçant les parallèles à (AB) passant par les points J et L, et en utilisant deux caractéristiques du parallélogramme et une fois le deuxième théorème des milieux, on démontre que BR = RS = SC. Cette activité, mise à part la dernière partie, se retrouve dans quatre ouvrages du niveau 4ème : le nouveau Pythagore, le nouveau Transmath, Bordas et cinq sur cinq.

b) Activités niveau troisième

La partie consacrée aux activités du livre de 3ème (Annexe I 5, b) est scindée en deux : revoir.... et découvrir. Dans la partie revoir, une activité est réservée au théorème des milieux et une autre au calcul de deux longueurs grâce au théorème de Thalès abordé en classe de 4ème. La partie "...et découvrir" se partage en deux : une activité traitant du théorème de Thalès généralisé et une autre de la réciproque. L'activité 3 correspond exactement à la partie C de l'activité 3 du livre "le nouveau Pythagore" niveau 3ème. Les commentaires font bien apparaître l'aspect proportionnalité du théorème "deux droites coupées par deux parallèles déterminent deux triangles dont les longueurs des côtés sont proportionnelles". Nous allons donc uniquement analyser l'activité suivante, c'est à dire la 4.

Seul le caractère objet de la notion est abordé. Le registre principal est celui de la figure par l'intermédiaire d'un logiciel de construction géométrique. La réciproque n'est pas reliée ici à une conséquence déjà introduite. Aucune notion ancienne n'est vraiment nécessaire pour résoudre la tâche. Il n'y a aucune intégration de l'ancien par rapport au nouveau. La propriété, telle qu'elle est introduite ici, ne peut pas être perçue comme (FUG) ou comme une (RAP). Elle n'introduit pas non plus un nouveau formalisme et il ne s'agit pas non plus d'une extension de notions déjà introduites.

Le type de problème dont relève l'énoncé est l'étude de configurations par une simple lecture graphique, à l'aide d'un logiciel. L'activité exhibe un contre exemple à l'assertion . "Si AM/AB = AN/AC, alors (BC) // (MN)". Aucune initiative n'est laissée à l'élève si ce n'est la reproduction de figures à l'aide de la micro-informatique. La question est ouverte, puisque l'élève doit décider de l'exactitude de l'une ou de l'autre assertion. Il faut trouver, après lecture de figures, qui a raison, sans aucune démonstration. L'activité se fonde totalement sur une ostension assumée. Le niveau de fonctionnement visé est le niveau technique. L'organisation mathématique est juste locale, voire même ponctuelle. Le degré de complication est de 2.

L'énoncé prend place à la fin du scénario. Il n'y a pas de lien avec le théorème direct. Il s'agit, pour les concepteurs, de mettre en évidence un contre-exemple montrant l'importance de la position des points. La question est faussement ouverte, puisque le contre-exemple est présenté dès le début de l'activité. Notons qu'en toute fin de chapitre page 160 dans une rubrique math - info dont le titre est *"Thalès démontré par Euclide"*, la démonstration utilisant l'aire de triangles, est donnée.

En ce qui concerne l'utilisation du théorème de Thalès et de sa réciproque en tant qu'outils dans les chapitres suivants, nous pouvons nous rendre compte du peu d'importance accordée à cette propriété. Dans le cours, ce résultat n'est employé qu'au chapitre 10 consacré aux agrandissements réductions. Seule une activité fait référence à une application de ce théorème.

II.4.2 Analyse et classifications des exercices

Exercice 4ème

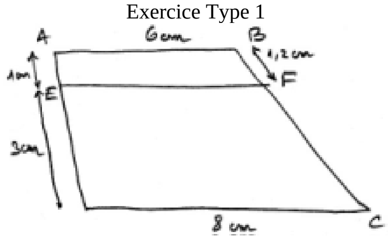
Type 1 (4e Nouveau Pythagore) : 2 U.G ; Type 7 (4e Nouveau Pythagore) bis : plusieurs longueurs : 2 U.G.S ; Type 18 (4e Nouveau Pythagore) bis : avec construction d'un schéma à faire : 2 U.G ; Type 9 (4e Nouveau Pythagore) : 1 U.G.S ; Type 12 (4e Nouveau Pythagore) : 1 U.G ; Type 10 (4e Nouveau Pythagore) bis : 3 longueurs : 1 U.R.C ; Type 8 (4e Nouveau Pythagore) bis : à construire : 1 U.G.S ; Type 3 (4e Nouveau Bordas) : 1 U.G ; Type 11 (4e Nouveau Pythagore) : 1 U.G.S ; Type 3 (4e Nouveau Pythagore) : 1 U.G ; Type 22 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.R.C ;

Les exercices ont presque tous déjà été répertoriés. Mais quatre nouveaux types sont à relever tout de même. Nous les avons consignés dans le tableau annexé I 5, b.
Nous allons donner plus de détails sur ces exercices de type nouveau.

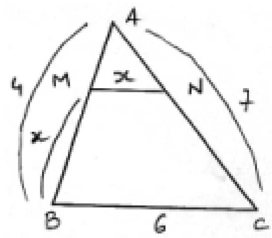
A - <u>S'exercer, parallèles et sécantes</u> Types (1) et (2)

Pour le premier exercice, on indique ce qu'il y a à démontrer, ainsi que la méthode pour y parvenir. Il est demandé de calculer plusieurs longueurs. Pour cela, l'élève doit compléter la figure en traçant une parallèle à une droite passant par un point. Pour le second exercice, l'élève sait ce qu'il y a à calculer, mais la méthode est à trouver. Il y a deux outils à mettre en fonctionnement. Il n'y a qu'une possibilité pour résoudre la tâche. L'élève doit tracer la parallèle à (AD) passant par B et doit ensuite justifier, grâce à une des caractérisations du parallélogramme (quadrilatère ayant des côtés parallèles deux $\Rightarrow$ les côtés opposés sont de même longueur), que BG = AE et GK = ED. Ensuite, vient l'application du théorème de Thalès dans la figure constituée des deux triangles BKC et BGF. La méthode étant indiquée, nous classons l'exercice dans U.G.S. Pour le second exercice (Type 2), on demande de construire la figure ci-contre. Calculer *x* de façon que le triangle BMN soit isocèle en M. Un seul outil, hormis la résolution d'équations fractionnaires, est à mettre en œuvre : le théorème de Thalès. L'élève doit ici interpréter que le triangle BMN doit être isocèle en B et obtenir, après application du théorème de Thalès :

Exercice Type 1



Calculer BC, CF et EF

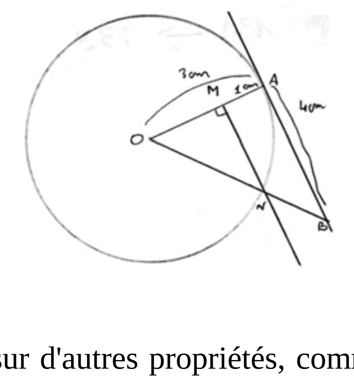


x/6 = (4 - x)/4. Il s'agit d'un type d'équation qui sort de l'ordinaire. Par rapport aux types 3 des exercices Transmath $3^{ème}$, ou type 2 Bordas $3^{ème}$, ou Type 9 Pythagore $4^{ème}$, ici il faut résoudre une équation pour rendre un triangle isocèle. U.R.C

B - <u>Utilisation du théorème de Pythagore</u> Types (3)

Les trois exercices du Type (3) font partie de la rubrique "S'exercer", mais ils appartiennent au paragraphe "Avec Pythagore". Il est donc clairement annoncé que ce résultat est employé en sus du théorème de Thalès. Les intentions didactiques des concepteurs sont de faire appliquer deux théorèmes. Reste à savoir dans quel ordre ?
Un choix de méthode est à faire. Avant l'application d'un théorème, des justifications sont à donner pour légitimer cette utilisation. Il est tout d'abord demandé de produire une figure.

"1° a) Tracer un cercle de centre O et de rayon 3 cm. Placer un point A sur le cercle, puis tracer la tangente en A au cercle. Sur celle-ci, placer un point B tel que AB = 4cm.



On demande ensuite de calculer OB, puis la longueur du cercle circonscrit au triangle OMN. Deux outils sont à mettre en fonctionnement : les théorèmes de Pythagore et de Thalès.
Mais pour parvenir à leur application, des justifications fondées sur d'autres propriétés, comme celle de la tangente, de deux droites perpendiculaires à une troisième ; d'un triangle rectangle

inscrit dans un cercle, doivent être utilisées comme argumentation. Ainsi, le théorème de Pythagore est à appliquer dans le triangle rectangle AOB. L'élève doit ensuite inférer que si on lui demande de calculer la longueur du cercle circonscrit au triangle OMN, il doit justifier en utilisant le fait que OMN est un triangle rectangle, que ON est un diamètre de ce cercle et que, par conséquent, il doit calculer ON. Pour cela, le théorème de Thalès est applicable une fois produite la justification du parallélisme des droites (MN) et (AB). La propriété de la tangente perpendiculaire à un rayon et celles des deux droites perpendiculaires à une troisième, légitime justement cette application. 3 P

Un dernier type (4) ressemble au type 2 du Nouveau Pythagore, sauf que les trois rapports sont proposés et qu'il faut replacer trois points sur la figure, puis calculer deux longueurs, les figures étant congruentes. 1 U.G

70% sont des exercices des univers des gammes ou des gammes soutenus et 30% des univers des problèmes ou de recherches conséquentes.

Exercice 3ème

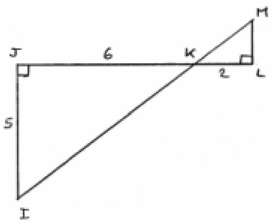
Nous rappelons que lorsque nous rajoutons "bis" à l'extérieur du Type d'exercice, cela signifie que le type d'exercice pris en référence reçoit une modification dans l'ouvrage en question.
Type 11. (4e Nouveau Pythagore) bis : orientation atypique : 1 U.G ; Type 1 (4e Nouveau Transmath) : 1 U.G ; Type 5 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.G ; Type 3 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.G ; Type 9 (4e Nouveau Pythagore) : 1 U.G ; Type 18 (4e Nouveau Pythagore) : 1 U.G ; Type 18 (4e Nouveau Pythagore) bis : schéma à construire : 2 U.G ; Type 8 (4e Nouveau Pythagore) : idem : 1 U.G.S ; Type 10 (4e Nouveau Pythagore) : 3 U.R.C ; Type 10 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.R.C ; Type 8 (3e Nouveau Pythagore) : 5 U.G ; Type 3 (4e Cinq sur Cinq) : 1 U.P ; Type 15 (3e Nouveau Pythagore) : 2 U.G ; Type 17 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.G.S ; Type 19 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.P ; Type 21 (3e Nouveau Pythagore) bis (figure à construire) : 1 U.R.C ; Type 18 (3e Nouveau Pythagore) bis (figure à construire) + exemple numérique initial) : 1 U.G.S ; Type 11 (3e Nouveau Pythagore) : 2 U.R.C ; Type 23 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.P ; Type 15 (3e Nouveau Pythagore) : 1U.G ; Type 19 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.P ; Type 11 bis (3e Nouveau Pythagore) + démontrer que l'on a en carré ou que l'on a tout d'abord un triangle rectangle (Pythagore) : 2 U.P ; Type 7 (3e Nouveau Pythagore) : 1 U.G.
Nous allons compléter cette liste par l'analyse d'exercices de types nouveaux.

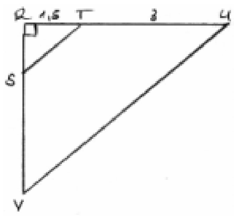
A - Avec Pythagore Types (1), (2) et (4)

Pour les deux premiers types, les intentions didactiques des concepteurs sont de mettre en fonctionnement deux théorèmes en même temps. Nous avons choisi de donner les détails de ces deux exercices malgré le rapprochement que nous pouvons faire avec des exemples donnés précédemment, car pour les deux exercices du livre "Cinq sur cinq", la figure est simple alors qu'au Type 19 du Bordas ainsi qu'au Type 10 du Pythagore, il s'agit d'une configuration complexe. Ces exercices vont donc passer ici d'un classement dans l'Univers de Recherche Conséquente à l'Univers des Gammes Soutenues.

Pour les deux exercices, on indique ce qu'il y a à démontrer et les méthodes ne sont pas communiquées. L'élève sait qu'il a à appliquer le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore de par le classement des deux exercices sous la rubrique "Avec Pythagore" du livre. Une seule possibilité existe pour résoudre la tâche.

Type 1	Type 2
Calculer KI, KM, LM	1 a - Calculer RS
	b - Calculer ST
	2 - Calculer le périmètre de STUV





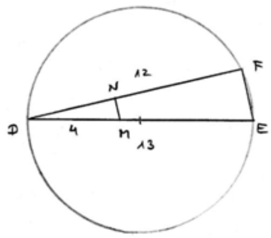
Les deux théorèmes sont nécessaires pour calculer au moins deux longueurs. Le parallélisme est indiqué ou évident, car deux droites sont perpendiculaires à une troisième.

Pour le premier Type, il s'agit de faire appliquer, en premier lieu, le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle IJK : $IK^2 = 5^2 + 6^2$, pour ensuite appliquer le théorème de Thalès en ayant au préalable justifié que les droites (IJ) et (ML) sont bien parallèles.

On a : KM/KI = KL/JL, soit, puisque l'énoncé demande des valeurs exactes : $KM = 1/3\sqrt{61}$ et ML = 5/3. Pour le second Type : une première application du théorème de Thalès permet de calculer RS : $RS = 1{,}5/3 \times 3$, soit : SR = 1,95. Une question intermédiaire demande de calculer ST. La dernière question, qui demande de calculer un périmètre, aurait pu être posée directement. L'élève aurait eu alors un choix à faire. Ici, il doit impérativement appliquer le théorème de Pythagore pour calculer ST : $ST^2 = 1,\ 5^2 + 1,\ 95\ ^2$, $ST \approx 2,\ 5$ cm et réappliquer le théorème de Thalès pour calculer UV.

Malgré l'imbrication de l'application de plusieurs résultats, ces deux exercices, à l'inverse des Types 19 et 10 précédents, relèvent de U.G.S, car les questions sont détaillées et les méthodes implicites.

1. Calculer EF
2. Calculer MN et FN



On indique ce qu'il y a à démontrer, mais les différentes étapes et la méthode à employer pour y parvenir sont tues. Il y a trois calculs à effectuer et l'élève, après avoir produit la figure, doit prendre des initiatives. Deux possibilités s'offrent à l'élève pour calculer FN. La difficulté provient des justifications à donner sans qu'elles soient demandées. Il s'agit tout d'abord de justifier que le triangle DEF est rectangle en F. Aucune conjecture n'est à faire. Par contre, il faut trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement.

La difficulté provient de l'imbrication des questions avec d'autres éléments nouveaux ou anciens. L'élève doit ensuite appliquer le théorème de Pythagore pour calculer EF. Il doit mettre en œuvre ensuite le théorème de Thalès avec, au préalable, une discussion sur sa légitimité. Il doit relier deux résultats : DEF est un triangle rectangle et la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (DF). Du fait du nombre de résultats du cours à appliquer et du peu de détails des questions, cet exercice relève de : U.R.C.

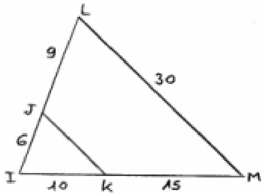
B - <u>Thalès : direct et réciproque</u> Types (5), (6) et (9)

Ce n'est pas la première fois que nous rencontrons un exercice dans lequel il est nécessaire d'appliquer la propriété directe et sa réciproque, mais la version des exercices dont nous allons parler diffère de ce que nous avons relevé jusqu'à présent.

Pour les deux exercices type (5) et (6), on indique ce qu'il y a à démontrer et les titres et les sous-titres des paragraphes sont suffisamment explicites pour que l'on comprenne ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. Il n'y a pas d'implicite dans les consignes. Il y a deux outils à utiliser dans ces deux exercices. Les difficultés peuvent provenir, pour le Type (5), de l'orientation atypique de la figure et de la non - congruence de celle-ci pour la répartition des longueurs ; ce qui a été confirmé dans la deuxième partie de notre travail. Pour le Type (6), la présence de deux figures imbriquées représente la principale source d'erreurs.

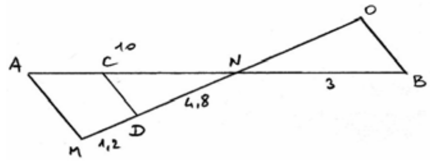
Type 5	Type 6
1 - Montrer que (JK) // (ML)	1 - (AM) et (CD) sont parallèles.

2 - Calculer JK



Calculer NC.

2 - Les droites (AM) et (OB) sont-elles parallèles ?



Pour le premier exercice, l'élève doit simplement appliquer la réciproque du théorème de Thalès et la propriété directe : U.G.S. D'autres exercices relevaient d'une double application numérique du théorème direct et du théorème réciproque, comme Type (6) Transmath, Type (22) Pythagore, mais dans les deux cas que nous analysons maintenant, les situations sont plus simples.

En ce qui concerne le second énoncé, après avoir choisi la bonne figure, l'élève doit appliquer le théorème direct. Il doit ensuite changer de figure de référence pour démontrer le parallélisme de deux droites. Les deux résultats ne sont pas reliés entre eux : U.G.S.

Le type (9) appartient à la rubrique "S'exercer et approfondir" de la partie "«Thalès» : direct et réciproque" du livre. Dans cet exercice aussi, les deux théorèmes, le direct et la réciproque sont à appliquer. Il s'agit d'un nouveau type car seul des fractions littérales rentrent en ligne de compte. On indique ce qu'il y a à démontrer, ainsi que la méthode pour y parvenir.

Chaque question comporte deux étapes. Toutes les indications sont données, mais la difficulté provient de la multiplicité des notions à mettre en œuvre : une double application du théorème de Thalès, puis une utilisation du produit en croix sur des égalités littérales suivi de l'emploi de la transitivité de l'égalité, pour finir par la mise en place d'une égalité de deux fractions et le parallélisme de deux droites par l'application de la réciproque du théorème de Thalès.

Les difficultés proviennent aussi du domaine de contextualisation et de la complexité de la question due à l'imbrication d'éléments anciens. Il faut raisonner et relier des résultats entre eux. Il faut appliquer deux fois de suite le théorème de Thalès pour obtenir :
$OA/OB = OE/OF$ et $OB/OC = OD/OE$, ce qui donne ensuite $OA \times OF = OB \times OE$ et $OB \times OE = OC \times OD$ et, par transitivité, $OA \times OF = OC \times OD$, ou encore $OA/OC = OD/OF$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AD) et (CF) sont parallèles.

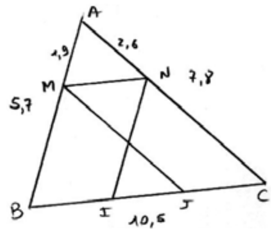
Nous aurions pu rapprocher cet exercice du Type (6) du Transmath 3ème, mais ici, il ne s'agit pas d'un calcul effectif. Même si les questions sont détaillées, nous pensons que cet énoncé relève de U.P.

D - <u>Démonstrations</u> Types (7), (8) et (11)

Les deux premiers types sont classés sous la rubrique "«Thalès» : direct et réciproque". On indique ce qu'il y a à démontrer dans les deux cas sans préciser la méthode pour y parvenir. Pour le premier Type, il y a un choix de méthode à faire. L'élève doit inférer et rassembler des résultats. Sur les deux méthodes aucune n'est préférable à l'autre. Par contre, dans le second Type, une méthode est beaucoup plus rapide et immédiate qu'une autre et ne correspond justement pas à l'application de la réciproque du théorème de Thalès. Les énoncés sont par conséquent semi-ouverts. Par une application immédiate de la réciproque du théorème de Thalès, l'élève parvient à démontrer le parallélisme des deux droites (MN) et (BC). Il doit ensuite appliquer la propriété directe pour calculer MN. Il n'y a pas d'indication pour parvenir au résultat BI = IJ = JC. Deux méthodes s'offrent : l'utilisation d'une propriété des parallélogrammes et de leur définition, puis le calcul de IJ par soustraction ou le calcul de BJ et JC par une double application du théorème de Thalès. La difficulté provient du fait que l'élève doit trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionne-

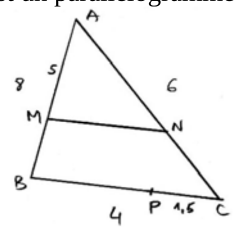
On demande à l'élève, en plusieurs étapes, de construire la figure.
1 - Démontrer que (MN) // (BC)
2 - BI = IJ = JC = 3, 5

ment dans la dernière question. Il doit faire



plusieurs mises en relations, il doit interpréter et raisonner. Avec le théorème de Thalès : MN = (1,9/5,7) × 10,5, MN = 3, 5. Se présente alors une alternative :
- soit, on poursuit en disant que (MN) // (BC) et (MB) // (NI), donc MNIB est un parallélogramme et ainsi MN = BI = 3, 5. Idem pour MN = JC = 3, 5.
Ainsi, IJ = 10, 5 - 2 x 3, 5 = 3, 5 ;
- soit on calcule IC, IC = (5,2/7,8) × 10,5 ; IC = 7 par application du théorème de Thalès.
Ainsi BI = 10, 5 - 7 = 3, 5.
De même, : BJ = (3,8/5,7) × 10,5; BJ = 7 et JC = 3, 5 et ainsi IJ = 10, 5 - 7 = 3, 5. U.P

1 - Calculer AN et MN.
2 - Démontrer que MNPB est un parallélogramme.



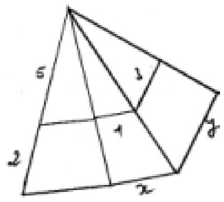
En ce qui concerne le Type 8, le théorème de Thalès doit tout d'abord être appliqué ; mais, pour la suite, deux méthodes sont possibles : soit l'application de la réciproque, soit l'utilisation de l'une des caractéristiques des parallélogrammes. Le titre de la rubrique impose implicitement la première méthode, ce qui peut paraître maladroit. Après avoir calculé la longueur MN par application du théorème de Thalès, il suffit de rajouter que BP = 4 - 1, 5 ; BP = 2, 5 et comme MNPB n'est pas croisé, il s'agit d'un parallélogramme. La méthode consistant à démontrer que les droites (NP) et (MB) sont parallèles (ce qui justifie le calcul d'AN), est inadaptée NC/NA = 2,25/6 ; CP/CB = 1,5/4 et ainsi, puisque on a : (MN) // (BP) et (MB) // (NP), MNPB est un parallélogramme U.R.C.

Dans l'exercice Type (11), on indique ce qu'il y a à calculer sans en préciser la méthode. La question comporte deux étapes. L'élève doit inférer : l'énoncé est donc semi-ouvert. Plusieurs outils sont à mettre en fonctionnement : le théorème de Thalès, une propriété du parallélogramme, ainsi que le calcul segmentaire. La difficulté provient d'une astuce à mettre en œuvre pour parvenir à exprimer le rapport AJ/JB à l'aide de AJ = ¾. AB. Il est demandé explicitement de démontrer que AJ = ¾. AB, puis de calculer *x*. Les difficultés proviennent des transformations auxiliaires à faire subir à l'égalité AJ = ¾. AB.
L'élève doit relier des résultats entre eux et en interpréter certains autres. AJ/DC = 9/12 or, ABCD est un parallélogramme, donc AB = DC et ainsi AJ = ¾.DB ; x/JD = JB/AJ
soit x/21 = (AB - AJ)/AJ ; x/21 = AB/AJ - 1. D'où x/21 = ¾ - 1 ; x/21 = 1/3 ; x = 7. U.R.C

E - <u>Calcul de longueurs sur une figure complexe</u> Type (10)

Pour le type (10), plusieurs figures de Thalès sont adjacentes et les auteurs ont pour objectifs de faire calculer plusieurs longueurs inconnues dans des figures distinctes, ce qui nécessite d'utiliser la transitivité de l'égalité de deux fractions. Le théorème est implicitement indiqué. Mais l'élève doit trouver la méthode. Une double application du théorème de Thalès est à mettre en place pour calculer *x* ; de même pour *y* ; la transitivité de l'égalité permet d'obtenir une équation adaptée à la question. Deux possibilités existent pour résoudre la tâche et l'énoncé n'en privilégie pas. Le but est donc de faire appliquer par deux fois le théorème de

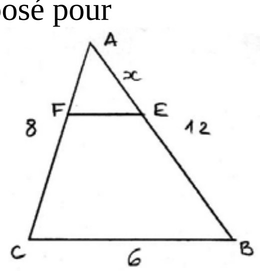
Thalès et de relier deux résultats entre eux. Il n'y a pas d'indication sur les imbrications de plusieurs éléments : 5/7 = 1/x ; 1/x = 3/y ; ou 5/7 = 3/y. Le fait que les points principaux de la figure ne soient pas nommés, rend la tâche inhabituelle. U.G.S



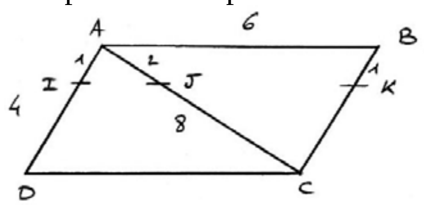
F - <u>Question indirecte</u> Types (12), (14), (15)

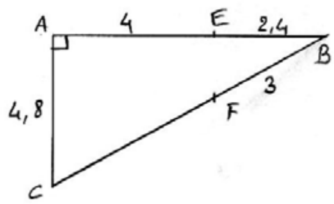
Nous avons déjà répertorié des exercices de ce genre : Bordas 3ème Type 2, Bordas 4ème Type 7, Pythagore 4ème Type 9, Transmath 4ème Type 4, mais nous pensons qu'il s'agit ici d'un nouveau Type.

En ce qui concerne le Type (12), on indique ce qu'il y a à démontrer ou à trouver, la méthode étant largement détaillée. Il y a plusieurs outils à utiliser. Le théorème de Thalès pour calculer plusieurs longueurs ; une mise en équation traduisant l'égalité des périmètres du triangle AFE et du trapèze BEFC. Les indications sont suggérées par la place de l'exercice et de par la simplicité de la figure. Un changement de cadre est en quelque sorte imposé pour résoudre la question finale. L'élève doit appliquer le théorème de Thalès et le calcul segmentaire. x/12 = EF/6 ; EF = x/2 ; EB = 12 - *x* ; AF = 2/3.x ; FC = 8 - 2/3.x. Puis, il doit traduire le fait que les périmètres du triangle AEF et du trapèze BCFE doivent être égaux :
AF + AE = FE + EB + BC + FC, soit encore AF + AE =
EB + BC + FC. Notons que le calcul de EF est inutile. 2/3.x + x=
12 - x + 6 + 8 - 2/3.x. U.R.C



Pour le type (14), il est demandé de faire une conjecture, puis de la démontrer : aucune indication, *a priori*, n'est donnée. Seul, "un coup de pouce" vient compléter l'information. Les questions comportent plusieurs étapes.

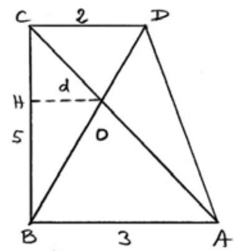




Montrer que I, J et K sont alignés.

Il y a trois outils à mettre en fonctionnement dans le cadre de l'énoncé : la réciproque du théorème de Thalès à appliquer deux fois, la transitivité du parallélisme, ainsi que l'alignement de trois points obtenu grâce au parallélisme de deux droites ayant un point commun. Il n'y a aucune indication. Une conjecture doit être faite. La question est ouverte. De plus, l'élève doit trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. Il doit interpréter un résultat, raisonner et relier des résultats entre eux. Les difficultés proviennent, à la fois du domaine de contextualisation, de la complexité et de l'originalité de la question et de l'imbrication de nombreux éléments. L'utilisation de la figure comme support au raisonnement est essentielle.
AI/AD = 1/4 ; AJ/AC = 2/8 donc AJ/AC = AI/AC et ainsi (IJ) et (DC) sont parallèles.
De même CK/CB = 3/4 ; CJ/CA = 6/8 = ¾ ainsi (JK) et (AB) sont parallèles.
Comme les droites (AB) et (DC) sont parallèles, (IJ) et (AB) sont également parallèles, et ainsi (IJ) et (JK) sont parallèles. Ayant un point commun, elles sont confondues. U.P

Dans l'exercice de Type (15), on indique ce qu'il y a à démontrer sans en préciser la méthode si ce n'est dans un "Coup de pouce". La question comporte trois étapes. Un choix de méthode est à faire pour calculer d. Il y a plusieurs outils à utiliser pour résoudre la question : un outil de géométrie, le théorème de Thalès et deux outils algébriques. Le cadre géométrique de l'énoncé est dépassé, puisque l'élève doit travailler dans un cadre plus algébrique. La difficulté principale provient d'une astuce de calcul à mettre en place, du domaine de contextualisation et de la complexité de la question où intervient la mise en fonctionnement visée. L'élève doit raisonner et relier des résultats entre eux. d/3 = CH/5 ; d/2 = BH/5 donc, par addition membre à membre : d/3 + d/2 = (CH + BH)/5 = 1, et ainsi 5d/6 = 1, d = 6/5. U.P.



Nous avons consigné tous ces Types d'exercices nouveaux à l'annexe I 5, c.

Les exercices sont ici un peu plus répartis dans les univers. 58% font parti des univers des gammes et des gammes soutenus ou avec habillage et donc 42% font parti des univers des problèmes et des recherches conséquentes.

II.5 Les deux ouvrages Dimathème

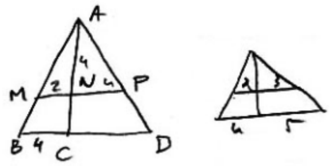
II.5.1 Analyse des activités introductrices

L'activité 1 (Annexe I 6, b) niveau troisième correspond à l'activité 3 du nouveau Pythagore, avec moins de détails. L'activité 2 concerne la réciproque du théorème de Thalès. Différents exemples, utilisant pour les uns les milieux de segments, des quadrillages pour d'autres, et des mesures en cm, illustrent le parallélisme de deux droites obtenus grâce à l'égalité de deux rapports. Mais, l'importance de la position respective de chaque point, contrairement à d'autres activités, n'est pas mise en évidence. La première partie de l'activité 3 du livre de 4ème (Annexe I 6, a) correspond à la première partie de l'activité 3 4e Bordas, questions 1 a) b) c). La seconde partie ne consiste pas à démontrer le théorème dans un cas particulier, mais de l'appliquer, en complétant différentes égalités littérales, à trois cas de figures. N'ayant rien trouvé de différent par rapport à ce que nous avons rencontré jusqu'à présent dans les ouvrages précédent, nous ne poussons pas plus loin notre analyse.

II.5.2 Analyse et classifications des exercices

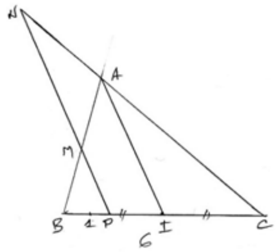
Exercices niveau 4ème(Annexe I 6, c)

Type 3 (Nouveau Pythagore 4^e)1 U.G ; Type 3 (Nouveau Pythagore 4^e) bis : figure à construire1 U.G (3 - 1,8)/3 = x/5 ; Type 1 (Nouveau Transmath 4^e) 5 U.G.S ; Type 9 (Bordas 4^e)1 U.G ; Type 9 bis (Bordas 4^e) : figure à compléter (quadrillage) 1 U.G ; Type 2 (Nouveau Pythagore 4^e) 4 U.G ; Type 4 (Nouveau Pythagore 4^e) 2 U.G ; Type 7 (Nouveau Pythagore 4^e) 1 U.G.S ; Type 11 (Nouveau Pythagore 4^e) bis : sans calcul de longueur. On demande les égalités littérales. 2 U.G.S ; Type 10 (Nouveau Pythagore 4^e) bis : calculer AC et CD (dessin 1) au lieu de (dessin 2). 2 U.G.S ; Type 12 (Nouveau Pythagore 4^e)1 U.G ; Type 7 (Bordas 4^e)1 U.G.S ; Type 10 (Nouveau Pythagore 4^e) 1 U.R.C ; Type 18 (Nouveau Pythagore 4^e) 1 U.G ; Type 19 (Nouveau Pythagore 4^e) 1 U.P ; Type 9 (Bordas 4^e) 1U.G ; Type 17 (Bordas 3^e) bis : figure construite ; calcul de quatre longueurs1 U.R.C ; Type 5 (Transmath 3^e) bis : calcul de quatre longueurs au lieu de : calculer les longueurs des côtés du triangle PNC, 1UP. Seulement deux types d'exercices ne se trouvent pas dans la liste déjà analysés jusqu'ici :



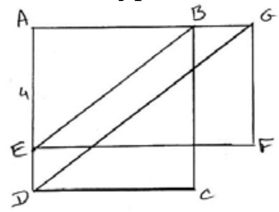
A - <u>Démonstration</u> Types (1) et (2)

Il semble nécessaire, pour résoudre les types (1) et (2), de faire du raisonnement à plusieurs pas, d'effectuer plusieurs types d'enchaînements. Dans les deux exercices, on indique ce qu'il y a à démontrer sans en préciser la méthode. L'élève doit inférer et rassembler plusieurs résultats. Il y a deux outils à utiliser dans chaque exercice. Le théorème de Thalès et le calcul fractionnaire (somme de factions) dans le premier, et le théorème de Thalès et le calcul d'aires (carré et rectangle) pour le second. Ces outils sont à faire fonctionner dans le cadre de l'énoncé, sauf pour le calcul algébrique pour lequel il faut passer du cadre géométrique au cadre algébrique. Aucune indication pour l'application des résultats n'est donnée. Pour le premier Type, une astuce doit être mise en œuvre pour parvenir à une solution. PN/AI + PM/AI = 5/3 + 1/3.
La difficulté provient du domaine de contextualisation et des transformations auxiliaires que l'élève doit entreprendre pour obtenir, par exemple, la longueur PC. Il doit trouver à chaque fois, la figure dans laquelle il doit mettre en fonctionnement le théorème de Thalès.
De plus, il doit interpréter les deux premiers résultats, puis les relier entre eux en changeant de cadre pour parvenir à la dernière égalité. PN/AI = 5/3 ; PM/AI = 1/3 $\Rightarrow$ PN/AI + PM/AI = 5/3 + 1/3 $\Rightarrow$ (PN + PM)/AI = (5 + 1)/3. soit (PN + PM)/AI = 6/3 = 2 et PM + PN = 2AI. Le but des auteurs est de faire utiliser la figure en géométrie, les calculs littéraux et numériques en algèbre. U.P.



Type 1
1 - Figure à construire
2 - 3 - Montrer que
PN/AI + PM/AI = 5/3 + 1/3.
4 - Montrer que PN + PM = 2 + AI.

Type 2



1 - Figure à tracer
2 - Calculer AG
3 - Comparer les aires du carré ABCD et du rectangle AEFG.

Pour le Type 2, les intentions didactiques sont de faire appliquer le théorème de Thalès dans une configuration complexe, mais ne comprenant qu'une figure de Thalès. Il n'y a pas vraiment lieu de raisonner (4/6 = 6/AG), sauf juste pour expliquer le fait que AB = 6, ni d'interpréter un résultat. U.G.S.

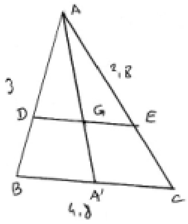
Exercices niveau 3ème (Annexe I 6, d)

Type 1 (Nouveau Pythagore 3e) bis : sans calcul, uniquement : écriture des égalités 3 U.G bis' : avec tracé de la figure : 1U.G ; Type 9 (Bordas 4e) 3 U.G ; Type 8 (Nouveau Pythagore 3e)4 U.G ; Type 18 (Nouveau Pythagore 4e) 8 U.G + éventuellement réciproque pour le compas de réduction ; Type 18 (Nouveau Pythagore 3e) 1 U.G.S ; Type 5 (Nouveau Pythagore 3e) 2 U.G ; Type 9 (Nouveau Pythagore 4e) 3 U.G.S ; Type 3 (Nouveau Pythagore 4e) 1 U.G ; Type 5 (Cinq sur cinq 3e) 1 U.G.S ; Type 2 (Bordas 3e) 1 U.G.S ; Type 1 (Transmath 3e) bis + calcul d'une longueur1 U.G.S ; Type 11 (Nouveau Pythagore 4e)1 U.G.S ; Type 7 (Nouveau Pythagore 3e) 1 U.R.C ; Type 6 (Cinq sur cinq 3e)1 U.G.S ; Type 4 (Cinq sur cinq 3e)1 U.R.C ; Type 19 (Nouveau Pythagore 3e)1 U.P.

Huit autres exercices différents sont également proposés.

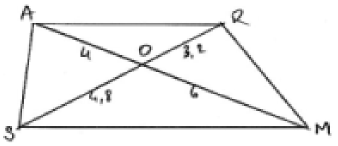
Pour les trois premiers types, on indique clairement ce qu'il y a à démontrer. Les questions sont fermées, même s'il est demandé pour l'une d'entre elles "quelle est la nature du quadrilatère ARMS ?", car la réponse découle immédiatement de ce qui précède. On n'indique pas comment y parvenir, mais les méthodes sont implicites. Les questions ne comportent qu'une seule étape.

Type 1 : Calcul de plusieurs longueurs en utilisant un résultat antérieur. Il y a deux outils à mettre en fonctionnement : le centre de gravité situé à "2/3, 1/3" et le théorème de Thalès à appliquer plusieurs fois. La difficulté provient du fait que l'élève doit faire appel à une connaissance antérieure. Il s'agit de faire appliquer le théorème de Thalès, la difficulté provenant de l'imbrication avec un élément ancien (AG/AA' = 2/3) qu'il faut relier au théorème de Thalès.
AD/3 = 2/3 ; 2,8/AC = 2/3. L'élève doit également penser que A' est le milieu de [BC]. U.R.C



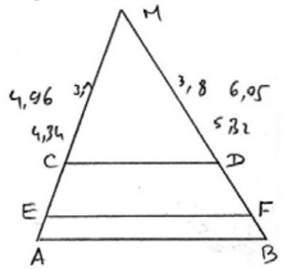
1 - Figure à construire.
2 - Donner la valeur du rapport AG/AA'.
3 - Calculer AD, AC, DG et GE.

Type 2 : Le théorème de Thalès et sa réciproque doivent être employés pour démontrer le parallélisme ou le non parallélisme de deux droites. La difficulté réside en l'application successive de ces deux résultats. C'est pour cette raison que nous consacrons un Type nouveau à cette question.



1 - Les droites (AR) et (SM) sont-elles parallèles ?
2 - Idem pour (AS) et (RM).

Type 3 : Il s'agit d'un exercice Type qui pourrait être rapproché du Type 14 de l'ouvrage Cinq sur cinq où il est demandé de démontrer l'alignement de trois points. Mais la question dans l'exercice Type 3 est encore différente. Le but est de faire appliquer le théorème réciproque et le théorème direct. La difficulté de l'exercice 2 provient du domaine de contextualisation. En effet, pour les deux étapes de calcul, le rapport OA/OM apparaît. L'élève pourrait être tenté de conclure que le droites (AS) et (RM) sont parallèles, du fait qu'il ait déjà démontré que OA/OM = OR/OS. Type 2 : U.R.C Type 3 : U.G.S



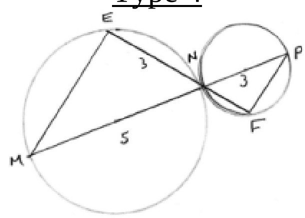
[EF] est horizontal. [CD] et [AB] sont-ils horizontaux ?

B - Imbrication de nombreux éléments antérieurs Types (4), (5) (6) et (7)

Ces exercices sont d'un niveau plus soutenu que les précédents, bien que les deux premiers Types d'exercices relevaient eux-mêmes de l'Univers de Recherches Conséquentes. On indique à chaque fois ce qu'il y a à démontrer et les méthodes sont, soit détaillées, soit implicites. L'élève doit inférer, rassembler des résultats. Plusieurs pas de raisonnement sont présents et Plusieurs outils sont mis en fonctionnement. Ils sont à faire fonctionner dans le cadre de l'énoncé, le cadre géométrique, sauf pour le quatrième exercice, qui, pour la dernière question, nécessite de changer de cadre. Il est, par ailleurs, indiqué de résoudre un système d'équation. Il n'y a, à chaque exercice, qu'une possibilité pour résoudre la tâche. Les difficultés proviennent de l'imbrication de nombreux éléments, nouveaux et anciens.

Il faut reconnaître ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. Il est tout de même nécessaire de raisonner et de relier des résultats entre eux. Réciproque du théorème : triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre du cercle. Puis, application du théorème de Pythagore, et de nouveau le cercle inscrit et enfin, l'application de la propriété de deux droites perpendiculaires à une troisième. C'est seulement à ce stade que le théorème de Thalès est à appliquer. Pour le calcul de FP, deux méthodes sont possibles : soit l'application du théorème de Thalès, soit celle du théorème de Pythagore. U.R.C

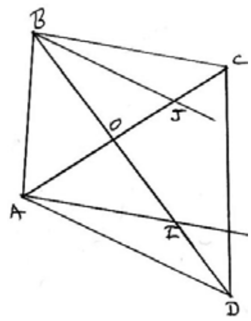
Type 4



1 - Figure.
2 - Quelle est la nature du triangle MNE ? Calculer ME.
3 - Démontrer que les droites (ME) et (PF) sont parallèles. Calculer NF et FP.

Type 5

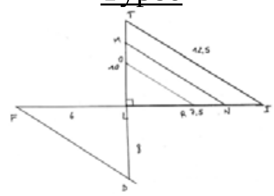
Les difficultés proviennent à la fois du domaine de contextualisation (figure complexe comprenant deux figures-clefs) et des imbrications de plusieurs éléments. Il y a lieu de raisonner, de relier et d'interpréter des résultats entre eux. Deux applications du théorème de Thalès, deux produits en croix et l'utilisation de la transitivité de l'égalité. AI/BC = OI/OB = OA/OC ; OJ/OA = OB/OD = BI/AD. $OI \times OC$ = $OA \times OB$ et $OJ \times OD$ = $OA \times OB$. Le but est également de faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement pour parvenir à l'égalité $OI \times OC = OJ \times OD$. U.P



(AD) et (BJ) sont parallèles, ainsi que (AI) et (BC).
Montrer que (IJ) et (CD) sont parallèles.
Exprimer OI/OB, OJ/OA, puis, déduire que $OI \times OC = OJ \times OD$.

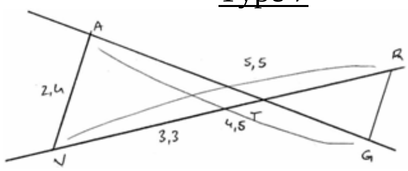
Dessin à construire, puis à compléter au fur et à mesure. Les dut difficultés Type 6 proviennent de l'imbrication de nombreux résultats à appliquer. Il est juste nécessaire de relier deux résultats entre eux. Réciproque du théorème de Pythagore ; calcul segmentaire pour LM = 5 + 5/2 = 15/2 ; application du théorème de Thalès (LN/7,5 = 15/2/10) ; puis application de la réciproque. Le premier résultat, TLI est un triangle rectangle, n'est pas réutilisé par la suite. U.G.S
.

Type6



Des initiatives sont à prendre dans le type (7). Les difficultés sont engendrées par la complexité de la question, par le domaine de contextualisation. Il est nécessaire de changer de cadre pour parvenir à ses fins. Il faut raisonner, relier des résultats entre eux et c'est à la charge de l'élève
TR = 5, 5 - 3, 3 = 2, 2 ; RG = $(2,2)/(3,3) \times 2,4$.
x + y = 4, 5 et TA/TG = 3,3/2,2, soit encore
2TA - 3TG = 0 U.P

Type 7



Calculer TR, puis RG. Donner la valeur de TA/TG.
TA = x, TG = y. Démontrer que (x , y) est solution du système $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y = 4,5 \end{cases}$. En déduire TA et TG.

Ce que les ouvrages de 4ème et 3ème ont en commun au sujet des activités

Le contexte mathématique

Situation de référence, ostension.

Les termes "observe", "mesure", "compare", "évaluer", sont répétés plusieurs fois dans le chapitre consacré au théorème de Thalès de nombreux ouvrages. Cela caractérise bien une conception précise de l'apprentissage dans laquelle l'enseignant a, au préalable, sélectionné ce qui est à voir dans un premier temps, par l'élève, et à observer, à vérifier dans un second temps. Nous pouvons penser qu'il s'agit là d'une présentation par ostension qui prend appui, entre autre, sur des figures relevant de l'illustration et de modèles qui ne sont pas à l'échelle.

De plus, il est souvent explicitement demandé aux élèves de se référer aux dessins pour y lire des propriétés telles que le fait qu'un point se trouve entre deux autres ou est extérieur à un triangle, que trois points soient alignés dans le même ordre ou que l'on demande explicitement, en lisant sur un quadrillage, d'évaluer une certaine donnée. Que signifie mathématiquement pour l'élève "être entre A et M" ou "dans le même ordre" ? De même, "en lisant sur le quadrillage, évaluer..." apparaît cinq fois. Ces expressions rendent d'autant plus flou la démarcation qui doit être faite entre une conjecture, qui bien sûr est fondée sur une interprétation des dessins, et une propriété démontrée.

Notons enfin que la propriété réciproque qui est présentée dans les ouvrages et dans les préparations de cours n'est pas la réciproque de la propriété directe, et ce pour deux raisons. Il y a souvent égalité de deux rapports dans la réciproque contre trois dans le théorème direct. De plus, les prémisses de la propriété réciproque font également apparaître la position des points A, M, B et A, N et C, alors que ce détail est évidemment absent du théorème direct. Enfin, que ce soit dans les ouvrages ou dans les préparations de cours, il est très rarement évoqué le fait que le théorème de Thalès direct peut servir à démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

Les figures représentant situation de Thalès sont le plus souvent des figures prototypes I et II.

Le statut de la notion.

Dans tous les ouvrages analysés au sujet du théorème de Thalès, il n'y a pas introduction d'un nouveau formalisme. La propriété introduite n'unifie pas des notions dispersées. La propriété est présentée directement et pas vraiment comme extension de notions déjà introduites, comme cela pourrait être. Pour cela, le cas du partage de deux côtés d'un triangle par deux parallèles au troisième côté pourrait permettre d'aboutir au cas du partage en quatre, cinq puis à une généralisation pour les rapports de deux entiers.

Une analyse lexicale nous a permis de noter que l'aspect proportionnalité n'est pas clairement apparente dans de nombreux ouvrages et dans de nombreuses préparations de cours de professeurs. Les différentes approches que l'on peut avoir de ce concept sont très peu présentées ; le terme même de "proportionnalité" est très peu utilisé alors que les programmes insistent là dessus. Bien souvent, seules les égalités de trois rapports sont données, sans pour autant que ce résultat soit rattaché explicitement à la proportionnalité.

Les concepteurs de l'ouvrage Bordas rédigent un théorème en employant le terme de "proportionnalité", mais dans la pratique, la version "égalité de trois quotients" est préférée. L'interprétation de l'égalité des trois rapports en termes de proportionnalité est à la charge de l'apprenant, sauf dans l'ouvrage "cinq sur cinq" niveau $4^{ème}$.
Le terme de triangle est très souvent employé, même au niveau troisième. Actuellement, c'est le théorème de Thalès sous l'approche homothétie qui prévaut dans l'enseignement au collège.

Le niveau de mise en fonctionnement.

Dans tous les ouvrages de quatrième, les mises en fonctionnement sont indiquées. Il s'agit de contextualisations simples locales, sans travail réel de reconnaissance préliminaire, sans adaptation. Les étapes sont toutes détaillées. Le niveau de mise en fonctionnement de la part de l'élève est donc très souvent technique même s'il est parfois d'un niveau de connaissances mobilisables.

En consultant les ouvrages de quatrième, comme ceux de troisième, nous pouvons constater que les différents concepts qui pourraient éventuellement relever de la même théorie, c'est à dire la mesure des angles, le théorème de Thalès et la mesure des aires, ne sont pas liés entre eux.

Analyse des tâches prescrites.

Lorsqu'il y a des étapes, elles sont explicites et alors, les questions sont liées. Sauf exception très rare, aucune initiative n'est laissée aux élèves dans les activités quatrième. Les énoncés sont très fermés. Aucune conjecture, aucune modélisation ne sont à faire. Les méthodes de lecture sont imposées. Il n'y a pas de choix d'outil ou de méthode à faire. La plupart du temps, ils sont imposés. Les ouvrages étudiés ne placent généralement pas de chapitre avant le théorème de Thalès. Aucune démonstration n'est proposée en troisième sauf pour la figure dite papillon pour laquelle la symétrie centrale est employée dans les ouvrages Pythagore, Cinq sur Cinq et Dimathème et pour le théorème réciproque où, après avoir tracé une parallèle l'égalité du type AN = AN' permet aux auteurs du Transmath de conclurent que les points N et N' sont confondus sans plus de détails. Un ouvrage comme Bordas propose de démontrer la réciproque dans les deux cas où les rapports sont égaux à ½ puis ¼. L'application du théorème de milieux permet de conclure. Certains ouvrages, comme Cinq sur Cinq, sur des cas choisis de figures, demandent de constater l'importance de la position respective des points associée à l'égalité de certains rapports pour pouvoir conclure au parallélisme de deux droites. La plupart des livres au niveau troisième, comme Bordas, Dimathème, demandent de prendre des mesures sur des dessins et de constater des égalités de rapports. La démonstration dite euclidienne par les aires et l'algèbre est effectuée sans questionnement dans un ouvrage, Cinq sur Cinq, en toute fin de chapitre et à titre "d'information".

En revanche, dans les manuels de la classe de quatrième, la propriété de Thalès est démontré dans quelques ouvrages comme ceux de Pythagore Bordas, Cinq sur Cinq et Transmath, en partie uniquement, puisque la démonstration complète n'est pas au programme, Cette démonstration concerne le cas du partage d'un côté d'un triangle en trois segments de même longueur sans passer aux cas suivant d'un partage en quatre puis cinq et s'effectue grâce aux théorèmes des milieux dont les démonstrations relèvent de résultats sur le parallélogramme abordés en classe de cinquième. L'objet propriété de Thalès permettrait, en quelque sorte, un renouvellement ou un prolongement didactique en classe de quatrième, par le passage du théorème du milieu au théorème de Thalès, et en classe de troisième, par l'approfondissement et le prolongement du théorème abordé en quatrième, ce qui n'est pas vraiment le cas.

Sur l'ensemble des livres de niveau quatrième, le théorème de Thalès est un élément technologique qui justifie une fois (Nouveau Pythagore) l'introduction du cosinus dans un triangle rectangle et sert uniquement à cela. Ne pouvant pas considérer que ce théorème relève, dans ces ouvrages, d'une théorie, l'organisation des propriétés qui en découlent, en fait il n'y en a qu'une, est encore locale. Aucune organisation régionale et encore moins générale, par rapport à l'utilisation qui est faite du théorème et par rapport à sa propre démonstration et introduction, n'est à relever. En ce qui concerne l'influence sur l'économie du système didactique au niveau troisième du théorème de Thalès, ce dernier est uniquement dans le chapitre consacré à l'espace, dans le chapitre Pyramide et Cône. L'objet théorème de Thalès qui pourrait être au centre du système didactique dans les deux classes, ne l'est pas.

L'étude de ces différents ouvrages va, à présent au cours du chapitre troisième, être complétée par l'analyse de préparation de cours de professeurs.

CHAPITRE 3

ANALYSE DES PREPARATIONS DE COURS

Nous précisons pour commencer que nous avions demandé à tous les professeurs de bien vouloir nous communiquer, en sus de leurs préparations de cours, la répartition entre les différents moments, les progressions et la structure du cours ainsi que les temps associés. Malheureusement, ces informations n'ont pas toutes été communiquées.

I. Analyse du cours du premier enseignant

I.1 Analyse des activités et du cours

Le premier professeur enseigne au Collège Martin Luther King de Villiers le Bel et a moins de cinq ans d'ancienneté. Le cours du niveau 4ème (Annexe II 1, a) débute par l'activité 1 du Nouveau Pythagore P134. La première séance (1 heure) consiste à appliquer le théorème des milieux dans le cas où un côté d'un triangle est partagé en trois segments de même longueur. Il s'agit de l'étude d'un cas particulier que nous avons déjà analysé et sur lequel nous ne revenons pas. Dans la suite de la séance, les élèves doivent procéder à ce que le professeur appelle une étude expérimentale. Ils doivent tracer un triangle ABC d'abord dans un cas où l'angle A et aigu et dans un autre où A est obtus. Des mesures directes sont prises en doivent être comparées. Cela correspond à ce que nous avons pu trouver dans l'activité 3 du Dimathème. Nous remarquons simplement à quel point les deux figures tracées par le professeur dans sa préparation est une figure prototype I.

La seconde séance consiste à rédiger ce que le professeur appelle " le petit théorème de Thalès". L'aspect proportionnalité est bien mis en évidence dans l'énoncé. Les élèves doivent ensuite résoudre deux exercices d'application. L'un consiste à calculer une longueur et l'autre à montrer que ce théorème permet de conclure parfois que deux droites ne sont pas parallèles. Une vingtaine d'exercices ont été résolus sur sept séances. Dans la progression du cours sur l'année, la propriété n'est pas employée pour introduire une notion.

Au niveau 3ème, la première séance (1 heure) commence par activité (Annexe II 1, b) reprend exactement l'activité 3 du Nouveau Pythagore 3ème. Notons que l'énoncé fait apparaître un triangle, ce qui ne correspond pas exactement au programme. Nous pouvons encore remarquer que les figures tracées sont des prototypes I et II. Vient ensuite une application classique de calculs de longueurs sur une figure prototype II. Trois exercices sont donnés à résoudre à la maison. Comme pour les ouvrages, aucune situation-problème, aucune situation a-didactique ne sont présentes. La seconde séance consiste à corriger les exercices et à appliquer le théorème de Thalès au partage d'un segment et au non parallélisme de deux droites. Les figures sont des figures représentatives III. Trois exercices sont ensuite résolus en classe et trois autres du livre sont donnés à résoudre à la maison. Au cours de la troisième séance (1 heure), ils sont corrigés et le théorème réciproque est introduit. Pour cela, le professeur se réfère entièrement à l'activité 4 du Nouveau Pythagore. L'énoncé fait apparaître un prototype I. L'enseignement de ce professeur est très étroitement lié aux activités d'un ouvrage. Une application est proposée ensuite dans une figure prototype I du groupe I donc congruente. Deux exercices sont résolus sur place et trois autres sont donnés à faire à chez soi. Un paragraphe sur les agrandissements et les réductions vient compléter ce chapitre. Dans toute la progression sur l'année de troisième, il s'agit d'ailleurs du seul cas où le théorème de Thalès est utilisé en tant qu'outil pour introduire ou expliquer une notion. L'analyse du contrôle permet d'approfondir notre approche (Annexe II 1, c).

I.2 Analyse du contrôle

I.2.1 Exercices 1 et 2

Pour l'exercice n° 1, les mises en fonctionnement mettent en jeu des applications immédiates du théorème de Thalès. Il n'y a aucun travail préliminaire de reconnaissance. Nous nous trouvons au niveau technique, même si au niveau de l'orientation de certaines figures et par rapport à la distribution des longueurs, le deuxième dessin est une figure pathogène I' Groupe II et que l'orientation de la dernière et la distribution des longueurs (Groupe IV bis) ne sont pas communes. La première figure est une figure représentative I du groupe III pour la distribution des longueurs.

Pour l'exercice n° 2, la figure est un prototype II du groupe D. Les variables de cette figure sont standards. Le degré de complication va tout de même en augmentant. Pour l'enseignant, il s'agit de faire appliquer le théorème de Thalès en faisant varier trois variables didactiques : l'orientation de la figure, la distribution des longueurs et le nombre de longueurs à calculer. Les questions sont entièrement fermées, indépendantes et sans étapes. Aucune initiative n'est laissée à l'élève. Même pour l'exercice 2 où deux longueurs sont attendues, nous pourrions croire qu'un choix d'ordre est à faire ce qui en fait importe peu. Il s'agit de calculs par une application directe du théorème de Thalès. Il n'y a pas d'éléments implicites dans les énoncés. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de problème, mais, en aucun cas, il n'y a lieu de conjecturer. Pour résoudre la tâche, il faut appliquer, à chaque fois, le théorème de Thalès qui n'est relié, dans le cours du professeur, à aucune technologie, ni aucune théorie. Il n'y a rien à introduire ; aucune interprétation, ni de mises en relations ne sont attendues. Il n'y a pas de connaissances disponibles supposées. Il s'agit d'un exercice d'évaluation jouant sur les variables didactiques d'orientation et de distribution des données liées aux figures. En nous référant à notre partie consacrée aux variables didactiques, on peut tout de même s'attendre à des erreurs dans les rapports littéraux pour la deuxième figure et également dans la mise en équation ($25/5 = x/3$). Pour la troisième figure, de par la distribution des longueurs, la mise en équation doit poser problème. Malgré la hiérarchie liée à la distribution des longueurs et à l'orientation de dessins, ces deux exercices relèvent du niveau de mise en fonctionnement technique. Ils correspondent à des exercices didactiques de l'Univers des Gammes pour le deuxième et des Gammes Soutenues pour la deuxième figure du premier exercice dont la distribution des longueurs et l'orientation du dessin étant pathogènes.

I.2.2 Exercice 3

Il y a deux étapes dans la question et elles sont liées. La question est fermée et la méthode s'impose. Il s'agit d'un exercice particulier pour lequel la mise en fonctionnement est objet. Il s'agit d'une application directe du théorème de Thalès, pour aboutir à deux calculs de mesures de longueurs par l'intermédiaire d'une question indirecte (Périmètre). Il n'y a pas réellement d'implicites dans l'énoncé. Pour utiliser le théorème il y a lieu de contextualiser et de réappliquer deux fois le théorème. Il faut juste interpréter le calcul du périmètre d'un triangle dans un contexte particulier lié à la propriété de Thalès.

Pour entrer dans la tâche, il n'y a pas lieu de conjecturer, ni de modéliser, ni d'interpréter. Pour résoudre la tâche, il y a lieu d'introduire deux étapes et de répéter un argument. D'après le théorème de Thalès, on a : $3{,}8/BC = 3{,}2/8$; $4/AC = 3{,}2/8$. Puis, le calcul du périmètre suit. La seule connaissance disponible supposée est le périmètre du triangle.

Pour le professeur, il s'agit de faire travailler, de familiariser l'élève sur des questions indirectement liées au théorème étudié. L'élève doit trouver les longueurs qu'il doit calculer, ce qui est facilité par le contexte.

I.2.3 Exercice 4

Les mises en fonctionnement sont encore indiquées, ou implicitement indiquées par la forme de l'énoncé, mais dépassent l'application simple d'une propriété à la fois. Ces mises en fonctionnement nécessitent d'adapter ses connaissances, d'articuler des informations et d'appliquer deux fois le théorème de Thalès. Il faut mettre en relation des informations et des résultats. Il y a plusieurs étapes et les questions sont liées. Seule la dernière question laisse l'initiative dans le choix de la méthode. Les méthodes ne sont pas indiquées, mais elles s'imposent. Il y a tout de même un choix d'outils à faire. L'énoncé porte sur deux théorèmes et sur une caractérisation du rectangle. A ce sujet, il y a des connaissances disponibles supposées : le théorème réciproque de Pythagore, une caractéristique du carré. La production demandée est à la fois des calculs numériques et à la fois deux petites démonstrations (carré et triangle rectangle). Pour entrer dans la tâche, l'élève doit reconnaître un type de questions et un type de justifications. Seules deux informations sont à mettre en relation par un raisonnement simple ($AE = 7 - 4$; GFEA carré, donc $GF = AE = 3$ et ainsi $BF^2 = BG^2 + GF^2$, soit ... ; ou $BF/8{,}75 = 3/7$).
Pour résoudre la tâche, un simple calcul segmentaire permet d'obtenir AE. Puis, le théorème de Thalès est nécessaire pour calculer EF : $EF/5{,}25 = 4/7$. Ensuite, caractériser le rectangle par le fait qu'il suffit d'avoir un parallélogramme avec un angle droit pour avoir ce type de quadrilatère est nécessaire pour répondre à la question 4.
Pour la dernière question, il est nécessaire d'introduire des étapes après avoir choisi une méthode : soit par application du théorème de Thalès : $BF/8{,}75 = GF/ 7$; il faut donc argumenter ici par $GF = AE = 3$, car GFEA est un carré ; soit par application du théorème de Pythagore : $BF^2 = BG^2 + GF^2$ et $BG = 5{,} 25 - EF$ $GF = AE = 3$. Ainsi, pour obtenir BG, il faut effectuer un calcul intermédiaire dans lequel EF, calculé précédemment, est employé. Donc, par rapport à la première méthode, d'une part celle-ci présente un calcul supplémentaire et de plus une longueur pour laquelle une erreur peut être commise. Nous pouvons attendre une absence de justifications pour démontrer qu'AEFG est un carré ou de mauvaises justifications, car le dessin effectué par le professeur pourrait induire les élèves en erreur puisque AEFG n'est pas un carré. Nous pouvons également nous attendre à une absence de justification de l'égalité $GF = AE = 3$. Le degré de complication de 1 à 5 est de 3 et celui de nouveauté de 3 également.
L'enseignant teste la disponibilité, pour les unes (Pythagore, rectangle), et la mobilisation pour les autres, de certaines notions (Thalès) dans un contexte où les questions et les outils sont multiples. Le professeur ne ferme pas totalement toutes les questions, notamment la dernière.

II. Analyse du cours du deuxième enseignant

II.1 Analyse des activités et du cours

La préparation suivante se fonde uniquement, au niveau 3ème et 4ème, sur la résolution d'exercices proposés par un professeur du Collège Léon Blum à Villiers le Bel. Aucune activité introductrice n'est effectuée. Notons que toute la préparation nous a été communiquée. Au niveau 3ème, l'esprit du programme, quant à la rédaction du théorème, est respecté. L'énoncé débute à l'aide de deux droites et non grâce à un triangle comme en 4ème.

Viennent ensuite trois "configurations de Thalès". Ces trois figures sont encore une fois des prototypes I et II. Une application sur une figure prototype II du groupe D, donc l'orientation et la distribution des données sont types, est alors proposée. La suite de la séance se résume à chercher des exercices du livre.
Le paragraphe II traite de la réciproque qui est abordée dans la séance suivante (1 heure). La version est toujours fondée à partir de deux droites sécantes, mais les figures obtenues sont toujours des prototypes II. Les remarques qui ont été faites dans l'analyse des ouvrages et même dans notre partie épistémologie au sujet de l'incompatibilité du théorème direct et de sa réciproque rédigés de cette façon sont encore valables ici. Une mise en garde, fondée sur un exemple, est faite pour montrer l'importance de l'ordre des points.
Un exercice type, dont la rédaction est donnée, sert d'illustration pour mettre en évidence le fait que "pour montrer que deux droites ne sont pas parallèles, on n'utilise pas la réciproque du théorème de Thalès".
Une vingtaine exercices d'applications, tirés de l'ouvrage "Dimathème", sont proposés tout au long de ce chapitre. L'effet de non construction de la fonctionnalité du théorème de Thalès dans le méso-espace et par rapport à la proportionnalité est encore plus accentué ici que dans la préparation précédente. Seule l'ostension assumée structure cette préparation. Une autre idée forte est celle de graduation de l'apprentissage. Au vu du nombre d'exercices traités en classe, cela se traduit par des applications successives, répétées et nombreuses, comme si tous les cas de figure, tous les exercices types, devaient être abordés en cours avant le contrôle.

En quatrième, la rédaction de la préparation de cours est du même type. Nous ne nous étendons donc pas sur son analyse. Passons maintenant à l'analyse du devoir surveillé de la classe de 3ème (Annexe II 2, b). Nous commençons par les exercices 1 et 3.

II.2 Analyse du contrôle

II.2.1 Exercices 1 et 3

Aucune initiative n'est laissée à l'élève. Les méthodes s'imposent d'elles-mêmes. Il s'agit d'exercices particuliers où les mises en fonctionnement sont objets. L'énoncé porte, pour le premier exercice, sur un théorème et pour le troisième, sur une méthode. Il s'agit d'applications directes d'un théorème et d'une technique de construction des points partageant une droite dans un rapport donnée et un segment dans un autre rapport donné. En aucun cas, il y a lieu de sélectionner de l'information, d'introduire quelque chose, d'interpréter ou de mettre en relation. Les productions demandées sont, d'une part, une démonstration par l'intermédiaire de calculs numériques, et, d'autre part, des constructions. Un implicite existe dans l'exercice 3. On ne demande pas, en effet, de démontrer que les constructions répondent aux questions. Il y a lieu de connaître un type de problème. Aucun changement de cadre, ni de point de vue ne sont à effectuer. Pour résoudre la tâche de l'exercice 1, l'élève doit calculer séparément AB/AC = 5/8 et AD/AE = 10,5/16,8. Pour démontrer que AD/AE = AB/AC, plusieurs méthodes s'offrent à l'élève. Mais cette résolution dépend des méthodes abordées en classe. $(8 \times 10{,}5 = 5 \times 16{,}8)$ ou 10,5/16,8 = 105/168 = $21 \times 5/21 \times 8$ = 5/8 simplement 5/8 = 0,625 et 10,5/16,8 = 0,625. Pour l'exercice 3, l'élève doit reproduire deux constructions abordées en classe. Ces techniques sont liées au théorème de Thalès. A la seconde question, l'oubli de l'un des points M ou N est tout à fait envisageable.

Aucune connaissance disponible n'est supposée. Les mises en fonctionnement sont implicitement indiquées par la forme simple des énoncés. Elles mettent en jeu des applications immédiates du théorème réciproque de Thalès et de l'une des applications du cours sur le théorème direct. Il s'agit de contextualisations simples, locales, sans étapes et sans réel travail préliminaire de reconnaissance. Le niveau de mise en fonctionnement visé est le niveau technique. Le degré de complication de 1 à 5 est de 2 et le degré de nouveauté de 1. Les deux exercices relèvent de l'Univers des Gammes.

II.2.2 Exercices 2 et 4

Les questions sont fermées et sont liées. Les méthodes s'imposent d'elles-mêmes. Il s'agit, dans les deux cas, d'exercices particuliers contextualisés. Les situations ne sont pas vraiment inédites. Les types de raisonnement en jeu sont des applications directes du théorème de Thalès et de la réciproque ; seuls des calculs numériques sont utiles. Aucun changement de point de vue, aucune adaptation, aucune sélection, aucune mise en relation ne sont nécessaires. La figure dans laquelle s'applique le théorème direct est un prototype avec une répartition des mesures du Groupe III et pour le théorème réciproque c'est un prototype II. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de question et un type de justification. Aucun réel choix de méthode n'est nécessaire. Dans l'exercice 2, pour résoudre la tâche, il faut appliquer le théorème de Thalès afin de calculer AG : AG/3 = 5/(5 + 4) et pour FG : FG = AG - 3, puis, le théorème réciproque. Pour résoudre l'exercice 4, il faut appliquer le théorème de Thalès : AD/AB = AE/AC ; AD/3,5 = 4/6. Puis la réciproque : CA/CE = 6/10 = 3/5, CB/CF = 9/15 = 3/5, et de nouveau théorème de Thalès pour calculer EF : 7,5/EF = 6/10. Il n'y a pas lieu d'introduire des étapes. Mais il y a lieu, pour l'exercice 4, de répéter un argument. Les deux exercices sont très proches. Il n'y a pas de connaissances disponibles supposées. Les mises en fonctionnement sont encore indiquées, dépassent l'application simple d'une propriété à la fois et nécessitent d'utiliser plusieurs choses différentes. Il s'agit du niveau de connaissances mobilisables. Le degré de complication de 1 à 5 est de 2 et le degré de nouveauté est aussi de 2.

Il s'agit, pour l'enseignant, de proposer deux exercices relevant de l'Univers des Gammes Soutenues, et mélangeant le théorème direct et la réciproque.

Nous pouvons conclure que le contrôle proposé contient des exercices relevant le plus souvent du niveau des connaissances techniques et peu des connaissances mobilisables. Les exercices appartiennent presque tous à l'Univers des Gammes, à la rigueur des Gammes Soutenues mais en aucun cas de l'Univers des Recherches Conséquentes ou des Problèmes.

La préparation de cours suivants provient d'un autre professeur du Collège Léon Blum de Villiers le Bel.

III. Analyse du cours du troisième enseignant

III.1 Analyse des activités et du cours (Annexe II 3, a)

Comme nous pouvons rapidement le constater, la première activité correspond à l'activité 3 page 128 du nouveau Pythagore qui consiste à démontrer le théorème de Thalès pour la "figure papillon" en usant de la symétrie centrale. Cela est réalisé au cours de la première séance (1 heure). Les figures sont des prototypes I et II. L'énoncé du théorème, au niveau troisième, se fonde sur deux droites sécantes conformément au programme. Plusieurs exercices sont ensuite proposés sur le partage d'un segment dans un rapport donné et la construction du centre de gravité d'un triangle.

Vient ensuite à la séance suivante (1 heure) la réciproque du théorème de Thalès, sans activité introductive, ni démonstration. L'énoncé part également de deux droites sécantes. Les commentaires sur les prémisses ont déjà été faits. Deux exercices types, explicitant comment on peut

démontrer que deux droites sont parallèles ou pas, suivent alors ainsi que deux exercice un peu plus complexes sur le parallélisme, pour l'un dans une figure un peu plus complexe (juxtaposition de deux figures "gigognes"), et pour l'autre le calcul d'une longueur intermédiaire étant nécessaire et non indiquée.
L'enseignant privilégie ici la résolution des exercices par rapport aux activités introductrices. Notons que le théorème de Thalès n'est employé en tant qu'outil dans la progression que dans le chapitre sur les agrandissements et les réductions. Passons à l'analyse, plus précise, des exercices qui composent le contrôle. Nous regroupons les exercices 2 et 4.

III.2 Analyse du contrôle (Annexe II 3, b)

III.2.1 Exercices 2 et 4

Même si dans l'exercice 4, la question est de la forme : "les droites (BC) et (RS) sont-elles parallèles ?", aucune initiative n'est laissée à l'élève. Les énoncés sont très fermés. Aucun choix d'outils n'est à faire. Il s'agit d'exercices particuliers pour lesquels les mises en fonctionnement sont objet. Il n'y a pas lieu de changer de point de vue, de sélectionner, d'introduire quelque chose. Les énoncés portent sur une méthode : MQ/MN = 10/12 ; MR/MP = 7,5/9 ; MQ/MN = MR/MP donc, d'après le théorème de Thalès, les droites (QR) et (NP) sont parallèles. La production demandée aux élèves est une démonstration à l'aide de calculs. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de problème et un type de justification. Pour résoudre la tâche, il faut appliquer, après coup, le théorème réciproque de Thalès pour l'exercice 2 et la "contraposée" pour l'exercice 4 pour lequel la figure est un prototype IV. Aucune étape n'est à introduire. Les mises en fonctionnement, de niveau technique, mettent en jeu des applications immédiates du cours. Il s'agit de contextualisations simples, locales, sans étapes, sans réel travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptation. Le degré de complication de 1 à 5 est de 1 et celui de nouveauté de 1 également. Les risques de décalages résident dans l'emploi erroné du théorème réciproque à la place de la propriété directe pour démontrer que les droites (BC) et (RS) ne sont pas parallèles. Le professeur veut faire appliquer, de façon immédiate, des méthodes vues en cours.

III.2.2 Exercice 1

Il y a plusieurs longueurs à calculer, avec une étape à chaque fois. L'énoncé est très fermé et la méthode est implicite. Les questions ne sont pas inédites, mais la situation, par le biais du dessin, l'est assez. Il s'agit d'une application directe du théorème de Thalès et de calculs numériques par le biais d'une démarche. La figure correspond à deux figures prototypes II en position "tête bêche" qui sont congruentes.

Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de problème et un type de justification. Il n'y a pas lieu de choisir une méthode, ni un outil. Pour utiliser le théorème, il y a lieu de réappliquer plusieurs fois à la suite. $x/2 = 3/4$; $y/3 = 3/4$; $y/z = 3/7$. Les mises en fonctionnement ne sont pas indiquées, mais sont bien sûr implicites. Elles mettent en jeu des applications immédiates après avoir extrait une figure-clef de la configuration plus complexe. Il s'agit de contextualisations relativement simples, locales, avec un simple travail de reconnaissance de figure. Nous sommes au niveau technique, même si nous pouvons considérer que la figure est un peu plus complexe qu'à l'accoutumée pour le niveau technique. S'il avait été demandé aux élèves directement de calculer les longueurs x, y, z et t, cet exercice aurait fait partie de l'univers des recherches conséquentes. Mais cela n'est pas le cas donc il correspond à l'univers des Gammes

Soutenues. De par la relative complexité du dessin, le degré de complication de 1 à 5 est de 2 et celui de nouveauté de 2 également. Pour le professeur, il s'agit de faire réagir l'élève face à une configuration un peu plus complexe que celles rencontrées dans les applications immédiates du cours.

III.2.3 Exercice 3

Une certaine initiative, pour la deuxième question, est laissée à l'élève. Les méthodes ne sont pas indiquées. Deux méthodes sont possibles et une est meilleure que l'autre plus longue. Un choix d'outils est à faire à la seconde question. La situation est relativement inédite. L'énoncé porte sur une démarche et une méthode. Deux théorèmes sont alors nécessaires, le théorème de Pythagore, et le théorème de Thalès. Il n'y a pas d'éléments implicites dans l'énoncé au niveau l'existence ou de l'unicité. Mais, il en existe sur ce qu'il y a à justifier. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de justification et d'information. Il n'y a pas lieu de conjecturer, ni de modéliser. Il y a lieu, par contre, de mettre en relation des résultats et des informations. Il est nécessaire également de choisir des outils et une méthode. Pour résoudre la tâche, il est nécessaire d'appliquer, à la question 1, le théorème de Thalès, en justifiant le parallélisme des deux droites (MK) et (IJ). IJKL est un rectangle dont les droites (LK) et (IJ) sont parallèles et de plus, les droites (MK) et (IJ) également : MK/7,5 = 1,5/4,5 ; MK = 2, 5. Pour la question suivante, deux méthodes sont possibles : le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OIJ : $OI = \sqrt{7{,}5^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{76{,}5}$. Une deuxième méthode serait, pour utiliser le calcul précédent, de calculer OM grâce au théorème de Pythagore : $OM = \sqrt{2{,}5^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{8{,}5}$ et de réappliquer le théorème de Thalès, pour calculer OI : $\sqrt{8{,}5}$/OI = 1,5/4,5, soit OI = (4,5/1,5) × $\sqrt{8{,}5}$. Pour utiliser les théorèmes, il y a lieu soit de réappliquer deux fois à la suite, après avoir mis en relation des informations, soit de perdre de l'information, le calcul de OI, puis d'identifier et d'appliquer le théorème de Pythagore. Il y a donc des initiatives à prendre ; le théorème de Pythagore est une connaissance supposée disponible. Les mises en fonctionnement dépassent l'application simple d'une propriété à la fois. Elles nécessitent d'articuler et de rapprocher deux informations différentes. Il s'agit du niveau des connaissances mobilisables. Le degré de complication de 1 à 5 est et de nouveauté de 2. Les risques de décalage peuvent provenir de la non justification du parallélisme des droites (LK) et (IJ) et de la non conservation de la racine carrée dans la deuxième méthode pour calculer la valeur exacte de OI.

L'enseignant a une volonté de mélanger plusieurs théorèmes, de laisser une initiative à l'élève se manifeste ici. L'exercice fait partie de l'Univers des Recherches Conséquentes.
La préparation de cours suivante a été produite par un autre professeur du Collège Léon Blum de Villiers le Bel.

IV. Analyse du cours du quatrième enseignant

IV.1 Analyse des activités et du cours

Le cours niveau 4ème est tiré des activités 1 et 2 page 112 et 113 de l'ouvrage Transmath 3ème 1989 (Annexe II 4, a). Le cours niveau 3ème (Annexe II 4, b) se fonde également totalement sur cet ouvrage. Les figures prototypes I et II sont ici aussi présentes. Nous avons déjà analysé ces activités dans la partie épistémologie. Nous ne revenons pas dessus, sachant que les deux préparations de cours sont juste précédées de rappels sur "les proportions" et sur la notion de cosinus d'un angle. Notons que, malgré les changements de programme, ce professeur utilise toujours les mêmes activités, en les adaptant au niveau quatrième. Intéressons-nous à présent au contrôle, niveau troisième, correspondant (Annexe II 4, c).

IV.2 Analyse du contrôle

IV.2.1 Exercices 1 et 3

Une seule question, qui est fermée et pour laquelle une seule méthode peut être utilisée compose chaque exercice. Il s'agit d'exercices particuliers relevant de la mise en fonctionnement outil de la notion. L'énoncé porte sur une démarche liée à un théorème. Il s'agit d'une application directe du cours par l'intermédiaire de calculs numériques. Il n'y a pas d'implicite dans les énoncés. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de question associée à un type de justification. Il n'y a pas lieu de conjecturer, ni de modéliser, ni de faire des mises en relations, ni d'interpréter. Pour résoudre la tâche, il faut appliquer simplement le théorème de Thalès. La figure est une figure représentative III pour le premier exercice avec une distribution type groupe I et pour le second exercice la figure est une représentative IV de groupe D. Les distributions des longueurs les rendent donc congruentes. Pour rédiger, la production prévue est un calcul justifié par les prémisses du théorème de Thalès. Il s'agit de contextualisations simples, sans étapes, sans travail préliminaire de reconnaissances, sans adaptations. Nous sommes au niveau des connaissances techniques. Le degré de complication est de 1 et de nouveauté : 1. Ces exercices relèvent de l'Univers des Gammes.

IV.2.2 Exercice 2

La question, malgré les apparences, est fermée. La méthode n'est pas indiquée, mais s'impose d'elle-même, d'après ce qui a été vu en cours. La question et la situation sont classiques. La production demandée est une démonstration après un calcul numérique. Il n'y a aucun implicite dans l'énoncé. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de question, puis un type de justification. Pour résoudre la tâche, il faut appliquer le théorème de Thalès par "contrapostion". Il n'y a pas lieu d'introduire plusieurs arguments à la fois ou de répéter un argument. Il y lieu d'appliquer une méthode, puis un théorème dans une figure prototype I : IR/IS = 3/5 ; IT/IU = 2,7/4,2. $3 \times 4{,}2 = 12{,}6 ; 5 \times 2{,}7 = 13{,}5$, donc IR/IS $\neq$ IT/IU (ou à la machine 3/5 = 0,6 ; 2,7/4,2 $\approx$ 0,642). Donc, d'après le théorème de Thalès, les droites (RT) et (SU) ne sont pas parallèles, car si elles l'étaient, nous aurions IR/IS = IT/IU. Il n'y a pas de connaissances disponibles supposées. Il s'agit de contextualisations simples, locales, sans étapes ce qui correspond au niveau technique. Les risques de décalage peuvent provenir du théorème cité pour conclure mais également comme nous avons pu nous en rendre compte dans notre partie consacrée aux variables didactiques, à la répartition particulière des longueurs sur le dessin. Le degré de complication de 1 à 5 est de 2, le degré de nouveauté de 1. Comme pour les deux premiers exercices analysés, le professeur ferme totalement la question et teste l'élève sur des exigences certes minimales mais un peu plus conséquentes de par la variable liée aux longueurs. Cet exercice fait tout de même partie de l'Univers des Gammes.

IV.2.3 Exercice 5

Les mises en fonctionnement sont encore implicitement indiquées, mais dépassent l'application simple d'une propriété à la fois. Elles nécessitent d'utiliser plusieurs choses différentes et de rapprocher deux informations. Les deux questions ne sont pas liées, mais chacune est composée d'une étape. Aucun choix d'outils n'est à faire. L'énoncé, dans sa globalité, est fermé.

L'énoncé porte sur deux méthodes et deux démarches fondées sur un théorème. Les types de raisonnements sont des applications directes et par contraposition d'un théorème. La production demandée est par conséquent deux "démonstrations" fondées sur deux calculs numériques.

Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître deux types de questions avec deux types de justifications. Il n'y a pas lieu de choisir un outil ou une méthode. Pour résoudre la tâche, il faut appliquer le théorème de Thalès (6/7,5 = AF/9) et un raisonnement relevant en fait d'une contraposition du théorème. Il y a lieu, pour utiliser ce théorème, d'appliquer en contextualisant, en ayant, auparavant, identifié le type de question et la méthode adoptée. Il ne faut, en aucun cas, changer de point de vue, transformer, sélectionner, introduire quelque chose ou mettre en relation plusieurs informations. Les mises en fonctionnement nécessitent d'utiliser plusieurs choses différentes et de rapprocher deux informations. Le risque de décalage pourrait venir de la propriété invoquée pour conclure à la question 2). Le degré de complication de 1 à 5 est de 3 et de nouveauté de 1. Le niveau de fonctionnement visé est le niveau des connaissances mobilisables. L'exercice fait partie de l'Univers des Gammes Soutenues.

Le professeur a voulu tester l'élève en mélangeant deux types de questions liées au théorème de Thalès. De plus, ces deux questions se réfèrent en fait à deux figures différentes.

IV.2.4 Exercice 4

Il y a des questions qui décomposent les étapes. Une initiative est laissée à l'élève pour conjecturer et trouver une preuve au sujet du triangle ABC. Une initiative est possible. Il y a un choix à faire à la question 2 quant à l'outil à utiliser.

L'énoncé porte sur deux théorèmes associés à une démarche. Deux applications de théorèmes sont à faire, mais avant la dernière, un raisonnement, pour prouver le parallélisme des droites (AB) et (CD) est à élaborer. La production demandée est un calcul numérique précédé de deux démonstrations, l'une liée à un calcul, l'autre à un raisonnement simple sur le parallélisme des droites (AB) et (DE). Mais il s'agit justement d'un élément implicite dans l'énoncé à propos de ce qui est à justifier.

Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître à la fois un type de justification et à la fois un type d'information. Il n'y a pas lieu de conjecturer, sauf peut-être, pour la question 2.
Une méthode et des outils sont à choisir. Pour résoudre la tâche, il faut trouver une méthode de construction de la figure. Il faut appliquer la réciproque du théorème de Pythagore. Puis, ABC étant un triangle rectangle en B, et la droite (DE) étant perpendiculaire à la droite (DC), les droites (AB) et (DE) sont parallèles, étant perpendiculaires à une même troisième. Il faut donc introduire des étapes avant de pouvoir appliquer le théorème de Thalès pour calculer DE. Il y a des initiatives à prendre : d'une part, pour trouver les étapes de construction de la figure, et, d'autre part, pour démontrer que deux droites sont parallèles et, surtout, pour penser à le prouver. Il y a un risque de décalage à ce niveau. Certains élèves peuvent oublier d'en faire la preuve. Il y a lieu de répéter plusieurs arguments à la fois et de gérer plusieurs variables. Il y a lieu, pour utiliser les théorèmes, de reconnaître et d'identifier. Il faut également mettre en relation et articuler plusieurs informations. Des connaissances disponibles sont attendues. Les mises en fonctionnement sont implicites, mais dépassent l'application simple d'une propriété à la fois. Elles nécessitent d'utiliser plusieurs choses différentes et d'articuler des informations ou des résultats. Cela

relève du niveau des connaissances mobilisables. Au vu de l'analyse des exercices des ouvrages, la situation n'est pas inédite mais elle fait partie de l'Univers de Recherche Conséquente. Le degré de complication de 1 à 5 est de 3 et de nouveauté de 2.

V. Analyse du cours du cinquième enseignant

V.1 Analyse des activités et du cours

La préparation de cours suivante nous a été communiquée par un professeur du Collège Martin Luther King de Villiers le Bel. La première séance (1 heure), (Annexe II 5, a) commence par un bref historique et par un rappel sur la proportionnalité. Vient ensuite, textuellement, l'activité 1 page 215 du livre "Nouveau Transmath 3ème". Rien n'a été changé dans contenu. Nous renvoyons le lecteur à l'analyse qui a déjà été produite à ce sujet.
L'énoncé du théorème prend place à la deuxième séance (1 heure) et correspond à celui qui apparaît au 1 page 217. L'aspect proportionnalité est clairement mis en avant :

> "Toute parallèle à l'un des trois côtés d'un triangle forme, avec les deux autres côtés, un nouveau triangle, dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à celles du premier".
> "Deux droites sécantes coupées par deux parallèles déterminent deux triangles dont les longueurs des côtés sont proportionnelles".

Les figures sont encore ici des prototypes I et II même si le professeur ne travaille plus dans le triangle. Le théorème des milieux apparaît ensuite comme un cas particulier. Viennent ensuite des exemples de calculs de longueurs.
Tout d'abord, le calcul d'une longueur dans une figure congruente mais pathogène I' puis dans un prototype II du groupe D.
Au cours de la séance suivante (1heure), il est proposé également le calcul d'une longueur dans une figure prototype I groupe II aboutissant à l'équation $12/(12 + x) = 9/(9 + 27)$. Un exercice fondé sur une figure plus complexe prend place en fin de séance. La résolution nécessite une double application du théorème de Thalès et la transitivité de l'égalité. Nous pouvons tout de même remarquer que les variables didactiques liées à la distribution des longueurs sur la figure sont testées plus souvent par ce professeur que les autres variables comme l'orientation ou la complexité de la figure par exemple.
Les activités introductrices reprennent à la séance suivante (1 heure). L'activité 1 page 216 du livre "Le Nouveau Transmath 3ème" est reprise et permet d'énoncer une propriété clairement adaptée pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles. Des applications aux calculs d'aires et à la construction de points partageant un segment en un rapport donné sont également proposées. La méthode est décrite pour un cas particulier ($AM = 2/3.AB$) et l'exercice résolu 3 de la partie "Les savoir-faire" est textuellement repris par la suite et plus exactement "L'essentiel 3 page 177 du livre décimale".

En ce qui concerne les aires, l'essentiel 1 de décimale est reproduit. Les activités introduisant la réciproque du théorème débutent par l'activité 2 2e du Nouveau Transmath, page 216. Le 3e ne convenant pas à l'enseignant, seul le titre est conservé et la conclusion. Le corps de l'activité est remplacé par l'activité 3 page 158 du manuel Bordas 3e. Une mise en garde, quant aux valeurs approchées, complète l'énoncé de la propriété qui reprend le n° 2 page 217 du Nouveau Transmath. Deux exercices, qui ne relèvent plus des activités introductrices, clôturent le chapitre. Les activités proposées par ce professeur, sont toutes tirées d'un ouvrage et ne sont, en aucun cas, modifiées dans leur rédaction. Le contrôle nous renseigne plus amplement (Annexe II 5, b). Seulement deux exercices concernent le théorème de Thalès.

V.2 Analyse du contrôle

V.2.1 Exercice 4

Les mises en fonctionnement sont relativement claires. Elles mettent en jeu des applications immédiates de théorèmes. Il s'agit de contextualisations simples, locales, sans étapes et sans travail préliminaire de reconnaissance, ni d'adaptation.

Il y a plusieurs questions indépendantes nécessitant une seule étape. Les questions sont fermées et les méthodes s'imposent d'elles-mêmes. Il n'y a pas de choix d'outils à faire. Les questions et la situation ne sont pas du tout inédites. L'énoncé porte sur un théorème et sur une méthode de résolution d'équation. Il s'agit à chaque fois d'une application directe et d'un calcul numérique.

Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de question. Aucun choix d'outils ou de méthode n'est à faire. Pour résoudre la tâche, il faut appliquer deux fois le théorème de Thalès. Il y a lieu, pour utiliser le théorème, de simplement appliquer, contextualiser. EH = 8 - 4, 8 ; IH/12 = 3,2/8 ; (15 - x)/15 = 3,2/8.

Il n'y a pas de réels risques de décalage, sauf, peut-être, pour la deuxième mise en équation liée à une distribution un peu compliquée (Groupe IV bis). Les mises en fonctionnement sont implicites et relativement claires. Elles mettent en jeu des applications immédiates de théorèmes. Il s'agit de contextualisations simples, locales, sans étapes et sans travail préliminaire de reconnaissance, ni d'adaptation. Il s'agit du niveau des connaissances techniques. Le degré de complication de 1 à 5 est de 2 et celui de nouveauté est de 1.

V.2.2 Exercice 5

Les questions ne sont pas liées entre elles et il n'y a pas d'étapes, sauf celles liées à l'application du théorème de Thalès. Il y a une modélisation à effectuer qui est implicitement demandée. La mise en fonctionnement est outil. La situation est assez "nouvelle". L'énoncé porte sur une modélisation à laquelle est appliquée une démarche de calcul. Deux applications directes du théorème de Thalès sont en jeu, ceci aboutissant à deux calculs numériques. Il y a lieu, pour utiliser le théorème, de s'adapter à la situation. Il ne faut pas changer de point de vue. Il n'y a pas de sélection ou de mise en relation à effectuer.

Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de problème et un type de justification. Il n'y a pas lieu de conjecturer, ni de changer de point de vue ou de registre. Par contre, il y a lieu de modéliser. La méthode et l'outil s'imposent. Pour résoudre la tâche, il faut appliquer, par deux fois, le théorème de Thalès.. Mise à part la modélisation, il n'y a aucune initiative à prendre. Les mises en fonctionnement nécessitent d'adapter ses connaissances et d'articuler des informations. Il s'agit du niveau des connaissances mobilisables. Le degré de complication de 1 à 5 est de 2 et le degré de nouveauté de 2. Le professeur tente de tester l'élève dans une situation où il est nécessaire de modéliser. Nous terminons par l'analyse d'une dernière préparation d'un professeur du Collège Georges Clémenceau, Paris 18e.

VI. Analyse du cours du sixième et dernier enseignant

VI.1 Analyse des activités et du cours

Une première activité (Annexe II 6, a) introduit la notion d'agrandissement réduction. Nous analysons plus précisément ce cours, par rapport aux cinq précédents, car ces derniers étaient le plus souvent tirés d'activités rédigées dans des ouvrages que nous avons déjà analysés. Une première séance (1 heure) est consacrée à l'agrandissement réduction de formes. La séance suivante (1 heure) consiste à travailler la proportionnalité abordée sous forme de tableau, d'égalité de rapports, du produit en croix et de la recherche de la quatrième proportionnelle. La troisième séance (1 heure) est consacrée au rappel du théorème de Thalès par l'intermédiaire du théorème des milieux qui est exhibé comme cas particulier de proportionnalité. Deux exercices sont également résolus en classe. La quatrième séance (1 heure) consiste à introduire le deuxième cas de figure. Trois heures ont été ensuite consacrées à la résolution de dix exercices. La sixième (2 heures) introduit la réciproque. Cinq heures ont été consacrées à la résolution et à la correction de onze exercices ainsi qu'à la correction d'un devoir maison.

VI.1.1 Activité et cours liés au théorème direct

La première séance est consacrée aux notions d'agrandissement - réduction et de forme. Le caractère objet de la proportionnalité est abordé. Le cadre est géométrique et numérique et le registre graphique. Le type de problème dont relève l'énoncé est l'étude, la description de configurations. Cela demeure au début un peu flou : "conservation des angles, des longueurs relatives..." mais la notion de proportionnalité est rapidement mise en avant par les élèves. Les élèves travaillent seuls ou en binôme.

Les problèmes de formes, d'agrandissement - réduction sont abordés avec les notions de proportionnalité, de coefficient multiplicateur, de $4^{ème}$ proportionnelle. L'intégration de l'ancien se fait de manière empirique, par l'observation des figures. Le degré de nouveauté : 2 (de 1 à 3). Cette activité 1 joue le rôle d'exemple générique qui permet de comprendre, après observation de la figure, le cas particulier du théorème de Thalès.

L'énoncé porte sur des analogies à remarquer et à observer pour en déduire un résultat. Il n'y a pas de réels raisonnements en jeu. Seule l'observation permet d'effectuer des calculs numériques. Il y a des étapes et les questions sont liées. Des initiatives semblent laissées aux élèves. Les questions sont relativement ouvertes, notamment en ce qui concerne les justifications pratiques. Un choix de méthode est à faire une fois le caractère de proportionnalité établi (4e proportionnelle, coefficient, opérateur...). L'exercice apparaît comme un exercice générique, décontextualisé. La production demandée est la lecture de dessin complétée à la fin par un calcul numérique. Pour rentrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type d'information. Il faut modéliser et mettre en relation des observations faites sur les dessins. Il faut également changer de registre (→numérique).

Pour résoudre la tâche, il faut introduire des étapes pratiques. Un lien doit être fait entre la conservation des angles, des rapports de longueurs, et le fait que deux figures ont la même forme. Il faut donc articuler plusieurs informations, faire une analogie. Il y a quelques initiatives à prendre. Différentes approches de la proportionnalité (tableau, opérateur, coefficient, 4e proportionnelle, fraction) sont supposées disponibles. Le niveau de fonctionnement visé est le niveau technique. Le degré de complication de 1 à 5 est de 3 et de nouveauté également de 3.

La séance prend place dans le cours de telle façon qu'elle apparaît comme une activité introductrice. Au cours de la troisième séance, il est effectivement montré que le théorème de Thalès relève des figures semblables en général. La notion est présentée aux élèves comme un cas particulier de notions déjà introduites.

Il s'agit d'un "simple" travail de reconnaissance. Le niveau est technique. Aucune technologie ni encore moins théorie ne vient justifier cette nouvelle technologie que constitue ce théorème. Même le théorème des milieux qui est rappelé dans les détails n'est pas employé pour justifier, même partiellement, le théorème de Thalès. La dialectique ancien nouveau n'est pas mise en valeur comme cela pourrait être le cas. Le professeur agit par ostension tout à fait assumée. L'énoncé prend place après la mise en relation de la figure particulière reliée au théorème avec ce qui a été abordé auparavant. La deuxième figure est introduite directement et le théorème est justifié grâce à la symétrie centrale et à certaines propriétés qui sont liées à cette Viennent ensuite des exercices d'application qui précèdent l'activité introduisant la réciproque du théorème de Thalès (Annexe II 6, b).

VI.1.2 Activité et cours liés au théorème réciproque

La place de la sixième séance dans le cours est une introduction à la réciproque. Une institutionnalisation est prévue à la fin de la séance.

Le caractère objet est abordé. Les notions font appel, à la fin de l'activité, au théorème de Thalès. Pour le non parallélisme de deux droites, "l'ancien" s'intègre au nouveau. L'activité tente d'épuiser tous les cas possibles des positions relatives des points les uns par rapport aux autres. Degré de nouveauté : 3.

La notion permet juste d'aborder autrement certains problèmes et elle est présentée directement, par ostension assumée. Pour l'établissement de la propriété réciproque, l'enseignant a recours à la seule observation des figures et au calcul de rapports. Il s'agit du niveau technique. Cette nouvelle technologie ne reçoit aucun renfort technologique pour l'étayer.

Les questions sont reliées et sont composées de plusieurs étapes. Une seule initiative est laissée aux élèves : le choix de la position des points dans la situation 3. L'activité est semi-ouverte. Une discussion est entamée, afin de parvenir aux conditions suffisantes pour avoir deux droites parallèles dans le contexte du chapitre. Seule l'observation et l'analyse des figures comptent. Il s'agit d'un problème générique et la mise en fonctionnement est objet. Le professeur veut généraliser grâce à une situation inédite. Il s'agit d'un raisonnement par analyse synthèse de cas de figure. La production demandée est la lecture de plusieurs dessins. Il est implicitement indiqué qu'aucune démonstration n'est demandée. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de faire des mises en relation et d'interpréter. Pour résoudre la tâche, aucun théorème n'est à choisir. Une seule initiative est à prendre pour étudier le cas 3 suivant la position relative des points. Les risques de décalage prévus par le professeur concernent à l'application de la réciproque au lieu du théorème direct lorsque les rapports ne sont pas égaux. Le niveau de mise en fonctionnement visé est le niveau technique. Le degré de complication de 1 à 5 est de 2 et celui de nouveauté de 2 également.

Le professeur veut faire réagir les élèves et les faire formuler. Les seules procédures attendues sont fondées sur l'analyse des situations pour parvenir de façon pragmatique à l'énoncé du théorème réciproque. Aucune validation n'est attendue. Passons maintenant à l'analyse du devoir surveillé (Annexe II 6, c).

VI.2 Analyse du contrôle

VI.2.1 Exercice 2

Les questions sont fermées et indépendantes. Les méthodes s'imposent d'elles-mêmes. La question et les situations ne sont pas du tout inédites. L'énoncé porte sur une démarche, un théorème. La production demandée est un résultat numérique, précédé d'un calcul numérique que l'on ne demande pas de justifier. Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type d'information. Il n'y a pas lieu de conjecturer, ni de modéliser. Aucune méthode, aucun outil ne sont à choisir.

Pour résoudre la tâche, il faut appliquer le théorème de Thalès, sans introduire d'étapes. Il y a lieu, pour utiliser le théorème, de contextualiser et de réappliquer plusieurs fois à la suite ce résultat. Notons que la première figure est représentative III avec une répartition des longueurs du groupe III, le deuxième et la quatrième figures sont des figures représentatives IV, c'est à dire également pratiquement des prototypes, avec des répartitions du groupe D qui les rendent congruentes. La troisième figure est un prototype I. Les seuls risques de décalage sont dans les mises en équation. Aucune transformation, aucune sélection ne sont à faire.($x/8 = 4/(4 + 3)$; $x/8 = 4/7$; $8/(8 + x) = 4/7$; $4/7 = x/(x + 8)$).

Les mises en fonctionnement sont, bien sûr, implicites et mettent en jeu des applications immédiates du théorème de Thalès. Il s'agit de contextualisations très simples, locales, sans étapes spécifiques et sans travail préliminaire de reconnaissance. Nous nous situons au niveau des connaissances techniques, bien que parfois l'orientation du dessin ou la distribution des longueurs nous permettraient de classer cet exercice dans l'Univers des Gammes Soutenues. Le degré de complication est de 2 et le degré de nouveauté de 1. L'enseignant teste manifestement l'élève sur la variable didactique, distribution des longueurs et résolution des équations.

VI.2.2 Exercice 3

Il y a plusieurs questions, dont certaines sont reliées entre elles et il y a souvent plusieurs étapes. Des initiatives sont laissées à l'élève à la question 2. Les méthodes ne sont pas indiquées. Pour le calcul de RB, deux méthodes sont possibles. Il y a le choix des outils à utiliser.

Il y a lieu, pour utiliser les théorèmes : de réappliquer plusieurs fois à la suite, d'identifier et d'appliquer, d'interpréter et de mettre en relation ; il y a lieu d'articuler plusieurs informations. Les types de raisonnements mis en jeu relèvent à la fois d'une application directe, aboutissant à des calculs numériques et à la fois de la logique élémentaire pour démontrer, par exemple, que les droites (AG) et (RB) sont parallèles. La production demandée est un résultat numérique, mais porte également sur une démonstration devant prouver et justifier les calculs numériques. Il y a des éléments implicites dans l'énoncé, notamment sur ce qui est à justifier (parallélisme des droites (AG) et (RB) avant d'appliquer le théorème de Thalès).

Pour entrer dans la tâche, il y a lieu de reconnaître un type de justification et un type d'information. Il faut faire des interprétations et des mises en relations.

Pour résoudre la tâche, il faut appliquer le théorème de Thalès, sa réciproque et le théorème de Pythagore. Il y a lieu d'introduire des étapes et de développer plusieurs arguments à la fois. AGE est un triangle rectangle, car ce triangle est inscrit dans un cercle et [AE] en est un diamètre. D'après le théorème de Pythagore : $AE^2 = AG^2 + GE^2$. Donc, $GE^2 = 25 - 16$;
$GE = 3$. ERB est un triangle rectangle pour la même raison que précédemment et ainsi les droites (AG) et (RB) sont parallèles, puisqu'elles sont perpendiculaires à une même troisième. Le risque de décalages entre activités attendues et tâches prescrites réside justement dans une absence de

justification du parallélisme de ces deux droites. D'après le théorème de Thalès, on a : x/3 = 3/5.... Pour le calcul de RB, on peut : soit appliquer le théorème de Thalès, soit le théorème de Pythagore. Pour les questions 3) et 4), il faut appliquer la réciproque du théorème de Thalès (3,2/4 = 4/5) et le théorème direct. Il y a des connaissances disponibles supposées : triangle inscrit, droites perpendiculaires à une troisième, théorème de Pythagore). Il faut savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, aller chercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir. Nous pouvons considérer qu'il s'agit du niveau des connaissances disponibles, même pour l'application du théorème de Thalès, car des connaissances disponibles doivent être utilisées pour en justifier l'application. Le degré de "complication" de 1 à 5 est ainsi de 4 et le degré de nouveauté de 2.

Synthèse et conclusion de la troisième partie

L'objet de cette partie est de dégager les principales caractéristiques de l'enseignement contemporain du théorème de Thalès grâce à une étude des activités et des exercices que nous trouvons dans des ouvrages, des notes de préparations de cours et de contrôles de professeurs. Pour cela nous adaptons un outil d'analyse des tâches au niveau qui nous concerne, c'est à dire le collège, et au but que nous nous sommes assignés dans cette partie qui doit nourrir la construction de l'ingénierie didactique. Cette analyse des contenus enseignés se fait tout d'abord par l'étude du contexte mathématique puis celle du scénario et de la chronogenèse. L'analyse des tâches *a priori* et des attentes des enseignants est utile en particulier pour dresser un classement des exercices. Les notions de prototypes, d'archétypes et de figures pathogènes que nous définissons dans la partie précédente sont également utiles à notre étude. Ce classement est obtenu grâce à la définition de quatre univers correspondant chacun à quatre niveaux de complexité.

Nous commençons par donner la synthèse des résultats obtenus pour les analyses des activités et des notes de préparations de cours. Les résultats sur le contexte mathématique s'articulent autour de quatre points-clefs que sont l'ostension, les situations de référence et les situations a-didactiques présentent éventuellement dans l'activité, le statut du théorème de Thalès et le niveau de mise en fonctionnement. L'analyse des tâches prescrites fait l'objet d'interrogations au sujet de l'analyse des tâches *a priori* et des activités attendues de la part des élèves. Nous poursuivons par la mise en évidence des quatre Univers que nous avons obtenus pour le théorème de Thalès et qui décrivent les tâches principales des exercices qui les composent. Enfin, nous concluons sur les points fondamentaux que nous retenons pour la construction de notre ingénierie didactique.

I. Synthèse

I.1 Les activités des ouvrages et des préparations de cours

I.1.1 Le contexte mathématique

Une présentation ostensive du savoir et ses conséquences

Tous les éléments et relations constitutifs du théorème de Thalès sont donnés directement par les concepteurs des activités ou par les professeurs dont nous avons analysé les productions. En effet, mise à part une référence au théorème des milieux qui sert parfois de point d'ancrage à une visualisation particulière du théorème dans le cas du partage en trois segments de même longueur d'un des côtés d'un triangle comme dans la collection Pythagore, Transmath, Bordas, Cinq sur Cinq ou dans la préparation de cours du premier enseignant du collège Martin Luther King, la plupart du temps, les connaissances officielles liées au théorème de Thalès sont présentées directement, dès l'entrée dans la situation didactique, en prenant appui sur l'observation dirigée d'une réalité sensible du micro-espace et par la donnée d'implicites liés à la figure. L'approche est plutôt liée à l'ostension assumée. Seul un professeur du collège Clémenceau débute, de façon empirique, par la notion d'agrandissement réduction pour aboutir, par constatations sur les dessins que le théorème de Thalès est un cas particulier de ces agrandissements réductions. Nous sommes en présence là aussi d'ostension assumée.

Pour la réciproque, une approche empirique permet de mettre en évidence l'importance de la position respective des différents points alignés dans des ouvrages comme ceux de Cinq sur Cinq, Pythagore ou le premier professeur de Martin Luther King. Aucunes prémisses, liées au programme de la classe, ne sont réellement utiles pour traiter ces deux résultats, sauf justement pour la réciproque où il est nécessaire d'employer le théorème direct pour aboutir au fait que deux points sont confondus et pour la figure papillon où le théorème de Thalès est souvent articulé avec une propriété liée à la symétrie centrale comme dans les ouvrages Dimathème, Pythagore, Cinq sur Cinq et deux préparations de cours d'enseignants. Un professeur du collège Léon Blum emploie le cosinus pour introduire le théorème de Thalès, le cosinus étant lui-même introduit par le constat de l'égalité de rapports.

Généralement, la propriété visée est représentée sur une figure, l'observation du dessin devant permettre à l'élève de la reconnaître et de l'expliciter. Dans de nombreux ouvrages comme Dimathème, Bordas et des préparations de cours comme celle du premier professeur de Martin Luther King, le théorème de Thalès est vérifié de façon pratique par le calcul de rapports de mesures de longueurs prises directement sur les dessins proposés dans l'activité. A l'instar de ce qu'a pu observer Noirfalise (1993), les activités introductrices que nous avons retenues permettent d'obtenir le théorème de Thalès étudiée par des expérimentations qui ont des caractéristiques qui se retrouvent dans de nombreux ouvrages :

- élaboration d'une figure par construction ou appropriation d'un dessin déjà existant.
- puis par un jeu de questions, les rédacteurs de l'activité de la classe demandent d'observer des propriétés remarquables et d'énoncer, si possible, un théorème.

Cette présentation ostensive pourrait être à l'origine d'une représentation de "figures de Thalès" archétypes et prototypes de la part de certains élèves. En effet, de nombreuses figures que nous avons pu relever dans ces activités sont des prototypes I, II ou des figures représentatives IV. Nous avons retrouvé ces prototypes et ces figures représentatives dans de nombreux exercices et contrôles. Cela renforcerait le fait que les élèves attribuent à certains types de dessins des propriétés non incluses dans la caractérisation des configurations pour lesquelles le théorème de Thalès s'applique.

Absence de situations de référence et de situations a-didactiques

Par ailleurs, cette approche ostensive engendre le fait que dans aucune activité, nous n'avons trouvé de situations de référence, en relation par exemple avec le méso-espace qui donneraient une fonctionnalité aux problèmes, ni de situations d'apprentissage a-didactiques qui développeraient l'explicitation, la justification de l'action et qui servirait d'appui à la phase d'institutionnalisation. Les savoirs spatio-géométriques sont conçus comme étant extérieurs au sujet et non comme étant associés à une action anticipatrice de l'apprenant au cours de la résolution d'un problème qui se pose à lui *a priori*. Nous confirmons pour l'enseignement actuel du théorème de Thalès les observations produites par Laborde (1984) qui consistent à penser que seul le micro-espace existe dans les ouvrages du collège.

Le milieu matériel et naturel auquel peut s'appliquer le théorème de Thalès et qui pourrait servir de support à des situations non didactiques elles-mêmes pouvant servir de base à une situation a-didactique, est absent. Il est remplacé par un autre milieu, symbolique puisque modélisé, sans que les concepteurs des activités ne s'assurent que, pour les élèves, le concept visé fonctionne aussi bien dans les deux milieux.

Le statut du théorème de Thalès

Aucunes de toutes les activités que nous avons rencontrées ne sont des Réponses A un Problème, ni des Formalismes Unificateurs et Généralisateurs, ce qui éloigne encore plus la possibilité de donner une fonction aux notions abordées. La situation est généralement pauvre quant aux problèmes culturellement connus où la connaissance peut intervenir. Le théorème de Thalès ne vient pas aider l'élève en tant qu'outil, pour répondre à un problème posé initialement dans un contexte bien précis, mais constitue un objet d'étude dès le départ. Or, nous avons pu constater que les activités proposées dans les manuels n'ont la plupart du temps qu'un seul but, vérifier, avec un exemple numérique, la formule qui va être énoncée et qui a été éventuellement démontrée dans un cas très simple. Le théorème de Thalès n'apparaît pas comme un outil utile pour résoudre un problème proposé aux élèves. Même *a posteriori*, les activités reliées aux agrandissements réductions et au théorème de Thalès, pour lesquelles nous pourrions penser qu'elles relèvent de l'approche outil de la propriété, ne se réfèrent en fait qu'à l'aspect objet du théorème de Thalès.

De plus, aucuns des problèmes liés aux activités introductrices ne permet de franchir un obstacle didactique ni un obstacle épistémologique. Parfois, le théorème de Thalès est démontré dans un cas particulier où les côtés du triangle sont divisés en un nombre entier de sous segments, grâce au théorème des milieux. Mais bien sûr, pour la suite, la généralisation devrait passer par des obstacles liés aux nombres réels.

Le niveau de mise en fonctionnement

Un présupposé inductiviste est à l'origine du processus qui consiste à "montrer" les propriétés. Il est fondé sur l'idée suivante : il suffit d'observer une figure, d'agir sur cette figure, de prendre des mesures pour que l'élève saisisse tout l'intérêt et toutes les subtilités du théorème et de sa réciproque. L'objet est explicitement présenté indépendamment du sujet. Aucune initiative n'est laissée à l'apprenant, aucune étape n'est à introduire, la méthode est imposée ce qui confère à presque toutes ces activités un niveau de mise en fonctionnement technique, à la rigueur quelque fois mobilisables mais pas plus.

I.1.2 Le déroulement chronologique

La chronogenèse et la topogenèse

Il n'y a pas actuellement de réelle progression liée au théorème de Thalès. Les différentes activités ne font que très rarement apparaître des enchaînements entre elles. Une seule préparation de cours relie le théorème au cosinus. Le système de contraintes que nous avons décrit et dans lequel évolue actuellement le théorème de Thalès surdétermine sa nature même Sa seule légitimité est le support algébrique. L'absence de légitimation de l'étude, l'écrasement voire la disparition des aspects mobilisateurs du savoir font que le maître ne se distingue plus vraiment de l'élève sur l'axe temporel de la relation didactique. Ne pouvons nous pas penser, que cet objet d'enseignement subi un phénomène **d'obsolescence externe** ?

De plus, nous avons pu nous rendre compte que pendant de nombreux siècles le théorème de Thalès donnait vie et sens à de nombreux autres résultats qui eux-mêmes, parfois, en engendraient d'autres. Ce fut le cas pendant longtemps, mise à part la période axiomatique de 1971, pour le théorème de Pythagore, l'étude des projection, l'introduction de la trigonométrie etc., que la propriété de Thalès permettait d'introduire et de légitimer. Depuis 1989, un revirement de situation s'est produit. Nous aurions pu penser que la mise en place, par l'intermédiaire des programmes de 1997-1998, d'une partie de l'étude de ce résultat en classe de quatrième en même temps, justement, que le cosinus et le théorème de Pythagore, aurait incité les auteurs à assurer au théorème de Thalès une légitimité dans une dialectique ancien-nouveau, dans une certaine forme de vieillissement interne. Mais cela ne s'est pas produit.

Dans les deux classes terminales du collège, le théorème de Thalès assume pour seule fonction d'introduire des situations d'agrandissement - réduction. Seule l'étude des homothéties pourrait éventuellement permettre son dépassement. Mais pour vérifier cela, nous devons nous interroger sur les programmes des classes du Lycée. Naguère, l'homothétie était abordée en classe de seconde, ce qui assurait un vieillissement interne du théorème de Thalès. Dans les derniers programmes, cette notion n'est plus étudiée qu'en classe de première. L'obsolescence interne du théorème de Thalès est alors moins évidente surtout qu'une nouvelle approche de cette propriété, par l'intermédiaire d'une démonstration dite euclidienne, est à envisager par les professeurs qui enseignent à ce niveau.

Organisation mathématique

A cela s'ajoute l'affaiblissement, voire l'inexistence des savoirs mis en jeu pour introduire ou démontrer le théorème de Thalès au collège. La légitimation de son étude, de certaines techniques grâce à une technologie et une théorie que les élèves découvriraient est absente des activités dites introductrices. Seule une partie pratico-technique, fondée sur des tâches et des techniques précises, est mise en évidence, la partie technologico-théorique étant par ailleurs écartée. L'organisation est plutôt locale.

I.1.3 Analyse des tâches prescrites

Analyses des tâches a priori

Les énoncés des activités introductrices liées au théorème de Thalès ne laissent pratiquement jamais à l'élève la responsabilité du choix des outils et de la stratégie pour résoudre le problème. Leurs textes ne sont que très rarement ouverts et sont, le plus souvent, contextualisés. Pratiquement aucune conjecture n'est à faire. L'apprenant peut rarement envisager des procédures propres ; les stratégies sont les plus souvent imposées et aucune modélisation n'est à faire.

Il n'y a pas lieu de sélectionner des informations, ni d'introduire des étapes. Nous disons que la liberté de manoeuvre de l'élève est très mince.

Le théorème de Thalès n'est plus démontré au collège sauf en guise de curiosité, en toute fin de chapitre du livre Cinq sur Cinq qui expose la totalité de la démonstration par les aires. En fait, seule la réciproque et le cas de la figure dite "papillon" font l'objet d'une tentative de démonstration. Par l'utilisation des propriétés des symétries centrales qui conservent le parallélisme et transforme un segment en un segment de même longueur et du théorème de Thalès dans le triangle, les ouvrages Pythagore, Cinq sur Cinq, Dimathème et deux professeurs démontrent le théorème dans le cas "papillon". Généralement, le théorème réciproque est démontré (Transmath, deux professeurs) en supposant le non parallélisme de la droite en question, en traçant alors la droite parallèle et en appliquant le théorème de Thalès afin d'aboutir à l'égalité AN = AN' permettant de conclure, sans plus de précisions que les points N et N' sont confondus. Dans un ouvrage (Bordas) le théorème est démontré dans le cas des fractions ½ puis ¼ grâce au théorème des milieux. Quoi qu'il en soit, lorsque des démonstrations sont présentes, elles sont imposées et l'élève n'a aucune stratégie personnelle à mettre en œuvre. Les seules conjectures qu'il y a parfois à faire se fondent sur une lecture directe de données sur une figure. On passe souvent d'une activité de démonstration, imposée et détaillée, d'un cas particulier simple, à la lecture et à la mesure de longueurs.

L'aspect proportionnalité n'est que très rarement mis en valeur malgré les recommandations des programmes. Seulement deux livres, Bordas, Cinq sur Cinq et deux professeurs de Martin Luther King font le choix d'employer le mot de proportionnalité. La version généralement choisie par les professeurs et les concepteurs d'ouvrages est celle liée au triangle et à l'égalité de trois rapports. Le lien avec la proportionnalité est alors à la charge de l'élève. Même en 3ème, cette version triangle est préférée à la version droites sécantes que ce soit dans les livres ou les préparations de cours mis à part un seul professeur du collège Léon Blum.

Même si l'approche de la proportionnalité dans les ouvrages au sujet du théorème de Thalès a été unique et exclusivement rattachée à l'approche homothétie, plusieurs versions de ce même théorème présentant chacune des incohérences ont été rencontrées au cours de l'analyse. Nous ne rappelons que les versions susceptibles d'être enseignées actuellement.

<u>Version 1 :</u>

Le théorème direct : Si ABC est un triangle tel que le point M est sur la droite (AB), le point N sur la droite (AC) de telle sorte que les droites (MN) et (BC) soient parallèles, alors nous avons : AM/AB = AN/AC = MN/BC.

La réciproque : Si dans un triangle A, M, B et A, N, C, sont alignés dans cet ordre avec AM/AB = AN/AC alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

<u>Analyse critique :</u>

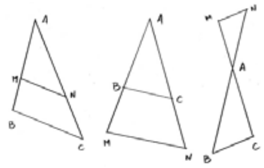
Dans les prémisses de la réciproque apparaissent uniquement l'égalité de deux rapports alors que dans le théorème direct trois sont indiqués. De plus les positions des points M, et N par rapport respectivement aux points A, B et A, C sont citées dans la version réciproque alors que ces indications sont absentes du théorème direct. Il ne s'agit donc pas tout à fait de la réciproque du théorème direct. La suppression des valeurs algébriques, qui elles-mêmes posent certains problèmes, a engendré cette difficulté dans la rédaction de l'énoncé. Le problème de la position des points était évacué autrefois grâce aux valeurs algébriques mais également, chez certains auteurs, par l'intermédiaire des segments de même nature, des segments additifs ou soustractifs. Nous rajoutons que si nous nous référons à la contraposée du théorème direct, nous obtenons : si $AM/AB \neq AN/AC$ ou $AN/AC \neq MN/BC$ ou $AM/AB \neq MN/BC$ alors $M \notin (AB)$ ou $N \notin (AC)$ ou les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. Ici aussi, seul le fait que les droites ne sont pas parallèles est indiqué lorsque deux rapports ne sont pas égaux, ce qui ne correspond pas non plus à la contraposée du théorème direct.

Version 2 :
Le théorème direct : ABC est un triangle avec M un point de la droite (AB), N un point de la droite (AC). Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors, nous avons : AM/AB = AN/AC.
La réciproque : idem version 1.

Analyse critique :

Les prémisses de la réciproque tiennent comptent encore de la position relative des points M et N par rapport aux points A, B et A, C.
Si nous nous référons à la contraposée de la proposition directe, nous obtenons : ABC est un triangle avec M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC). Si AM/AB $\neq$ AN/AC alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. Les écueils de la version précédente sont évités ici.

Version 3 :
Le théorème direct : Dans les différents cas de figures suivants, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors :
AM/AB = AN/AC = MN/BC.



La réciproque donne : Dans les trois cas de figures ci-dessus, si AM/AB = AN/AC alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Les problèmes sont ici de deux sortes. D'une part, il est nécessaire de lire l'alignement des points sur la figure, ce qui est contraire aux programmes du collège qui excluent explicitement les énoncés de propriétés fondés sur une lecture raisonnée de figures.
Et d'autre part, dans les prémisses de la réciproque sont présents deux rapports alors que dans le théorème direct trois sont utilisés. Il faudrait alors rédiger de la façon suivante :
si AM/AB = AN/AC ou AM/AB = MN/BC ou AN/AC = MN/BC alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Nous notons tout de même que pour les deux dernières égalités, pour certaines valeurs de la mesure de l'angle $\hat{A}$, il est possible d'avoir un point N, respectivement un point M, sur [AC] tel que l'avant dernière égalité, respectivement la dernière, soit vraie sans que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.
La contraposée donne alors : dans les trois cas de figures ci-dessus, si AM/AB $\neq$ AN/AC ou AM/AB $\neq$ MN/BC alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.
Le même reproche de lecture du dessin peut être fait également ici.

I.1.4 Analyse des attentes des enseignants

La possibilité qui est envisagée dans les ouvrages que nous avons analysés et au sein des préparations de cours que nous avons étudiées, consiste à canoniser une procédure à la fois d'application du théorème et de résolution des équations algébriques. Cette procédure de canonisation est favorisée, en partie, par l'approche unique de la proportionnalité et se joue sur deux niveaux : on demande à l'élève d'être capable, d'une part, de reconnaître une figure type afin de lui appliquer le théorème standardisé et d'autre part, de mettre le problème en équation et de résoudre cette équation par des techniques adaptées et longuement répétées en classe ; une grande partie du cours étant justement consacrée au recensement et à la résolution de tous les types d'équations possibles. Il semblerait que l'on se soit arrangé pour que dans l'enseignement de ce théorème les élèves n'est affaire qu'à des égalités de rapports perçus comme des blocs. Peut-être a-t-on réduit le théorème de Thalès pour évacuer la difficile question de la proportionnalité et parvenir ainsi à un simple apprentissage de techniques ?

Les conclusions que nous donnons maintenant au sujet des exercices apportent un éclairage supplémentaire sur ce que nous venons de dire. Nous rappelons tout d'abord les divers Univers que nous avons mis en évidence lors de notre tentative de classement des exercices suivant plusieurs critères.

I.2 Analyse des exercices

I.2.1 Le classement que nous avons obtenu

a) Univers des Gammes et des Gammes Soutenues

Univers des Gammes

Pour l'ensemble des exercices sur le théorème de Thalès qui constitue ce que nous nommons l'Univers des Gammes, les auteurs et les professeurs dont nous avons analysé les préparations, ne font varier - sur une figure simple existante ou à construire et pour une application immédiate de la proposition avec une seule étape - que des variables contextuelles telles que l'orientation de la figure, et surtout la distribution des données, c'est à dire la congruence de la figure, la position de l'inconnue dans l'équation, le nombre de longueurs à calculer, ou un simple habillage. Les constructions types comme une quatrième proportionnelle, ou le partage d'un segment font également partie de cet univers comme les démonstrations sur le parallélisme grâce aux calculs.

Univers des Gammes Soutenues

Cet Univers comprend des exercices où la question est posée indirectement ("Montrer que le triangle est isocèle", "Calculer le périmètre du parallélogramme", "Tu as fait une erreur !"), ou pour lesquels la configuration impose d'extraire une figure plus simple, ou qui nécessitent une justification pour utiliser le parallélisme de deux droites (deux droites perpendiculaires à une troisième, deux droites parallèles à une troisième etc.), ou qui nécessitent d'employer le théorème de Thalès comme outil dans un cas très simple (celui de la représentation de pourcentages par exemple), ou bien qui imposent de démontrer le non parallélisme de deux droites par un calcul simple. L'élève doit parfois inférer et prendre de petites initiatives pour, par exemple, trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement. Plusieurs théorèmes doivent parfois être appliqués en même temps comme les théorèmes de Thalès et sa réciproque et le théorème de Pythagore et doivent être reliés entre eux, mais d'une façon assez simple dans une configuration épurée.

Les exercices faisant partie de l'Univers des Gammes ou des Gammes Soutenues sont largement majoritaires tant dans les ouvrages scolaires que dans les préparations de cours d'enseignants. Les objectifs semblent, d'une part, de faire acquérir des automatismes dans les applications immédiates du cours avec une graduation des difficultés suivant les paramètres choisis et d'autre part, d'algorithmiser certaines tâches plus complexes.

b) Univers des Recherches Conséquentes et Univers des Problèmes

Malgré cette forte densité d'exercices relevant de ces deux premiers Univers, deux autres ont pu être dégagés.

L'Univers des Recherches Conséquentes regroupe des exercices qui nécessitent plusieurs pas de raisonnement ou la recherche de contre exemples. Nous ne rentrons pas dans les détails, mais nous pouvons rappeler que la figure est généralement plongée dans une configuration plus complexe que précédemment.

La tâche consiste, par exemple, à effectuer un calcul de longueur par une double application du théorème de Thalès, en utilisant la transitivité. Il peut s'agir de démontrer des égalités littérales par l'application du théorème de Thalès et du produit en croix, d'appliquer dans le même exercice le théorème et sa contraposé, de mettre en œuvre le théorème de Pythagore et, par deux fois, le théorème de Thalès ou inversement, ou de corriger des erreurs volontairement glissées dans la solution proposée d'un exercice.

Un des buts principaux de ce type d'exercices, est de faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement et de parfois mettre en fonctionnement le théorème en tant qu'outil. L'élève, de plus, doit mettre en relation des résultats de façon moins évidente que pour les exercices faisant partie de l'Univers des Gammes Soutenues, il doit prendre des initiatives et parfois trouver des astuces. La difficulté peut provenir du fait qu'il faut appliquer plusieurs fois le théorème ou le théorème et sa réciproque. Mais il ne s'agit pas de réels problèmes car il n'y a pas de conjecture a faire et d'autre part du fait que les questions soient très détaillées et fermées.

L'Univers des Problèmes est très peu fourni dans les ouvrages ou dans les préparations de cours. Il rassemble des problèmes réels car il s'agit, pour résoudre ces tâches, de faire des raisonnements à plusieurs pas, d'effectuer plusieurs types d'enchaînement, d'inférer, d'appliquer plusieurs fois de suite une méthode, d'utiliser plusieurs outils anciens et nouveaux sans être guidé dans la démarche par des questions intermédiaires. Il y a un réel choix de méthode à faire et plusieurs pas de raisonnement sont à adopter dans cette démarche, qui relève parfois de vraies démonstrations. L'élève doit encore inférer et rassembler des résultats et parfois deux possibilités s'offrent à lui pour résoudre la tâche. Plusieurs résultats, comme la transitivité de l'égalité, le produit en croix et les racines carrées, sont souvent indispensables pour résoudre l'exercice. Il revient à l'élève, par exemple, de démontrer des égalités littérales par une double application du théorème de Thalès, suivie de l'utilisation de la transitivité de l'égalité et du produit en croix. La difficulté ne provient pas de l'application directe du théorème de Thalès, mais réside dans le fait de devoir trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement ou ce qu'il y a à transformer dans la figure pour pouvoir appliquer le théorème de son choix ou bien de l'imbrication de nombreux résultats et théorèmes. De plus, des enchaînements logiques non triviaux sont à la charge de l'élève et le domaine de contextualisation rend parfois la tâche difficile du fait qu'il n'y a, par exemple, que des calculs littéraux à effectuer ou une astuce à trouver.

Globalement, nous pouvons dire qu'il y a très peu d'exercices permettant des réflexions sur des méthodes, sur la généralisation d'une technique ou sur le contrôle d'un résultat. De plus, les concepts ne sont que très rarement utilisés en tant qu'outil et les jeux de cadres, à quelques très rares exceptions près, sont inexistants, ce qui contribuerait, en plus de l'absence de situations a-didactiques dans les activités introductrices, à renforcer l'absence de construction des notions liées au théorème de Thalès (Robert et Robinet 1989).

II. Conclusion

En conclusion, si nous voulons parler de la forme que prennent les activités dans les ouvrages que nous avons analysés, nous sommes dans une situation à la fois d'ostension déguisée et d'ostension active. L'apprenant est supposé être en action lorsqu'il relève des données sur un dessin, lorsqu'il complète ce dessin, lorsqu'il mesure ou calcule des rapports à l'aide d'une calculatrice. Ces ostensifs qui, par le fait d'obliger les élèves à généraliser eux-mêmes les théorèmes qu'ils sont censés assimiler, renforceraient les effets néfastes des prototypes et des figures archétypes.

Nous pouvons dire que l'absence dans les activités dites introductrices de situations a-didactiques, de situations de référence et de situations problèmes a pour principale conséquence que le sens que l'on peut rattacher au théorème de Thalès est à la charge de l'élève et que celui-ci a également la responsabilité de l'établissement des rapports entre le théorème de Thalès et la réalité sensible à laquelle ce résultat se rapporte. En particulier, le rôle de modélisation que pourrait jouer le théorème de Thalès dont l'une des idées fondamentales sous-jacente est bien le passage du méso-espace à celui de la feuille de papier, est absent de l'enseignement. Nous nous interrogeons, lors de l'élaboration de notre ingénierie didactique, sur la façon dont nous procédons pour remplacer la situation non didactique ou a-didactique de référence liée au méso-espace par un modèle rattaché au micro-espace de la feuille. La théorisation et la compréhension des problèmes que le théorème de Thalès permet de résoudre ne sont pas perçues par les professeurs et les concepteurs des livres scolaires comme une finalité de l'enseignement de ce résultat. Cette remarque n'est pas nouvelle. Marc Bailleul (1995) a montré, au cours d'une étude, que la théorie liée aux savoirs mathématiques, la compréhension des problèmes que ces savoirs mathématiques permettent souvent de résoudre ne sont perçues par des professeurs ayant fait l'objet de l'enquête, à travers l'interprétation du discours institutionnel qu'ils ont, que comme une toile de fond et non comme une finalité de l'enseignement des mathématiques.

De plus, les mises en fonctionnement dans les activités introductrices sont, le plus souvent, du niveau technique.

Par ailleurs, alors qu'un des objets de l'enseignement des mathématiques pourrait être l'activité de démonstration opposée à la constatation empirique, les enseignants sont confrontés à deux ruptures, voire à un changement total de contrats didactiques explicités dans les programmes de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$. D'une part, il est demandé dans les programmes de quatrième de ne pas démontrer le théorème de Thalès. Nous avons pu, en effet, nous rendre compte qu'aucune démonstration du théorème direct n'est réellement proposée sauf éventuellement dans un ou deux ouvrages en toute fin de chapitre, sous forme d'illustration ou de curiosité presque "exotique". Mais même dans ce cas, l'obstacle épistémologique lié aux nombres réels est occulté. Cela se reproduit pour la démonstration du théorème réciproque.

Et d'autre part, à la lecture des programmes de la classe de troisième, il y a obligation de recourir à une constatation visuelle portant sur l'ordre de deux triplets de points pour pouvoir appliquer le théorème réciproque.

La version du théorème de Thalès proposée dans les ouvrages et les préparations de cours le rend valable dans toutes les situations ; seule l'identification d'une figure est nécessaire. Une double approche proportionnalité interne et externe est alors impossible. En fait, nous avons pu nous rendre compte que les objets du savoir enseigné relèvent plus de ce que Chevallard (1991 (a))) appelle les notions protomathématiques (apprendre à reconnaître une figure dite de Thalès, savoir repérer le sommet commun aux deux triangles pour écrire correctement les rapports littéraux, savoir ne pas se tromper toujours dans les écritures des fractions littérales égales en faisant "petit sur grand" pour les trois fractions) et les notions paramathématique (paramètres, équations quotients, produit en croix, mise en équation, démonstrations) que de réelles notions mathématiques (comme la mesure des grandeurs, la proportionnalité interne ou externe, etc.). Cette version engendre le fait que l'un des aspects mobilisateurs de sens de ce savoir, qui consiste à le considérer presque exclusivement comme un support pour le calcul algébrique après l'application d'une "recette" par les élèves, est privilégié dans l'enseignement actuel. Elle permet de faire travailler et d'approfondir les règles de calculs algébriques établies dans les classes antérieures, en l'occurrence la reconnaissance et l'utilisation de la distributivité et la résolution d'équations du type : $x/(x + 7) = 8/(8 + 12)$.

De plus l'aspect outil de ce théorème malgré tout très riche, qui pourrait être utile, à l'introduction du cosinus, à l'établissement de l'équation d'une droite, à l'introduction du théorème de Pythagore, se résume à l'aspect agrandissement - réduction. Ce résultat ne joue plus réellement le rôle introducteur et facilitateur d'apprentissage ultérieurs en termes de savoir mathématique outil ou de référence. Seul l'objet d'étude, seules les situations de références auxquelles il est rattaché, sont enseignés. Il apparaît peu utile à **l'économie du système didactique** (Chevallard 1992 (a)).

Ainsi, la principale composante de l'activité mathématique de l'élève est l'établissement de techniques relatives à des types de tâches appropriées et répertoriées. La mise au point de technologies voire de théories justifiant ces techniques liées au théorème de Thalès ne sont ni du ressort de l'élève ni de celui du professeur. L'activité mathématique en rapport avec le théorème de Thalès peut se résumer, en ce qui concerne l'élève, en l'application d'un ensemble de techniques précises qui n'activent bien souvent qu'un travail algorithmisé fondé principalement sur des ostensifs.

Nous pouvons résumer ces propos en disant que les trois fonctionnalités que nous avons retenus de l'étude épistémologique et qui concernent le méso-espace, la proportionnalité au sens le plus large possible c'est à dire à la fois interne et externe afin de ce rattacher le plus longtemps possible à la figure et aux situations de proportionnalités qui lui sont liées, et le champ conceptuel auquel est associé le théorème de Thalès, qui relève des nombres réels et qui pourrait assurer un vieillissement du savoir, sont entièrement écrasés par le seul attrait algébrique que lui confère la version actuelle par une évacuation rapide du géométrique.

En ce qui concerne les exercices, des tentatives d'introduire le méso-espace ont vu le jour dans presque tous les ouvrages. Mais la figure modélisant la situation étant systématiquement présente, l'intérêt de cet espace disparaît. Les auteurs passent directement de la problématique spatiale à la modélisation par un habillage de l'énoncé qui n'est qu'un prétexte. Très peu d'exercices faisant apparaître des démonstrations sont proposés dans les ouvrages.

Le jeu sur les variables des figures ou de l'énoncé est à peu près commun à tous les ouvrages et à toutes les préparations de cours. La répétition en est une des composantes principales, avec une complexification croissante dans la contextualisation et dans l'évolution de certaines variables didactiques. L'orientation des figures de Thalès, la répartition des longueurs des segments, la position de l'inconnue au sein de l'équation font l'objet de très nombreuses variantes. En fin de compte, il y a très peu d'exercices où l'apprenant ait à faire autre chose qu'une mise en application directe du théorème de Thalès et de sa réciproque ou de techniques. L'image globale qui se dégage des textes des exercices des dix manuels et des préparations de cours que nous avons analysés est peu variée. La plupart des exercices font partie de l'Univers des Gammes ou des Gammes Soutenues. La répétition des tâches permet d'en retenir certaines un peu plus complexes. Peu de parts sont faites à l'initiative de l'élève et en particulier très peu d'occasions lui sont données pour se questionner, pour conjecturer, pour contrôler un choix de méthode ou en généraliser une autre. En conséquence, l'objectif légitime de rendre disponible des outils liés au théorème de Thalès n'est pas rempli.

L'inventaire des types d'exercices comprend au départ, trois composantes pour le théorème de Thalès :

- Calcul d'une ou de plusieurs longueurs.
- Démonstration du parallélisme de deux droites.
- Construction : partage d'un segment dans un rapport donné, placer un point d'abscisse donnée, quatrième proportionnelle.

Globalement, nous pouvons avancer que les tâches sont très souvent calculatoires. L'usage de cette propriété peut paraître stéréotypé du fait qu'il corresponde presque exclusivement à des mises en équation menant à une résolution ou à l'extraction d'une figure dite de Thalès d'une configuration complexe pour pouvoir appliquer simplement le résultat du cours. Ces tâches sont souvent des mises en fonctionnement techniques.

Les exercices proposés en contrôle des connaissances relèvent des Univers des Gammes ou des Gammes Soutenues. Nous pouvons dire qu'une fois le théorème de Thalès appris par l'élève, son travail revient, en fait, à l'appliquer au cours d'exercices essentiellement calculatoires. Cela confirme certains résultats du travail effectué par Bailleul (1995) sur les représentations des enseignants, qui montre chez des professeurs de collège qui ont répondu à l'enquête, une perception de l'attente institutionnelle fondée prioritairement sur des savoir faire, des habiletés que élève doit posséder à sa sortie du collège.

L'environnement qui permet l'éclosion et la progression du concept étudié, les conditions d'utilisation de cet énoncé en tant qu'objet et en tant qu'outil, la richesse des résultats qu'il permet d'engendrer et qui assurent parfois, dans certaines conditions, sa disparition lorsqu'une proposition plus générale permet de le dépasser, se résume à peu de choses. La cohérence interne de l'édifice mathématique, qui était autrefois assurée par le théorème de Thalès s'effondre. Cette notion d'édifice permettrait, par exemple, aux élèves de mieux comprendre sur quelles parties des démonstrations porte la mise en jeu de la propriété étudiée. Les liens qui pourraient éventuellement se tisser entre plusieurs notions ne pourraient que favoriser leur apprentissage, mais ce n'est qu'une hypothèse dont nous tiendrons compte dans notre ingénierie sans la tester. Il semblerait que ce sentiment de construction soit très important dans la recherche mathématique (Schwartz, 1994) et également pour les élèves. Nous prenons aussi en compte les incohérences rencontrées dans les différentes versions proposées par les ouvrages actuels lorsque nous rédigeons avec les élèves, l'énoncé de ces deux propriétés lors de la mise en place de l'institutionnalisation dans notre activité de démonstration.

Globalement, nous nous trouvons dans une situation que Brousseau (1995) qualifie de **captation de sens** qui conduit à particulariser une présentation et une version spécifiques d'un théorème ou d'une notion, ce qui a pour effet immédiat d'effacer le sens général et intrinsèque de ce théorème par la fréquence voire l'exclusivité d'emploi de la version particulière dans les exercices, les problèmes et les applications, comme cela se passe pour le théorème de Thalès actuellement. La remise en cause de l'enseignement de cette propriété, des trois aspects mobilisateurs qui font sens, est également un fil conducteur pour la construction de notre ingénierie.

QUATRIEME PARTIE

Ingénierie didactique, élaboration, mise en place et analyses

QUATRIEME PARTIE
Table des matières

CHAPITRE 1
Genèse de l'ingénierie

CHAPITRE 2
Elaboration des situations problèmes introduisant le théorème de Thalès

CHAPITRE 3
Mise en place des activités et analyse des productions

CHAPITRE 1

GENESE DE L'INGENIERIE

"Tout l'univers de la science est construit sur le monde vécu avec rigueur et si nous voulons penser la science elle-même avec rigueur, en apprécier le sens et la portée, il nous faut réveiller d'abord cette expérience du monde dont elle est l'expression seconde." Merleau-Ponty. Phénoménologie de la perception.

Si nous admettons que l'un des objectifs didactiques essentiels de l'enseignement d'un concept mathématique est de provoquer une évolution des modèles de l'élève et de donner du *sens* à ce qui est enseigné, par rectification et par enrichissement, il est nécessaire de faire fonctionner ces modèles dans une situation fondamentale. Les trois premières parties nous ont permis de montrer dans quelle mesure une meilleure connaissance du théorème de Thalès dépend d'une appréhension et d'une compréhension de son *sens* et de ses *rôles premiers* plus larges que ce qu'on trouve actuellement dans les cours de mathématiques du collège.

Ainsi, dans ce premier chapitre, nous introduisons les objectifs et les idées principales qui nous ont guidé tout au long de l'élaboration des différentes activités qui composent le début de l'ingénierie et qui font l'objet d'une analyse *a priori* et *a posteriori*.

Nous avons pu également identifier l'environnement actuel des connaissances et des concepts dans lequel il naît, il est énoncé et il évolue pour éventuellement, à terme, être dépassé.

L'approche anthropologique nous indique que ce théorème est utilisé pour accomplir certaines tâches sans pour autant que cela débouche sur la démonstration d'une proposition nouvelle servant elle-même à justifier d'autres tâches. En clair, l'organisation mathématique actuelle est au mieux locale ce qui nous incite à la modifier, à en proposer une autre, et à donner des indications pour construire une organisation régionale afin de créer une dynamique dans l'enseignement de ce théorème.

Notre expérimentation se déroule sur plusieurs séances, vu le nombre de séquences qui la composent. Une grande partie de ces activités concernent des élèves d'une classe de quatrième, mais en ce qui concerne les cas de la figure dite "papillon" et de la réciproque du théorème de Thalès, seuls des élèves du niveau troisième sont concernés.

I Quel est le but principal de cette ingénierie ?

I.1 La quête du sens

Nous avons choisi, à l'aide d'une étude épistémologique et historique, de définir le contexte qui donne *sens* à l'objet d'enseignement, le contexte qui pourrait faire apparaître les diverses significations du contenu enseigné.

> "Le problème didactique se situe dans la construction de ce cheminement qui consiste à partir d'une problématique pour construire pas à pas les moyens de répondre aux problèmes qu'elle pose." (Bkouche 1991)

Le problème du *sens* de la connaissance construite par l'élève est central à la fois comme enjeu de l'enseignement et comme objet d'étude des processus didactiques ; mais nous sommes pleinement conscients, à l'instar de Legrand (1997), que :

> "Dans tout enseignement consistant, le sens global ne se livre pas facilement, il ne peut s'énoncer directement, se dire ou se prescrire."

Les *aspects mobilisateurs de sens* chez les élèves correspondent au rapport que ceux-ci ont aux **champs conceptuels** qui sont en liaison avec la propriété étudiée. Ce sens s'élabore progressivement pour l'élève à travers une approche de l'ensemble des situations dans lesquelles le théorème s'applique et également dans lesquelles il ne s'applique pas.

Ainsi, nous engageons une problématique destinée aux élèves en ayant connaissance des obstacles épistémologiques, didactiques et des variables. Quatre composantes la caractérisent :

- les problématiques historiques liées au méso-espace sans les reproduire
- les nombres réels et la mesure des longueurs
- la proportionnalité

- les figures prototypes et archétypes, l'orientation des figures et la distribution des longueurs.

La richesse du champ conceptuel est telle (aspect projectif, homothétique, conservation barycentrique, double approche de la proportionnalité etc.) qu'il faut faire des choix pour la construction de situations a-didactiques. Nous avons déjà évoqué, lors de l'étude détaillée des ouvrages scolaires et des préparations de cours de professeurs, les caractéristiques des situations didactiques. Mais nous pouvons à nouveau nous reposer la question suivante :

Que doivent, en premier lieu, vérifier les situations a-didactiques dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent ?

Berthelot et Salin (1992) ont établi que :

> "Pour qu'une situation d'apprentissage soit efficace, il est nécessaire que la comparaison entre le but à atteindre et la réalisation ayant engagé les conceptions du sujet soit facile et rapide, afin qu'on puisse les mettre en cause et les modifier au cours de parties successives."

En conséquence, les auteurs ont caractérisé les situations a-didactiques supposées être efficaces. Ils ont conçu des situations didactiques possédant certaines caractéristiques parmi lesquelles nous ne retenons que les suivantes :

- les problèmes portent sur des objets petits, faciles à comparer (ce qui exclura le travail dans le macro-espace).
- la réussite ou l'échec sont relativement faciles à mettre en évidence.
- les formulations sont issues de la nécessité de communiquer à quelqu'un d'autre les informations nécessaires à la réalisation d'objets identiques à ceux dont dispose l'émetteur.

De plus, l'ensemble de situations a-didactiques doit être intégrable dans des situations didactiques adaptées à l'état des connaissances des apprenants. Ainsi, par exemple, les connaissances des élèves de la classe de quatrième au sujet de la proportionnalité et des fractions doivent correspondre aux outils qui sont utilisés dans certaines activités comme celles liées à la démonstration générale du théorème.

I.1.1 Le méso-espace

Notre analyse historique conduit à prendre en compte le *méso-espace* pour donner du *sens* à deux connaissances **spatio-géométriques**, qui sont :

- la possibilité de *mesurer des distances inaccessibles* dans ce méso-espace.
- la possibilité d'évoquer cette action à partir de la représentation des situations de ce domaine dans le *micro-espace*.

Certains objets mathématiques, certains concepts semblent plus relever d'un espace que d'un autre. Par exemple, la notion d'angle est une notion pleinement instrumentale des technologies du macro-espace et du méso-espace car la mesure des angles est moins coûteuse que la mesure directe des longueurs, qui peut s'avérer impossible dans ces espaces. Nous maintenons que l'un des aspects mobilisateurs de *sens* du théorème de Thalès est son approche dans le *méso-espace* dans le but de *mesurer des distances inaccessibles*.

Nous pouvons rajouter que l'approche dans le méso-espace de la notion d'angle n'est pas si spontanée pour les élèves. François Colmez nous indique justement que lors d'une étude des angles dans le méso-espace qu'il a menée avec une classe du primaire, les élèves n'ont pas eu immédiatement l'idée, pour comparer deux angles, de mesurer l'écart angulaire, mais ont pris, pour chaque angle un segment de même longueur sur un des côtés dont l'extrémité était le sommet de l'angle en question ; ils ont ensuite tracé la perpendiculaire à ce côté passant par la seconde extrémité et ont mesuré, pour les deux angles, la longueur du segment obtenu. Cela correspond à une des définitions de la mesure de l'angle que donne Arnauld. En matière de comparaison d'angle dans le méso-espace, la référence semble plutôt être, pour les élèves des classes du primaire, la mesure des longueurs.

Nous faisons, avec Berthelot et Salin (1992), l'hypothèse que la première composante liée à une **problématique pratique** est indispensable car elle met en évidence la nécessité et l'économie de la modélisation. En général, le fait d'accompagner un énoncé de géométrie dans le méso-espace d'un schéma ou d'un dessin précis ramène immédiatement la situation dans le micro-espace. Or, nous avons pu constater, aussi bien dans la partie épistémologie que dans l'analyse des ouvrages et de l'enseignement actuels, que ce passage du méso-espace au micro-espace n'est jamais abordé.

Pour permettre aux élèves de distinguer ces deux problématiques - spatiale et géométrique - nous proposons une situation dans laquelle l'étude de l'objet dans le méso-espace est nettement séparée de l'enseignement de la géométrie proprement dite. Mais des allers retours entre les deux espaces sont bien sûr aménagés.

L'une des idées fondamentales du théorème de Thalès étant ainsi le *passage du méso-espace* à celui de la feuille de papier, le *micro-espace*, nous pouvons nous demander si ce passage est réellement nécessaire :

Dans quelles situations de notre ingénierie doit on représenter un espace d'une certaine taille à l'aide d'un autre, de taille différente, permettant un traitement de l'information, plus facile ?

En général, pour Berthelot et Salin (1992), il s'agit des situations :

> "Dans lesquelles le sujet est soumis à des contraintes plus fortes que celles des actions micro-spatiales, contraintes l'obligeant à différer son action, et en anticiper les effets, c'est à dire celles dans lesquelles la problématique pratique ne suffit pas."

Dans notre travail, le passage du méso-espace au micro-espace doit permettre une modélisation de la situation fondamentale, modélisation qui doit elle-même entraîner, de la part des élèves, certaines *anticipations* des effets de leurs actions dans le méso-espace. De plus, une justification de conjectures est demandée aux élèves. Ainsi l'articulation entre le méso-espace et le micro-espace en est rendue d'autant plus nécessaire. Nous devons également prendre position sur deux questions liées à la modélisation du problème.

La situation proposée aux élèves ne relève pas réellement de l'espace à trois dimensions : il s'agit simplement d'un problème du plan plongé dans l'espace. Il revient aux élèves d'en faire la constatation.

Nous devons nous demander si le problème nécessite réellement une solution géométrique, c'est à dire modélisée par une figure, ou si un schéma illustrant une solution et un calcul suffisent.

Les situations didactiques que nous avons construites dans le méso-espace et fondées sur la mesure de distances inaccessibles, pouvaient être exploitées de trois façons différentes et non exclusives les unes par rapport aux autres.

- Nous avions la possibilité, par exemple, d'utiliser un modèle en carton afin de remplacer le milieu spatial pour lequel se pose réellement le problème par un milieu d'accès plus facile. C'est ce que nous avons fait pour l'introduction à l'une des activités principales qui se fonde sur l'ombre d'une coupe d'escalier représentée sur un carton.

- Nous pouvions également employer d'emblée un dessin modélisant la situation du méso-espace. Nous aurions gardé alors la référence à une situation non didactique et si l'accès au méso-espace avait été difficile, nous l'aurions remplacée par une figure accompagnée de toutes les informations nécessaires. Cela supposait, dès le début, des compétences spatiales et de modélisation directe assez élaborées de la part des élèves. C'est pour cette raison que nous avons écarté cette possibilité.

- La dernière option était de travailler directement dans le micro-espace. Or l'une des idées principales que nous avons développées à ce sujet est que le théorème de Thalès prend pleinement *sens* dans le méso-espace. Par conséquent, pour nous, la situation a-didactique se déroule ou tout au moins s'amorce dans cet espace. Une solution historique de la mesure des longueurs inaccessibles fait l'objet d'un travail complémentaire (hors ingénierie) : retour dans le méso-espace pour un exercice d'application concrète et directe du théorème à l'aide d'un instrument de mesure en bois que les élèves devront construire avec l'aide d'un professeur de technologie. Ainsi, le double aspect d'une étude du théorème de Thalès placée dans le méso-espace puis modélisée dans le micro-espace provient d'une part de l'approche historique et d'autre part, également, d'une justification didactique.

I.1.2 La démonstration, les nombres réels et la mesure des longueurs

a) Actuellement, est-il encore légitime d'enseigner une démonstration du théorème de Thalès ?

D'une façon générale, plusieurs arguments plaident en faveur de la démonstration de cette propriété. Un premier est d'ordre général et un second concerne plus particulièrement la propriété que nous étudions.

La situation, dans notre travail, doit tout d'abord permettre à l'élève de construire lui-même la démonstration et de lui donner du sens au sein de l'activité II. Mais il s'agit là d'un idéal qui est bien difficile à atteindre, car au regard de la difficulté des concepts en question et de leurs diverses mises en relations, de la complexité des schémas déductifs de la démonstration du théorème de Thalès, il est illusoire de penser pouvoir faire découvrir aux élèves, par eux-mêmes la totalité de l'édifice sans intervention de l'extérieur.

Mais la démonstration est bien plus que cela. Entre observation empirique, démonstration dans des cas particuliers, généralisations admises, professeur et élèves évoluent à la recherche du savoir. Les contours de l'objet finissent parfois par être appréhendés, mais les objets eux-mêmes, cela est moins sûr. Ainsi, comment imaginer que l'écueil des longueurs incommensurables puisse être appréhendé par les élèves sans les confronter à cet obstacle dans le cadre d'une démonstration par exemple ?

Il peut nous être répondu : mais quelle utilité a un enseignement des nombres réels pour les élèves ? Les élèves ont-ils réellement intérêt à recevoir un tel enseignement ou du moins une initiation liée à ces nombres ? Nous disons alors qu'une simple prise de conscience de l'existence de nombres autres que rationnels permettrait sûrement d'éviter, en partie, certaines difficultés ultérieures, dans les classes de Lycée par exemple.

> "Il existe un autre modèle de temporalité, où la plasticité de la durée autorise des retours réorganisateurs radicaux : c'est le concept freudien de l'après-coup." (Chevallard 1991 (a))

De plus, le questionnement initial, pour le théorème de Thalès, (mesure des longueurs, proportionnalité, irrationalité, passage du méso au micro-espace etc.) doit ressortir pour faire apparaître la structure et les enchaînements des démonstrations et, à terme, le sens. Enfin, il semble aberrant de considérer utile voire nécessaire de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en classe de troisième, comme c'est le cas actuellement, et de s'interdire de relier ce résultat à une démonstration géométrique qui le fait justement apparaître comme un écueil. Ce n'est pas parce que les nombres irrationnels représentent un obstacle important dans l'élaboration de nombreux concepts mathématiques qu'il est indispensable de totalement contourner cet obstacle en ne l'évoquant pas.

Pour toutes les raisons que nous venons d'évoquer, nous considérons qu'une approche d'une démonstration du théorème de Thalès est importante sans pour autant, bien sûr, que celle-ci repose sur une étude complète des nombres réels. Cette démonstration nous confronte inévitablement à des difficultés importantes.

b) Prise en compte des écueils inévitables dans une démonstration du théorème de Thalès

Les nombres réels

Le fait que la démonstration du théorème de Thalès ne puisse pas se réaliser de façon satisfaisante du point de vue logique et théorique sans l'apport des *nombres réels* constitue un obstacle à la fois épistémologique et didactique.

De plus, ce théorème fait partie d'un champ conceptuel très vaste et très important auquel se rattache également la mesure des angles, la mesure des aires etc. Sans bien sûr entrer dans les détails de la construction des nombres réels, nous considérons que le *sens* d'une démonstration du théorème de Thalès ne peut pas être donné sans une approche de ce concept de nombre. Nous avons montré, dans la partie consacrée aux difficultés et aux obstacles, qu'une approche de ce sujet dans le cadre de l'introduction du théorème de Thalès et de sa démonstration est indispensable.

Une première difficulté importante se pose à nous. Lorsque les élèves disposent d'outils implicites pour aborder une nouvelle notion, l'élaboration de situations didactiques est possible. Mais à l'inverse, ces situations peuvent s'avérer très difficiles.

Un obstacle psycho-génétique est également à prendre en compte, il s'agit du fait que les élèves du collège n'ont pas encore, tout le temps, à leur disposition les moyens de réduire leurs incertitudes seuls. De plus, le raisonnement déductif ne semble pas "inné" chez eux. La complexité de la démonstration du théorème de Thalès engendre le fait qu'elle ne peut pas faire l'objet d'une activité a - didactique.
Nous pensons que la partie de la démonstration du théorème de Thalès qui concerne les nombres réels ne peut bien évidemment pas se fonder sur des conjectures ou des prérequis attendus de la part des élèves.

Nous optons donc pour une démonstration guidée pas à pas, ostensive et pour laquelle peu d'initiatives sont effectivement laissée aux élèves.

Deux possibilités s'offrent alors à nous. Soit nous abordons la démonstration par la version encadrement des nombres réels, ce que nous faisons avec les élèves de troisième, soit nous empruntons, en quelque sorte, la voie des coupures de Dedekind, ce que nous faisons avec les élèves de quatrième.

Un autre problème didactique que nous rencontrons dans ce domaine est justement de trouver un compromis entre une certaine exigence de rigueur dans l'introduction des concepts nécessaires à l'élaboration du théorème de Thalès et le désir d'une part de ne pas utiliser un langage trop lourd et d'autre part d'admettre que des **préconstruits**, au sujet des nombres réels en particulier, sont inévitablement acceptés.
Les élèves de la classe de quatrième commencent à peine les démonstrations mathématiques.

Mais nous veillons par contre à ce qu'une propriété admise puisse s'insérer dans un corps de propriétés qui permettent de la démontrer sans ambiguïté théorique ou axiomatique c'est à dire, par exemple, sans utiliser à un endroit une proposition démontrée ultérieurement, ou le fait d'employer implicitement une propriété qui en fait revient à admettre ce qui est en train d'être démontré. En un mot, les propositions devront être **prédicatives** dans le sens donné par Poincaré à ce vocable (Pour la science).

Il faut, pour notre part, pouvoir concilier la rigueur mathématique, les difficultés et obstacles didactiques et l'éclairage de la propriété.

Des conceptions précises ont été relevées chez les élèves par Jaquier (1996) et corroborent la nécessité d'introduire des situations qui permettraient de lever certaines ambiguïtés liées aux différents nombres auxquels les élèves du collège sont confrontés.
Bien sûr, notre travail ne consiste pas à pallier toutes les difficultés, mais nous tentons de remédier à celles qui nous préoccupent et que nous avons nous-mêmes soulevées.

Un travail plus tôt dans la scolarité des élèves, au primaire par exemple, pourrait être entrepris à ce sujet. Il semblerait que ce soit parfois le cas, mais cela demanderait confirmation par une étude systématique.

Une autre difficulté didactique relativement importante que nous rencontrons lors de la mise en place de l'ingénierie, est à rattacher à l'enseignement déjà reçu par les élèves au sujet de la mesure des longueurs et de la proportionnalité.

La mesure des longueurs

Les obstacles que nous avons mis en évidence nous incitent à réfléchir plus amplement au sujet de la mesure des longueurs. Le concept de bidimensionalité de la mesure de surface à partir des seuls pavés unités est théoriquement suffisante car, en effet, c'est à partir de la mesure de l'aire du rectangle que se construit la mesure des parties quarrables ou mesurables du plan. Rogalski (1982) a montré qu'un modèle linéaire fonctionne tout de même relativement précocement pour la mesure des longueurs chez les élèves mais les difficultés sont notées pour passer au multidimensionnel.
Ses résultats mettent en avant qu'il est nécessaire d'avoir une bonne représentation du caractère unidimensionnel de la longueur pour une réussite moyenne pour la surface, mais c'est loin d'être suffisant. Cela constitue un autre argument pour prendre en compte la mesure des longueurs comme élément constitutif et primordial de l'enseignement primaire et du collège.

Pour aller dans le sens de l'importance de la mesure des longueurs, des obstacles sont également apparus, chez les élèves testés dans le cadre de la deuxième partie, en rapport avec les fractions et les quotients de mesures. Le principal résultat trouvé étant le fait que pour les élèves, des fractions de longueurs sont comparables si et seulement si, par exemple, les mesures de longueurs des segments qui les composent sont exprimées à l'aide de la même unité.

De plus, le fait que la droite réelle demeure rattachée à l'idée de mesure de longueurs, plaide en faveur d'une double approche à la fois liée à la mesure des longueurs et aux nombres réels. En effet, il nous paraît essentiel, au vu, d'une part, des programmes actuels qui réintroduisent, dans le cadre d'un chapitre d'arithmétique, une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et d'autre part en nous référant aux résultats que nous avons obtenus dans la partie historique et également lors d'un test au sujet des conceptions des élèves sur la mesure des longueurs, de réintroduire un lien entre les segments et leurs mesures et les nombres que rencontrent les élèves. Sans cette confrontation forcée, nous avons pu remarquer que des obstacles précis ou des préconstruits pour les apprenants subsistent. Par exemple, pour eux, même si $\sqrt{2}$ a été introduit à l'aide de la diagonale du carré, pour tout segment, on peut tout de même mesurer sa longueur et trouver sa mesure exacte forcément rationnelle ; il suffit pour cela de changer d'unité autant de fois que cela est nécessaire.

La démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec le côté permettrait à la fois de tenter de pallier ces obstacles présents chez les élèves mais également de confronter les apprenants à des objets idéalisés utilisés justement dans une démonstration et nécessaires au bon déroulement de celle-ci.

Mais nous ne construisons pas bien sûr une mesure de longueurs ou de grandeurs en général. L'introduction des nombres voire leur construction ne peut pas se faire au niveau des classes de quatrième ou de troisième, les concepts de base devant être introduits plus tôt, en $6^{ème}$ $5^{ème}$ par exemple Rouche (1992).

La deuxième raison qui nous incite à ne pas mettre au point une ingénierie complète incluant la définition des grandeurs et de leur mesure, est qu'il ne faut pas oublier notre objectif qui concerne le théorème de Thalès et qu'une telle entreprise diluerait encore plus le sens que pourrait prendre ce théorème pour les élèves. De plus, nous n'aurions pas le temps matériel à consacrer à ce type de travail.
Plusieurs ingrédients pourraient nous aider à la compréhension de ce théorème, mais nous ne pouvons pas justement nous consacrer, dans ce travail, à tous ces domaines et en particulier aux fractions, aux nombres, aux nombres rationnels ou à toutes les formes de proportionnalité. Nous ne pouvons pas nous appuyer sur ces connaissances. Cela pourrait faire l'objet, là aussi, d'une étude ultérieure. Nous pourrons bien sûr nous attendre à des difficultés à ce sujet, mais notre objectif n'est pas de prendre en charge la construction des connaissances liées aux grandeurs, même si actuellement, il semble tacitement admis que les élèves ont des pratiques sur les grandeurs acquises au primaire alors qu'il n'en est rien.

Nous ne construisons pas une approche de la mesure des longueurs avec les élèves, c'est pour cette raison qu'une des questions fondamentales à laquelle nous répondons pour cette partie est la suivante :

Comment préserver l'essentiel au niveau de la mesure des longueur qui est une notion indispensable, mais pas suffisante, à l'attribution d'un sens à cette propriété de Thalès ?

Un lien avec la recherche du PGCD de deux nombres entiers est également enrichissant. Dans le cadre du cours d'arithmétique niveau $3^{ème}$, la recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide est au programme. La méthode pourrait être la même pour la recherche d'une commune mesure entre les longueurs de deux segments, à la différence près que dans ce dernier cas, l'algorithme peut ne pas s'arrêter. Cela nous paraît être une autre façon de bien faire comprendre aux apprenants, grâce à ce parallèle de deux méthodes, le caractère subtil des longueurs incommensurables.

I.1.3 La proportionnalité

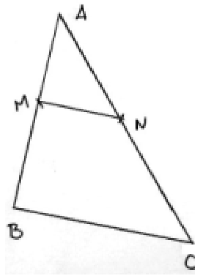
a) Choix de la forme de proportionnalité qui a été fait

Nous retenons également le concept de proportionnalité comme un des éléments moteurs de la construction du *sens* concernant le théorème de Thalès. Ce choix est légitimé par, d'une part, la signification intrinsèque de cette propriété et d'autre part par l'environnement écologique qui caractérise l'enseignement de la proportionnalité au niveau collège. Nous avons montré que la proportionnalité est une notion fondamentale dans l'enseignement des mathématiques au collège. Dans le cadre de l'étude épistémologique, de l'étude des ouvrages et des préparations de cours, nous avons pu relever différentes formes de proportionnalité adoptées pour l'étude du théorème de Thalès. Nous avons également explicité toutes les formes possibles du théorème, toutes les versions glanées dans l'histoire et adaptées au monde contemporain. Nous avons obtenu deux catégories que nous allons analyser, l'une liée à la proportionnalité de longueurs de segments et à la projection et l'autre liée à l'homothétie.

Les inconvénients de l'approche projective sont multiples. Pour la figure dite papillon, il a été montré, par Pfaff (1995), que la projection est très mal maîtrisée par les élèves. Par ailleurs, elle a montré que les parallèles soient prolongées ou non dans le cas de la figure papillon est engendré, chez les élèves, un raisonnement de type homothétique.
L'un des avantages de l'approche homothétie est que pour reconnaître la figure, il suffit de repérer un triangle et son agrandissement ou sa réduction. Le point d'intersection des deux droites

exerce une polarisation visuelle qui permettrait une meilleure reconnaissance de la propriété à appliquer. De plus, avec cette version, on habitue les élèves à la vision de l'homothétie, abordée au Lycée en classe de première. La partie du programme agrandissement - réduction peut être facilité. Enfin, nous pouvons considérer que les mises en équations obtenues par cette version permettent aux élèves d'être confrontés à des équations quotients assez complexes et ce en dehors du champ de l'algèbre.

Les inconvénients de l'approche homothétie sont nombreux. Toutes les égalités de rapports privilégient le sommet commun aux deux triangles ce qui peut alourdir les calculs pour les élèves. Une difficulté est à prévoir au sujet "des petits bouts". Si on impose l'aspect homothétie, l'élève ne peut pas écrire : AM/MB = AN/NC = MN/AB ; les explications sont rendues difficiles puisque la référence à une double approche de la proportionnalité n'est pas possible dans cette version unique. Mais on interdit également à l'élève d'écrire : AM/MB = AN/NC ou directement 6/4 = x/5. Nous pouvons comprendre pourquoi dans certains cas, un aspect est privilégié par rapport à l'autre, c'est justement pour éviter des écritures de la forme : AM/MB = MN/AB. Afin de s'approprier réellement cette propriété qui est liée d'une façon générale à la proportionnalité et aux formes, l'élève devrait être capable



de décider lui-même de la méthode à utiliser suivant la situation qui lui est proposée. Notons que Pfaff (1995) a montré que les situations qu'elle a appelées T et P, T pour triangles et P pour parallèles (trois parallèles et deux sécantes), favorisent, pour la résolution d'un exercice de calcul de longueur, la mobilisation de la projection au détriment de l'homothétie. Par contre, le calcul d'une longueur d'un des côtés parallèles influence l'homothétie. De même, le calcul d'une longueur d'un côté non parallèle paraît plus simple pour les élèves sur un dessin appelé TC (papillon) que sur un dessin T, l'homothétie étant reconnue plus facilement.

Notons que Michonneau et Pfaff (1990) ont également montré que devant une difficulté importante, les élèves tentent d'appliquer la recherche de la quatrième proportionnelle selon la procédure quaternaire où la proportion est envisagée comme égalité de deux rapports a/b = c/d, en tant que quadruplé auquel est rattaché le produit en croix.

A la lumière de ce que conclut Pfaff dans son travail, nous pouvons constater que la mobilisation, de la part de l'élève, de l'une ou de l'autre des versions dépend de la situation qui est proposée dans l'exercice. Pour enrichir la prise de sens du théorème de Thalès pour les élèves, il nous a semblé intéressant, *a priori*, de scinder son étude en deux parties faisant références à deux aspects différents de la proportionnalité.

La **proportionnalité externe** (Rouche, 1992), ou **procédure analytique ou fonctionnelle** (Bekaye Sokoma, 1989), concerne les rapports des côtés des deux triangles qui apparaissent dans l'énoncé de la propriété de Thalès, alors que la **proportionnalité interne ou scalaire** est en relation avec les quotients des différents segments pris, d'une part, d'un "côté" de la figure, et les quotients de différents segments relevés, d'autre part, de l'autre "côté" de la figure. Autrement dit, dans la figure ci-dessus, la proportionnalité externe donne : AM/AB = AN/AC = MN/BC, alors qu'avec la proportionnalité interne (aux segments [AB] et [AC]), nous obtenons les égalités suivantes : AM/MB = AN/NC ; AM/AB = AN/AC ; BM/BA = CN/CA. Bien sûr il est également possible de faire apparaître des rapports externes avec ces différents segments pris de part et d'autre pour former un quotient, ou des rapports internes dans les deux triangles, mais nous ne choisissons pas sciemment ces options qui risqueraient de brouiller l'accès au sens que nous recherchons qui est en partie caractérisé par la distinction de deux proportionnalités et qui est de toute manière difficile à obtenir. Rapports internes "triangles", que nous ne retenons pas, sont les suivants : AM/MN = AB/BC ; AN/MN = AC/BC ; AM/AN = AB/BC. Rapports externes "segments", que nous ne retenons pas, sont les suivants : BM/CN = BA/CA ; AM/AN = AB/AC ; AM/AN = BM/NC.

b) Les raisons plus précises de ce choix

Intérêts de la double approche interne externe pour le théorème de Thalès :

Au sujet des différentes formes de proportionnalité, si nous nous référons à un travail de Comin (2001), pour 34% des élèves de plusieurs classes de collège, la proportionnalité dans le théorème de Thalès est reliée au produit en croix, pour 27% aux rapports que nous appelons internes segments et pour seulement 11% aux rapports externes triangles.
Notons que, dans la suite de notre travail, du fait que les rapports internes sont tous liés aux segments et les rapports externes aux triangles, nous ne donnons plus la précision triangle ou segment.

Le faible pourcentage d'apparition du rapport externe nous incite à penser que cette approche n'est pas familière aux apprenants.

De plus, le sens même de nombreux rapports obtenus par application ou par déduction du théorème de Thalès et leur différentiation conceptuelle qu'il est souhaitable de transmettre, ne semblent possibles, mathématiquement, que par cette double approche.

Un autre aspect fondamental que nous percevons dans cette double approche de la proportionnalité, proportionnalité interne et proportionnalité externe, et d'une double approche de l'espace, méso-espace et micro-espace, par l'intermédiaire du théorème de Thalès, est à rattacher à l'homogénéité de l'espace chère à Berthelot et Salin (1992).
Le passage du méso-espace au micro-espace, de l'aspect homothétique à la proportionnalité interne, par exemple, permet sans doute d'aborder ce problème de lien intrinsèque qui existe entre les différents espaces auxquels sont confrontés les apprenants.
Pour les élèves, les objets d'un des trois espaces n'ont pas forcément de lien avec des objets d'un autre espace. Même si parfois l'un représente l'autre, la correspondance entre les deux, d'après Berthelot et Salin, ne se fait pas spontanément chez les élèves. De plus ce rapport n'est pas un objet d'étude dans les classes de collège. Nous ne prétendons absolument pas épuiser le sujet n'y même le traiter, mais notre ingénierie permet au moins de l'aborder.

Elargissement de l'intérêt de la proportionnalité interne externe à d'autres domaines de l'enseignement :

Nous avons pu remarquer que l'enseignement de ces concepts de rapports interne - externe et de similitude se justifie intrinsèquement mathématiquement mais également par le fait que ces concepts, liés à la proportionnalité, concernent de nombreux domaines très variés de la réflexion humaine et que les lois de la nature s'y réfèrent souvent. Il est possible de profiter de ce théorème de Thalès démontré par les élèves pour définir ce qu'est une forme.
Une forme est ce qui se conserve lorsque l'on change les dimensions mais que l'on garde les proportions.

Nous pouvons également citer, pour montrer l'importance de ces rapports externes et internes, sans que cela soit abordé avec les élèves, le cas de la relativité galiléenne.
Les expériences faites dans un laboratoire ou dans un observatoire en mouvement rectiligne uniforme donnent des résultats identiques à ceux fournis par les mêmes expériences d'un autre observatoire, se déplaçant, par rapport au premier selon un mouvement rectiligne uniforme.
Par exemple, dans un train animé d'un mouvement rectiligne uniforme, un passager verra tomber un corps verticalement par rapport au plancher du train quand un manoeuvre sur la voie le verra, quant à lui, tomber autrement, animé par la composition du mouvement du train et du mouvement vers le sol, c'est à dire que la trajectoire sera une parabole.

Mais ces deux observations aboutissent à la même loi physique, celle de la chute des corps. Il y a invariance des lois physiques qui exprime l'équivalence des points de vue. Les grandeurs physiques mesurées dans chaque système vont changer, mais les relations entre ces grandeurs, d'un système à l'autre ou à l'intérieur de chaque système, ne changent pas.
Ce principe de relativité constate l'invariance des lois d'équivalence des points de vue pour toutes les expériences de mécanique effectuées dans des systèmes de coordonnées en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Pour une organisation praxéologique plus complète :

Pour terminer sur ce sujet, nous dirons que la double approche que nous proposons permet également d'introduire le cosinus, le sinus et la tangente comme étant des coefficients de proportionnalité, à partir d'égalités démontrées dans le chapitre consacré à l'étude du théorème de Thalès.

A partir de la proportionnalité interne, AM/MB = AN/NC, AB/MB = AC/NC = AM/AB = AN/AC , quotient obtenus dans la même figure que précédemment mais en y rajoutant bien sûr le fait que les droites (MN) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB), nous pouvons, par exemple, en classe de 4$^{\text{ème}}$, introduire le cosinus. Car, nous obtenons les égalités suivantes : AM/AN = AB/AC, AB/AC = MB/NC, MB/NC = AM/AN. Ainsi, nous avons : AM/AN = AB/AC = MB/NC = cos $\hat{A}$.

Dans un autre chapitre du cours, en se plaçant dans un triangle rectangle ABC rectangle en A, après avoir défini le cosinus, nous pouvons également démontrer le théorème de Pythagore. En effet, pour cela il suffit d'abaisser la hauteur issue de A, elle coupe le côté [BC] en D. On a alors : cos $\hat{B}$ = BD/BA = BA/BC et cos $\hat{C}$ = DC/AC = AC/BC. Ainsi, on obtient AB² = BC $\times$ BD et AC² = BC $\times$ DC. Donc finalement, en additionnant membre à membre, on obtient : AB² + AC² = BC (BD + DC). Soit encore : AB² + AC ² = BC² ce qui est le théorème de Pythagore. En fait, cette démonstration peut se faire dans la même figure sans utiliser le cosinus, simplement en replaçant les trois triangles rectangles ABD, ABC et ADC de telle façon qu'ils se retrouvent dans une situation qui permet d'appliquer le théorème de Thalès. Rien n'empêche de toute façon de démontrer le théorème de Pythagore d'une façon plus géométrique, à l'aide des aires par exemple.

Le théorème de Thalès permettrait également d'introduire les autres lignes trigonométriques. Partant de la proportionnalité externe, nous avons : AM/AB = AN/AC = MN/BC. De la première égalité AN/AC = MN/BC nous en déduisons : BC/AC = MN/AN = sin $\hat{A}$ et de la seconde, AM/AB = MN/BC on obtient : BC/AB = MN/AM = tan $\hat{A}$, ce qui peut être introduit, vu les programmes, en classe de troisième. Actuellement, les lignes trigonométriques sont introduites de façon artificielle, soit par leur définition directe, soit par ostension assumée. Une autre fonction d'introduction peut également être assurée par cette version du théorème de Thalès, il s'agit de l'établissement de la forme canonique, c'est à dire non générale, d'une équation de droite : y = a.x + b.

L'égalité des rapports de projection peut bien sûr être également obtenue grâce à cette proposition, mais les projections n'étant plus au programme du collège, nous ne nous étendons pas sur ce sujet.

Il est également possible de démontrer ou plus exactement de donner sens et de justifier des formules ou des propriétés antérieurement admises, comme par exemple la longueur du cercle. Pour cela, il suffit de considérer deux circonférences quelconques de rayons différents respectifs r et r' et supposées concentriques, de centre O. Inscrivons alors, dans le cercle de rayon r supposé le plus grand, un polygone régulier ABCDEF de n côtés, par exemple un hexagone, et appelons A', B', C', D', E', F', les points de concourt des rayons OA, OB, OC, OD, OE, OF avec le second cercle. Il faut tout d'abord démontrer, grâce à l'application du théorème réciproque de

Thalès, que les droites (AB), (BC), (CD), (DE), (EF), (FA) sont parallèles respectivement aux droites (A'B'), (B'C'), (C'D'),(D'E'), (E'F') et (F'A').

Ensuite par l'application du théorème direct, nous avons : OA'/OA = A'B'/AB ce qui permet d'écrire : AB/OA = A'B'/OA' soit encore, nAB/OA = nA'B'/OA'. Ainsi en désignant par p et p' les périmètres des deux polygones, nous obtenons : p/r = p'/r' et cela quel que soit le nombre de côtés ; ici, nous en avons 6. Si nous supposons que ce nombre augmente indéfiniment, nous allons imaginer ce qu'il peut se passer : étant donné un cercle et deux polygones réguliers, l'un inscrit abcdef, l'autre circonscrit ABCDEF, d'un nombre de côtés quelconque. Si nous reportons sur une droite deux longueurs Op et OP respectivement égales aux périmètres de ces deux polygones, les points p et P varient avec le nombre de côtés et se trouvent de part et d'autre du point C, la longueur OC correspondant à la longueur de la circonférence.

On peut admettre avec les élèves que ces deux points p et P se rapprochent autant que nous le voulons de C lorsque le nombre de côtés des polygones augmente indéfiniment.
Nous disons alors que la longueur OC est la limite commune vers laquelle tendent les deux périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits, lorsque le nombre de leurs côtés augmente indéfiniment. Cette longueur OC s'appelle la longueur circonférence ou du cercle.

Ainsi, si nous revenons à notre problème, si nous augmentons le nombre de côtés indéfiniment, p et p' vont "tendre" vers les longueurs C et C' des deux cercles. Donc nous aurons : C/r = C'/r' ou alors C/2r = C'/2r'. Cet exercice d'application devrait bien sûr être adapté aux niveaux des élèves de collège. Nous obtenons alors un résultat très connu des élèves, mais que nous venons, en partie, de justifier : le rapport de la longueur d'un cercle à son diamètre est un nombre constant, ce nombre est le nombre π, la première du mot grec qui signifie circonférence : $C = 2\pi \times r$.

Retrouvons ce résultat en reprenant les deux hexagones ABCDEF et abcdef l'un inscrit l'autre circonscrit à un cercle. La perpendiculaire à la droite (AB) coupe les segments [AB] et [ab] respectivement en H et h. D'après le théorème de Thalès, nous avons : OH/oh = OA/Oa = OB/Ob = AB/ab. Nous admettons que la circonférence, ligne convexe, est inférieure à la longueur de la ligne convexe qui l'enveloppe ABCDEF et supérieure à la ligne convexe qu'elle enveloppe abcdef. Si l'on désigne par r le rayon et par d le diamètre du cercle, le côté ab de l'hexagone inscrit est r et par conséquent, son périmètre est 6r.

Quant à l'hexagone circonscrit, nous savons que AB = (OH/oh) ab. Or d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle Oah, nous avons : Oh ^{2}+ AH^2= aO^2, ce qui donne encore :

$Oh^2 = Oa^2 - Ah^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$. Et par suite nous avons : $\frac{OH}{Oh} = \frac{r}{\sqrt{\frac{3}{4}r^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.Le périmètre de l'hexagone circonscrit ABCDEF est par conséquent égal à 3d. $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3{,}46...d$. Ainsi, la longueur de la circonférence est supérieure au produit de son diamètre par 3 et inférieur au produit de son diamètre par 3,46... En d'autres termes, le rapport de la circonférence à son diamètre est compris entre 3 et 3,46...On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas de la valeur du diamètre. Nous pourrions continuer indéfiniment. Il serait également possible de retrouver la formule de l'aire du disque.

Nous avons pu remarquer que les applications en tant qu'outil du théorème de Thalès, dans les ouvrages actuels, sont limitées à la construction d'une quatrième proportionnelle, à la construction d'un point partageant un segment en un rapport donné, par exemple, ou à l'espace, ou à la notion d'agrandissement réduction qui est elle-même limité par l'absence de l'étude des mesures de grandeurs que sont les longueurs, les aires et les volumes, voire inexistante. A chaque fois, nous nous trouvons dans une organisation mathématique locale (Chevallard, 1999).

Or avec les choix que nous venons de faire, le théorème de Thalès s'inscrit parfaitement dans une dialectique outil - objet, en étant tout d'abord un objet d'étude pour devenir dans des chapitres à venir, un outil d'introduction de notions nouvelles. Nous sommes alors en présence d'une organisation mathématique régionale. De plus, cette dialectique ancien nouveau peut être assurée par l'introduction en classe de seconde de l'objet homothétie, et ces deux objets tombant eux-mêmes en obsolescence interne grâce à l'introduction, dans l'enseignement supérieur, des espaces vectoriels. Mais à ces avantages s'ajoutent inévitablement des écueils.

Les contraintes éventuelles de cette approche de la proportionnalité

Les aspects intéressant de la version de la proportionnalité que nous choisissons pour le théorème de Thalès sont multiples et variés. Des questions initiales fondamentales doivent être posées afin d'analyser les éventuelles contraintes de cette approche du théorème.

Par exemple, nous devons nous interroger sur la possibilité d'éviter un mélange, une confusion, de la part des élèves, entre les deux approches notamment lors de l'expression des rapports de longueurs. Il est également important de savoir si cette double approche favorise les élèves, entrant en seconde, quant à l'introduction de l'homothétie. Mais nous ne pouvons pas répondre à toutes les questions, certaines restent ouvertes.

Rajoutons pour finir qu'en matière d'enseignement, et plus particulièrement en ce qui concerne le théorème de Thalès, aucune version ne semble totalement satisfaisante. En effet, nous avons pu nous rendre compte qu'au cour de l'histoire, de la plus ancienne à la plus récente, ces différentes approches se sont succédées, alternativement, sans qu'une d'entre elles laisse définitivement son empreinte dans l'enseignement.

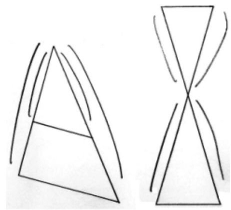
I.1.4 Prise en compte des différentes difficultés, obstacles et variables didactiques

Nous devons également tenir compte des différentes variables didactiques que nous avons pu mettre en évidence dans la deuxième partie. Nous avons, en particulier, montré que *l'orientation de la figure*, *la distribution des longueurs* sont génératrices d'obstacles ou du moins de difficultés. En particulier, les élèves ne comprennent pas que certaines écritures de rapports sont légitimes et d'autres non. Nous faisons l'hypothèse que cela est dû à l'enseignement actuel de ce théorème.

De plus, les élèves se réfèrent le plus souvent à des *figures archétypes* ou des *figures prototypes*. En établissant une ingénierie mêlant deux aspects de la proportionnalité, nous considérons que cela pourrait permettre aux apprenants de mieux visualiser les figures en question, de diversifier les procédures d'appréhension de celles-ci et d'application du théorème utilisé plutôt que de se contenter d'un même algorithme pour toutes les figures comme cela se produit dans l'enseignement actuel. Nous pensons, grâce à l'option de la version du théorème que nous choisissons, diminuer les effets d'une référence à des *figures prototypes*. Le lien avec l'algèbre et les équations dites quotients, serait tout de même également possible dans certains cas précis.

La rupture entre **l'appréhension géométrique** et **l'appréhension numérique** des énoncés proposés, pourrait, à notre avis, en partie être gommée par une double approche de la proportionnalité. Cela permettrait certes de rester en contact avec les nombres qui apparaîtront sur la figure, mais aussi de rechercher non plus des relations uniquement numériques indépendantes du dessin, mais de tenter de découvrir ce type de relations en liaison totale avec les dessins. Les figures conditionnent alors les écritures des rapports numériques.

Cette approche permet également d'augmenter le nombre de figures congruentes. Les deux types de figures congruentes avec la version actuelle sont représentés ci-contre, soit en tout 12 figures ce qui correspond, par rapport au total des figures possibles, à un pourcentage de 17%. Quatre types de figures congruentes concernent la version proposée :



soit en tout 20 figures. Ce qui correspond, par rapport à la totalité, à un pourcentage de 28%. Ce qui fait une augmentation de 11 points.

Nous avons vu que des erreurs apparaissaient lorsque la non congruence concernait un côté pour lequel toutes les longueurs étaient tout de même connues. Ces erreurs, voire ces obstacles, étaient encore plus flagrants lorsque la non congruence était liée à des côtés de la figure où la longueur inconnue apparaissait, ce qui correspond au total à 32 figures, et ce d'autant plus si cela était cumulé à une non congruence de l'autre partie du dessin, ce qui concerne 16 figures. Donc ce qui est également intéressant de comparer, se sont justement ces pourcentages. Sur les 16 dernières figures citées, 8 sont rendues congruentes avec la nouvelle formule, alors qu'aucunes ne l'étaient précédemment soit 50% et 25 % par rapport à la totalité des figures non congruentes contenant un calcul préalable avec x.

Enfin, il est possible, grâce à cette version, de tenter de faire comprendre aux élèves pourquoi certains rapports sont légitimes et d'autres ne le sont pas, ce qui est un point crucial. Par exemple, dans la figure précédente, l'égalité AM/MB = AN/NC est vraie mais devient fausse si on lui adjoint le rapport MC/BC. Sans une double approche de la proportionnalité, l'explication aux apprenants semble très difficile à donner puisqu'elle relève de concepts assez complexes.

I.2 Synthèse

Les résultats didactiques et épistémologiques obtenus aux parties précédentes, nous permettent de conclure que les fonctionnalités du théorème de Thalès peuvent être mises en évidence à travers une situation problème faisant apparaître les trois points fondamentaux que sont le méso-espace, les nombres réels, la mesure des longueurs et la proportionnalité. L'approche liée au méso-espace se fait grâce à la *mesure de distances inaccessibles* et à un travail direct dans le méso-espace et à la représentation, à la modélisation de ces actions. La modélisation de la situation est rendue nécessaire par des anticipations qui sont demandées aux élèves. La situation fondamentale relève de deux problématiques bien distinctes, la problématique spatiale et la problématique géométrique, qui sont séparées dans notre ingénierie.

Mais pour être efficace, la situation relève en premier lieu d'une problématique pratique. Elle porte sur des objets petits liés au méso-espace, faciles à comparer et pour lesquels la réussite ou l'échec sont aisément décelables.

Nous choisissons de scinder en deux le théorème en étudiant tout d'abord le théorème (D.P.C.T), qui se réfère à la proportionnalité interne, pour en déduire ensuite le théorème de Thalès, qui se réfère à la proportionnalité externe. L'intérêt de cette double approche de la proportionnalité est triple. D'une part des études ont montré que les élèves ne sont pas familiarisés avec l'approche externe et d'autre part, les différents rapports qui peuvent être obtenus grâce au théorème de Thalès ou à des résultats connexes ne peuvent prendre sens sans cette double approche. Enfin, cette version devrait permettre de diminuer les effets d'orientation de la figure et de distribution des longueurs qui engendrent des erreurs caractéristiques de la part des élèves. Cela devrait aussi atténuer les effets des figures prototypes et augmenter le nombre de figures congruentes. Cette approche nous permet également d'enrichir l'organisation praxéologique.

Nous tentons une approche de la démonstration du théorème (D.P.C.T) par les coupures et les segments emboîtés à la fois pour donner du sens à ce théorème, pour aborder l'obstacle des nombres réels et de la mesure des longueurs. La difficulté de la preuve nous incite à laisser d'initiative aux élèves dans son élaboration. En ce qui concerne la mesure des longueurs, deux difficultés doivent être atténuée grâce à notre ingénierie. D'une part le fait de considérer que pour être comparables, les mesures de longueurs qui composent deux fractions doivent être exprimées à l'aide de la même unité et d'autre part que la mesure d'une longueur est forcément rationnelle et directement mesurable.

CHAPITRE 2

ELABORATION DES SITUATIONS PROBLEMES INTRODUISANT LE THEOREME DE THALES

Introduction

Dans cette partie, nous explicitons les différentes activités que nous proposons pour introduire et démontrer le théorème de Thalès. Quatre objectifs sont visés.

- tenter de réellement travailler dans le méso espace
- donner et utiliser une version du théorème mettant en évidence une approche interne et externe de la proportionnalité.
- à l'aide de cette double approche, voir si des erreurs caractéristiques, de la part des élèves, disparaissent, en particulier celles liées à la distribution des longueurs et à l'orientation des figures et si d'autres apparaissent
- mettre en évidence l'écueil des nombres réels dans une démonstration du théorème.

Mais pourquoi se fixer de tels objectifs ?

Les situations problèmes que nous mettons en place doivent constituer un levier important pour faire évoluer les **représentations** des élèves au sujet du théorème de Thalès et les procédures d'approche et de résolutions de tâches qu'ils adoptent devant une situation que nous avons mises en évidence dans la partie consacrée aux variables didactiques. En particulier, en toute fin d'étude, nous essayons de savoir si l'approche que nous proposons du théorème de Thalès, fondée sur une proportionnalité interne et externe, favorise la diminution de certaines erreurs caractéristiques associées soit à des variables liées à la figure soit à des variables liées à la distributions des longueurs c'est à dire globalement à des figures pathogènes.

La seconde principale fonction de ces situations problèmes est de donner du **sens** au théorème en travaillant dans le cadre d'une situation proposée dans le méso espace. Le **sens** de ce théorème est également donné par une double approche de la proportionnalité et par une proposition de démonstration mettant en évidence l'écueil des nombres réels.

I. Les prémisses

La problématique générale qui est liée à toutes les activités est la mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace, que nous classons en deux catégories : les distances dites "verticales" et les distances dites "horizontales".

I.1 Les deux idées principales qui sont à l'origine des activités

Enfant, nous sommes nombreux a avoir tenté de cacher exactement le disque argenté de la lune à l'aide d'une pièce tenue à bout de bras. C'est une idée qui nous semble bonne afin que les élèves se questionnent sur cette situation.

L'*ombre* est également une façon très ancienne de ramener dans le micro-espace l'étude de phénomènes du méso ou du macro-espace (Szabo et Maula 1986). Les manipulations qui sont alors en jeu mettent souvent en évidence le lien entre un objet et l'ombre de cet objet. Bien que cela fasse référence aux rapports de projection, nous avons pensé que nous aurions à prendre en compte l'ombre. Elle est utilisée dans notre ingénierie comme outil de réponse expérimentale à une situation fondamentale mais la conceptualisation et la compréhension de cette situation se fait grâce à d'autres objets.

I.2 Les objectifs primordiaux et méthodologie

Un certain nombre d'activités successives s'enchaînent pour aboutir à la situation fondamentale et à sa modélisation. Plus précisément, le but des premières séances est d'obtenir que les élèves proposent des **solutions pratiques** à la situation problème de **mesure des longueurs inaccessibles** qui leur est imposée, pour ensuite passer à une phase de conceptualisation.

En second lieu, l'objectif est de familiariser les élèves avec l'espace qui fait l'objet de l'étude plus approfondie de la **situation fondamentale**. En effet, la richesse d'une activité dépend de notre capacité à inclure dans son élaboration les deux problématiques différentes introduites par Brousseau. Une première partie de la situation fondamentale qui suit cette "mise en condition", est consacrée à une **problématique pratique** en rapport avec le méso-espace, qui est à son tour complétée par une situation liée au savoir géométrique et à une **modélisation** de cette situation dans le micro-espace.

Enfin, toutes les activités initiales se référant à une **problématique pratique** commune, en fin d'ingénierie, nous revenons à ce type de situations pour tenter de donner une solution à la question initiale dans l'espace concerné. En effet, il semble important (Berthelot et Salin, 1992) de savoir exploiter, au terme d'une étude, dans l'espace initial du problème, la solution géométrique obtenue dans l'espace de la feuille.

Nous élaborons les situations fondamentales qui sont fondées sur les informations que nous avons recueillies dans les parties précédentes et nous procédons à une analyse du milieu matériel à disposition des élèves. Une analyse *a priori* de chaque séance s'articule autour de trois points. Nous allons préciser en particulier leurs objectifs, le scénario et les tâches. Nous décrivons globalement ces tâches, les contraintes de ces situations et le choix des variables que nous avons fait. Puis, nous communiquons le compte rendu des observations de leur mise en place avec les élèves et notre analyse *a posteriori*.

I.2.1 Analyse *a priori*

Objectifs :

- Qu'attend-on de cette activité ?
- Comment s'insère cette situation dans l'agencement général de la situation fondamentale que nous proposons ?

Tâches et scénario :

- Quel matériel est à disposition des élèves ?
- Globalement, quelles sont les tâches à accomplir ?
- Quelles sont les contraintes de la situation ?
- Quelles en sont les variables ?

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

- Quel est le partage *a priori* des responsabilités entre élèves et professeur pour chaque tâche et pourquoi peut-on attendre ce type de partage ?
- De quelle problématique (pratique, géométrique ou de modélisation) relève la séance ?
- Qu'est-ce que les élèves ont comme moyens pour avancer dans la liste des tâches proposées?
- Pouvons-nous prévoir le comportement des élèves ?
- Quelle différence faisons nous entre ce qui est possible en mathématiques et ce que les élèves savent, leurs habitudes ?

Après avoir exposé et synthétisé ce qui s'est réellement passé au cours de la mise en place de ces situations avec les élèves, nous passons à une analyse *a posteriori* en comparant ces résultats avec les points de notre analyse *a priori*.

I.2.2 Les observations

Notre dispositif d'observation se compose d'une part des enregistrements vidéo de toutes les séances, onze pour la classe de quatrième et onze pour la classe de troisième, et d'autre part des observations des groupes de travail lorsque ceux-ci ont été constitués. Les enregistrements concernent à la fois les phases de travail et de discussion collectifs et les travaux des groupes.

I.2.3 Analyse *a posteriori*

L'analyse *a posteriori* est fondée sur une analyse des données que nous avons collectées au cours des différentes séances. Il s'agit des fiches de collectes de mesures et d'observation faites par les élèves, des dessins, des modélisations de la situation fondamentale effectuées par les élèves en groupe et bien sûr des protocoles d'observations et des transcriptions des enregistrements effectués. En particulier, nous répondons aux questions suivantes :
- Les objectifs ont-ils été atteints ?
- A quel moment l'expérimentateur a-t-il dû prendre la main et pour quelle raison ? Etait-ce prévu ?
- Quel a été le partage effectif des responsabilités entre les élèves et l'expérimentateur ?
- Certaines choses n'ont-elles pas fonctionné et pourquoi ?

II. Les activités proprement dites

II.1.1 Pour les élèves niveaux quatrième

a) Description générale de l'ingénierie niveau quatrième

Avant de rentrer dans les détails de chaque séance, nous proposons de décrire succinctement l'ingénierie afin d'obtenir une vue d'ensemble de son déroulement.

Une première séquence de l'activité I permet aux élèves de comprendre que les droites qui joignent les points d'un objet, en l'occurrence la coupe d'un escalier en carton collée sur une fenêtre, à leurs ombres projetées sur une feuille de papier sont parallèles. Dans cette même séquence, les élèves doivent également être capables de montrer que les mesures des longueurs de bandes de papiers collées parallèlement sur des fenêtres sont proportionnelles aux mesures de leurs ombres obtenues sur des plans parallèles au sol. Ces deux observations leur permettent de trouver une méthode pour calculer, par exemple, une hauteur inaccessible.

Pour commencer, ce calcul porte sur la hauteur d'une fenêtre de la classe pour ensuite passer, dans la séquence 2 de cette activité I à la hauteur d'un panneau de basket. Cette dernière situation est représentée par les élèves dans le plan.

Au cours de la séquence 3 de cette activité, les élèves doivent comprendre de façon pratique le phénomène d'éclipse de soleil en particulier en le schématisant. Cette nouvelle situation de référence pour le théorème de Thalès doit permettre, par la schématisation d'un astre au tableau noir, la mise en évidence des deux conditions nécessaires à une bonne visée avec une lorgnette : être en face et à la bonne distance.

Ces deux conditions sont indispensables au bon déroulement de la séquence 4 a) au cours de laquelle les élèves, en binômes, visent avec des lorgnettes toutes différentes et marquent leur lieu de visée sur le sol à l'aide d'un carton. Elles ont été construites de telle façon qu'à la fin de la séance, trois tas bien distincts de cartons apparaissent. La visée à l'aide d'une lorgnette percée de cinq trous met en évidence l'alignement des divers lieux de visée et le parallélisme de la droite qu'ils définissent avec la mire.

Le but est alors de comprendre pourquoi les lorgnettes, pourtant très distinctes, se rassemblent de la sorte ?

Ainsi, l'objectif général de la séquence 4 b) est de savoir, sans se rendre dans la cour, si une mire pourrait être vue à l'aide d'une lorgnette dont on connaît les caractéristiques. Pour cela, une schématisation puis une modélisation du problème sont rendues nécessaires. Il est demandé aux élèves de produire un dessin générique de la situation de visée. Le schéma est retenu pour ensuite réellement passer à la phase de modélisation. Les dessins sur papier calque, à l'échelle, de toutes les lorgnettes de chaque tas obtenus précédemment sont alors effectués. L'équivalence des lorgnettes d'un même tas est obtenue en pratique par superposition des calques et par coïncidence de leurs champs de visée. Cette même équivalence est reliée ensuite à la proportionnalité.

La problématique pratique intervient lorsque les élèves ont à manipuler les lunettes, dans deux séquences, pour en retenir des informations utiles. Mais la problématique de modélisation prend le relais lorsqu'il s'agit d'anticiper sur les réponses qui pourraient être encore obtenues par l'expérience, par la visée, mais dont l'expérimentateur exige qu'elles soient trouvées dans le système symbolique du modèle de la situation élaboré par les groupes d'élèves.

C'est à ce moment-là que la problématique géométrique commence. La conjecture peut faire partie des théorèmes connus lorsqu'elle est acceptée par tous. Cette dernière phase correspond à la partie justification, la démonstration servant à la validation des conjectures. Ce savoir est ensuite institutionnalisé et étiqueté comme devant être su par les élèves.

La propriété est démontrée grâce au théorème des milieux qui est lui-même démontré au début de l'activité. Un résultat équivalent est prouvé dans le trapèze. Ces deux théorèmes sont utilisés ensuite pour démontrer une proposition dans laquelle un côté d'un triangle est partagé en trois segments de même longueur. Puis, nous passons à quatre et l'on démontre le résultat pour un rapport décimal, rationnel, puis irrationnel. La suite de la démonstration consiste à mettre en évidence et à démontrer le théorème faisant apparaître trois rapports égaux. Le but est de distinguer ces deux théorèmes en montrant qu'ils se réfèrent à des formes de proportionnalités bien distinctes. Un exercice d'application de mesure de distances dans le méso-espace prend place à la fin. Enfin, un retour à la situation fondamentale, qui consiste à mesurer des distances inaccessibles, en l'occurrence un panneau de basket, est entrepris avec la construction et l'utilisation d'un télémètre.

b) Activité I

Cette activité est une mise en condition qui permet aux élèves de faire leur la problématique générale de mesure de distances inaccessibles comme la hauteur d'un bâtiment, la hauteur d'un arbre, la largeur éventuelle d'un ravin.

Les différentes séquences qui la composent concernent uniquement l'introduction du premier cas d'application du théorème de Thalès, c'est à dire celui de la figure "gigogne". L'élève doit atteindre un objectif final qui a pris du sens pour lui et il peut alors, dans le cadre d'une autre activité, aborder avec ses pairs les questions sous-jacentes de compréhension du phénomène et de la démonstration du théorème mathématique qui lui est rattaché. Mais avant tout cela, si nous voulons qu'il y ait une réelle dévolution de la problématique aux élèves, un travail en amont de mise en évidence de certaines propriétés des rayons du soleil, des relations qui existent entre des objets du méso-espace et leurs ombres à travers une situation dans laquelle les mesures sont tout de même plus faciles à obtenir que dans la cour par exemple, nous semble indispensable.

Première séquence (Annexe I 1, a)

* Activité "escalier" :

Objectifs :

L'objectif final de l'activité I séquence 1, qui comprend l'activité "escalier" et l'activité "bandes de papier", est de trouver une méthode pour obtenir la hauteur des fenêtres d'une classe par rapport au sol pour, par la suite, l'appliquer à des objets de la cour. Avant cela, il s'agit de mettre en évidence expérimentalement des propriétés de l'ombre portée au soleil qui permettront de modéliser le phénomène. D'une part, nous attendons de l'activité "escalier" que les élèves constatent que :

- Chaque point de l'escalier et son ombre sont reliés par des droites parallèles (les rayons du soleil sont parallèles).
- Les directions relatives, comme le parallélisme des marches, se conservent ainsi que les égalités de longueurs.

D'autre part, nous attendons qu'ils reviennent sur ce tracé en toute fin de la séance sur les bandes de papier afin de convenir que :

- Les comparaisons des mesures doivent être simultanées.

Tâches et scénario :

Dans le cadre de l'activité 1 séquence1 questions 1 a), 1 b), 1 c) et 2 d), le milieu matériel comprend deux escaliers découpés dans du carton dont les ombres se projettent sur deux grandes feuilles de papier posées sur deux tables. Les élèves disposent, par groupe, d'une grande feuille de papier blanc de format 59×83, de doubles décimètres, de crayons à papier pour dessiner le contour de l'ombre, de paires de ciseaux, d'un rouleau de ficelle fine pour relier les points de l'escalier et leurs ombres et de rouleaux de scotch pour fixer les morceaux de ficelles.

Les contraintes naturelles de la situation sont bien sûr, comme tout ce qui concerne les ombres d'objet, la présence du soleil et une bonne exposition de la salle dans laquelle nous comptons travailler. L'heure à laquelle se déroule l'expérience est également une contrainte puisque, suivant le fait que le soleil est rasant ou pas, certaines ombres ne sont pas perceptibles. Le tracé de l'ombre doit être rapidement exécuté ou tout le moins il nous est impossible de le reprendre après une demi-heure d'échanges et de discussions par exemple. Une autre contrainte est liée au fait que les feuilles sur lesquelles se projettent les ombres ne doivent absolument pas bouger, c'est la raison pour laquelle nous les avons fixées. Mais les tables elles-mêmes ne doivent pas changer de place.

Les variables sont principalement la taille de l'escalier et en particulier de ses marches. Compte tenu des conditions d'ensoleillement et des dimensions des tables, nous avons choisi de découper un escalier de 40 centimètres de hauteur et de largeur dont les marches mesurent 6 centimètres de hauteur et de profondeur.

La liste des tâches n'est pas vraiment longue et celles-ci sont très détaillées. Les élèves doivent tracer l'ombre d'un escalier en carton sur une feuille posée sur une table horizontale. Puis, ils doivent relier les arrêtes de l'escalier à leurs ombres à l'aide de morceau de ficelles. Des remarques doivent être faites au sujet des ficelles et de l'ombre par rapport à l'escalier. En fin de séance sur les bandes de papiers, le soleil a tourné et est plus haut, (questions 2d), nous revenons alors sur l'escalier car l'ombre a changé de forme tout en conservant ses propriétés. Les ombres sont moins obliques et plus courtes. Les rayons n'ont plus la même direction mais restent tout de même parallèles.

Partage des responsabilités :

Les constatations à faire ne sont que pratiques. Ce qui est de la responsabilité de l'expérimentateur est la mise en évidence d'une méthode rapide pour obtenir le contour de l'ombre demandé. Le nombre de séances prévues ne permet pas de nous attarder sur une découverte autonome d'une méthode efficace par les élèves. Ils doivent appliquer cette méthode qui consiste à placer des points de l'ombre plutôt que de tracer directement les arrêtes. Il est plus facile de tracer après coup ces arrêtes. Les élèves doivent eux-mêmes relier les arrêtes de l'escalier à leur ombre.

En ce qui concerne la prévision des réactions des élèves, nous pouvons penser que le parallélisme des rayons du soleil, grâce au patron de l'escalier et aux morceaux de ficelles qui joindront les arrêtes des marches et leurs projetés (questions 1a) à 1c)), sera spontanément énoncé. Notons que le réel objectif est de remarquer que chaque point et son ombre sont reliés par des droites parallèles. Par contre, les propriétés de conservation des égalités de longueurs et des directions relatives risquent de poser problème.

<u>Les observations et les données :</u>

Notre dispositif d'observation se compose de l'enregistrement vidéo de la séance concernant à la fois les phases d'action des élèves, de travail et de discussion collectifs, et des deux contours d'ombres obtenus par les deux groupes d'élèves.

<u>* Activité "bandes de papier" :</u>

<u>Objectifs :</u>

Quatre principaux objectifs sont visés dans cette partie de l'activité.

- L'ombre d'une bande est moins longue sur la table inclinée que sur la table horizontale. Elle dépend donc de la direction du plan et de la direction de l'objet.
- La longueur d'une ombre est identique sur deux plans parallèles.
- Les ombres d'une même paire ont la même mesure : la longueur de l'ombre ne dépend pas de l'emplacement de la bande.
- Le soleil tournant, le procédé n'est plus possible si le travail est trop lent.

Trois autres objectifs, qui concernent la mise en relation des bandes et des ombres, doivent être atteints :

- Le parallélisme des ombres de bandes parallèles.
- La proportionnalité des mesures des bandes de papier et celles de leurs ombres est bien sûr attendue.
- Si on peut mesurer la hauteur d'un objet vertical et la longueur de son ombre sur un plan horizontal, ainsi que la longueur d'un autre objet vertical trop haut pour être mesuré directement, on peut trouver cette hauteur par un calcul de proportionnalité.

<u>Tâches et scénario :</u>

Le milieu matériel de l'activité I séquence 1 questions 2a), b) c), e), f) se compose de quatre paires de bandes de papier, une paire regroupant deux bandes de même longueur numérotées de 1 à 8. Elles sont placées verticalement et séparément chacune sur une des deux vitres des quatre fenêtres dont dispose la salle, découplées, et à différentes hauteurs. Les ombres des ces bandes de papier se projettent sur une feuille posée sur une table. Les tables sont suffisamment proches, presque jointives, pour pouvoir observer le parallélisme des ombres.

Les élèves disposent de doubles décimètres, de mètres enrouleurs disposés sur une table et de crayons à papier. Il leur est remis une fiche sur laquelle ils doivent inscrire trois mesures demandées ainsi que leurs premières réflexions. Au moment voulu, pour mettre en évidence la proportionnalité, ils ont à leur disposition leurs calculettes.

Ils ont pour tâche de mesurer les ombres de ces bandes de papier sur une table horizontale, sur une table inclinée et sur le sol et d'inscrire leurs mesures sur une fiche sur laquelle ils feront des commentaires. Ils doivent mettre en relation ces mesures des longueurs des ombres et celles des bandes qui leurs seront données.

Les principales variables sont les longueurs des bandes de papiers, le choix de la fenêtre pour deux bandes de même longueur, et le plan sur lequel l'ombre des bandes se projette. Les longueurs de ces bandes sont en progression régulière de façon que les rapports à trouver soient facilement identifiables. Ces longueurs sont de 15, 20, 30 et 40 centimètres.

Partage des responsabilités :

Les élèves ont la totale responsabilité des prises de mesures, mais leurs mises en relation se fait en réponse à un questionnement de notre part. En ce qui concerne le comportement des élèves, nous pouvons prévoir que la proportionnalité de certaines mesures de longueurs ne sera peut-être pas obtenue facilement. C'est pour cette raison que le professeur prend la responsabilité de consigner les données récoltées sur les fiches dans un tableau tracé sur le tableau noir de la classe. Les commentaires que ces résultats font naître sont également notés au tableau afin que tous les élèves puissent s'y référer à leur guise et pour que nous puissions nous-mêmes en faire une synthèse. Nous pouvons également nous attendre à ce que certains d'entre eux pensent que les ombres sur le sol sont de tailles différentes que celles sur la table. La situation proposée est une phase d'ostension assumée destinée à mettre en place, par la suite, une modélisation. La problématique est pratique.

Les observations et les données :

L'analyse *a posteriori* est fondée sur l'analyse des protocoles d'observation des divers groupes et des transcriptions des enregistrements vidéos, sur les fiches sur lesquelles les élèves ont consignés leurs mesures et leurs observations. Après ce qui précède, la séquence employant les ombres pour trouver les mesures d'objets inaccessibles dans la cour de l'établissement peut alors prendre place.

Deuxième séquence (Annexe I 1, b) :

Objectifs :

Le but de cette nouvelle séquence est d'obtenir de la part des élèves :

- Une application de la méthode précédente au calcul de la hauteur d'un panneau de basket tout en l'invalidant dans un second temps.
- Les trois mesures nécessaires au calcul de la longueur cherchée.
- Un schéma classique de type triangles "gigognes" modélisant la situation.

Tâches et scénario :

Les élèves sont, dans un premier temps, en classe dans une phase de travail collectif pour mettre au point la méthode qui est appliquée. Dans un second temps, ils travaillent dans la cour en groupe pour prendre les mesures utiles. Des lattes de bois sont fixées sur le poteau de basket de façon à déborder de ce dernier. Une autre phase collective de mise au point de la modélisation se déroule dans la salle de classe. Cette représentation de la situation se fait individuellement. Une planchette dont la largeur est supérieure à celle d'un poteau de basket est à la disposition des élèves pour constituer un objet de référence. Des décamètres enrouleurs, papier, crayons et calculettes sont également disponibles. Un travail de ce type a déjà été mis en place, par exemple, par une équipe expérimentale de l'Irem de Rennes (1977) et sûrement par d'autres également. Mais à la différence près que les élèves concernée par cette expérience devaient alors trouver la relation cherchée directement dans la cour. Dans notre cas, un travail préliminaire a été proposé pour que les élèves déterminent plus facilement ces relations. Cette activité préparatoire de calcul de la hauteur d'une fenêtre d'une salle de classe, qui se déroule également dans le méso-espace, permet aux élèves de trouver la technique de mesure et de calcul d'une façon plus simple que s'ils avaient été placés directement dans la cour.

Les élèves doivent adapter la méthode qu'ils ont découverte précédemment au nouveau problème. Ils prennent ensuite les mesures qu'ils ont décidé de récolter dans la cour pour revenir en classe dans le but de modéliser individuellement la situation et d'effectuer les calculs.

En ce qui concerne les contraintes, d'une part la situation doit se dérouler dans un temps bref et de façon simultanée pour prendre toutes les mesures : si la recherche des élèves dure un peu de temps, le soleil pourrait avoir tourné et la situation ne permettrait plus de valider leur travail. La méthode employée précédemment nécessite, en effet, de prendre en compte des mesures de deux objets du méso-espace, un objet référent et l'objet dont on cherche la hauteur. D'autre part, elle exige de la part de nombreux élèves, des capacités fines de repérages et de mesures de longueurs, avec éventuellement report, dans un espace dont les dimensions excèdent celles de la feuille de papier. En particulier, la vérification du trajet suivi par l'instrument de mesure quand on le reporte relève de connaissances spatiales spécifiques. De plus, les objets dont on établit la longueur de l'ombre à un instant t doivent être rigides ; un arbre, par jour de vent par exemple, ne convient pas. Le parallélisme du panneau et de l'objet de référence doit être vérifié. Enfin, les conditions météorologiques doivent être fiables, du point de vue de l'ensoleillement, ce qui n'est pas toujours le cas en Région parisienne comme nous avons pu le remarquer depuis dix-huit années passées dans ce bassin. Pour ce qui est des variables didactiques, l'objet de référence, suivant sa position, sur le panneau de basket ou placé indépendamment de ce dernier, les schémas attendus sont différents. Dans le premier cas, on attend un schéma classique du type Thalès dans un triangle et dans le second un dessin faisant apparaître deux triangles semblables séparés est attendu. De plus, une alternative se présente. Il est possible de représenter la situation en reportant les trois mesures prises sur le terrain, de mesurer la hauteur du panneau sur ce schéma qui est alors vérifiée par le calcul. Mais il est également possible d'effectuer le calcul avant de représenter la situation.

<u>Partage des responsabilités :</u>

Les élèves doivent trouver qu'un objet de référence est nécessaire pour appliquer la méthode et qu'ensuite, trois mesures de longueurs doivent être prises : la mesure de l'objet et de son ombre et la mesure de l'ombre du panneau de basket. Ils doivent eux-mêmes mesurer ces trois longueurs et plus particulièrement, la méthode de mesure de l'ombre du panneau est à leur charge. La méthode de schématisation de la situation reste également à leur charge. Ils ont un choix à faire à ce sujet. Pour le calcul de la hauteur du panneau de basket, les méthodes possibles sont variées. Les élèves peuvent se placer dans la position de la règle de trois, d'un tableau de proportionnalité, ou de l'égalité de deux fractions. Les schémas que produisent les élèves ne correspondent pas encore à une modélisation mais sont en fait à mettre en relation avec une vérification pratique. Nous imaginons que les élèves devraient penser rapidement aux mesures qu'il est nécessaire de prendre pour appliquer leur méthode de mesure de distances inaccessibles. Nous pouvons nous demander comment les élèves tiennent compte du parallélisme des rayons du soleil ?

<u>Les observations et les données :</u>

L'enregistrement vidéo de la séance, les schémas de représentation de la situation réalisés individuellement par les élèves.

<u>*Troisième séquence (Annexe I 1, c) :*</u>

<u>* Activité "éclipse totale du soleil" :</u>

<u>Objectifs :</u>

L'observation de la pleine lune telle que nous l'avons décrite au paragraphe I.1 est difficile avec une classe. Nous choisissons donc une autre activité qui consiste à expliquer ce qu'est une éclipse de soleil. Son est d'engranger une nouvelle situation de référence pour le théorème de Thalès.

<u>Tâches et scénario :</u>

Les élèves ont à leur disposition l'énoncé de l'activité qu'ils emportent chez eux. La recherche d'information se déroule au Centre de Documentation et d'Information du collège pour certains élèves, dans une autre bibliothèque, sur internet ou tout simplement dans un dictionnaire personnel pour d'autres. La mise en commun de ces informations s'effectue en classe de façon collective. La discussion pour comprendre le phénomène est également collective. Les élèves sont chacun assis à leur place dans la classe. Ils ont devant eux les informations et les schémas sur les éclipses qu'ils ont pu glaner dans des ouvrages.

Les tâches sont les suivantes :

- Récupérer les données : tailles et distances à la terre de la lune et du soleil.
- Faire apparaître que la lune a un diamètre inférieur au diamètre du soleil et pourtant, elle réussit parfois à le cacher aux yeux des terriens.
- Schématiser le phénomène par une mise en œuvre de la proportionnalité dans le cadre de la réduction par une échelle, puis deux pour finalement se rendre compte qu'un schéma à l'échelle n'est pas réalisable sur une feuille.

Les variables sont les échelles pour représenter l'éclipse. Un premier choix est de représenter la lune par un disque de 0,05 cm de diamètre. Une contrainte importante de cette schématisation est justement le fait que tous les astres et les distances ne peuvent pas être représentés à l'aide de la même échelle. Ainsi, une seconde option consiste à utiliser deux échelles. Une première représente la distance terre lune par un segment de 0,4 cm et une deuxième représente le diamètre de la lune par un segment de 0,4 cm. Cela correspond à peu près au disque obtenu au tableau en faisant tourner la craie de façon à dessiner un point.

<u>Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :</u>

En groupe de quatre ou cinq, les élèves doivent chercher à savoir en quoi consiste une éclipse de soleil. Nous prenons l'initiative de leur demander de compléter cette description par les dimensions du soleil, de la lune et de la terre et par différentes distances. Ils doivent comprendre que dans le cas des ombres de bandes, ils pouvaient agir sur le milieu matériel alors que cela n'est pas possible dans le cas des astres. Pour mieux appréhender le phénomène, ils doivent penser à le schématiser. Ce qui est à la charge de l'expérimentateur est le choix des échelles et les questions intermédiaires qui permettent de calculer les longueurs à l'échelle. Les élèves n'ont plus qu'à calculer pour représenter la situation et s'apercevoir qu'une seule échelle n'est pas suffisante. La problématique est encore pratique même si une représentation schématique de la situation est faite. Nous ne sommes pas encore dans une phase de modélisation géométrique, qui paraît ici inutile. Des difficultés sont prévues dans la représentation à l'échelle du phénomène.

<u>Les observations et les données :</u>

L'enregistrement vidéo de la séance, les traces écrites des données récoltées en groupe de cinq ou six élèves et leurs commentaires écrits à ce sujet. Les dessins individuels de représentation schématique d'une éclipse.

<u>* Activité de visée de la "lune" et du "soleil" :</u>

<u>Objectifs :</u>

La fin de la troisième séquence prépare en premier lieu à l'activité suivante qui correspond à la réelle **situation fondamentale** de notre travail. Les conditions d'une utilisation correcte de la lorgnette doivent être trouvées.

<u>Tâches et scénario :</u>

Les élèves sont dans la salle de cours. Ils disposent d'une lorgnette percée d'un côté d'un disque et de l'autre d'un trou de visée. Au tableau noir de la classe sont dessinés deux disques de tailles différentes représentant la lune et le soleil et doivent être visé par un élève. Grâce à l'avant dernière question, un premier contact avec un certain type de lorgnette est établi pour comprendre justement que pour viser le soleil, il est nécessaire de se placer plus loin. La question f) montre pour quelle raison pratique il est nécessaire de se mettre en face pour viser. En effet, en se décalant, les élèves ne perçoivent pas le disque soleil ou la lune dans son ensemble. Ou alors, ils doivent viser de biais. La problématique est pratique. Nous nous attendons bien sûr à ce que les apprenants ne prennent en compte dans le phénomène de visée, qu'une seule variable, comme la distance séparant la lorgnette du tableau. Mais cette activité est complétée ultérieurement. Il s'agit par conséquent d'une activité charnière.

Les variables de la situation sont les dimensions de la lorgnette et des astres représentés ainsi que la distance de visée et le fait d'être en face. Les difficultés de transfert des connaissances scolaires aux situations spatiales peuvent ce traduire ici par des théorèmes en acte de la forme : *" plus je suis proche du support du segment ou du disque, plus j'en vois un petit morceau."* Ou *"plus je suis proche, plus j'en vois un grand morceau."*

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Un élèves doit viser alternativement les deux disques. Puis de l'un des emplacements, il doit se décaler de trois pas et viser à nouveau. De ces manipulations, les élèves doivent dégager les conditions d'un bonne visée qui sont :

- être à la bonne distance.
- être "en face".

L'expérimentateur n'a pas à intervenir car ces remarques peuvent être faites simplement en observant les visées successives.

Les observations et les donnés

L'analyse *a posteriori* est fondée sur les protocoles d'observation des élèves qui procèdent aux visées et aux enregistrements vidéos. Une situation avec les lorgnettes prend alors place. Elle correspond également à la phase d'expérimentation et d'approximation dont nous avons déjà parlé. Il s'agit de notre **situation fondamentale**. Cette dernière doit répondre à un impératif incontournable, celui de jouer pour l'élève le rôle de réponse adaptative optimum aux situations précédemment abordées ainsi que le rôle de justifications pratiques des dernières situations.

Séquence quatre a) (Annexe I 1, d) :

* Visée avec quinze lorgnettes (questions a), b) et c))

Objectif :

L'objectif des deux expériences de cette séquence est d'utiliser les lorgnettes dans le méso-espace pour recueillir des données micro qui sont ensuite exploitées en classe.

Tâches et scénario :

L'expérience se déroule à l'extérieur du bâtiment. Juste à sa sortie se trouvent tracées au sol des lignes de course de vitesse. Sur un tableau transportable, nous fixons horizontalement une mire blanche constituée de deux morceaux de carton collés ensemble. Le milieu de cette mire est indiqué par un trait noir et les deux extrémités sont également matérialisées par deux traits pour optimiser la visée. Ce support ne se trouve pas, pour le moment, dans le prolongement d'une ligne blanche tracée au sol. Quinze lorgnettes servent à viser cette mire en faisant coïncider le milieu de la fente de la lorgnette avec celui de la mire et les extrémités de la fente et de la mire. Celles-ci ont été construites de telle façon qu'elles se rassemblent en trois groupes de visées distincts. Les élèves disposent, par binôme, d'une lorgnette et de son carton d'identification. Ces lorgnettes sont de diamètres et de longueurs différents. Elles sont percées d'un côté d'un petit trou centré qui permet la visée et de l'autre, d'une fente occupant une largeur variable et d'un morceau de ficelle fine marquant le milieu de cette fente. L'utilisation du réticule doit éviter la dispersion des marques de visées. Les élèves visent la mire et marquent l'emplacement de visée correcte. Nous avons choisi de les construire de forme parallélépipédique et non cylindrique d'une part parce que cette dernière forme se révèle, à la construction, plus difficile à fabriquer et d'autre part parce que le phénomène étudié est plan ce qui nous incite à privilégier des lorgnettes "planes" favorisant justement une orientation à l'inverse des lorgnettes cylindriques. Nous empruntons et nous adaptons un des outils de Berthelot et Salin (1992) qu'ils n'ont pas utilisé dans leurs travaux. Ces auteurs pensaient employer un ensemble de lorgnettes pour mettre en place le concept d'angle en classes de CM2 et de 6ème. Ce concept s'adapte très bien au méso-espace mais cette expérience, d'après les auteurs, ne convenait pas aux élèves des niveaux des classes de primaire en question. De plus, au premier abord, la mesure des longueurs inaccessibles semble moins adaptée au méso-espace que la mesure des angles. Mais nous considérons que l'expérience que nous avons conçue modélise parfaitement les situations problèmes qui concernent l'éclipse de soleil.

Les contraintes liées à la mise en place pratique de l'expérience sont de deux sortes :

- Les lunettes doivent être horizontales.
- La visée doit se dérouler perpendiculairement au plan du tableau.

Les variables sont les dimensions et la forme de la mire et des lorgnettes. Ces dimensions ont été choisies de façon que la mire, de mesure fixe, soit juste vue à partir de lorgnettes et de façon que les visées se fassent dans de bonnes conditions. La mire est d'une longueur de 1 mètre et d'une largeur 15 cm. Trois paramètres peuvent alors être pris en compte pour conceptualiser le phénomène de visée, la longueur du trait restant fixée :

- La distance qui sépare le viseur de la lorgnette du tableau.
- La longueur de la lorgnette.
- La longueur de la fente de visée.

Afin de ne pas laisser les élèves emprunter des voies très diverses pouvant éventuellement les mener dans une impasse ou sur un chemin où les difficultés seraient trop nombreuses, ces trois paramètres ne peuvent pas varier tous en même temps. Si cela était le cas, nous pensons que les apprenants auraient du mal à trouver une relation qui les relierait. Ainsi, nous avons choisi de construire quinze lorgnettes en faisant varier leurs longueurs et la mesure de leurs fentes de façon à ce qu'elles se rassemblent en trois groupes caractérisés par trois distances de visée de la mire différentes. Les paramètres des lorgnettes sont les suivants :

numéro lorgnette	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
largeur fente, y	2,75	6,1	1,55	5,2	6,4	2,56	4	3,52	7,7	1,8	3,04	4,2	2,5	2	1,3
longueur lorgnette, z	27,5	18,3	15,5	15,7	19,2	16	25	22	23	18	19	12,7	25	12,5	13
largeur lorgnette, t	19	11,5	13	9,5	7,5	13	9	14,5	8,5	12,5	12	9,5	9,5	13	9

Le choix des lunettes mises à la disposition des élèves n'est pas fait au hasard. Nous avons volontairement créé un milieu comportant les connaissances visées, en restreignant les variables qui leurs sont liées. Le fait d'associer certaines lunettes entre elles, en trois groupes, relève également de choix didactiques qui sont à mettre également en relation avec une ostension maîtrisée telle que l'a définie Gobert (2001).

<u>Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :</u>

Les élèves doivent rappeler et appliquer les conditions d'une bonne visées trouvées précédemment. En principe, le professeur n'a pas à intervenir à ce niveau. Par contre, il doit expliquer, par un jeu de questions réponses, l'utilisation du réticule des lorgnettes par rapport au milieu de la mire, puis le fait que les extrémités de la fente et de la mire doivent coïncide. Les binômes s'observent mutuellement. A la fin de toutes les visées, les élèves doivent constater l'apparition de trois tas bien distincts de cartons d'identification des lorgnettes. Ils peuvent éventuellement formuler des hypothèses pour expliquer ce fait, mais cela relève d'une situation ultérieure.

Nous nous attendons à ce que les élèves ne proposent pas spontanément de mesurer la distance qui sépare chaque tas du tableau. Cela est de la responsabilité du l'expérimentateur. Son énoncé est compréhensible par les élèves sans que le théorème soit déjà connu. De plus, si ce théorème est connu, cette situation peut se résoudre sans interventions didactiques extérieures. Remarquons encore que pour cette activité, nous plaçons les élèves devant une problématique pratique puisqu'ils ont à contrôler des rapports spatiaux de manière empirique et contingente. Le problème porte sur de petits objets liés au méso-espace et faciles à comparer comme la réussite ou l'échec le sont également. Dans chacun de ces cas :

> "l'élève peut mettre en œuvre plusieurs solutions successives, des actions dont il est lui-même juge quant à leurs effets et qui lui permettent d'apporter des corrections." (Brousseau, 1983 (b))

L'élève doit adapter son action aux informations que lui renvoie la situation. Les conditions proposées par Brousseau semblent réunies pour qu'un modèle implicite mettant en interaction la longueur de la lunette et son diamètre, puisse resurgir des échanges entre les différents membres des binômes ou entre binômes au cours de la séance suivante.
En effet, les décisions sont faciles à prendre d'une part parce que l'on voit les éléments de la situation, parce que l'on peut corriger l'action au fur et à mesure et d'autre part parce que les élèves peuvent juger immédiatement du résultat. Nous nous trouvons ici dans la phase de la *dialectique de l'action* de Brousseau. La situation pose à l'élève un problème spécifique dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est le l'application du théorème de Thalès. Une autre solution consisterait à mesurer les angles de visées sans utiliser la trigonométrie, qui n'est pas censée être encore introduite, puisque les lignes trigonométriques pourraient être mises en situation grâce justement au théorème de Thalès qui interviendrait alors en tant qu'outil et non plus en tant qu'objet.

<u>* Visée avec la mire percée de cinq trous (Activité I séquence 4 a) question d))</u>

<u>Objectif :</u>

Le principal objectif de cette séquence est d'obtenir le parallélisme de deux droites dans une situation de Thalès.

<u>Tâches et scénario :</u>

Les élèves se trouvent toujours dans la cour. Certains, pas tous, vont viser la mire avec une lorgnette un peu différente. Elle est percée de cinq trous. Un seul de ces trous est centré par rapport à la fente de la lorgnette dont un réticule marque le milieu. Une craie est à la disposition des élèves pour marquer les emplacements des différentes visées. Les élèves doivent constater :

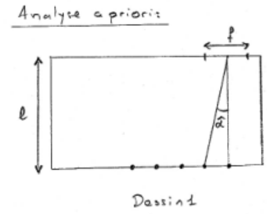
- L'alignement des cinq points obtenus.
- Le parallélisme de la droite définie par ces points et de la mire.

Au sujet du parallélisme des droites qui interviennent dans le théorème de Thalès, une alternative se présentait à nous.

Soit nous construisions une activité de mesure de longueurs inaccessibles dans le méso-espace qui aurait amené les élèves, par essais successifs, à finalement avoir l'idée par eux-mêmes de tracer deux droites parallèles sur une modélisation de la situation ou sur le terrain.

Soit le parallélisme n'était pas lié aux rapports de longueurs.
Estimant que les élèves auraient du mal à associer la mesure de longueurs au parallélisme de deux droites, cette hypothèse, par là même, ne pouvant alors surgir qu'artificiellement, nous préférons la seconde option, sans que cela soit justifié scientifiquement mais uniquement intuitivement. C'est pour cette raison que le parallélisme est observé par les élèves dans cette expérience. Les élèves pourraient être tentés de pivoter la lorgnette pour faire coïncider les extrémités de la fente et de la mire. Dans ce cas, les milieux de la fente et de la mire ne coïncideraient pas. Mais pour que les élèves s'en rendent compte, il faut analyser les variables de la lorgnette qui interviennent dans cette situation. Suivant l'acuité visuelle estimée à 0,025°,

en fonction du rapport de la lorgnette, pour constater de visu, que les milieux ne coïncident pas bien que les extrémités coïncident, il faut que l'angle $\hat{\alpha}$ soit supérieur à : 1° pour un rapport f/l égal à 1/3, 6,5° pour un rapport 1/8 et 10° pour un rapport de 1/10. Nous avons donc retenu une fente de longueur 4 cm, une largeur de lorgnette de 15 cm et un espacement des trous de 3 cm ; ainsi nous avons f/l = 4/15.



Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

L'élève a pour responsabilité de viser la mire successivement à travers les cinq trous de la lorgnette et de marquer ces cinq lieux au sol. Il peut tenter trois types de visées de la mire dont un seul est correct.

Soit il recule assez pour que les extrémités de la mire et de la fente coïncident, le réticule de la lorgnette et le milieu de la mire eux ne coïncident alors pas.

Soit il pivote la lorgnette pour la placer dans un plan qui n'est plus parallèle au plan d e la mire pour faire coïncider les extrémités de la mire et de la fente. Mais dans ce cas, suivant les paramètres retenus dans la construction de la lorgnette, compte tenu de l'acuité visuelle, à partir d'un certain angle, l'élève peut constater que les deux milieux ne coïncident pas.

Soit l'apprenant se décale sur le côté, parallèlement à la mire, pour justement à la fois voir correctement la mire et faire coïncider les deux milieux.

Ainsi, le professeur doit veiller à ce que les visées se déroulent dans de bonnes conditions. Pour cela, si l'élève viseur ne rectifie pas de lui-même sa position, il peut demander aux élèves spectateurs de critiquer la visée. L'apprenant peut agir sur la situation et cette situation peut lui renvoyer de l'information sur son action. Elle renvoie le fait qu'il faut se décaler parallèlement à la mire. La problématique est toujours pratique.

Séquence 4 b) (Annexe I 1, e) :

* Schématisation de la situation et mise au point de la modélisation des lorgnettes

Objectifs :

Le but est d'aboutir à une schématisation puis à une modélisation de la situation de visée pour les quinze lorgnettes afin que dans un second temps, les élèves puissent anticiper dans le méso-espace.

Tâches et scénario :

Organisation de la classe : les élèves sont assis à leur place habituelle dans la salle de notre collègue. Une phase collective est mise en place pour la schématisation puis un travail individuel voire en binôme pour la mise au point de la représentation à l'échelle. Ils doivent trouver les longueurs qui sont retenues pour cette modélisation, la façon de représenter la lorgnette et la visée. Toutes les lorgnettes sont placées au fond de la classe. Les élèves disposent de feuilles, crayons à papier et double décimètre pour les deux phases ; des lorgnettes et des calculettes pour la seconde phase. La situation de visée se déroule dans l'espace mais il s'agit d'un phénomène plan. Cela constitue une contrainte première pour les élèves qui doivent schématiser ces situations de visée. Une seconde est incarnée par le fait que, sur les schémas, le trou de visée et la fente doivent être centrés. Deux méthodes sont possibles pour centrer la fente sur la largeur de la lorgnette. L'une consiste à soustraire les deux longueurs, à diviser le résultat par deux pour obtenir la longueur qu'il faut enlever de la largeur de la lorgnette pour obtenir la position de la fente. L'autre consiste à placer le milieu de la largeur de la lorgnette, à diviser par deux la longueur de la fente pour la centrer à partir de ce milieu. Notre choix se porte sur la seconde, car dans la première option, deux mesures sont à reporter à deux endroits distincts, ce qui augmente les risques d'imprécisions du centrage. L'échelle qui est utilisée pour modéliser cette situation est une variable importante. Nous avons choisi de représenter 4 cm sur les lorgnettes par 1,5 cm sur le papier calque.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Dans un premier temps, nous attendons de la part des élèves une schématisation de la situation qui se déroule en fait dans le plan de l'oeil et de la mire. Les élèves doivent proposer ce schéma qui doit faire apparaître :

- Un rectangle.
- La position du trou de visée et de la fente pas forcément centrés.

Les élèves doivent proposer des schémas qui sont discutés collectivement, mais le professeur peut prendre la main car des difficultés sont prévues à ce niveau.

Dans un second temps, les élèves doivent trouver une méthode pour représenter à l'échelle les lorgnettes qui doivent comprendre :

- Un rectangle à l'échelle découpé dans du papier calque.
- La fente représentée à l'échelle et correctement centrée.
- Le trou de visée bien centré.

Un choix de méthode de centrage, de la part du professeur, doit être fait. Les élèves peuvent trouver d'eux-mêmes la méthode la plus précise, mais les impératifs de temps incitent à l'imposer. Il s'agit d'une phase d'appropriation à la fois de la situation et de sa représentation schématique sans forcément nommer les points. Elle est organisée afin que nous nous mettions d'accord avec les élèves sur le schéma qui est adopté. Les élèves doivent trouver eux-mêmes ces schémas. Les élèves sont confrontés à une problématique de modélisation partielle :

> "L'espace de référence dont il est question est bien l'espace sensible."[...] "La solution du problème par modélisation est construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce système." (Bourdieu, 1980)

La phase de *dialectique de la formulation*, s'amorce au sein de chaque groupe. Se mettre d'accord, à l'intérieur de la classe, pour la production d'une réponse unique, favorise à notre avis l'émergence d'une argumentation. En effet, les exigences de rigueur qui peuvent paraître superflues parfois, dans la mesure où chacun se comprend lui-même, prennent une autre signification lorsque les autres ne comprennent pas. Ces exigences sont confrontées à la critique des membres des binômes qui exposent leur point de vue. Dans une seconde phase chaque binôme doit exécuter effectivement sur papier calque, trois représentations de sa lorgnette. Les calculs à l'échelle, la méthode de tracé et de centrations de la fente et du trou de visée sont à leur charge. La problématique est ici aussi pratique.

Les observations et les données :

L'analyse *a posteriori* s'effectue à partir des enregistrement vidéo et des schémas proposés individuellement par les élèves sur leurs feuilles et au tableau noir pour l'un d'entre eux.

* Modélisation effective dans le micro-espace des situations de visée

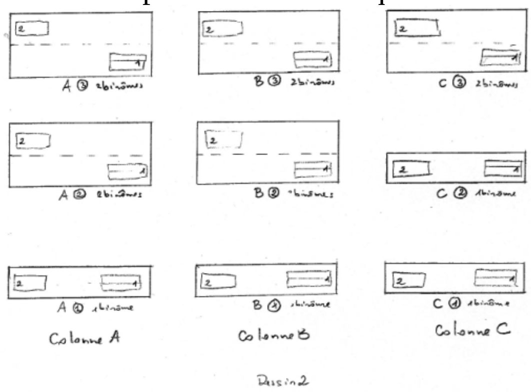
- Modélisation des visées et de l'équivalence des lorgnettes :

Objectifs :

Les élèves doivent modéliser dans le micro-espace, à l'aide des calques et de la feuille n°1, la visée d'une lorgnette dans le méso-espace et se rendre compte de façon pratique de l'équivalence des lorgnettes. A partir d'une représentation des lorgnettes dans le micro-espace, le but est de modéliser les lorgnettes par leurs champs de visée. Cela permet dans la séquence suivante de comprendre les équivalences des lorgnettes et d'anticiper des réponses à des questions.

Tâches et scénario :

Le plan de l'organisation des tables est donné ci-après. Les lorgnettes numérotées de chaque binôme ont été rassemblées en fonction de leur champ de visée et ont été placées sur les tables de la colonne A, B, ou C, réservée au tas correspondant. Les élèves doivent tout d'abord s'asseoir à la table sur laquelle est déposée leur lorgnette. Ils se retrouvent à un ou deux binômes par table. Chaque binôme de chaque groupe A, B, et C dépose un exemplaire de leurs calques de lorgnette sur chacune des trois tables de leur colonne. Ainsi, chacune des lorgnettes des trois tas mis en évidence dans la cour lors de l'activité de visée, est représentée trois fois. Les trois tables de la colonne A comprennent chacune un exemplaire du jeu complet des cinq calques des lorgnettes 6, 7, 8, 11, 14, celles de la colonne B des lorgnettes 1, 3, 10, 13, 15 et celles de la colonne C des lorgnettes 2, 4, 5, 9, 12. Et les élèves de chaque table ont a leur disposition un exemplaire des cinq lorgnettes du tas auquel appartient leur propre lorgnette.



numéro lorgnette	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
largeur fente, y	2,75	6,1	1,55	5,2	6,4	2,56	4	3,52	7,7	1,8	3,04	4,2	2,5	2	1,3
longueur lorgnette, z	27,5	18,3	15,5	15,7	19,2	16	25	22	23	18	19	12,7	25	12,5	13
largeur lorgnette, t	19	11,5	13	9,5	7,5	13	9	14,5	8,5	12,5	12	9,5	9,5	13	9
groupe	B	C	B	C	C	A	A	A	C	B	A	C	B	A	B

Ont été inscrites au tableau noir les différentes longueurs retenues par les élèves à la séance précédente, L, l, fente de chaque lorgnette en face des trois colonnes de tables A, B, C. Nous les rappelons dans le tableau ci-dessus en ajoutant les groupes en question. Sur chaque table se trouve deux feuilles de format A_3. Sur les feuilles 1 un axe médian a été tracé. Il représente la ligne sur laquelle les élèves se sont placés pour viser dans la cour. Nous parlons de la seconde feuille dans le paragraphe consacré à l'anticipation des visées. L'organisation de la salle est demeurée telle quelle de façon que l'activité puisse se dérouler dans de bonnes conditions le jour suivant. Les heures de cours ont été déplacées. Les élèves disposaient de feuilles, de crayons à papier, de règles, et de rouleaux de scotch. Ils doivent positionner un calque correctement pour signifier une visée puis ils doivent placer les autres calques de façon à percevoir dans le micro-espace l'équivalence des lorgnettes. De très nombreux paramètres sont présents dans cette situation et nous avons fait le choix de ne pas les laisser tous à prendre en compte aux élèves. Nous avons choisi d'imposer, *a priori*, sur la feuille n°1, la représentation de la ligne droite située dans la cour. Les opérations de visée supposent, pour être conceptualisées de la part des élèves, une modélisation du trajet des rayons lumineux par l'intermédiaire d'une coupe de l'objet. Cela nécessite de leur part de savoir décrire et visualiser des segments, des points qui ne sont pas matérialisés dans la réalité.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Les élèvent doivent être capables, seuls :

- D'utiliser correctement leurs calques pour représenter une situation de visée en respectant en particulier le positionnement du milieu de la fente et du trou de visée sur la ligne matérialisée ainsi que le parallélisme de la mire et de la fente.

- De visualiser l'équivalence des lorgnettes d'un même tas obtenu lors de l'expérience effectuée dans le méso-espace.

La problématique est de modélisation. La responsabilité totale des élèves par rapport à ces deux objectifs est rendue possible grâce à la séquence qui précède et du fait que la superposition des calques rend évidente l'équivalence des lorgnettes correspondantes.

Les observations et les données :

Les observations sont faites à partir des enregistrements vidéos et des croquis obtenus par les élèves sur les feuilles n°1.

- Conjecture pour expliquer l'équivalence des lorgnettes :

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence la proportionnalité des longueurs des fentes des lorgnettes équivalentes. Notons que pour un groupe de lorgnettes, les rapports sont de dix. En effet, pour que la situation puisse fonctionner, il est tout de même nécessaire de glisser des aiguillages à l'intérieur des données. Ici, il s'agit de rapports évidents.

Tâches et scénario :

Le matériel est celui de la modélisation des visées. Les élèves ont à leur disposition, au tableau de la classe, les mesures que nous avons données ci-dessus. Ils doivent trouver la proportionnalité des fentes et des longueurs des lorgnettes d'un même tas. Ils ont à leur disposition feuilles, crayons et calculettes. Les variables sont principalement liées aux dimensions des lorgnettes. Une contrainte didactique classique, qui se traduit par trois questions, est à relever au sujet des mesures effectuées sur des figures.

- Comment faire conjecturer par les élèves une situation de proportionnalité à partir de mesures faites dans la réalité ?
- Comment les apprenants peuvent-ils être sûr, en effet, que les propriétés énoncées sont légitimes du fait de l'imprécision des mesures ?
- En un mot, comment négocier le passage d'une lecture faite dans la réalité à la figure idéale ?

Une autre difficulté lors de cette phase de formulation est que deux élèves au sein d'un même binôme peuvent faire des lectures différentes et obtenir une forme de proportionnalité aussi différente.

Pour pallier ces contraintes, les caractéristiques des lorgnettes d'un des trois tas ont été choisies de telle façon qu'une remarque numérique puisse être formulée aisément. Ainsi le rapport des lorgnettes du groupe B est de 1/10. De plus, les schémas font peut-être resurgir la proportionnalité de la longueur de la mire et de la fente, de la lorgnette et de la distance œil mire mais en aucun cas la proportionnalité des longueurs dites "latérales" ne peut être découverte à partir de cette situation.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Le rapprochement entre largeur et longueur des lorgnettes de chaque groupe est à la charge des élèves. Cela est possible de par la présence du rapport particulier 1/10 qui doit permettre à cette propriété de proportionnalité de diffuser dans les autres groupes. La gestion des différentes propositions de proportionnalité ou de rapports de longueurs est par contre une des tâches importantes de l'enseignant. Nous nous attendons, par exemple, à ce que certains élèves proposent des rapports faisant apparaître la longueur et la largeur d'une lorgnette. Nous parvenons ici à une explication pratique qu'il faut transformer en conjecture qui, à son tour, doit être démontrée. Une synthèse doit être proposée après d'éventuelles nouvelles contradictions émises au sein de la classe toute entière ; cette synthèse doit aboutir sur la connaissance à enseigner, c'est à dire sur le fait que des rapports sont invariants par parallélisme. Il faut prévoir une phase récapitulative, qui n'est pas tout à fait encore une phase d'institutionnalisation, afin de résumer les résultats qui sont constatés : proportionnalité fente, longueur de la lorgnette et éventuellement distance au tableau longueur de la mire.

Les observations et les données :

Productions écrites des élèves et vidéo.

- Matérialisation de la mire et anticipation d'une visée dans le micro-espace (question f)) :

Le but est que les élèves se représentent dans le micro-espace la visée de la mire à partir de trois lieux différents pour qu'ils puissent anticiper le résultat d'une visée.

Tâches et scénario :

Les élèves demeurent regroupés comme précédemment. Sur la feuille n°2 du schéma précédent ont été placés, trois points, A, B, et C, de visée d'une mire, dont un est correct et correspond à une lorgnette sur papier calque jointe également à la feuille. Une question d'anticipation prend également place. Les élèves disposent de feuilles, crayons à papier et calculette. Une mire prédécoupée de 37,5 cm est distribuée au moment opportun. Les élèves doivent calculer la mesure à l'échelle de la longueur de la mire pour, dans un second temps, simuler sa visée avec le calque d'une lorgnette à leur disposition. Ils doivent alors dire si des points A, B, et C, la mire est vue correctement ou pas. Pour simuler une visée à l'aide d'une lorgnette sur calque et de la mire représentées à la même échelle, il faudrait se mettre à plus de deux mètres. Ainsi, le tracé sur feuille des champs de visée n'est plus possible. Pour intégrer la mire de la cour au modèle, il faut changer d'échelle. La variable principale de la seconde manipulation est la distance du point de visée représenté sur la feuille. Nous avons choisi de prendre, à chaque fois un point de visée exact, un point d'où la visée "déborde" de la mire et un dernier où la visée "mord" sur la mire.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

L'expérimentateur prend en charge la visée de la mire représentée dans le micro-espace à l'aide de la même échelle que la lorgnette. Il demande aux élèves d'effectuer cette visée.

Nous attendons d'une part que les élèves :

- Se rendent compte que la mire ne peut pas être représentée avec la même échelle que les lorgnettes, ce qui est tout à fait réalisable puisqu'il suffit de tenter la visée pour s'apercevoir qu'il faut se reculer de plusieurs mètres.

Et d'autre part, les élèves ont la responsabilité de :

- Visualiser et de représenter, dans le micro-espace, la visée avec une lorgnette de trois endroits distincts. Les conditions de visée dans le micro-espace sont sûrement acquises à ce niveau de l'expérience.

Les observations et les données :

Productions écrites des élèves et vidéo.

- Mise en évidence de nouvelles proportionnalités et anticipation sur une visée (questions e) et g))

Les objectifs sont de représenter les champs de visées de la lorgnette à cinq trous puis d'en déduire ensuite une proportionnalité entre de nouvelles mesures de longueurs. Cette proportionnalité est différente de celle que les élèves ont déjà mise en évidence entre les longueurs de fentes et les longueurs des lorgnettes. Nous obtenons alors le théorème complet qui est démontré dans la séquence qui suit. Un autre but est d'anticiper, par le calcul, la visée de la mire avec une lorgnette dont on connaît les dimensions.

Tâches et scénario :

Les élèves restent à leurs places pour les deux phases. Ils disposent de feuilles simples, crayons à papier, règles pour la première phase. Pour la deuxième phase, chaque groupe a la longueur, la taille de la fente de visée d'une nouvelle lorgnette n'appartenant à aucun des trois groupes précédents, ainsi que la longueur de la mire. Il possède également une calculette.

Tout d'abord, les élèves doivent dessiner les champs de visée et obtenir une nouvelle forme de proportionnalité. La fin de l'activité consiste à viser une mire de longueur connue à l'aide d'une lorgnette dont les dimensions sont également connues. Mais cette visée ne se fait pas dans la cour, les élèves doivent trouver, par le calcul, la distance qui doit séparer la personne de la mire.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Dans la première phase, les élèves doivent être capables de dessiner seuls :

- Les cinq champs de visée, afin de trouver :

- Une seconde proportionnalité entre fente, longueur de la lorgnette et mire, distance au lieu de visée.

- Une dernière proportionnalité liée à des longueurs dites latérales, justement grâce à la lorgnette dotée de plusieurs trous.

L'expérimentateur guide les élèves dans la mise en évidence de ces proportionnalités. Il est en effet possible qu'elles ne soient pas citées par les élèves.

Au cours de la seconde phase, les élèves doivent, seuls :

- Calculer la distance de visée grâce à ce qu'ils viennent de trouver ci-dessus. Une fois les nouvelles proportionnalités obtenues, nous pensons que les élèves sont capables d'effectuer ce type de calcul.

Dans cette question d'anticipation, nous limitons sciemment l'action des élèves. Dans un premier temps, le contrôle de l'action n'est évidemment pas possible puisque l'accès aux lorgnettes est momentanément refusé. La réussite et l'échec peuvent facilement être mis en évidence.

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions écrites.

c) Activité II

Présentation générale :

Cette seconde partie de l'ingénierie a pour fonction de démontrer le théorème de Thalès en nous fondant sur l'étude précédente et d'autre part, comme le signale Brousseau (1983 (a)), de déstabiliser les connaissances - obstacles liées à la mesure des longueurs et à la proportionnalité par un ensemble de situations nouvelles. La démonstration se scinde en deux parties distinctes puisque nous considérons que l'un des principaux aspects mobilisateurs de ce résultat est l'approche de la proportionnalité interne et de la proportionnalité externe. Afin d'assurer une chronogénèse claire et le vieillissement du savoir, nous faisons débuter l'étude du théorème de Thalès, sans le nommer, par l'introduction des théorèmes des milieux. Deux résultats sont démontrés à l'aide de propriétés du parallélogramme de la classe de 5ème qui ne sont pas elles-mêmes réellement prouvées. L'idée est ensuite de prolonger ce théorème par celui des droites parallèles à un côté d'un triangle, en commençant par les cas de partages rationnels. Les démonstrations se fondent sur les résultats précédents. La situation doit être construite d'une telle façon que les élèves doivent d'eux-mêmes mettre en évidence l'écueil du cas où un côté du triangle n'est pas divisible en un nombre fini de segments de même longueur. Prend place alors le cas où les rapports sont supposés inconnus. Nous pouvons rapprocher cette étude de celle, qui jusqu'ici n'a pas été problématisée pour les élèves et qui relève du même champ conceptuel, du calcul des aires et en particulier de celle du rectangle.

Activité II, Séquence 1.a (Annexe I 2)

La première séquence 1.a consiste à conjecturer, démontrer certaines propriétés de la figure pour finalement énoncer le théorème des milieux dans le triangle.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table, disposent de la fiche de l'activité, de feuilles et de stylos. La phase est collective sauf pour les questions de rédaction des énoncés où un moment de réflexion individuelle par écrit est instauré avant de revenir à une phase collective. Une propriété liée à la convexité d'un quadrilatère, qui ne peut être obtenue que par une lecture sur le dessin, aurait pu nous inciter à changer de méthode de démonstration. D'où la séquence 1.a' qui n'a pas été proposée aux élèves car cette démonstration se fonde sur le triangle rectangle inscrit dans un demi cercle qui est au programme de la classe de quatrième. Or nos activités, pour des raisons pratiques liées à l'ensoleillement, ont été proposées au tout début de l'année scolaire, le professeur de la classe n'ayant pas eu alors le temps matériel de se consacrer à l'étude du triangle inscrit

dans un cercle. Nous aurions pu nous-mêmes proposer une démonstration de cette proposition, mais le temps nous a manqué.
Une heuristique liée à cette démonstration est difficilement mise en évidence auprès des élèves. Ainsi, l'une des principales difficultés est que l'institutionnalisation du théorème ne paraisse pas aux élèves comme une procédure exagérément complexe et imposée par l'intervenant.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Les élèves doivent construire un triangle ABC avec I milieu de [AB], la droite parallèle à (BC) passant par I et coupant [AC] en J et faire une conjecture, en l'occurrence que J est le milieu de [AC]. Nous pouvons penser que cette conjecture est facilement visible pour les élèves. Une fois la conjecture faite par les élèves, l'expérimentateur prend la responsabilité de la mise en place et de l'amorce des trois phases de la démonstration et de la complétion du dessin. Mais ce sont les élèves qui exécutent la démonstration des points mis en évidence par l'expérimentateur. Ainsi, ils doivent compléter la figure, aidés en cela par l'énoncé. La parallèle à (IB) passant par C coupe (IJ) en K. Ils doivent ensuite observer sur la figure que IKCB est un parallélogramme puis le justifier grâce à une première caractérisation du parallélogramme. L'expérimentateur prend la responsabilité de rappeler les caractérisations du parallélogramme qui ne sont pas énoncées par les élèves. Ils doivent employer une deuxième caractérisation pour démontrer que IAKC est un parallélogramme et une troisième pour en déduire que J est le milieu de [AC]. Les rapports en question doivent alors être trouvés et l'énoncé du théorème rédigé. Le partage des tâches semble nécessaire du fait de la complexité, de la longueur de la démonstration et du fait que les élèves ne font qu'amorcer les raisonnements hypothético déductifs à ce niveau de leur scolarité, même si les prémices de cette étude ont été abordés dans les classes antérieures. La problématique est géométrique. Les élèves ont à leur disposition de nombreux moyens pour avancer dans leurs tâches. Un dialogue et des échanges entre eux doivent prendre place afin que des propositions de solutions soient faites. Mais la principale difficulté pour les élèves est de mobiliser en même temps les trois caractérisations du parallélogramme étudiées en classe de cinquième.

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

Activité II, Séquence 1.b (Annexe I 2)

Objectif :

L'objectif est de démontrer dans le trapèze un théorème équivalent au théorème des milieux dans le triangle. Cette séquence 1.b étend le résultat démontré dans le triangle au trapèze car pour passer au cas du côté d'un triangle partagé en trois ou en quatre segments de même longueur, ou en général à un côté d'un triangle décomposé en un nombre quelconque de segments de même longueur, le théorème lié au trapèze est nécessaire.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité II séquence 1.b, des feuilles et des stylos. La phase est collective. Après avoir construit une figure, ils doivent appliquer deux fois le théorème qui a été démontré précédemment.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Les élèves doivent effectuer la construction d'un trapèze. L'expérimentateur indique le théorème qui doit être mis en fonctionnement ainsi que les deux figures dans lesquelles il s'applique. Les élèves doivent être capables d'appliquer le théorème des milieux dans une figure complexe.

Les observations et les donnés :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

Activité II, Séquence 1.c (Annexe I 2)

* Partage en trois parties égales d'un des côtés d'un triangle

L'objectif est de démontrer le théorème dans le cas où un côté d'un triangle est partager en trois segments de même longueur. L'autre objectif est de trouver les rapports des segments internes à la figure.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité, des feuilles et des stylos. La phase est collective. Il faut construire une figure, conjecturer que le troisième côté du triangle est partagé en trois segments de même longueur puis le démontrer. Pour cette séquence, il est implicitement admis, lors des tracés des droites parallèles à un côté, que ces droites coupent le côté restant en des points conservant l'ordre qui est apparent sur le côté initial du triangle. Certains auteurs, comme Queysanne par exemple ont démontré la croissance de la projection en utilisant l'axiome de Pasch. Une des principales contraintes que nous avons à prendre en compte dans cette activité, est le fait que dans les raisonnements que nous pouvons qualifier d'itératifs, pour que les élèves prennent conscience du procédé, il semble nécessaire que le travail soit réitéré au moins quatre fois, ce que nous faisons.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

L'exécution de la figure et la formulation de la conjecture principale sont de la responsabilité des élèves. Ils doivent conjecturer que le troisième côté est aussi partagé en trois segments de même longueur et démontrer cette conjecture en appliquant les deux théorèmes puis en déduire différentes égalités de rapports latéraux. Ils doivent également trouver les figures dans lesquelles ils appliquent les deux théorèmes précédents. Mais l'expérimentateur les guide en leur proposant le théorème à appliquer et en leur disant qu'il doit être appliqué dans deux figures. De plus, il a la responsabilité de la démonstration des rapports qui existent entre les longueurs des segments dont les supports sont parallèles. Il ne fait qu'exposer cette démonstration qui semble relativement difficile. La méthode pour trouver les longueurs "internes" est également de sa responsabilité. Les élèves sont guidés dans cette démarche. Nous pouvons nous attendre de la part des élèves à un manque ou à une mauvaise justification du fait que l'on peut avoir FN = FK + KN. Surtout, des difficultés d'ordre algébrique liées aux fractions et à la résolution d'équations sont possibles de leur part. La problématique est géométrique.

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

Activité II, Séquence 1.d (Annexe I 2)

* Partage en quatre parties égales d'un des côtés d'un triangle

L'objectif est de démontrer le résultat au rang 4.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité, des feuilles et des stylos. La phase est collective. Notons que les dessins sur lesquels raisonnent les élèves sont purement formels puisque, par exemple, la division d'un segment donné au départ en 12 parties égales ne peut se faire, dans la plupart des cas, que par approximations. Sinon, la méthode de division pourrait se référer justement au théorème que nous sommes en train de démontrer. Mais nous ne rentrons pas dans ces détails avec les élèves.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Les élèves doivent conjecturer eux-mêmes que le résultat obtenu aux rangs 2 et 3 est vrai au rang 4 :

- Si l'on trace trois parallèles à un côté d'un triangle à partir des points de division régulière d'un deuxième côté du triangle, elles partagent le troisième côté en quatre parties égales.

Pour démontrer ce résultat, ils doivent faire un choix de méthode. Ces méthodes ne sont pas communiquées par l'expérimentateur.

- Ils doivent trouver les valeurs de rapports internes au triangle.

Le procédé itératif doit être compris. Trois méthodes sont possibles.

Soit on applique une première fois le premier théorème dans un triangle puis le second théorème dans un trapèze qui chevauche ce triangle et successivement plusieurs fois le second théorème dans des trapèzes qui se chevauchent.

Soit on applique le résultat obtenu au rang n-1 au cas de figure n, pour finir par l'application du second théorème dans le dernier trapèze de la figure chevauchant, en partie, la figure de rang n-1.

Soit dans le cas de division en quatre segments de même longueur, on applique le théorème dans un petit triangle puis dans le grand triangle et enfin dans le trapèze qui suit le petit triangle.

Les difficultés attendues sont identiques à celles qui précèdent. En particulier, la multiplication des fractions, au programme de quatrième, n'a pas encore été abordée dans cette classe. Les élèves ont à faire un choix de méthode de démonstration. Nous sommes en présence d'une problématique géométrique.

<u>Les observations et les données :</u>

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

<u>* Cas 0,6 et fractionnaire quelconque (Activité II séquence 1.d questions g), h), i) et j).-</u>

L'objectif est de démontrer le résultat dans le cas décimal et fractionnaire.

<u>Tâches et scénario :</u>

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité II séquence 1.d, des feuilles et des stylos. La phase est collective.

Dans le cas décimal, il est utile de diviser le côté du triangle en dix parties égales puis de tracer les parallèles. Le résultat peut être obtenu par application du théorème précédent.

<u>Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :</u>

Les élèves doivent être capables d'appliquer par eux-mêmes, dans ce cas précis, la même méthode que dans les cas précédents, c'est à dire qu'ils doivent trouver le fait qu'il faille

- Diviser [AB] en dix segments de même longueur (ou douze dans le cas la fraction).
- Tracer les neuf parallèles (ou onze).

Pour pouvoir conclure sur l'égalité des rapports en question.

Tout est au départ à la charge des élèves et cela semble légitime que l'expérimentateur ne prenne pas en charge les initiatives car nous pouvons penser que ce qui précède doit guider les élèves. Ils doivent comprendre la façon dont ils doivent compléter la figure pour pouvoir appliquer la méthode qui précède. La problématique est toujours géométrique.

<u>Les observations et les données :</u>

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

<u>*Deuxième séquence (Annexe I 3, a) :*</u>

<u>* Démonstration du théorème</u>

<u>Objectif :</u>

L'objectif est de démontrer le théorème dans le cas général tout en sachant que les élèves ne disposent pas des nombres irrationnels.

<u>Tâches et scénario :</u>

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité II séquence 2, des feuilles et des stylos. La phase est collective. Nous proposons une démonstration du résultat précédent mais pour un rapport qui n'est pas connu, c'est à dire que nous tentons de généraliser la proposition. Nous devons encadrer une longueur par deux autres et en déduire un encadrement d'un rapport. Les élèves doivent être capables d'appliquer le résultat précédent sur la division d'un côté d'un triangle à plusieurs cas tout en repérant les rapports égaux et en sachant encadrer un rapport. Notons tout d'abord que si l'activité s'adressait à des élèves de la classe de troisième, nous aurions pu parler, en introduisant bien sûr le sujet, de nombres irrationnels. Mais ce n'est pas le cas, donc nous ne parlons que de rapports dont les valeurs ne sont pas données. De plus, de prime abord, nous avions eu l'idée, afin que les élèves reconstruisent eux-mêmes la démonstration, de leur demander de remettre dans l'ordre un organigramme de cette preuve, ceci afin qu'ils s'impliquent réellement dans cette élaboration. Mais nous avons renoncé à cette méthode de par sa complexité et sa longueur. Enfin, la démonstration soulève deux grands autres types de questions proprement liées au concept même de démonstration (Mesquita et Raucher 1988) : celles relevant de la nature et celles relevant de la procédure. L'un des principaux objectifs de la séquence 1.c a été justement de confronter les élèves avec la nature des objets mathématiques liés à la mesure et avec les objets physiques. En ce qui concerne la procédure, deux types de difficultés apparaissent également (Gaud et Guichard 1984) ; l'une est liée à la construction logique de la démonstration et l'autre à sa rédaction. Ces différents paramètres sont bien sûr pris en compte dans l'activité. Les variables sont celles de la figure : le côté [AB] mesure 6 centimètres et le point D est placé de telle façon que pour quatre étapes il se trouve entre deux points de division et non sur l'un de ces points.

<u>Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :</u>

Les élèves doivent voir sur le dessin que le point D appartient au segment [MN] et que AM<AD<AN pour ensuite en déduire un encadrement de AD/AB. Après avoir tracé les parallèles demandées, ils doivent appliquer le résultat démontré dans le cas rationnel pour trouver un encadrement de AE/AC. Ce qui est aussi à la charge des élèves est la proposition de la diminution des longueurs des petits segments pour rendre plus précis l'encadrement et le constat que n'importe quel encadrement sur AB se conserve sur AC. L'outil théorique qui est utilisé implicitement est le théorème des segments emboîtés. Pour les élèves cela pourrait correspondre à une mesure infiniment précise. Ce qui est totalement à la charge de l'expérimentateur sont les étapes de la démonstration et le passage du discontinu au continu : puisque deux nombres sont approchés aussi près que l'on veut et de la même manière, nous pouvons dire qu'ils sont égaux. Ce partage des responsabilités est légitime car les conjectures sont bien apparentes sur le dessin et l'encadrement du rapport sur le côté [AC] peut s'obtenir facilement à partir du résultat précédent. Mais des difficultés liées aux encadrements sont à prévoir au niveau des élèves. La problématique est toujours géométrique.

<u>Les observations et les données :</u>

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

<u>* Démonstration d'autres égalités de rapports et rédaction du théorème de la droite parallèle au côté d'un triangle</u>

Après avoir déterminé une égalité de rapport dans ce qui précède, l'objectif ici est de d'établir deux autres égalités de rapports déterminés par une parallèle à un côté d'un triangle (D.P.C.T).

<u>Tâches et scénario :</u>

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité II séquence 2 question 7, des feuilles et des stylos. La phase est collective. En partant de l'égalité précédente, grâce à des opérations algébriques sur les fractions, nous parvenons à démontrer deux égalités de rapports qui permettent de conclure qu'une parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels. La principale contrainte est la complexité de cette preuve algébrique.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Les questions sont très précises, les élèves n'ont qu'à observer la figure ou à suivre la preuve. L'amorce de la démonstration est à la charge de l'expérimentateur mais suivant les réactions des élèves, il est possible de les faire participer plus activement. En fin de séance, nous revenons sur les lorgnettes pour tenter de mettre en évidence un autre cas d'égalité de rapports.

Troisième séquence (Annexe I 3, b) :

Le but est de démontrer le théorème de Thalès c'est à dire l'égalité de trois rapports.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité II séquence 3, des feuilles et des stylos. La phase est collective. Cette nouvelle étape permet aux élèves, tout en démontrant un résultat fondamental, d'appliquer la proposition précédente en l'utilisant en tant qu'outil. Il s'agit d'une première initiation au repérage, sur une figure un peu complexe, des éléments indispensables à l'application du théorème d'une droite parallèle à un côté d'un triangle. Ils doivent appliquer deux fois le théorème (D.P.C.T) dans deux figures distinctes et rapprocher ensuite les résultats obtenus. Il est à noter que nous ne donnons pas de propriétés réciproques de ce résultat pour les élèves de la classe de quatrième. En tant que chercheur, il nous est parfois possible de passer outre les programmes scolaires dans nos travaux avec les élèves. Mais en ce qui concerne le théorème de Thalès, nous sommes tenus au moins par respect vis à vis des élèves, à ne pas occasionner de perturbations trop importantes dans l'organisation d'une année scolaire. L'une des principales contraintes à laquelle nous sommes confrontés lors de l'institutionnalisation est de savoir comment éviter un mélange entre les deux approches **interne** et **externe** ?

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

L'expérimentateur impose le dessin composé d'un triangle ABC et de deux droites parallèles respectivement à (AB) et à (BC). Une fois le dessin achevé, les élèves doivent être capables :

- De choisir successivement deux parallèles, d'appliquer deux fois le théorème dans deux dessins différents puis de rapprocher les deux résultats obtenus.
- D'utiliser une égalité de longueurs obtenue grâce à une propriété du parallélogramme pour parvenir à l'égalité finale.
- De rédiger le nouveau théorème. Ce partage semble légitime du fait que la figure ne soit pas très compliquée malgré tout.

Ce qui est totalement à la charge de l'expérimentateur est la mise en évidence du sens des deux formes de proportionnalités auxquelles font appel les deux théorèmes et, grâce à cela, également la mise en évidence de l'impossibilité de l'écriture de l'égalité de certains rapports. La problématique est géométrique. Nous pouvons bien sûr nous attendre, de la part des élèves, à des confusions entre l'application du théorème aux parallèles (DE) et (BC) et aux droites parallèles (EF) et (AB).

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

Exercices d'applications

A la différence de ce qui se pratique généralement lors de ce type d'exercice, le travail se déroule dans le méso-espace lié à la salle de classe et à un tableau.

* Application 1

L'objectif de l'application est un retour au méso-espace.

Tâches et scénario :

L'activité se déroule tout d'abord dans le méso-espace. Une pastille de couleur a été placée au plafond, juste au-dessus du tableau. Trois élèves sont au tableau et les autres élèves sont assis à leur table. La phase est collective. Les élèves possèdent la fiche de l'application 1, des feuilles et des stylos. Les deux élèves qui sont au tableau disposent d'une grande règle et d'une craie. Les élèves doivent viser le point par deux fois. Ils doivent tracer ces deux axes de visée sur le tableau. Un élève vise, l'autre tient la règle et la dernière trace. Une visée verticale aurait permis de calculer directement la hauteur cherchée, mais malgré tout, cette verticale paraît difficile à obtenir. Par conséquent, nous avons décidé de modifier au dernier moment l'énoncé de l'exercice d'application 1' qui est proposé à la classe qui a participé aux expériences depuis le début. Ce nouvel exercice d'application 1 permet de se passer de la visée verticale moyennant une supposition sur l'horizontalité du tableau. Les visées doivent être correctement exécutées, c'est à dire bien collé au tableau. Un deuxième type d'exercice d'application aurait pu également être proposé. Il concerne le calcul approché du rapport de deux mesures de longueurs (Exercice d'application 2).

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Les élèves ont la responsabilité de mettre en évidence une figure dans laquelle peut s'appliquer un des deux théorèmes précédents. Pour cela ils doivent désigner les deux droites parallèles et le triangle en question. Ils doivent trouver la longueur qui peut être mesurée directement. Cette application montre l'obligation de passer parfois par des équations quotients dans lesquelles l'inconnue est à la fois au numérateur et au dénominateur d'une des deux fractions. Une double application du théorème de Thalès est indispensable. Ainsi, la transitivité de l'égalité doit être utilisée.

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

Fabrication et utilisation d'un télémètre

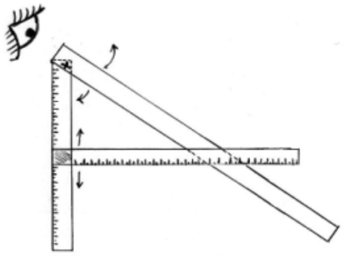
Objectifs généraux de la situation

L'intérêt fondamental de cette ingénierie est de débuter et de finir dans le méso-espace. La dernière activité a pour but de revenir dans le méso-espace pour effectivement apporter une solution pratique (dans le sens de Chevallard) aux problèmes initiaux de mesure de distances inaccessibles dans cet espace grâce à la fabrication d'instruments de mesure. Elle a pour premier objectif la fabrication d'un télémètre de modèle ancien en bois en collaboration avec le professeur de technologie de la classe et le Lycée professionnel Mendès France de Villiers Le Bel. Chaque élève doit fabriquer cet outil qu'il peut utiliser à sa guise au cours d'une seconde partie de l'activité qui permet de revenir, en toute fin d'étude, sur la problématique mathématique initiale dans le méso-espace

Cette seconde activité a pour objectif la mise en place de la pratique de cet instrument. Après discussion, les élèves doivent trouver la méthode d'utilisation des instruments (horizontalité, bonne visée, la mesure d'une longueur accessible au sol...) et les points qui font que dans les deux cas, il ne s'agit que d'approximations. Rappelons que les deux types de problèmes que les élèves se sont posés concernent les hauteurs inaccessibles ainsi que les distances au sol dont la mesure est très difficile. Les distances au sol sont prises grâce au télémètre.

Cet appareil, inventé par Errart de Bar-le-Duc en 1594, permet d'évaluer des distances sans faire de calculs. Il se compose de deux règles graduées, AB et AC, articulées en A, et d'une troisième EF qui peut glisser le long de AB. Pour déterminer la distance MN, le point N étant inaccessible, on dispose EF de sorte que AE comporte autant de divisions qu'il y de centimètres de A à M. Il suffit alors d'aligner la règle AC avec le point N ; le nombre de divisions sur EG est égal à la distance MN. Les élèves ont à construire un télémètre en classe de.

technologie. Pour cela, il nous a fallu construire personnellement un prototype, car les illustrations que nous avons récoltées dans les ouvrages d'époque ou sur des reproductions effectuées dans des ouvrages plus récents, ne sont effectivement que des illustrations et non des fiches techniques de fabrication. En particulier, le glissement de la barre "horizontale" le long de la barre "verticale", tout en restant solidaire de "l'oblique", nous a posé un problème technique non négligeable.



II.1.2   Pour les élèves niveaux troisième

a) Description générale de l'ingénierie niveau troisième

Les deux principales activités qui sont présentées concernent le cas de la figure dite "papillon" ainsi que la propriété réciproque du théorème de Thalès. Mais il nous semble également important de revenir sur le cas de l'irrationalité. Cela constitue un prolongement de l'étude précédente qui a été entreprise avec des élèves de quatrième.

Au début de l'activité I, nous prévoyons, dans le cadre du cours d'arithmétique de troisième ou en supplément en classe de quatrième, des séquences sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et sur la mesure des longueurs en général. C'est l'objet des séquences a et b pour la mesure des longueurs et de la séquence c pour le cas $\sqrt{2}$. Après un rappel de l'énoncé et une démonstration du théorème sur le fait qu'une droite parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autre côtés des segments proportionnels, une situation didactique d'introduction de la figure dite "papillon" fondée sur l'utilisation et la manipulation de lentilles convergentes est mise en place. La démonstration de ce théorème suit alors. Une dernière activité, utilisant des pièces de mécano, prend place et concerne l'introduction de la propriété réciproque. Cette dernière proposition est démontrée par reconstitution du graphe propositionnel.

b) Activité I

Première séquence (Annexe II 1) :

* Confirmation de l'existence de certains préconstruits, séquence 1.a

Cette première séance a pour but de tenter de mettre en évidence certains préconstruits de seconde catégorie de la part des élèves, comme :

- On peut toujours trouver la mesure exacte d'un segment quitte à changer d'unité plusieurs fois. Pour préciser les conceptions des élèves à ce sujet, nous posons la question suivante. Si leur réponse est du type :

- Deux segments sont toujours mesurables grâce à la même unité bien choisie. Alors, ce ne serait pas des empêchements physiques qui arrêteraient les élèves mais l'idée que les nombres sont tous rationnels.

- Le procédé de report d'un petit segment autant de fois que l'on peut sur un grand est s'arrête à un moment ou à un autre.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité, des feuilles et des stylos. Ils doivent répondre à deux questions initiales puis ils doivent procéder à la construction d'une figure obtenue par itération. La phase est collective. Une variable à prendre en compte est le type de mesure de longueur dont on parle. Est-ce qu'il s'agit de mesure effective, avec un double décimètre, ou de mesure théorique ? Les élèves produisent leurs propres dessins pour reporter une longueur autant de fois qu'ils le peuvent dans une autre. Ce qui pourrait être gênant serait le fait de dessiner, au départ, un segment multiple de l'autre. Dans ce cas, l'opération de report s'arrêterait rapidement.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

L'expérimentateur prend la responsabilité de décomposer la construction par itération. La problématique est pratique. Les élèves risquent, *a priori*, de mélanger les mesures effectives et les mesures mathématiques. De toute façon, ils doivent comprendre qu'une mesure physique est un intervalle et pas un résultat numérique.

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

* Mise en évidence d'un contre exemple (Activité I séquence 1, b) :

Pour les élèves, comme pour certains mathématiciens de la Grèce Antique, nous avons vu qu'il est matériellement possible de mesurer tout segment à l'aide d'un double décimètre. Ils se réfèrent à l'objet physique et à des opérations concrètes qui lui seraient liées. Lorsqu'ils considèrent le contraire, ils pensent que cela est dû à la petitesse des unités qui seraient invisibles à un moment donné. L'objectif de cette activité est donc de :

- Faire prendre conscience aux élèves que cette idée est fausse.
- Légitimer la démonstration du théorème de Thalès dans le cas irrationnel.
- Faire comprendre que la figure géométrique ne doit plus être considérée comme une représentation de la réalité physique mais comme une représentation d'un modèle mathématique, d'un concept. Notons que l'irrationalité de racine de deux est démontré dans un chapitre réservé à l'arithmétique et ce bien avant d'entamer l'activité II.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité I, des feuilles et des stylos. La phase est collective. Cette séquence consiste à mettre en évidence un contre exemple à la séquence 1.a question c). Il s'agit d'exhiber un contre exemple à un préconstruit de second type. Nous ne demandons pas aux élèves d'innover ou d'inventer dans cette démonstration. Il y a bien évidemment un rapport entre la propriété d'irrationalité de $\sqrt{2}$ et le fait que la diagonale du carré ne soit pas commensurable avec un des côtés. Ce lien est d'autant plus à mettre en évidence si nous nous référons à la théorie des jeux de cadres de Douady (1984). Mais le problème d'arithmétique est plus simple que le problème de géométrie. En effet, le premier exprime une propriété du nombre 2 alors que le second n'exprime pas une propriété intrinsèque de la diagonale du carré. Nous débutons par l'approche géométrique du seul fait que le résultat que nous étudions est un objet de la géométrie et également du fait que nous avons relevé des obstacles chez les élèves liés à ces concepts de mesure de longueurs. Il est demandé aux élèves de raisonner sur des concepts et non plus sur le dessin, ce qui représente à la fois une richesse mathématique et un obstacle pour ceux pour lesquels cela peut constituer une rupture de contrat didactique.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

Toute la démonstration est à la charge de l'expérimentateur. Les élèves n'ont qu'à suivre les consignes et à tenter de répondre aux questions. La problématique est maintenant géométrique. Les élèves doivent utiliser d'eux-mêmes une propriété de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, $AC<BC$, $AC>DC$ et du triangle isocèle pour prouver que, $b<a$, $DC = 1/2BC$ et
$b>a/2$. Ainsi, ils ont : $a/2<b<a$. Ils doivent en déduire que si nous reportons la longueur AC en un segment [CE] sur le segment [BC], le point E tombe entre B et D car a contient une fois b, et même un peu plus, mais pas deux fois. On note ensuite $a - b = c$. Les élèves doivent tracer la droite perpendiculaire à [BC] en E et coupant [AB] en F. Ils doivent trouver une méthode pour démontrer que $AE = EF = EB$. La question demande la mise en œuvre de connaissances disponibles. Aucune orientation n'est donnée, aucun contexte précis du cours ne met les élèves sur la

voie. Plusieurs solutions sont envisageables. Les élèves doivent en déduire que AF = FE = EB<BF. Puis que c<b/2 car BF = b - c et BF > EF ie b - c > c. Des difficultés sont attendues à cet endroit de la démonstration. Ainsi, les élèves doivent comprendre que AB contient 2 fois c mais pas trois. Traçons la droite perpendiculaire à [AB] passant par H, obtenu en reportant FE sur FB et notons b - 2c = d. On a : BH<c/2. Pour passer de c à d, les élèves vont opérer exactement de la même manière qu'ils ont opérée pour passer de b à c, puisqu'ils font des constructions analogues. On poursuit ainsi les constructions indéfiniment sans jamais trouver un segment contenu exactement un nombre entier de fois dans le précédent. Malgré tout, les différents stades de comparaisons d'objets allongés (Piaget, 1948)) nous indiquent, même s'il ne s'agit pas d'une comparaison d'objets éloignés, que les reports et les comparaisons de longueurs qui concernent la séquence 1.d et la question c. de la séquence 1.a, semblent naturels aux apprenants.

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

c) Activité II (Annexes II 2 et II 3)

* Démonstration dans le cas de division d'un côté en trois parties égales

Le premier objectif de cette activité est de démontrer le théorème d'une droite parallèle à un côté d'un triangle dans le cas rationnel après avoir fait un parallèle avec le théorème des milieux. Pour cela, les élèves doivent tout d'abord aboutir au résultat qui dit que deux droites parallèles à un côté d'un triangle et partageant un deuxième côté en trois parties égales partage le troisième en trois parties égales. Ils doivent prendre conscience que pour comparer deux rapports de mesures de longueurs, il n'est pas nécessaire d'utiliser la même unité partout. Ils doivent ensuite démontrer le cas pour quatre, puis pour une fraction, un nombre décimal et enfin pour un nombre irrationnel. Dans ce dernier cas, l'objectif est de démontrer le théorème en cours d'étude par encadrement. Le second objectif est de démontrer le théorème de l'égalité de trois rapports en utilisant le théorème précédent. La double approche de la proportionnalité, à la fois interne et externe permettre de faire comprendre que l'écriture de certaines égalités sont erronées, d'aboutir à des équations plus simples et d'approcher le sens du théorème de Thalès.

Tâches et scénario :

Les élèves sont assis à leur table et possèdent la fiche de l'activité II séquence 1.a, des feuilles et des stylos. La phase est collective. La séquence 1.a est plus particulièrement attachée à la démonstration du théorème dans le cas rationnel. Les élèves doivent faire le rapprochement entre le théorème d'une droite parallèle à un côté d'un triangle et le théorème des milieux. La séquence 2 consiste à appliquer le théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle pour démontrer le théorème de Thalès, c'est à dire pour obtenir l'égalité entre trois rapports. Un des moyens pour parvenir à diviser géométriquement et non par le calcul un segment donné au départ en trois parties égales, en quatre ou en cinq, est d'utiliser le théorème qui va être démontré dans cette activité. Mais le but n'est pas d'obtenir ici une technique efficiente, mais de considérer qu'une telle figure existe et qu'il est possible de raisonner sur une de ses représentations. Toute cette partie fait appel à des notions et des techniques de calculs qui sont hors programmes du collège. En particulier ce qui concerne les manipulations des inégalités par opposition, addition membre à membre, la convergence vers zéro et le fait que s'il est possible de rendre la différence de deux nombres aussi petite que l'on veut, ces deux nombres sont égaux. Cela représente autant de difficultés et de contraintes pour les élèves. La démonstration du théorème de Thalès ne présente pas de difficultés majeures pour les élèves même si la transitivité de l'égalité semble très souvent peu naturelle aux élèves.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

* Dans la figure faisant apparaître un triangle ABC et les points D et E partageant [AB] en trois parties égales, les élèves doivent être capables de :

- Conjecturer que AF = FG = GC.

- Penser à utiliser et appliquer correctement le théorème des milieux dans le triangle AEG pour démontrer que AF = FG.

Des connaissances sont supposées être disponibles de la part des élèves. Il s'agit tout d'abord de la propriété vue en classe de sixième sur deux droites parallèles à une même troisième. Puis, ils doivent se rendre compte que le théorème des milieux ne peut pas s'applique directement pour démontrer que FG = GC. L'expérimentateur a à sa charge de démontrer le théorème dans le trapèze. En particulier, dans le trapèze ABCD où G est le milieu de [AD] et où la droite parallèle à (DC) coupe [BC] en H, il prend l'initiative de tracer la diagonale AC coupant [GH] en I pour faire apparaître deux triangles dans lesquels il est possible d'appliquer deux fois le théorème des milieux. Les élèves doivent alors :

- Appliquer deux fois le théorème des milieux.

- Appliquer ce résultat à la figure BDFC et conclure que FG = GC puis que AF = FG = GC.

- Trouver des égalités de rapports formés à partir de longueurs prises d'une part sur [AB] et d'autre part sur [AC].

Nous pouvons nous attendre à ce que les résultats qui ont été rappelés soient correctement appliqués et à ce que les connaissances dites disponibles ou même du niveau mobilisable le soient un peu moins.

* Dans la figure faisant apparaître un triangle ABC et les points D, E et F partageant [AB] en quatre parties égales, les élèves doivent être capables de :

- Penser à appliquer le théorème des milieux.

- Penser à appliquer deux fois le théorème dans le trapèze et bien choisir les deux trapèzes.

* Dans la figure faisant apparaître un rapport de cinq sur douze, les élèvent doivent :

- Avoir l'idée de partager le côté en douze et de tracer les onze parallèles.

- Penser à appliquer la méthode du double emploi théorème des milieux et théorème dans le trapèze.

* Dans la figure faisant apparaître un rapport de 0,6, les élèvent doivent :

- Avoir l'idée de diviser le côté en dix et de tracer les neuf parallèles.

- Penser à appliquer la méthode du double emploi théorème des milieux et théorème dans le trapèze.

- Conclure que le résultat est démontré dans le cas fractionnaire et se rappeler que dans certains cas le rapport de la mesure de deux longueurs n'est justement pas fractionnaire.

Ayant appliqué cette démarche dans le cas cinq sur douze, nous pouvons penser que les élèves n'ont pas trop de problèmes ici sauf pour peut être le fait d'associer 0,6 à une fraction décimale. Par contre, nous pouvons nous attendre à des difficultés sur le fait que les élèves doivent se souvenir qu'ils ont démontré dans un cas particulier que le rapport de deux mesures de longueurs est parfois irrationnel.

<u>* Cas irrationnel (Activité II séquence 1.b)</u>

Le but de cette séance est de démontrer le théorème, dans le cas irrationnel, par encadrement. Cela est fondé théoriquement sur le théorème de segments emboîtés démontré grâce à la propriété de la borne supérieure vérifiée par l'ensemble des nombres réels. La mesure des longueur consiste à trouver des intervalles et le théorème qui est sous-jacent dans cette démonstration revient à trouver une mesure infiniment précise. L'expérimentateur prend beaucoup de choses à sa charge. Il divise en n parties égales le segment [BD] et reporte un de ces petits segments autant de fois que possible sur AD. Les élèves doivent bien comprendre que ce segment [AD] ne contient pas un nombre entier de fois de petits segments car sinon il y aurait une commune mesure entre AD et BD. Les élèves doivent être capables de :

- Trouver la mesure de la longueur BD en fonction de λ.
- Encadrer la longueur AD.
- Puis encadrer le rapport AD sur BD.

Après avoir tracé les parallèles à (BC), les élèves doivent :

- Utiliser le théorème démontré dans le cas fractionnaire pour affirmer que AE et EC sont découpés en segments de même longueur avec un reliquat pour EC.
- Trouver alors un encadrement de AE sur EC, puis de moins AE sur EC.
- Par addition membre à membre, un encadrement de DA/DB - EA/EC doit être déduit des deux encadrements précédents.
- A partir de ce dernier encadrement, les élèves devraient être capable de montrer que la différence tend vers zéro et qu'ainsi, les deux rapports sont égaux.
- Les élèves doivent ensuite donner deux autres égalités traduisant le théorème d'une droite parallèle à un côté d'un triangle.

Nous pouvons prévoir des difficultés dans la conception de l'encadrement de moins AE sur EC. En effet, les élèves de ce niveau ne sont pas familiarisés avec les encadrements et encore moins familiers des encadrements de nombres opposés. De plus, les additions membre à membre des inégalités ne sont pas abordées au collège. L'expérimentateur devra sans doute prendre la main à de nombreuses reprises à ce sujet. Les élèves sont totalement guidés dans cette démarche. Nous pouvons bien sûr imaginer que les élèves ne comprendront peut-être pas le fait que la différence tende vers zéro et surtout que cela entraîne que les deux fractions sont égales.

<u>* La démonstration du théorème sur l'égalité de trois rapports (Annexe II séquence 2)</u>

- Les élèves doivent choisir une première figure dans laquelle ils appliquent une première fois le théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle puis ils doivent choisir une seconde figure pour l'appliquer une seconde fois et trouver une seconde égalité de rapports.
- Ils doivent ensuite en déduire l'égalité de trois rapports.
- Une propriété liée au parallélogramme, qui est une connaissance disponible, doit leur permettre de démonter le théorème sur l'égalité des trois rapports qu'ils doivent rédiger pour finir.

Nous pouvons nous attendre à ce que la connaissance liée au parallélogramme supposée être disponible nécessaire pour terminer la démonstration ne le soit pas.

<u>* Comparaison des deux théorèmes</u>

L'expérimentateur prend à sa charge toute cette partie. Le but est d'introduire les proportionnalités internes et externes pour appliquer ces deux notions aux théorèmes en question.

- Grâce à ces explications, les élèves doivent comprendre que les deux théorèmes ne relèvent pas du même type de proportionnalité ce qui permet de saisir les raisons de l'inexactitude de certaines égalités de rapports. Toute la problématique est géométrique.

<u>Les observations et les données :</u>

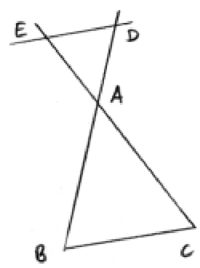
Enregistrements vidéos et les transcriptions des élèves.

<u>d) Activité III (Annexe II 4, b)</u>

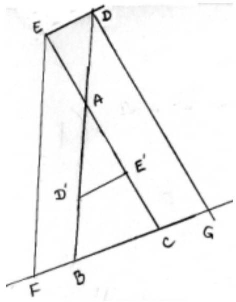
La première séquence consiste à introduire la deuxième figure pour laquelle une application du théorème de Thalès est possible c'est à dire la figure que nous appelons, "figure papillon". Cela généralise le théorème précédent. En optique, lorsque l'agrandissement est négatif, une lentille convergente placée en un point précis donne d'un objet une image renversée. C'est cette image renversée qui nous intéresse justement. Le programme de sciences physiques 1999 de la classe de troisième (Annexe V 4, a) est assez clair à ce sujet.

<u>Tâches et scénario :</u>

Nous avons choisi de travailler à l'aide de lentilles utilisées en sciences physiques. Après une phase collective, huit groupes de trois ou quatre élèves ont été formés et se sont retrouvés chacun autour d'une rampe optique. Deux colonnes de tables rassemblent ces huit groupes. La mise au point au sujet des lentilles se passe à la lumière de la salle, l'expérience en elle-même se déroule dans le noir, seules les lampes de rampes optiques sont allumées. Les débats se déroulent par contre à la lumière du jour. Une colonne de tables place la source sur 90, la lentille sur 70 et sur l'autre colonne la source sur zéro et la lentille sur 65. Pour accommoder, c'est l'objet qui se déplace. Les élèves sont en possession de la fiche de l'activité I séquence 1.d, de feuilles, de stylos et de calculettes. Un banc optique composé d'une source de lumière, d'une lentille convergente, d'une lettre F découpé dans du métal faisant office d'objet et d'une règle graduée sur laquelle sont placés les objets décrits ci-dessus, est à leur disposition. La seconde séquence est elle consacrée à la démonstration de ce théorème appliqué à cette nouvelle figure. La démonstration se fonde sur celle que nous avons utilisée en classe de quatrième pour démontrer l'égalité des trois rapports. Ce premier théorème est bien sûr supposé connu. Les élèves de troisième avec lesquels nous travaillons ont vu les deux versions du théorème direct que nous proposons aux élèves de quatrième qui participent à l'ingénierie. Tout d'abord nous dirons que cette séance a lieu après un certain temps car, devant ce dérouler dans une salle de physique, nous avons non seulement dû réserver celle-ci en tentant de ne pas trop perturber les cours des professeurs en question mais également rendre compatible cette réservation avec l'emploi du temps des élèves participant à l'expérience. D'autre part les élèves n'ont pas abordé les lentilles avec leur professeur de sciences physiques. Nous avons donc été obligé de prévoir une partie de la séance pour des informations à ce sujet. En ce qui concerne l'expérience proprement dite, nous pourrions nous placer dans le méso-espace, c'est à dire mettre en relation la hauteur d'un objet dans cet espace et la taille de son image par une lentille. Mais nous serions confrontés à une difficulté importante qui est la suivante : les distances focales des lentilles utilisées dans le cadre scolaire sont comprises entre 20 cm et 60 cm. Or pour obtenir par exemple une image nette d'un arbre, nous devrions nous placer à une distance conséquente de cet objet. Mais ce n'est pas cela qui est gênant ; le problème provient du fait que pour effectuer l'expérience avec un autre objet, de par la profondeur de champ, les modifications de l'emplacement de la lentille seraient infimes, ce qui rendrait les calculs des hauteurs très difficiles voire impossibles puisque des variations de 2 ou trois mètres dans le méso-espace seraient pratiquement impossibles à déceler dans le micro-espace en faisant varier la position de la lentille. Pour cette raison, nous ne pouvions pas faire autrement que de nous placer dans le micro-espace. En ce qui concerne la démonstration (Annexe V 5), deux options étaient possibles. A partir du dessin suivant, il est possible de construire les symétriques des points E et D par rapport au point A et alors il est nécessaire d'utiliser la définition de la



symétrie centrale pour obtenir AE = AE' et AD = AD' puis la propriété de conservation des longueurs de cette même symétrie pour avoir ED = E'D'. Ces deux points sont au programme de la classe de cinquième. L'application du second théorème démontré par les élèves permet d'écrire que AD'/AB=AE'/AC=D'E'/BC et ce qui précède permet de conclure définitivement. Ou alors il est possible, toujours à partir du dessin précédent, des tracer la parallèle) la droite (BD) passant par le point E et coupant(BC) en F. Il faut alors utiliser le premier théorème dans le triangle EFC pour avoir EA sur AC égale FB sur BC. Puis une propriété du parallélogramme pour obtenir ED = FB et finalement EA sur AC égale ED sur BC. En traçant la parallèle à la droite (EC) passant par le point D et



coupant (BC) en G nous appliquerions la même chose pour obtenir l'égalité AD/AB=ED/BC. Et la conclusion finale s'en déduit. Il est évident que cette démonstration est plus riche que la précédente du fait que le théorème démontré précédemment par les élèves est utilisé ici en tant qu'outil dans deux figures différentes pour démontrer un complément du deuxième théorème. La complexité de l'activité nous incite à opter pour la première solution. Mais quoi qu'il en soit, que ce soit la propriété du parallélogramme qui est employée dans la seconde méthode ou la propriété de conservation des longueurs par les symétries centrales, cela ne dispenserait pas de les démontrer au collège. Or ces deux propositions se démontrent de la même façon.

Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :

* Mise au point en physique sur la lumière et les lentilles

Tout est à la charge de l'expérimentateur dans le sens où aucune initiative n'est attendue de la part des élèves. Les élèves doivent finalement comprendre ce qu'est une lentille.

* L'expérience proprement dite

Les élèves doivent être capables d'obtenir, après avoir accommodé :

- Une image correcte.
- Des mesures quatre longueurs indiquées : lentille - image, lentille - objet, objet, image.

Puis, ils doivent être capables de modéliser la situation. Pour cela, après avoir pris connaissance des différentes définitions, ils doivent tracer les trajectoires des rayons passant :

- Par le centre optique.
- Par le foyer objet.
- Par le foyer image.
- Et ils doivent ainsi savoir représenter l'objet et son image.

Enfin, tout cela devrait leur permettre de trouver une relation de proportionnalité ou une égalité de rapports entre les différentes mesures qui ont été prises et qui ont été rassemblées dans un tableau. La problématique est pratique et de modélisation. A partir de l'expérience avec les lentilles, ils doivent :

- Reconnaître la proportionnalité externe ou interne.
- Trouver un lien avec un théorème précédent.
- Démontrer le théorème dans cette nouvelle figure.

De nombreuses propriétés sont supposées être disponibles de la part des élèves :

- Transformation par une symétrie centrale d'une droite en une droite qui lui est parallèle ($5^{ème}$).
- Obtention de cette image par l'image de deux points ($5^{ème}$).
- Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles ($5^{ème}$)
- Application du théorème sur l'égalité de trois rapports dans le triangle ($3^{ème}$).

Nous pouvons nous attendre à ce que les propriétés supposées être disponibles, en particulier celles liées à la symétrie centrale, ne le soient pas. La problématique est géométrique.

Les observations et les données :

Enregistrements vidéos et leurs transcriptions.

e) Rapports de longueurs Activité V (Annexe II 6) :

L'objectif est de travailler sur la mesure des longueurs, sur les écritures de rapports de mesure de longueurs exprimées à l'aide, parfois, d'unités différentes. Cette activité consiste à connaître les idées que peuvent avoir les élèves de cette classe quant à la constitution de deux rapports de longueurs et à leur comparaison.

Tâches et scénario :

Les élèves travaillent à leurs tables et sont en possession de l'énoncé de l'activité, de feuilles et de stylos.

Sur un triangle ABC les longueurs AD et AB sont exprimées en centimètres et les longueurs AE et EC sont données en segments unité qui apparaît sur les deux segments [AE] et [EC]. Sur un deuxième dessin, OP mesure 18, mesure reportée sur le dessin, OQ est partagé en un nombre entier de segments de même longueur et QN en un autre nombre entier d'autres petits segments de même longueur.

Nous avons vu dans la partie obstacles didactiques que l'obstacle en question provient de conceptions précises sur les égalités de rapports. Pour le sujet qui nous intéresse, les élèves ne comprennent pas que l'équivalence que nous pouvons reconnaître ici, c'est à dire la notion de rapport qui est en jeu, est l'équivalence ou la non - équivalence de deux **couples** de segments et qu'en cela, seule l'utilisation de la même unité pour mesurer les segments d'un même couple est nécessaire si nous voulons utiliser directement les nombres liés aux mesures de longueurs.

Les observations et les données :

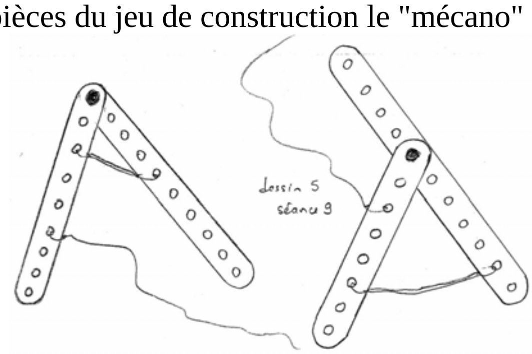
Enregistrements vidéos, leurs transcriptions

f) Activité VI (Annexe II 7)

Le premier objectif est de trouver les conditions minimales pour que deux morceaux de ficelles tendus et accrochés à des endroits différents du mécanisme soient parallèles pour énoncer dans un second temps le théorème réciproque de Thalès. Le second objectif est de démontrer ce théorème et de le rédiger. Dans la version choisie, les élèves calculent le rapport qu'ils veulent pour démontrer le parallélisme ou le non parallélisme.

Tâches et scénario :

Une classe de troisième est partagée en huit groupes de trois élèves. Chaque groupe est muni d'un montage comme ci-dessous et doit ensuite suivre les consignes. Ils disposent de la fiche de l'activité V, de feuilles et de stylos. Chaque trinôme reçoit un montage. Ces montages sont simplement composés de deux branches de "Mécano" fixées entre elles et articulées. L'un d'entre eux est destiné à mettre en évidence l'importance de la position des points les uns par rapport aux autres pour obtenir le parallélisme. Nous avons volontairement écarté le cas de la figure dite papillon pour ne pas surcharger la tâche. Grâce aux trous de ces pièces de montage, une première ficelle est fixée sur chacun des montants. Une seconde est attachée à l'une des branches du mécano. L'activité concerne donc la mise en place du théorème réciproque au théorème de Thalès à l'aide de pièces du jeu de construction le "mécano" (Delerue, 1982).



Mais nous l'adaptons à nos préoccupations et à la version du théorème actuelles. En effet, l'activité de l'époque concernait deux droites coupées par un faisceau de droites parallèles. De plus, seul l'enseignant manipulait ces objets et montrait ainsi les propriétés voulues. L'introduction de la propriété réciproque aurait pu également se faire dans le méso-espace. Mais l'une des conditions utiles à une bonne dévolution d'une **situation problème**, c'est à dire le fait que les élèves doivent pour cela en même temps travailler dans le méso-espace et être en contact avec des objets facilement manipulables, est difficilement envisageable pour la propriété réciproque. Nous avons donc choisi de travailler dans le micro-espace.

En ce qui concerne la démonstration, nous avons opté pour une reconstruction du graphe propositionnel au vu de la complexité de cette preuve. Dans la réciproque des deux théorèmes, la position des points est très importantes mais ce traduit mal mathématiquement au collège. La rédaction suivante de cette propriété évite justement l'écueil de la position relative de différents points les uns par rapport aux autres : Si une droite détermine sur deux côtés d'un triangle des segments proportionnels, alors elle est parallèle au troisième côté. Les montages comprennent, indifféremment, des branches identiques ou bien ayant des percements à des endroits différents. Ainsi, trois cas de figures pourront se présenter aux apprenants. Le premier type concerne deux branches identiques faisant apparaître deux fractions identiques. Le second cas est lié à deux branches distinctes, c'est à dire percées de trous à des distances différentes, mais dont les fractions sont identiques, 3/5 par exemple. Le dernier cas se compose de deux branches différentes percées de trous à des distances différentes, et faisant apparaître des fractions égales mais après simplification, comme par exemple : 3/5 et 6/10. Notons que la position des points est fondamentale pour pouvoir appliquer la réciproque du théorème de Thalès. Ainsi, pour tenir compte de cela, nous avons dû donner aux élèves un exemplaire d'un montage de second type.

<u>Partage des responsabilités sous tâche par sous tâche :</u>

Pour les élèves il s'agit de trouver :

- Le deuxième point de fixation de la ficelle afin qu'elle soit parallèle à la première.
- Les conditions qui permettent d'obtenir à coup sûr deux ficelles apparemment parallèles.

Si seulement les égalités de rapports sont avancées comme condition, il est nécessaire de mettre en évidence un cas litigieux. Les élèves doivent se mettre d'accord sur l'énoncé du théorème à démontrer.

Vient alors la phase de démonstration par la construction du graphe propositionnel. Les élèves doivent :

- Repérer par quoi nous commençons la schéma de la démonstration.
- Tout remettre dans l'ordre.
- Rédiger le texte de l'énoncé réciproque du premier théorème puis du second.

Nous pouvons nous attendre à ce que les élèves éprouvent des difficultés pour trouver la condition qui des prémisses AC = AC' permet de conclure que les points C et C' sont confondus. Il s'agit non seulement d'une difficulté pour les élèves mais également dans la rédaction du théorème. Nous pouvons également nous attendre à des difficultés de distinction de la part des élèves entre les éléments de la figure qu'ils ont effectivement définis et les autres. La rédaction de la seconde réciproque est de la responsabilité de l'expérimentateur.

CHAPITRE 3

MISE EN PLACE DES ACTIVITES ET ANALYSE DES PRODUCTIONS

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons construit les différentes phases des activités qui composent notre ingénierie. Nous allons à présent nous consacrer à la description de la mise en place de ces situations avec les élèves pour effectuer en parallèle une analyse des résultats obtenus en les confrontant en particulier à notre analyse *a priori*. Cette analyse *a posteriori* nous permet de savoir si les objectifs initiaux ont été atteints dans chaque phase de l'ingénierie et dans le cas contraire de tenter d'en comprendre les raisons. A travers cette analyse, nous cherchons à savoir également si les quatre objectifs généraux de l'ingénierie ont été tenus.

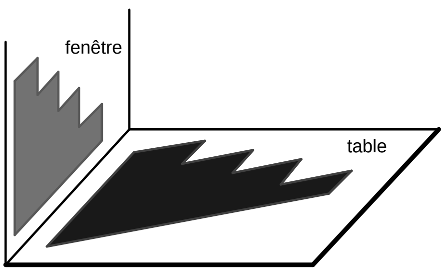
I. Ingénierie appliquée au niveau quatrième

I.1 Première séance : le Lundi 16 septembre 2002 de 16h00 à 17h00.

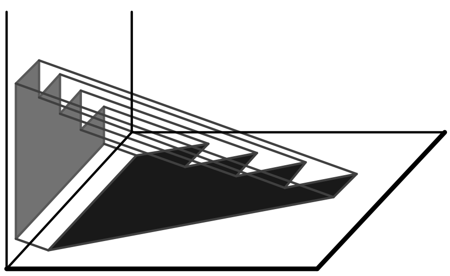
I.1.1 Mise en place de la problématique

La première partie de cette séance a consisté à introduire la problématique générale de notre ingénierie. Les élèves étaient assis à leurs places et la phase a été collective. Nous leur avons dit que tout notre travail serait à rattacher à la mesure de distances inaccessibles. Un élève a su dire qu'une distance inaccessible correspondait à une chose que l'on ne peut pas mesurer. Nous leur avons demandé de donner des exemples, et pèle mêle ont été cités, un gymnase, un arbre, un panneau de basket, un lampadaire. Nous avons alors explicité clairement la problématique générale des séances à venir qui est de trouver une méthode pratique, justifiée mathématiquement, pour mesurer de telles distances. La suite de la séance a alors pris place. Nous nous trouvons encore dans une phase collective.

I.1.2 Activité "escalier" (Annexe I 1, a) Activité I séquence 1 questions 1.a), b), c) et 2.d))



Dispositif



mise en place des ficelles

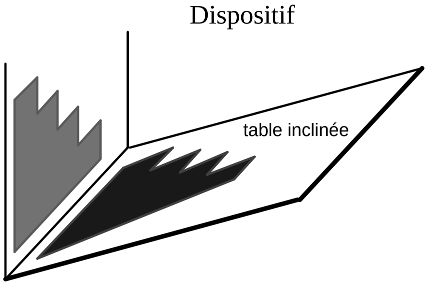
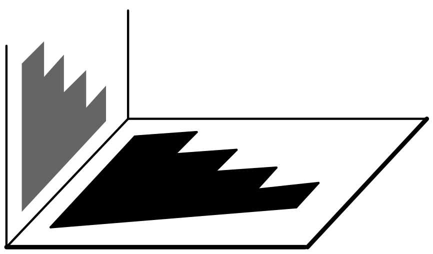


table inclinée



ombre en fin de séance

a) Synthèse

Nous avons expliqué aux élèves que la suite de cette séance serait scindée en deux parties, l'une consacrée aux escaliers collés sur deux fenêtres et l'autre aux bandes de papier placées sur des fenêtres restantes. Remarquant les feuilles de papier disposées sur les tables, ils n'ont eu aucun mal à comprendre que nous allions leur demander de dessiner l'ombre des deux escaliers. C'est ce qu'ils ont commencé à faire après avoir été partagé en deux groupes. Nous les avons guidé dans la méthode à appliquer en leur indiquant qu'ils placeraient les points principaux des marches pour ensuite tracer les segments correspondants. Deux ou trois élèves de chaque groupe ont procédé aux tracés, les autres élèves ayant été invités à regarder à tour de rôle et à réfléchir. Après avoir obtenu des tracés tout à fait corrects faisant apparaître les contours réguliers des ombres des deux escaliers, les angles n'étaient plus droits, nous leur avons demandés de comparer les escaliers et leurs ombres, et d'observer en particulier si certaines choses sont différentes et si d'autres se conservent. Un élève indique que les deux formes sont différentes. Un autre indique que les longueurs se conservent. Leur demandant si les marches se conservent plusieurs répondent par la négative. Désignant les marches de l'un des escaliers, nous leur demandons comment sont elles ? Une réponse a été "*perpendiculaires*" et sur les dessins, elles ne sont plus perpendiculaires. Mais un élève rajoute :

Elève : "Par contre les marches sont encore parallèles."

Nous leur disons qu'effectivement le parallélisme se conserve. Deux arêtes parallèles sur l'escalier demeurent parallèles sur les dessins sans pour autant que les marches soient perpendiculaires. Nous leur avons ensuite demandé de relier les arrêtes marches des escaliers à leurs ombres correspondantes à l'aide de scotch et de morceaux de ficelles. Une hésitation s'est faite ressentir pour savoir à quels endroits doivent être fixées les ficelles. Ainsi, toujours dans un souci de gain de temps, après avoir attendu quelques minutes, nous avons indiqué aux élèves qu'il fallait plutôt déjà fixer une extrémité, sur la fenêtre par exemple, et prendre ensuite la longueur de ficelle nécessaire. Une élève a fait correspondre arrêtes et ombres avec son doigt afin de bien repérer les points à relier entre eux. Globalement, la démarche a été assez longue. La première remarque a été que les morceaux de ficelles étaient de plus en plus petits, ce qui était en effet le cas. Mais rapidement le parallélisme des ficelles a été suggéré par un autre élève. Mais le lien avec les rayons du soleil a été long à se mettre. En effet, nous avons dû demander aux élèves ce que pouvaient représenter ces ficelles pour que l'idée que les rayons du soleil sont parallèles soit émise.

Daniel : "ça peut représenter quoi les ficelles ?"
Elève : "Cela peut représenter les rayons du soleil."
Ex : "Que peut-on en déduire alors ?"
Elève : "Ils sont parallèles."

Les commentaires des élèves sur le paradoxe lié au parallélisme des rayons du soleil nous semblent importants, nous les reproduisons donc en entier.

Ex : "Cela n'est il pas paradoxal qu'ils soient parallèles ? Ils viennent d'où les rayons du soleil ?"
Elève : "Du soleil."
Ex : "Dans quel cas deux droites sont parallèles ?"
Elève : "Lorsqu'elles ne se croisent pas ."
Ex : "Mais ils viennent d'où les rayons ?"
Elève : "Du soleil."
Ex : "Alors ils sont parallèles ou pas ?"
Elève : "Non. Oui mais ils se croisent pas."
Ex : "Mais pourquoi alors a-t-on l'impression que les rayons sont parallèles ?"
Elève A : "Plus ils s'éloignent du soleil plus les rayons s'écartent."
Ex : "Plus les rayons s'éloignent du soleil, plus ils s'écartent l'un de l'autre et moins on a l'impression qu'ils se rejoignent au niveau du soleil."

A l'aide d'un schéma au tableau j'illustre ce que vient de dire l'élève A et je conclus que nous pouvons admettre que les rayons du soleil sont effectivement parallèles du fait de l'éloignement du soleil par rapport à la terre.

b) Analyse *a posteriori*

Le bon déroulement de cette activité dépendant de l'ensoleillement, par crainte du mauvais temps, nous avons décidé de l'avancer d'une semaine. Cela explique en partie le fait que certaines questions n'ont pas été posées aux élèves ou ont été mal posées. Par exemple, nous pouvons dire qu'ils auraient pu être amenés à formuler eux-mêmes l'idée qu'il était plus utile de placer les points des arrêtes des marches pour ensuite les relier que de tenter de dessiner directement tous les segments en question. Cette méthode de tracé aurait pu, par exemple, être amenée par le suivi simultané avec un doigt, des arrêtes de l'escalier et de leurs ombres correspondantes comme l'a d'ailleurs fait une élève. Mais d'un autre côté l'objectif de cette séquence n'est pas la découverte d'une méthode pour tracer le contour de l'ombre. Nous avons pris la main pour accélérer les choses et nous pouvons dire que cela était prévu. Les deux tracés obtenus ont été dessinés de façon tout à fait correcte du fait que l'immobilité des feuilles, des tables et la rapidité d'exécution ont été respectées. La conservation du parallélisme a été citée par les élèves mais après les avoir aiguillés en leur demandant comment étaient les marches de l'escalier. Le nombre de variables de l'objet "escalier", comme sa dimension, celle des marches, le fait que les marches soient perpendiculaires, leurs dimensions, le parallélisme de certaines droites, a incité à ce que nous prenions la main. Pour aboutir à une meilleure comparaison de l'escalier et de son ombre, il aurait peut-être été utile, pour les élèves, de placer au tableau les deux escaliers et les deux tracés de leurs ombres sur les feuilles. Mais l'objectif de la mise en évidence par les élèves de la conservation des directions relatives est atteint. Le parallélisme des morceaux de ficelle a été obtenu très rapidement de la part des élèves, mais par contre l'obtention de leur relation avec les rayons du soleil a du faire l'objet d'une question intermédiaire. Le professeur de la classe, Daniel, leur a demandé justement ce que peuvent représenter ces ficelles. N'étant qu'une modélisation, il semble logique que les élèves n'aient pas trouvé spontanément et rapidement que les ficelles parallèles pouvaient représenter les rayons du soleil. L'expression "rayon du soleil" est en soi une modélisation qui n'est pas naturelle. Ce qui est important est le fait que les élèves aient trouvé la correspondance entre les points de la fenêtre et ceux de la table ainsi que le parallélisme des droites reliant les points de l'escalier et leurs ombres.

I.1.3 Activité "bandes" (Activité I séquence 1 questions 2.a), b), et c))

a) Synthèse

Un récapitulatif de tout ce qui a été trouvé dans cette séquence est consigné au tableau.
Les élèves forment, à notre demande, quatre groupes de trois et quatre groupes de quatre. Il est demandé ensuite à chaque groupe de choisir une bande numérotée fixée sur les fenêtres et de se mettre devant celle-ci. Nous leur disons ensuite que nous allons procéder à des mesures. Mais avant cela, une phase collective prend place. Nous leur demandons de faire des remarques au sujet des bandes de papier collées sur les vitres. Un élève juge les ombres moins épaisses et plus grandes. Un autre élève pense que les bandes semblent parallèles comme les ombres d'ailleurs. Cette phase collective terminée, nous leur avons demandé de mesurer avec le plus d'exactitude possible les ombres. A ce sujet, ayant commencé à mettre bout à bout des doubles décimètres, nous leur avons fourni les mètres enrouleurs. Une remarque intéressante a été formulée par un élève au cours de cette phase.

Ex : "La mesure de la bande dépend de quoi ? Sera-t-elle toujours de la même longueur ?"

Elève A : "Cela dépend du soleil."
Ex : "Si la position du soleil est supposée fixée ?"
Elève A : "ça dépend, si on enlève la table, sur le sol, elle sera plus longue."
Ex : "Nous en ferons justement l'expérience."

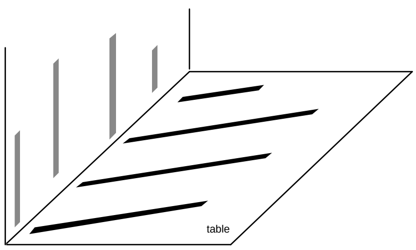
Un élève considère ainsi que la longueur de l'ombre dépend de la position dans l'espace du plan horizontal. Une fiche est alors distribuée à chaque groupe. Sur cette fiche sont inscrits le numéro de la bande et trois cases à remplir comprenant les mesures des ombres sur : la table horizontale, sur la table inclinée et sur le sol. Nous remarquons que tous les groupes, par facilité, inclinent leur table de façon qu'elle soit proche de la verticale. Cela a une influence sur les mesures trouvées et sur les remarques qui sont faites. Une autre partie de la fiche est réservée aux remarques que les élèves font éventuellement. Notons que seulement deux groupes sur les huit ont pu mesurer l'ombre sur le sol. Une fois toutes ces mesures prises, nous avons communiqué les longueurs de chaque bande que les élèves ont inscrites sur leurs fiches que nous avons ensuite ramassées. Nous leur avons demandé de faire des remarques pour la prochaine séance.

b) Analyse *a posteriori*

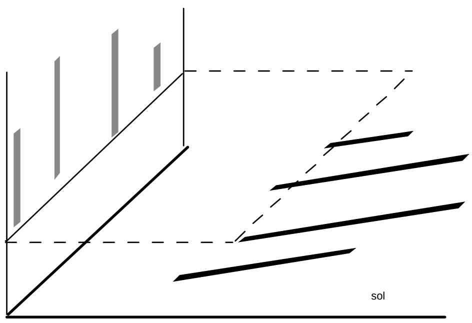
Chaque groupe d'élèves a effectivement pris les mesures de l'ombre sur la table horizontale, sur la table inclinée. A chaque fois il s'agissait du même élève qui mesurait. La mesure des ombres sur le sol n'a pas pu se faire pour plusieurs groupes du fait que le soleil était relativement rasant, ou parce qu'un obstacle imprévu, comme le bureau du professeur ou autre chose, ne permettait pas d'obtenir l'ombre entière, ou bien parce que les élèves n'ont pas eu le temps de prendre les mesures en question. Cela a été une réelle contrainte. Ce qui a été obtenu rapidement de la part des élèves est le parallélisme des bandes et le parallélisme de leurs ombres ainsi le fait que les ombres étaient plus longues que les bandes de papiers. Par contre, les autres objectifs n'ont pas été atteints par les élèves au cours de cette séance. Ils le sont à la séance suivante.

I.2 Deuxième séance : le Vendredi 20 septembre 2002 de 15h00 à 16h00.

I.2.1 Suite de l'activité "bandes" (Tableaux des mesures et réflexions des élèves)



Ombres sur la table



Ombres sur le sol

a) Synthèse

A partir des fiches remplies par les élèves ramassées à la séance précédente, un tableau répertoriant toutes les longueurs données en centimètre a été au préalable dressé au tableau noir de la classe. L'heure à laquelle les mesures ont été prises n'a pas permis de trouver toutes les longueurs au sol. Voici également les quelques remarques qui ont été inscrites par les élèves sur leur fiche.

Bandes 4 : "La table inclinée fait 2 fois la taille de la table au sol. La table au sol est plus petite que la table horizontale."
Bande 7 : "Quand l'ombre de la bande, qui fait 30 cm, est sur la table horizontale, elle passe de 30 cm à 56 cm et plus."
Bandes 8 : "Plus l'ombre est éloignée plus la longueur est importante."

Numéro bandes	1	2	3	4	5	6	7	8
longueurs bandes	40	30	15	40	20	30	15	20
ombre "horizontale"	73	55	27,5	74	36	56	26,5	37
ombre "inclinée"	35	48,5	× ×	35	16	45	21,8	30
ombre sur le sol	× ×	× ×	× ×	73	37	× ×	× ×	× ×

Les élèves sont invités collectivement à faire des remarques au sujet de ces données qui sont inscrites au tableau de la classe.

Elève C : "Les ombres inclinées sont de la même longueur."
Ex : "Cela n'est il pas un hasard ? Vous n'avez pas essayé de l'incliner différemment ? 35 et 35 c'est fortuit ici."

Cette remarque est intéressante mais pressé par l'attente d'autres remarques, nous ne nous sommes pas appesantis sur cette idée.

Elève B : "Toutes les longueurs inclinées sont plus petites."
Elève : "L'ombre augmente, à chaque fois, elle est plus grande que la bande."
Elève D :"A la 4 et à la 5 on a 74 et 36 et sur le sol s'est pratiquement pareil."
Ex : "ça, c'est une remarque fondamentale qui va à l'encontre d'une remarque de l'un d'entre vous. Car l'un d'entre vous a dit, la dernière fois, que si on enlève la table, l'ombre au sol sera plus grande. Or c'est apparemment faux, on vient de le vérifier. Pourquoi ne trouve-t-on pas la même longueur ?"
Elève : "Le soleil a bougé."
Ex : "Oui et vous n'avez pas tous mesuré de la même façon."

Les trois remarques ci-dessus ont été faites par les élèves, sans intervention extérieure.

Ex : "Les huit bandes n'étaient pas prisent au hasard. Qu'avaient-elles de particulier ces bandes ?"
Elève F : "Elles n'étaient pas de la même longueur."
Ex : "Oui mais malgré cela, regardez bien."
Elève F : "Il y en avant qui étaient égales."
Ex : "Combien ?"
Elève F : "Deux a chaque fois sont de la même longueur. Et les ombres aussi."

Plus aucunes remarques ne sont émises. Au tableau, nous entourons alors en blanc 30 - 55 et 30 - 56, 15 - 27,5 et 15 - 26,5. Nous entourons en jaune 74, 73 et 36, 37. Nous plaçons dans un cadre bleu les nombres "ombre horizontale" et "ombre inclinée". Nous rassemblons dans un cadre rouge les longueurs des bandes et les ombres horizontales. Nous précisons aux élèves qu'en ce qui concerne ce qui est entouré en blanc, en jaune et en bleu, cela correspond aux remarques qu'ils ont faites jusqu'à présent. Nous leur demandons quelle remarque ils peuvent faire sur le cadre rouge ? Un long temps s'est écoulé, à peu près 2 ou 3 minutes, avant que la remarque attendue soit faite.

Elève B : "Quand on calcule 73/40 on trouve 1,825 et quand on calcule 55/30, on trouve 1,8."

Les élèves donnent alors les valeurs approchées des autres rapports :
$27,5/15 \approx 1,885$ $74/40 \approx 1,85$; $36/20 \approx 1,8$; $56/30 \approx 1,861$; $24,5 \approx 1,76$; $37/20 \approx 1,85$.

Ex : "Cela veut dire quoi d'après vous ?"
Elève : "On trouve à peu près la même chose."
Ex : "Ces rapports sont pratiquement égaux. Comment pourrait-on traduire ce fait autrement ? Trouvez un autre mot mathématique pour traduire le fait que lorsque l'on prend tous les nombres de la première ligne et qu'on les divise par ceux de la seconde, on trouve le même résultat."
Elève B : "Ce sont des multiples d'un nombre."
Ex : "Oui, mais je voudrais un autre mot qui traduise directement la propriété entre ces deux lignes de nombres."
Elève MF : "Il y a proportionnalité entre les longueurs des bandes et la longueurs des ombres."
Ex : "C'est exactement ça. Trouverait-on la même chose pour les ombres inclinées ?"
Elève : "Non."
Elève B : "Cela dépend de l'inclinaison."
Ex : "En effet, si les tables étaient inclinées rigoureusement de la même façon, nous aurions aussi proportionnalité, mais ce n'est pas le cas."

b) Analyse *a posteriori*

Des fiches

Remarquons que des élèves notent sur leurs fiches que l'ombre au sol est plus petite que celle de la table horizontale bien qu'ils trouvent à peu près les mêmes longueurs, 74 et 73 pour la bande 4 et 36 et 37 pour la bande 5. Au centimètre près, les erreurs de mesures prises en compte, les élèves pourraient effectivement penser que les longueurs sont égales, ce qui n'est pas le cas. Les commentaires de la fois précédente faits par un élève sur l'inégalité de ces longueurs ont peut-être aussi été prégnants. Le commentaire pour la bande 8 semble vouloir dire que plus on incline la table, c'est à dire plus l'ombre est loin, plus sa longueur est importante. Toutes ces remarques pertinentes ne sont pas directement en relation avec ce que nous voulions mettre en évidence et n'ont donc pas été reprises en classe collectivement.

Des discussions collectives

Un élève a tout d'abord remarqué que les ombres des bandes identiques 1 et 4 avaient la même mesure. Nous avons simplement fait la remarque que cela était fortuit. Les faits que l'ombre d'une bande est moins longue sur la table inclinée que sur la table horizontale, que la longueur d'une ombre est identique sur deux plans parallèles et que les ombres sont plus grandes que les bandes ont été énoncés par trois élèves différents et de façon spontanée. Par contre, l'indépendance de la longueur d'une ombre du choix de la fenêtre où se trouve la bande n'a pas été trouvée directement. Nous avons dû intervenir en posant deux questions intermédiaires. Ce qui n'était pas prévu, mais cela dépendait fortement des remarques faites par les élèves. De même, nous les avons mis sur la voie en faisant ressortir dans un cadre rouge les longueurs des bandes et de leurs ombres sur la table horizontale. Cela a été totalement improvisé à la suite de l'embarras dans lequel se trouvaient les élèves à cours de remarques. Mais l'idée de former des rapports de mesures a alors immédiatement été proposée. Le fait qu'il y ait proportionnalité entre les longueurs des bandes et la longueur des ombres n'a été prononcé par un élève qu'après que deux autres aient évoqué qu'ils ont "trouvé à peu près des résultats égaux", "que ce sont des multiples d'un nombre". Cela ne semble pas étonnant puisque les égalités de quotients ou de fractions ne sont pratiquement jamais associées à la proportionnalité dans les ouvrages. Les procédures scalaires et fonctionnelles (Vergnaud, 1981 (b)) ne sont pas mobilisées en même temps en semblent s'annihiler mutuellement.

Remarquons que bien que les tables aient été inclinées presque de la même façon, les élèves n'ont pas ici relevé le fait qu'il y avait quasi proportionnalité. Vient alors la recherche d'une méthode pratique pour trouver la hauteur d'une fenêtre de la classe.

I.2.2 Suite et fin de l'activité "bandes" (calcul de la hauteur d'une fenêtre question 2.e))

a) Synthèse

La mesure de l'ombre de la fenêtre n'a pas été prise par les élèves. Nous l'avons nous-mêmes mesuré à la séance précédente alors que les élèves mesuraient les ombres sur le sol.

Ex : "Comment va-t-on pouvoir calculer la hauteur de la fenêtre en utilisant le fait qu'il y a proportionnalité entre les bandes et leurs ombres ? On vient de voir qu'il y a proportionnalité entre l'objet, la bande, et son ombre."
Elève : "Il faut qu'il fasse soleil."
Elève B : "On mesure l'ombre de la fenêtre."
Ex : "Oui, mais si on mesure l'ombre de la fenêtre aujourd'hui, pourra-t-on utiliser, pour le calcul, les mesures précédentes, trouvées Lundi ?"

Les élèves semblent réfléchir mais ne font aucun commentaire.

Ex : "Quelle est la caractéristique de toutes les mesures qui ont été prises Lundi. Si je prends maintenant les mesures, cela va-t-il changer quelque chose ?"
Elève : "Oui, c'est pas la même heure."
Ex : "J'avais pris mes précautions. J'avais pris la longueur de l'ombre de la fenêtre à la première séance."

Nous leur demandons quelles mesures du tableau pourraient servir ? Les élèves ayant bien trouvé la proportionnalité entre la longueur des bandes et la longueur des ombres, l'un d'entre eux me propose d'utiliser le couple (40 ; 73). Sont notés au tableau les mesures suivantes :

objet	40	x (fenêtre)
ombre	73	266

Nous leur demandons de réfléchir pour trouver la longueur cherchée. L'élève B a déjà une solution, mais nous ne le sollicitons pas.

Elève MF : "On fait 40 fois 266 sur 73. C'est comme la proportionnalité."
Ex : "C'est pas comme, **c'est** la proportionnalité. Votre approche de la proportionnalité est donc de calculer directement $(40 \times 266)/73$. Et on trouve à peu près combien ?"
Elève B : "145."

Deux élèves prennent un mètre enrouleur et mesure la longueur réelle de la fenêtre et trouvent 143 cm.

b) Analyse *a posteriori*

Lorsque nous notons au tableau les trois mesures, nous faisons appel à un ostensif. Il aurait été sans doute possible de nous passer de ce dernier artifice en demandant aux élèves de proposer eux-mêmes la mise en forme de l'application de la proportionnalité à notre situation. Cette prise en main n'était pas prévue et a été induite par le fait que les élèves ont précédemment calculé de façon autonome de nombreux rapports de ce type. Et de plus, la méthode pour calculer la hauteur de la fenêtre supposée être inaccessible n'a été trouvée par les élèves qu'une fois que ces données numériques ont été écrites sur le tableau. L'objectif de trouver une méthode fondée sur la mesure des ombres pour calculer la hauteur d'une fenêtre a été atteint.

I.2.3 Activité calcul de la hauteur du panneau de basket (Annexe I 1, b) (Activité I séquence 2).

a) Synthèse

Mise au point de la méthode

Nous disons aux élèves que nous revenons à la problématique générale qui est de calculer une longueur inaccessible comme la hauteur d'un panneau de basket et nous leur demandons de trouver une méthode.

Elève B : "On mesure l'ombre du panneau de basket."
Ex : " Et on mesure aussi quoi ?"
Elève : "La longueur...Le panneau de basket."
Ex : "Est-ce directement accessible ? C'est justement ça que l'on ne peut pas mesurer et que l'on se propose de calculer. Pourquoi avons nous pu calculer l'autre fois ?"
Elève C : "On a une référence."
Ex : "Très bien, on avait une référence, qui était quoi ?"
Elève C : "Les bandes."

Nous proposons alors aux élèves d'employer les lattes de bois que nous avons apportées. Nous leur demandons de former 7 groupes de quatre.

Ex "Avec ce décamètre, vous aller mesurer quoi ?"
Elève C :"L'ombre, les lattes et l'ombre des lattes."

Pratique dans la cour :

Les groupes d'élèves se succèdent pour prendre les mesures à l'aide d'un décamètre. Un premier élève désigne le bas du panneau en bois. Nous indiquons que nous voulons la hauteur totale. Un autre élève montre alors l'ombre du sommet du panneau. Nous indiquons à tous les groupes que les lattes mesurent 2 mètres. Le temps manquant, seulement trois groupes ont pris les mesures en questions.

Retour en classe pour la représentation de la situation et le calcul :

Après le retour en classe, nous leur disons qu'ils vont devoir représenter la situation grâce à un schéma à l'échelle et un élève rappelle qu'un schéma à l'échelle permet de réduire. Nous leur disons que chaque membre du groupe doit réaliser ces schémas. Nous leur demandons ce qui doit être représenté et un élève répond immédiatement :

Elève C : "Le panneau, les lattes et les ombres."

La séance étant terminée, nous indiquons aux élèves qu'ils ont à représenter la situation pour la prochaine fois et nous leur distribuons en même temps l'activité I séquence 3 qui concerne l'éclipse du soleil. Nous explicitons cette séquence en leur demandant de ne pas être trop prolixes dans leurs explications.

b) Analyse *a posteriori*

Mise au point de la méthode

Après quelques tergiversations, l'idée d'utiliser un objet référent a rapidement été évoquée par un élève. Ce même élève a trouvé les trois mesures qui doivent être prises pour appliquer la méthode de calcul. Ce qui est intéressant est le fait que les interventions pertinentes, au cours de ces phases très pratiques, ont été faites par différents élèves. Nous verrons que dans les phases de modélisation ou de problématique géométrique, ou de démonstration, il en est tout autrement. L'objectif de transposition de la méthode appliquée pour calculer la hauteur d'une fenêtre à la mesure d'un panneau de basket a été atteint.

Pratique dans la cour :

L'objectif de prise de mesures par tous les groupes n'est que partiellement atteint. Les élèves ont eu un peu de mal à mesurer avec l'instrument qui leur était proposé du seul fait, pensons-nous, que l'unité liée au décamètre, diffère des unités qu'ils utilisent couramment dans le micro-espace.

Retour en classe pour la représentation de la situation et le calcul :

L'idée qu'une représentation à l'échelle a bien été explicitée par un élève ainsi que l'idée de représenter le panneau, les lattes et les ombres. Mais la modélisation n'a pas pu se faire au cours de cette séance.

I.3 Troisième séance : le Lundi 23 septembre 2002 de 16h00 à 17h00.

I.3.1 Suite de la modélisation et du calcul de la hauteur du panneau de basket

a) Synthèse

Les élèves ont tracé sur une feuille, par groupe de cinq ou six, le schéma représentant l'activité de mesure de la hauteur du panneau de basket. Nous leur demandons par quoi ont-ils commencer pour dessiner la situation et l'élève C indique qu'il a commencé par les lattes de bois. Je prends en exemple la fiche d'un groupe qui visiblement a choisi de représenter 1 mètre sur le terrain par 2 cm sur la feuille. Vient alors une discussion sur ce qui doit être représenté et à quelle dimension. L'élève C indique que les ombres sont perpendiculaires aux objets. Le dessin est effectué simultanément au tableau, sans être à l'échelle, au fur et à mesure que les élèves donnaient les indications adéquates. Des incertitudes sont apparues sur les mesures.

Ex : "Oui. Vous avez mesuré combien ?"
Elèves : "2,81. 2,88."
Ex : "Pourquoi cela peut-il changer ?"
Elève C : "Le soleil bouge."
Elève B : "Une mauvaise mesure."

Puis les élèves sont embarrassés sur le fait qu'ils doivent, contrairement à ce qu'ils ont tous produit sur leur feuille, représenter le panneau avant de calculer sa longueur.

Daniel : "Pensez aux rayons du soleil."
Ex : "Là, on a les lattes et là il y a l'ombre. Pourquoi a-t-on l'ombre ? L'ombre, cela représente quoi ? pourquoi il y a une ombre ,"
Elève F : "A cause du soleil."
Ex : "Moi je dirais plutôt l'inverse. A cause de l'absence de rayons de soleil. Comment je vais avoir le panneau de basket ?"
Elèves : "En faisant la même chose."
Ex : "La même chose, on ne peut pas, puisqu'on n'a pas le sommet du panneau."
Elève F : "Les deux rayons sont parallèles."

Nous leur disons alors que deux méthodes étaient possibles pour schématiser la situation. Soit le dessin est exécuté avant le calcul de la longueur du panneau, soit il est possible de calculer la hauteur réelle du panneau puis sa hauteur à l'échelle pour le représenter sur le dessin faisant apparaître les deux ombres et les lattes. Les élèves nous ont ensuite indiqués directement leurs calculs sans passer par un agencement des nombres mettant en évidence la proportionnalité. Nous leur avons demandé alors de prendre position sur les incertitudes de la méthode.

Ex : "Plusieurs erreurs ont pu être commises. Même si la méthode demeure correcte, quels désavantages peut-on avoir pour trouver la hauteur d'un panneau, ou une autre distance inaccessible ?"
Elève : " Le soleil bouge."
Ex : "Ensuite, dans quel cas cela pourrait être difficile voire impossible ?"
Elève : "Les mesures sont approximatives."
Ex : "Oui. Mais l'ombre au sol sera-t-elle tout le temps accessible ?"
Elève : "Non, s'il n'y a pas de soleil."
Ex : "Mais s'il y a du soleil ? L'ombre peut être encombrée. Et pour des objets lointains, c'est une méthode impossible à appliquer."

Nous résumons la situation en disant aux élèves qu'au cours de ces premières séances, nous avons trouvé une méthode qui lie des objets à leurs ombres. C'est une méthode assez aléatoire, comme ils l'ont dit eux-mêmes, et c'est pour cela que je vais en proposer une autre.

b) Analyse *a posteriori*

La méthode de schématisation n'a pas été imposée dans l'énoncé. Nous avons pu vérifier sur les dessins que tous les élèves ont d'abord calculé la hauteur du panneau qu'ils ont ensuite traduit à l'aide de l'échelle choisie. Aucune symbolisation des rayons du soleil n'était parente. Il aurait été utile d'imposer la construction du schéma avant d'effectuer les calculs. Cela aurait permis aux élèves de vérifier après coup que leurs calculs étaient en adéquation avec la mesure de la hauteur du panneau qu'ils auraient trouvé directement sur le dessin. Les élèves ont compris qu'il fallait représenter les deux ombres et la latte à l'échelle, et malgré une prise en main de notre part, ils ont eu du mal à faire appel aux rayons du soleil pour obtenir sur le schéma le panneau de basket sans calcul. Au cours de l'activité "escalier", ils ont bien remarqué que les ficelles reliant un point de l'escalier à son ombre étaient parallèles mais ils avaient eu des difficultés à modéliser cette situation pour conclure alors que cela signifiait que les rayons du soleil étaient parallèles. A ce sujet, la question que nous nous posions dans notre analyse *a priori* était légitime.

- L'objectif de représentation de la situation est partiellement atteint. Le fait qu'il faille représenter trois longueurs et la façon de les obtenir à l'échelle sont deux acquis des élèves. Par contre, l'objectif de représentation de la situation avant calcul ne l'est pas. L'établissement de la relation qui existe entre le côté numérique et le géométrique ne va pas de soi. C'est un point qu'il faudrait reprendre. Les élèves sont passés directement aux calculs et n'ont pas vu l'utilité d'une schématisation. Les rayons du soleil sont venus après coup sur leurs dessins. Une réflexion *a priori* plus importante doit être entreprise au niveau de l'activité des bandes de papier. En effet, les calculs ont bien fonctionné dans cette situation pour faire apparaître la proportionnalité recherchée, donc les élèves n'avaient pas de raisons pour procéder autrement dans la situation du panneau de basket. Pour éviter ce passage trop rapide aux calculs, il serait possible de demander de représenter par un dessin la situation des bandes de papier et de leurs ombres puis de passer aux calculs. Dans un second temps, les élèves ne passeraient peut-être pas à côté de l'importance de la schématisation du problème du panier de basket.

- L'objectif d'invalidation de la méthode de mesure de distances inaccessibles est atteint. Les élèves ont critiqué cette méthode en soulevant le fait que :

- Des erreurs de mesures ont pu être commises.
- Le soleil a pu bouger entre deux prises de mesures.
- L'ensoleillement peut ne pas être suffisant.

I.3.2 Activité éclipse totale de soleil (Annexe I 1, c) (Activité I séquence 3 questions a), b), c), et d)).

a) Synthèse

Des transcriptions des enregistrements :

L'élève C explique qu'une éclipse de soleil signifie que la lune cache le soleil et que cela se traduit sur la terre par la pénombre. Nous précisons que cela signifie que les tailles apparentes des deux astres sont les mêmes. On dit alors justement que les diamètres apparents sont égaux. Nous entamons alors une discussion sur la méthode que nous pourrions employer pour comprendre ce phénomène.

Ex : "Pour comprendre la situation, qu'est-ce qu'il y a de gênant pour agir directement sur les paramètres, c'est à dire les différentes longueurs ? Par exemple, là ici *(je désigne les fenêtres)* pourquoi on a réussi a comprendre comment cela fonctionnait ?"
Elève C : "On pouvait mesurer les distances."
Ex : "Est-ce que l'on va pouvoir faire la même chose pour comprendre les éclipses de soleil ?
Elève C : "C'est trop loin."
Ex : "Qu'est-ce qui est trop loin ?"
Elève : "Toutes les distances sont trop loin."

Nous leur expliquons qu'il y a trois espaces. Les espaces de la taille de la feuille sur laquelle ils écrivent. Ceux liés à la taille, par exemple, de la salle de classe, ou de la cour. Et les espaces liés justement aux distances interplanétaires par exemple.

Ex : "On ne peut pas agir sur ces distances. Comment va-t-on faire pour comprendre, pour savoir comment cela fonctionne ?"

Un silence de quelques secondes s'est produit. Nous avons alors demandé aux élèves de nous communiquer les données chiffrées, les longueurs et distances qu'ils avaient pu récolter. L'élève F a alors dit que le soleil est plus grand que la lune et pourtant la lune cache le soleil. Nous leur avons redemandé comment nous pourrions faire pour comprendre ce "paradoxe" ? Devant leur mutisme, nous leur avons rappelé que dans l'activité des "bandes", nous avions pu agir directement. Un long silence a encore suivi cette intervention.

Daniel : "Qu'est-ce que vous avez fait avec le panneau de basket ?"
Elève C : "On va l'imaginer."
Ex : "C'est à dire ?"
Elève C : "Par un schéma."
Ex : "On va essayer de faire un schéma à l'échelle, mais on va voir ce qu'il va se passer. "

Nous prenons en charge le choix des échelles. Nous proposons tout d'abord de représenter la lune par un disque de 0,05 cm de diamètre. Nous leur demandons d'effectuer les calculs pour trouver les longueurs à l'échelle des rayons de la terre(R_T)et du soleil(R_S) et les distances terre-lune (T-L)et terre-soleil (T-S). Nous proposons aux élèves de diviser toutes les longueurs, qui ont été consignées au tableau, par 1000.

Ex : "Comment va-t-on faire pour calculer le rayon correspondant si 1,738 est représenté par 0,025 ? Par combien seront représenté 6,370 ?"
Elève 1 : "On divise par deux."
Elève 2 : "C'est la proportionnalité."
Ex : "Quel calcul fait-on ?"
Elève : "1,738 sur 6,47 ..."
Ex : "Non."
Elève C : "6,37 fois 0,025 sur 1,738. Ça fait 0,09."
Ex : "Va-t-on pouvoir représenter un tel disque ?"
Elèves : "Oui."

Nous leur demandons d'effectuer les calculs pour les autres longueurs. Plusieurs propositions sont faites pour le rayon du soleil et une seule est cohérente, celle de l'élève C qui trouve 9,8. Pour les distances Terre - Soleil, et Terre - Lune l'élève F trouve respectivement 2157 et 5,52. Nous lui demandons de préciser l'unité qui est le centimètre.

Ex : "Avec toutes ces longueurs, nous allons rencontrer des difficultés ?"
Elève C : "La distance terre-soleil, c'est des mètres."
Ex : "Oui. Va-t-on pouvoir réaliser sur une feuille la distance (T-S) ?"
Elèves : "Non."

Nous disons qu'en effet un schéma à l'échelle de la situation n'est pas réalisable. On ne peut pas prendre la même échelle pour toutes les longueurs. Nous proposons deux nouvelles échelles et après calcul les élèves se rendent compte que la situation ne peut pas là non plus être représentée.

Ex : "De tout cela, que peut-on en conclure ? Je rappelle, à la question a) de l'activité, on a essayé de trouver une échelle commune pour toutes les longueurs ; au b) on a essayé de trouver deux échelles différentes."
Elève C : "On ne peut pas faire un schéma."
Ex : "Si, un schéma, on va pouvoir en faire un. Il faut être plus précis. Un schéma, on pourra en faire un. On ne peut pas faire un schéma ... Cela représente quoi ces nombres ? Il faut compléter la phrase."
Elève B : "A l'échelle."
Ex : "Exactement car même sur votre feuille vous allez pouvoir en réaliser un schéma, mais pas à l'échelle."

Par manque de temps, nous réalisons nous-mêmes ce schéma au tableau.

Des productions écrites des élèves :

Les documents consultés sont le plus souvent des encyclopédies ou des dictionnaires personnels. Les élèves ont rédigé leurs explications sur une feuille volante. Les dessins que nous avons ramassés se ressemblent tous. Nous en avons mis quelques-uns en annexe (Annexe I 4). L'un d'entre eux fait apparaître une zone où l'éclipse est totale sans même représenter le soleil ou expliquer pourquoi, à cet endroit, le soleil est totalement occulté. Un groupe écrit sur sa fiche :

> "Ce qui paraît paradoxal dans l'éclipse totale de soleil c'est que pendant un certain temps, la lune recouvre tous les rayons du soleil."

Nous pouvons supposer ici que ces élèves sous entendent : " bien que le diamètre de la lune soit beaucoup plus petit que celui du soleil, la lune recouvre tous les rayons du soleil."

Ce qui semble caractéristique est la définition de l'éclipse totale de soleil que nous retrouvons à plusieurs reprises. Quatre élèves écrivent :

> "Une éclipse de soleil se produit lorsque la lune passe exactement devant le soleil et fait de l'ombre à une partie de la terre. Lorsque l'alignement terre - lune - soleil est parfait, l'éclipse est totale."

Nous avons l'occasion de montrer aux élèves, au cours des études qui suivent, que cet alignement dit parfait n'est bien sûr pas suffisant pour obtenir une éclipse totale de soleil. Une autre condition que l'alignement doit être vérifiée qui est celle liée justement au théorème que nous mettons en situation dans la séance qui suit. Mais cette condition n'est évoquée par aucun des élèves. Deux autres élèves écrivent :

> "[...]Il faut également que la lune ne soit ni au-dessus ni au-dessous lorsqu'elle passe entre la terre et le soleil."

Ils doivent vouloir, ici encore, faire référence à l'alignement des trois astres. Mais rien n'est dit sur la position exacte que doit avoir la lune pour que l'éclipse de soleil soit totale. D'autres élèves ont été plus évasifs.

> "Les éclipses totales de soleil se produisent lorsque l'ombre de la lune atteint la terre. A certains moments de son passage entre la terre et le soleil, l'ombre de la lune n'atteint pas la terre."

Il n'est plus question ici d'alignement dit "parfait".

b) Analyse *a posteriori*

- Tous les groupes ont bien trouvés les informations demandées et même parfois au delà.

- Le fait que la lune cache le soleil au cours d'une éclipse totale de soleil a été énoncé oralement et par écrit. Elle est acquise par les élèves. Plusieurs de ces écrits font d'ailleurs apparaître un dessin représentant le soleil, la lune et la terre de façon à ce que, vue de la terre, la lune cache le soleil. Ces schémas ne sont bien sûr pas à l'échelle.

- Le fait que la lune, de diamètre plus petit que celui du soleil, puisse cacher malgré tout ce dernier n'est précisé que dans une seule fiche. Seul l'alignement dit "parfait" des trois astres, sans plus de détails, a été évoqué dans les autres écrits des élèves pour définir l'éclipse totale de soleil. Cela semble compréhensible. Pour eux, les distances dont il est question sont constantes. Pour comprendre que l'alignement n'est pas une condition suffisante dans l'obtention d'une éclipse totale de soleil, il faut imaginer que les distances puissent changer, ce qui n'est pas possible pour les élèves et ce qui n'était d'ailleurs pas possible pour les grecs de l'Antiquité.

Par contre, la question pour savoir comment nous allions faire pour comprendre le phénomène n'était apparemment pas assez précise car un long temps de silence a suivi cette dernière intervention. Seul le rappel du procédé employé pour le cas du panneau de basket leur fait penser à un schéma à l'échelle. Un certain dysfonctionnement s'est fait à ce niveau ressentir.

Les calculs, après maintes hésitations, sont effectués par de nombreux élèves et l'impossibilité de la représentation de la situation à l'aide d'une échelle unique est découverte par un élève. Mais il aura fallu explicitement utiliser le mot calcul pour que les élèves agissent.

- Ce qui est acquis à la fin par les élèves est le fait qu'un schéma à l'échelle est impossible.

I.3.3 Activité de visée de la "lune" et du "soleil" avec une lorgnette (Activité I séquence 3 questions e) et f)).

a) Synthèse

Nous disons aux élèves que l'un d'entre eux va viser les deux disques qui ont été tracés sur le tableau avec la lorgnette prévue pour la séance de façon à ce que le rebord du disque de la lorgnette se retrouve exactement sur le bord du disque visé au tableau. Un élève se propose pour procéder aux deux visées. Il commence par le "soleil" sans se mettre bien en face. Puis rectifie sa position après une remarque faite par ces camarades. Puis, il vise la "lune". Pour cela il se rapproche, ce que remarquent également certains élèves. Nous lui demandons de se décaler de deux pas vers la droite, de revenir à sa position initiale et de se décaler de deux pas vers la gauche. L'élève s'exécute et commente ce qu'il voit pour les deux déplacements.

Ex : "Il dit qu'il n'a rien vu, puis qu'il a vu à peine. Que peut-on conclure ? Que peut-on en déduire quant à la visée ?
Elèves : "Il faut vraiment être en face."

b) Analyse *a posteriori*

Le fait qu'il faille être de face et à la bonne distance pour viser correctement est acquis par les élèves dès le début de cette activité de visée de la "lune" et du "soleil". De simples constats leur ont permis de parvenir à ces conclusions. Les difficultés que nous avions prévues ne se sont pas faites ressentir.

I.4 Quatrième séance : le Vendredi 27 septembre 2002 de 15h00 à 16h00.

I.4.1 Visée avec les quinze lorgnettes (Annexe I 1, d) (Activité I , séquence 4a questions a), b) et c)).

a) Synthèse

La séance débute par un rappel de la remarque fondamentale faite en fin de dernière séance. L'élève C indique qu'il faut être en face et que pour cela, les lignes pourront être utilisées. Nous plaçons alors le tableau perpendiculairement à une ligne au sol et de façon que le milieu de la mire se trouve à la verticale de cette ligne. Puis, les lorgnettes sont ensuite présentées aux élèves sans que soient précisées leurs mesures caractéristiques. Nous récapitulons avec les élèves les conditions de visée : on utilise une ligne au sol pour être en face, on fait ensuite coïncider les traits noirs de la mire avec les extrémités de la fente de la lorgnette et le milieu de la mire avec la ficelle de la lorgnette. Les binômes, qui ont été formés en classe afin que les élèves puissent déposer leurs affaires et qu'ils puissent prendre une feuille et de quoi écrire, se mettent à viser chacun leur tour. Certains prennent déjà leurs marques, avant leur passage définitif, en se donnant une idée de l'endroit de leur visée. Mais les visées se font les unes après les autres. Le premier viseur du premier binôme, placé sur la ligne blanche, hésite sur l'endroit de visée. Nous lui indiquons qu'il peut soit se rapprocher soit reculer pour avoir exactement la mire dans la fente de la lorgnette. Il s'avance. Le second viseur trouve le même endroit et place le carton d'identification de leur mire. Le premier élève du deuxième tente de se mettre au même endroit que le premier binôme pour viser mais rectifie rapidement son jugement. Assez grand, il dépose alors son carton à l'endroit qui correspond à sa visée. Son camarade qui est beaucoup plus petit a le réflexe de se rapprocher.

Ex : "Ce n'est pas sûr qu'il faille se rapprocher."
Elève B : Mais si, je suis beaucoup plus petit !"

Finalement, après plusieurs essais, l'élève B se rend compte qu'il vise du même endroit que son camarade. Les autres visées se sont reproduites à peu près de la même façon. Nous avons ensuite rassemblé tout le monde. Les cartons témoins étaient regroupés en trois tas à peu près compacts, c'est à dire que tous les cartons censés appartenir au même groupe, au minimum se touchaient, au maximum étaient l'un sur l'autre, à deux exceptions près. Les élèves ont tout de suite remarqué qu'il y avait à peu près trois groupes.

Ex : "D'après vous, pour quelles raisons certains cartons sont un peu dispersés ?"
Elève C : "Cela dépend de la vue."
Ex : "Oui et de la qualité de la visée. Est-ce que cela dépend de la taille ? B pensait, au départ, que la visée dépendait de la taille."
Elève B : "Non."

Un élève est chargé de noter, avant que nous les enlevions, les numéros des lorgnettes des trois tas précédents.

Ex : "Est-ce que les lorgnettes étaient identiques ?"
Elèves : "Non."
Ex : "Toutes apparemment étaient différentes, mais alors pourquoi ce sont-elles rassemblées comme ça ? Essayez de réfléchir chez vous sur quoi on peut jouer pour regrouper les lorgnettes, qui apparemment sont différentes et qui pourtant, pour les visées, sont équivalentes."

b) Analyse *a posteriori*

La remarque très intéressante de l'élève B sur sa taille plus petite que celle de son camarade et devant ainsi influer sur la visée correspond à un modèle qui n'est pas le bon mais c'est en cela que nous pouvons remarquer que cette activité de modélisation est fondamentale. Notons que cet élève a lui-même invalidé cette hypothèse en constatant les rassemblements caractéristiques des cartons. Mais il s'agit d'une vérification pratique, il faut ensuite modéliser la situation pour qu'il comprenne réellement le processus. Sans que nous ayons eu besoin de les orienter, les élèves ont eu l'idée d'utiliser les lignes tracées sur le sol pour respecter la consigne de visée de face qu'ils ont, par ailleurs trouvée eux-mêmes à la séance précédente. Ce qui est acquis par les élèves à la fin de cette séance correspond au fait que les lorgnettes se regroupent en trois tas. Malgré les imprécisions des mesures et des visées, cela a été constaté très rapidement. Les écarts de deux cartons par rapport à ces trois groupes sont également justifiés correctement par les élèves. Nous pouvons d'ores et déjà dire que nous nous rendons bien compte que cette situation n'est pas réellement a-didactique. En effet, pour que cela soit le cas, il faudrait que ce soit le milieu qui renvoie les informations, qui permette de dire que la situation fonctionne, qui permette réellement aux élèves de découvrir le fonctionnement de la situation grâce à des va et vient par rapport à celle-ci. Dans le méso-espace, les informations liées à la mesure des longueurs se prêtent mal à l'élaboration de conjecture. Par exemple, nous pourrions imaginer que deux droites sécantes soient tracées sur le sol de la cour du collège. Un point situé en dehors de ces deux droites est également placé. La question pourrait être par exemple de trouver la ou les conditions pour qu'une droite passant par ce point soit parallèle à l'une des deux premières. Les informations sur des rapports de longueurs seraient alors communiquées par la situation et les variations que les élèves pourraient faire lui faire subir. Mais nous nous rendons compte que la mise en place d'une telle activité serait très coûteuse en temps et quasiment impossibles à réaliser.

I.4.2 Visée avec la lorgnette percée de cinq trous (Activité I , séquence 4a question d)).

a) Synthèse

Nous passons ensuite à la lorgnette aux cinq trous qui est décrite aux élèves. Nous leur demandons de viser par les trois premiers trous, puis de retourner la lorgnette et de viser, de même par les trois premiers trous. Un élève du binôme vise et l'autre trace à la craie une croix à l'emplacement. Au premier binôme, nous leur demandons, une fois les trois visées prises, de retourner la lorgnette. Le binôme suivant demande des explications sur la visée. Sa première croix se trouve exactement à l'endroit de la première croix du premier binôme. Pour la visée du trou suivant, l'élève tente d'avancer et de reculer. Voyant que cela ne convient pas, l'élève se décale alors mais en visant de biais.

Ex : "J'ai une question à poser. Est-ce que l'on peut viser de biais ?"
Elèves : "Non."

Il rectifie alors sa visée. D'autres binômes se succèdent, mais nous arrêtons là nos commentaires. Nous rappelons alors la manipulation. L'élève MF dit que les croix sont alignées.

Ex : "Elles sont effectivement à peu près alignées. C'est la première remarque que j'attendais. Quelle autre remarque on peut faire encore ?"
Elèves : "Elles sont regroupées.
Ex : "Oui."
Elèves C : "Certaines sont plus en retraits."
Ex : "Oui d'accord. Vue qu'elles sont alignées ces croix, est-ce qu'on ne pourrait pas faire une remarque par rapport à la mire ?"
Elève F : "Parallèles."
Ex : Qu'est-ce qui est parallèle et à quoi ?"
Elève F : "La mire et les croix."

Nous récapitulons alors les deux remarques que les élèves ont faites.

b) Analyse *a posteriori*

Pour viser avec la lorgnette aux multiples trous, un élève a essayé d'avancer et de reculer comme pour les lorgnettes précédentes. Cela paraît normal puisque ce procédé a fonctionné pour toutes les manipulations précédentes, il le réemploie ici et s'est bien un ressort de la didactique que de faire évoluer ce procédé. Il s'est ensuite décalé mais en visant de biais, nous avons pris la main sans que cela ait été prévu. La remarque aurait pu être faite par son binôme ou par un autre élève, mais le temps nous manquait. L'alignement des croix, lieux de visée, a été exprimé immédiatement par les élèves. Pour obtenir le parallélisme de la mire et des croix qui sont alignées sur le sol, nous avons nous-mêmes demandés de les mettre en relation. La multiplicité des tâches rend inévitable ce genre d'interventions de notre part. Encore une fois, malgré les imprécisions des visées et des mesures, la propriété a été obtenue.

I.5 Cinquième séance : le Lundi 30 septembre 2002 de 16h00 à 17h00.

I.5.1 Modélisation des lorgnettes (Annexe I 1, e) (Activité I, séquence 4, b)

***** Mise au point d'un schéma :

a) Synthèse

Les élèves trouvent de suite qu'il faut représenter un rectangle, le trou et la fente de visée. Ils commencent à dessiner sur leur feuille. Certains débutent leur schéma dans l'espace. Nous avons dû leur dire que la situation se déroule dans le plan et que par exemple il n'est pas utile de représenter la boîte à trois dimensions. Les élèves terminent leurs dessins. La caméra les filme. Un élève, choisi au hasard, se rend au tableau pour y reproduire son schéma. Il représente un rectangle, un point centré pour le trou de visée, la fente à l'aide d'un segment dont les extrémités sont également centrées, ainsi que la ficelle au milieu de ce segment. Nous demandons aux autres élèves de décrire ce que vient de dessiner leur camarade, ce qu'ils font sans difficulté. Nous avons mis en annexe (Annexe IV 8) les dessins d'élèves les plus caractéristiques. Une élève, F, met à part le trou de visée qui est mal placé, a à peu près bien représenté la situation de visée. Un élève a dessiné un rectangle à l'intérieur duquel se trouve un autre rectangle qui est centré par rapport au premier et qui représente la fente de visée. Le trou de visée et la ficelle concrétisée par un segment sont eux-mêmes centrés dans ce second rectangle. Par contre, dans ce cas de figure, la mire n'est pas présente. Il représente la situation vue de fasse. MF utilise la même technique de représentation précédente mais en y rajoutant la mire en perspective. Ce dessin est donc en trois dimensions. Cynthia procède de la même façon sans représenter la fente. D a représenté la fente et le trou de visée l'un au-dessus de l'autre mais sans perspective. L'élève A a parfaitement dessiné la lorgnette munie du trou et de la fente de visée, sauf que la mire n'est pas dans le même plan et que les traits de visée ne passent pas par le trou de visée.

b) Analyse *a posteriori*

Nous avons dû prendre la main dès que nous nous sommes aperçus que certains élèves représentaient la situation dans l'espace et d'autres produisaient des schémas hybrides mélangeant le plan et l'espace. Mais ce réflexe semble normal puisque au départ l'activité se déroule dans l'espace car représenter la situation de l'espace dans le plan constitue déjà une modélisation. L'élève qui dessine au tableau représente correctement la situation dans le plan. Tous les autres élèves semblent d'accord mais nous devons analyser leurs productions personnelles pour en savoir plus. Seule une élève a réussi à représenter la situation dans son ensemble. En effet, pour les autres schémas, soit le dessin est à moitié dans le plan et à moitié dans l'espace, soit il manque un paramètre soit la figure est totalement fausse. Notons qu'un élève a représenté ce qu'il voit de face. Nous aurions pu commenter tous ces dessins avec les élèves justement pour leur faire trouver dans quelle condition se place tel élève d'après sa représentation de la situation. Nous pouvons dire que les élèves sont d'accord sur la représentation qu'ils aperçoivent au tableau. Pour certains c'est parce qu'ils ont dessiné de la même façon, comme nous venons de le voir, pour d'autres parce qu'ils sont convaincus après coup du bien fondé du schéma. Nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une phase ostensive qui a été prise en charge par un élève qui a bien représenté la situation. Encore une fois, il aurait été possible de pousser un peu plus loin les propositions des élèves, mais le manque de temps se fait ressentir.

* Mise au point de la modélisation sur papier calque de la situation de visée :

a) Synthèse

Nous indiquons aux élèves que nous allons réduire les lorgnettes de façon plus précise, sur papier calque et nous leur communiquons l'échelle. Nous leur demandons alors quelles longueurs nous retenons pour représenter une lorgnette ? L'élève C propose la longueur et la largeur de la lorgnette. Un autre propose la longueur et la largeur de la fente. Mais la largeur de cette fente est refusée par un autre.

Ex : "Est-ce qu'il y a d'autres longueurs à retenir ?"
Elève : "Sur un papier calque, non "
Ex : "Par contre, qu'est-ce que l'on représente de plus ; il y a quelque chose de fondamental pour représenter la situation sur le calque correctement."
Elève : "Le trou de visée."
Ex : "Qui se trouve où ?"
Elève C : "Au centre."
Ex : "Qui se trouve au milieu. Et ensuite, le réticule va se trouver où exactement ?"
Elève C : "Au milieu."
Ex : "Au milieu de quoi ?"
Elève C : "De la largeur de la lorgnette."
Ex : "Est-ce que c'est au milieu d'autre chose ?"
Elève C : "De la fente."
Ex : "Oui, le réticule sera donc à la fois au milieu de la fente et au milieu de la largeur de la lorgnette."

Tout le monde est d'accord pour adopter cette méthode. Nous demandons alors aux élèves de se rendre au fond de la salle pour aller chercher leur lorgnette et de prendre ensuite, au millimètre, les mesures qu'ils ont retenues. Nous indiquons à tous les binômes qu'ils doivent réaliser trois exemplaires de leur lorgnette. La représentation de la longueur, de la largeur, du réticule et du trou de visée de la lorgnette ne semble pas poser de problème. Ils doivent par contre centrer la fente. Nous prenons pour exemple longueur de la fente 4 et largeur de la lorgnette 5. L'élève F dit qu'il faut laisser 0,5 de chaque côté car 5 - 4 égale un et on divise 1 par 2. Après leurs avoir demandé une autre solution, l'élève F dit qu'il faut prendre la moitié de 4 et qu'il faut ensuite reporter de part et d'autre à partir du milieu de la fente, des deux côtés 2 et 2. Nous disons aux élèves que nous adoptons cette méthode pour des raisons de précision. Nous notons 4 cm en réalité sont représentés par 1,5 cm. Nous prenons alors l'exemple d'une lorgnette de 27,5 cm pour montrer les calculs à effectuer. Les élèves calculent par binôme les dimensions caractéristiques de leur lorgnette puis nous donnent leurs résultats dont nous avons vérifié la cohérence. Ils ont découpé ensuite leurs trois lorgnettes. Nous avons changé de salle pour nous rendre dans une classe dans laquelle les tables et le matériel avaient été préalablement installés.

b) Analyse *a posteriori*

Les interactions entre le plan et l'espace sont présentes également dans cette phase. C'est une contrainte qui été mal négociée. Des longueurs situées dans un plan différent de celui du plan de visée ont été proposées par les uns mais refusées par d'autres. Certains élèves ont confondu largeur et hauteur de la lorgnette. Toute cette phase a été un peu longue. Les trois points de notre objectif, qui sont que les élèves devaient se mettre d'accord sur le fait qu'une lorgnette doit être représentée par un rectangle à l'échelle découpé dans du papier calque percé d'une fente à l'échelle et du trou de visée correctement centrés, sont atteints. Cette dernière contrainte a bien été négociée par les élèves. Ils ont trouvé d'eux-mêmes deux méthodes pour le centrage. Au sujet du tracé des trois lorgnettes, Daniel nous a indiqué que les extrémités des segments représentant les fentes étaient parfois extérieures au rectangle, ce qui aurait été gênant lorsque les élèves auraient découpé ces lorgnettes. Il leur a donc été indiqué que ces traits devaient être visibles après découpage.

I.6 Sixième séance : le Mardi 1er octobre 2002 de 15h00 à 16h00.

I.6.1 Modélisation des situations de visée.

* Modélisation des visées et de l'équivalence des lorgnettes :

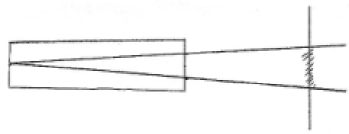
a) Synthèse

Enregistrement vidéo

Les élèves A et B appartiennent au groupe B_3 ; l'élève C au groupe C_1 ; et l'élève F au groupe A_3. Nous demandons ce que représente le trait sur la feuille n°1 et plusieurs élèves répondent qu'il s'agit de la ligne de la cour. Nous leur demandons ce que nous allons faire avec les lorgnettes sur papier calque. Un élève répond un schéma, un plan, l'élève C dit que nous allons les scotcher. Nous nous plaçons alors devant le tableau afin de montrer la technique pour placer les calques.

Elève C : "Les petit points sur la ligne."
Ex : "Quel petit point ? Il y en a plusieurs petits points."
Elèves C : "Le trou de visée."
Ex : "Et ensuite ?"
Elève F : "L'autre point aussi."
Ex : "C'est comme cela que vous allez faire, ce milieu ici, l'autre là."

Les élèves collent alors tous leurs papiers calques sur le bord des tables en plaçant le trou de visée et le milieu de la fente sur l'axe médian. Nous leur demandons comment ils vont faire pour voir si un objet est vu exactement par une lorgnette ? Une élève F effectue le schéma ci-dessous après nous l'avoir montré sur sa feuille. Nous complétons cette illustration en communiquant au tableau et à l'ensemble de la classe une méthode pour parvenir à tracer correctement le champ de visée. Les explications orales sont données à l'aide du schéma effectué au tableau par l'élève F. On place un point puis un autre point et après avoir relevé la lorgnette , on trace les deux demi-droites du champ de visée. L'objet visé est parallèle à la fente.



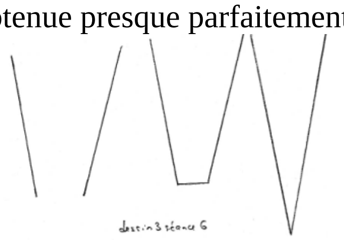
Ex : "Comment va-t-on pouvoir comprendre et voir que des lorgnettes, par exemple celles du tas C, sont équivalentes ?"
Elève A : "On met les autres et on regarde les deux traits pour chacune."

Les élèves du groupe B_2 ont obtenu une équivalence quasi parfaite de leurs cinq lorgnettes. Nous indiquons que si des élèves ne perçoivent pas cette équivalence sur leur représentation, ils peuvent venir la constater à la table 5 (du groupe B_2). Nous amorçons alors la suite.

Ex : "Essayez de réfléchir pourquoi ces lorgnettes sont équivalentes ?"
Elève A : "Parce qu'elles se superposent."
Ex : "Oui d'accord, mais il faut maintenant comprendre pourquoi ?"

Des productions d'élèves (Annexe I 6)

Le groupe B_3 a parfaitement visualisé l'équivalence des lorgnettes par transparence. Leurs représentations sur papier calque ont bien été exécutées. Il a tracé une fois pour toute le champ visuel d'une lorgnette de leur tas et s'est rendu compte, par superposition que les autres lorgnettes avaient le même champ visuel. Cette méthode a été correctement exécutée par quatre autres groupes (A_1 ; B_1 ; C_2 ; C_3) dont nous ne donnons pas les productions. Mais seul le groupe précédent a obtenu toutes les lorgnettes sur papier calque bien exécutées, ce qui a permis de percevoir leur équivalence. A_3 a constaté l'équivalence de quatre lorgnettes sur les cinq comme le groupe de C_1. Ces deux groupes n'ont par tracé de champ visuel jusqu'au trou de visée. A_2 a commencé par tracer partiellement le champ de visée de la lorgnette 11 sans partir du trou de visée mais en débutant de la fente. Il a ensuite matérialisé la largeur de la fente sur ce champ de visée. Puis, successivement, ces élèves ont placé les autres lorgnettes en ne représentant, à chaque fois que la largeur de la fente. Ainsi, ils ont pu constater que trois segments étaient à l'intérieur du premier champ de visée et que deux autres se trouvaient à l'extérieur. Pour ces deux derniers, il leur a été impossible de vérifier l'équivalence des lorgnettes quant à la visée. Par contre, sur les trois autres segments se trouvant dans le champ de visée de la lorgnette 11, deux ont leurs deux extrémités situées exactement sur les deux côtés du champ. Seul un segment, représentant la largeur de la fente de la lorgnette 14, "dépasse" de ce même champ. Un autre groupe B_2, a employé à peu près la même méthode à la différence près que ces élèves ont représenté tous les champs de visée à partir de trou de visée, après avoir relevé leurs calques, ainsi que les largeurs des fentes de chaque lorgnette. L'équivalence de trois lorgnettes est encore ici obtenue presque parfaitement. Un seul champ de visée est un peu "déviant". Finalement trois cas de figure de représentation du champ de visée ont été rencontrés pour visualiser l'équivalence des lorgnettes.



b) Analyse *a posteriori*

Les élèves trouvent facilement les conditions d'utilisation des calques afin de concrétiser le fait que les visées s'effectuent de face. La représentation de la ligne de la cour a sûrement été d'un grand secours. La méthode de matérialisation du champ de visée est également obtenue par un élève (F). Mais nous avons pris la main pour la synthétiser à toute la classe. Il aurait été plus judicieux de laisser l'élève s'expliquer. Enfin, la méthode visualisation de l'équivalence des lorgnettes d'un même tas est aussi obtenue par un élève A. Nous pouvons également conclure que seul un groupe a obtenu l'équivalence quasi parfaite des cinq lorgnettes sur le schéma, mais que tous les autres à par un, ont mis en évidence cette équivalence pour au moins trois lorgnettes. Les élèves ont ensuite bien compris les raisons qui ont pu les amener à constater que certaines lorgnettes sur papier calque n'étaient pas équivalentes aux autres. La précision des schémas sur papier calque ainsi que sur la feuille blanche a été avancé par certains élèves pour expliquer les erreurs apparentes.

* Conjecture pour expliquer l'équivalence des lorgnettes :

a) Synthèse

Enregistrement vidéo

Ex : "Quelles longueurs vous avez retenues pour construire les calques ?"
Elève A : "Longueur, largeur et fente."
Ex : "Pour vous aider, vous pouvez prendre une calculatrice, j'ai mis au tableau les longueurs que vous avez retenues. J'ai mis les longueurs exactes des lorgnettes. Essayez de trouver quelque chose là-dedans qui ferait que l'on pourrait comprendre pourquoi les lorgnettes sont équivalentes ?"

Les élèves cherchent, par groupe, sur leurs feuilles.

Elève B : " La taille de la fente s'est la longueur divisée par 10."
Ex : "Ca veut dire quoi ça d'après vous ? Est-ce que c'est la même chose pour le groupe A ,"
Elèves : "Non."
Ex : "Pour le groupe B, la longueur de la fente est la longueur de la lorgnette divisée par 10 ou à l'inverse la longueur est 10 fois la fente. Pourquoi ? Mathématiquement, ça signifie quoi ?"
Elève : "On multiplie à chaque fois par 10."
Ex : "Cela signifie quoi ?"
Elève : "C'est la multiplication."
Ex : "Oui, d'accord mais c'est à l'école primaire ... on a déjà parlé de ce terme dans les séances précédentes."
Elève F : "La proportion."
Ex : "Dites pourquoi, d'après vous, il y a des lorgnettes différentes qui sont pourtant équivalentes ?"
Elève : "Parce que c'est proportionnel."
Ex : "Dit comme cela, ça ne veut rien dire. Il faut dire entre quoi et quoi il y a proportionnalité."
Elève C : "Entre la longueur de la fente et la longueur de la lorgnette."

L'élève B trouve très rapidement que la taille des fentes est obtenue en divisant les longueurs des lorgnettes du tas B par 10. Mais le rapport de cette propriété avec la proportionnalité a été long à ce mettre en place et a été établi par deux autres élèves que B. Encore une fois, il n'est pas étonnant que les élèves ne fassent pas le lien entre une égalité de rapport et la proportionnalité car cette liaison n'est pratiquement jamais faite dans les ouvrages ni dans les préparation de cours que nous avons analysées. Un effort est à faire dans ce sens. Nous demandons aux élèves de vérifier si cette proportionnalité existe pour les groupes A et C. A l'aide de leurs calculettes, les élèves trouvent les mêmes rapports égaux.

Des productions d'élèves

B_3 a écrit : "Parce que la longueur de la lorgnette est proportionnelle à la fente."

Il s'agit du seul cas où la proportionnalité est exprimée spontanément par écrit et remarquons que c'est un élève de ce groupe qui c'est exprimé a l'oral pour dire la même chose. Cela aurait été plus encourageant que ce soit un élève d'un autre groupe.

b) Analyse *a posteriori*

Le fait de passer d'un groupe de longueurs à un autre en multipliant ou en divisant par 10 est rapidement remarqué mais n'est pas réellement relié chez les élèves à la proportionnalité, sauf dans un groupe. C'est une idée qui ne leur vient pas spontanément. Nous avons dû poser des questions intermédiaires pour l'obtenir.

* Matérialisation de la mire et anticipation de visée (Activité I séquence 4.b questions f) et g) :

a) Synthèse

Enregistrement vidéo

Nous demandons aux élèves tout d'abord de trouver la longueur à l'échelle de la mire. Nous rappelons que 4 cm sont représentés sur le dessin par 1,5 cm. La mire mesurant 100 cm, deux élèves proposent le calcul à effectuer et trouvent 37,5 cm. Nous distribuons alors à chaque table une mire prédécoupée de 37,5 cm afin qu'ils la place de façon à la voir correctement dans une lorgnette du tas qu'ils étudient. L'élève C dit que "ça déborde" et "qu'il faut se mettre plus loin". Mais même plus loin, de toute façon les élèves se rendent compte que la méthode du tracé du champ de visée ne fonctionne plus.

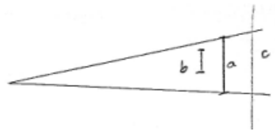
Ex : "Ca rappelle quelle situation ?... Pour quelle situation on a trouvé qu'il n'était pas possible d'utiliser la même échelle ?"
Elève F : "Ah oui la lune et le soleil !"

Nous demandons aux élèves comment il est possible de savoir si, un trait dessiné sur leur feuille est vu exactement dans la lorgnette ? Ils effectuent des essaies sur la feuille n°2.

Elève F : "Il faut que les deux extrémités de la bande elles soient exactement dans le champ de visée. "

Nous demandons à cette élève de venir compléter un schéma au tableau en plaçant un trait qui est parfaitement vu dans la lorgnette.

L'élève trace le trait a et nous rajoutons les traits b et c pour signifier que dans un cas le trait n'est pas vu en entier et que dans l'autre cas, le champ dépasse la mire.



Ex : "Sur la feuille 2, il y a un segment [UV], mais ce n'est pas la mire réelle. Pourquoi ?"
Elève C : "Sinon elle serait loin."

Nous demandons aux élèves de vérifier que du point B, avec la mire qui est fixée sur la feuille 2, on voit parfaitement le segment [UV] que nous avons tracé. Puis, du point A, nous leur demandons de dire si le trait est vu rétréci, agrandi ou parfaitement et de même pour C.

Des productions d'élèves

Nous avons mis en annexe I 7 quelques productions d'élèves ainsi que leurs commentaires, qui ont travaillé en groupe, concernant le champ de visée à partir des points A, B et C. C_1 a tout d'abord commencé à placer la lorgnette au point B qui est censé correspondre au point de visée correcte de la mire [UV]. Pour constater qu'il s'agissait bien du lieu de visée correct, ils ont tracé le champ de visée, non pas à partir du trou mais en partant des deux extrémités de la fente, alignée, l'une après l'autre avec le trou de visée. Comme nous pouvons le voir sur leur production, ces deux élèves ont pu constater que les deux extrémités de la mire se trouvaient exactement sur les côtés de l'angle de visée. Ils ont ensuite placés la lorgnette au point A afin de procéder au même tracé partiel du champ de visée en partant toujours des deux extrémités de la fente et non du trou de visée. Ils voient alors que le segment censé être perçu de cet endroit à l'aide de cette lorgnette est plus petit que la mire [UV]. Ils notent d'ailleurs : "Du point C c'est rétréci et du point A c'est agrandit."

Un autre groupe, celui de A_2 , a procédé de la même façon tout en matérialisant la fente des lorgnettes par un segment. Par contre, aucun commentaire accompagne le dessin. A_1 a utilisé la même méthode sauf qu'il trace en entier les côtés du champ visuel en partant du point de visée. Ses commentaires sont les suivants : "A = rétréci ; B = normal (voit tout) ; C = agrandi)". B_1 a la même démarche. Il note par ailleurs : "Du point A on voit rétrécie. Du point C on voit agrandie." C'est exactement également ce qu'a produit C_2 , mis à part que le champ visuel obtenu au point B n'est pas dessiné. Leurs commentaires sont les suivants : "B = normal. A = rapprochement du segment. Vue rétrécie. C = éloignement du segment. Vue agrandie." Certains élèves, comme B_2 , n'ont effectué aucun tracé sur la feuille. Seuls leurs commentaires apparaissent :

"A partir du point A, le champ de vision de [UV] est rétréci. A partir du point B, le champ de vision de [UV] est distant par rapport au champ de vision de [UV] à partir du point A. A partir du point C, le champ de vision de [UV] est agrandi par rapport aux champs de vision du segment [UV] à partir des points A et B."

Le terme "distant" est difficilement compréhensible ici. C_3 n'ont également tracé qu'un champ de visée, celui obtenu du point B, avec la matérialisation de la fente à l'aide d'un segment parallèle à la mire. Les commentaires sont alors lapidaires : "De A c'est rétrécie. De C c'est agrandi.".
A_3 a tracé la champ de visée complet, c'est à dire à partir du trou de visée, obtenu du point C. Il est indiqué sur la feuille, au point C : *"agrandit."* Ces élèves ont dû ensuite placer la lorgnette aux points A et B pour constater qu'en A c'était *"rétrécit"*. Un seul groupe n'a pas mis en évidence le point de visée correcte. En effet, B_3 a indiqué, après avoir tracé les champ de visée des points A et B : "De B c'est agrandi. De A c'est rétréci.". Le fait que le champ de visée du point B déborde légèrement du segment [UV] les a incité à conclure que du point B, nous voyons le mire "agrandie".

b) Analyse *a posteriori*

Les élèves ont bien vu par eux-mêmes que la mire ne peut pas être représentée à l'aide de la même échelle que les lorgnettes. La perception à l'aide d'une lorgnette et de son champ de visée semble également compris par une majorité d'élèves. Les deux objectifs sont atteints.

* Mise en évidence de nouvelles proportionnalités et anticipation sur une visée

a) Synthèse

Nous demandons aux élèves de représenter sur une feuille la visée avec la lorgnette percée de plusieurs trous. Nous ne demandons la visée que de trois trous. Ils doivent trouver une autre proportionnalité quitte à prendre de nouvelles mesures. Cette partie de la séquence à pris beaucoup de temps. Les élèves ont finalement dû être guidés. Nous leur disons de mesurer UV puis la distance du segment [UV] au point de visée. Un élève finit par dire :

Elève D : "Lorsque l'on calcule le rapport UV sur distance au trou et le rapport fente sur longueur de la lorgnette, on trouve la même chose."
Ex : "Bien, cela signifie qu'il y a proportionnalité entre la longueur UV et la distance au trou et la longueur de la fente et la longueur de la lorgnette."

La suite a été abordée au cours de la séance suivante.

b) Analyse *a posteriori*

La prise en main de cette phase de notre part a été totale, au moins dans cette sixième séance.

I.7 Septième séance : le Jeudi 03 octobre 2002 de 15h00 à 16h00.

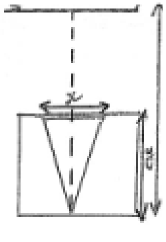
I.7.1 Suite de la modélisation de la situation de vidée

* Suite de la mise en évidence de nouvelles proportionnalités

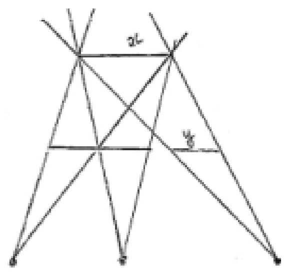
a) Synthèse

Enregistrement vidéo

Un rappel des résultats de la séance précédente est fait au tableau. Nous dessinons les schémas ci-contre. Nous avons rappelé l'égalité des rapports proposée par les élèves : x/y = a/b. Nous leur demandons quelle autre égalité peut-on trouver à partir de cette première ? Finalement, nous l'écrivons nous-mêmes au tableau avant de l'expliquer : x/a = y/b. Il restait alors à établir les dernières égalités. Pour cela, nous avons réalisé le schéma ci-dessous au tableau.



Nous leur demandons avec quelles autres mesures de longueurs x et y sont-elles proportionnelles ? Ils doivent calculer x sur y et ensuite mesurer d'autres longueurs pour savoir s'il n'y a pas une proportionnalité. Finalement, sur ces trois champs de visée précédents, nous en reproduisons un isolé. Les élèves n'ont pas réussi à trouver les autres rapports égaux aux premiers. Après trois minutes nous donnons les calculs à effectuer.



Productions d'élèves

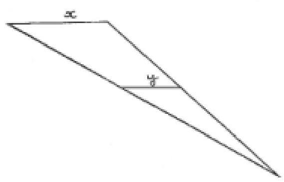
En ce qui concerne les schémas qui ont été demandés la fois précédente, quelques élèves, trois groupes, dont les reproductions ont été annexées (I 8), ont représenté de façon correcte les trois visées avec la dernière lorgnette. Cinq groupes n'ont rien produit.

* Anticipation sur une visée

a) Synthèse

Nous demandons alors à la classe de trouver à quelle distance doit-on se mettre pour viser correctement la mire avec une lorgnette ? Nous donnons la longueur de la fente, 2,75, la longueur de la lorgnette, 27,5 et la longueur de la mire. Sur le schéma 1, nous leur demandons de désigner la distance que nous cherchons à connaître, ce qu'un élève fait d'ailleurs. Nous devons encore une fois remarquer que lorsque nous demandons oralement la valeur de la longueur b, les élèves ne répondent pas, mais ils le font lorsque nous leur demandons quel calcul ils doivent faire ?

Ex : " x/y = a/b, ensuite on remplace par les longueurs. 100/275 = b/27,5. b est égal à quoi alors ? Quel calcul doit-on faire ?"
Elève B : " $100 \times 27{,}5/275 = b$."
Ex : "On trouve b égal à quoi ?"
Elève B : "1000 soit 10 m."
Ex : "Avec la lorgnette 1, vous deviez vous trouver à 10 m pour viser correctement."



b) Analyse *a posteriori*

D'une part peu d'élèves ont correctement dessiné la représentation attendue et d'autre part les autres proportionnalités n'ont pas été trouvées. Aucun des deux objectifs n'a ici été atteint. Il est indispensable de réfléchir sur une nouvelle méthode permettant d'introduire les trois rapports égaux, car celle-ci ne semble pas avoir réellement fonctionné. Pour conclure, nous dirons que la situation fondamentale qui nous avons proposée n'est pas génétique, c'est à dire qu'elle n'engendre pas un processus de questions et de réponses qui permettrait de mettre en lumière les différents aspects de la propriété de Thalès, comme la proportionnalité interne et externe, que nous avons nous-mêmes mis en évidence précédemment, dans d'autres chapitres, et qui situerait, par la même occasion, ce résultat dans le corpus théorique. Autrement dit, les activités qui font intervenir les lorgnettes ne permettent d'introduire et de mettre en situations que la version proportionnalité externe, liée aux triangles, du théorème.

I.7.2 Retour sur la problématique

a) Synthèse

Nous indiquons aux élèves que nous allons prouver le théorème dit des milieux qui va servir à démontrer l'égalité des rapports qui a été mise en évidence et qui constitue un théorème. Nous justifions ensuite tout le travail que nous venons de produire car les élèves s'interrogent sûr l'intérêt de passer par de telles difficultés pour aboutir à un théorème qui leur semble simple.

Nous leur expliquons que toutes les activités que ont été faites jusqu'à maintenant sont liées à ce théorème et permettent de comprendre à quoi sert le théorème de Thalès.

Ex : "A quoi va servir le théorème de Thalès ?"
Elève : "A mesurer des distances."
Ex : "Des distances ?"
Elève : "Inaccessibles."

Nous enchaînons sur une conclusion donnée par certains élèves à la fin de l'activité sur l'éclipse de soleil.

Ex : "Une éclipse cela se passe exactement lorsque la terre, la lune et le soleil sont alignés. Est-ce que c'est vrai ?"
Elève : "Non, c'est pas vrai."
Ex : "Il faut quoi en plus ; est-ce que les trois points alignés suffisent. Est-ce que la lune peut être n'importe où ?"
Elèves : "Non."

A partir du dessin ci-contre exécuté au tableau noir, nous montrons que la lune est non seulement alignée avec la terre et le soleil mais qu'elle se trouve à une distance précise liée au rapport distance terre lune/terre soleil.

Ex : "Si la lune est là par exemple, la terre, la lune et le soleil sont bien alignée mais est-ce qu'il y a une éclipse totale de soleil ?"
Elèves : "Non."
Ex : "En effet, car les rayons passent ici ..."

b) Analyse *a posteriori*

Les élèves ont pris conscience ici que l'alignement "parfait" de la lune du soleil et de la terre ne suffisait pas pour qu'une éclipse de totale du soleil se produise. Une autre condition doit être vérifiée. Mais celle-ci est encore floue pour eux et nous avons dû la montrer littéralement au tableau.

I.7.3 Démonstration du théorème des milieux (Annexe I 2) (Activité II séquence 1.a)

a) Synthèse

Nous faisons tout d'abord le point sur les termes *conjecture* et *démonstration*.

Ex : "Vous tracez un triangle ABC, I est le milieu du segment [AB]. Que peut-on voir sur le dessin ?"
Elève C : "J est le milieu de [AC]."
Ex : "On a l'impression que J est le milieu du segment [AC]. Mais ce n'est pas pour cela que c'est vrai ; il faut le démontrer."

Il s'agit de la première conjecture faite par les élèves. Le dessin est ensuite terminé par les élèves.

Ex : "Pour ceux qui ont déjà fini, que peut-on remarquer sur le schéma encore ? Ca va être encore une conjecture. Il faudra donc le démontrer ... Oui ?"
Elève MF : "J est le milieu du segment [KI]."
Ex : "Est-ce qu'on l'a déjà démontré ?"
Elève MF : "Non."
Ex : "On le démontrera plus tard. Pour le moment, est-ce qu'on ne peut pas voir une figure particulière que vous connaissez ?"

Nous demandons aux élèves de reconnaître une figure particulière, en l'occurrence le parallélogramme IKCB. MF reconnaît un rectangle en précisant que pour avoir un rectangle il faut deux côtés de même longueur. Un deuxième élève rajoute qu'il faut deux côtés opposés de même longueur. Un troisième indique en plus parallèle. Nous dessinons alors deux segments de même longueur, à supports parallèles mais ne formant pas un rectangle.

Elève C : "Quatre angles droits."
Ex : "Est-ce qu'il y a des angles droits dans cette figure ?"
Elève : "Non."
Ex : "Ce n'est pas un rectangle que l'on voit apparaître ; le triangle au départ est quelconque donc il n'y a aucune raison d'avoir un rectangle."

Elève B : "C'est un parallélogramme."
Ex : "Quelle figure considérez vous être un parallélogramme ?"
Elève C : "KCIB."
Ex : "Si vous dites KCIB, est-ce que c'est un parallélogramme ?"
Elève B : "Non."
Ex : "En effet, il est croisé. KCBI semble être un parallélogramme. Démontrez-le."

Nous leurs demandons les différentes façons de caractériser un parallélogramme.

Elève MF : "Côtés parallèles deux à deux."
Ex : "C'est une première caractérisation."
Elève MF : "Deux côtés égaux.
Ex : "Est-ce que cela suffit pour avoir un parallélogramme deux côtés égaux ? Il faut une deuxième caractérisation pour un parallélogramme."
Elève B : "Côtés opposés de même longueur.
Ex : "Est-ce que cela suffit ? on a vu tout à l'heure le dessin suivant : *(côtés de même longueur mais dont les supports sont visiblement sécants après prolongement)* on a ici deux côtés de même longueur mais on a pas un parallélogramme. Mais il manque quelque chose."
Elève E : "Deux côtés parallèles et de même longueur."
Ex : "Là vous avez deux côtés parallèles et de même longueur. *(Quadrilatère croisé.)* Est-ce que l'on a un parallélogramme ?Il faut rajouter quelque chose. Qu'est-ce qu'elle a de particulier cette figure ?"
Elève : "Les diagonales se coupent en son milieu."
Ex : "Cela viendra après. Qu'est-ce qu'il a de particulier ce quadrilatère ?"
Elève C : "Il a les côtés qui sont croisés."
Ex : "C'est un quadrilatère croisé. Il faut donc rajouter non croisé. C'est à dire la propriété de convexité qui dit que si l'on prend deux points dans l'ensemble, le segment ayant pour extrémités ces deux points est inclus en entier dans l'ensemble. Est-ce que c'est vrai ici ?(Nous prenons un point dans le triangle "supérieur" et un autre dans le triangle "inférieur".)
Elèves : "Non."
Ex : "Une troisième et dernière caractérisation. Une élève a commencé à en parler."
Elève F : "Les diagonales se coupent en leur milieu."

Nous notons et numérotons au tableau de la classe les trois caractérisations du parallélogramme afin de pouvoir les réutiliser ultérieurement. Nous disons alors que le but est de démontrer que IKCB est un parallélogramme et nous demandons quelle caractérisation nous allons utiliser ? Un élève répond deux côtés parallèles deux à deux. L'élève G trouve les droites (KC) et (IB) parallèles comme (KI) et (CB). Il dit qu'elles le sont car "on nous l'a demandé". Nous écrivons l'argument pour démontrer que IKCB est bien un parallélogramme.

Ex : "D'après quelle caractérisation on conclut ?"
Elève G : "La 2."

Nous passons alors à la démonstration de l'égalité IA = CK.

Ex : "Comment on va pouvoir démontrer que IA = CK ?"
Elève C : "I est le milieu de [BA]."
Ex : "Que peut-on en faire de ça ?"
Elève : "IB = KC."
Ex : "Oui. Qu'est-ce que l'on a démontré ?"
Elèves : "IKCB parallélogramme."
Ex : "On peut en déduire quoi, vous venez de le dire ?"
Elève G : "IA = KC."
Ex : "Non, on en est pas encore là."
Elève G : "IB = CK."
Ex : "D'après quelle caractérisation ?"
Elève G : "La 2."
Ex : "Le fait que IA = IB et IB = CK, que peut-on en conclure ?"
Elève : "IA = CK."

L'élève G trouve ensuite immédiatement un argument incomplet qui ne permet pas encore de conclure que IAKC est un parallélogramme : ce quadrilatère a deux côtés parallèles de même longueur.

Ex : "Très bien. Il faut rajouter quoi de plus pour démontrer que c'est un parallélogramme ?"
Elève G : "Les diagonales se coupent en leur milieu."
Ex : "C'est quelle propriété que l'on va utiliser ? C'est quel numéro ?"
Elève : "La 2."
Ex : "Il suffit donc de lire. Deux côtés parallèles, on les a ; de même longueur, on les a aussi."
Elève : "Non croisés."

Nous précisons aux élèves que le caratère non croisé du quadrilatère IAKC est vu sur le dessin contrairement à ce qui doit être fait dans une démonstration mathématique. Nous leur posons la question de savoir comment démontrer que J est le milieu de [AC] ? L'élève B répond que J est le milieu des diagonales. L'heure étant terminée, nous avons dû donner le résultat AI/AB = ½ et les élèves ont trouvé AJ sur AC égale 1/2.

b) Analyse *a posteriori*

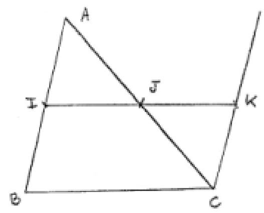
Les figures sont relativement bien exécutées et la première conjecture, J milieu de [AC], a été faite très rapidement, ce qui n'est pas une surprise. Cette première conjecture influe sur la suivante car un élève a remarqué que J est aussi le milieu de [IK]. Par contre, la reconnaissance du parallélogramme IKCB n'a pas été spontanée. Peut-être est-ce dû au fait que le segment [JC] interfère dans la perception de ce parallélogramme ? Lorsque nous les avons sollicités, deux caractérisations des parallélogrammes, côtés parallèles deux à deux et diagonales se coupant en leur milieu, ont été évoquées spontanément. Mais la dernière a été obtenue après maintes interventions de notre part. En particulier, des contre-exemples ont dus être exhibés par l'expérimentateur à chaque fois qu'une caractérisation proposée par les élèves était erronée. Mais une fois rappelées ces caractérisations, la démonstration du fait que IKCB soit un parallélogramme a été très vite faite par les élèves. Au cours de la démonstration de IA = CK, une interaction entre les deux déductions IA = IB et IB = KC, induites par le fait I est le milieu de [AB] et IKCB est un parallélogramme, c'est produite. Nous aurions dû, après chaque proposition correcte d'un élève, écrire la propriété et l'égalité correspondante. Dans la démonstration de IAKC parallélogramme, la convexité du quadrilatère est oubliée. Un mélange est fait entre deux caractérisations des parallélogrammes. Nous ne sommes pas bien sûr que les élèves ont bien saisi le fait que nous avons admis quelque chose. La démonstration de J milieu de [AC] a été trouvée par les élèves. Mais il semble tout de même que les trois caractérisations du parallélogramme sont des connaissances qui sont peu disponibles chez ces élèves bien qu'elles soient un point central du programme de la classe de cinquième. De plus, le caractère non croisé d'un quadrilatère est une propriété qui n'est pas facilement évoquée ni encore moins manipulée par les élèves. Nous notons que des élèves n'ayant pas participé jusqu'à présent au fonctionnement des activités le font volontiers à partir de la mise en place de cette démonstration. Cette situation leur semble plus correspondre, sans doute, à ce qu'ils attendent d'une activité mathématique.

I.8 Huitième séance : le Vendredi 04 octobre 2002 de 16h00 à 17h00.

I.8.1 Suite de la démonstration (Annexe I 2) (Activité II séquence 1.b)

a) Synthèse

Nous reprenons points par points, avec la participation active des élèves, ce qui a été démontré à la séance précédente afin de rédiger le théorème avec eux. Ils énumèrent la donnée d'un triangle ABC, de I milieu de [AB] et de la droite parallèle à (BC) passant par I coupant [AC] en J. L'élève B rappelle le fait que nous avons démontré que J est alors le milieu de [AC]. Nous complétons en disant et écrivant au tableau que cela signifie que : AI/AB = AJ/AC = 1/2.Un flottement s'est alors fait ressentir. Notons que nous avons reproduit la figure suivante au tableau au fur et à mesure de l'avancée dans les données et les résultats que nous en avons déduits.



Elève : "J est aussi le milieu de [IK]."
Ex : "Oui, c'est exactement ça qu'il faut démontrer. Ce n'est pas difficile. Un seul objet mathématique est utilisé dans cette grande et longue démonstration, avec trois caractérisations possibles."
Elève MF : "Les diagonales se coupent en leur milieu. ICKA est un parallélogramme."
Ex : "Oui, est-ce l'on est sûr que c'est un parallélogramme ? Est-ce qu'on l'a déjà démontré ?"
Elève MF : "Oui."
Ex : "ICKA est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu. IJ = JK = ½.IKet comme IKCB est un parallélogramme, est-ce que c'est sûr ?"
Elève : "Oui."
Ex : "Et en fait ce rapport c'est quoi ?"
Elève B : "1/2."

L'énoncé du théorème 1 est alors écrit au tableau.

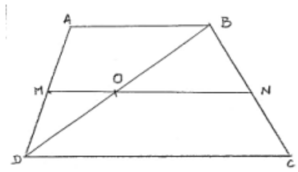
b) Analyse *a posteriori*

Notons que nous n'avons pas suivi l'énoncé que nous avions prévu. Les élèves ont finalement trouvé les arguments pour finir la démonstration.

I.8.2 Démonstration du théorème dans le trapèze :

a) Synthèse

Les élèves ont rapidement appliqué deux fois le théorème des milieux dans les deux triangles et ils ont obtenu le résultat escompté. Nous leur avons demandé de rédiger ce nouveau théorème n°2.



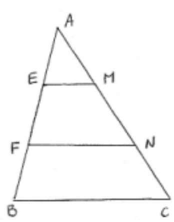
b) Analyse *a posteriori*

Comme cela paraît naturel, les apprenants éprouvent des difficultés à distinguer les données ou les prémisses des conclusions d'un théorème ainsi que les objets qui sont définis de ceux qui ne le sont pas encore dans l'énoncé qu'ils rédigent mais qui apparaissent sur la figure ayant servi à la démonstration. Mais l'objectif de la démonstration du théorème est atteint.

I.8.3 Proposition liées au partage en trois d'un des côtés du triangle (Annexe I 2) (Activité II séquence c)

a) Synthèse

Une fois rappelés ces deux résultats que nous avions démontrés à la dernière séance, nous nous consacrons à une autre proposition. Nous construisons au tableau au fur et à mesure la figure qui suit, après que les élèves aient eu le temps matériel de la représenter sur leurs feuilles en suivant les consignes. Pour placer les points E et F l'élève B a l'idée de diviser AB. Le dessin terminé, nous demandons de faire une conjecture. Un élève rappelle ce qu'est une conjecture.



Ex : "Qu'est-ce qui semble vrai ici ?"
Elève MF : "Que la droite (FN) est parallèle à la droite (BC).
Ex : "Est-ce que c'est une conjecture le fait que la droite (FN) soit parallèle à la droite (BC) ? C'est une réalité ça, non ?"
Elève : "La droite (FN) est parallèle à la droite (EM).
Ex : "Est-ce que c'est une conjecture que de dire que la droite (FN) est parallèle à la droite (EM) ?
Elève C : "Non."
Ex : "Qu'est-ce qui permet de le démontrer directement ?"

Elève C : "Les données."
Ex : "Pas directement les données. On vous dit : tracez (EM) parallèle à (BC) et (FN) parallèle à (BC). (EM) est parallèle à (BC) et (FN) est parallèle à (BC). Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. Ce n'est pas une donnée, c'est un théorème qui permet de conclure."
Elève C : "On voit que AM = MC."
Ex : "Et c'est pas fini...Vous avez dit AM = MC ?"
Elève C : "Ah !, je me suis trompé, je voulais dire AN = MC."
Ex : "Oui, d'accord. C'est pas faux ce que vous avez dit, mais nous, on est parti de ça égal à ça égal à ça. (AE = EF = FB) "
Elève B : "AM =MN = NC."

Pour l'élève F AM = MC signifie qu'ils ont la même longueur et pour l'élève C que M est le milieu de [AN]. L'élève F évoque le théorème 1 pour démontrer que M est le milieu de [AN] et l'élève C le triangle dans lequel ce théorème va s'appliquer.

Ex : "Dans le triangle AFN. On sait quoi dans ce triangle ? D'après les données ?"
Elève : "Les droites ..."
Ex : "Avant de parler des droites... Est-ce que l'on sait quelque chose du point E ?"
Elève B : "C'est le milieu de [AF]."
Ex : "Est-ce que c'est dit comme ça dans l'énoncé ?"
Elève B : "Non."
Ex : "Pourquoi est-ce que l'on peut dire que c'est le milieu ?"
Elève H : "Parce que AE = EF."
Ex : "Oui, dans l'énoncé, il vous est dit AE = EF = FB. Donc AE = EF, ça veut dire que E est le milieu de [AF]."

L'élève C évoque ensuite que M est le milieu de [AN] alors qu'il s'agit de la propriété que nous devons démontrer. Mais il évoque alors des droites parallèles.

Elève C : "Des parallèles."
Ex : "Lesquelles ?"
Elève C : (EM) et (FN)."
Ex : "Est-ce que dans l'énoncé il est dit que les droites (EM) et (FN) sont parallèles ?"
Elèves : "Non."
Ex : "Comment on peut le déduire ?"
Elève C : "Parce que toutes les deux sont parallèles à (BC)."

Nous récapitulons aux élèves : AFN est un triangle, E est le milieu de [AF] et les droites (EM) et (FN) sont parallèles et l'élève A conclut que d'après le théorème 1 M est le milieu de [AN]. Un élève conclut trop vite que AM= MN = NC. Nous rectifions.

Ex :"Qu'est-ce qui reste à démontrer ?"
Elève C : "MN = NC."
Ex : "Oui, réfléchissez comment on va pouvoir démontrer cela ?"
Elève C : "On se met dans un trapèze."
Ex : "Oui, lequel ?"
Elève C : "EMCB."

L'élève C applique alors oralement le théorème avant de conclure :

Elève C : "N est le milieu de [MC]."
Ex : "Et pour les longueurs, ça signifie quoi ?"
Elève C : "MN = NC."
Ex : "Avec ces deux choses on a démontré ce que l'on voulait démontré. AM = MN et MN = NC donc AM = MN = NC."

b) Analyse *a posteriori*

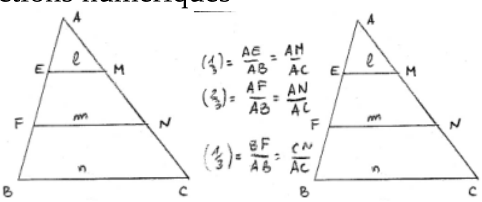
Les élèves éprouvent des difficultés, et cela est bien compréhensible puisque la classe de quatrième constitue une niveau charnière dans l'apprentissage des raisonnements mathématiques, à différentier ce qui est communiqué par un énoncé de ce qui relève d'une démonstration. A l'inverse de ce qui c'est passé précédemment, la conjecture n'est pas ici formulée naturellement et spontanément par les élèves. Un élève finit tout de même par l'énoncer sans être orienté. Le théorème des milieux est appliqué dans un triangle. L'application dans le trapèze ne pose pas non plus de difficultés. L'utilisation de ces deux théorèmes, devient pour les élèves, au fur et à mesure de l'avancée dans l'activité, plus spontanée et mieux adaptée aux questions posées. L'emploi de ces deux nouveaux résultats est en cours d'acquisition. Mais l'utilisation des données apparaissant dans l'énoncé d'une activité en vue d'une démonstration, ne se fait pas toujours dans l'ordre logique attendu. Il est à noter que lorsqu'une phase de la démonstration débute avec un élève, celui-ci monopolise la parole jusqu'à la fin de la phase. De plus, il a été pratiquement impossible d'avancer dans toutes ces tâches sans guider fortement les élèves.

I.9 Neuvième séance : le Lundi 07 octobre 2002 de 16h00 à 17h00.

I.9.1 Fin de la démonstration de la proposition liée au partage en trois de l'un des côtés d'un triangle :

a) Synthèse

Nous avons rappelé aux élèves le résultat obtenu à la séance précédente et en particulier AM = MN = NC. Nous leur demandons alors de nous donner différents rapports égaux formés sur [AC] pour l'un et sur [AB] pour l'autre. Un élève donne : AE = AM, mais nous lui indiquons qu'il ne s'agit pas d'une fraction. L'élève B donne alors l'égalité : AE/AB = AM/AC. Lorsque nous demandons une autre égalité de fraction, l'élève B répond encore : AF/AB = AN/AC. Et nous en demandons une dernière : BF/BA = CN/CA. Nous avons inscrit ces rapports littéraux et nous avons demandé aux élèves de donner les trois fractions numériques égales à ces rapports. L'élève B a cité un tiers, deux tiers et un tiers. Au tableau, nous traçons le dessin suivant qui est complété par la suite.



b) Analyse *a posteriori*

Les égalités de rapports sont venues assez naturellement. La correspondance des rapports semble à peu près acquise. Nous n'avons pas eu à prendre la main. Par contre, nous confirmons le fait que dans une phase précise de la démonstration, le plus souvent, un seul élève participe oralement. Nous analysons *a posteriori* que nous aurions pu éviter les écritures fractionnaires, surtout dans la suite de la démonstration, en écrivant les doubles, les triples etc.

I.9.2 Expression des longueurs "intérieures" en fonction de BC :

a) Synthèse

Nous appelons EM, l FN, m et BC, n et nous demandons s'il est possible d'exprimer l en fonction d'une autre longueur ? Un flottement se fait ressentir. Un élève propose de l'exprimer en fonction de n. Ce qui est contesté par un autre élève. Les hypothèses qui permettent d'appliquer le théorème sont rappelées oralement avec les élèves puis nous faisons le rapport avec les longueurs l et m.

Ex : "l est égal à quoi ? ou alors à quoi est égal l/m."
Elève B : " 1/2."
Ex : "Oui 1/2, on a vu dans le théorème des milieu que si E est le milieu de [AF], en traçant cette parallèle (EM) on a : AE/AF = AM/AN = EM/AN et donc ici, l/m = 1/2. Ca veut dire que l est égal à quoi para rapport à m ?"
Elève B : " 1/2."
Ex : " 1/2, l c'est 1/2 de m."

Nous leur disons que la suite consiste à exprimer m en fonction de n. Nous complétons la figure 1 précédente en traçant le segment [EC] qui coupe [FN] en K. Un élève exprime le fait qu'il y a deux triangles dans lesquels ont peut appliquer le premier théorème. Nous signifions qu'exceptionnellement, vu le nombre de fois que nous allons l'utiliser, nous n'allons pas rappeler toutes les données du théorème du milieu.

Ex : "Dans le triangle EBC, si on applique le théorème des milieux, qu'est-ce qu'on peut déduire des longueurs FK et n ?"
Elève : "Elles sont égales ?"
Ex : "Les longueurs FK et AC sont égales ?"
Elèves B : " 1/2."
Ex : "Qu'est-ce qui est égal à 1/2 ? FK égal un demi de quoi ?"
Elève B : "De BC."
Ex : "Bien, nous venons d'exprimer cette longueur FK ; dans quel triangle on va se mettre maintenant, pour exprimer la longueur KN ?"
Elève B : "EMC."
Elève F : "Un demi de l."
Ex : "Pourquoi, on est dans quel triangle ?"
Elève F : "EMC."

Un flottement s'est fait ressentir. Les élèves ont bien trouvé FK=(1/2)n et KN=(1/2)l mais ils ont du mal à relier ces deux résultats pour en déduire un troisième. Nous sommes obligés de montrer sur le dessin que l'on a exprimé FK et KN. Comment exprimer FN ? L'élève MF nous donne l'égalité FN = FK + KN en disant que l'on a toujours cette égalité. En redemandant si nous avons toujours cette égalité, des élèves disent non sans opposer d'arguments. Après un moment :

Elève C : "Parce que c'est la même droite ; les points sont alignés."

Nous plaçons trois points F, K et N sur la même droite avec K extérieur au segment [FN] et les élèves se rendent compte que l'égalité n'est pas vérifiée.

Ex : "Donc il faut être un peu plus précis que ça. Pourquoi dans notre cas là c'est vrai ?"
Elève MF : "Il faut que K soit sur la longueur FN."
Ex : "Il faut être plus précis : c'est ça mais on ne dit pas que K est sur la longueur FN."
Elève MF : "K appartient à la longueur FN."
Ex : "Pas la longueur non."
Elève C : "Au segment FN."

Les élèves trouvent l'égalité m = (1/2)n + (1/2)l que nous inscrivons au tableau. Nous désignons également l = (1/2)m en leurs disant que nous allons maintenant démontrer que m = (2/3)n. Je remplace l par son expression en fonction de m dans la première égalité. Pour le calcul $(1/2) \times (1/2)$, les élèves ne trouvent pas le résultat que nous finissons par écrire :
m = (1/2)n + (1/4)m. L'élève H trouve quand même que (1/4)m transposé donne - (1/4)m.

Ex : " m - 1/4m = ½.n, ici je veux calculer m - 1/4m, je dois faire quoi ? Ce sont des fractions, oubliez le n. Si je veux faire 1 - 1/4, comment je dois m'y prendre ?"
Elève H : "On met au même dénominateur."
Ex : "Au même dénominateur qui est quoi ici ?"
Elève H : "4."
Ex : "n, je le réécris comment ?"
Elève H : "4 sur 4 n."
Ex : " 4/4m - 1/4m = ½.n. Donc à gauche, il reste quoi ? (flottement, silence) 4/4 - 1/4, ça fait quoi ?"
Elève C : "3/4**."**
Ex : "Bien, 3/4m = 1/2n.

Nous leur demandons comment nous allons pouvoir isoler m mais les élèves ne répondent pas. Nous prenons alors l'exemple : si 2x = 3, à quoi est égal x ? Les élèves ne répondent toujours pas, ce qui nous incite à dire que x = 3/2, ce qui donne dans l'équation à résoudre, m = (4/6)n. L'élève C trouve que nous pouvons simplifier et propose 2/3. Nous remplaçons nous même m par son expression fonction de n dans l'égalité l = (1/2)m et nous écrivons : l = $(1/2) \times (2/3)$.n. L'élève C simplifie par 2 pour trouver finalement un tiers. Nous écrivons alors l = (1/3)n. Nous complétons la figure 1 par ces valeurs et passons à la séquence 1.d.

b) Analyse *a posteriori*

Les élèves ont des difficultés à relier les longueurs m et n. Nous avons été obligés d'être plus explicites dans la question. Les hypothèses qui permettent d'appliquer le théorème sont rappelées oralement. L'expression de l en fonction de m a finalement été trouvée. Mais pour les autres calculs, cela est beaucoup plus difficile. Les élèves trouvent bien FK et KN mais ont du mal à rassembler ces deux résultats pour exprimer FN. Il aurait été vraiment préférable d'exprimer des doubles et des triples plutôt que d'utiliser des fractions. De plus, comme attendu, la justification de l'égalité FN = FK + KN n'est pas donnée. Les élèves n'ont pas encore acquis les réflexes qui leur permettrait d'utiliser les mots et les objets adéquats aux situations qu'ils décrivent. Ils parlent par exemple de longueur alors qu'ils pensent au segment. L'expression de m en fonction de n et de l a été obtenue par les élèves relativement facilement. Pour la suite, ils éprouvent des difficultés bien légitimes quant aux calculs fractionnaires puisque les règles n'ont pas toutes été encore vues par ces élèves. De plus, les méthodes de résolution d'équations simples ne sont pas assimilées non plus. Nous avons dû les guider totalement. Mais à ce niveau de la scolarité, il paraît difficile de faire autrement. Malgré tout, les réductions des fractions au même dénominateur, les sommes et les différences de fractions ont été effectuées correctement par certains.

I.9.3 Démonstration lorsque un côté du triangle est partagé en quatre (Annexe I 2) (Activité II séquence 1.d questions a) b) et c))

a) Synthèse

Nous leur demandons de réaliser la figure. Pour cela, nous lisons ensemble les consigne de construction. Pour trouver les points E, F, G tels que AE = EF = FG = GB, les élèves proposent bien sûr de mesurer et de diviser par quatre. Ils tracent ensuite les parallèles et conjecturent rapidement que AM = MN = NO = OC.

Ex : "Comment démontrer par exemple que AM = MN ?"
Elève C : "Le théorème."
Ex : "Lequel ?"
Elève C : "Des milieux."
Ex : "Lequel précisément car on a démontré un théorème dans le triangle et un théorème dans le trapèze ?"
Elève C : "Dans le triangle."
Ex : "Rappelez moi ce qu'il faut vérifier pour pouvoir appliquer ce théorème.

Les élèves rappellent, en effet, tant bien que mal les données du théorème qui sont ensuite consignées au tableau. Nous leur répétons qu'en principe, on doit rappeler ces hypothèses mais que nous le faisons oralement maintenant. L'élève C conclut que M est le milieu de [AN], ce qu'il traduit lorsque nous lui demandons ce que cela donne au niveau des longueurs, par AM = MN.

Ex : "Qu'est-ce qui reste à démontrer ?
Elève C : "NO = OC."
Ex : "Oui mais dans ce cas là, cette longueur MN pourrait être différente de celle là NO."
Elève C : "MN = NO."
Ex : "Oui, MN = NO. Avec quel théorème encore une fois ?"
Elève C : "Avec le deuxième théorème dans le trapèze EMOG."
Ex : "Et maintenant, dans quel trapèze ? Lequel encore ?"
Elève C : "FNCB."

Nous récapitulons les donnés du théorème. F milieu de [EG], (FN) parallèle à (BC) donc à (GO) puis nous concluons que N est le milieu de [MO]. Dans le cas du trapèze FNCB nous donnons directement le résultat puis les élèves concluent que les quatre segments sont égaux. Nous traçons ensuite un triangle avec une parallèle à un côté passant par les milieux des deux autres côtés et également un second triangle où deux parallèles passent par les tiers des deux autres côtés. Nous désignons ensuite le premier segment, le plus petit, de longueur l, dans cette dernière figure en demandant la valeur de l. L'élève C répond un demi. Dans la figure suivante, nous posons la même question pour l et m et ce même élève répond un tiers et deux tiers. Nous désignons ensuite, sur l'autre dessin, les différents segments en question. L'élève MF répond successivement 1/4, 2/4 et 3/4.

Ex : "On va le démontrer. Alors, est-ce qu'on sait que k = 1/3.m ?"
Elèves : "Oui."
Ex : "D'après quoi ?"
Elève : "Ca là ..."

Un élève désigne la figure aux trois parallèles, figure dite des tiers.

Ex : "Oui, d'après un cas précédent. On se place dans quelle figure ? Dans le triangle AGO, on sait que l est égal à quoi aussi ?"
Elève : "2/3.m."
Ex : "Oui, car on est ramené au cas précédent. Dans le triangle AGO ; k = 1/3.n et l = 2/3.m.

Les élèves tracent ensuite le segment [FC] qui coupe [GO] en K. Lorsque nous demandons comment nous allons nous y prendre pour démontrer que m = (1/2)l + (1/2)n, ils expriment le fait que nous allons appliquer la même méthode que précédemment dans le trapèze FNCB.

Ex : "Nous avons m = ½.l + ½.n Comment en déduire que m = ¾.n ? On a ça : k = 1/3.m et l = 2/3.m. Nous on veut m en fonction de n, qu'est-ce qui vous gêne dans cette expression ?"
Elève C : "l."
Ex : "l, oui, comment on pourrait le faire disparaître l ? Comment ne plus avoir que des m et des n là dedans ?"
Elève B : "C'est égal à 2/3de m."
Ex : "Qu'est-ce qui est égal à 2/3de m ?"
Elève MF : "l."
Nous remplaçons nous-mêmes l par sa valeur en fonction de : m = (1/2)n + (1/2) × (2/3)m et l'élève B propose de simplifier. Ce que nous faisons : m = (1/2)n + (1/3)m. Pour isoler m B exprime le fait que la transposition donne - (1/3)m. Les élèves réduisent au même dénominateurs, 3 sur 3 et trouvent finalement deux tiers. Nous leur expliquons alors que plus tard, au cours de l'année de quatrième, ils verrons que pour multiplier deux fractions il faut multiplier les deux numérateurs entre eux et les deux dénominateurs entre eux. L'élève B donne alors le résultat trois quart. Pour l un élève dit que nous allons trouver deux quarts. Nous prenons l'initiative de remonter le calcul. Nous écrivons (2/3)m et nous disons qu'il suffit de remplacer m par (3/4)n, l = (2/3) × (3/4).n. L'élève C dit que cela donne deux quarts. Pour k, les élèves trouvent qu'il faut multiplier 1/3 par 3/4 et que cela donne 1/4. Nous disons que nous avons trouvé ici 1/4, 2/4 et 3/4.

Ex : "Bien, on a divisé par 2, 3, 4. Si on divise par 5 le côté d'un triangle, est-ce que quelqu'un pourrait me dire le résultat ? Si ici, on avait n, qui pourrait me donner les longueurs intérieures ?
Elève C : "1/5, 2/5, 3/5, 4/5."

Nous leur demandons de trouver des rapports littéraux égaux, un élève donne tout d'abord AF/AB=AN/AO=1/2, un autre AE/AB=AM/AC et l'élève H donne 1/4. Nous leur demandons de réfléchir à la suite pour la prochaine fois.

b) Analyse *a posteriori*

D'une façon générale, nous aurions dû parler du théorème des milieux et de sa conséquence dans le trapèze et non de deux théorèmes des milieux. En fait, ce sont les élèves qui ont parlé de deux théorèmes des milieux et nous avons suivi leur idée. L'objectif de la conjecture formulée par les élèves a été atteint. Nous avons les points E, F, G d'un côté sur le segment [AB] et M, N, O de l'autre sur le segment [AC] qui partagent les deux segments en parties égales. Les correspondances des segments permettant d'obtenir les égalités de rapports semblent, pour cette version du théorème, bien acquises. Au niveau quatre, les élèves semblent avoir bien compris le mécanisme de la démonstration. Après une petite remarque, ils ont initié eux-mêmes la méthode qui consiste à appliquer le théorème des milieux dans le triangle, puis dans un trapèze "chevauchant" le premier triangle, et enfin une dernière fois le théorème des milieux dans un trapèze chevauchant le trapèze précédent, tout ceci afin qu'il y ait à chaque fois un segment commun dans les égalités successives. Nous rappelons qu'il aurait été possible d'adopter une méthode plus rapide consistant à utiliser le résultat du rang précédent dans le triangle AGO puis le théorème dans le trapèze appliqué au dernier trapèze FNCB. Nous pouvons émettre une critique au sujet d'une prise de main de notre part. En effet, après avoir démontré que AM = MN l'élève C proposait de démontrer que NO = OC et nous lui avons indiqué que dans ce cas deux autres longueurs pourraient être différentes. Nous aurions dû laisser les élèves démontrer l'égalité proposée par l'élève C. La conclusion sur l'égalité des quatre longueurs n'aurait pas pu être obtenue et les élèves auraient pu trouver par eux même qu'il faut démontrer l'égalité MN = NO. Cette prise de main non seulement n'était pas utile mais plutôt néfaste pour la compréhension autonome du problème par les élèves. Malgré cela, l'application de deux théorèmes dans le triangle et dans le trapèze, a bien été effectuée par les élèves dans les bonnes figures. Cet objectif a aussi été atteint. En ce qui concerne les longueurs des segments EM, FN et GO, le procédé par analogie a bien fonctionné pour trouver les fractions en question. La démonstration a bien débuté par une application spontanée de la part des élèves du résultat précédent, dans le cas de trois parallèles pour exprimer k et l. Nous pouvons nous interroger sur le fait que dans la phase précédente, ils n'ont justement pas utilisé cette méthode mais plutôt celle de l'utilisation successive du théorème dans le triangle et de celui dans le trapèze. Ils ont tout aussi facilement trouvé l'idée d'appliquer la méthode employée également dans le cas précédent pour exprimer m en fonction de n et de l. Par contre, pour la suite, les calculs fractionnaires, notamment ceux liés aux multiplications de fractions, ont encore été difficiles à effectuer pour les élèves. Nous avons dû les mener pas à pas. Mais nous pouvons nous rendre compte que la méthode de substitution dans une expression algébrique devient un tout petit peu plus familière comme le devient également pour un petit nombre d'entre eux, la multiplication de deux fractions.

I.10 Dixième séance : le Lundi 11 octobre 2002 de 16h00 à 17h00.

* Cas décimal et fractionnaire (Activité II séquence 1.d Questions d) e) et f))

a) Synthèse

Nous poursuivons la démonstration du théorème en commençant cette séance par le cas décimal c'est à dire le cas où les rapports sont égaux à un nombre décimal, ici 0,6. Nous demandons quelle relation existe entre AN et AC et l'élève H répond que AN/AC=0,6. Les élèves pensent qu'il s'agit d'un résultat à démontrer. Reste à savoir la méthode à employer. L'élève B évoque le théorème des milieux mais nous lui indiquons que pour le moment nous n'avons pas de milieux. Un flottement s'est fait ressentir. La dernière intervention demande une certaine réflexion dans le but de poursuivre l'activité.

Elève MF : "On divise."
Ex : "Votre camarade dit, "on divise", quoi et en combien ?"
Elève MF : "AB."
Ex : "On divise AB et en combien ?"
Elève : "En trois."
Ex : "Si on divise en trois, est-ce qu'on aura des sixièmes ? Car 0,6 cela correspond à quelle fraction ?"
Elève : "Un sixième."
Ex : "Non, ce n'est pas un sixième."
Elève MF : "Six sur dix."

Ex : "Oui six dixièmes, pour utiliser la méthode, la technique qu'on a utilisé plusieurs fois précédemment, vous nous avez dit qu'il fallait diviser AB en combien ?"
Elève MF : "En 10."
Ex : "Oui, des dixièmes. Vous prenez la longueur AB, vous divisez par dix et vous représentez dix segments de même longueur. Et le point M, il va être où ?"

Nous effectuons le dessin au tableau. L'élève C dit que le point M est le sixième. Nous demandons ce que nous allons faire ensuite et un silence s'est alors de nouveau installé. L'élève C voudrait alors trouver le milieu de AM.

Elève I : "Non, on trace les parallèles, à partir des points, parallèles à la droite (AN)."
Ex : "Bien, on avait convenu que si on divisait AB en un nombre entier de segments égaux, de l'autre côté, on avait quoi ?"
Elève : "Les longueurs sont égales."

L'élève B trouve alors que AN/AC=6/10. Dans le cas de la fraction, l'élève C divise en douze parties égales et dit en prendre cinq pour placer le point M. Lorsque nous demandons ce qu'il est possible de dire au sujet de AN/AC un élève répond : 5/12. L'élève C précise que nous pourrons le démonter en traçant les parallèles ce que nous confirmons. Nous poursuivons en disant qu'effectivement nous pourrions démontrer de la même façon que AN/AC = 5/12.

Ex: "Mais ça, c'était deux exemples particuliers ! Des exemples particuliers de quels nombres ? Quels types de nombres étaient en question dans ces deux exemples ?"

Nous avons été obligé d'encadrer les deux nombres en question pour mettre les élèves sur la voie. Mais les termes exacts sont apparus rapidement tout de même. Ceci ne voulant bien sûr pas dire que ces nombres sont correctement représentés et définis par les élèves.

Elève : "Décimaux et fractionnaires."
Ex : "Oui, donc on peut admettre que AN sur AC égal x est démontré pour quel nombres x ?
Elève C : "fractionnaires."
Ex : "Ce résultat se généralise pour x fractionnaire. Est-ce que cela inclus les nombres décimaux ? Est-ce que les nombres décimaux y sont inclus dedans ?"
Elève C : "oui, parce que l'on peut les écrire en nombres fractionnaires."

Ainsi, nous concluons que ce résultat-là, en partant des parallèles, est donc vrai pour les nombres fractionnaires en général.

Ex : "Dernière question, si on divise en n parties égales et que l'on trace toutes les parallèles. On sait que de l'autre côté, on aura quoi ?"
Elève : "On aura la même chose."
Ex : "n parties égales de l'autre côté, oui. Si je place maintenant un point M tel que AM égale p, à quoi va être égal AM sur AB ?"
Elève B : "p sur n."
Ex : "Et AN sur AC ?"
Elève B : "p sur n."

Les élèves ont du mal à répondre à la question qui concerne le rapport MN/BC. Nous sommes obligés de revenir sur les cas précédents, 1/2 pour l'un, 1/3 et 2/3 pour l'autre, 1/4, 2/4, 3/4, pour finir par dire que MN/BC = p/n. Nous passons alors au cas du rapport inconnu.

b) Analyse *a posteriori*

Le principe de division du côté [AB] a été trouvé facilement mais les dixièmes ne sont pas apparus immédiatement. L'erreur classique d'associer 0,6 à 1/10 a été commise. Le tracé des droites parallèles a été évoqué comme également le rapport AN/AC. De même, dans le cas de 5/12, la méthode précédente semble fonctionner auprès des élèves. Ils semblent maintenant avoir compris cette méthode des parallèles. Les objectifs ont ici été atteints. De plus, contrairement à ce que nous attendions, il est naturel aux élèves, du moins à certains, que les nombres décimaux soient aussi des nombres fractionnaires. En ce qui concerne les rapports formés de deux longueurs de segments aux supports parallèles, nous confirmons que la généralisation par le biais de lettres est un passage difficile pour eux. Nous avons fait ce constat pour le calcul de k, l, m, en fonction de n, nous le refaisons pour le rapport MN/BC = p/n.

* Cas irrationnel (Annexe I 3, a) (Activité II séquence 2 questions 1 à 6 et début de la 7)

a) Synthèse

Les élèves ont devant les yeux le début d'une figure qui fait apparaître un triangle ABC et un point D sur le segment [AB]. Nous la construisons sur le tableau et nous traçons, en même temps que les élèves, la droite parallèle à (BC) passant par D. Nous supposons alors que l'on ne connaît pas le rapport AD/AB. Nous rappelons aux élèves que nous avons démontré que les égalités AM/AB = AN/AC = x, nous pouvions les avoir lorsque x était un nombre fractionnaire. Pour placer les points M et N tels que AM = MN = NB, l'élève MF propose de diviser AB en trois. Nous leur demandons, pour plus de lisibilité, de prendre une première couleur pour marquer les deux points de division de AB. L'élève MF dit que D est sur le segment [AB] et un autre élève précise sur [MN]. Un flottement se fait ressentir lorsque nous demandons ce qu'il est possible de dire des longueurs AM, AD et AB que nous inscrivons ?

Elève MF : "AM c'est un tiers de AB."
Ex : "ça oui d'accord. Mais je vous demande de le comparer directement sans utiliser encore de fractions. (flottement) Si vous voulez on peut écrire AM/AB = 1/3, mais le problème c'est que l'on ne connaît pas la longueur AD. Que peut-on dire alors de ces trois longueurs AM, AD, AB sans passer par les fractions ?"
Elève MF : "M est le milieu de AD."
Ex : "Déjà, ce n'est pas exact, mais en plus cela ne relierait pas ces trois longueurs."
Elève MF : "AM = AD."
Ex : "Est-ce que AM = AD ?"
Elève MF : "Ah non !"
Ex : "Bien justement, est-ce qu'elles sont égales ? Qu'est-ce qu'on va dire alors ? AM par rapport à AD. Vous m'avez dit qu'elles sont toutes égales puis vous vous êtes reprise puisqu'elles ne sont pas égales. AM par rapport à AD ?"
Elève B : "AM égale un demi."
Ex : "Sans parler de fractions pour le moment ; qu'est-ce qu'on peut dire de AM par rapport à AD ?"
Elève : "C'est la moitié."
Ex : "Non, D on ne sait pas exactement où il se trouve."

Finalement, nous écrivons au tableau : AM < AD < AN. Par contre, pour la suite les élèves ont eu plus de répondant. L'élève MF donne rapidement l'encadrement littéral :
AM/AB<AD/AB<AN/AB. Il trouve ensuite que AM /AB=1/3 et queAN/AB=2/3. Nous avons l'encadrement sur un premier côté du triangle ABC. Le tracé des parallèles à la droite (BC) sont entrepris et nous leur demandons à quoi est égal le rapport AR/AC ? Un élève répond AM/AB et l'élève C indique que c'est un résultat acquis. L'élève MF trouve AS/AC = AN/AB. Les élèves C et MF trouvent que AE/AC est compris entre AR/AC et AS/AC. Nous écrivons au tableau l'encadrement en question AR/AC<AE/AC<AS/AC. Toujours d'après ce que nous avons fait précédemment, l'élève C trouve que AR/AC=1/3 et AS/AC=2/3. Nous finissons en disant que les deux rapports AD/AB et AE/AC sont encadrés par les mêmes fractions.

Ex : "Comment on peut améliorer cet encadrement et le rendre plus précis ? Là, c'est encadré par un tiers et deux tiers, comment on pourrait rendre plus précis cet encadrement, c'est à dire comment avoir des fractions "plus petites" ? Là, on a des tiers ..."
Elèves : "On divise."
Ex : "Par quoi par exemple ? Ici M et N sont éloigné de D. Comment faire pour les rapprocher de D ? Comment trouver un segment auquel appartient D, un segment qui soit plus réduit en longueur ? Toujours en étant dans ce procédé là."

Nous sommes surpris que les élèves n'aient pas pensé à diviser par exemple par dix. Nous leur disons par conséquent de diviser AB en dix segments de même longueur. Les points de cette division sont d'une autre couleur. L'élève I a l'idée de tracer ensuite toutes les parallèles. Ce que nous faisons au tableau en même temps que les élèves sur leurs feuilles et nous écrivons : .../10<AD/AB<.../10 et sur le dessin nous désignons clairement les deux extrémités du segment qui contient le point D. L'élève B trouve que AD/AB est encadré par 5/10 et 6/10 et que c'est plus précis que l'encadrement précédent. Un élève rappelle que AC est divisé en dix et l'élève C dit que AE/AC est compris entre 5/10 et 6/10. Pour répondre à une question d'amélioration de l'encadrement l'élève B propose de diviser par 20. Ce que les élèves font et ce que nous faisons au tableau d'une troisième couleur. Nous comptons les segments pour encadrer AD/AB et un élève donne 12/20 et nous donnons 11/20.

Ex : ". Si on avait pris une autre étape, d'après vous, qu'est-ce que vous pensez qu'il aurait pu arriver ?"
Elève MF : "On va toujours trouver les mêmes fractions dans les encadrements."
Ex : "D'accord, si on réduit la longueur des segments, qu'est-ce vous pensez justement des segments au fur et à mesure, par rapport au point D ?"
Elève I : "Ils rapetississent."
Ex : "Ils "rapetississent"... oui et à par ça, par rapport au point D, ces segments, ils font quoi ces segments qui contiennent le point D ?"
Elève C : "Ils se rapprochent."
Ex : "D'après vous, qu'est-ce qui peut arriver intuitivement ; ça, je ne vous demande pas de le démontrer.
Elève : "On va s'approcher de plus en plus de D."
Ex : "Oui, c'est un résultat intuitif et difficile que je vous demande d'admettre. En passant par des intervalles décimaux de plus en plus petits, on arrive à s'approcher d'aussi près que l'on veut de D, c'est à dire d'un certain nombre car AD ça correspond à quelque chose. A la fois pour D et pour E, à chaque fois on aura le même encadrement. Rien que ça, intuitivement, cela nous permet d'affirmer que l'on a l'égalité des rapports. On s'approche de D aussi près que l'on veut ; on admet que AD sur AB est égal à AE sur AC. Pourquoi on admet cela car à chaque fois, on retrouve le même encadrement. On aurait refait le processus, s'aurait été pareil ; si on avait divisé par, 60, 100, et ainsi de suite. Ce que je vous demande d'admettre c'est que pour n'importe quel rapport inconnu AD sur AB, on se rapproche aussi près que l'on veut de D et de la même manière de E. La prochaine fois, on va élargir la démonstration."

b) Analyse *a posteriori*

La question sur les longueurs AM, AD et AB a été, au départ, mal posée. Nous pouvons comprendre l'embarras des élèves. Les apprenants ayant travaillé jusqu'à présent sur des fractions, ayant exprimé des rapports de longueurs, ne pensent pas à simplement comparer les longueurs entre elles. Cette partie est vraiment à reprendre. Par contre, les encadrement avec les fractions d'une part littérales et d'autre part numériques ne posent pas de problème. Pour rendre l'encadrement plus précis, les élèves avaient en charge de trouver qu'il fallait diviser AB en un nombre de sous segments supérieur à trois. Ils n'y sont pas parvenus. La suite a été facilement abordée par les élèves et ils ont même proposé une amélioration de l'encadrement en divisant par vingt. En affinant encore plus, le fait que les extrémités des segments qui contiennent successivement le point D se rapprochent de ce point est une idée qui a émergé difficilement. Cela faisant appel à des propriétés topologiques relativement développées, cette difficulté n'est pas surprenante.

I.11 Onzième séance : le Jeudi 14 octobre 2002 de 16hh0 à 17h00.

I.11.1 Suite de la démonstration (Activité II séquence 2 question 7) :

* Obtention des trois égalités de rapports

a) Synthèse

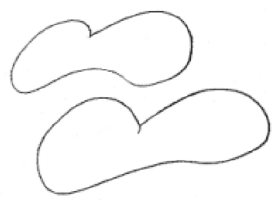
Nous dessinons un triangle ABC au tableau avec D un point de [AB] et E un point de [AC]. Le but est de trouver d'autres égalités de rapports à partir de l'égalité mise en évidence à la séance précédente. Au tableau, nous inscrivons l'égalité trouvée précédemment : AD/AB = AE/AC. Puis, nous poursuivons AD = AB - ... un élève répond BD et de même pour l'égalité AE = AC - EC. Nous divisons les deux membres de AD = AB - BD par AB et l'élève MF donne AD/AB=AB/AB - BD/AB. Après une question l'élève C dit que AB/AB=1. Nous écrivons alors : AD/AB = 1 - BD/AB et nous faisons la même chose pour AE/AC.

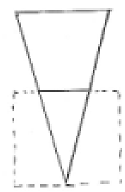
Ex : " AE/AC = 1 - EC/AC. Qu'est-ce qu'on sait de AE sur AC et de AD sur AB ?".
Elève C : "AD sur AB égale AE sur AC."
Ex : " Quelle égalité on peut encore obtenir ?AD sur AB est égal à AE sur AC ; le rapport AD sur AB il apparaît là et AE sur AC il apparaît là."
Elève MF : "BD sur AB est égal à EC sur AC."
Ex : "Bien, mais avant il aurait fallu passer par une autre étape. 1 - EC/AC = 1 - BD/AB ?"

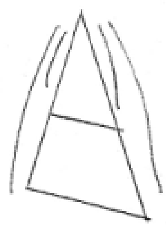
L'élève C transpose 1 et dit que cela donne zéro. Nous parvenons à une égalité : EC/AC = BD/AB et l'élève MF trouve que AB/BD=AC/EC. Nous en donnons l'explication et nous soustrayons 1 de part et d'autre. Les élèves sont d'accord là-dessus.

Ex : "Comment on va pouvoir faire pour calculer AB sur BD moins un ? Pour pouvoir retrancher ou additionner deux fractions, il faut faire quoi ? Vous avez dit tout à l'heure que 1 est aussi une fraction puisqu'on peut l'écrire un sur un."
Elève H : "Il faut qu'elles aient un dénominateur commun."
Ex : "Donc ici, ça va être quoi ?"
Elève H : "BD."
Ex : "Oui. Donnez moi une fraction ayant pour dénominateur BD et qui soit égale à un."
Elèves : "BD sur BD."
Ex : "Oui, AB sur BD moins BD sur BD est égal à AC sur EC moins quoi ?"
Elèves : "EC sur EC."

A partir de cet instant, les calculs fractionnaires deviennent plus problématiques pour les élèves même si nous sommes conscients de les avoir fortement guidés jusqu'à présent. Nous avons dû procéder par ostension. Les élèves ont eu du mal à trouver tout simplement que
AB - BD = AD et un peu moins bien sûr pour la seconde égalité de ce type AC - EC = AE. Nous trouvons alors la dernière égalité cherchée : AD/DB = AE/EC. Nous poursuivons en disant que ce que nous pouvons déjà remarquer, c'est que lorsque nous prenons un rapport sur ce côté, il est égal au rapport correspondant de l'autre côté. Nous rappelons alors oralement les trois égalités qui sont concernées par ce qui vient d'être dit. Puis nous notons au tableau le début de la phrase suivante : Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments...Après avoir demandé ce que signifie ces égalités pour les mesures des longueurs qui composent les rapports, les élèves n'ont pas pu évoquer la proportionnalité. Nous donnons donc finalement l'expression de "segments proportionnels" qui vient compléter la phrase du tableau. Nous leur disons tout d'abord que suivant l'inconnue qu'ils ont à chercher, à calculer, et les longueurs dont ils disposent, ils choisissent l'une des trois égalités que l'on est en train d'écrire. Les élèves donnent alors les deux autres égalités. Nous dessinons ensuite les deux formes suivantes au tableau dont l'une est censée être l'homothétique de l'autre et nous demandons aux élèves d'en faire autant. Nous faisons alors un retour aux lorgnettes pour faire apparaître une nouvelle égalité. Nous rappelons que nous avons démontré la proportionnalité de quatre longueurs à chaque fois. Nous prenons un exemple :

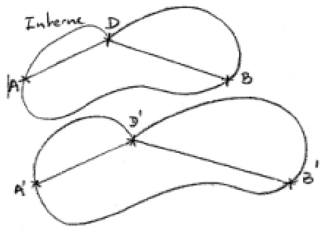


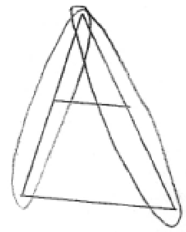




Ex : "Mais il y a deux longueurs qui n'interviennent pas ici et qui interviennent dans la situation des lorgnettes, lesquelles ?"
Elève : "La longueur de la lorgnette."
Ex : "D'accord, mais on avait vu qu'il y avait deux autres longueurs qui étaient proportionnelles à deux autres longueurs."
Elève B : "La distance de la mire à l'œil et la longueur de la lorgnette."
Ex : "D'accord, mais ces longueurs, elles interviennent ici. Mais il y a deux autres longueurs qui n'interviennent pas dans ce qu'on vient de démontrer."

Un long flottement s'en est suivi, et les élèves n'ont pas trouvé les longueurs. La question est mal posée. Le lien avec la situation des lorgnettes est difficile à faire. Nous citons alors la fente et la mire dont les segments qui les représentent ont leurs supports parallèles puis nous nous référons au triangle ABC pour leur montrer que les longueurs des segments [BC] et [DE], dont les supports sont parallèles, n'interviennent pas dans le théorème que nous venons de démontrer. Nous expliquons aux élèves pourquoi il y a deux théorèmes. Un premier pour les égalités de rapports déjà données et un second qui fait intervenir le rapport des longueurs de deux segments à supports parallèles. Nous revenons ensuite aux deux dessins homothétiques l'un de l'autre et nous les complétons de la façon suivante :





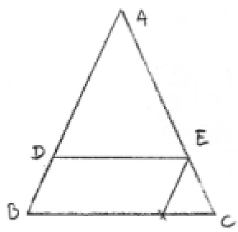
Ex : "La première proportionnalité est dite interne car pour construire le premier rapport, on va prendre deux longueurs dans le premier objet et ce rapport sera égal au rapport correspondant dans l'autre objet. Donc, vous prenez deux segments correspondants sur la figure agrandie. Ce que vous dit cette proportionnalité, pour le théorème dans le triangle, c'est que les rapports pris de ce côté là, le rapport de deux segments pris de ce côté là est égal rapport des deux segments correspondants de ce côté là, de l'autre côté. Donc si on revient aux formes quelconques, en fait on à ici : AD sur DB égale A'D' sur D'B'. Ces deux segments là sont bien pris sur la même figure là. Leur rapport sera égal au rapport des deux segments correspondants dans l'autre figure. J'ai fait deux figures ici, dans le triangle, elles correspondent à quoi ? Les rapports dits de gauches, ils sont pris sur quel côté ?"
Elève : "AB."
Ex : "AB. Le premier objet, dont on parle ici, c'est le segment AB. Pour avoir les trois égalités, on écrit par exemple le premier rapport à l'aide de deux segments pris sur le segment AB et le rapport de ces deux segments est égal au rapport des deux segments correspondants mais sur le segment AC qui joue le rôle du second objet. (tout ceci est accompagné d'une explication au tableau fondée sur les dessins s'y trouvant représentés) C'est ça la proportionnalité interne. On prend donc deux segments sur [AB] et ça va être égal au rapport des deux segments correspondants déterminés par les deux parallèles sur le segment [AC]."

b) Analyse *a posteriori*

Nous confirmons le fait que les élèves n'ont eu aucune prise d'initiative, aucune conjecture à faire dans ce travail. Nous avons pu remarquer que le lien qui était à faire entre les égalités des rapports et la proportionnalité n'a pas été fait par les élèves. De ce côté là, l'objectif n'est pas atteint. Cette approche de la proportionnalité devrait être travaillée. De plus, les élèves, après avoir été sollicités, n'ont pas cité le rapport de la fente de la lorgnette et de la mire. Nous avons pris la main. Les explications qui ont suivi sont suffisamment importantes pour qu'elles soient reproduites dans leur intégralité. Elles sont au cœur de notre ingénierie et du sens que nous voulons conférer au théorème de Thalès.

I.11.2 Démonstration de l'égalité des trois rapports (Annexe I 3.b) (Activité II séquence 3)

a) Synthèse



Nous effectuons un nouveau dessin au tableau et les élèves le font sur une feuille. Après avoir été sollicité, l'élève MF dit pouvoir appliquer le théorème précédent dans le triangle ABC. Nous lui demandons de préciser les parallèles qui interviendraient alors. Il répond (DE) et (BC) et un autre élève dit que l'on pourrait prendre aussi (EF) et (AB). Je choisis pour eux la seconde option qui est d'appliquer le théorème aux droites (EF) et (AB).

Ex : "J'écris le premier rapport : AE sur AC égale... Voyons si vous avez compris comment cela fonctionne. Dans le triangle ABC, en tenant compte des parallèles EF et AB, à quel autre rapport est égal AE sur AC ?"
Elève C : "CE sur AC."
Ex : "Non. Je fais ce rapport AE sur AC. Les deux parallèles qu'on a retenues ce sont lesquelles ?"(nous indiquons sur le dessin les longueurs AE et AC.
Elève C : "C'est AB et EF."
Ex : "(AB) et (EF). Une fois qu'on a bien repéré les deux parallèles. Je vous impose les deux premières longueurs. Il suffit après de regarder de l'autre côté."
Elève C : "CF sur CB."
Ex : "CF sur CB, est-ce que cela correspond à ça là ?"(nous désignons AE et AC.)
Elève C : "Non."
Elève B : "BF sur CB."

Nous donnons à nouveau des explications précises sur cette application du théorème puis :

Ex : "Il ne reste plus qu'une chose, qu'un argument. Comment faire intervenir la longueur DE ?" (flottement) Nous ce que l'on veut c'est le rapport DE sur BC. Comment on peut faire pour faire intervenir la longueur DE ? En utilisant encore le même objet qui vous a servi pour le théorème des milieux et qui a été caractérisé de trois façons différentes."
Elève C : "DE = BF."
Ex : "DE = BF oui, il faut juste dire pourquoi ?"
Elève H : "Parce qu'on suppose que c'est un parallélogramme."
Ex : "Pourquoi on le supposerait ?"
Elève MF : "C'est un parallélogramme."
Ex : "C'est pas assez précis. Qu'est-ce qui est un parallélogramme ?"
Elève MF : "DEBF."
Ex : "DEBF est un parallélogramme ; il faut juste dire pourquoi ?"
Elève MF : "Parce qu'il y a deux côtés parallèles deux à deux."
Ex : "Est-ce qu'on est sûr que (DE) est parallèle à (BC) ?"
Elèves : "Oui."
Ex : "Oui pourquoi ?"
Elève H : "Parce qu'on nous a demandé de la tracer comme ça."

Pour les droites (EF) et (AB), les arguments sont répétés alternativement par les élèves C et B. Nous en arrivons aux rapports. Toutes les égalités qui apparaissent dans le discours sont également notées au tableau.

Ex : "A quoi est égal AE sur AC ?"
Elève C : "à AD sur AB."
Ex : "Oui, ça d'accord, mais ..."
Elève C : "BF sur BC."
Ex : "D'accord aussi, mais on a démontré autre chose là." (DE = BF)
Elève B : "DE sur BC."

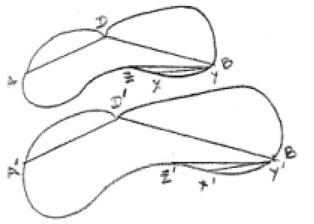
Les élèves trouvent l'égalité AE/AC=DE/BC. Puis nous passons à la rédaction de l'énoncé du théorème.

Elève B : "Un triangle."
Ex : "Soit ABC un triangle. Il faut définir tous les points."
Elève B : "DE parallèle à BC."
Ex : "DE je ne sais pas ce que c'est. Le point D, je ne sais pas ce qu'il signifie. Il faut repartir du début, ne considérez pas que cette figure est construite."
Elève C : "DE parallèle à BC."
Ex : "Voilà, je vous en trace une. *(nous traçons un droite parallèle à (BC) mais ne coupant pas les segments [AB] et [AC].)*
Elève C : "Coupant AC en E."
Elève MF : "passant par les deux côtés du triangle."
Ex : "Il y a une chose plus rapide et plus simple pour rédiger. On va commencer par le point D en fait. D est un point de quoi ?"
Elève C : "Un point de la droite (AD)."
Ex : "Si on dit de la droite (AD), D peut être là, là ou là."
Elève C : "Du segment [AB]."
Ex : "Oui."
Elève MF : "E c'est un point de AC."
Ex : "Oui mais E va être déterminé comment maintenant ?" (flottement)
Elève C : "On trace une droite qui passe par AC."
Ex : "Non, on ne dit pas qu'une droite passe par AC. Elle passe par où cette droite ?
Elève C : "Par D."
Ex : "Par D et elle est comment ?"
Elèves : "Parallèle à BC."

Nous écrivons au tableau ce qui vient d'être dit et la suite n'a pas posé de problème. L'élève C a remarqué que par rapport au premier théorème on a un troisième rapport. Nous leur disons que ce dernier théorème est à appliquer plutôt lorsqu'ils ont à calculer la longueur DE ou la longueur BC. Dans les autres cas, il vaut mieux appliquer le premier théorème. Nous tentons ensuite de faire comprendre aux élèves pourquoi certaines égalités sont fausses et les raisons de ces erreurs fréquentes ? Pour cela, nous complétons les deux figures homothétiques. Et nous mêlons les gestes à la parole en désignant à chaque fois les segments en question.

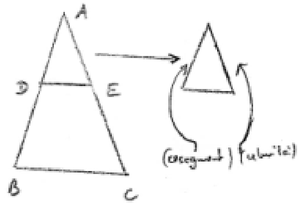
Ex : "Soit on écrit, par exemple, AD/DB = AE/EC et dans ce cas là on ne peut pas écrire le troisième rapport DE/BC ; soit, si on veut le rapport des deux longueurs DE et BC, il faut partir de AD sur AB égal AE sur AC. C'est pour ça qu'il y a deux théorèmes. Ca correspond à quoi ? Vous reprenez la même figure. (les deux figures homothétiques)

Vous prenez deux segments dans cette première figure vous en faites le rapport, il est égal au rapport, dans cette figure agrandie, des longueurs correspondantes. Maintenant, c'est différent pour le second théorème. (en rouge pour X, Y et Z) On prend deux segments et on fait leur rapport. Un segment sur la première figure XY et un segment sur la deuxième X'Y' et ça donne XY sur X'Y'. Ce rapport va être égal à ... on en prend un autre YZ et on prend le segment correspondant aussi Y'Z'. XY sur X'Y' égal à YZ sur Y'Z'. C'est cela que l'on appelle la proportionnalité externe pour le théorème de Thalès. A chaque fois, on a quatre segments. En blanc c'était pour le premier théorème et en rouge pour le second théorème. On a quatre segments ; on a pris un segment sur la première figure, on prend son correspondant dans la deuxième et on fait le rapport des deux. Et ça, ça doit être égal à la longueur d'un deuxième segment pris dans la première figure divisée par la longueur du segment correspondant dans la deuxième. C'est pour ça qu'on l'appelle la proportionnalité externe.



Pour le premier, c'était interne car on prend deux segments dans l'une et on fait leur rapport qui est égal au rapport des deux segments de l'autre. Et c'est entièrement différent ; on ne parle pas de la même chose. Dans cette figure (triangle) voilà comment peut se présenter la proportionnalité externe.

Le triangle ADE, je le déplace à côté. AD sur AB en fait c'est le rapport de ce segment sur le grand il est égal au rapport de celui-là sur le grand et il est égal à DE c'est à dire celui là sur celui là. On prend ce segment et on le divise par le grand, on prend ce segment, on prend son correspondant, on le divise par le grand ; ce segment là est égal à celui là [DE], j'ai placé ce petit triangle et je l'ai mis là. Ce segment sur celui-là. Là on a une proportionnalité extrême. Alors que pour l'autre, on avait une proportionnalité interne. On ne parle plus de triangles mais de segments. On prenait deux segments là dedans ([AB]) et on faisait leur rapport et s'était égal au rapport des segments correspondants dans cette figure. Les figures considérées n'étaient plus des triangles mais des segments."



b) Analyse *a posteriori*

Les élèves ont proposé deux possibilités d'application du théorème et nous avons fait le choix d'imposer l'option. Il nous semble difficile de procéder autrement que par un guidage des élèves dans cette démonstration.

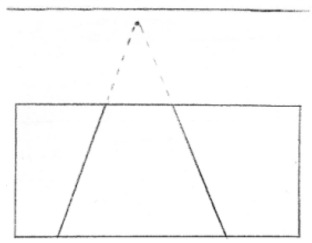
Après quelques hésitations, les élèves appliquent correctement le théorème. Mais le mélange entre les deux figures est apparu une fois. L'objectif pour les élèves d'appliquer le théorème précédent et d'utiliser une propriété des parallélogrammes est atteint. Par contre, ils ont toujours du mal à se détacher de la figure sur laquelle ils ont réfléchi pour rédiger en français l'énoncé du théorème. L'appréhension séquentielle de la figure se trouve en interaction avec l'appréhension discursive. Ils ne saisissent pas que pour rédiger le texte d'un énoncé, il faut repartir du début et commencer par écrire des phrases permettant de construire la figure. L'ordre d'apparition logique des points et des droites qui constituent la figure est parasité par une lecture du dessin présent au tableau. Mais encore une fois, cela semble naturel puisque les raisonnements hypothético-déductifs sont enseignés depuis peu de temps aux élèves de quatrième. De plus, lorsque nous observons la manière dont sont rédigés les théorèmes dans les ouvrages actuels, nous pouvons constater que des références à des propriétés lues sur les dessins sont faites dans les énoncés. Peut-être faudrait-il prendre des distances par rapports à ces références qui brouillent la signification d'un énoncé et de sa démonstration. Le sens des proportionnalités internes et externes a été à notre charge comme prévu, de même que les explications que cette double approche de la proportionnalité permet au sujet des mélanges de différents types de rapports que certains élèves font. L'étape suivante consiste à appliquer ces théorèmes dans une situations concrète de mesure de distance inaccessible qui est en l'occurrence la hauteur d'un plafond.

I.11.3 Application pratique du théorème à la mesure d'une distance inaccessible (Annexe I 3.c) :

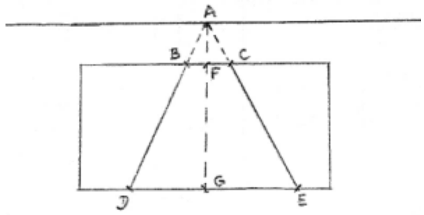
a) Synthèse

Les élèves exécutent la première visée et tracent le premier trait au tableau. Ils exécutent la seconde et tracent le trait de visée. Nous leur demandons alors s'il est possible de voir apparaître une figure dans laquelle on peut appliquer l'un des deux théorèmes ?

Elèves : "Oui."
Ex : "Quelle serait cette figure ?"
Elève : "Un triangle."
Ex : "Lequel triangle ?"



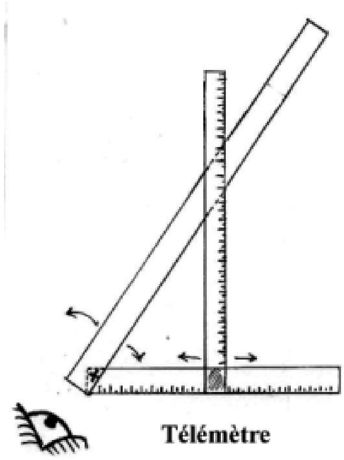
L'élève B, en les pointant du doigt, me montre les trois sommets. Maintenant que nous avons le triangle, nous leur demandons où se trouvent les parallèles ? L'élève MF les montre. Mais il nous faut deux longueurs dont les mesures sont accessibles.
Les trois élèves montrent les deux segments tracés au tableau dont les supports sont parallèles. Nous construisons alors la représentation de la situation.



Ex : "La hauteur du plafond est représentée par quoi?"
Elève X : "Par les points tillés."
Ex : "Est-ce que ça suffit pour avoir la hauteur du plafond ?
Elève B : "Il faut rajouter ça" *(l'élève montre la partie entre le planché et le tableau.)*
Ex : "Oui, il faut rajouter ça. Quelle autre longueur est accessible encore à part BC et DE ? Quelle autre longueur on peut encore mesurer ?"
Elève MF : "FG."
Ex : "Oui FG, qui correspond à quoi ?"
Elève C : "Au tableau."
Ex : "A la largeur du tableau. Donc on a trois longueurs qui vont nous permettre de calculer AG à laquelle on rajoutera cette longueur là pour avoir la hauteur totale du plafond."

b) Analyse *a posteriori*

Les élèves ont visé correctement et le triangle dans lequel le théorème s'applique a été rapidement mis à jour. Nous aurions pu les laisser construire la figure représentant la situation. Ils n'ont pas eu le temps d'appliquer les théorèmes dans les sous-figures, d'écrire les différents rapports et d'en choisir judicieusement certains pour parvenir à calculer la longueur cherchée. Ne voulant pas abuser du temps de Daniel, nous avons décidé de nous arrêter là. Cette activité est reprise avec les élèves de la classe de troisième qui participent eux aussi à la mise en place de cette ingénierie. Par contre, ces élèves ont fabriqué et utilisé le télémètre dans la cours. Nous ne faisons pas de synthèse.



Télémètre

II. Ingénierie appliquée au niveau troisième (Annexe II)

II.1 Première séance : le mardi 8 octobre 2002 de 14h00 à 15h00. *(Annexe II 1)*

a) Synthèse

Dans l'activité séquence 1.b, un contre exemple est mis en évidence, ce qui est repris plus tard dans l'année lorsque le cas de la démonstration du théorème de Thalès déjà envisagé dans la classe antérieure est effectivement abordé.

II.1.1 Activité I séquence 1.a concernant la mesure des longueurs, leur report et leur comparaison

a) Synthèse

Après avoir posé la première question, paradoxalement, aucun élève ne pense qu'il est possible de trouver la mesure exacte de la longueur de tous les segments. Reste à savoir pourquoi. Nous insistons pour obtenir des explications et devant le silence et afin de bien faire comprendre ce que nous attendions à cet instant de l'activité, nous avons plusieurs fois répété la question.

Y : "De tous les segments ? on peut pas parce que si on n'a qu'un double décimètre et s'il faut plusieurs double décimètres, on ne pourra pas le mesurer."
Elèves : "Non ce n'est pas la question, on peut toujours reporter le double décimètre."
Y : "C'est pareil si c'est plus de 20 cm, on ne pourra pas ..."
Elèves : "Oui, oui, d'accord..."

Les élèves ont eux-mêmes trouvé les limites de l'argument avancé par Y, mais ils ne l'ont pas forcément convaincu. Ils ont fini par renoncer à expliquer qu'effectivement, un double décimètre, dans le micro-espace, peut toujours être reporté.

G : "C'est pas assez précis."
Ex : "Qu'est-ce qui n'est pas assez précis ?"
G : "Ben, les mesures, les graduations."
Ex : "Les graduations ne sont pas assez précises ... Mais si je vous dis que je prends encore plus précis, précis, précis ... ?"
G : "Ben, à un moment s'est trop serré."
Ex : "C'est pour cette raison que, parfois, l'on ne peut pas trouver la mesure exacte ; à un moment s'est trop rapproché donc on ne peut pas mesurer."
M : "Mais aussi parce que parfois, pour des longueurs, on peut trouver des racines carrées."

Nous devons préciser que M n'est pas redoublant et que de plus l'activité en question n'a pas été donnée à l'avance. Ainsi, les élèves réfléchissent spontanément, en direct. De plus, les racines carrées n'ont pas encore été introduites puisqu'il s'agit justement de la première activité proposée dans ce chapitre. Cet élève est particulièrement brillant mais il ne réfute tout de même pas l'idée avancée par G, puisqu'il dit : "mais aussi parce que ...." Nous demandons à M de ne plus parler de racines carrées pour le moment. Simplement, nous pouvons avancer le fait que M a l'intuition d'une écriture infinie, qui ne s'arrête pas sans notion de périodicité. Nous réitérons la même question pour savoir si de nouvelles raisons pouvaient être évoquées, ce qui ne fut pas le cas. Je conclus en disant qu'on retient que l'on ne peut pas mesurer exactement certaines longueurs parce que si on prend des unités de plus en plus rétrécies au bout d'un moment, on ne pourra pas lire les mesures, même si M a donné une autre raison. Nous passons ensuite à la question : deux segments peuvent-ils toujours être mesurés, en théorie, en même temps à l'aide de la même unité ? La question leur semble saugrenue. Au début, quatre élèves répondent par l'affirmative puis dix mains sur vingt-trois se lèvent pour dire oui. G lève la main pour signifier que ce n'est pas toujours possible. G a du mal à s'expliquer et pour y parvenir, elle exécute un geste avec sa main en rapprochant à plusieurs reprises son index et son pousse de la main droite pour indiquer sûrement que les unités doivent être très petites parfois. Elle reste sur l'exemple de la mesure d'un seul segment.

Y : "Je sais pas, c'est un truc encore avec les racines carrées."

Cet élève est visiblement influencé par les propos tenus par M. Devant l'absence de raisons pour expliquer que deux segments ne peuvent pas forcément être mesurés par une même unité, nous passons à la question suivante. K demande ce que signifie le mot réitérer. Nous donnons des explications puis nous reproduisons au tableau deux segments A et B de longueur distincte, A étant le plus grand. Les élèves effectuent le dessin en même temps. Nous leur conseillons d'employer un compas. Il est à noter qu'aucun élève n'a dessiné deux segments dont la mesure de l'un serait un multiple de la mesure de l'autre. L'opération se serait alors arrêtée. A chaque manipulation que nous faisons au tableau, nous demandons combien de petits segments ont été enlevés au tableau, et les élèves répondent.

Ex : "Moi par exemple, j'ai enlevé combien de B dans A ?"
Classe : "Trois."
Ex : "Vous regardez combien vous pouvez en enlever et il reste quoi d'après l'énoncé ?"
Elèves : "C."
Ex : "Il reste un morceau C. Est-ce qu'il est plus grand que B ?"
Elèves : "Non."
Ex : "Pourquoi ?"
Y : "Sinon on peut rajouter un B."

Nous recommençons le procédé et les élèves concluent spontanément que D, segment qui reste lorsque l'on a enlevé autant de C que l'on peut dans B, est plus petit que C car sinon on pourrait enlever encore un C. Y dit que l'on enlève autant de fois que l'on peut D de C, puis, une fois ce dessin effectué, autant de E de D. Nous leur demandons d'imaginer ce qu'il peut se passer. Un certain temps de réflexion est laissé aux élèves.

Y : "Monsieur, au bout d'un moment, on arrivera à plus rien. Au bout d'un moment, ça tombe sur un nombre entier et il y aura plus rien."
Ex : "D'accord, donc vous pensez qu'au bout d'un moment ça s'arrête."
Y : "C'est le ppg ..."

Treize élèves pensent que cela s'arrête forcément à un moment et seulement trois pensent l'inverse, dont M, D et P.

D : "ça s'arrête pas parce qu'il y aura toujours un espace.
Ex : "Oui, on peut recommencer."
P : "Moi je pense que c'est infini."
Ex : "Pourquoi ?"
P : "Il y aura toujours des mesures de plus en plus petites qui se répètent."
Ex : "Oui mais si je prends par exemple un segment A qui fait exactement deux fois B, ce sera infini ?"
Elèves : "Non."
Ex : "ça s'arrêtera au bout de combien de fois ?"
Elèves : "Une fois."
Ex : "Une fois, puisque l'on reporte B exactement deux fois. Vous voyez bien que dans ce cas le procédé n'est pas infini. Dans quel cas ça pourrait être infini ?"
P : "Dans un autre cas de figure."
Ex : (à M) "Lequel alors ? Et vous, vous en pensez quoi ?"
M : "Moi je dis que si on prend un segment plus petit que l'autre, ce sera infini."
Ex : "Oui mais ici, ça s'arrête."

M : "Oui mais ici, c'est un demi aussi..."
Ex : "Et alors, donnez moi un exemple où ça ne s'arrête pas ; si je prends trois quarts, quinze douzièmes, ce ne sera pas pareil ? Au bout d'un moment, ça va s'arrêter aussi." *(flottement)*
Elèves : "Oui."

Ces deux élèves ont bien sûr du mal à trouver un exemple. Mais ils ne comprennent pas que dans certains cas cela puisse s'arrêter. Pour tenter de leur faire comprendre, nous prenons l'exemple où A est égal à douze B.

Y : "Au bout d'un moment, la petite longueur qui restera rentrera un nombre entier de fois dans l'autre."

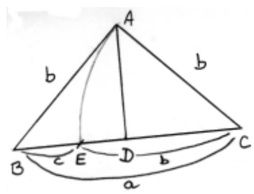
b) Analyse *a posteriori*

Trois raisons ont été évoquées pour justifier le fait que certaines longueurs ne sont pas mesurables directement. La première, qui a été réfutée par de nombreux élèves, consistait à dire que des segments pouvaient être trop longs pour un double décimètre. Ensuite, une élève a considéré que l'unité employée pouvait ne pas être assez précise, et que de toute façon, à un moment ou a un autre, les unités ne seraient plus visibles. Aucun élève n'a contredit cet argument, même M qui évoque pourtant les racines carrées. Nous pouvons en déduire que cette idée est très répandue chez les élèves de cette classe et de bien d'autres sûrement. Mis a part un élève (M), les raisons que les élèves ont invoquées ne laissent pas de doute sur la réponse théorique à cette question. Ils pensent qu'il est toujours possible de mesurer la longueur exacte d'un segment hormis les difficultés matérielles de mesurages. Ainsi, en référence à la figure matérielle, les élèves concluent soit qu'il est toujours possible de mesurer exactement un segment, comme cela a été dit dans la partie étude des variables et des obstacles, soit qu'il n'est pas toujours possible de trouver la mesure exacte d'un segment puisque parfois les unités seraient trop petites. Une majorité d'élèves pense que deux segments peuvent toujours être mesurés avec la même unité. Ceux qui pensent le contraire ne donnent pas d'explications. Ainsi, nous avons tout de même obtenu le fait que les élèves s'imaginent que tous les segments sont commensurables entre eux et cela confirme bien qu'ils pensent qu'il n'est pas toujours possible d'obtenir la mesure exacte d'une longueur pour des raisons matérielles, ces mesures sont rationnelles. Les élèves comprennent facilement le mécanisme répété du report d'un segment dans un autre puisqu'au bout d'un certain temps le petit rentre un nombre de fois exact dans le grand. Une large majorité d'entre eux pense que le procédé s'arrête à un moment ou à un autre. C'est ce que nous attendions. Mais trois élèves pensent le contraire et disent qu'il restera forcément toujours un petit segment.. Mais ils ont bien sûr du mal à s'expliquer. Bizarrement, M, contrairement à la recherche de la mesure directe de la longueur d'un segment, n'a pas invoqué les racines carrées pour cette question de comparaison de deux segments. Cela vient sûrement du fait qu'il n'a pas pleinement conscience du sens de ce nouvel objet.

II.1.2 L'incommensurabilité (Annexe II 1) (Activité I séquence 1.b)

a) Synthèse

Les élèves dessinent un triangle rectangle isocèle que nous reproduisons également. L'un d'entre eux a dessiné un triangle isocèle non rectangle. Il refait son tracé. Je leur demande ensuite pourquoi a - t- on b < a ? Une discussion s'engage entre les élèves. Nous nous référons au dessin que nous avons reproduit au tableau.



G : "Parce que c'est un triangle isocèle."
Ex : "Pas uniquement, si je prends ce triangle-là, *(triangle isocèle où b > a)* là on a a et là on a b, est-ce qu'on a b < a ?"
G : "Non."
Ex : "Non, donc ce n'est pas le bon argument. Pourquoi a-t-on b < a ?"

V : "Parce que BC est l'hypoténuse."

Un élève a donc rapidement trouvé le premier argument. A chaque fois qu'une idée est correctement énoncée par un élève, nous l'écrivons au tableau en même temps que la propriété qu'elle permet alors de démontrer.

Ex : " A quel endroit je vois apparaître a sur 2 ici ?"
Y : "Ben, entre B et C ; CD ou BD."
Ex : "CD. Ici, c'est égal à ...?"
Classe : "a sur 2."
Ex : " a sur 2 oui. Alors pourquoi on a a/2 < b?"
A : "Parce que dans un triangle isocèle, quand on prend une droite perpendiculaire, par exemple une hauteur qui passe par A, elle est aussi la bissectrice, la médiane ..."

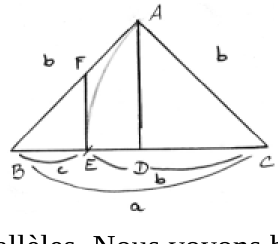
Cette double inégalité a été facilement démontrée par les élèves qui avaient bien en mémoire, du moins pour certains, les propriétés des triangles qui sont utiles ici.

Ex : "Alors maintenant, où va tomber le point E forcément ?" A quel endroit on retrouve la longueur b avec ce qu'on vient de faire ? Ce point E il a été obtenu comment ?"
Y : "Au hasard."
M et d'autres : "On a reporté la longueur AC."
Ex : "On a reporté la longueur AC. C'est à dire ..., c'est à dire la mesure de la longueur ..."
M : "b"
Ex : "ça, c'est la mesure b oui, EC mesure b, et ça (montre BC) c'est la mesure a. On a reporté la longueur AC à partir de C sur le segment [BC] et on a obtenu le point E. A quel endroit va se situer ce point E ?"
G : "Sur la hauteur."
Ex : "Non, le point E il est là." (Nous le montrons sur le dessin)
G : "Ben oui..."
A : "Au milieu du segment [BD]."

Nous retrouvons ici une remarque qui est souvent faite, lorsqu'un point se trouve sur un segment, il est forcément au milieu. Milieu semble vouloir dire pour nombre d'entre eux, "entre". G fini par dire sur le segment [BD]. Mais nous leur demandons de justifier ce fait qui pour le moment n'est qu'une conjecture. Un flottement d'une quinzaine de secondes se fait ressentir. Les élèves ont du mal à faire le lien entre ce qui leur est demandé et ce qu'ils viennent de démontrer. Finalement, c'est un élève qui n'avait pas parlé jusqu'à présent qui trouve une réponse

R : "EC s'est la longueur b, et comme c'est plus petit que a..."
Ex : "Oui, comme c'est plus petit que a, forcément ce sera sur le segment [BC], mais ça pourrait être là. (Au tableau : entre D et C) Donc, effectivement c'est, entre guillemets, à droite de B entre B et C, car b c'est plus petit que a. Il y a autre chose maintenant, pourquoi il est au delà de D justement le point E ? On sait qu'il est à droite de B parce que vous avez dit que b est plus petit que a. b c'est la mesure de ça (je montre AC) et A c'est ça (on montre BC), mais pourquoi il est à gauche, entre guillemets parce que à gauche ce n'est pas vraiment défini mathématiquement ici, pourquoi il est à gauche de D ?"
A : "Parce que a sur 2 c'est inférieur à b."

Nous récapitulons tous les arguments qui permettent de dire que E est sur le segment [BD]. Puis, nous prenons la main pour expliquer pourquoi, d'après les deux inégalités démontrées, b est contenu une fois mais pas deux dans BC. Nous complétons la figure et notons sur le dessin BE = c et nous écrivons au tableau a - b = c. Les élèves tracent la perpendiculaire à (BC) passant par E et nous complétons le dessin du tableau. Nous demandons aux élèves pourquoi AF=EF=BF ? Ils semblent réfléchir mais ne proposent pas de solution. Je les encourage à participer. Un silence de quarante secondes au total s'est écoulé avant qu'un premier élève prenne la parole, malgré les invitations répétées



de notre part. G commence à évoquer un triangle avec deux droites parallèles. Nous voyons bien quelques interférences entre les leçons de la classe de quatrième et celles de troisième même si nous ne nous attendions pas à voir apparaître le théorème à ce niveau de l'étude. En reposant la question, G propose d'utiliser le triangle isocèle ABC.

R : "BFE."
Ex : "BFE pourquoi il est isocèle ?"
G : "Ben parce que !"
Ex : "Non parce que ce n'est pas un argument. Il y en a un autre qui est isocèle parce qu'on construit comme ça, on a construit certaine chose. Il est isocèle parce que ... ?"
Elèves : "EFA."
Ex : "Non ,c'est celui dont on veut démontrer qu'il est isocèle."
Y : "C'est avec un truc parallèle non ?"
Ex : "C'est à dire ?"
G : "La somme des angles d'un triangle est égale à 180°"
Ex : "Et ensuite ? On un triangle là-dedans qui est isocèle parce que l'on a construit un certain point d'une certaine façon. Quels autres triangles sont isocèles ?"
Elèves : "BDA."
Ex : "BDA, oui et quoi encore ?"
Elèves : "ADC."
Ex : "ADC, oui d'accord mais est-ce que l'on va pouvoir le mettre en relation avec le triangle EFA ?"

Les élèves, après avoir proposé plusieurs pistes ont emprunté la suivante.

V : "EAC."
Ex : "EAC, pourquoi il est isocèle ?... Pourquoi EAC est isocèle ?"
A : "Parce que la longueur AC est égale à la longueur EC."
Ex : "Evidemment, on a reporté cette longueur donc le triangle EAC est isocèle ; ça veut dire quoi pour les angles ici (A et E) ?"
G : "ça veut dire qu'ils sont égaux."
Ex : "Bien, on démontre maintenant que EFA est isocèle."
G : "FAC est un angle droit, FEC aussi et EAC et AEC sont égaux donc AEF est isocèle."
Ex : "Oui, donc ces deux longueurs EF et AF sont égales."

Nous donnons alors la fin de cette démonstration d'égalité de trois longueurs à faire à la maison.

b) Analyse *a posteriori*

Les élèves ont avancé aisément dans les premières tâches. Mais ensuite pour évaluer la place du point E, ils ont eu un peu plus de difficultés. Cela semble lié au fait qu'ils ont du mal à interpréter avec une approche topologique (E est entre B et D) des propriétés métriques $a/2 < b < a$. Mais deux élèves ont finalement fait le lien entre les deux approches. Nous avons pris l'initiative d'expliquer pourquoi b est contenu une fois et pas deux dans BC alors que les élèves auraient peut-être trouvés seuls. Mais après le dernier long moment d'hésitation, nous avons voulu avancer dans l'activité. Les difficultés attendues pour démontrer que AE=EF=EB se sont faites ressentir. Les différentes propositions de triangles isocèles faites par les élèves ont été sélectionnées par l'expérimentateur alors que les élèves eux-mêmes auraient peut-être pu le faire. Par contre, une fois le triangle choisi, nous pouvons être surpris de la bonne marche de la démonstration des élèves qui étaient autonomes.

II.2 Deuxième séance : le jeudi 10 octobre 2002 de 10h30 à 11h30.

II.2.1 Suite de l'activité I séquence 1.b

a) Synthèse

Nous rappelons que nous avions trouvé la fois dernière que AF=FE et qu'il restait à démontrer chez soi que BFE est un triangle isocèle. A prend la parole.

A : "Comme ABC est un triangle rectangle isocèle en A, l'angle ABC et l'angle BCA font 45°.
Ex : "Complétez la figure en même temps. Il y a encore un argument."
A : "Et puisque FEB fait 90°."
Ex : "Oui puisque l'on a construit cette perpendiculaire."
A : "Le triangle FEB est un triangle rectangle."
Ex : "Oui."

A : "Et isocèle puisqu'il a deux angles l'un de 45° et l'autre de 90° donc le 3ème fait 45°."
Ex : "Oui très bien, c'est l'une des façons de démontrer que FEB est isocèle. 45 + 90 = 135, pour aller à 180, il faut 45."

Nous demandons si des élèves ont une autre solution, sans réponse de leur part, nous en proposons une fondée sur le fait que (AD) est la bissectrice de l'angle A et sur les angles correspondants BFE et DAC. Les élèves donnent les réponses à mes questions qui permettent de parvenir à cette nouvelle démonstration. Ensuite, le fait que AF=FE=BE est bien acquis comme l'est aussi l'inégalité EB < FB trouvée par A. Nous leur demandons d'en déduire que c < b/2. Un long moment de silence a suivi l'énoncé de cette nouvelle question. Nous avons été obligés de décomposer la question.

Ex : "Est-ce que 2c vont pouvoir être contenu dans b ?"
Classe : "Non."
G et M : "Oui."
Ex : "Et oui. La longueur 2c est inférieure à b. Donc, au moins dans b, il y aura 2c."

Les élèves reportent ensuite, à l'aide du compas, FE sur BF et obtiennent le point H. R se rend compte que l'on vient de vérifier sur le dessin que c est contenu deux fois dans b.

Ex : " Sur le dessin, d'après vous est-ce que c va être contenu 3 fois ?
Elèves : "Non ce qui reste est plus petit que c."
Ex : "Non mais on va le démontrer. Sur le dessin, on se rend compte que ce qu'il reste est plus petit que c."

Nous demandons aux élèves d'appliquer l'inégalité triangulaire dans le triangle BEF. L'inégalité triangulaire semble assez loin dans le temps pour des élèves de troisième. Cette propriété n'est plus utilisée en quatrième depuis les derniers changements de programme.

G : "C'est pas en rapport avec A² ?"
Ex : "Non, ça c'est le théorème de Pythagore. L'inégalité triangulaire, c'est quand même pas compliqué ! BF est inférieur à quoi ?"
M : "FE + BE."
Ex : "Et oui, c'est inférieur à FE + BE strictement. Dans quel cas il y a égalité ? Quand ..."
D : "Dans un triangle équilatéral."

Il est à remarquer que le terme égalité associé au triangle fait penser aux triangles équilatéraux ou isocèles à un élève.

Ex : "Et non, dans un triangle équilatéral, BF n'est pas égal à la longueur FE + BE. Dans quel unique cas il y a l'égalité BF = FE + BE ?"
G : "Dans le théorème de Pythagore."

Nous ne savons pas si des études précises ont été entreprises au sujet des réponses que des élèves peuvent donner à des questions et qui peuvent paraître, au premier abord, incompréhensibles et incohérentes, mais il serait utile sans doute de tenter de comprendre certaines de ces réponses. Pour D, c'est, semble-t-il, le mot égalité employé dans un contexte faisant apparaître des triangles qui lui fait penser au triangle équilatéral et pour G, la forme de l'égalité précédente dans laquelle ce trouve une somme de deux longueurs lui fait penser au théorème de Pythagore. Il serait intéressant également de faire comprendre aux apprenants les raisons de leurs erreurs, mais ce n'est pas le but de notre travail.

M : "Quand le triangle il est plat."
Ex : "Très bien, mais pas n'importe comment plat, parce que si je met E là, il est plat aussi le triangle mais on n'a pas l'égalité."

M joint alors le geste à la parole B, E, F et dit que B est au milieu. Nous retrouvons la même erreur qui concerne le fait d'être entre deux points et le milieu de ce segment. S dit alors qu'il faut que E soit sur le segment [BF]. Nous donnons les explications nécessaires qui concernent le cas où le point se trouve sur l'une des deux demi-droites puis nous appliquons l'inégalité triangulaire au triangle BEF.

Ex :"BF est égal à quoi ?"
Elèves : "b - c."
Ex : "Inférieur à FE ; c'est égal à quoi ? FE c'est égal à quoi ?"
Elèves : "c."
Ex : "c + BE."
Elèves : "c."
Ex : "c. Si on transpose le "- c" à gauche ça donne quoi ?"
Elèves : "3c."
Ex : "3c, bien. Qu'est-ce qu'on peut en déduire de ça ? (Flottement) Bien qu'est-ce qu'on peut en déduire de ça ? Là 2c < b donc on sait que c est conte b est contenu au moins 2 fois dans b. Et là ... oui ?"
G : "Vu que b est supérieur à 2c, y a plus de 2c dans b."
Ex : "Oui très bien ..."
G : "Et que vu que b est inférieur à 3c, il y a moins de 3 c dans b."

Les élèves, du moins ceux et celles qui sont intervenus, semblent bien comprendre la démarche. Nous avons consigné les précédentes remarques au tableau.

Ex : "Alors ensuite ... Si on reproduit le dessin ? Si on trace une perpendiculaire et si on recommence ? (Flottement). Là si on retrace un triangle rectangle, et la même médiatrice, hauteur, bissectrice et médiane ?"
G : "On aura la même chose."
Ex : "C'est à dire ?"
Y : "ça veut dire qu'on recommencera et ça ne finira pas, que ça s'arrêtera pas."
Ex : "Oui répétez."
Y : "Ben si c'est pareil le grand et le petit, ça ne s'arrêtera plus, c'est à l'infini."

Nous précisons alors ce que nous venons de trouver dans chaque étape et ce que nous trouverions à l'étape suivante dans la petite figure avec un jeu de questions réponses avec les élèves.

Ex : "Vous avez dit tout à l'heure que le processus va à l'infini, ça s'arrête pas ; ça veut dire quoi finalement ?"
Y : "Y a pas de commune mesure entre deux segments."
Ex : "Et bien voilà ; mais pas entre deux segments, entre deux segments ce n'est pas vrai, il faut être plus précis. Si je prends 4 et 2 il y aura une commune mesure. Entre quel et quel segment ce sera vérifié ?"
Y : "a et b."
Ex : "Oui d'accord, mais si je prend un carré, il n'y a pas de commune mesure entre quoi et quoi ?"
G : "Entre la diagonale et le côté."
Ex : "Entre une diagonale et un côté. C'est exactement à ça que je voulais arriver. Dans le première activité, vous avez dit, et c'est normal, qu'il y avait forcément une commune mesure à tous les segments. C'est vrai pour certaines mesures de longueur. Mais on vient de démontrer géométriquement et on verra l'interprétation numérique dans l'activité suivante, là on a cherché une commune mesure entre a et b on a vu que b était contenu qu'une seule fois et qu'il y avait un reliquat ; une commune mesure entre c et b , elle n'existe pas non plus parce que c est contenu 2 fois dans b mais avec un reliquat et ainsi de suite ... Tout ça pour quoi, parce qu'à un moment si on avait trouvé un nombre de fois exact un segment dans un autre, en remontant, on serait arrivé à une commune mesure entre a et b. Or ce n'est pas le cas parce que ça s'arrête jamais ; ça veut dire qu'il n'y a pas de commune mesure entre a et b ou entre l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle et les deux autres côtés ou la diagonale d'un carré et un côté. Vu que ça ça va à l'infini, il n'y a pas de commune mesure.

Les grecs de l'antiquité considéraient que tous les segments pouvaient être mesurés en même temps parce qu'ils ne connaissaient uniquement que les nombres entiers naturels. Même les fractions telles que vous les connaissez vous leur étaient inconnues. Ils travaillaient en géométrie et surtout, ils ne connaissaient pas quoi ?"
Y : "Les racines carrées."
Ex : "C'est ce qu'on va voir maintenant. Ils ne connaissaient pas les racines carrées. En géométrie, ils trouvaient qu'il n'y avait pas de mesure commune entre la diagonale et le côté d'un carré, mais au niveau de l'arithmétique, il n'y avait pas de nombre qui correspondait à ça, et donc ils ne comprenaient pas. Ils arrivaient à un paradoxe, ils ne connaissaient pas ces nombres. Et vous, on peut penser que c'est normal que vous disiez qu'entre deux segments il y a forcément une commune mesure, une même unité qui mesure exactement les deux segments parce que pendant très longtemps, on a considéré que c'était vrai. Mais il y a des cas où il n'y a pas de commune mesure.

b) Analyse *a posteriori*

La troisième égalité est rapidement obtenue car une élève avait réfléchi chez elle. Mais pour l'inégalité suivante, il a été inévitable que nous reprenions la main. Cela mêlait à la fois des raisonnements géométriques et algébriques. L'application de l'inégalité triangulaire a posé problème. Les élèves ne l'utilisent plus qu'en classe de cinquième. A la deuxième occurrence de la démonstration, les élèves semblent plus à l'aise, ils ont appris entre temps. En fait, cette démonstration est menée du début jusqu'à la fin par l'expérimentateur mais nous pouvons objectivement penser que les principales conclusions ont été données par les élèves. Le fait qu'ils aient pensé que le processus se déroule à l'infini laisse penser qu'ils ont une approche de la figure géométrique autre que lorsqu'ils disaient qu'à un moment, pour mesurer, on ne verrait plus rien. De plus, ils ont pris réellement conscience qu'il peut ne pas exister de commune mesure entre deux longueurs. Les deux objectifs sont atteints. Pour finir là dessus, nous ne savons pas si des études précises ont été entreprises au sujet des réponses que des élèves donnent et qui peuvent paraître, au premier abord, incompréhensibles et incohérentes, mais il serait utile sans doute de tenter de comprendre certaines de ces réponses. Pour D, c'est, semble-t-il, le mot égalité employé dans un contexte faisant apparaître des triangles qui lui fait penser au triangle équilatéral et pour G, la forme d'une égalité précédente dans laquelle ce trouve une somme de deux longueurs lui fait penser au théorème de Pythagore. Il y a confusion entre signifiant et signifié. Il serait intéressant également de faire comprendre aux apprenants les raisons de leurs erreurs, mais ce n'est pas le but de notre travail. En fait, cette démonstration est menée du début jusqu'à la fin par l'expérimentateur.

II.3 Troisième séance : le vendredi 10 janvier 2003 de 08h30 à 09h30.

II.3.1 Démonstration du théorème d'une droite parallèle à un côté (Annexe II 2)

* Démonstration dans le cas de division en trois parties égales (Activité II séquence 1.a)

a) Synthèse

Nous avons tout d'abord énoncé le théorème d'une droite parallèle à un côté d'un triangle. Nous avons demandé si les élèves avaient abordé ce résultat l'an dernier. Ce qui n'était bien sûr pas le cas et nous leur avons demandé à quel autre théorème il leur faisait penser.

M : "Egalité de trois rapports."
Ex : "Est-ce que là il y a trois rapports ?... Il n'y en a que deux. Deux à chaque fois, puisqu'il y a plusieurs couples de rapports égaux. Alors dans quel autre théorème de $4^{ème}$ on a l'égalité de deux rapports, puis après de trois ? A chaque fois la même, la même fraction."

Un long moment de silence s'est fait alors ressentir. Ils ne perçoivent pas le lien avec le théorème des milieux.

C : "Il y a le théorème de Thalès."
Ex : "Dans la version que vous avez vue l'en dernier, il n'y avait pas uniquement l'égalité de deux rapports , mais de trois."
A : "La droite des milieux."
Ex : "Bien, le théorème de la droite des milieux, oui. Et ce rapport, il est égal à quoi dans le théorème des milieux ?"
A : "Un demi."

Nous disons alors que nous allons démontrer ce théorème dans le cas général puisque l'activité précédente l'impose en commençant par le cas où les rapports sont fractionnaires. Nous demandons ce qui est présent au départ dans le théorème des milieux et A nous répond un triangle et une parallèle passant par un milieu. Nous construisons le triangle ABC, la droite parallèle à (BC) passant par le milieu de [AB] et l'élève A rajoute qu'elle coupe [AC] en son milieu, que nous appelons E. Les élèves comprennent alors qu'il s'agit d'un cas particulier du théorème que nous avons énoncé précédemment. Nous leur demandons de citer des rapports égaux et l'élève C confond rapports égaux et longueurs égales en citant AD et DB. L'élève M cite alors AD/AB=AE/AC.

Ex : "Egal AE sur AC et c'est égal à quoi ?"
G : "DE sur BC."
Ex : "C'est vrai que c'est égal à ça mais pour le moment on se place dans le cas d'une parallèle, ici (DE), qui coupe deux autres côtés, les deux autres côtés c'est AB et AC, en segments proportionnels. C'est à dire ici AD sur AB égal AE sur AC et cette fraction c'est quoi ?"
M : "Un demi."

Nous demandons, toujours sur le côté AB puis sur le côté AC, de donner d'autres rapports égaux, ce qui est fait par l'élève M qui cite BD/AB=CE/AC=1/2.

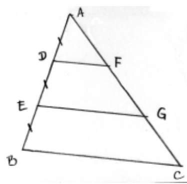
Ex : "Donnez moi une autre égalité qui traduit la proportionnalité de ces segments. (Flottement) Ce n'est pas difficile."
G : "Avec un demi ?"
Ex : "Non, pas forcément égal à un demi."
S : "BD sur DA."
Ex : "Oui BD sur DA, et ça c'est égal à ..."
Elèves : "CE."
Ex : "CE ou EC, c'est pareil, sur ?"
Elèves : "EA."
Ex : "EA et c'est égal à quoi ça ?"
G : "1."

Les élèves semblent avoir éprouvé quelques difficultés à évoquer d'autres rapports.

Ex : "Là, on a fait apparaître le rapport un demi. Un demi et ici un demi. Comment, dans un triangle ABC comme celui là faire apparaître des tiers ?"
G : "En ne mettant pas le point au milieu mais au tiers."
Ex : "Oui, mais comment justement on les placent ces points ?"
G : "On divise en trois."

Nous plaçons alors les deux points de division sur le segment [AB] et les élèves pensent à tracer les parallèles à (BC) passant par D et E. Ces deux droites coupent [AC] en F et G et l'élève G dit que l'on va démontrer que AF=FG=GC.

Ex : " Est-ce que l'on peut déjà démontrer que AF est égal à FG ?"
Trois élèves : "Oui."
Ex : "Oui, pourquoi et comment ?"
S et élèves : "On prend le triangles AEG."
Ex : "Oui et on fait quoi ?"
S : "Et on applique le théorème des milieux."



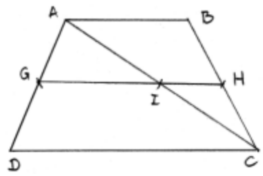
L'élève S rappelle les données qui permettent d'appliquer le théorème des milieux dans le triangle AEG. Encore une fois, une élève (D) confond données et conclusions en citant le fait que F est le milieu de [AG] comme étant une donnée. L'élève S rajoute que (DF) est parallèle à (EG).

Ex : " Est-ce qu'on sait dans ce cas là que la droite (DF) est parallèle à la droite (EG) ?"
G : "D'après le théorème des milieux."
Ex : "Non, non. Après on conclura avec le théorème des milieux. Mais là vous dites que la droite (DF) est parallèle à la droite (EG), il faut juste rajouter un argument. On a tracé la parallèle à la droite (BC) passant par D et une deuxième droite parallèle à la droite (BC) mais passant par E. Comment déduire que (BF) est parallèle à (EG) ?" *Puis après de longues secondes :*
M : "Parce qu'ils sont tous les deux parallèles à (BC)."

Les élèves concluent alors que F est le milieu de [AG] et que ainsi AF=FG. Ils disent alors qu'il reste à démonter que FG=GC, c'est à dire que G est le milieu de [FC].

Ex : "Est-ce qu'on a un théorème qui permette de dire que G est le milieu du segment [FC] ?"
C : "Le théorème des milieux."
Ex : "Le théorème des milieux ; il s'applique où le théorème des milieux ?"
Elèves : "Dans un triangle."
Ex : "Dans un triangle, et ici vous voulez l'appliquer dans quel triangle ?"
Ex : "E c'est le milieu de [BD], est-ce que là on a un triangle ?
G : "Non, un trapèze."
Ex : "Oui, et c'est un résultat que l'on démontrera. On va démontrer un théorème lié au trapèze."

Nous construisons alors la figure ci-contre. ABCD est un trapèze. On trace la droite parallèle à (DC) passant par G milieu de [AD]. Elle coupe (BC) en H. Nous traçons ensuite la diagonale (AC) qui coupe (GH) en I. Les élèves trouvent d'eux-mêmes qu'ils vont devoir démontrer que I est le milieu de [BC]. La sonnerie a retenti après que nous ayons rappelé les données du problème.



b) Analyse *a posteriori*

Les élèves ont bien mis en rapport le théorème des milieux et le théorème d'un droite parallèle à un côté d'un triangle. Dans le cas présent comme en quatrième, la proportionnalité n'est pas spontanément associée par les élèves à des égalités de rapports de mesures de longueurs.
Mais ils ont tout de même le réflexe de citer l'égalité de trois rapports alors que le théorème dont nous parlons fait apparaître l'égalité de deux rapports. Cela est bien sûr naturel car la propriété qui a été étudiée l'année précédente mettait en évidence l'égalité de trois rapports.
Dans la suite, pour le partage de [AB] en trois, les élèves ont eu rapidement l'idée d'appliquer le théorème des milieux dans le triangle AEG. De longues minutes ont été nécessaires pour parvenir à l'utilisation de la propriété supposée être disponible de deux droites parallèles à une troisième droite.

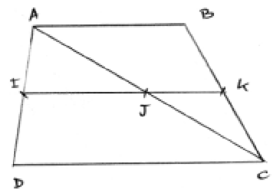
Il est curieux de voir que les élèves, en ce qui concerne le théorème de la droite parallèle à un côté, n'ont pas l'idée de construire la parallèle à ce côté de l'autre côté du sommet en commun au deux derniers côtés du triangle.

II.4 Quatrième séance : le mardi 14 janvier 2003 de 15h00 à 16h00.

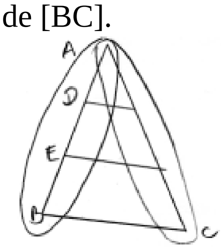
* Suite de la démonstration dans le cas de division d'un côté en trois parties égales

a) Synthèse

Au début de cette séance nous avons rappelé le dessin que nous avions obtenu à la fin de la dernière séance. Nous avons indiqué ce qui était déjà démontré c'est à dire AF=FG et ce qui restait à démontrer, c'est à dire FG=GC. Les élèves M et S appliquent seuls deux fois le théorème des milieux dans les triangles ADC et ABC et obtiennent d'une part que I est le milieu de [AC] puis d'autre part que H est le milieu de [BC].



Nous retournons ensuite à la figure 1, séance 3. Les élèves appliquent le résultat qu'ils viennent de démontrer dans le trapèze DFCB, arrivent à la conclusion immédiate que FG=GC puis en concluent que AF=FG=GC. Nous leur demandons ensuite de trouver des égalités de rapports en désignant tout d'abord le côté AB puis le côté AC. Quelques secondes de réflexion ont été nécessaires.



G : "AE sur ..."
Ex : "AE sur ... essayez de partir du même point."
Elèves : "AE sur AB."
Ex : "AE sur AB ça va être égal à quoi de l'autre côté ?"
Elèves : "AG sur AC."
Ex : "Et ce sera quelle fraction ?"
G : "Deux sur trois."
Ex : "Deux tiers. AE c'est un et deux et AB c'est trois ; AG c'est un et deux et AC c'est trois. Donnez moi une autre égalité.
G : "AF sur AC est égal à AD sur AB."
Ex : "Et c'est égal à ..."
G : "Deux tiers."

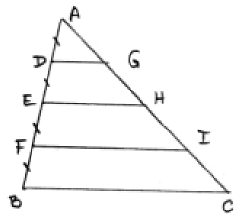
Nous leur demandons de partir de B et ils trouvent que BD/BA=CF/CA=2/3. Ils trouvent également que AE/EB=AG/GC=2/1=1.

Ex : " Est-ce que la longueur AE est égale à la longueur AG ?"
Certains élèves : "Oui".
Ex : "Bien sûr que non ... Est-ce que la longueur AE est égale à la longueur AG ? C'est les rapports qui sont égaux."
G : "Ah oui, oui !"
Ex : "On a AE sur AB qui est égal à AG sur AC. Là on a la même unité pour mesurer AE et AB et là on a une autre unité pour mesurer AG qui est égal à deux et AC qui est égal à trois, mais c'est pas la même unité."

<u>* Division d'un côté en quatre parties égales</u>

<u>a) Synthèse</u>

Nous leur disons ensuite que nous allons le faire pour quatre. Ils exécutent la figure. Un élève dit que nous allons appliquer le théorème des milieux dans le triangle AEH. Plusieurs élèves rappellent oralement les conditions d'application de ce théorème dans ce triangle AEH ; D est le milieu de [AE] les droites (DG) et (EH) sont parallèles car toutes les deux parallèles à (BC) donc G est le milieu de [AH] et ainsi AG=GH.



Ex : "G est le milieu de [AH]. Alors ensuite ...?"
K : "Un trapèze."
Ex : "Parlez plus fort."
K : "DGIF."

Les élèves relèvent tout à fait justement les données de la figures qui permettent d'appliquer le théorème dans le trapèze et concluent que H est le milieu de [GI] et que par conséquent GH=GI.

Ex : "GH = HI et là DE = EF. Ensuite."
Elève : "Dans le trapèze EHBC."
Ex : "EHBC ce n'est pas un trapèze. EHBC c'est un quadrilatère croisé."
M : "EHCB."

Comme précédemment, ils donnent tous les éléments permettant de conclure que I est le milieu de [HC] et ainsi HI=IC. M et d'autres : concluent que nous avons démontré que AG=GH=HI=IC. Nous leur demandons de donner ensuite des rapports égaux, les uns pris sur [AB] et les autres sur [AC]. Sur le dessin 3, nous entourons le segment [AB] et le segment [AC] pour bien mettre en évidence les deux côtés sur lesquels doivent êtres prises les mesures pour former les rapports en question. Ils donnent tout d'abord le rapport AD/AE=AG/AH= :

C : "Deux tiers."
Ex : "Non."
Elèves : "deux quarts."
Ex : "Deux quarts. A quoi est égal le rapport AD sur DB ?"
Y : "AG."
Ex : "AG sur ?"
G : "Sur GC."
Ex : "Egal ?"
G : "Un sur trois."

Nous avons demandé s'ils voulaient le démontrer pour cinq, ce qu'ils ont refusé comme nous l'attendions.

<u>* Cas rationnel et décimal</u>

Les élèves ont du mal à répondre à la question du type de nombre concerné par cette démonstration. Bien que le mot ne soit pas au programme, une élève va employer le terme rationnel et la place de l'expression nombre fractionnaire.

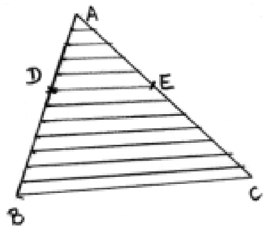
G : "Rationnels."

Ex : "Rationnels mais le terme exact pour vous c'est fractionnaire. Ici, quand on a divisé en quatre, on a obtenu, entre autre des quarts ; en trois des tiers, et en cinq ça serait pareil.

Nous prenons alors un point D est tel que AD/AB=5/12. La question est de démontrer que AE/AC=5/12 en adaptant la méthode précédente. Curieusement la méthode n'est parvient pas rapidement à l'esprit des élèves. L'élève G cite le théorème des milieux alors que pour le moment aucun milieu n'est apparent

Ex : "Comment modifier le dessin pour pouvoir appliquer ce type de méthode que nous avons utilisée pour 3, 4 ? (Flottement) AD sur AB est égal à quoi ici ?"
M : "Un sur quatre."
Ex : "Un sur quatre. A quoi est égal AE sur AB ?"
G : "Deux sur quatre."
Ex : "Deux sur quatre. A quoi est égal AF sur AB ?"
G : "Trois sur quatre."
Ex : "Comment on va pouvoir se ramener à ce type de figure adaptée à ce cas là ? (5/12)
M : "En traçant des droites parallèles."

Ils tracent alors onze parallèles à partir de points divisant [AB] en douze segments de même longueur. Nous leur disons que si les calculs des longueurs ne tombent pas juste, il faut précéder par approximations. Les élèves trouvent alors l'idée d'appliquer d'abord le théorème des milieux puis le théorème du trapèze successivement, en "descendant". Nous prenons alors pour valeur du rapport 0,6.



Ex : " Cette méthode là que l'on a utilisé lorsque l'on a divisé en 4, ou en 3, s'applique pour des douzièmes.
Par exemple, si on avait un rapport AD sur AB égale 0,6. On prendrait quoi ? (Flottement) On diviserait en quoi ?"
G : "Euh, six sur dix."
Ex : "C'est six sur dix. Mais le côté du triangle, on le diviserait en combien ?
G : "En dix."

Les élèves effectuent la démonstration oralement. Puis, nous posons la question de savoir si tous les segments ont une mesure fractionnaire.

Ex : "Est-ce qu'on a tout le temps un rapport AD sur AB égal à un fraction ?"
G : "Oui."
Ex : " Qu'est ce que cela voudrait dire si AD sur AB était toujours égal à une fraction ?"
G : "C'est rationnel."
Ex : "Oui et est-ce que tous les rapports sont rationnels ? Est-ce que les rapports de deux longueurs sont tout le temps rationnels ?"
Elèves : "Non."
Ma : "Ils n'ont pas de diviseur commun."
Ex : "Donnez moi un exemple."
G : "PGCD."
Ma : "Des fractions irréductibles."
Ex : "Une fraction irréductible, c'est quand même une fraction !"
G : "Un triangle avec un côté et un côté ..."
Ex : "Un triangle ... Est-ce que deux longueurs ont toujours un rapport rationnel ?"
Elèves : "Non."
Ex : "Donnez moi un contre exemple sinon."
A : "Le côté d'un carré avec la diagonale."

Nous rappelons en effet qu'ils ont produit deux démonstrations à ce sujet. L'une géométrique et l'autre arithmétique. Répondant à une question l'élève G dit que la diagonale d'un carré de côté 1 mesure racine de 2.

Ex : "Est-ce que racine de 2 est rationnel ? Est-ce que c'est une fraction ? On l'a démontré dans le cours sur l'arithmétique."
Elèves : "Non."
Ex : "Racine carrée de deux ne s'écrit par a sur b. Si vous faites le côté sur racine de deux, il ne peut être égal à une fraction. $\sqrt{2} \neq a/b$."

<u>b) Analyse *a posteriori*</u>
<u>* Division en trois segments de même longueur</u>

Les élèves ont trouvé seuls, sans réelles interventions de notre part, la démonstration du théorème dans le trapèze. Ils ont également appliqué ce nouveau théorème dans la figure BDFG pour parvenir finalement à l'égalité des trois longueurs cherchée. Cet objectif a été bien atteint. Les différentes égalités ont été trouvés rapidement. Nous notons que douze élèves participent ce qui est beaucoup plus qu'en quatrième.

En ce qui concerne le fait de ne pas obligatoirement employer la même unité pour mesurer des longueurs dont on compare ensuite les rapports a dû être expliqué. Nous avons pris la main et peut être aurait-il été possible d'être un peu moins directif à ce niveau ?

* Division en quatre segments de même longueur

Les élèves ont su appliquer le théorème des milieux dans un triangle puis ils ont eu l'idée d'appliquer le théorème du trapèze. Mais, à l'inverse des élèves de quatrième, ils ont choisi un trapèze se chevauchant avec le triangle précédent. Si leur premier choix s'était porté sur le trapèze EHCB et non sur le trapèze DGIF, la démonstration n'aurait pas pu être menée à bien. Nous pouvons remarquer que la méthode de démonstration semble comprise par certains élèves. Les égalités de rapports de mesures de longueurs ont été trouvées facilement. Mais les élèves ont eu du mal à répondre à la question liée au type de nombres pour lesquels la démonstration serait reproductible.

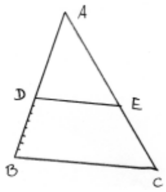
* Rapports fractionnaires et décimaux

La généralisation de cette méthode de démonstration aux fractions n'est pas venue spontanément en particulier l'idée de tracer des parallèles à partir des points de divisions entières. Par contre, une fois ces parallèles tracées, la démonstration utilisant le théorème des milieux et le théorème dans le trapèze est très bien appliquée. Pour le rapport égal à 0,6, le lien avec la fraction un dixième a été très rapidement fait et la suite, grâce à l'exemple cinq douzième, également. Le fait qu'un rapport de deux mesures de longueurs puisse ne pas être rationnel n'a pas été évoqué par les élèves. Les liens entre les différents cours sont difficiles à établir par les élèves. De plus, ils ne semblent pas être suffisamment familiarisés avec les nombres irrationnels même si le souvenir de racine de 2 se rappelle à eux.

* Cas irrationnel (Activité II séquence 1.b)

a) Synthèse

Nous allons démontrer le théorème dans le cas général. Les élèves produisent le dessin demandé avec ABC un triangle, D un point de [AB] tel que AD et BD ne puissent pas être mesurées avec la même unité car si c'était le cas nous nous retrouverions dans le cas précédent. Ils partagent [BD] en n parties égales et reportent une de ces parties autant de fois que possible dans AD.



Ex : "Est-ce que ça va rentrer un nombre de fois exact, entier dans [AD] ?"
G : "Non."
Ex : "Pourquoi ? D'après les hypothèses de départ. On a partagé BD en n parties égales. Pourquoi une de ces longueurs ne rentrerait pas un nombre de fois exact entier dans AD ?"
G : "Parce que c'est une longueur quelconque."
Ex : "Non, c'est pas ça qu'on a dit au départ. Qu'est-ce qu'y arriverait s'il y avait un nombre exact de petits segments dans AD ?"
G et d'autres : "Il y aurait une commune mesure."
Ex : " Ce qui veut dire que lorsque l'on reporte, il reste un petit segment qui sera plus petit que cette longueur de segment là, pourquoi ?"
Elèves : "Car sinon, on pourrait en faire un de plus."

II.5 Cinquième séance : le mercredi 15 janvier 2003 de 11h30 à 12h30.

a) Synthèse

Nous rappelons en début de séance le dessin de la fois précédente. Nous supposons que [BD] contient n petits segments de longueur λ et que [AD] en contient m plus un petit bout.

Ex : " La mesure de BD elle est égale à quoi ? Si on veut calculer BD ?"
Elèves : "BA - AD."
Ex : "Sans ces lettres là, on veut la mesure de la longueur BD."
Elève : "n."
Ex : "Non, n c'est le nombre de segments. De ces petits segments, il y en aura combien dans BD ?"
Elèves : "n."
Ex : "n."
G : " $n \times \lambda$."
Ex : " $n \times \lambda$; ce petit segment mesure λ et il y en a n dans BD donc la mesure de BD c'est $n \times \lambda$. Bien, maintenant réfléchissez, AD il va être compris entre deux longueurs.

Nous écrivons alors au tableau la double inégalité suivante : < AD <. Ce qui a été dit ensuite est suffisamment important pour que nous le reproduisions intégralement.

Ex : "C'est plus grand que quoi déjà ?"
P : "n fois λ ."
Ex : "Et non pas n, il y en a combien de petits segments dans AD ?"
Elève : "m."
Ex : "Donc AD sera plus grand que ...?"
R : " $m \times \lambda$."
Ex : "C'est plus grand que m fois λ et c'est plus petit que ...? (Flottement) C'est plus grand que m fois λ puisqu'il reste ça là ; mais c'est plus petit que quoi par contre ? (Flottement) Mais toujours en ne faisant intervenir que ces deux lettres m et λ , c'est plus petit que quoi ?"
G : "Plus petit que λ ."
Ex : "Non, c'est pas plus petit que λ puisque λ c'est ça donc AD c'est pas plus petit que λ ."
G : "AD plus petit que $m \times \lambda + m \times \lambda$."
Ex : "C'est vrai mais quelque chose de plus précis encore. C'est vrai ça mais je veux quelque chose de plus précis pour encadrer AD. C'est plus grand que m fois λ mais plus petit que ... AD contient m segments de longueur λ mais il n'en contient pas combien ?"
Elève : "n."
Ex : "On ne sait pas forcément lequel est le plus grand entre n et m. Il en contient m mais on sait qu'il n'en contient pas exactement combien ?"
G : "Zéro."
Ex : "Non pas zéro. Ici qu'est-ce qu'on aurait pu faire ?"
C : "Ah oui ! m+1."
Ex : "m+1 parce que là il y a m et là il reste quelque chose de plus petit que ce segment donc il n'en contient pas m+1. Donc c'est inférieur à quoi maintenant ? ça c'est le nombre de segments, je veux la mesure maintenant."
G : " $m \times \lambda + 1$."
Ex : " $m \times \lambda + 1$, non."
G : "+ $1 \times \lambda$."
Ex : "oui, $m \times \lambda + 1 \times \lambda$, ça peut s'écrire comment aussi ?"
G : " λ facteur de (m+1)."
Ex : "Bien. La mesure de la longueur AD est supérieure à $m \times \lambda$ car elle contient m segments entiers et il reste un reliquat qui est plus petit et pourquoi il reste ce quelque chose ?"
C : "Sinon elles auraient la même longueur."
Ex : "Non, ils n'auraient pas la même longueur."
Elèves : "On pourrait les mesurer avec la même unité."
Ex : "Oui, ce qui n'est pas vrai puisque l'on part justement avec l'hypothèse inverse."

Nous récapitulons les résultats sur BD et AD et nous leur demandons ce que nous obtenons si nous divisons AD par BD ? Les élèves donnent l'encadrement de cette fraction littérale : $m\lambda / n\lambda$ < AD/BD < $(m + 1)\lambda / n\lambda$. Ils pensent d'eux-mêmes à simplifier par λ .

Ils tracent ensuite, comme nous, toutes les parallèles à la droite (BC).

Les calculs se sont plutôt bien déroulés. La grande difficulté a été de trouver l'encadrement et plus précisément le membre de droite de la double inégalité. Après que nous ayons posé une question, l'élève G puis d'autres élèves considèrent, d'après un résultat précédent, que les petits segments définis par ces parallèles, que ce soit sur AE ou sur EC, sont de même longueur.

Nous avons dû prendre la main et montrer que ce n'est pas le cas. Après avoir dit que les segment égaux découpés par les parallèles sur AC mesurent par exemple non pas λ mais λ', les élèves ont trouvé facilement l'encadrement de AE/EC, c'est à dire le même que celui de AD/BD.

Ex : " Si on a un nombre x qui est inférieur à un nombre y. Comment est le nombre - x par rapport à - y ?"
G : "Supérieur."
Ex : "Supérieur à ...?"
G : "- y."

Après cette mise au point par rapport aux opposés, une élève a trouvé l'encadrement voulu sans aide extérieure. Mais lorsqu'il a fallu additionner membre à membre les encadrements, comme attendu, l'expérimentateur a pris la main et les difficultés se sont faites ressentir. Malgré tout, la même élève a trouvé les deux inégalités.

Ex : "Si on a ça -1/n < DA/DB - EA/EC < 1/n que peut-on en déduire ? Est-ce que quelqu'un aurait l'intuition du résultat ? Si on a DA/DB - EA/EC compris entre - un sur n et un sur n ? Plus n grandit plus un sur n va faire quoi ?"
G : "Rapetisser."
Ex : "Oui, par exemple, n = 10   100   1000   10000, un sur n sera égal à quoi pour n égale dix ?"
Elève : "Un sur dix."
Ex : "Un sur dix, c'est à dire ?"
G : "0,1."
Ex : "ça signifie quoi ça ?" (Flottement)
G : "Plus n est grand et plus ce qui restera sera petit."
Ex : "Sera plus petit oui, et même on peut dire précisément. On va vers où ?"
M : "On tend vers zéro."

En prenant des exemples, nous expliquons alors que cela signifie que cette différence peut être rendue aussi proche de zéro que l'on veut. Nous demandons aux élèves ce qu'ils peuvent en déduire, mais un long moment d'hésitation s'en est suivi. Une élève dit que cela signifie que la différence est très petite, puis que la différence est presque nulle, et finalement, devant la difficulté, nous avons dit qu'en fait la différence est nulle et que dans ce cas il y a égalité. Nous avons expliqué que si la différence de deux nombres x et y peut être rendue aussi petite que l'on veut cela signifie que ces deux nombres sont égaux. Les élèves ont conclu que cela généralisait la démonstration du théorème : une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels. Après avoir rappelé que nous avons montré que DA/DB = EA/EC, nous avons demandé aux élèves de trouver d'autres égalités de rapports. Sans hésitation, deux élèves ont donné les deux autres égalités.

b) Suite analyse *a posteriori*

* Rapports irrationnels

Les élèves ont bien compris le fait que AD et BD n'admettent pas de commune mesure. Ils ont réussi à mesurer BD mais ils ont eu de grandes difficultés à encadrer la mesure de AD. Ils ont confondu et mélangé mesure et nombre de petits segments. Nous pensons que cela vient peut-être du fait que la mesure des grandeurs et plus particulièrement des longueurs n'est plus un point fondamental dans les programmes.

La grande difficulté a été de trouver l'encadrement et plus précisément le membre de droite de la première double inégalité, c'est à dire de l'encadrement de AD. Le théorème démontré pour les fractions a été correctement appliqué mais l'encadrement de AE/EC n'a pas été immédiat. De plus, il semble qu'un théorème en acte soit lié à cette activité : de nombreux élèves ont considéré que la projection conserve les mesures de longueur.
En ce qui concerne l'encadrement du rapport opposé, nous avons été obligés d'être encore plus directifs que prévu, mais une élève l'a tout de même trouvé seule. L'addition membre à membre a posé moins de problèmes que prévu. Ce qui est remarquable est le fait que certains élèves ont de suite compris que cela signifiait que la différence tend vers zéro. Il est tout de même assez extraordinaire qu'un élève de troisième, même en ayant été mis sur la voie, trouve l'idée que l'enca-

drement précédent engendre que la différence tende vers zéro, surtout en ces termes. Vu la difficulté du concept en jeu, nous avons dû être plus directif dans les questions et les informations que nous avons transmises. L'idée n'est bien sûr pas naturelle et même après avoir donné la réponse il est bien évident que les élèves ne l'ont peut-être pas comprise.

II.6 Sixième séance : le vendredi 17 janvier 2003 de 08h30 à 09h30. (Annexe II 3)

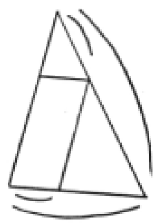
* Démonstration du théorème sur l'égalité de trois rapports (Activité II séquence 2)

a) Synthèse

Nous rappelons le résultat qui a été démontré au cours de la séance précédente et nous disons aux élèves que nous allons démontrer un théorème qui en sera une conséquence. Nous leur demandons de réutiliser le dessin précédent en y rajoutant le point F intersection de la droite parallèle à (AB) et passant par le point E avec la droite (BC). Nous demandons à savoir comment nous allons pouvoir démontrer la première égalité AD/AB=AE/AC. Les élèves semblent réfléchir pendant une trentaine de secondes. L'élève S évoque le théorème des milieux mais nous montrons que nous n'avons pas de milieu ici. P dit que c'est parce qu'il y a des perpendiculaires. Ces interventions sont curieuses.

C : "AD sur AB moins AE sur AC, c'est égal à zéro."
Ex : "D'après quel théorème, d'après quelle propriété ?"
M : "Le théorème des droites parallèles."

Nous désignons les trois rapports que demeurent inscrits au tableau et qui concernent la démonstration précédente : AD/DB = AE/EC (1) ; AD/AB = AE/AC (2) ; BD/AB = CE/AC (3). Les élèves A et M choisissent les droites parallèles (DE) et (BC), rappellent les conditions d'application du théorème et en déduisent que AD/DB = AE/EC (1). Nous demandons aux élèves comment ils vont démonter que AE/AC=BF/BC ? Finalement A dit que c'est parce que (EF) est parallèle à (AB) et que donc ça coupe en segments proportionnels. Elle rappelle alors les données qui permettent effectivement d'appliquer le théorème dans cette nouvelle figure, ce que nous écrivons au tableau comme d'habitude, puis elle donne la première égalité de rapport : CE/CA=CF/CB, puis à notre demande, une deuxième : AE/AC=BF/BC (2). Nous joignons encore une fois le geste à la parole en désignant les segments en question sur la figure du tableau.



Ex : "De ces deux égalités (1) et (2), qu'est-ce qu'on va en déduire ?"
S : "Que AD sur AB égale BF sur BC."
Ex : "Très bien ; là, dans ces deux égalités, on a ce rapport qui est en commun. Si on a deux nombres, si on a x qui est égal à y et y qui est égal à z qu'est ce qu'on en déduit ?" x = y et y = z
A : "x est égal à z."

Nous leur demandons, en remarquant la manière dont a été construite la figure, comment ils vont pouvoir démontrer que AD/AB=DE/BC. Un long silence s'est fait ressentir. Encore une fois les élèves ont du mal à rendre disponibles des connaissances antérieures. Mais la réponse est tout de même apparue.

Ex : "Comment on peut en déduire que BF sur BC égale aussi DE sur BC ?"
Ma : "Parce que les droites (DE) et (BF) sont parallèles et (BD) est parallèle à (EF)."
Ex : "Et donc ...?"
Ma : "Et donc le segment [DE] est égal au segment [BF]."
Ex : "Non, pas segment. Il faut être plus rigoureux. La longueur DE est égale à la longueur BF, pourquoi ? Qu'est-ce qui est parallèle à quoi ?"
Ma : "(BD) est parallèle à (EF)."
Ex : "<u>(BD) et (EF) sont deux droites parallèles</u>, on les a tracées comme ça. Qu'est-ce qu'on peut en déduire de ça?"
A : "La figure BDEF c'est un parallélogramme."
Ex : "Oui, <u>Donc BDEF est un parallélogramme</u> et de ça Marine, qu'est-ce qu'on en déduit ?"

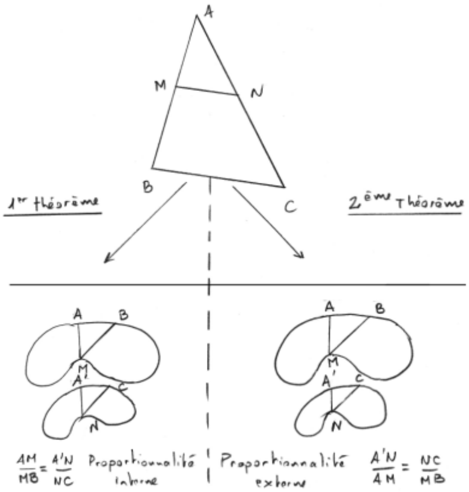
Ma : "DE égale BF."

La conclusion générale sur l'égalité des trois rapports a été donnée ensuite. Puis, nous avons dit que nous allions rédiger l'énoncé de ce théorème. Comme d'habitude, les élèves sont partis de propriétés vues sur le dessin ayant servi de support à la démonstration, comme le fait que (DE) est parallèle à (BC) sans avoir défini dans le théorème les points en question. M propose de partir d'un triangle ABC et de la droite (DE) parallèle à (BC). Nous montrons alors que le point D n'est pas connu encore dans l'énoncé du théorème. Nous prenons l'exemple d'une droite parallèle à la droite (BC) mais ne coupant pas les deux autres côtés. Finalement l'élève M convient que le point M est sur le segment [AB], que le point N est situé sur le segment [AC]. L'élève R rajoute que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Puis les élèves hésitent. L'élève A donne finalement les trois rapports qui sont égaux. Nous engageons alors la comparaison des deux résultats.

<u>* Comparaison des deux théorèmes</u>

<u>a) Synthèse</u>

Nous avons commencé à écrire et à dessiner au tableau ce qui se trouve ci-dessous. Au fur et à mesure, nous complétons la partie de gauche avec les égalités que les élèves trouvent puis la partie de droite. Cette figure qui est complète ici, a été en fait complétée au tableau au fur et à mesure.
L'élève S nous rappelle les trois égalités de rapports que le premier théorème permet d'écrire. Nous les inscrivons au tableau. L'élève N nous donne ensuite les trois rapports qui sont égaux dans le second théorème que nous venons de démontrer. Lorsque nous demandons s'il est possible d'écrire au premier théorème que le rapport MN/BC=AM/MB les élèves répondent collectivement non. Nous leur disons que nous allons justement tenter d'en comprendre la raison. Ils doivent alors dessiner une figure et une deuxième plus petite de même forme, comme ci-contre.



<u>b) Analyse *a posteriori*</u>

<u>* Démonstration du théorème sur l'égalité de trois rapports</u>

Curieusement, l'application du théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle n'est pas venue rapidement à l'esprit des élèves. Nous pouvons même dire que les premières interventions ont été fantaisistes. Mais ensuite, la première application a été bien faite. Il a fallu que nous réfrénions M car il donnait les réponses trop rapidement empêchant les autres de participer et remettant parfois en cause le bon fonctionnement des activités. En effet, nous pouvons craindre que des interventions trop prématurées engendrent le fait que les objectifs ne soient pas atteints par tous les autres élèves. La seconde application du théorème a été tout aussi bien faite par une autre élève. Finalement, la transitivité de l'égalité n'a pas posé problème mais nous avons tout de même voulu rappeler cette propriété dans le cas général.

La propriété du parallélogramme utile pour la suite de la démonstration n'a pas été évoquée facilement. Mais elle a permis de conclure tout de même.

Nous pouvons remarquer encore une fois que les élèves ont du mal à comprendre que la rédaction d'un théorème que l'on vient de démontrer doit passer inévitablement par la construction et description complète et précise de la figure. Pour pallier cette difficulté et pour savoir si les élèves sont capables de retrouver les rapports précédents avec de nouvelles lettres, nous remplaçons les points D et E par M et N. Cette remarque a été faite pour la classe de quatrième. Nous pouvons peut-être la rapprocher de la façon dont sont rédigés les théorèmes actuellement au collège et plus particulièrement le théorème de Thalès. De nombreuses références à des propriétés lues sur les dessins sont faites dans les énoncés des propriétés. Il est peut-être alors logique que les élèves aient du mal à distinguer ce qui est acquis de ce qui reste à définir dans la rédaction d'un énoncé de théorème.

<u>* Comparaison des deux théorèmes</u>

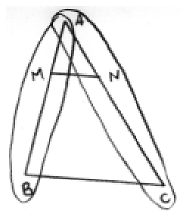
Il apparaît clairement dans la partie basse du dessin 2 séance 6 bis qu'un autre choix de lettre aurait dû être fait pour désigner les points en question. La suite s'est faite à la séance suivante.

II.7 Septième séance : le mardi 21 janvier 2003 de 15h00 à 16h00.

<u>* Suite de la comparaison des deux théorèmes</u>

<u>a) Synthèse</u>

Après que nous ayons demandé la différence qu'il y a entre les deux rapports AM/MB et A'N/NC, plusieurs élèves ont répondu que AM et MB étaient sur le première et A'N et NC sur la seconde. Pour la deuxième figure, à droite, l'élève R a répondu que NC fait partie de la première figure et MB de la deuxième et que c'était la même pour A'N et AM. Nous avons alors expliqué le fait que les deux proportionnalités en question étaient différentes. On parle de proportionnalité interne pour la figure de gauche car pour former les rapports, nous prenons deux mesures de longueurs sur un même dessin et nous comparons aux deux mesures correspondantes dans l'autre dessin. Sur la figure de droite, nous parlons de proportionnalité externe parce que nous prenons une mesure d'une longueur sur un dessin et nous faisons le rapport avec la mesure correspondante sur l'autre. Comme à l'accoutumée, nous joignons le geste à la parole en utilisant les dessins qui se trouvent au tableau. Nous effectuons un dessin pour revenir à notre premier théorème. Et nous expliquons qu'ici ce qui joue le rôle de l'une des deux figures c'est le segment [AB] et ce qui joue le rôle de l'autre figure c'est le segment [AC]. Dans le premier théorème nous demandons aux élèves de quel type de proportionnalité il s'agit et plusieurs élèves répondent :

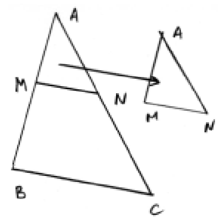


Elèves : "Interne."
Ex : "Interne, pourquoi ? expliquez moi par exemple pour ce premier rapport AM sur MB. Pourquoi interne, c'est interne à quelle figure ?"
G : "Au segment [AB]."

Nous disons alors que parler de proportionnalité interne ici, cela signifie que l'on prend deux longueurs sur le segment [AB], AM/MB et on a démontré que c'est égal au rapport des segments correspondants. Si on prend AM, le segment correspondant sur l'autre figure c'est AN et si on prend MB, le segment correspondant ici c'est NC. De même, si on prend BM/BA, c'est bien une proportionnalité interne, les deux longueurs sont internes au segment [AB], les deux longueurs correspondantes sur le segment [AC], c'est CN/CA. Les élèves doivent alors expliquer pourquoi, pour le second théorème, les rapports sont externes.

P : "ça appartient à un triangle."
Ex : "Lequel ?"
P : "ABC."
Ex : "D'accord mais euh..."
P : " et AMN."

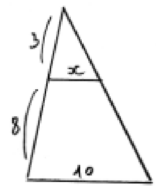
Pour expliquer nous disons que l'on a le grand triangle ABC et le petit que l'on a déplacé. On prend AM on divise par AB. On prend un côté du petit triangle et on fait le rapport avec le côté correspondant sur le grand triangle, ensuite on prend AN, une autre longueur sur le petit triangle et on fait le rapport avec la longueur correspondante sur le grand triangle. Et nous complétons en disant que jusqu'à présent, si on n'avait pas

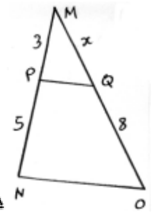


rajouté le dernier rapport, on pouvait considérer que c'est une proportionnalité interne, non pas aux triangles mais aux segments. Mais si on ajoute la longueur du troisième côté que l'on divise par la longueur correspondante du troisième côté prise sur le deuxième triangle, là ce n'est plus une proportionnalité interne au segment ici, mais une proportionnalité externe aux deux triangles, le petit et le grand. On prend une longueur sur le petit triangle et on la divise par la longueur correspondante, on prend une deuxième longueur et on la divise par la correspondante et on prend une troisième longueur et on divise par la correspondante.

Nous nous référons ensuite aux dessins 2 séance 6 bis initiaux pour expliquer les deux proportionnalités dans ces deux figures. Et nous revenons au dessin 2 séance 6ter pour leur demander à quelle proportionnalité font référence les rapports AM/MB et MN/BC. Les élèves semblent réfléchir une dizaine de secondes puis A répond les deux. Nous confirmons en effet que ces deux rapports ne sont pas égaux car MB n'est pas la longueur d'un côté d'un triangle alors que MN et BC sont des longueurs de côtés de deux triangles distincts, donc si on écrit AM/MB=MN/BC, on mélange les deux types de proportionnalités, l'une interne au segment, pour AM/MB et l'autre externe, au triangle.

Nous prenons le premier exemple ci-contre pour dire que même si cela est tentant, il n'est pas possible d'écrire que 3/8=x /10. Nous prenons ensuite la seconde figure et nous demandons si les égalités suivantes sont justes MP/MN = MQ/MO = PQ/NO. Les élèves répondent par l'affirmative.





Ex : "Oui, par contre ensuite lorsque vous remplacez, si vous mettez 3 sur 5 égale x sur 8, est-ce que c'est juste ?"
Certains élèves : "Oui."
D'autres : "Non."

Les explications données par A sont que dans ce cas ce n'est plus le deuxième théorème que l'on applique. Nous confirmons que la dernière égalité est vraie si le premier théorème est appliqué, sinon elle est fausse.

Ex : "Ça c'est un théorème et quand vous mettez en équation comme ça, s'en est un autre. Qu'est-ce qui faudrait écrire ici pour que ce soit en relation avec le théorème que vous avez commencé à appliquer ?"
Elève : "Trois sur huit."
Ex : "trois sur huit égale ?"
Elève : "Trois sur huit égale x sur x plus huit."
Ex : "Oui. Le premier intérêt, c'est de comprendre le théorème de Thalès, interne, externe, et le deuxième est que l'on obtient des équations plus simples à résoudre.

$3/5 = x/8$	$3/8 = x/x+8$
$3 \times 8/5 = x$	$3(8 + x) = 8 \times x$

Nous rappelons aux élèves les deux intérêts de cette double approche qui sont d'une part comprendre qu'il y a des égalités de rapports qu'il est impossible d'écrire, et d'autre part que les équations obtenues sont plus simples. Nous leur indiquons que lorsque toutes les longueurs qui concernent une question sont sur des côtés extérieurs aux triangles, il faut appliquer le premier théorème et dans le cas où deux longueurs concernent des segments "intérieurs" le deuxième doit impérativement être employé. Nous rajoutons qu'un écueil par contre serait de mélanger les deux théorèmes. Nous prenons plusieurs exemples.

b) Analyse *a posteriori*

* Suite de la comparaison des deux théorèmes

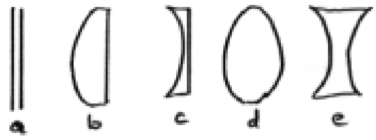
Comme annoncé, nous avons pris les explications à notre charge. Les élèves semblent avoir bien compris les deux types de proportionnalités et leurs applications aux deux théorèmes que nous venons de démontrer.

II.8 Huitième séance : le vendredi 24 janvier *2003 de 08h30 à 09h30. (Annexe II 4)*

a) Synthèse

* Mise au point en physique sur la lumière et les lentilles (Activité III)

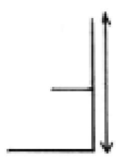
Nous avons énoncé en particulier le principe du retour inverse et la définition d'une lentille. Puis nous avons demandé aux élèves de réfléchir aux différents cas que l'on peut avoir de lentilles dessinées en coupe à l'aide de cette définition. Après un long silence, nous avons exécuté le dessins 1 séance 6 a) et nous avons demandé s'il s'agissait d'une lentille.



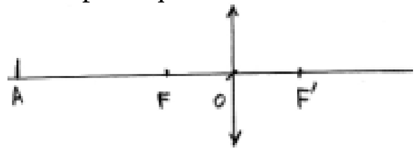
Les élèves ont répondu par la négative et, à ce moment-là, F exécute un geste des deux mains, la main droite descendant tout droit et la gauche représentant une surface en coupe courbée. Nous effectuons le dessin au tableau.
Nous leur demandons d'autres exemples et F dit "courbé à l'intérieur" et R "des deux côtés.
Nous disons que ce sont les quatre cas de lentille. L'une est convexe et l'autre concave, et doublement convexe et doublement concave. Nous explicitons les termes de foyer, d'objet, de foyer image, foyer objet ainsi que les différences entre lentilles convergentes et lentille divergente. Nous décrivons alors le matériel à leur disposition et nous demandons aux élèves de placer la source lumineuse, la lentille et l'objet. Nous leur disons alors que l'objet, qui est une lettre F découpé dans du métal, devra être vu correctement sur le carton, c'est à dire qu'il ne devra pas être flou. Pour cela, ils devrons trouver la bonne place de l'objet en accommodant. Lorsque nous employons ici le mot accommoder, nous faisons un geste de va et vient avec le bras pour signifier le sens de cette expression. Puis, ils devront prendre des mesures. Nous reproduisons au tableau une lettre F et nous désignons le trait vertical comme devant être l'objet des premières mesures au millimètre près. Ensuite, nous leur disons qu'ils mesureront la distance objet - lentille à l'aide de la rampe graduée, en prenant la distance à l'entrée de la lentille et à l'entrée du F et la distance lentille image. Nous remarquons que même si les manipulations n'ont pas commencé, toutes les rampes sont en place et les élèves ont déjà allumé les lampes, placés la lentille, l'objet et le carton recevant l'image.

* Expérience proprement dite

Nous avons demandé aux élèves de faire une première remarque au sujet de l'image et R a dit qu'elle était plus grande, ce qui était effectivement le cas. D'autres ont aussitôt dit qu'elle était renversée.
Nous avons tracé le dessin suivant en désignant le segment vertical sur l'image qui devait être mesuré. Tous les groupes ont obtenu les quatre mesures demandées même celui qui a eu un problème technique.

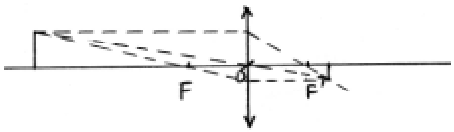


Ce qui a suivi a consisté à faire une mise au point par rapport aux schémas que les élèves ont élaborer au fur et à mesure avec nous. Ils ont dû représenter la situation. Nous expliquons la façon dont est représentée la lentille et nous désignons le centre optique O. Nous donnons l'information que tout rayon qui passe par le centre optique n'est pas dévié. Nous leur demandons de rajouter deux points F et F', qui sont respectivement le foyer objet et le foyer principal image, de façon à ce que le segment [FF'] ait pour milieu O et nous donnons ensuite la propriété d'un rayon incident parallèle à l'axe principal et celle d'un rayon émergeant parallèlement à l'axe principal. Avec cela, nous leur disons de tracer deux rayons pour voir apparaître l'image et pour comprendre pour quelle raison elle est renversée.

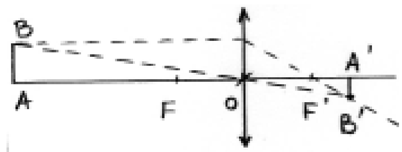


Ex : "Est-ce qu'un rayon qui passe par là (par l'objet au tableau)va atteindre la lentille ?
Elèves : "Non."
Ex : "Non, puisqu'il est arrêté. Par contre on admet qu'un rayon qui passera par l'extrémité atteindra la lentille. Un rayon qui passera par cette extrémité, il va émerger d'une certaine façon suivant la manière dont il arrive dessus. Trouvez le trajet d'un tel rayon qui passe par le centre optique. Sur votre schéma."

Les élèves ont travaillé seuls une minute. La trois groupes ont obtenu le dessin suivant, deux ont dessiné le numéro 7.



Nous avons effectué les deux dessins au tableau, puis nous avons tentés avec les élèves de situer les mesures qu'ils ont faites par rapport aux points de la figure 6. Il y a eu des mélanges mais finalement la distance objet - lentille, image - lentille, la mesure de l'objet et de l'image ont été bien replacées.



Les groupes ont donné ensuite leurs mesures, que nous avons consignées au tableau sous la forme ci-dessous, les uns après les autres. Certains élèves ont confondu les mesures entre elles, mais les confusions ont été rapidement rattrapées.

AB	1,6	1,5	1,5	1,7	1,6
$A'B'$	2,9	1	1,8	3,3	1,5
OA	15	15	15	8	15,5
OA'	26	8	25	12	14

A partir de ce tableau nous demandons d'essayer de trouver si, éventuellement, il n'y aurait pas une relation entre ces mesures. Après avoir entouré les deux premières colonnes, l'élève C et deux autres on trouvé : BA/A'B'=OA/OA'. Nous associons les gestes à la parole en désignant d'une part les nombres dans les deux premières colonnes puis d'autre part les longueurs sur le dessin. Les élèves désignent les droites (AB) et (A'B') comme étant parallèles.

b) Analyse *a posteriori*

* Mise au point en physique sur la lumière et les lentilles

Les élèves comprennent assez rapidement le fonctionnement des lentilles. Ils ont bien pris possession de leurs bancs optiques.

* Expérience proprement dite

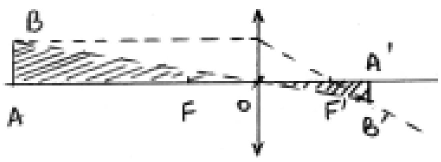
Pour la plupart des groupes, il a fallu dix minutes pour parvenir à prendre les mesures demandées. Pour deux d'entre eux, un incident technique a différé de quelques minutes cette opération. Il est à noter qu'un survoltage a fait griller deux ampoules qu'il a fallu remplacer, ce qui a constitué une perte de temps. Mais tous les groupes ont pris leurs quatre mesures. En ce qui concerne la modélisation, les élèves ont travaillé seuls mais ils ont été guidés pas à pas. Le schéma a été reproduit au tableau. Les élèves ont communiqué les mesures qu'ils ont prises. Mais pour faire apparaître des relations entre ces différents nombres, cela n'a pas été facile. Nous avons dû prendre la main. Voyant les élèves un peu perdus nous avons décidé d'être plus précis. Nous avons désigné et entouré au tableau noir les deux premières colonnes de nombres. Les rapports sont ensuite rapidement apparus. Mais remarquons encore une fois que le mot proportionnalité est encore absent. La remarque que nous avons émise pour la classe de quatrième est encore valable ici.

II.9 Neuvième séance : le mardi 28 janvier 2003 de 15h00 à 16h00. (Annexe II 5)

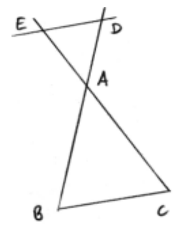
* Démonstration du théorème de Thalès (Activité IV)

a) Synthèse

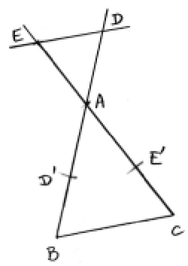
Nous commençons par rappeler le résultat et le schéma correspondant qui nous avions noté au tableau la semaine passée : BA/B'A'=OA/OA'.



Ex : "Est-ce que ça se rapproche d'un résultat qu'on a déjà vu ?"
Amna : "Le premier théorème."
Ex : "Le premier théorème ; dans ce cas là, on a deux triangles. En voilà un et en voilà un deuxième. On a cette longueur sur celle là égale à cette longueur sur celle là. Est-ce que cette proportionnalité est interne ou externe ?"
Elèves : "Externe."
Ex : "Et alors que pour la première c'était ?"
Elèves : "Interne."
Ex : "Interne, donc ça ressemble à quel théorème ?"
Elèves : "Le deuxième."
Ex : "Le second. C'est une nouvelle figure qui permettra d'appliquer un nouveau théorème qui prolongera ce qui vous avez vu dans le théorème précédent. Nous allons le démontrer maintenant. En fait le deuxième théorème plus celui là ce sera ça que l'on appellera le théorème de Thalès."



Nous débutons alors la démonstration du théorème dans la figure papillon qui correspond à l'activité II séquence 2. Nous commençons par aborder la question a). Les élèves effectuent le dessin comme nous le faisons nous-mêmes au tableau peu de temps après. Nous comparons la figure que nous obtenons en ce début d'activité avec le dessin 1 schématisant la séance sur les lentilles. L'élève Ma trouve de suite que sur le schéma de l'expérience avec les lentilles, les droites étaient perpendiculaires à une troisième. Nous disons qu'il s'agit d'un cas particulier.



Les élèves sont ensuite invités à placer les points D' et E' symétriques respectifs de D et A par rapport au point A. L'élève C dit que l'on prend la longueur EA avec le compas et "on la met là". Elle indique que l'on reporte la longueur EA à l'aide du compas sur le segment [AC].

Ex : "Que peut-on dire des droites (ED) et (E'D') ?"
C : "Elles sont parallèles."
Ex : "On le voit sur le dessin ... Mais en mathématiques, soit ce qu'on dit est donné dans l'énoncé ou déjà été démontré dans une question précédente de l'activité ou de l'exercice, soit ce qu'on dit peut être déduit d'une ou de plusieurs propriétés démontrées dans le cours soit une combinaisons de ces rois points. Est-ce que ça, ça été dit dans l'énoncé que les droites (ED) et (E'D') sont parallèles ?"
Elèves : "Non."
Ex : "Est-ce que cette propriété a été démontrée ailleurs, plus haut dans l'activité ?"

Elèves : "Non."
Ex : "Non, donc il faut le démontrer. Mais il y a un résultat qui permet de conclure. Qu'est-ce que vous pouvez dire pour conclure que les droites (E'D') et (ED) sont parallèles ?"
A : "Les symétries centrales conservent le parallélisme."
Ex : "Les symétries centrales conservent le parallélisme. Est-ce que c'est vraiment ça qui permet de conclure ? Conserve le parallélisme ça voudrait dire que l'on a deux droites parallèles et en les transformant par la symétrie, on obtiendrait deux droites parallèles. Ce n'est pas le cas ici."
A : "Une symétrie centrale transforme une droite en une droite qui lui est parallèle."

Cette élève a réemployé un mot, le mot transforme, qui ne fait pas partie du vocabulaire courant d'un élève de troisième. Nous confirmons effectivement le résultat sauf si la droite en question passe par le centre de symétrie. Nous explicitons sur un dessin cette propriété qui nous permet de conclure. Pendant quelques secondes, les élèves ont semblé avoir réfléchi à la question de savoir ce qu'il suffit d'avoir pour obtenir l'image d'une droite par symétrie. Au tableau, nous avons tout d'abord représenté une droite et un point O pris hors de cette droite. Nous avons ensuite complété ce dessin grâce à la réponse donnée par M ci-dessous.
Ex : "Pour avoir l'image d'une droite, il suffit d'avoir quoi ?"
Elève : "L'image d'un point."
M : "De deux points !"

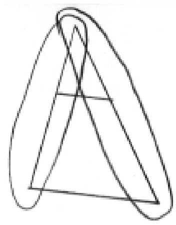
L'élève G trouve ensuite que AD=AD', AE=AE' et l'élève Ma indique, exactement dans ces termes, que la symétrie centrale conserve les longueurs et que l'on a alors ED=E'D'. Nous acquiesçons mais nous indiquons que nous n'avons même pas à utiliser cette propriété car il suffit de rappeler simplement la définition de l'image d'un point, sauf pour l'égalité ED = E'D'. L'élève C a l'idée de travailler dans le triangle ABC et M rappelle que E' appartient au segment [AC] et D' au segment [AB] de telle sorte que les droites (D'E') et (BC) soient parallèles. Les élèves se rendent compte que nous n'avons pas démontré ce parallélisme mais ils trouvent rapidement la solution :

Ex : "Il y a juste un résultat à rajouter pour pouvoir dire que les droites (E'D') et (BC) sont parallèles." (Flottement) On a démontré quoi par contre, qu'on avait quoi ?"
M : "Que (ED) est parallèle à (E'D')."
Ex : "Oui et ensuite on sait quoi ?"
M : "La droite (ED) est parallèle à (BC)."
Ex : "La droite (ED) est parallèle à la droite (BC), parce que ça c'est quoi ?"
Elève : "C'est l'énoncé."

Après avoir synthétisé ce qui vient d'être dit pour démontrer que les droites (D'E') et (BC) sont parallèles, les élèves donnent les égalités des trois rapports que permet d'écrire le deuxième théorème AD'/AB = AE'/AC = D'E'/ BC.

Ex : " AD'/AB = AE'/AC, qu'est-ce qu'on peut en déduire encore comme autre égalité ? (Flottement) "
M : "On a la même égalité là haut AD = AD' et AE = AE'"
Ex : "Oui, AD = AD' donc il suffit de remplacer AD' par AD et on obtient AD sur AB égale ?"
Elèves : "AE sur AC."

Nous demandons aux élèves quel autre rapport on peut obtenir ici et M commence par dire que EDE'D' est un parallélogramme. Nous rappelons aux élèves que pour le moment on a démontré que AD/AB=AE/AC parce que l'on a démontré que AD'/AB=AE'/AC et que AD = AD' et AE' = AE et l'élève M dit alors ED sur BC parce que ED = E'D'. Nous récapitulons en disant que nous avons obtenu : AD/AB = AE/AC = ED/BC. Nous disons aux élèves qu'il faudra savoir appliquer le premier théorème dans le cas où ils auront un triangle, une parallèle et lorsque les longueurs qui leurs seront données et qu'ils auront à chercher concerneront uniquement les deux côtés coupés par les deux parallèles. Lorsque que ils auront un exercice qui concernera les longueurs intérieures, il faudra appliquer le théorème que l'on va rédiger maintenant et ce sera le cas aussi lorsque qu'ils auront cette figure dite "papillon". Nous leurs indiquons aussi que nous ne partirons pas, pour ce dernier théorème, d'un triangle mais de deux droites sécantes.



Nous avons rédigé au fur et à mesure le théorème au tableau.

b) Analyse *a posteriori*

Contre toute attente, les propriétés liées aux symétries centrales ont été rapidement citées par une élève. Nous pouvons même être surpris par la justesse des termes employés : conservation des longueurs, transformation d'une droite en une droite parallèle. De même pour la propriété de deux droites parallèles à une troisième. Réflexion faite, nous pensons qu'il serait intéressant de démontrer ce théorème en employant la deuxième méthode que nous avons indiquée dans l'analyse *a priori*. Mais le temps nous a manqué, et au dernier moment, nous avons choisi cette seconde option moins chronophage.

Nous avons pris l'initiative de rédiger le théorème final sans faire chercher les élèves. Cela aurait pu être autrement, mais le temps a manqué.

Nous avons tenté d'expliquer les raisons favorables que nous trouvons à une scission du théorème de Thalès en deux parties.

* Activité liée aux rapports de longueurs (Annexe II 6)

a) Synthèse

Les élèves pensent que l'on peut comparer les longueurs et disent d'ailleurs que :
CD > GH > AB > EF, mais une élève S dit qu'il est possible de comparer aussi leurs mesures puisque AB = 6, GH = 3 mais tous les autres disent que ce n'est pas possible puisque ce n'est pas la même unité.

A la question c) de la séquence 1.a, les élèves répondent tous qu'il n'est pas possible de savoir si AB sur CD égale EF sur GH.

Ma : "On ne connaît pas la longueur des petits segments."
G : "Car ce n'est pas la même unité."
Ka : "On peut connaître AC, mais ce n'est pas la même unité que AB."
Y : "Ou alors on découpe l'autre côté avec le petit segment."
Ex : "D'après le premier théorème, on a OP sur PM égale OQ sur QN. Est-ce que l'on va pouvoir exprimer le rapport OQ sur QN ?"
Elèves : "Oui, sept sur vingt-trois."
Y : "Mais ici, c'est pas la même unité !!"
Ex : "Oui, pour comparer les longueurs, à vue de nez, on peut. Mais pour comparer les mesures, les nombres qui mesurent ces longueurs, il faut avoir la même unité. Contrairement au cours où l'on compare des rapports de longueurs."

b) Analyse *a posteriori*

Comme attendu, les élèves considèrent que toutes les mesures de longueurs apparaissant dans les rapports égaux obtenus par application du théorème de Thalès doivent être exprimées à l'aide de la même unité. Ils sont capables de comparer des longueurs sans connaître leurs mesures et savent que pour cela il est nécessaire que les longueurs aient leurs mesures exprimées avec les mêmes unités.

II.10 Dixième séance : le mercredi 12 mars 2003 de 11h30 à 12h30.

a) Synthèse

* Activité "mécano", (Activité VI) phase de conjecture question a) et b)

Les élèves ont tout d'abord rapidement remarqué que pour qu'il y ait parallélisme, il est nécessaire d'obtenir des rapports égaux. Une élève G a dit trouver deux tiers. Nous demandons si la même unité est utilisée. G dit tout d'abord oui, d'autres élèves répondent par la négative.

G : "Non, mais l'unité pour l'égalité, ça sur ça c'est toujours la même unité."

C'est effectivement ce qu'il fallait remarquer. La même unité est bien sûr utilisée pour mesurer les longueurs des segments qui se trouvent pris sur la même branche, mais sur l'autre branche, l'unité peut être différente de la première. Mais nous insistons tout de même sur ce constat pour nous assurer que d'autres élèves que G ont compris ce fait important.

Ex : "Donc là, vous avez trouvés vous deux sur trois et là deux sur trois. Est-ce que c'est important qu'il y ait la même unité pour les deux branches ?"
Elèves : "Non."
Ex : "Qu'est-ce qui est important ?"
G : "Qu'on ait la même unité sur la même branche."

Bien que d'autres élèves aient dit qu'il n'était pas nécessaire d'avoir la même unité sur les deux branches, nous restons sur la même question pour confirmer que d'autres élèves que G ont acquis cette idée. S dit avoir trouvé 1/4 et 2/8, N 2/3 et 2/3, E 1/2 et 3/6. Il manque alors une dernière condition pour avoir le parallélisme. Notons que G était en possession du montage de second type.
Ex : "Ici, le rapport il est de deux sur trois ; est-ce qu'il suffit d'avoir des rapports égaux pour avoir le parallélisme ?"
G : "Non, parce que si on fait de l'autre côté, c'est pas parallèle."

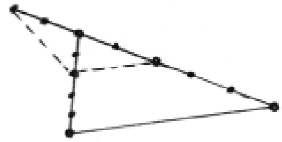
Nous nous dirigeons vers l'élève G pour qu'elle montre très distinctement à la classe, les gestes, pratiqués sur un montage spécifique, qui accompagnent son raisonnement. Elle fixe à deux reprises le morceau de ficelle amovible pour montrer que dans un cas il y a parallélisme et dans un autre, toujours avec les mêmes rapports, le parallélisme n'est plus assuré. Elle montre à la caméra avec ces doigts, les mesures qu'elle désigne pour former les rapports évoqués plus haut. Nous avons demandé alors comment se traduit cette seconde condition pour que deux droites soient parallèles. G dit qu'il faut rajouter "dans le même triangle". Nous indiquons que dans le cas général, nous n'avons pas parlé de triangles mais de droites sécantes. Nous en dessinons deux au tableau.

G : "Côté droit, les trois points sont alignés."
Ex : "Là, les trois points sont alignés aussi et ceux-là aussi, mais il faut rajouter autre chose."
D : "Il faut qu'ils aillent dans le même sens."
Ex : "Dans le même sens, c'est à peu près ça. En fait il faut que les trois points soient alignés dans le même ordre."

<u>* Démonstration de la réciproque</u>

<u>a) Phase de construction du graphe propositionnel</u>

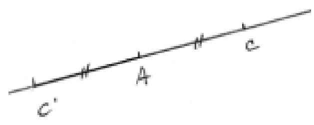
Nous expliquons aux élèves que ce qu'ils ont sur leur feuille s'est la démonstration du théorème désorganisée. Nous rajoutons qu'ils vont devoir la remettre dans l'ordre puis la rédiger. Nous dessinons au tableau un triangle ABC avec E sur [AB] et F sur [AC].



Nous rappelons la conjecture que les élèves ont trouvée à l'aide du dessin ci-contre. Pour que les deux droites soient parallèles, il faut que les rapports soient égaux et qu'en plus les points soient alignés dans le même ordre. Nous supposons que les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles. Nous traçons alors la droite (BC') parallèle à la droite (EF) passant par B. Nous laissons les élèves quelques instants, le temps qu'ils produisent le dessin et qu'ils s'imprègnent des tâches à effectuer. L'élève M trouve que dans cette démonstration, nous partons de (BC') et (EF) sont parallèles. Nous confirmons en rajoutant que ce n'est pas un énoncé tiers. Nous demandons à quoi va être reliée cette donnée ? Ma dit au théorème de Thalès. Ce que nous faisons en disant qu'il s'agit par contre ici d'un énoncé tiers. Le schéma déductif a été construit petit à petit, au fur et à mesure que les élèves le complétaient oralement. Les élèves en déduisent une conséquence AE/AB = AF/AC'. L'élève M pense à utiliser le rapport de départ AE/AB = AF/AC et en déduit alors que AC' = AC. Nous intervenons en disant que c'est encore un peu tôt pour conclure cela. Mais une autre élève D répète cette conclusion. Finalement A et S disent que AE/AB=AF/AC'=AF/AC. Nous demandons alors quelle propriété de l'algèbre permet de conclure que AF/AC=AF/AC' ? Et M répond la transitivité et dit que : AF/AC = AF/AC'. G en déduit que AC = AC'.

Ex : "AC' = AC., d'accord mais il faut rajouter un E.T qui vous permet de dire ça."
M : "a sur b égale à a sur d ..."
Ex : "Oui, on utilise E.T a sur b égale a sur d donne alors b = d.

G conclut alors que C et C' sont confondus.



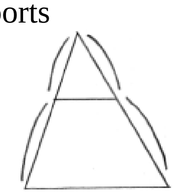
Ex : "Est-ce que ça suffit d'avoir AC = AC' pour que C et C' soient confondus ?"
M : "Il faut qu'ils soient sur la même droite."
Ex : "Il faut qu'ils soient sur la même droite. Est-ce que c'est le cas là ?"
G : "Il faut qu'il appartienne à la demi droite... A..."
Ex : "A la demi droite ? Vu qu'on n'a pas de point ici, plutôt que de dire la demi droite, tournez votre phrase pour que ce soit plus général."
G : "A une demi droite partant du point A."
Ex : "A une demi droite ça veut dire que l'un pourrait appartenir à l'une et l'autre à..."
G : "A la même demi-droite."
Ex : "A la même demi droite. Il faut que C et C' appartiennent à la même demi droite d'origine A. Exprimé autrement il faut que C et C' soient du même côté de A."

<u>b) Analyse *a posteriori*</u>

<u>* Activité "mécano", phase de conjecture question a) et b)</u>

Un laps de temps relativement important s'est écoulé entre la fin de la neuvième séance et le début de la dixième du fait du départ en vacances d'hivers et d'une longue période réservé par le professeur à des séances d'exercices.

Les élèves ont très rapidement trouvé l'emplacement de la deuxième ficelle et ont remarqué que les rapports sont égaux. Des élèves donnent, grâce à des gestes, les rapports comme dans la figure 1 et d'autre comme sur la figure 2. En ce qui concerne les unités, bizarrement, ils admettent ici que l'unité unique est nécessaire pour former un rapport mais pas pour donner les mesures des quatre les longueurs. La même unité doit être employée sur une même branche.



La seconde condition est rapidement trouvée dans la pratique. Le fait que ce soit une élève ayant beaucoup participé qui ait reçu le second type de montage est totalement fortuit. Mais pour traduire ce constat en connaissance cela a été plus difficile. Une élève a finalement trouvé la condition avec ses mots.

<u>* Démonstration de la réciproque</u>

Dans le schéma déductif construit au fur et à mesure que les élèves avançaient dans la démonstration, les conséquences ont été notées par une double flèche. Les élèves ont construit facilement collectivement ce graphe. Comme nous nous y attendions, la première difficulté a été de trouver la condition pour que AC = AC' entraîne que C et C' sont confondus. Nous avons dû prendre la main. Nous avons simplement dû adapter nos contre-exemples aux réponses des élèves. La conclusion a été facile ensuite pour les élèves.

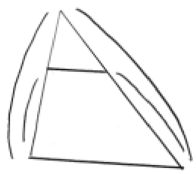
II.11 Onzième séance : le jeudi 13 mars 2003 de 15h00 à 16h00.

a) Synthèse

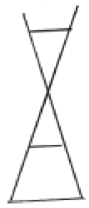
* Phase de rédaction du théorème réciproque

Nous nous plaçons dans un triangle. Nous demandons aux élèves de résumer ce qu'ils viennent de trouver sans désigner les points par de lettre.

S : "Si les rapports sont égaux."
Ex : "Quels rapports, on ne sait pas de quels rapports vous parlez."
S : "Les rapports des côtés."
Ex : "On ne sait pas de quoi vous parlez. Là vous voyez la figure mais il faut que votre énoncé permette d'abord de l'obtenir."
G : "Il y a deux triangles."
Ex : "non, partez d'un seul triangle. C'est la réciproque du premier théorème qu'on a vu. Pas Thalès, le premier."
C : "Dans un triangle, si une droite ..."
Ex : "Si une droite coupe ...?"
C : "Un côté du triangle en son milieu."
Ex : "Non, il n'y a pas de milieu là. Alors, Dans un triangle, si une droite coupe c'est ce que vous avez dit, ensuite on dit quoi ? (Flottement) Cette droite elle coupe quoi ?"
Elèves : "Deux côtés !!"
Ex : "deux côtés, ensuite ..., comment on peut résumer le fait que ces deux rapports là, là sont égaux ?"
S : "En segments proportionnels."
Ex : "en segments proportionnels. Alors, alors quoi ?"
S : "Elle est parallèle."
Ex : "Elle est parallèle à quoi ?"
S : "Au troisième côté."



L'élève Ka demande ce que veut dire le mot proportionnel ici. Nous nous réfèrerons alors aux dessins 1 et 2 précédent et au suivant en désignant les rapports des longueurs sur ces dessins. Nous dessinons un triangle ABC avec D sur [AB], E sur [AC]. Et nous précisons que si on a DA/DB = EA/EC BD/BA = CE/CA ou AD/BA = AE/CA, alors la droite(DE) est parallèle à la droite (BC). Pour la seconde réciproque, nous imposons la rédaction : si une droite détermine sur deux côtés d'un triangle ou sur leurs prolongements des segments proportionnels alors cette droite est parallèle au troisième. Nous désignions sur les dessins les différents cas.



b) Analyse *a posteriori*

Comme attendu, les élèves éprouvent de grandes difficultés à rédiger le texte de la réciproque. Nous avons maintes fois pris la main. Nous avons pris en charge la rédaction de la réciproque du second théorème.

III. Test de comparaison

III.1 Objectifs généraux

Notre but, en complément de la mise en évidence et de l'utilisation de trois aspects qui donnent du sens au théorème de Thalès, est de voir comment évoluent les obstacles que nous avons relevés et les erreurs caractéristiques commises dans son application. Pour cela un test qui concerne les deux niveaux de classes est proposé. Le même test est posé à deux classes de chaque niveau quatrième et troisième. Une classe n'ayant pas participé à l'ingénierie (S.I) et une autre ayant fait l'objet de notre étude (A.I). Il porte uniquement sur des variables didactiques et non sur les contraintes liées au théorème. Nous précisons que nous n'avons pas pu tester les élèves (S.I) sur des questions auxquelles ils ne pouvaient pas répondre. Ainsi, l'évaluation comparative du méso-espace n'est pas possible. Nous allons montrer que grâce à cette ingénierie didactique, l'orientation des figures, pour le cas de la proportionnalité interne, n'a plus d'importance pour leur reconnaissance ce qui a pour conséquence de faire disparaître, en partie, l'obstacle en question. En effet, nous avons prouvé que l'orientation de ces figures est fondamentale si on se réfère à la version actuelle du théorème et qu'elle est génératrice d'erreurs. L'apprenant se réfère à une figure prototype I, II, III ou IV. Par exemple, le prototype I et son orientation ont une certaine prégnance sur l'application du théorème à une figure ayant une orientation "renversée" (figure pathogène A) et sur la figure papillon (figure pathogène B) et la lecture de droite à gauche d'un dessin en a une sur des dessins (figures pathogènes C et C'). Dans les classes des niveaux quatrième et troisième, nous testons les effets de lecture que nous avons nommés lecture de haut en bas et lecture de gauche à droite. La présence d'un angle aigu vers le "haut" ou sur "le côté gauche" d'une figure dite de Thalès (figures pathogènes A' et C) est également envisagée dans les deux niveaux et pour chacune des deux classes. Nous avons pu remarquer qu'avec la forme du théorème de Thalès actuelle, une fois la figure repérée, l'expression des rapports reste constante. La principale difficulté est de bien repérer tous les paramètres de la figure pour, en quelque sorte, automatiser l'écriture des trois rapports égaux. Nous pensons que la distribution des données ne doit pas être adaptée à l'application unique du théorème. Grâce à la version que nous proposons, l'élève ne fera sans doute pas référence à une figure prototype mais adaptera, au coup par coup, la situation de proportionnalité. Une fois une figure reconnue comme pouvant faire l'objet de l'application du théorème de Thalès, les élèves doivent par exemple faire évoluer la distribution des données numériques pour la rendre compatible avec la situation de proportionnalité qu'ils désireront appliquer. Ils peuvent partir du côté où se trouve la longueur inconnue x observer le type de distribution des longueurs de ce côté de la figure, puis rendre compatible la distribution de données de l'autre côté. Il y a un choix stratégique à faire, alors qu'avec la méthode actuelle, l'élève doit plier la répartition des données de la figure à un type unique de proposition. De plus, nous rendons la distribution des données compatible avec l'application de la propriété directement au regard de la figure. Le nombre de figures congruentes est nettement augmenté puisqu'il est presque doublé. L'effet "papillon" s'estompe puisque les rapports écrits correspondant sont alors corrects. Nous cherchons à savoir si une évolution notable est à relever quant aux écritures numériques incompatibles avec les rapports littéraux, quant aux lectures directes de données en particulier si ces dernières s'estompent.

Les erreurs dues à une surcharge cognitive du fait de la distribution particulière des mesures sur le dessin sont aussi scrutées. Nous évitons des équations somme et différence, sources d'erreurs à de nombreux endroits. Ainsi l'aspect algébrique, unique avantage actuel de l'étude du théorème de Thalès, passe en second plan.

Nous mettons en évidence d'éventuelles nouvelles erreurs qui sont dues à la version du théorème pour laquelle nous avons opté. Un mélange entre le théorème d'une parallèle à un côté d'un triangle et le théorème faisant apparaître les égalités de trois rapports pourrait voir le jour. Enfin, l'aspect proportionnalité a été abordé d'une telle façon que nous espérons que les apprenants peuvent de la sorte mieux saisir les sens de tous les rapports légitimés par la propriété et de tous les autres qui ne le sont pas. Comprendre pour quelle raison certaines écritures fractionnaires ne sont pas correctes alors que d'autres le sont, même si cela peut paraître ardu, participe d'une réelle activité mathématique et d'un savoir fondamental.

III.2 Méthodologie

III.2.1 Niveau quatrième (Annexe III)

Une analyse statistique (Bonhivers et De Ketel 1990) est entreprise afin de savoir si les erreurs que nous avons mises en évidence antérieurement s'estompent avec la méthode d'introduction du théorème de Thalès que nous avons proposée. Mais une telle étude doit permettre tout de considérer que les deux classes de quatrième qui font l'objet du test en question ne présentent pas, dès le départ, de différences importantes quant à la réussite dans l'application élémentaire du théorème. Cette vérification se fait par l'intermédiaire de l'analyse comparée des résultats obtenus par ces élèves aux questions 1.a ; 1.c ; 2.a ; 2.c ; 3.d du test de comparaison.

III.2.2 Niveau troisième (Annexes III et IV)

La mise en évidence de la similitude des niveaux des deux classes de troisièmes quant à l'application immédiate du théorème de Thalès se fait par l'intermédiaire des questions 1.a ; 1.c ; 2.a ; 2.c ; 3.d et 5.a. En ce qui concerne les *figures pathogènes*, nous conservons les dessins du niveau quatrième et nous complétons cet échantillon de deux figures dites papillons 5.a et 5.c. Un second test concerne l'application de la réciproque du théorème de Thalès, l'équivalence des classes étant testée, à ce sujet, aux figures 1.c et 2.a.

Nous appliquons la méthode de **Kolmogorov-Smirnov (KS)** que nous allons décrire de façon générale. Ce test décèle des différences de distributions, autres éventuellement que des différences de tendance centrale, comme c'est le cas du test de Mann-Whitney pour lequel la deuxième variable doit être ordinale de score rangé. Cela conviendrait mieux que le test (K-S) où la variable V_b doit être ordinale de catégorie rangée. Mais le test (M-W) est adapté à de petits échantillons d'au maximum 20. C'est pour cette raison que nous avons opté pour le test (K-S) en regroupant les données dans des catégories. Passons à sa description.

Question - problème

Peut-on affirmer que l'échantillon stratifié en deux groupes pour la variable indépendante (V_a) présente les mêmes caractéristiques que celles de la population de référence en ce qui concerne les résultats obtenus sur une variable dépendante V_b dont les modalités sont des catégories rangées ? $V_b = f(V_a)$? Pour notre étude, la question est de savoir pour les deux niveaux quatrième et troisième, d'une part, si les résultats aux tests liés aux figures classiques et d'autre part ceux liés aux dessins engendrant en principe des difficultés, dépendent de la classe dans laquelle a été effectué le test (classe avec ingénierie ou sans) ?

Variables

V_a : variable nominale dichotomique ou multichotomique permettant de former les groupes. C'est la variable indépendante.

Dans notre travail, il s'agit, pour chaque niveau de l'appartenance de l'élève à la classe avec ingénierie (A.I) ou à la classe sans ingénierie(S.I).

V_b : variable ordinale de catégorie rangée $\left(C_1 < C_2 <\ldots< C_k\right)$. C'est la variable dépendante.
En ce qui nous concerne, pour chaque recherche de longueur inconnue, lorsque des rapports littéraux sont faux dès le départ, il n'est pas attribué de point à la question. Lorsque l'égalité de rapports numériques est en adéquation avec l'énoncé du théorème utilisé par l'élève, supposé lui-même correctement rédigé, 1 point est attribué. Dans le cas contraire, aucun point n'est attribué. Lorsque la correspondance entre rapports littéraux et rapports numériques est établi, un point est attribué si la résolution des équations est correcte. Ainsi, pour chaque dessin peuvent être affectés, 0, 1 ou 2 points. Pour les deux niveaux testés, troisième et quatrième, nous avons d'une part les résultats liés aux figures classiques et d'autre part ceux rattachés aux figures qui posent problème. Le but étant, pour les premiers résultats, de démontrer qu'ils sont indépendant de la variable V_a, c'est à dire que les deux classes (A.I) et (S.I) peuvent être considérées d'un niveau comparable par rapport à des applications directes du théorème en question. Et pour les seconds résultats, qu'il y a, au contraire dépendance.

Hypothèses

H_0 : les deux groupes présentent des caractéristiques identiques pour la variable B. Ils sont donc issue de la même population de référence.

H_1 : les deux groupes n'appartiennent pas à la même population de référence. Il y a donc dépendance de la variable B en fonction de la variable A (test à deux issues). Ou un groupe présente une distribution de résultats supérieurs (en termes de tendance centrale) à celle de l'autre groupe (test à une issue).

H_0 devrait, en principe se vérifier pour les calculs et les figures les plus traditionnelles et H_1 pour les autres.

Conditions

- Les deux groupes sont formés de façon indépendante.
- Les deux groupes sont formés aléatoirement. Même si la constitution des classes dans un établissement ne s'effectue pas de façon aléatoire, nous pouvons considérer que les classes testées remplissent ce contrat au vu des options similaires de chacune.
- L'ordre des catégories pour la variable B est compréhensible et non arbitraire.
- Les deux groupes présentent des caractéristiques identiques à celles de la Population de Référence.

Une bonne expérimentation doit garantir les trois premières conditions. La quatrième condition fait l'objet du test. Remarquons que les deux groupes peuvent avoir des tailles différentes.

Les données sont présentées sous forme de tableau selon le modèle ci-dessous.

Tableau des données

	C_1	C_2	$\cdots$	C_k	$\cdots$	Total
Gr.1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1k}	$\cdots$	n_1
Gr.2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2k}	$\cdots$	n_2
						N

$C_1 < C_1 < \ldots < C_k < \ldots$

O_{ij} = fréquences observées

n_1 = taille du groupe 1 ou effectif du groupe 1

n_2 = effectif du groupe 2

N = taille de l'échantillon $\left(N = n_1 + n_2\right)$

K = nombre de catégories ordonnées

Chaque tableau est complété par le tableau des fréquences cumulées.

Procédure

Nous recherchons les fréquences cumulées pour chacun des groupes, en travaillant de gauche à droite. Puis, nous convertissons chacune des fréquences cumulées en proportions cumulées. Pour cela, il suffit de diviser chacune des fréquences cumulées par l'effectif du groupe pour obtenir les proportions cumulées correspondantes. Pour chaque groupe, la dernière proportion cumulée est égale à 1. Dans chaque catégorie (colonne), nous soustrayons la proportion cumulée du groupe 2 de celle du groupe 1. Les valeurs ainsi obtenues sont appelées les différences d_i. Nous prenons ensuite la plus grande valeur absolue des différences que nous nommerons D. Nous calculons alors $K = D.\sqrt{\dfrac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2}}$. La signification de K peut être obtenue en référence à la table en annexe. Pour être significative, sa valeur doit être plus grande ou égale à celle fournie par cette table au seuil de signification choisi. A ce sujet, plus le seuil de signification est grand, plus la valeur de K est petite. Nous avons des valeurs de K pour les seuils de 10%, 5%, 2% et 0,2%. Ainsi, si la différence n'est pas significative au seuil de 10% elle ne l'est *a fortiori* pas pour des seuls inférieurs. A chaque fois, dans nos calculs, le seuil qui apparaît est le plus petit possible.

Conclusion

(1) Accepter H_0 au seuil de 5% : *"On ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques et ils peuvent être issues d'une même population de référence."*

(2) Refuser H_0 au seuil de 5% : *"C'est admettre qu'il y a moins de 5 chances sur 100 que les différences constatées entre les deux groupes soient le fruit du hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques différentes pour la variable B."*

III.3 Mise en place et résultats

En classe de quatrième, nous tentons de montrer l'équivalence des deux classes grâce au dessin 1.a ; 1.c ; 2.a ; 2.c ; 3.d. Nous avons déjà expliqué l'attribution des points, mais les variables C_k sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. O_{ij}, les fréquences observées correspondent au nombre d'élèves ayant obtenu le score correspondant. En classe de troisième, sur le premier test, cette équivalence est montrée en utilisant les mêmes dessins que précédemment en y adjoignant le 5.a. Les variables C_k vont de 0 à12. En ce qui concerne le test servant à montrer une éventuelle distinction que nous pouvons faire entre la classe de quatrième (AI) et celle sans, nous rassemblons les dessins suivant le critère d'orientation (1.b et 1.d, C_k = 0, 1, 2, 3 ou 4), de présence d'un angle aigu (2.b et 2.d, C_k = 0, 1, 2, 3 ou 4), de distribution de données (3.a, 3.b, 3.c, 4.a, 4.b, C_k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) et d'un hypothétique mélange entre les deux versions par une lecture directe des données (4.c et 4.d, C_k = 0, 1, 2, 3 ou 4). Une application du test (K-S) se fait également globalement sur ces onze dessins. (C_k = 0 à 22). En classe de troisième, c'est la même chose que précédemment en y ajoutant les figures 5.b et 5.c. Un test global concerne treize dessins (C_k = 0 à 26). Pour le théorème réciproque, l'équivalence supposée entre les deux classes de troisième est vérifiée par une application du test aux résultats obtenus aux dessins 1.c et 2.a. Les dessins 1.a, 1.b, 1.d, 2.b, 2.c, sont rassemblés (C_k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

a) Equivalence des classes

Classes de quatrième

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Groupe 1	0	0	0	1	1	0	1	0	2	0	19	24
Cumulée	0	0	0	1	2	2	3	3	5	5	24	
Groupe 2	0	0	0	0	2	1	0	0	2	2	17	24
Cumulée	0	0	0	0	2	3	3	3	5	7	24	
												48

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Proport cumu 1	0	0	0	0,042	0,083	0,083	0,125	0,125	0,208	0,208	1
Proport cumu 2	0	0	0	0	0,083	0,125	0,125	0,125	0,208	0,292	1
d_i	0	0	0	0,042	0	0,042	0	0	0	0,084	0

Donc : **D = 0,084** ; puis $K = 0{,}084 \times \sqrt{\dfrac{24 \times 24}{24 + 24}}$ soit *K = 0,206. Si* α *= 10%, K = 1,22.*
En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques. Les deux classes de quatrième peuvent être considérées équivalentes.

Classes de troisième

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Groupe 1	2	0	0	1	0	0	0	0	1	1	4	0	17	26
Cumulée	2	2	2	3	3	3	3	3	4	5	9	9	26	
Groupe 2	2	0	0	1	1	0	1	0	1	0	6	0	11	23
Cumulée	2	2	2	3	4	4	5	5	6	6	12	12	23	
														49

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pro Cumul 1	0,077	0,077	0,077	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115	0,153	0,192	0,346	0,346	1
Pro Cumul 2	0,087	0,087	0,087	0,130	0,173	0,173	0,217	0,217	0,261	0,261	0,521	0,521	1
d_i	0,01	0,01	0,01	0,015	0,058	0,058	0,102	0,102	0,108	0,069	0,175	0,175	0

Donc **D = 0,175** ; puis $K = 0{,}175 \times \sqrt{\dfrac{23 \times 26}{23 + 26}}$ soit *K = 0,611. Si* α *= 10%, K = 1,22*. En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques. Les deux classes de troisième peuvent être considérées équivalentes.

b) Prise en compte des critères d'orientation

Classes de quatrième

	0	1	2	3	4	Total
Groupe 1	2	0	2	1	19	24
Cumulée	2	2	4	5	24	
Groupe 2	0	1	2	1	20	24
Cumulée	0	1	3	4	24	
						48

	0	1	2	3	4
Pro Cumul 1	0,083	0,083	0,167	0,208	1
Pro Cumul 2	0	0,042	0,125	0,167	1
d_i	0,083	0,041	0,042	0,041	0

Donc **D = 0,083** ; puis $K = 0{,}083 \times \sqrt{\dfrac{24 \times 24}{24 + 24}}$, soit *K = 0,288. Si* α *= 10%, K = 1,22.* En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques quant à la résolution des questions liées au paramètre orientation de la figure. Les deux classes de quatrième peuvent être considérées équivalentes à ce sujet. Mais nous pouvons légitimement nous demander les raisons de cette équivalence. Nous pouvons penser que la double approche du théorème de Thalès faciliterait son application dans les conditions d'une orientation de la figure pathologique. Nous pouvons dire que les erreurs liées à l'orientation sont moins apparentes que lorsque nous avions demandé d'appliquer le théorème dans des figures dépourvues de longueurs sur le dessin. Des corrections à ce sujet sont visibles dans une copie. L'élève a été influencé, en premier lieu, par la variable orientation, mais la distribution simple des longueurs semble avoir eu un effet correctif puisqu'il a ensuite corrigé les rapports littéraux qui étaient faux au départ. Pour tester l'éventuelle influence positive de la version du théorème que nous avons proposée dans notre ingénierie, il faudrait rendre les questions indépendantes des calculs. Les élèves ne devraient écrire que les rapports littéraux et les longueurs ne devraient être données que dans l'énoncé et non sur la figure. Paradoxalement, dans ce test où elles étaient simplement distribuées, les erreurs ont été commises non pas dans les écritures littérales ou numériques mais dans la résolution des équations.

Classes de troisième

	0	1	2	3	4	5	6	Total
Groupe 1	4	0	1	1	2	3	15	26
Cumulée	4	4	5	6	8	11	26	
Groupe 2	2	0	4	0	10	1	6	23
Cumulée	2	2	6	6	16	17	23	
								49

	0	1	2	3	4	5	6
Pro Cumul 1	0,154	0,154	0,192	0,231	0,308	0,423	1
Pro Cumul 2	0,087	0,087	0,261	0,261	0,696	0,739	1
d_i	0,067	0,067	0,024	0,03	0,388	0,316	0

Donc **D = 0,388** ; puis $K = 0{,}388 \times \sqrt{\dfrac{26 \times 23}{26 + 23}}$, soit *K = 1,355. Si* α *= 10%, K = 1,22.* Il y a moins de 10 chances sur 100 que les différences constatées entre les deux groupes soient le fruit

du hasard. Notons qu'à six millièmes près le seuil aurait été de 5%. Il semble que les deux classes présentent des caractéristiques différentes pour la variable orientation de la figure. Mais nous allons analyser les raisons plus précisément en relevant les erreurs commises.
Une seule erreur pour le groupe (S.I), groupe 2, est due à une lecture de gauche à droite d'une figure papillon "couchée". D'autres, quatre plus précisément, sont dues à des écritures d'expressions littérales donnant directement la longueur cherchée comme : CA = CD $\times$ CB/CE.
Mais le fait le plus remarquable est le nombre de dernières questions non résolues qui concernent justement une figure papillon "couchée". Sept élèves du groupe (S.I), ayant par ailleurs réussi d'autres questions, n'ont pas répondu à la dernière voire aux trois dernières questions. Deux élèves de ce groupe ont fait une lecture verticale des dessins 1.b et 5.a. Notons que pour le groupe (A.I), les quatre types d'erreurs précédents ne sont pas apparus et en particulier, seul un élève ayant des résultats corrects à l'ensemble du test, n'a pas répondu à cette dernière question.
Nous pouvons objectivement considérer que le temps de mise en équations ainsi que le temps de résolution de ces équations sont beaucoup plus longs dans la version actuelle du théorème de Thalès, du moins pour certaines d'entre elles.

c) Prise en compte d'un angle aigu

Classes de quatrième

	0	1	2	3	4	Total
Groupe 1	6	0	2	0	16	24
Cumulée	6	6	8	8	24	
Groupe 2	2	1	1	3	17	24
Cumulée	2	3	4	7	24	
						48

	0	1	2	3	4
Pro Cumul 1	0,25	0,25	0,333	0,333	1
Pro Cumul 2	0,083	0,125	0,167	0,292	1
d_i	0,167	0,125	0,166	0,041	0

Donc **D = 0,167** ; puis $K = 0{,}167 \times \sqrt{\dfrac{24 \times 24}{24 + 24}}$, soit *K = 0,579. Si* α *= 10%, K = 1,22*. En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques. Les deux classes de quatrième peuvent être considérées équivalentes quant à l'application du théorème dans des figures présentant des angles aigus vers le haut et sur la gauche.

Classes de troisième

	0	1	2	3	4	Total
Groupe 1	4	0	1	0	21	26
Cumulée	4	4	5	5	26	
Groupe 2	4	1	1	0	17	23
Cumulée	4	5	6	6	23	
						49

	0	1	2	3	4
Pro Cumul 1	0,154	0,154	0,192	0,192	1
Pro Cumul 2	0,173	0,217	0,261	0,261	1
d_i	0,019	0,063	0,069	0,069	0

Donc : **D = 0,069** ; puis $K = 0{,}069 \times \sqrt{\frac{26 \times 23}{26 + 23}}$, soit *K = 0,241. Si* α *= 10%, K = 1,22.* En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques. Les deux classes de troisième peuvent être considérées équivalentes quant à l'application du théorème dans des figures présentant des angles aigus vers le haut et sur la gauche. Notons que dans les deux cas au niveau troisième et quatrième, quelques erreurs dues à une lecture orientée par la présence d'un angle aigu vers le "haut" ou sur la "gauche" de la figure ont été commises.

d) Prise en compte des distributions de données

Classes de quatrième

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Groupe1	1	1	0	0	8	0	5	0	2	1	6	24
Cumulé	1	2	2	2	10	10	15	15	17	18	24	
Groupe2	3	2	5	4	1	1	6	2	0	0	0	24
Cumulé	3	5	10	14	15	16	22	24	24	24	24	
												48

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pr Cu 1	0,042	0,083	0,083	0,083	0,417	0,417	0,625	0,625	0,708	0,75	1
Pro Cu 2	0,125	0,208	0,417	0,583	0,625	0,667	0,916	1	1	1	1
d_i	0,083	0,125	0,334	0,5	0,208	0,25	0,291	0,375	0,292	0,25	0

Donc : **D = 0,375** ; puis $K = 0{,}375 \times \sqrt{\frac{24 \times 24}{24 + 24}}$, soit *K = 1,299. Si* α *= 10%, K = 1,22.* Il y a moins de 10 chances sur 100 que les différences constatées entre les deux groupes soient le fruit du hasard. Il semble que les deux classes présentent des caractéristiques différentes pour la variable distribution des longueurs. Mais nous allons analyser les raisons plus précisément en relavant les erreurs commises. Certains élèves ont directement écrit une expression littérale fausse de la longueur cherchée. Pour huit figures, pour former des égalités de rapports par ailleurs erronés, les nombres ont directement été lus sans passer par les écritures littérales. Deux lectures directes et fausses ont été faites pour écrire deux égalités de rapports littérales. De plus, après des écritures de rapports littéraux correctes, pour douze figures, dans un second temps, une lecture directe des longueurs sur les dessins a été effectuée pour former les rapports numériques. C'est à peu près le même nombre que pour la quatrième (S.I) pour laquelle cette erreur a été reproduite à quatorze reprises. Par ailleurs, pour cette même classe, pour trois dessins, une lecture directe a été faite pour former les rapports littéraux. Une différence non fortuite se faisant remarquer entre les deux classes, ces différences ne se jouant pas sur les lectures directes des données sur les figures, à quel niveau se produisent-elles ? Tout simplement dans la mise en équation et dans les résolutions des équations. Certains élèves éprouvent des difficultés à mettre le problème en équation et l'expriment comme tel (quatre élèves). Soit les élèves se trouvent bloqués à un moment (à quinze reprises), que ce soit pour des raisons techniques algébriques ou par le fait qu'ils se retrouvent avec deux inconnues et une seule équation ; soit ils commettent des erreurs dans cette résolution, (à dix reprises). Enfin, d'autres ne calculent pas la longueur demandée. A ce sujet, certains, pour palier cette difficulté de mise en équation, calculent une longueur intermédiaire, pour ensuite obtenir la bonne longueur par soustraction ou addition : quatre élèves. Mais nous devons rajouter que nous avons relevé un nombre important de non réponses dans des tests pour lesquels, par ailleurs, les résultats étaient corrects.

Classes de troisième

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Gr1	2	1	0	1	1	2	3	3	0	1	2	3	7	26
Cumu1	2	3	3	4	5	7	10	13	13	14	16	19	26	
Gr2	9	1	5	1	1	0	4	0	1	1	0	0	0	23
Cumu2	9	10	15	16	17	17	21	21	22	23	23	23	23	
														49

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pro cu1	0,077	0,115	0,115	0,154	0,192	0,269	0,385	0,5	0,5	0,538	0,615	0,730	1
Pro cu 2	0,391	0,435	0,652	0,696	0,739	0,739	0,913	0,913	0,956	1	1	1	1
d_i	0,314	0,32	0,537	0,542	0,547	0,47	0,528	0,413	0,456	0,462	0,385	0,27	0

Donc : **D = 0,547** ; puis $K = 0{,}547 \times \sqrt{\dfrac{26 \times 23}{26 + 23}}$, soit *K = 1,911. Si* α *= 0,2%, K = 1,86*. Il y a moins de 0,2 chances sur 100 que les différences constatées entre les deux groupes soient le fruit du hasard. Il semble que les deux classes présentent des caractéristiques très différentes pour la variable distribution des longueurs. Mais nous allons analyser les raisons plus précisément en relavant les erreurs commises. Tout d'abord le nombre de non réponse dans la classe (S.I) est beaucoup plus élevé que dans la classe (A.I). De plus, les lectures directes pour les rapports littéraux sont plus nombreuses dans le cas (S.I). Par contre les écritures numériques fausses écrites après des égalités de rapports littéraux justes sont inexistantes pour les (A.I) et nombreuses dans le cas (S.I). De même, les résolutions des équations pour les élèves de la classe (S.I) sont très souvent fausses, incomplètes, inachevée ou tout simplement non amorcées, ce qui n'est pas le cas dans (A.I). Par contre, pour les élèves (A.I), des mélanges entre les deux théorèmes dans les écritures littérales ont été commis (15). L'apparition de cette erreur ne compense pas les erreurs commises dans le cadre S.I. Dans la nouvelle version que nous avons proposée, le gain par rapport aux mises en équations plus simples, à leur résolution plus aisée compense largement les nouvelles erreurs commises.

e) Prise en compte d'un hypothétique mélange entre les deux versions par une lecture directe

Classes de quatrième

	0	1	2	3	4	Total
Groupe 1	17	0	4	2	1	24
Cumulée	17	17	21	23	24	
Groupe 2	9	3	4	7	1	24
Cumulée	9	12	16	23	24	
						48

	0	1	2	3	4
Pro Cumul 1	0,708	0,708	0,875	0,958	1
Pro Cumul 2	0,375	0,5	0,667	0,958	1
d_i	0,333	0,208	0,208	0	0

Donc **D = 0,333** ; puis $K = 0{,}333 \times \sqrt{\dfrac{24 \times 24}{24 + 24}}$, soit *K = 1,154. Si* α *= 10%, K = 1,22*. En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques. Les deux classes de quatrième peuvent être considérées équivalentes quant à l'éventuel mélange de deux versions quelles soient littérales ou numériques. Mais même si globalement nous pouvons constater qu'il n'y a pas de différence significative de scores, nous pouvons montrer les distinctions qui sont à faire quant aux erreurs commises. Les écritures numériques obtenues précédemment par une lecture des données sur la figure pouvaient être justes mais dans le présent contexte, elles sont fausses puisque cela revient à mélanger deux théorèmes différents. De même pour les écritures littérales qui mélangent le théorème de Thalès avec le premier théorème sur les droites parallèles à un côté d'un triangle. Ces deux types d'erreurs sont très courants chez les élèves (A.I) et peu présents pour les autres. Par contre ce qui compense cela dans le groupe (S.I) correspond à des résolutions d'équations fautives ou non abouties. De plus, ces erreurs sont complétées par de très nombreuses non réponses. Ainsi, il est indéniable que la double approche du théorème de Thalès par la proportionnalité interne et la proportionnalité externe fait apparaître des erreurs liées au mélange de ces deux versions mais d'un autre côté, l'application unique du théorème tel qu'il est proposé actuellement engendre sur les mêmes questions, des erreurs très nombreuses dans les résolutions ainsi que des absences de réponses.

Classes de troisième

	0	1	2	3	4	Total
Groupe 1	14	2	5	3	2	26
Cumulée	14	16	21	24	26	
Groupe 2	14	0	7	1	1	23
Cumulée	14	14	21	22	23	
						49

	0	1	2	3	4
Pro Cumul 1	0,538	0,615	0,808	0,923	1
Pro Cumul 2	0,609	0,609	0,913	0,957	1
d_i	0,071	0,006	0,105	0,034	0

Donc : **D = 0,105** ; puis $K = 0{,}105 \times \sqrt{\dfrac{26 \times 23}{26 + 23}}$, soit *K = 0,367. Si* α *= 10%, K = 1,22*. En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques. Les deux classes de troisième peuvent être considérées équivalentes quant à l'éventuel mélange de deux versions quelles soient littérales ou numériques. Comme pour les élèves de quatrième (A.I), de nombreuses lectures directes et erronées des rapports littéraux sur les figures sont faites. Cela consiste à mélanger les deux théorèmes étudiés. De plus, même avec des rapports littéraux justes, certains de ces élèves ont fait une lecture directe du dessin pour parvenir aux rapports numériques. Dans l'autre groupe (S.I) ce nombre d'élèves est le même. Les mélanges dans les rapports littéraux sont inexistants, par contre un très grand nombre de non réponses sont apparentes. A cela s'ajoute de mauvaises mises en équation, des équations avec deux inconnues, et des résolutions d'équations non achevées. Comme nous venons de le voir, les résultats sont globalement équivalents à ce sujet, mais pas pour les mêmes raisons. Il nous reste à savoir si la version du théorème de Thalès que nous avons proposée est globalement positive par rapport aux erreurs générales commises par les élèves.

f) Etude globale sur l'ensemble des dessins non classiques

Classes de quatrième

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gr1	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	4	0	6
Cumu1	0	0	0	0	2	2	4	4	5	5	9	9	15
Gr2	0	0	0	1	1	0	0	0	2	2	4	4	1
Cumu2	0	0	0	1	2	2	2	2	4	6	10	14	15

à suivre

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Total
Gr1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	1	24
Cumu1	15	17	17	18	18	22	22	23	23	24	
Gr2	1	0	2	0	4	1	1	0	0	0	24
Cumu2	16	16	18	18	22	23	24	24	24	24	
											49

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pro cu1	0	0	0	0	0,083	0,083	0,167	0,167	0,208	0,208	0,375	0,375	0,625
Pro cu 2	0	0	0	0,042	0,083	0,083	0,083	0,083	0,167	0,25	0,417	0,583	0,625
d_i	0	0	0	0,042	0	0	0,084	0,084	0,041	0,042	0,042	0,208	0

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Pr Cu 1	0,625	0,708	0,708	0,75	0,705	0,917	0,917	0,958	0,958	1
Pro Cu 2	0,667	0,667	0,75	0,75	0,917	0,958	1	1	1	1
d_i	0,042	0,041	0,042	0	0,212	0,041	0,083	0,042	0,042	1

Donc : **D = 0,212** ; puis $K = 0{,}212 \times \sqrt{\dfrac{24 \times 24}{24 + 24}}$, soit *K = 0,734. Si* α *= 10%, K = 1,22*. En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques. Les deux classes de quatrième peuvent être considérées équivalentes quant aux figures non classiques qui ont composé ce test. Mais nous avons vu que cette équivalence devait être relativisée puisque pour certaines résolutions de questions les différences entre les deux types de classes (A.I) et (S.I) étaient très significatives et pour d'autres non. C'est sur la globalité que cela s'équilibre. Nous n'effectuons pas les calculs pour l'ensemble des figures puisqu'il suffit de rajouter les dessins classiques. Hors nous savons que pour ces exemples, il n'y a vraiment aucune différence entre les deux classes. Globalement, le résultat ci-dessus ne pourrait être que confirmé.

Classe de troisième

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Gr1	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
Cumu1	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6
Gr2	2	1	2	2	0	0	0	0	1	0	3	2	3	0
Cumu2	2	3	5	7	7	7	7	7	8	8	11	13	16	16

à suivre

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	Total
Gr1	1	1	3	2	1	1	1	1	1	2	3	3	0	26
Cumu1	7	8	11	13	14	15	16	17	18	20	23	26	26	
Gr2	0	1	3	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	23
Cumu2	16	17	20	20	20	21	21	21	23	23	23	23	23	
														49

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pro cu1	0,076	0,076	0,076	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115	0,154	0,154	0,154	0,192	0,192	0,230
Pro cu 2	0,087	0,130	0,217	0,304	0,304	0,304	0,304	0,304	0,348	0,348	0,478	0,565	0,696	0,696
d_i	0,011	0,054	0,141	0,189	0,189	0,304	0,304	0,304	0,194	0,194	0,324	0,373	0,504	0,466

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Pro cu1	0,269	0,308	0,423	0,5	0,538	0,577	0,615	0,654	0,692	0,769	0,885	1	1
Pro cu 2	0,696	0,739	0,870	0,870	0,870	0,913	0,913	0,913	1	1	1	1	1
d_i	0,427	0,431	0,447	0,37	0,332	0,336	0,298	0,259	0,308	0,231	0,115	0	0

Donc **D = 0,504** ; puis $K = 0{,}504 \times \sqrt{\dfrac{26 \times 23}{26 + 23}}$, soit *K = 1,761. Si* α *= 2%, K = 1,51.* Il y a moins de 2 chances sur 100 que les différences constatées entre les deux groupes soient le fruit du hasard. Il semble que les deux classes présentent des caractéristiques très différentes quant aux figures non classiques qui ont composé ce test. Ces résultats sont exactement inversés par rapports aux deux classes de quatrième pour lesquelles, globalement, aucune distinction ne pouvait être faite quant aux résultats globaux à ce test, même si bien sûr des différences sont à remarquer quant aux erreurs respectives qui ont été commises. Pour le niveau troisième, il semble que l'approche abordée dans notre travail soit bénéfique, pour le moins en ce qui concerne les figures non typiques.

g) Etude globale sur l'ensemble du test troisième

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Gr1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1
Cumu1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	5	6
Gr2	1	0	0	0	1	1	1	0	3	1	2	0	2	1
Cumu2	1	1	1	1	2	3	4	4	7	8	10	10	12	13

à suivre

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Gr1	1	0	1	2	2	2	1	1	1	1	2	1	2	3
Cumu1	7	7	8	10	12	14	15	16	17	18	20	21	23	26
Gr2	3	0	0	0	3	0	0	1	1	0	2	0	0	0
Cumu2	16	16	16	16	19	19	19	20	21	21	23	23	23	23
														49

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pro cu1	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,115	0,192	0,230
Pro cu 2	0,043	0,043	0,043	0,043	0,087	0,130	0,174	0,174	0,304	0,348	0,435	0,435	0,522	0,565
d_i	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,053	0,097	0,097	0,227	0,271	0,358	0,32	0,33	0,335

à suivre

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Pro cu1	0,269	0,269	0,308	0,385	0,462	0,538	0,577	0,615	0,654	0,692	0,769	0,808	0,885	1
Pro cu 2	0,696	0,696	0,696	0,696	0,826	0,826	0,826	0,870	0,913	0,913	1	1	1	1
d_i	0,427	0,427	0,388	0,311	0,364	0,288	0,249	0,255	0,259	0,221	0,231	0,192	0,115	0

Donc **D = 0,427** ; puis $K = 0{,}427 \times \sqrt{\dfrac{26 \times 23}{26 + 23}}$, soit *K = 1,492. Si* α *= 5%, K = 1,36*. Il y a moins de 5 chances sur 100 que les différences constatées entre les deux groupes soient le fruit du hasard. Il semble que les deux classes présentent des caractéristiques très différentes quant au test dans son ensemble.

<u>h) Etude équivalence des classes pour la réciproque</u>

	0	1	2	3	4	Total
Groupe 1	0	0	1	0	23	24
Cumulée	0	0	1	1	24	
Groupe 2	0	0	0	2	21	23
Cumulée	0	0	0	2	23	
						47

	0	1	2	3	4
Pro Cumul 1	0	0	0,042	0,042	1
Pro Cumul 2	0	0	0	0,087	1
d_i	0	0	0,042	0,045	0

Donc : **D = 0,045** ; puis $K = 0{,}042 \times \sqrt{\dfrac{24 \times 23}{24 + 23}}$, soit *K = 0,144. Si* α *= 10%, K = 1,22.*
En conclusion, on ne peut affirmer que les différences observées entre les deux groupes s'écartent significativement de celles dues au hasard. Il semble que les deux groupes présentent des caractéristiques identiques quant à la résolution des questions liées à la réciproque du théorème de Thalès appliquée dans les cas les plus simples. Les deux classes de troisième peuvent être considérées équivalentes à ce sujet.

Etude de la réciproque pour les autres figures

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Groupe1	0	0	1	1	0	0	2	0	3	0	17	24
Cumulé	0	0	1	2	2	2	4	4	7	7	24	
Groupe2	0	1	2	3	0	1	6	1	2	4	3	23
Cumulé	0	1	3	6	6	7	13	14	16	20	23	
												47

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pr Cu 1	0	0	0,042	0,083	0,083	0,083	0,167	0,167	0,292	0,291	1
Pro Cu 2	0	0,043	0,130	0,260	0,260	0,304	0,565	0,609	0,696	0,870	1
d_i	0	0,043	0,088	0,177	0,177	0,221	0,398	0,442	0,404	0,579	0

Donc : **D = 0,579** ; puis $K = 0{,}579 \times \sqrt{\dfrac{24 \times 23}{24 + 23}}$, soit *K = 1,984. Si* α *= 0,2%, K = 1,86.*
Il y a moins de 0,2 chance sur 100 que les différences constatées entre les deux groupes soient le fruit du hasard. Il semble que les deux classes présentent des caractéristiques très différentes pour l'application de la réciproque dans des figures prototype avec des distributions de longueurs non classiques. Notons que des lectures directes des données sur les figures sont produites dans la classe (A.I) pour les écritures des rapports littéraux, mais que celles-ci sont beaucoup plus nombreuses dans la classe (S.I). Dans cette classe des non réponses sont également présentes.

III.4 Conclusion

Nous avons voulu tester les variables liées à l'orientation des figures, les différentes distributions des longueurs sur les dessins ainsi que les confusions éventuelles entre les deux théorèmes qui apparaissent dans notre ingénierie. Les classes de troisième ont tout d'abord été jugées équivalentes par rapport à l'application du théorème de Thalès aux figures prototypes. En ce qui concerne la prégnance du prototype I sur les figures pathogènes A et B et les lectures de droites à gauche appliquées aux figures pathogènes C et C', au niveau quatrième, aucune modification des résultats n'est apparue. Mais les erreurs ne sont pas commises aux mêmes endroits. Pour la classe (S.I), elles se situent au niveau des rapports littéraux et numériques alors que pour la classe (A.I), elles se trouvent dans les résolutions. Ce qui est dans ce cas un paradoxe puisque les équations sont censées être plus simples à résoudre. Au niveau troisième, la différence est significative. Elle est principalement due à des lectures "verticales" sur des dessins papillons, à des mises en équation plus longues et à des questions non résolues de la part des élèves (S.I). Par contre, dans les deux niveaux, il y a équivalence des classes (A.I) et (S.I) quant à la présence d'un angle aigu "vers le haut" (figure pathogène A'). En ce qui concerne les distributions de longueurs, pour les classes de quatrième, des différences sont apparues. Mais elles ne sont pas dues aux lectures directes sur les dessins mais principalement à des mises en équation, à des résolutions algébriques beaucoup plus complexes à tel point que de nombreux élèves (S.I) n'ont pas répondu à certaines questions. Pour les classes de troisième, de très grandes différences sont observées. Malgré tout, des mélanges sont apparus entre les deux théorèmes chez certains élèves (A.I) mais ces erreurs sont largement compensées par des mises en équations et des résolutions plus simples qui sont moins source d'erreurs. Nous avons plus particulièrement testé ces mélanges entre les deux versions et que ce soit en quatrième ou en troisième et ces résultats sont confirmés. Globalement, les classes de quatrième sont équivalentes. Mais en observant de plus près, nous avons tout de même obtenu des résultats différents. En ce qui concerne les classes de troisième, pour les figures non classiques dans leur totalité, les différences sont très significatives. L'approche de l'ingénierie est bénéfique. Globalement, sur l'ensemble du test, c'est à dire y compris en tenant compte des figures prototypes, les différences entres les classes (A.I) et (S.I) sont également significatives. Des différences significatives ont également été trouvées pour les figures prototypes papillons avec des distributions non classiques.

Conclusion de la quatrième partie

Au sujet des objectifs des activités proposées dans les deux niveaux, il est fondamental de bien distinguer les objectifs plutôt secondaires des fondamentaux.

I. En quatrième

Pour donner du sens au théorème de Thalès les principaux objectifs de la situation problème étaient de tenter de faire réellement travailler les élèves à travers une situation a-didactique se déroulant dans le méso-espace, de modéliser la situation, d'approcher l'obstacle des nombres irrationnels dans la démonstration et d'introduire une double version du théorème par l'intermédiaire de la proportionnalité interne et externe en ayant l'idée que cette approche pourrait éventuellement diminuer certaines difficultés dans la résolution de certaines tâches.

I.1 Les activités et la situation fondamentale

Globalement, nous pouvons dire que les activités au niveau quatrième se sont bien déroulées et que les principaux objectifs ont été atteints.

I.1.1 Les activités qui ont apprêté la situation fondamentale

Tout ce qui concernait l'apprêt de la situation fondamentale a relativement bien fonctionné. Par exemple, le tracé des ombres a été tout à fait correct. La conservation des directions relatives de l'escalier, le parallélisme de morceaux de ficelles sont obtenus relativement facilement par les élèves. De même le parallélisme des bandes et des ombres, le fait que l'ombre d'une bande est moins longue sur la table inclinée que sur la table horizontale, que les ombres sont plus grandes que les bandes. La méthode de calcul de la hauteur de la fenêtre de la salle de classe a été trouvée par les élèves, mais grâce à un ostensif inutile. Pour améliorer la situation nous pourrions justement supprimer l'écriture des quatre nombres sous forme de tableau. Plusieurs élèves ont ensuite participé à l'application et à la mise au point de cette méthode au calcul de la hauteur d'un panneau de basket. Ils ont trouvé seuls qu'il était nécessaire d'utiliser un objet de référence et de mesurer trois longueurs pour obtenir par calcul la hauteur cherchée. Un élève a pensé à réduire les longueurs pour représenter la situation. Mais les élèves n'ont pas réellement perçu l'utilité d'un tel schéma. Nous pensons que cela est dû au fait que dans la situation des bandes de papiers, ils sont passés rapidement au calcul pour faire apparaître la proportionnalité sans représenter la situation. Pour que la schématisation de la situation de mesure du panneau de basket soit vue par les élèves comme nécessaire, il faudrait tout d'abord prévoir une phase de représentation de la situation précédente. Les élèves ont su trouver trois écueils à cette méthode : les erreurs de mesures, le soleil bouge et l'ensoleillement peut ne pas être suffisant.

En ce qui concerne l'éclipse de soleil, les élèves ont bien trouvé le fait que les trois astres sont alignés. Mais une seule fiche réponse fait apparaître le fait que la lune cache le soleil bien qu'elle soit beaucoup plus petite. Ils ont bien compris également qu'un schéma à l'échelle est impossible. Lors de la représentation des situations de visée par des lorgnettes sur papier calque, ils ont également fait le lien avec la représentation de l'éclipse de soleil pour dire que la mire ne pouvait pas être représentée à la même échelle que les lorgnettes.

De plus, la représentation de la visée du soleil et de la lune à bien fait comprendre aux élèves que pour viser il est absolument nécessaire d'être bien en face et à la bonne distance.

I.1.2 La situation fondamentale et sa représentation dans le micro-espace

Les visées avec les lorgnettes se sont bien déroulées. Les élèves ont bien constaté le rassemblement en trois tas des cartons d'identification. Pour la visée avec la lorgnette à cinq trous, les élèves ont bien observé l'alignement des lieux de visée et le parallélisme de la droite qu'ils définissent avec la mire.

La représentation de la situation de visée dans le plan a été correctement réalisée par un élève au tableau et un autre élève sur sa feuille. Tous les autres élèves ont été d'accord après coup lorsqu'ils ont vu la représentation au tableau.

Les élèves ont trouvé les trois points importants qui devaient être dessinés sur papier calque pour représenter les lorgnettes, comme en particulier le centrage des milieux de la fente et du trou de visée pour lequel ils ont proposé deux méthodes différentes. Ensuite, les élèves ont bien trouvé les conditions de visée à l'aide des calques et le tracé des champs de visée, mais nous aurions pu les laisser synthétiser eux-mêmes ces remarques. L'équivalence de toutes les lorgnettes d'un même tas a été obtenue par un seul groupe. Les autres ont parfois trouvé l'équivalence de deux, trois ou quatre lorgnettes. Cela a plutôt bien fonctionné. Les dimensions des lorgnettes ont été consignées au tableau. L'opérateur multiplicatif par dix qui permet de passer d'un groupe de mesures à un autre a bien été observé par un groupe mais le lien avec la proportionnalité n'a pas été fait facilement.

I.1.3 Les conceptions des élèves apparues au cours des séances

Les élèves ont émis des idées qui étaient plus ou moins attendues et qui ont été mises en défaut par l'expérience. Un élève pensait au départ que les ombres au sol seraient plus petites que les ombres sur la table. Nous pourrions expliquer ce fait en imaginant qu'il devait penser que du fait que le sol est plus loin du soleil que la table, forcément l'ombre au sol doit être plus courte. Mais au cours de l'analyse du tableau synoptique rassemblant les différentes mesures, un élève a justement remarqué que pour une même bande, l'ombre au sol et celle sur la table sont de même longueur.

Un autre élève pensait devoir s'avancer pour viser avec la même lunette employée par un camarade sous prétexte que ce dernier était plus grand que lui. L'expérience lui a montré qu'il devait se placer au même endroit que son binôme. Et la modélisation lui a fait comprendre le phénomène. Cet élève a eu le réflexe de vouloir s'approcher peut-être parce qu'il pensait voir moins bien que son camarade plus grand. Nous pouvons imaginer que cette réaction relève des mêmes conceptions que celles qui soutendent l'idée précédente d'une ombre plus petite au sol que sur la table. Il serait très intéressant d'étudier plus en profondeur juste ce phénomène-là dans une étude ultérieure.

Au cours de la visée à l'aide de la lorgnette à cinq trous, un élève a tenté d'avancer, de reculer pour viser comme avec les lorgnettes précédentes. Cette réaction est compréhensible puisque la technique de se rapprocher et de s'éloigner de la mire a fonctionné tout au long de l'expérience. Les élèves reproduisent tout d'abord ce qui leur a réussi auparavant. Voyant que cela ne convenait pas, il a visé de biais. Et cela n'a pas fonctionné non plus. Il a finalement visé correctement, après une intervention de notre part.

I.2 Les démonstrations

En ce qui concerne la démonstration du théorème des milieux la première principale conjecture a été faite facilement par les élèves. Ils nous semble fondamental de remarquer que des élèves n'ayant pas parlé jusqu'à présent, le font volontiers maintenant et de façon tout à fait pertinente. L'activité de démonstration leur convient sûrement mieux. Ce n'est bien sûr pas nouveau, mais le bon fonctionnement d'une telle ingénierie dépend aussi de la capacité des élèves à sortir un peu du cadre traditionnel de l'enseignement pour réfléchir autrement. Visiblement, cela est difficile pour certains. Notons de plus que contrairement à ce qui c'est passé jusqu'à la démonstration, lorsqu'un élève prend la parole, il la garde.

La démonstration du théorème des milieux s'est déroulée convenablement dans l'ensemble et les principaux objectifs ont été atteints. Pour le cas du partage du côté d'un triangle en trois, la conjecture a été formulée un peu moins facilement que la précédente. L'application du théorème dans le triangle et dans un trapèze n'a pas posé de difficultés. Les différentes égalités de rapports ont été facilement trouvées par les élèves.

Lors du partage en quatre d'un côté d'un triangle, les élèves ont rapidement fait la conjecture que les trois parallèles en question partageaient l'autre côté en quatre segments également de même longueur. La démonstration s'est poursuivi naturellement, les élèves prenant l'initiative de la méthode. Ce phénomène s'est reproduit plus tard lors de l'encadrement d'une longueur dont la mesure est inconnue. Les élèves ont tout d'abord eu du mal à penser à diviser un côté du triangle en segments plus petits pour améliorer la précision de l'encadrement, mais ensuite la méthode a semblé aller de soi.

Pour la démonstration dans le cas de la division en quatre, ils appliquent successivement le théorème dans le triangle et celui du trapèze dans cette figure. La méthode précédente ayant fonctionné, ils emploient la même. Ils apprennent tout en répondant aux questions. Mais une méthode plus rapide aurait été possible. L'application du théorème au rang n dans une figure extraite de celle du rang n + 1 en finissant par l'application du théorème dans le trapèze dans la dernière partie de la figure. C'est justement cette méthode que les élèves ont employée, dans le cas du partage en quatre, pour obtenir les expressions des longueurs des segments parallèles.

La méthode du tracé de parallèles à partir des points de division régulière d'un côté d'un triangle semble acquise par les élèves puisqu'ils l'ont initiée dans le cas décimal et dans le cas fractionnaire. Au détail près que pour les cas 0,6, la division en dix segments n'a pas été proposée rapidement. Toute la démonstration a été menée par l'expérimentateur. Les élèves ont pris peu d'initiatives. La démonstration du théorème de Thalès demandait l'utilisation du théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle, ce que les élèves ont fait.

Les élèves de quatrième ont correctement sélectionné les triangles dans lesquels ils auraient appliqué le théorème s'ils en avaient eu le temps.

I.3 Conclusion

La première conclusion que nous pouvons titrer est le fait que le travail dans le méso-espace à l'aide d'une situation réellement a-didactique est quasiment impossible. L'écart entre ce que sont capables de faire les élèves, ce à quoi ils sont habitués et le nouvel espace dans lequel nous leur proposons de travailler engendre le fait que la situation est difficilement a-didactique. La prise de mesures dans le méso-espace se prête mal à la formulation de conjectures. Nous avons réussi à réellement travailler dans le méso-espace mais à l'aide d'une situation didactique. Prendre en compte les deux conditions est matériellement quasi impossible compte tenu du temps que cela demanderait.

La modélisation dans le micro-espace a bien fonctionné.

Les élèves ont bien sûr éprouvé de nombreuses difficultés au cours de la démonstration qui concernait le cas d'une longueur dont nous ne pouvions pas connaître la mesure, mais cela est bien sûr naturel. Mais il semble qu'à terme, ils ont compris au moins le fonctionnement de cette démonstration. Il est bien sûr évident que cela fonctionnera mieux avec des élèves de troisième, d'une part parce qu'ils doivent mieux maîtriser les outils algébriques qui sont nécessaires et d'autre part parce qu'ils seront un peu plus familiarisés avec les nombres irrationnels.

La situation fondamentale que nous avons proposée au départ ne permettait d'introduire que la version d'un théorème liée à la proportionnalité externe. Cette introduction a porté ses fruits. Mais il a été nécessaire d'introduire la proportionnalité interne autrement. Cette nouvelle introduction n'a pas bien fonctionné. Il est indispensable de réfléchir à une autre façon d'introduire l'égalité des trois rapports. Le sens de ces deux proportionnalités a été totalement pris en charge par l'expérimentateur.

I.4 Analyse des difficultés et critiques a posteriori

Les difficultés rencontrées au cours de la mise en place de l'ingénierie ont été de cinq sortes.

Soit la situation était longue et des prises de mains intempestives de la part de l'expérimentateur ont été faites ou alors des approfondissements de questions n'ont pas été produits. Ce que nous pouvons dire c'est que toute l'ingénierie, que ce soit au niveau quatrième qu'au niveau troisième, a été fastidieuse à mettre en place et que cela a eu des conséquences sur son déroulement.

Ainsi, dans certaines activités et pour certains points en particulier, il aurait été tout à fait possible de laisser plus de liberté et d'initiative aux élèves comme par exemple pour le tracé de l'ombre de l'escalier. De même, lors de la visée avec la lorgnette aux cinq trous, nous aurions pu laisser l'élève trouver de lui-même que la visée de biais ne convenait pas. La lorgnette avait été conçue de telle façon qu'il se serait aperçu que même si les extrémités de la mire et de la fente de la lorgnette coïncidaient, de toute façon les deux milieux eux ne coïncidaient pas. Le manque de temps ne nous a pas permis de réagir de cette manière.

Il en va de même pour les discussions que nous aurions pu faire naître au sujet des différents dessins proposés par des élèves représentant la situation de visée.

Mais parfois, le nombre de variables de la situation était tel que ces prises de main de la part de notre part étaient inévitables comme ce qui concerne par exemple les paramètres de l'escalier.

D'autre part, par manque de temps, des remarques tout à fait pertinentes, comme le fait qu'un élève ait remarqué que deux ombres avaient la même mesure, n'ont pas pu aboutir à un questionnement plus en profondeur.

Une prise de main a été intempestive de notre part. Un élève voulait démontrer une égalité de longueur, puis une deuxième sachant qu'il n'y avait aucune longueur commune entre ces deux égalités. La transitivité n'aurait pas permis de conclure à une égalité de trois longueurs. Au lieu de faire justement cette remarque, il aurait fallu laisser faire les élèves pour qu'ils se rendent compte par eux-mêmes de l'impasse finale à laquelle ils auraient été confrontés et de l'argument supplémentaire qu'il aurait été nécessaire d'employer alors.

Au cours de l'application des théorèmes dans méso-espace, nous avons nous-mêmes représenté la situation alors que les élèves ayant bien compris le problème, ayant correctement visé le point en question, auraient tout aussi bien pu le faire eux-mêmes. Mais le temps a encore une fois manqué.

Soit les questions soulevées dénotaient pour les élèves de réelles difficultés conceptuelles plus ou moins importantes et qui ne sont pas étonnantes.

Ainsi, le parallélisme des rayons du soleil n'a pas été mis facilement en relation avec le parallélisme des ficelles, ce qui n'est pas étonnant puisqu'il s'agit d'une modélisation imposée par la situation. Les élèves n'ont pas eu à innover ou à réfléchir a priori sur cette modélisation. Ils sont interrogés après coup. Nous avons retrouvé cette difficulté liée aux rayons parallèles lors de la phase de représentation de mesure de la hauteur du panneau de basket.

Toujours dans cette situation liée aux bandes et à leurs ombres, la proportionnalité des rapports n'a pas non plus été immédiate. Trop de mesures étaient présentes dans le tableau. Cela relève d'une difficulté moindre que la précédente mais il a fallu que nous sélectionnions nous-mêmes les nombres pour que les élèves trouvent immédiatement des égalités de rapports. Par contre, le fait que ces égalités de rapports veuillent dire qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité n'est pas ressorti rapidement. Nous rajoutons que ce constat a été fait pour des coefficients multiplicatifs plus simples dans le cadre de l'activité avec les lorgnettes. Les élèves ont remarqué que pour passer d'un groupe de nombres à un autre il fallait multiplier par dix sans relier cela à la proportionnalité. Mais le coefficient de proportionnalité semble venir à l'esprit des élèves en dernier. Lorsque la linéarité est perçue par les élèves, la proportionnalité ne l'est pas et inversement. Plus précisément, si le coefficient de proportionnalité n'est pas évident, comme cela a été le cas pour tous les groupes sauf un, d'une part les élèves calculent plus facilement des rapports de nombres et ainsi la linéarité n'est pas perçue, et à l'inverse si le coefficient multiplicateur est facilement perceptible, les propriétés de la linéarité de sont pas observées. Tout cela n'est pas l'objet proprement dit de notre étude, mais encore une fois il serait intéressant de creuser la question.

Pour également améliorer cette partie de l'expérience, avec un peu plus de temps, il serait possible de rajouter plusieurs bandes de mêmes longueurs placées sur des fenêtres différentes et à des hauteurs distinctes dans le but de montrer que la mesure de l'ombre d'une même bande ne dépend ni de la fenêtre ni de sa position sur celle-ci.

Revenons à l'activité éclipse de soleil. L'idée que l'alignement de la terre, de la lune et du soleil suffise à obtenir une éclipse de soleil est naturelle pour les élèves. Ils supposent implicitement que les distances en question sont constantes. Donc il n'y a aucune raison qu'ils s'interrogent sur celles-ci. Nous aurions pu leur poser la question suivante : que se passe-t-il si les distances sont constantes et si elles ne le sont pas ? Dans un cas, la trajectoire décrite est un cercle dans l'autre une ellipse ou plutôt pour des élèves de ce niveau un ovale. Il aurait également fallu que nous fassions un schéma, après les activités liées aux lorgnettes, pour montrer que l'alignement n'est pas suffisant. Nous n'avons encore une fois pas eu le temps de poser ces questions. Les conditions sont bien sûr demeurées floues pour les élèves. Une amélioration de la situation que nous avons proposée est possible à ce niveau.

Le fait que les élèves aient représenté la situation de visée avec les lorgnettes dans l'espace à trois dimensions est tout à fait logique puisque les manipulations se passaient dans cet espace. Le fait de la représenter dans le plan est déjà le début de la modélisation. Après notre intervention pour inciter les élèves de représenter la situation dans le plan, deux élèves l'ont bien fait. Tous les autres soit ont mélangé le plan et l'espace et ont obtenu des schémas hybrides, soit ont oublié un ou plusieurs paramètres soit ont fait des dessins incompréhensibles. D'autres interactions entre le plan et l'espace ont été relevées au cours de la modélisation des lorgnettes sur papier calque. Ainsi, des longueurs situées dans un plan différent que celui du plan de visée ont été représentées par certains élèves. Pour qu'une prise de conscience de la part des élèves que la situation proposée est bien un problème plan plongé dans l'espace, il faudrait prévoir une phase d'institutionnalisation de la construction des schémas car cela ne va pas de soi.

En ce qui concerne la démonstration, l'une des principales difficultés conceptuelles que nous avons relevée est liée au fait que les élèves ont réellement du mal, lorsqu'il s'agit de rédiger un théorème qui vient d'être démontré, de distinguer les données de ce qui reste encore à définir dans l'énoncé pour conclure. Cela s'est révélé pour la rédaction des deux théorèmes. Il y a un mélange entre l'appréhension séquentielle et l'appréhension discursive de la figure. Si nous avions eu un peu plus de temps, nous aurions pu compléter notre ingénierie en travaillant à partir d'un déductogramme sur la rédaction du texte d'un théorème qui vient d'être démontré.

Une autre difficulté est à rattacher au fait que les calculs fractionnaires ne sont pas au point au niveau de la classe de quatrième. Mais à terme, les élèves sont devenus de plus en plus habile dans les multiplications et les simplifications de fractions sans avoir bien sûr reçu les justifications théoriques de ces manipulations.

De plus, dans la démonstration du résultat lié à un côté d'un triangle partagé en trois segments de même longueur, les rapports des mesures des longueurs des trois ou des quatre segments à supports parallèles, n'ont pas été trouvé facilement par les élèves. Pour cela, ils ont été guidés par l'expérimentateur. Dans le cas fractionnaire général, cette difficulté a persisté.

De même, dans la suite de la démonstration, les manipulations d'encadrement n'ont pas été évidentes pour les élèves. En particulier l'amélioration de la précision d'un tel encadrement, par diminution des longueurs des segments découpant un côté d'un triangle ce qui engendre le fait que les extrémités du segment contenant un point D fixé se rapprochent, ne sont bien sûr pas des idées qui viennent naturellement à l'esprit d'un élève de quatrième.

Soit des carences dans des connaissances disponibles de la part des élèves ont été remarquées.

Par exemple, les trois caractérisations d'un parallélogramme ne sont pas toutes disponibles de la même façon. La moins disponible pour les élèves est celle qui concerne quadrilatère convexe dont deux côtés sont de même longueur et à supports parallèles. De plus il est arrivé que les élèves aient mélangé les caractérisations. De même la justification du fait que FN = FM + MN lorsque le point M appartient au segment [FN] n'est pas donnée.

Les méthodes de résolution d'équations simples ne sont pas non plus disponibles de la part des élèves.

A de nombreuses reprises, proportionnalité liée aux mesures de la situation avec les lorgnettes, proportionnalité des rapports obtenus après démonstration du théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle, les élèves n'ont pas fait le lien entre des égalités de rapports et la proportionnalité des nombres qui les composaient.

Soit les conditions, les variables et les contraintes naturelles ne permettaient pas un déroulement complet de la situation.

Ainsi, le soleil rasant n'a pas permis à certains groupes de mesurer la longueur de l'ombre des bandes au sol.

Dans un autre ordre d'idée, la mesure des distances dans la cour, du fait que les unités utilisées ne sont pas familières aux élèves, a posé quelques petites difficultés pratiques.

Soit la question était mal posée ou bien des maladresses ont été commises dans la mise en place.

Ainsi, lorsqu'un élève nous propose d'utiliser deux mesures pour calculer la hauteur de la fenêtre de la salle de classe, nous consignons ces mesures dans un tableau de proportionnalité. Il aurait été judicieux de laisser les élèves trouver cette situation de proportionnalité sans se référer à un tel ostensif.

De même, aucune méthode n'était imposée pour représenter la situation de mesure de la hauteur du panneau de basket à l'aide de la technique précédente. Ce qui fait que les élèves ont tous effectué les calculs avant de représenter les lattes, le panneau et leurs deux ombres, sans matérialiser les rayons parallèles. L'énoncé de la question aurait dû imposer de représenter tout d'abord la situation pour ensuite mesurer sur le schéma la hauteur du panneau qui aurait été calculée dans un dernier temps. Le lien entre le numérique et le géométrique a été mal établi. C'est un point qu'il faudrait reprendre.

La question de savoir comment nous allions pouvoir bien comprendre le phénomène de l'éclipse a été mal formulée. Les élèves ont éprouvé beaucoup de difficultés à penser au schéma représentant la situation. Nous avons dû intervenir plusieurs fois pour débloquer la situation.

De même, les élèves ont obtenu la proportionnalité entre les longueurs des lorgnettes et celles des fentes, mais, d'une part, très peu ont correctement représenté les situations de visée à l'aide de la lorgnette à cinq trous et d'autre part aucun n'a pu obtenir d'autres types de proportionnalité à partir de ce dessin. Nous pensons qu'il est nécessaire de réfléchir à une autre façon d'introduire l'égalité des trois rapports, car même après la démonstration du théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle, lors de la tentative que nous avons faite de leur faire découvrir la proportionnalité des segments aux supports parallèles avec des segments sur les deux autres côtés d'un triangle par un retour à la représentation d'une lorgnette et de la mire, les élèves n'ont pas proposé ce rapport.

La démonstration des propriétés liées au partage d'un côté d'un triangle en trois ou quatre segments de même longueur et au tracé de deux ou trois parallèles à un second côté à fait apparaître une maladresse dans les expressions des longueurs des segments parallèles qui étaient demandées. En effet, sachant qu'à cette période de l'année les élèves n'étaient pas au point au sujet des calculs fractionnaires autre que la réduction au même dénominateur ou à l'addition de deux fractions, plutôt que d'exprimer des relations à l'aide de fractions, il aurait été plus judicieux de faire intervenir des doubles, des triples, des quadruples. Les difficultés des élèves auraient été moindres.

Lors de la démonstration du théorème dans le cas irrationnel, il était demandé de comparer trois longueurs. Les élèves ayant travaillé jusqu'à présent sur des fractions, ils n'ont pas eu l'idée de comparer les mesures de ces longueurs. Cette question devrait être posée différemment.

Mais certaines prises de main n'étaient dues ni à un manque de temps, ni à la complexité des notions, ni aux conditions naturelles, ni au fait qu'une question était mal posée.
Par exemple, l'indépendance de la mesure de l'ombre d'une bande par rapport à la fenêtre sur laquelle elle est fixée n'a pas été évoquée facilement par les élèves. Le fait que lorsque deux bandes ont la même longueur, leurs ombres sur un plan parallèles ont aussi la même longueur n'est pas une remarque bien difficile à formuler, n'a pas dépendu du temps et par contre est un objectif fondamental de cette partie de l'activité. Cela n'a pas bien fonctionné. Pour améliorer la situation, nous pensons utile de placer plus de deux bandes de même longueur sur de fenêtre et à des hauteurs différentes. Le fait qu'il n'y ait eu pour chaque bande que deux représentants n'a pas suffi à faire émerger la remarque sur l'indépendance de la longueur de l'ombre par rapport à la place occupée par la bande de papier.

II. En troisième

II.1 Les démonstrations

II.1.1 Du contre exemple, du théorème (DPCT) et du théorème de Thalès

La démonstration géométrique de l'irrationalité de racine de 2 a été menée par l'expérimentateur, mais les élèves ont avancé facilement dans les tâches, sauf pour donner une interprétation topologique à des inégalités algébriques. Une fois les triangles choisis, les élèves ont très vite démontré que les longueurs AE, EF et EB étaient égales. Les élèves ont une première fois éprouvée des difficultés à appliquer l'inégalité triangulaire, mais la démonstration étant justement itérative, ils ont été moins embarrassés la fois suivante. Les conclusions ont toutes été données par les élèves. Ils ont bien vu que le processus se reproduit à l'infini et qu'ainsi il peut ne pas y avoir de mesure commune entre deux segments.

Le théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle a bien été mis en rapport par les élèves avec le théorème des milieux. La démonstration s'est bien déroulée mis à part les propriétés des parallélogrammes qui n'étaient pas toutes disponibles.

Le cas de division du côté d'un triangle en trois parties a été démontré par les élèves sans trop d'interventions de notre part. Ainsi, le théorème dans le trapèze a été démontré de façon autonome par les élèves qui ont su l'appliquer ainsi que le théorème des milieux dans cette première étape de la démonstration. Le cas de division en quatre n'a pas posé de problème. Ils ont même pensé à faire chevaucher le triangle et le trapèze dans lequel ils ont appliqué les deux théorèmes correspondants afin de déduire que trois puis quatre longueurs étaient égales. Les égalités de rapports ont été tout aussi facilement trouvées. Mais pour étendre la méthode à un cas fractionnaire, comme les élèves de quatrième, les élèves de troisième n'ont pas eu immédiatement l'idée de diviser le côté du triangle en un nombre adapté de segments et de tracer les parallèles à partir de ces points de division. Mais la suite de la démonstration c'est à peu près bien déroulé mis à part les difficultés liées aux calculs sur les inégalités. Il est tout de même remarquable qu'un élève ait trouvé seul, sans informations de l'extérieur, que les encadrements successifs engendraient que la différence des rapports tendait vers zéro.

Dans la démonstration du théorème de Thalès dans le cas "gigogne", les élèves n'ont pas pensé à appliquer le théorème de la droite parallèle. Mais l'application de ce dernier a été par deux fois bien faite de leur part. Ensuite, la transitivité de l'égalité n'a pas posé de problème pour démontrer l'égalité de rapports finale. Le théorème a été rédigé toujours avec les mêmes difficultés. Bien que les explications sur les proportionnalités internes et externes et leur application au théorème de Thalès aient été donnée par l'expérimentateur, les élèves semblent avoir compris les différences entre ces deux approches et leurs intérêts.

Le fonctionnement des lentilles semble avoir été compris par les élèves. Les mesures demandées ont été prises correctement et les schémas explicatifs de l'expérience ont été effectués en suivant les directives et les définitions de la séance.

La démonstration du théorème de Thalès dans la figure "papillon" a débuté, contre toute attente, par la citation par les élèves des propriétés liées aux symétries centrales qui permettent d'utiliser le cas "gigogne" pour démontrer ce dernier cas de figure. Ils ont effectué cette démonstration seuls, certes en suivant les directives mais il l'ont menés sans trop d'interventions de notre part.

II.1.2 De la réciproque du théorème de Thalès

Au sujet de la réciproque, l'objectif de bien fixer la seconde ficelle sur la branche "mécano" a été atteint par tous les groupes. Par ailleurs presque tous nous ont montré avec des gestes que certains rapports étaient égaux. Contrairement à ce qui était apparu dans une expérience précédente, ils ne considèrent pas ici qu'il est nécessaire d'avoir la même unité pour mesurer quatre mesures de longueurs que l'on utilise pour former deux rapports. Ils considèrent ici que la même unité doit être employée seulement pour former un rapport de longueurs. La seconde condition pour que le parallélisme soit établi a été trouvée par un ou deux élèves. Mais la description s'est faite sur le montage de pièces "mécano". Les difficultés sont apparues lorsqu'il a fallu traduire cela par des phrases cohérentes intégrées dans un théorème à démontrer. Mais les élèves y sont tout de même parvenus.

La remise en ordre de l'organigramme de la démonstration de la réciproque a été relativement facile pour les élèves. Ce qui l'a été un peu moins c'est la rédaction du texte du théorème.

II.2 Idées émises par les élèves que la situation a permis de réfuter

En classe de troisième nous avons voulu tout d'abord tester les élèves sur la mesure des longueurs et voir les difficultés et préconstruits qu'ils éprouvaient à ce sujet dans le but de nous en servir lors de la mise en évidence d'un nombre irrationnel qui sera utile dans la démonstration des deux propositions, le théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle et le théorème de Thalès.

Ainsi, trois raisons ont été émises par les élèves pour justifier le fait qu'il n'est pas toujours possible de trouver la longueur exacte d'un segment en le mesurant directement. Le segment pourrait être trop long pour un double décimètre. Mais cela a été réfuté par de nombreux autres élèves. L'unité à employer peut-être très petite et ainsi, à un moment il ne serait plus possible de lire la mesure de la longueur. Cet argument n'a pas été réfuté même par un élève non redoublant qui a pourtant évoqué les racines carrées. Nous pouvons conclure que tous les élèves, sauf une exception, pensent qu'il est possible d'obtenir la mesure exacte de tous les segments sauf lorsque les unités deviennent trop petites. Mais cette idée est bien sûr naturelle. Il n'y a aucune raison que les élèves pensent autrement, sauf pour l'élève M qui est vraiment un cas particulier.

Une très large majorité pense également que deux segments sont toujours commensurables. Seulement trois élèves pensent le contraire sans invoquer de raisons précises. Même M ne fait pas appel aux racines carrées dans ce cas. La démonstration géométrique sur l'irrationalité de racine de deux a permis justement de réfuter ces deux idées.

Dans la démonstration du théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle, dans le cas irrationnel, les élèves ont considéré que les projections conservent les longueurs. Mais ce n'est pas la situation qui a réellement permis de réfuter cette idée mais uniquement l'observation de la figure.

Les situations n'ont pas été a-didactiques. Mais l'approche interne externe de la proportionnalité ainsi que la démonstration dans le cas irrationnel ont bien fonctionné.

II.3 Analyse des difficultés dans la mise en place de l'ingénierie

Les difficultés en troisième ont été de trois sortes.

Soit la situation était longue et des prises de mains intempestives de la part de l'expérimentateur ont été faites ou alors des approfondissements de questions n'ont pas été produits.

Ainsi, dans la démonstration géométrique de l'irrationalité de racine de 2, nous avons nous-mêmes expliqué pourquoi b était contenu un fois mais pas deux dans BC alors que les élèves avaient tous les outils pour faire cette remarque, mais le temps a manqué. Il en a été de même pour le choix des triangles permettant de démontrer l'égalité de trois longueurs.

Dans la rédaction finale du théorème prenant en compte les deux figures "gigogne" et "papillon", nous avons pris totalement la main car le temps manquait réellement. Les élèves n'ont rien rédigé eux-mêmes à ce moment.

Soit les questions soulevées dénotaient pour les élèves de réelles difficultés conceptuelles plus ou moins importantes et qui ne sont pas étonnantes.

Le lien entre des inégalités algébriques liées à des longueurs de segments et leur signification quant à la position des points en question les uns par rapport aux autres est difficile pour les élèves.

L'inégalité triangulaire a bien sûr posé quelques difficultés qui finalement se sont estompées au fur et à mesure au cours de la démonstration.

Comme les élèves de quatrième, les élèves de troisième ont eu quelques difficultés à mettre en relation des égalités de rapports et la proportionnalité, comme ils ont eu du mal aussi à mettre en relation des parties de leur cours. Ainsi, ils n'évoquent pas facilement la possibilité pour un rapport de deux longueurs de ne pas être rationnel alors qu'ils ont abordé géométriquement les racines carrées.

De même, comme les élèves de quatrième, les élèves de troisième ont eu quelques difficultés avec les encadrements en particulier dans la partie de la démonstration dans le cas irrationnel. L'encadrement de la longueur AD de mesure irrationnelle n'a pas été trouvé facilement comme celui des rapports de longueurs et de leurs opposés. De nombreuses choses ont été confondues : mesure et nombre de petits segments.

Dans les démonstrations, la rédaction des textes des théorèmes démontrés a posé de grandes difficultés aux élèves.

Soit des carences dans des connaissances disponibles de la part des élèves ont été remarquées.

Ainsi, la propriété des deux droites parallèles à une troisième n'a pas été évoquée rapidement par les élèves comme d'ailleurs l'égalité des longueurs de deux côtés opposées dans un parallélogramme lors de la démonstration de l'égalité des trois rapports.

Les élèves de troisièmes ont aussi du mal à rédiger l'énoncé d'un théorème qu'ils viennent de démontrer. Ils ne savent pas vraiment ce qui est à leur disposition où ce qui doit être encore défini dans cet énoncé.

Dans l'activité avec les lentilles, la relation entre les longueurs que les élèves ont prises n'a pas été trouvée facilement. Nous avons dû prendre la main en entourant certaines de ces longueurs dans le tableau récapitulatif. Mais une fois une égalité de rapport mise en évidence, les élèves n'ont pas fait le rapprochement avec la proportionnalité. C'est décidément un problème auquel il faudrait réfléchir.

II.4 Pistes d'améliorations de l'ingénierie

Nous pouvons nous poser la question de savoir s'il n'y a pas moyen de modifier l'ingénierie dans le but de l'améliorer en consacrant éventuellement plus de temps à certaines parties. De toute façon, certains problèmes que nous avons rencontrés ne sont pas spécialement inhérents à nos situations mais semblent généraux. Ainsi, ce que nous avons noté au sujet de la proportionnalité, de la rédaction d'un théorème est tout à fait général. Un travail en profondeur est a entreprendre en aval au sujet de la proportionnalité pour que la linéarité et les égalités de rapports soient facilement associées à la proportionnalité et inversement par les élèves. Mais ce n'est pas dans le cadre de notre ingénierie de notre ingénierie qu'un tel travail pouvait prendre place. Par rapport à la démonstration, un apprentissage de la rédaction d'un énoncé d'un théorème qui vient d'être démontré semble également fondamental. Toujours en dehors de notre ingénierie, un travail intéressant et important est à mener au sujet des connaissances disponibles. L'étude pourrait chercher à savoir dans quelle mesure les enseignants exigent des mises en fonctionnement du niveau des connaissances disponibles dans des exercices posés en travaux dirigés, à la maison ou en contrôle. Car en quelque sorte, en paraphrasant une expression populaire, les connaissances réellement acquises sont celles qui restent lorsque l'on a tout oublié. Dans un démonstration aussi complexe que celle du théorème de Thalès, nous avons pu nous rendre compte que de nombreuses connaissances disponibles mais simples ne l'étaient pas pour les élèves. Nous pouvons et nous devons nous interroger à ce sujet.

Par contre, dans le cadre strict de notre ingénierie, nous pouvons nous demander comment nous pourrions procéder pour prendre en compte un peu plus la problématique pratique qui n'a pas été suffisamment développée. La situation fondamentale aurait pu être a-didactique, ce qui n'a pas été vraiment le cas. Pour commencer, bien que onze séances ont été nécessaires tant en quatrième qu'en troisième, deux ou trois séances supplémentaires auraient sans doute permis de diminuer le nombre de prise de main de notre part. En effet, à de nombreuses occasions, les élèves avaient largement les matériaux et les moyens de répondre seuls aux questions. De plus cela aurait permis également d'approfondir certaines questions posées par des élèves. Il serait alors possible de nous opposer l'idée que trois semaines passées sur l'introduction et la démonstration d'un seul théorème peut sembler peu réaliste. Mais encore une fois, sachant que cela se produirait que pour un seul chapitre qui constituerait les fondations d'un cours, d'une part cela serait un gain de temps ultérieur pour l'introduction de nombreuses autres notions au programme et d'autre part, un sens seraient donnés aux concepts.

Enfin, il est évident qu'un travail au préalable sur les fractions, en particulier sur les produits, doit être réalisé. Il nous reste à réfléchir à une situation qui puisse être réellement a-didactique, même si cela semble très difficile pour notre sujet, et à une situation d'introduction du troisième rapport.

II.5 Influence de l'ingénierie sur les variables didactiques vis à vis des élèves

En ce qui concerne la comparaison de deux types de classes, avec ingénierie (A.I) et sans ingénierie (S.I), au départ, nous avons montré l'équivalence de ces deux types de classes pour les deux niveaux de quatrième et de troisième que ce soit pour l'application du théorème direct ou pour la réciproque dans des figures classiques. Ensuite, pour les différentes variables testées, nous avons parfois obtenu des caractéristiques différentes qu'il nous a fallu comprendre. Mais nous avons également parfois trouvé des caractéristiques identiques. Deux cas étaient alors possibles. Soient les classes étaient réellement identiques du fait qu'elles avaient commis les mêmes erreurs. Soient elles étaient identiques par compensation, c'est à dire qu'elles avaient le même pourcentage d'erreurs mais des types d'erreurs totalement différents.

Ainsi, nous avons trouvé que les différences des résultats obtenus sur l'orientation des figures par les élèves de troisième et de quatrième dans les deux types de classes n'étaient pas significatives. De même pour les figures faisant apparaître un angle aigu vers le haut ou sur la gauche. A la différence près que dans ce cas, quelques erreurs significatives ont été commises par les élèves de troisième (S.I). En ce qui concerne la distribution des longueurs, nous avons trouvé des différences significatives. Dans les classes de quatrième, ce n'est pas sur les écritures littérales fausses ou sur la lecture directe sur la figure menant à des écritures numériques fausses que cela se joue, mais dans les mises en équation plus complexe pour les élèves (S.I) et dans les résolutions des ces équations qui demandent une maîtrise des techniques de calculs algébriques et numériques. De plus, cette complexité plus accrue a engendré un grand nombre de non réponses. Dans le cas de la classe de troisième (S.I), le pourcentage de non réponse est très élevé. De même, les lectures directes sur les dessins pour former les rapports littéraux sont plus élevées que pour les élèves (A.I). De plus les élèves (S.I) ont parfois écrit des rapports numériques faux après avoir trouvé des rapports littéraux justes. Enfin, la distribution des longueurs peu classique a entraîné des résolutions fausses, incomplètes ou non commencées de leur part. Par contre, dans la classe (A.I) quelques mélanges entre les deux théorèmes ont été commis mais pour les élèves (S.I) cela est compensé par les erreurs que nous venons de relever. Le gain obtenu grâce à des mises en équation et à des résolutions plus simples compense les nouvelles erreurs dues au mélange. Un test en troisième et en quatrième a été mis en place pour étudier plus précisément cet effet de mélange des deux théorèmes. Les erreurs commises par les élèves (A.I) sont effectivement compensées par des mises en équation et des résolutions beaucoup plus complexes qui engendrent de très nombreuses erreurs de la part des élèves (S.I). De plus dans ce cas le nombre de non réponse est plus important. Les caractéristiques sont identiques entre les deux types de classes (A.I) et (S.I) mais par compensation. Globalement, par rapport aux figures non classiques que nous avons testées, les deux types de classes de quatrième sont équivalentes. Mais les erreurs ne portent pas sur les mêmes problèmes. Par contre, pour les deux types de classes de troisième, ces résultats globaux sont très différents. Les caractéristiques sont également très différentes lorsque nous testons globalement ces deux classes de troisième sur les figures classiques et non classiques. De même, les caractéristiques sont très différentes quant à l'application de la réciproque dans des figures prototypes avec des distributions non classiques. Dans ces deux derniers cas, une amélioration semble apportée par la version que nous avons choisie.

CONCLUSION GENERALE

Le but de cette étude était de construire une ingénierie didactique liée au théorème de Thalès. La principale question sous-jacente, qui nous conduit tout d'abord à réfléchir sur l'histoire et l'épistémologie du théorème de Thalès, est la recherche de ses fonctionnalités dans l'enseignement au collège. Toujours dans un souci de recherche du sens, nous exposons ce que nous avons mis en évidence au sujet des variables didactiques figurales et numériques liées à ce théorème. Enfin, nous nous sommes intéressés à son enseignement actuel, en particulier aux activités qui sont censées l'introduire dans des ouvrages et des préparations de cours de professeurs. Il s'agissait de savoir si ces activités font apparaître une problématisation du théorème à travers une situation a-didactique. Nous nous sommes également interrogés sur ses mises en fonctionnement en analysant avec précision les exercices contenus dans ces ouvrages et des contrôles de professeurs.

L'ensemble de ces observations nous a guidé dans la construction d'une ingénierie didactique. Nous terminons par l'analyse de sa mise en place, de ce qui a bien ou mal fonctionné et des effets qui ont été obtenus auprès des élèves, et par les questions que pose notre travail.

I. Première partie

Nous avons analysé le contexte culturel et mathématique de la démonstration du théorème de Thalès afin de mettre en évidence son sens.

Ce sens a deux composantes :

• une composante externe aux mathématiques qui apparaît à travers des situations rencontrées au cours de l'histoire

• et une composante interne liée aux divers énoncés, à leurs démonstrations analysées par le biais des obstacles qui leur sont associés, des problématiques et de l'organisation praxéologique dont elles relèvent ainsi que les champs conceptuels dans lesquels s'est successivement inscrit ce théorème, et enfin aux fonctionnalités qu'il est historiquement possible de lui rattacher par le biais de l'étude de son vieillissement interne.

I.1 Composante externe

Le théorème de Thalès, au cours de l'histoire, est lié au méso-espace. Nous avons identifié deux types de situations :

- la mesure de distances inaccessibles, comme le calcul de la hauteur d'un édifice, de fortifications,

- la détermination d'une distance au sol ou la recherche et la construction d'échelles, surtout à la fin du XVIII ème siècle et au début du XIX ème comme dans Bezout.

Cependant ces résolutions venaient presque exclusivement *a posteriori* et ainsi ne légitimaient en aucun cas son étude *a priori* et, en outre, les problèmes liés au méso-espace étaient directement interprétés dans le micro-espace sans se soucier d'un travail effectif dans le méso-espace ni de la problématique de modélisation de ce travail.

Cette présentation constante s'explique simplement par le fait que l'idée de proposer une motivation à l'étude d'une propriété au début d'un cours est assez récente et que de plus l'espace de travail proposé par les ouvrages relève naturellement du micro-espace ce qui rend difficile la mise en place de travaux dans le méso-espace.

Pour la construction de notre ingénierie, nous avons retenu la mesure effective de distances inaccessibles dans le méso-espace et la modélisation de ces actions dans le micro-espace.

I.2 Composante interne

D'un point de vue interne aux mathématiques, le sens peut être apporté par une approche "objet" du théorème liée à la forme de l'énoncé, à sa démonstration et par un axe "outil" rattaché à ses fonctionnalités mathématiques.

I.2.1 Cadre mathématique

Nous avons rencontré pléthore d'énoncés en particulier ceux :

de la droite parallèle à un côté d'un triangle,
de la droite parallèle aux bases d'un trapèze,
de l'angle aux bases parallèles,
des faisceaux de parallèles,
des faisceaux de droites sécantes,
des bandes ou des espaces parallèles,
des parallèles équidistantes,
des angles ou des triangles semblables, des triangles équiangles,
sur des segments et leurs projetés sur une droite,
sur les rapports de deux vecteurs et leurs projetés,
sur la conservation des abscisses.

Dans tous les cas, le théorème de Thalès fait intervenir deux droites sécantes et des droites parallèles entre elles.

Pour organiser les énoncés, il nous a semblé intéressant de les classer en **deux catégories.**

- Tout d'abord, **l'aspect proportionnalité** en rassemble plusieurs types qui font intervenir des segments portés par deux droites sécantes.

La version **proportionnalité interne** compare deux rapports de longueurs, chacun d'eux concernant des segments portés par une même droite. Ces segments peuvent être obtenus sur deux côtés d'un triangle par une parallèle au troisième côté, comme dans les Eléments d'Euclide, par l'intermédiaire d'un angle, comme dans Arnauld, d'un trapèze comme au début du XX ème siècle, de bandes ou d'espaces parallèles comme dans Vallory (1911) et Lamy, de projetés à partir de la fin de la première moitié du XX ème siècle ou de rapports de vecteurs dans les années 1960 et 1970.

Dans une version projection et **proportionnalité externe**, chaque rapport concerne les longueurs de deux segments de supports différents.

- **L'aspect homothétie**, fait intervenir en outre des segments portés par les droites parallèles regroupe plusieurs autres formes faisant référence à une proportionnalité externe. Il peut prendre la forme d'une version angles semblables, triangles semblables, comme dans Arnauld, dans F.I.C (1881) "Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.", ou triangles équiangles comme dans Euclide, Rouche Comberousse (1891). Il change avec l'introduction des vecteurs, de la conservation des abscisses (1968 et 1971), ou d'un axiome des espaces affines.

Historiquement, le théorème de Thalès a subi des **évolutions**, mais davantage dans le type de démonstration et dans l'approche nombres réels que dans la rédaction de son énoncé puisque, à ce sujet, les deux grandes catégories se retrouvent tout au long de l'histoire dans pratiquement chaque ouvrage.

Nous allons maintenant rappeler nos résultats liés à la forme de la démonstration et à l'approche des nombres réels qui distinguent un peu plus les variantes du théorème.

I.2.2 Le traitement des réels

Pour commencer, nous notons que suivant le type de démonstration, les nombres réels et la continuité de la droite peuvent clairement apparaître à la fin de la démonstration du théorème ou ailleurs. Ce fait nous a incité à remonter la démonstration jusqu'aux prémisses et justifie notre classement en deux catégories.

- *a) Démonstrations dans lesquelles les nombres réels sont présents à la fin.*

Cavalieri, dans sa méthode des indivisibles, utilise le continu pour admettre qu'une surface est composée d'une infinité de lignes. Legendre, comme Lacroix, démontre, grâce à la méthode d'exhaustion qui consiste à procéder à un double raisonnement par l'absurde, que les rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases et admet deux résultats sur le continu. Les tentatives de démonstration du ***postulatum*** ont amplifié les utilisations implicites du continu comme De la fin du XIX ème siècle aux années 1970, certains auteurs emploient, à trois niveaux de complexité théorique différents, une méthode des limites par encadrement liée aux suites adjacentes non pas pour construire en amont l'ensemble des nombres réels mais pour démontrer directement le théorème. A partir de 1978, ces nombres ne sont plus construits. Ils redeviennent des préconstruits par refus d'aborder un tel obstacle dans l'enseignement du premier cycle secondaire. Un autre exemple de démonstration employait la notion de proportionnalité fondée sur la correspondance en somme et en égalité (Hadamard, Rouche et Comberousse).

- *b) Démonstrations dans lesquelles les nombres réels semblent absents de la fin de la démonstration*

Euclide et Roberval utilisent la méthode des aires qui est reprise à la fin du XX ème siècle à l'aide de l'algèbre et qui se fonde sur la proposition exprimant le fait que deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. La démonstration de cette dernière, fondée sur des reports de triangle, est légitimée par l'égalité de deux raisons. A plusieurs endroits, le continu lié aux nombres réels, est présent de façon implicite notamment pour pouvoir évoquer l'infinie divisibilité des grandeurs ou bien l'existence de la quatrième proportionnelle à trois grandeurs, comme pour Arnauld avec sa méthode des espaces parallèles.

Des auteurs comme Bezout ou Bossut et plus tard, à la fin du XIX ème siècle et au début du XX ème siècle, pour démonter le théorème (D.P.C.T), concluent qu'il est toujours possible de rendre les segments de division aussi petits que l'on veut et qu'ainsi le théorème est vrai en général. Des auteurs, comme Blanchet ou Brachet et Dumarque (1927), utilisent la méthode de recherche de la plus grande commune mesure à deux longueurs par reports successifs d'un segment. Dans les deux cas, celui des infiniments petits et celui de l'algorithme d'Euclide, les irrationnels sont contournés à un degré plus ou moins élevé. Ils le sont totalement lorsque certains auteurs à l'instar de Lamy, La Caille, Clairaut ou ceux du XX ème siècle, ne démontrent que le cas commensurable.

Dès le XIX ème siècle et ce jusqu'au troisième quart du XX ème siècle, des auteurs, pour démontrer le théorème de Thalès, construisent l'ensemble de nombres réels souvent par la méthode des coupures de Dedekind et plus tard grâce au théorème des segments emboîté ou à la méthode des limites. D'autres auteurs de la fin du XX ème siècle énoncent les axiomes des espaces vectoriel ou la multiplication d'un vecteur par un nombre réel et ainsi le théorème de Thalès est lui-même considéré comme un axiome ou est une conséquence immédiate de l'une de ces deux théories.

Globalement, nous pouvons penser que le principal obstacle didactique que constituent les irrationnels semble être un bon candidat pour construire le sens du théorème de Thalès. En effet, des difficultés liées aux nombres réels sont présentes dans la démonstration du théorème de Thalès de façon plus ou moins visibles.

Mais les différences entre les démonstrations du théorème de Thalès portent également sur d'autres points.

I.2.3 Autres points qui distinguent les démonstrations

Ces différences pouvaient être occasionnées par un **refus de l'infini** pour des raisons philosophiques, comme dans Euclide, Arnauld ou Legendre. Ce n'est qu'au XIX ème siècle que le recours à l'infini ne pose plus de problème. Un autre changement de type de démonstration est dû au **refus des raisonnements par l'absurde**, comme pour Arnauld.

Les démonstrations diffèrent aussi du fait du remplacement des cas d'égalité des triangles par l'utilisation de l'inégalité triangulaire et du régionnement du plan par la médiatrice d'un segment ou par les perpendiculaires et les obliques qui sont elles-mêmes remplacées, lorsque les auteurs ne tentent plus de démontrer le ***postulatum***, par des pliages, comme dans Francoeur, par des charnières, par les retournements ou par les symétries axiales. Hilbert remplace l'égalité par superposition par des axiomes de congruence. Dans les années 1970, l'algèbre linéaire prend la place de ces cas d'égalité.

Nous pouvions penser que les différences entre les démonstrations du théorème de Thalès pouvaient également être dues aux **problématiques** distinctes de leurs auteurs, mais ces dernières ont pratiquement tout le temps été géométriques et non pratiques ni de modélisation sauf pour Clairaut, Dupuis et Deschalle. Dans ces trois cas, nous pouvons dire que ce changement s'opère du fait que le public auquel sont adressés les ouvrages est plus large. Mais des différences sont apparues dans la démonstration par rapport aux conceptions même **d'activité de démonstration** de l'auteur. Les Eléments d'Euclide ont été une référence pour de nombreux auteurs, mais des critiques sont nées dès le XVII ème siècle.

I.2.4 La "réciproque"

Les deux perspectives rencontrées pour le théorème direct se retrouvent également dans l'énoncé du théorème réciproque. Le seul qui évite la lecture sur un dessin pour la position relative de points est celui qui stipule qu'une droite coupant deux côtés d'un triangle en segments proportionnels est parallèle au troisième côté. Lorsque les deux cas de figures sont envisagés, les difficultés se présentent.

Des auteurs parlent d'une droite coupant les côtés d'un triangle prolongés ou non, de côtés coupés intérieurement ou extérieurement, de segments additifs [MA] et [MB] (AB = AM + MB) et soustractifs dans les autres cas, de rapports égaux en grandeur et en signe, de rapports algébriques ou de vecteurs. Dans tous ces cas, le dessin sert de référence. Cette lecture est encore plus flagrante dans les énoncés qui usent de points alignés ou qui se succèdent dans le même ordre ou de demi-droites auxquelles appartiennent les points.

La démonstration utilise l'existence et l'unicité d'un point partageant un segment dans un rapport donné ; mais ce résultat n'est généralement pas établi car sa démonstration nécessiterait, selon les cas, l'axiome de Pasch ou la complétude de R et les propriétés des fonctions strictement monotones ; ces propriétés sont remplacées par une lecture de la figure et un préconstruit.

I.2.5 Praxéologie et transpositions didactiques

La démonstration du théorème de Thalès relève d'un niveau d'organisation le plus souvent **régional**. Le niveau est **général** pour Euclide et Hilbert et dans quelques cas, comme celui de Clairaut ou de Lamy, cette organisation est **locale**. Nous avons obtenu un cas, celui de Legendre, pour lequel le concept d'organisation praxéologique n'est pas applicable car pratiquement aucune tâche ni technique ne sont présentes dans la démonstration du théorème de Thalès.

Malgré ce niveau constant d'organisation, les démonstrations relevaient de trois niveaux de **transposition didactique**.

Tout d'abord, la démonstration euclidienne a représenté le savoir savant pendant une très longue période et certains auteurs, à l'instar de Roberval, se sont placés au niveau de ce savoir.

Le niveau de **transposition directe**, concerne des auteurs qui ont juste allégé et simplifié le savoir savant sans en modifier les problématiques ni les méthodes ni les conceptions mathématiques, comme Bezout ou Queysanne.

Au niveau de la **transposition secondaire**, des points de vue, comme chez Arnauld, une modélisation comme chez Clairaut, ou des outils nouveaux, comme chez Legendre, viennent modifier le savoir savant.

Au niveau de la **transposition tertiaire**, l'auteur transpose une démonstration elle-même déjà transposée au niveau secondaire, comme c'est le cas avec Blanchet, Francoeur, Rivard et Lamy.

I.2.6 Champs conceptuels et chaînes trophiques

Le théorème de Thalès, jusqu'aux années 1970, début d'un changement radical à ce sujet, faisait partie d'un vaste **champ conceptuel** composé de théorèmes démontrés de la même façon, sauf pour Arnauld, Legendre, Hadamard, Borel et Vacquant, comme ceux liés aux calculs élémentaires des aires et des volumes, à la mesure des angles.

En 1970, les objets mathématiques sont définis à partir d'une axiomatique qui rend caduques de nombreuses démonstrations et en particulier les précédentes.

Dans les années 1990, une seconde période se caractérise par l'élimination des démonstrations sur la mesure des angles et des aires et même sur le théorème de Thalès ou par des démonstrations qui n'ont plus rien à voir entre elles.

Enfin, la vie du théorème de Thalès est amorcée par des théorèmes **précurseurs** tels que :

le théorème des triangles de même hauteur qui sont entre eux comme leurs bases, (Euclide, Roberval et Legendre), résultat remplacé à la fin du XX ème siècle par la formule de l'aire du triangle.

Le théorème des lignes également inclinées dans deux espaces parallèles différents (Arnauld ou Lamy).

Le théorème des droites équidistantes coupant deux droites sécantes en segments proportionnels, (Lacroix, Bezout, La Caille, Bossut, F.I.C, Combette) ou le théorème des correspondances en somme et en égalité.

Notons que dans les années 1980, le théorème des milieux dans un triangle puis dans un trapèze, le cosinus, la conservation du milieu d'un segment par projection, ou les espaces affines dans les années 1970 ont chacun joué le rôle de précurseur dans la démonstration du théorème de Thalès. Mais dans le cas du cosinus et des espaces affines, le théorème devient un truisme.

L'espace autour du théorème de Thalès est plus ou moins riche suivant les époques et les auteurs. Mais pendant très longtemps, ce théorème était employé dans de nombreux chapitres pour démontrer des propositions et plusieurs outils étaient nécessaires à sa propre démonstration. A quelques exceptions près (Arnauld et Lamy), tous les auteurs lui accordaient une place importante.

Au cours de la période pour laquelle le théorème de Thalès, dans sa version homothétie, intervenait le plus fréquemment, c'est à dire dans les années 1940 1950, il était utilisé entre autre :

- pour démontrer des propositions sur les triangles semblables,
- pour démontrer des relations métriques dans le triangle rectangle,
- pour introduire les triangles semblables ou homothétiques
- pour calculer l'aire du trapèze,
- pour l'introduction de la trigonométrie, de la puissance d'un point par rapport à un cercle,
- pour l'introduction de l'homothétie,
- pour démontrer son équivalent dans l'espace,
- pour mesurer pyramides et cônes
- et pour construire le barycentre de deux points.

Le théorème de Thalès dans sa version proportionnalité (D.P.C.T) était employé

- pour trouver une quatrième proportionnelle,
- pour démontrer les théorèmes sur les bissectrices intérieures et extérieures à un triangle,
- pour introduire le cosinus ou le rapport de projection,
- pour démontrer le théorème version homothétie.

Une rupture se produit à partir de 1970 année qui annonce la disparition du théorème de Thalès utilisé en tant qu'outil. Les espaces vectoriels et affines l'ont remplacé pour la structuration du cours de géométrie. En 1978, il retrouve en partie sa place centrale même si ses interventions dans les chapitres sont moins nombreuses que dans les années 1950. Son obsolescence interne est à nouveau assurée par l'homothétie et le barycentre. A partir de 1989, il perd à nouveau son aspect structurant du cours de mathématiques du collège. Il n'est utilisé en tant qu'outil que pour des problèmes de construction ou de calculs dans l'espace et très rarement pour introduire par exemple la trigonométrie ou les équations de droites.

Au cours de l'histoire, le **vieillissement interne** du théorème de Thalès dans sa version externe aux triangles a pu être assuré par la similitude des triangles, l'homothétie, la distributivité de la multiplication d'un vecteur par un scalaire par rapport à l'addition de deux vecteurs. Parfois, l'ordre était inversé et le théorème de Thalès devenait une conséquence des cas de similitude des triangles. Mais à partir des années 1970, et ce pour des raisons diverses, il a perdu son influence sur le système didactique.

II. Deuxième partie

Nous avons étudié deux sortes de variables didactiques du théorème de Thalès (les figures et la répartition des données numériques) ainsi que les conceptions des élèves sur la mesure des longueurs. Les résultats que nous avons trouvés nous ont guidé dans le choix de la version du théorème de Thalès que nous avons proposée aux élèves.

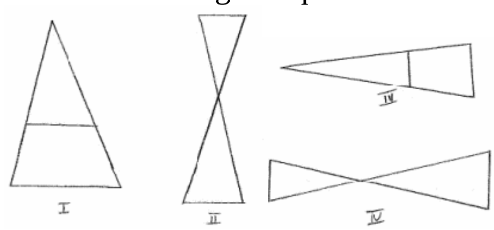
II.1 Les variables figurales

Nous avons mis en évidence l'existence d'archétypes et de prototypes, de figures pathologiques et pathogènes.

Nous nommons figures **archétypes** des dessins produits par des sujets, avant enseignement du dit théorème. Ces dessins sont peut-être le fruit culturel de l'enseignement antérieur mais en aucun cas ils ne sont le produit de la transmission de la proposition en cours d'étude.

Par contre, les **prototypes** sont des dessins exécutés en nombre significatif par des élèves après enseignement.

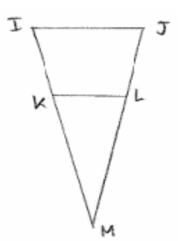
Nous avons mis en évidence les figures prototypes I et II et les figures que nous avons appelées représentatives III et IV. Nous avons changés d'appellation du fait que ces deux derniers dessins ont été produits par les élèves à des pourcentages certes significatifs mais tout de même moins élevés que les figures I et II. Ces deux dernières sont également des archétypes qui sont renforcés par l'enseignement du théorème de Thalès.

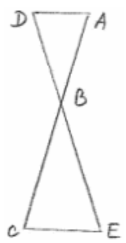


Ces quatre figures ne sont reconnues par les élèves que lorsque les variables du dessin qui leur est présenté ne s'écartent par trop de la norme qui, justement, les caractérise.

Après avoir relevé ces figures archétypes et prototypes, nous avons fait varier progressivement et jusqu'à l'extrême ces variables afin de détecter pour quel paramètre et à partir de quelle valeur de ce dernier la figure est
- soit non reconnue comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès : figure **pathologique**
- soit reconnue pour une telle application mais en engendrant des erreurs caractéristiques statistiquement significatives : figure **pathogène**

Ainsi, nous avons pu relever de très nombreuses figures pathologiques. Nous avons également mis en évidence des figures pathogènes A, A', B et C.





Pathogène A Pathogène A' Pathogène B Pathogène C

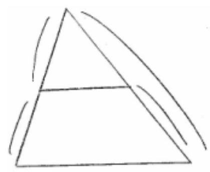
La figure pathogène A engendre l'erreur JL/JM = IK/IM = IJ/KL qui est amplifiée par la figure A' ayant la même orientation que la figure A mais possédant un angle aigu "vers le haut". Nous avons remarqué que la présence d'un angle aigu "vers le haut" sans que la figure soit renversée engendre aussi ce type d'erreur. Nous en concluons que le prototype I est prégnant lors de l'application du théorème de Thalès à de tels dessins.

Cette lecture de figure que nous avons appelée verticale est également apparue dans le cas de la figure pathogène B : AB/AC = DB/DE = DA/CE. Dans le cas C, nous avons montré que les deux variables qui sont caractéristiques de l'erreur commise par les élèves (ST/SG = UV/UG = SU/TV) sont le fait que la figure est "allongée" et la présence d'un angle aigu, ici S, sur la gauche. En effet, sans cet angle, une figure allongée n'engendre pas cette erreur à un pourcentage très élevé. Notons que la figure représentative IV a fait l'objet du même type d'erreur que la figure pathogène C.

II.2 Les variables de répartition des données numériques

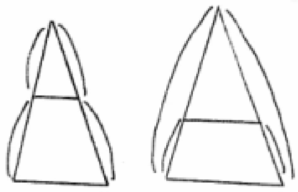
Ensuite, en ne retenant que les prototypes I et II dans le but de fixer les variables figurales, nous avons testé les variables de répartition des longueurs.

Pour un type de répartition comme sur l'exemple ci-contre, suivant la position de la longueur inconnue, nous avons relevé les pourcentages de réussite à l'écriture des rapports littéraux, à la mise en équation et à la résolution.



Si chaque pourcentage était indépendant de la position de la longueur à calculer, nous jugions la répartition homogène et suivant les pourcentages obtenus, ce groupe homogène était qualifié de facile, moyen ou difficile.

Dans les cas moyens et difficiles, nous avons relevé les erreurs qui caractérisent les groupes. Pour le prototype I nous en avons obtenu sept et quatre pour le prototype II. Globalement, nous pouvons dire que la surcharge cognitive est plus importante pour le prototype II.



Le prototype I ainsi qu'une lecture des dessins de haut en bas une influence sur l'application du théorème de Thalès à ce prototype II et inversement ce dernier a une influence dans le traitement de la répartition fragmentée du prototype I c'est à dire sur la première figure du Groupe II ci-contre. Dans ces deux cas, l'appréhension perceptive de la figure domine les autres appréhensions.

Nous pouvons penser que les élèves appliquent le théorème de Thalès de façon stéréotypée pour se dégager du géométrique et se retrouver devant des calculs algébriques plus rassurants, qui eux-mêmes sont évacués par les élèves en ayant recours aux machines à calculer.
Cette partie sur les variables didactiques a confirmé l'orientation que nous avions déjà prise vers une double approche de la proportionnalité dans l'expression du théorème de Thalès et de sa réciproque afin de pallier ces erreurs et de permettre aux élèves de comprendre la légitimité et l'illégitimité de certains rapports.

II.3 Les conceptions des élèves sur les longueurs

Les élèves considèrent qu'il est nécessaire que les mesures des longueurs qui composent deux rapports supposés égaux soient exprimés à l'aide de la même unité alors qu'il est possible d'employer une unité distincte pour chaque rapport. Ils confondent mesure de grandeurs et grandeurs. De plus, même après un enseignement sur les racines carrées, ils pensent à une forte majorité que deux segments ont toujours une partie qui les mesure simultanément et qu'une longueur peut toujours être mesurée exactement de façon pratique quitte à changer d'unité.

III. Troisième partie

Dans notre troisième partie, à travers une étude d'ouvrages contemporains et de préparations de cours de professeurs, nous avons été amenés à réfléchir sur l'enseignement actuel du théorème de Thalès en nous référant aux catégories épistémologiques que *nous avons mises en évidence dans notre partie historique. Dans cette troisième partie, nous avons émis l'hypothèse qu'un enseignement stéréotypé du théorème de Thalès n'est pas étranger l'approche stéréotypée que nous avons obtenue dans notre deuxième partie de la part des élèves.*

III.1 Composante externe du théorème de Thalès

Dans les ouvrages et les préparations de cours que nous avons analysés, ce théorème apparaît dans des activités qui relèvent le plus souvent de l'ostension assumée ou déguisée et d'une approche empirique telle que la vérification pratique de l'égalité de rapports.

Dans leur ensemble, elles sont caractérisées par une présentation directe de la propriété dans le micro-espace grâce à un dessin, déjà construit ou à construire, objet d'un jeu de questions réponses qui amène les élèves à découvrir la propriété et à l'énoncer. Cela les conduit à manipuler sans prendre d'initiatives ni faire de choix.

Les élèves ne construisent pas une réponse, une solution personnelle à un problème qu'ils se seraient appropriés et le sens du théorème doit être perçu par observation des figures.

Ils ont peu de conjectures à faire et encore moins de choix d'outils ou de méthodes. Finalement, ces "activités" diffèrent peu d'un cours dit "magistral".

De plus, toutes les **activités introductrices** que nous avons étudiées ne comprenaient aucune situation de référence liée à un réel travail dans le méso-espace, ni aucune situation a-didactique. Le plus souvent, le calcul de distances inaccessibles est proposé *a posteriori*, comme dans la plupart des ouvrages que nous avons étudiés dans notre partie historique, c'est à dire après introduction du théorème, en application ou dans la partie exercice. Ainsi, d'une part ces situations ne problématisent pas le théorème de Thalès et d'autre part elles sont déjà modélisées dans le micro-espace, et ne correspondent qu'à un habillage de l'énoncé.

Un autre type d'activités est également présent. Il s'agit en fait de résolutions d'exercices ou de mise en évidence de méthodes de constructions sans qu'il y ait dévolution du problème puisque répondre aux questions de ces activités consiste à suivre pas à pas la méthode imposée. Ces activités correspondent à une simple familiarisation des élèves avec les propriétés étudiées.

Nous pouvons résumer ces faits en disant qu'elles possèdent de faibles niveaux de problématisation et d'a-didacticité.

III.2 Composante interne du théorème de Thalès

L'énoncé du théorème de Thalès est rédigé de façon à faire apparaître une proportionnalité externe sous forme d'un bloc d'égalités de rapports propre à effacer cette proportionnalité. La version proportionnalité externe aux triangles est certes au programme, mais les énoncés que nous avons étudiés n'explicitent que très rarement le fait que deux triangles ont des côtés proportionnels deux à deux mais préfèrent des écritures d'égalités de rapports.

Avec ce type d'énoncé, les élèves ont juste à repérer la figure dans laquelle s'applique le théorème. La double approche proportionnalité interne et externe est impossible. Cela restreint son utilisation à une simple application au calcul algébrique.

Le théorème de Thalès n'est quasiment jamais démontré dans les ouvrages de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$. Les seules tentatives en $4^{ème}$ de démonstrations que nous ayons trouvées donnaient comme précurseur le théorème des milieux (démontré à l'aide des propriétés du parallélogramme) et dans un seul cas de préparation de cours, le cosinus joue ce rôle. Le théorème des milieux est utilisé pour démontrer le théorème de Thalès dans le cas d'un partage en trois, puis on passe à l'énoncé général sans complément de démonstration. Et le cosinus, lui-même introduit par un constat visuel d'invariance d'un rapport, rend évidente la mise en place du théorème de Thalès. L'obstacle des nombres irrationnels est évité puisqu'il n'est pas mis en évidence. En $3^{ème}$, le cas de la figure papillon est parfois démontré grâce aux propriétés de la symétrie centrale.

Certaines activités conduisent à la démonstration de la réciproque du théorème de Thalès en considérant que la droite en question n'est pas parallèle à une droite donnée, la construction de cette parallèle, l'application du théorème direct permettant d'aboutir à l'égalité AM = AM' ce qui donne, sans complément de justification le fait que les points M et M' sont confondus. Mais là encore les élèves n'ont aucunes initiatives à prendre.

La structure générale des cours sur le théorème Thalès est locale. Seul le **niveau pratico-technique** apparaît. Aucune théorie ni technologie ne viennent vraiment justifier le théorème dont les mises en fonctionnement sont le plus souvent techniques. Mais cette technique, à long terme, risque de disparaître pour les élèves du seul fait qu'elle n'ait pas été justifiée par des technologies et des théories et également parce que les concepts qui posent problème dans la démonstration du théorème de Thalès et qui font sens ne sont pas mis en évidence dans les ouvrages et les préparations de cours que nous avons analysés.

Actuellement, **le champ conceptuel** du théorème de Thalès est réduit. Plus aucune proposition n'est introduite ni encore moins démontrée sur l'exemple du théorème de Thalès. Les interventions de cette proposition en tant qu'outil dans l'introduction de nouvelles notions ou dans la démonstration de théorèmes se résument à :

- rechercher la quatrième proportionnelle,
- placer un point sur un segment dans en rapport donné,
- placer sur une droite graduée un point d'abscisse donnée.

Par la suite, le seul chapitre faisant référence explicitement au théorème de Thalès concerne le calcul de longueurs dans l'espace (en particulier agrandissement et réduction de cônes de révolution et de pyramides régulières).

Le théorème de Thalès ne sert plus à introduire les triangles semblables, les théorèmes sur les bissectrices, la puissance d'un point par rapport à un cercle ni le barycentre, car ces notions ne sont plus au programme du collège et certaines ont même disparu de l'enseignement.

Mais ce théorème n'est pas non plus utilisé, sauf dans un cas, pour introduire des chapitres qui sont au programme comme par exemple la trigonométrie, ni pour justifier la forme de l'équation d'une droite dans le plan.

En ce qui concerne les **mises en fonctionnement** du théorème de Thalès dans des exercices, nous avons distingué différents univers. L'univers des Gammes, l'Univers des Gammes Soutenues, l'Univers de Recherches Conséquentes et l'Univers des Problèmes. Dans les deux premiers univers, les énoncés des exercices sont fermés et sont du niveau des connaissances techniques. Aucun changement de cadre, aucune conjecture, aucune interprétation ne sont à effectuer.

Les exercices proposés dans les ouvrages ou les contrôles relèvent presque toujours de l'Univers des Gammes ou au mieux des Gammes Soutenues.

Enfin, nous avons pu remarquer que les prototypes I et II ainsi que les figures représentatives III et IV sont présents dans de nombreuses activités, dans de nombreux cours et exercices des ouvrages et préparations étudiés. Cela tend à confirmer l'hypothèse que l'enseignement actuel engendre l'apparition de figures prototypes en renforçant chez les élèves les figures archétypes déjà existantes avant enseignement.

Tout ce qui précède nous incite à penser que le théorème de Thalès subit une obsolescence externe. On ne trouve plus de situations problèmes pour lesquelles le théorème est une solution, ni les difficultés théoriques que sa démonstration soulève, ni son utilisation en tant qu'outil. Il ne reste que son aspect algébrique et calculatoire qui fait de cet objet mathématique uniquement une façon d'obtenir des mises en équation du premier degré. Nous nous trouvons devant un phénomène de **captation de sens** qui consiste à imposer une présentation d'un théorème, qui privilégie un type restreint d'applications et engendre un amoindrissement voire une perte de sens.

IV. Quatrième partie

Cette partie présente un rappel des différentes étapes de l'ingénierie et les principaux résultats :

sur les effets des interactions avec le milieu dans un travail effectif dans le méso-espace,

sur les effets de la modification de certaines variables didactiques et de l'utilisation des proportionnalités internes et externes sur la sensibilité des élèves aux stéréotypes et aux figures pathogènes,

sur la possibilité d'une démonstration intégrant une approche des irrationnels et l'apport d'une telle approche.

La partie historique nous a incité non seulement à opter pour une situation didactique proposée dans le méso-espace mais à réellement faire travailler les élèves dans cet espace.

Nous rappelons tout d'abord les situations clefs et les progressions qui ont été adoptés. Puis, nous cherchons à savoir si les interactions avec le milieu ont produit les effets escomptés.

IV.1 L'ingénierie

L'ingénierie a été mise en place dans une classe de quatrième et dans une classe de troisième sur onze séances dans chaque classe réparties sur à peu près un mois.

<u>En quatrième</u>

Le problème proposé au départ aux élèves était de trouver une méthode pour mesurer dans le méso-espace des distances inaccessibles. à travers quatre situations clés successives.

- Proportionnalité des longueurs de bandes de papier et de leurs ombres - application à la hauteur de la fenêtre et à la hauteur d'un panneau de basket
- Visées, dans la cour, d'une mire en papier placée sur un tableau à l'aide de lorgnettes ; modélisation de ces visées dans le micro-espace sur papier calque par la formulation de conjectures liées à la proportionnalité de la longueur de la fente et de la longueur de la mire afin d'anticiper une nouvelle visée.
- Démonstration de la conjecture dans le micro-espace
- Application dans le méso-espace à un problème de hauteur de plafond.

Ces quatre situations ont débouché sur la fabrication, en cours de technologie, d'un télémètre en bois et sur son utilisation.

<u>En classe de troisième</u>, une activité introductrice du théorème de Thalès ne pouvaient pas être mise en place pour ces élèves qui ont déjà abordé une partie de ce théorème en quatrième. Quatre étapes successives dans le micro-espace

- Test des élèves sur la mesure de longueurs ; nous avions fait l'hypothèse et nous avons vérifié que les élèves imaginent que tous les segments peuvent être mesurés directement, quitte à changer d'unité.

- Exhibition d'un contre exemple
- Introduction de la figure dite "papillon" à l'aide d'une expérimentation sur les lentilles convergentes et démonstration du théorème.
- Mise en place du théorème réciproque grâce à une manipulation de pièces de mécano.

IV.2 Les résultats de l'ingénierie

Pour la classe de quatrième, en ce qui concerne la situation fondamentale de mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace, tout ce qui lui a précédé, tout ce qui a servi à l'apprêter a bien fonctionné mises à part quelques interventions ostensives qui auraient pu être évitées comme par exemple l'écriture de quatre mesures de longueurs sous forme de tableau induisant la proportionnalité des bandes de papiers et de leurs ombres. Les élèves ont rapidement déduit une technique de calcul. Après avoir appliqué cette méthode de calcul à la hauteur d'une fenêtre de la classe supposée être inaccessible, les élèves ont facilement proposé l'idée d'utiliser un référent mesurable pour appliquer la méthode à la mesure d'un panneau de basket.

Les inconvénients de cette méthode indiqués par les élèves nous ont permis de proposer une autre technique fondée sur les lorgnettes. Leur maniement a été mis au point par les élèves. Le rassemblement en trois tas des cartons de marquage des lieux de visée a été facilement constaté ainsi que l'alignement des points de visée obtenu à l'aide de la lorgnette à plusieurs trous. Tous ces travaux dans le méso-espace, préliminaires compris, se sont bien déroulés. Mais nous n'avons pas pu exploiter totalement le potentiel a-didactique de la situation. Par manque de temps, l'activité proposée dans le méso-espace a été rendu envisageable grâce, parfois, à des interventions de l'expérimentateur.

Enfin, il s'agissait d'introduire tout d'abord le théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle faisant apparaître la proportionnalité interne[10]. Mais l'activité liée à la proportionnalité externe aux triangles n'a pas bien fonctionné car elle était mal conçue. Une réflexion est à mener à ce sujet.

En ce qui concerne plus particulièrement la représentation et la modélisation des situations, nous avons pu remarquer, comme d'ailleurs ce que nous avons pu constater dans notre partie épistémologie, que le schéma de représentation de la méthode de calcul de la hauteur du panneau de basket a eu une fonction *a posteriori* mais pas d'instrument opératoire. Les élèves ont directement travaillé dans le cadre numérique pour, dans un second temps, s'occuper du dessin. Ainsi, la représentation de la méthode de mesure de la hauteur du panneau de basket n'est pas apparue indispensable aux élèves. Pour ce faire, il faudrait que cette schématisation leur apparaisse importante dès l'activité sur les bandes de papiers et leurs ombres.

La représentation dans le micro-espace des champs de visée avec les lorgnettes ainsi que la modélisation dans le micro-espace de l'équivalence des lorgnettes d'un même groupe, ont bien fonctionné.

Si nous voulons nous attarder sur la question de la proportionnalité perçue par les élèves, les conclusions sont difficiles à faire. Dans la situation de visée à l'aide des quinze lorgnettes, bien qu'un rapport ait été évident, la proportionnalité cherchée n'a pas été obtenue facilement par les élèves. Nous pensons que lorsqu'ils perçoivent la linéarité d'une situation, $f(kx) = kf(x)$, ils ne perçoivent pas la forme d'une application linéaire, $f(x) = k.x$, et inversement lorsque la forme scalaire de la proportionnalité est mise en évidence la forme fonctionnelle n'est pas vue. Un travail reste ici aussi à faire.

[10] Confer Chapitre 1 Quatrième Partie page 11.

Au sujet de la démonstration, bien qu'elle ait été totalement détaillée, celle-ci a posé quelques difficultés au début mais le mécanisme a rapidement produit ses fruits aux étapes suivantes. Mais dans le cas décimal et dans celui du rapport inconnu, les élèves n'ont eu aucune initiative à prendre. Nous retrouvons l'esprit des démonstrations que nous avons rencontrées au cours de notre étude épistémologique qui consiste à communiquer directement toutes ses étapes. Mais il semble difficile de procéder autrement à ce niveau. Par contre les élèves avaient la responsabilité de rédiger les énoncés des deux théorèmes qu'ils avaient démontrés. Nous avons constaté des difficultés à ce sujet. Détecter les données initiales, le fil du raisonnement et la conclusion ne sont pas des étapes encore claires pour eux.

En classe de troisième, les démonstrations de l'irrationalité de racine de deux, l'introduction et la démonstration du théorème de Thalès ont laissé peu d'initiative aux élèves mais ne leur ont pas posé de grandes difficultés.

La démonstration sur l'irrationalité a permis de remettre en cause les idées exprimées par les élèves au cours d'une situation précédente suivant lesquelles il est possible de mesurer exactement la longueur de tout segment sauf lorsque l'unité trop petite n'est plus visible à l'oeil nu et deux segments sont toujours commensurables. Ainsi, non seulement les nombres réels sont indispensables pour démontrer le théorème de Thalès, mais de plus, une approche de leur construction permet de dépasser ces conceptions.

Au sujet de l'activité sur les lentilles, les élèves ont eu du mal à mettre en évidence la proportionnalité et ce pour les raisons que nous avons déjà invoquées ci-dessus. Les démonstrations étaient détaillées et n'ont pas posé de grandes difficultés aux élèves. En ce qui concerne le théorème réciproque, après remise en ordre de l'organigramme, seule la rédaction des démonstrations a présenté quelques difficultés. Notons que la rédaction finale des théorèmes n'est pas évidente pour les élèves.

- **Conceptions spontanées des élèves contredites par les situations.**

L'activité bandes de papier a permis à un élève, grâce à l'écriture des mesures de longueurs d'ombres, de s'apercevoir que son idée initiale (l'ombre d'une bande est plus petite au sol que sur la table) était fausse.

Au sujet des lorgnettes, un élève a dit devoir s'approcher par rapport au lieu de visée de son camarade car il se trouvait plus petit que ce dernier. Il nous semble intéressant de travailler sur cette question.

- **Les difficultés de mise en place de l'ingénierie** ont été de plusieurs sortes.

Certaines étaient liées à la longueur des situations. La longueur de la mise en place de l'ingénierie a engendré le fait que certaines prises de mains ont été intempestives. Mais d'autres étaient dues au nombre important de paramètres à prendre en compte par les élèves dans la situation. Le manque de temps ne nous a pas permis non plus de répondre en profondeur à toutes les questions ni de tenir compte de certaines remarques.

Un deuxième type de difficultés était dû à de réelles et légitimes difficultés conceptuelles de la part des élèves, comme, en classe de quatrième,

la représentation des visées de l'espace dans le plan,

la démonstration à partir du cas décimal jusqu'au cas réel,

l'association linéarité et proportionnalité,

le fait que l'alignement de trois astres ne suffise pas pour obtenir une éclipse totale, ou en classe de troisième,

le lien entre certaines inégalités de mesures de longueurs et le positionnement de points sur une droite,

le fait qu'il existe des rapports de mesures de longueurs non rationnels.

Les difficultés d'une autre catégorie étaient liées à des connaissances censées être disponibles de la part des élèves et qui ne l'étaient pas comme,

les trois caractérisations du parallélogramme en quatrième,
l'inégalité triangulaire,
l'interprétation d'inégalités par rapport à la position de points sur une droite,
les encadrements de longueurs,
la propriété de deux droites parallèles à une troisième,
le lien qui existe entre une égalité de rapports et la proportionnalité,
ou enfin la rédaction en français du texte d'une démonstration et du théorème.

En ce qui concerne ces connaissances supposées être disponibles de la part des élèves, un travail serait à entreprendre pour connaître la place qui leurs est laissées par les enseignants dans leurs contrôles de connaissances.

D'autres difficultés ont été dues à des contraintes naturelles, comme un soleil trop rasant ou des variables peu communes aux élèves comme la prise de mesure dans le méso-espace.
Enfin, des maladresses ont également été commises dans la mise en place et le questionnement.

Les conclusions de notre étude au sujet de la proportionnalité sont qu'il semble important de diversifier au maximum l'approche de cette notion dans le théorème de Thalès par le double aspect que nous avons déjà cité. Une amélioration de certains résultats a été constatée grâce à cette double approche interne et externe de la proportionnalité et de plus les erreurs occasionnées par celle-ci n'augmentent pas le taux d'erreurs global.

En ce qui concerne l'ostension, des précautions avaient été prises mais il semble très facile de céder aux procédés ostensifs. Les exemples sont assez nombreux dans notre ingénierie pour conclure que l'ostension peut parfois être présente sans être prévue.

Enfin, nous pouvons conclure sur les avantages que nous retirons de notre approche de l'introduction, de la rédaction et de la démonstration du théorème de Thalès. Après avoir montré l'équivalence des classes "avec ingénierie" (AI) et "sans ingénierie" (SI) à propos de questions élémentaires sur le théorème étudié, nous avons testé des variables didactiques.

Les résultats obtenus étaient souvent significativement différents et parfois identiques en termes de pourcentage d'erreurs. Mais une analyse plus fine nous a montré que dans certains cas les types d'erreurs étaient distincts.

- Notre ingénierie n'a pas fait apparaître d'amélioration des résultats au sujet de la variable orientation de la figure et de la présence d'un angle aigu vers le haut ou sur la gauche. Dans ce dernier cas les erreurs commises par les élèves (SI) sont tout de même significatives. C'est à dire que dans les deux cas, (AI) et (SI), les pourcentages globaux de réussite sont sensiblement les mêmes mais dans le cas (SI), un certain type d'erreur a été commis de façon répétée et significative.

- Par contre, les différences entre les deux types de classes sur les variables de répartition des mesures ont été globalement significatives. Ces différences se jouent en premier lieu au niveau de la résolution des équations souvent plus complexes dans le cas (SI) ce qui engendre des erreurs et des non réponses. En second lieu, l'amélioration des résultats concerne les rapports lus directement sur les dessins et dans une moindre mesure les rapports numériques faux bien que les rapports littéraux soient corrects.

- D'un autre côté, il est indéniable que des mélanges entre les deux théorèmes ont parfois été commis par certains élèves (AI) mais dans ce cas, ces erreurs ont été compensées par les erreurs commises dans la résolution des équations par les élèves (SI). Dans le cas de l'application de la réciproque dans des figures prototypes, les résultats sont significativement distincts.

Sur l'ensemble du test, les résultats des deux types de classes de quatrième sont équivalents même si les erreurs ne sont pas du même type mais au niveau troisième les différences sont significatives. Une nette amélioration a été mise en évidence au niveau troisième et en classe de quatrième, les différents types d'erreurs se compensent.

Pour une comparaison plus précise des deux théorèmes et une étude de leurs rapports, la question reste ouverte et un travail reste à faire.

Globalement, nous pouvons dire qu'un réel travail effectué dans le méso-espace est tout à fait possible pour le théorème de Thalès mais qu'une réflexion plus accrue doit être menée pour exploiter un peu mieux le caractère a-didactique des situations, pour faire disparaître des approches ostensives qui nuisent à la prise d'initiatives de la part des élèves et pour soigner un peu plus la modélisation des situations par les élèves. Nous pensons que la démonstration, malgré sa complexité pour des élèves de collège, leur apporte un gain de sens mais ce gain est surtout engendré par la double approche de la proportionnalité du théorème qui leur permet à la fois de comprendre la légitimité ou l'illégitimité de l'écriture de certains rapports et à la fois de pallier certaines difficultés et obstacles que la version actuelle provoque.

La question qui demeure est de savoir comment un tel travail de recherche pourrait avoir des répercussions bénéfiques pour l'enseignement du théorème de Thalès ? S'agissant d'un travail long demandant un fort investissement des élèves, il est bien sûr évident que des adaptations sont à prévoir pour pouvoir appliquer l'ingénierie dans une classe. Ce travail reste à faire.

Références bibliographiques

[1] ARISTOTE . *Métaphysique.* Edition Vrin. Paris. (1986).

[2] ARISTOTE *Physique. Livres III, V, VI.* Les belles lettres. Paris (1986).

[3] ARISTOTE. *Organon. Catégories.* Editions Vrin. Paris. (1989).

[4] ARNAULD A. (1667). *Nouveaux éléments de géométrie ; contenant, outre un ordre tout nouveau, et de nouvelles démonstrations des propositions les plus connues, de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était point encore avisé, et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes.* Charles Savreux. Paris. Réédition inter IREM Epistémologie. Reproduit par l'IREM de Dijon (2000).

[5] ARNAULD A. (1690). *Nouveaux éléments de géométrie ; contenant, outre un ordre tout nouveau, et de nouvelles démonstrations des propositions les plus connues, de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était point encore avisé, et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes.* (3$^{\text{ème}}$ édition). La Haye. Publiée in œuvre complète. Paris. (1771).

[6] ARNAULD A. et NICOLE P. (1662). *La logique ou l'Art de penser.* Réédition Flammarion. Paris. Coll Champs. (1980).

[7] ARSAC G. (1987) *L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique.* Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol n°8.3. La pensée Sauvage. Grenoble.

[8] ARTIGUE M. (1990). *Epistémologie et didactique.* Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 10.2.3. La Pensée Sauvage. Grenoble.

[9] ARTIGUE M. (1992) *The importance and limits of epistemological work in didactic.* Geeslin, W et K Graham (Eds), Proceeding of the XVI PME Conference, New Hampshire, 3.

[10] AUDIBERT (1982). *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane.* Thèse de doctorat. Université de Montpellier. Edition APMEP.

[11] BADINTER E. (1999). *Les passions intellectuelles. I désir de gloire (1735, 1751).* Fayard. Paris.

[12] BAILLEUL M. (1995). *Une approche statistique des représentations de l'enseignement des mathématiques chez les enseignants de mathématiques de collège et de Lycée.* Recherche en didactique des mathématiques Vol 15.2. La pensée sauvage Grenoble.

[13] BARBIN E. (1988). *La démonstration mathématique signification épistémologique et questions didactiques.* Bulletin Apmep n°366. Paris.

[14] BARBIN E. (1991). *Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée.* Repère IREM n°4. Topiques édition. Pont - à - Mousson.

[15] BAUCRY J.M. (1991). *Que vivent les cas d'égalité des triangles.* In Repère Irem n°5.

[16] BEKAYE SOKOMA S. (1989). *Aspects analytiques et analogiques de la proportionnalité dans une situation de formation.* Petit x n°19.

[17] BELHOSTE B. (1995). *Les sciences dans l'enseignement secondaire français.* Texte officiels. Tome 1. 1789 - 1914. INRP. Economica. Paris.

[18] BERGUE D., BORREANI J. et POULAIN B. (1991). *De la figure vers la démonstration.* Petit x n°27.

[19] BERTHELOT et SALIN (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de doctorat. Université Bordeaux I. LADIST.

[20] BEZOUT E. (1765). *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie ; seconde partie contenant la géométrie, la trigonométrie rectiligne et la trigonométrie sphérique.* Notes sur la géométrie par A.A.L. Reynaud. Paris. Veuve Courcier. (1812).

[21] BEZOUT E. (1768). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie (avec note et tables de logarithmes par A.A.L. Reynaud).* Madame Veuve Courcier. Paris. (1821). Neuvième édition.

[22] BKOUCHE R. (1991). *De la géométrie et des transformations.* Repère Irem n°4. Topiques éditions. Pont - à Mousson.

[23] BKOUCHE R. (1994 (a)). *La place du numérique dans la construction de la géométrie.* Acte du Xème colloque inter IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques. Université de Caen Cherbourg. IREM de Basse Normandie.

[24] BKOUCHE R (1994 (b)). *Autour du théorème de Thalès (variation sur les liens entre le géométrique et le numérique).* IREM de Lille.

[25] BLANCHET M.A. (1850). *Eléments de géométrie par A.M Legendre, avec addition et modifications.* Librairie Firmin Didot Frères. Paris.

[26] BOLZANO B. (1817). *Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposées se trouve au moins une racine réelle de l'équation.* Prague. Introduction et traduction. J. Sebestik. Revue d'histoire des sciences. Tome XVII. PUF. Paris. (1964).

[27] BONHIVERS B. et DE KETEL JM. (1990). *Pratique de la statistique*. Editions De Boeek. Belgique.

[28] BOURDIEU P. (1980). *Le sens pratique.* Les Editions de Minuit. Paris.

[29] BOSSUT C. (Abbé) (1775). *Traité élémentaires de géométrie et de la manière d'appliquer l'algèbre à la géométrie.* Claude Antoine Jombert. Paris.

[30] BROUSSEAU G. (1983 (a)). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques.* Recherche en didactique des mathématiques. Vol 4.2. Grenoble. La Pensée Sauvage.

[31] BROUSSEAU G. (1983 (b)). *Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie.* Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique. LSD IMAG. Université Joseph Fourier. Grenoble.

[32] BROUSSEAU G. (1989). *Les obstacles épistémologiques et la didactiques des mathématiques.* Colloque international "obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif." Construction des savoirs. Obstacles et conflits. Agence d'Arc inc Cirade.

[33] BROUSSEAU G. (1995). *Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université.* Autour de Thalès. Commission inter IREM. Premier cycle. Université Paris VII.

[34] CANTOR G. (1872). *De l'extension d'une proposition de la théorie des séries trigonométriques.*

[35] CASSIRER (1910). *Substance et fonction : éléments pour une théorie du concept.* Traduction française. Editions de Minuit. Paris. (1977).

[36] CAUCHY A.-L (1823). *Résumé des leçons données à l'école Polytechnique sur le calcul infinitésimal.* Editions Debure frères. Paris. Réédition Ellipse. Paris. (1994).

[37] CAVALIERI B. (1635). *Geometria indivisibilitus continuorum nova quadam ratione promota Bologne.* Traduction française originale F. De Gandt.

[38] CELI V. (2003). *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour la tranche d'âge 11 - 16 ans.* Thèse de doctorat. Université Paris VII.

[39] CHARLOT B. (1990). *Enseigner - former : logique des discours constitués et logique des pratiques.* INRP. Recherche formation n°8.

[40] CHEVALLARD Y. (1989 (a)). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège.* Petit x n°19.

[41] CHEVALLARD Y. (1989, (b)). *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel.* Irem Aix - Marseille.

[42] CHEVALLARD Y. (1991 (a)). *La transposition didactique.* Revue de didactique des mathématiques. (1ère édition : 1985).

[43] CHEVALLARD Y. (1991 (b)). *Autours de l'enseignement de la géométrie au collège.* Petit x n°27 Première partie.

[44] CHEVALLARD Y. (1992 (a)). *Concept fondamentaux de la didactique. Perspectives apportées par une approche anthropologique.* Recherche en Didactique de Mathématiques. Vol n°12.1.

[45] CHEVALLARD Y. (1992, (b)). *Autour de l'enseignement de la géométrie au collège.* Petit x n°27. 1ère partie.

[46] CHEVALLARD Y. (1997) *Familière et problématique, la figure du professeur.* Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol n°17.3.

[47] CHEVALLARD Y. (1999). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique.* In Analyse des pratiques des enseignants et didactique des mathématiques. (Coordonné par Noirfalise). IREM de Clermont-Ferrand.

[48] CHEVALLARD Y. et JOSCHUA M.A. (1982). *Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance.* Recherche en didactique des mathématiques. Vol 3.2. La Pensée sauvage. Grenoble.

[49] CLAIRAUT A.C. (1741). *Eléments de géométrie.* Nouvelle édition par M. Saigey. Hachette. Paris. (1861).

[50] COLLETTE J.P. (1973) *Histoire des mathématiques.* Editions du renouveau pédagogique INC Montréal, Québec.

[51] CONDILLAC E. (1746). *Essai sur l'origine des connaissances humaines.* Edition Galilée. Paris. (1973).

[52] COMIN E. (2001). *Les difficultés d'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège*. DAEST. Séminaire national de didactique des mathématiques. Université Paris VII.

[53] CORDIER F. (1989). *Les notions de typicalité et de niveau d'abstraction. Analyse de deux propriétés des représentations cognitives.* Thèse présentée pour le diplôme national d'habilitation à diriger des recherches. Université Paris sud.

[54] CORDIER F. et J. (1991). *L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle de représentations typiques comme biais cognitif.* Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol n°11.1. La pensée sauvage. Grenoble.

[55] CORTES A. (1995). *Word problems : operational invariants in the putting into equation process. Proceedings of the mine teenth.* PME conference Recife. Brasil.

[56] d'ALAMBERT J le R. (1758). *Traité de dynamique.* Réédité par Gauthiers - Villars. Paris. (1921).

[57] d'ALEMBERT J le R. (1759). *Essai sur les éléments de philosophie naturelle.* Réed Fayard. Paris (1986). Coll Corpus des oeuvres de philosophie en langue française.

[58] DAUMAS D. (1995). *Activité en classe à partir de textes historiques sur l'irrationalité de Pythagore à Théon de Smyrne. Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques.* Actes de l'Université d'été 95 : épistémologie et histoire des mathématiques. Université de Franche - Comté. Besançon.

[59] DEDEKIND R. (1872). *Essays on the theory of nombers : continuity and irrational numbers (Stetigkeit und irrationale zhalen), the nature and meaning of nombers (was sind und was sollen die zhalen ?).* New York. Dovers. (1963).

[60] DEDEKIND R. (1888). *Continuité et nombres irrationnels. Les nombres, que sont-ils et à quoi servent-ils ?* Traduit par J. Milner et H. Sinaceur. Navarin. Paris (1979).

[61] DEHAME B. (1970). *Les réels en quatrième.* Bulletins APMEP n°275 - 276. Paris.

[62] DELERUE J. (1982). *Si Thalès m'était projeté.* Bulletin APMEP n°335.

[63] DESCARTES R. (1628). *Règles pour la direction de l'esprit.* In Oeuvres philosophiques. Tome 1. Edition de F. Alquié. Ed Garnier. Paris. (1963).

[64] DESCARTES R. (1637). *La géométrie. In Discours de la méthode.* Hermann. Paris. (1986).

[65] DESCHALLE C.F MILLIET (1670). *Les éléments d'Euclide expliquez d'une manière nouvelle et très facile avec l'usage de chaque proposition pour toutes les parties des mathématiques.* Revu, corrigé et augmenté par M. Ozanam. Claude Jombert. Paris.

[66] DESDOUIT L.M. (1834). *Elemens de géométrie théorique et pratique.* Successeur de Madame Veuve Courcier. Paris.

[67] DHOMBRE (1978). *Nombre, mesure et continu.* Epistémologie et histoire. Cedic. Fernand Nathan. Paris.

[68] DJEBBAR A. (2001). *Une histoire de la science arabe.* Editions du Seuil. Paris.

[69] DOUADY R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse d'Etat. Université Paris VII.

[70] DU BOIS - REYMOND P. (1887). *Théorie générale des fonctions.* Hermann. Paris.

[71] DUPIN C. (Baron) (1825). *Géométrie et méchanique des arts et métiers et des beaux arts. Cours normal à l'usage des artistes et des ouvriers, des sous-officiers et des chefs d'atelier et de manufactures.* Professé au Conservatoire Royal des Arts et Métiers. Tome premier. Géométrie. Bachelier Librairie. Successeur de Madame Veuve Courcier. Paris.

[72] DUROUX A. (1983). *La valeur absolue, difficultés majeures pour une notion mineure.* Petit x n°3 Irem de Grenoble.

[73] DUVAL R. (1988). *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.* Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg.

[74] DUVAL R. (1994). *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique.* Repère IREM n°7. Topiques édition. Pont - à - Mousson.

[75] EUCLIDE. *Les oeuvres d'Euclide.* Traduites littéralement par F. Peyrard (1819). Nouveau tirage augmenté d'une introduction par Jean Itard. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard. Paris. (1993).

[76] F.I.C (1881). *Cours de mathématiques élémentaires. Eléments de géométrie.* A. Mane, Tour et Puissielgue, Paris.

[77] FRANCOEUR L.B. (1819). *Cours complet de mathématiques pures ; dédié A.S.M Alexandre 1er. Empereur de Russie.* Seconde édition. Tome premier. Madame Veuve Courcier. Paris.

[78] GALILEO GALILEI (1632). *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde.* Traduit de l'italien par René Fréreux avec le concours de François De Grandt. Editions du Seuil. Point sciences. Paris. (2000).

[79] GARDIER J-L. (1986). *Les antécédents scolastiques de la théorie des ensembles.* Revue de métaphysique et de morale. Armand Colin. Paris.

[80] GARDIER J-L. (1988). *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Editions Vrin. Paris.*

[81] GAUD D. et GUICHARD JP. (1984). *Apprentissage de la démonstration.* Petit x n°4. IREM de Grenoble.

[82] GLAESER G. (1983). *A propos de la pédagogie de Clairaut. Vers une nouvelle orientation dans l'histoire de l'éducation.* Recherche en Didactique des Mathématiques. La pensée Sauvage. Grenoble.

[83] GOBERT S. (2001). *Question de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.* IREM Université Paris VII Denis Diderot.

[84] GRAY J. (1989). *Ideas of space.* Clarendon Press. Oxford.

[85] GRENIER (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble 1.

[86] GUEDJ D. (1998). *Le théorème du perroquet.* Seuil. Paris.

[87] GUICHARD J. (2000). *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques.*IREM. Histoire des mathématiques. Ellipse. Paris.

[88] GUILMIN A. (1859). *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des Lycées et des collèges.* Auguste Durand. Paris. Cinquième édition.

[89] HACHE C. (1999). *L'enseignement des mathématiques au quotidien : études de pratique en classe de seconde.* Thèse de doctorat. Université Paris VII.

[90] HADAMARD J. (1898). *Leçons de géométrie élémentaire.* Armand Colin. Paris. 3 ème édition.

[91] HALLIEZ M. et NORDON N. (1994). *Un est-il un nombre ?* Acte du Xème colloque inter IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques. Université de Caen Cherbourg. IREM de Basse Normandie.

[92] HEARTH (1908). *The thinteen books of Elements. 1902, 1925 réed Dover New-York. (1956).*

[93] HEINE E. (1872). *Les éléments de la théorie des fonctions.* In journal de Crelle. Traduction J-P Friedelmeyer et Guillemot.

[94] HILBERT D. (1899). *Les fondements de la géométrie ;* édition critiquée et préparée par Paul Razzier. Ouvrage publié avec le concours du CNRS. Dunod. Paris. (1971).

[95] ITARD G. (1990). *L'enseignement, la démonstration et l'histoire.* Commission inter IREM épistémologie et histoire des mathématiques : la démonstration mathématique dans l'histoire. IREM de Besançon. IREM de Lyon.

[96] JACQUIER I. (1996). *Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ?* Petit x n°41. IREM de Grenoble.

[97] JANVIER C. (1989). *Obstacles épistémologiques à la notion de variable : perspective historique.* Construction des savoirs. Obstacles et Conflits. Agence d'ARC inc Cirade. Montréal.

[98] LABORDE C. (1984). *Exposé sur la géométrie, recueil des textes et comptes rendus de la 3ème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique.* LSDIMAG. Université J.FOURIER. Grenoble.

[99] LA CAILLE (Abbé de) (1744). *Leçons élémentaires de mathématiques.* Nouvelle édition. (1784). Veuve Desaint. Paris.

[100] LACROIX S.F. (1798). *Eléments de géométrie à l'usage de l'école des quatre nations.* Onzième édition. Madame Veuve Courcier. Paris. (1819).

[101] LAMY R.P. (1685). *Géométrie ou de la mesure de l'étendue.* Edition reproduite : quatrième édition (1710) par IREM Paris VII. (1997). Reproduction de textes anciens nouvelle série n°13.

[102] LEBESGUE H. (1931). *Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique.* Paris et Genève.

[103] LEGENDRE A.D. (1794). *Eléments de géométrie.* Firmin Didot. Paris.

[104] LEGRAND M. (1997). *La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique.* Repères Irem n°27.

[105] MARTZLOFF J.C. (1987). *Histoire des mathématiques chinoises.* Masson. Paris.

[106] MATHERON Y. (1994 (a)). *Les répercussion des changement de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès.* Petit x n°34. IREM de Grenoble. Saint Martin d'Hères.

[107] MATHERON Y. (1994 (b)). *De la proportionnalité vers le théorème de Thalès, point d'appui et évolution du rapport au savoir.* Mémoire de DEA de sciences de l'éducation. Université d'Aix - Marseille.

[108] MATHERON Y. (2000). *Analyse praxéologique. Quelques exemples d'organisations mathématiques.* Petit x n°54. Irem de Grenoble. Saint Martin d'Hères.

[109] MANKIEWICZ R. (2001). *L'histoire des mathématiques.* Editions du Seuil. Paris.

[110] MERCIER et TONNELLE (1992). *Autour de l'enseignement de la géométrie au collège.* Petit x n°29. Pont à Mousson.

[111] MESQUITA AL. et RAUCHER JC. (1988). *Sur une approche d'apprentissage de la démonstration.* Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg.

[112] MLODINOW L. (2002). *Euclide's window.* Traduit de l'anglais par Hélène Demazure. Editions Saint - Simon.

[113] NEWTON I. (1671). *La méthode des fluxions et des séries infinies.* Première publication (1736). Traduction M. de Buffon. Edition Debure. Paris (1740). Réimpression Librairie scientifique Blanchard. Paris. (1966).

[114] NEWTON I. (1726). *Principia mathematica. Scholium. Livre I Section 1.* (Traduction M.F Biarnais. C Bourgeois. Paris (1985).

[115] NOIRFALISE R. (1991). *Figures prégnantes en géométrie.* Repère Irem n°2. Topiques édition. Pont à Mousson.

[116] NOIRFALISE R. (1993). *Contribution à l'étude didactique de la démonstration. Etude de régularité dans les modes de fonctionnement du savoir mathématique dans les divers chapitres de géométrie d'un manuel de 6ème*. Recherche en Didactiques des Mathématiques. Vol 13.3. La pensée Sauvage. Grenoble.

[117] NORDON N. (1995). *Le continu quand il n'était qu'attribut. Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques.* Actes de la 6ème Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques. Université de Franche Comté. Besançon.

[118] ORESME N. *Traité des configurations et des mouvements.* Traduit par P Souffrin et J.P Weiss. In cahier du séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences. Oresme 2 n°19. (1983).

[119] PASCAL B. (1657). *L'esprit géométrique et l'Art de persuader.* In oeuvres complètes. Edition Lafuna Seuil. Paris. (1963).

[120] PALMER, ROSCH et CHASE (1981). *Canonical perspective and the perception of objects in, attention and performance, IX*, Lawrence Erlbaum Associates Publishors. Hills dale. New Jersey.

[121] PFAFF N. (1995). *Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès.* Thèse de doctorat. Université Paris V. René Descartes.

[122] PFAFF N. et MICHONNEAU J. (1990). *La proportionnalité en géométrie : le théorème de Thalès.* Petit x n°23. IREM de Grenoble.

[123] PIAGET J., INHELDER B. et SZEMINSKA A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant.* PUF. Paris.

[124] PLANE H. (1995). *Une invention française du XX ème siècle : le théorème de Thalès.* In Autour de Thalès. Commission inter IREM. Premier cycle. IREM Paris VII.

[125] PLATON. *La République. Livre VI.* Introduction, traduction et notes par Robert Baccou. Flammarion. (1987).

[126] POINCARE. (2000). *L'intuition féconde.* In revue pour la science. Les génie de la science. Philosophe et mathématicien.

[127] PROST A. (1968). *Histoire de l'enseignement en France. 1800 - 1967.* Armand Colin. Paris.

[128] RATSIMBA - RAJOHN H. (1977). *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques.* Diplôme d'Etude Approfondie. Université. Bordeaux 1.

[129] RATSIMBA - RAJOHN H. (1981). *Etude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques.* Thèse Université Bordeaux I.

[130] REYNAUD A.A.L (1827). *Traité d'arithmétique par le Baron Reynaud.* Bachelier successeur de madame Veuve Courcier. Paris.

[131] RIVARD. (1731). *Abrégé des éléments de mathématiques.* Jean Dessaint et Charles Saillant. Paris. Quatrième édition.

[132] ROBERT A. (1998). *Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'université.* Recherche en didactique des mathématiques. Vol 18.2. Grenoble. La pensée sauvage.

[133] ROBERT A. et ROBINET J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentation des auteurs de manuels.* Cahier de Didirem n°4. Université Paris VII.

[134] ROBERVAL G.P. (1634). *Traité des indivisibles.* Edition reproduite originale par IREM Paris VII. (1987).

[135] ROBERVAL G.P. (1675). *Eléments de géométrie.* Texte réunis et présentés par Vincent Jullien. Paris. Vrin. CNRS. (1996).

[136] ROGALSKI J (1982). *Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface).* Recherche en didactique des mathématiques. Vol 3.3. La pensée sauvage. Grenoble.

[137] ROSCH E. (1976). *Classification d'objet du monde réel : origine et représentations dans la cognition.* Bulletin de psychologie. Numéro spécial.

[138] ROUCHE N. (1992). *Leçons de la mesure.* Didier Hatier. Bruxelles.

[139] SCHWARTZ L. (1994). *Le point de vue de Laurent Schwartz.* In Pour la science. "Les mathématiciens".

[140] SIERPINSKA A. (1988) *Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique.* Cahier de didactique des mathématiques n°7. Institut français Thessalonique.

[141] SIERPINSKA A. (1989) *Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique.* Construction des savoirs. Obstacles et conflits. Agence d'ARC inc Cirade.

[142] SZABO A. et MAULA E. (1986). *Les débuts de l'Astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs.* Vrin. Paris.

[143] TANNERY J. (1894). *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique.* Armand Colin. Paris.

[144] VERGNAUD G. (1979). *Multiplicative structures in lesh and landau.* (Eds) Acquisition of mathematics concepts and processus. New York. Academic Press.

[145] VERGNAUD G. (1981 (a)). *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches en françaises en didactique des mathématiques.* Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 2.2. La pensée sauvage. Grenoble.

[146] VERGNAUD G. (1981 (b)). *L'enfant, les mathématiques et la réalité.* Editions Peter Lang.

[147] VERGNAUD G. (1987). *Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant.* Psychologie. Encyclopédie La Pléiade. Gallimard.

[148] VERGNAUD G. (1989). *Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques.* Construction des savoirs ; obstacle et conflit. Agence de l'ARC inc. Cirade. Montréal.

[149] VERGNAUD G. (1990). *La théorie des champs conceptuels.* Recherche en didactique des mathématiques. Vol 10.2.3.

[150] VURPILLOT (1972). *Le monde visuel du jeune enfant.* PUF. Paris.

[151] WALDEGG G. (1995) *L'épistémologie dans la recherche en didactique, est-ce qu'on peut choisir ?* Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques. Acte de la 6$^{\text{ème}}$ université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques. Université de Franche-Comté. Besançon.

[152] WERMUS H. (1976). *Essais de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composante.* Archives de psychologie. Vol XIV n°171. Genève.

[153] WERMUS H. (1978). *Esquisse d'un modèle des activités cognitives.* Dialectica Vol 32 n°3-4. Genève.

[154] WILDER R.L. (1981). *Mathematics as a cultural system.* Toronto. Pergamon Press.

Ouvrages scolaires

[155] AGUADO G., CORON A. et DESCHAMPS P. (1980). *Collection Horizon mathématiques. Mathématiques classe de 3^e^*. Edition de La Chapelle. Uzès.

[156] AMIOT A. (1883). *Eléments de géométrie.* Delagrave. Paris.

[157] ANDRE M.P.H. (1897). *Eléments de géométrie conformes aux programmes des baccalauréats. 1ère partie.* André Guédon. Paris.

[158] BENOIT A. (1941). *Géométrie. Classe de seconde A. Programme du 22 septembre 1941.* Vuibert. Paris.

[159] BLAQUIERE G., BOURSIN JL., PISOT C. et STOULS J. (s.d). *Mathématiques 3e*. Bordas. Paris.

[160] BLAQUIERE G., BOURSIN JL., PISOT C. et STOULS J. (1980). *Mathématiques 3e*. Bordas. Paris.

[161] BOREL E. (1910). *Géométrie à l'usage des EN des EPS.* Armand Colin. Paris.

[162] BOS H. (1884). *Notions de géométrie plane.* Troisième année. Paris. Hachette.

[163] BOS H. (1901). *Eléments de géométrie.* Hachette. Paris.

[164] BOURLET C. (1906). *Cours abrégé de géométrie. I Géométrie plane.* Hachette. Paris.

[165] BRACHET F., DUMARQUE J. et GOUET H. (1940). *Géométrie à l'usage des candidats aux Ecoles Nationales d'Arts et Métiers.* Delagrave. *Paris.*

[166] BREARD Coll (1971). *Classe de quatrième.* Edition de l'Ecole.

[167] CAMMAN (1942). *Nouveau cours de mathématiques. Géométrie. Classes de Seconde C et Moderne.* J. DE Gigord. Paris.

[168] CHENEVIER P. (1931). *Cours de géométrie - Programme du 30 avril 1931. Classe de seconde.* Hachette. Paris.

[169] COMBETTE E. (1898). *Géométrie élémentaire à l'usage des élèves de la classe de mathématiques élémentaires et des aspirants au baccalauréat.* Félix Alcan. Paris.

[170] DELEDICQ, MISSENARD et LASSAVE (1984). *Faire des mathématiques.* Cedic. Paris.

[171] DOLLON J. et GILET E. (1950). *Cours complet de mathématiques. Géométrie plane. Classe de seconde C et moderne.* Masson. Paris.

[172] DUBREIL P. (1964). *Mathématiques classe de troisième.* Par Mazet H et Thevert M-G. Dunod Editeur. Paris.

[173] DURANDE Coll (1967). *Mathématique 3ème*. Bordas. Paris.

[174] ESTEVE R. et MITHAULT H. (1935). *Cours de géométrie. Classe de seconde.* Gauthier Villard. Paris.

[175] FAUVERGUE P., CURIEL P., RIEU R. et SARNETTE A. (1989). *Mathématique 3e. Collection Mistral.* Casteilla Istra. Paris.

[176] FORT et DREYFUS (1908). *Eléments de géométrie. Classe de 4ème B et de 3ème A.* Henri Paulin et Compagnie. Paris.

[177] GALLION E. (1980). *Mathématiques 3e*. O.C.D.L. Hatier. Paris.

[178] GIRARD C., GERLL D., COHEN M. et GERL A. (1975). *Mathématiques 4e. Collection 65/43.* Hachette. Paris.

[179] GRAPIN PA. (1886). *Cours de géométrie.* Picard. Paris.

[180] GREVY A. (1905). *Géométrie théorique et pratique.* Vuibert et Nony. Paris.

[181] GREVY A. (1909). *Géométrie plane à l'usage des élèves de seconde C et D.* Vuibert. Paris.

[182] HEMERET M. et LERMUSIAUX A. (1962). *Mathématiques. Classe de troisième*. Hachette. Paris.

[183] HUE T. et VAGNIER N. (1899). *Géométrie : géométrie plane, arpentage et levé de plan.* Delagrave. Paris. 5ème édition.

[184] HUISMAN A. et ITARD J. (1964). *Mathématique. Classe de troisième.* Wesmeel. Chartier. Paris.

[185] HUISMAN A. et ITARD J. (1967). *Mathématiques. Classe de seconde C.* Wesmael. Chartier. Paris.

[186] Istra Coll (1989). *Mathématiques 3e*. Editions Casteilla. Paris.

[187] ITARD J. et LECONTE P. (1940). *Cours de mathématiques. Classe de troisième. Algèbre et géométrie.* Armand Colin. Paris.

[188] JACQUET et LACLEF (1904). *Cours de géométrie théorique et pratique.* Nathan.

[189] LEBOSSE C. et HEMERY C. (1940). *Algèbre et géométrie. Classe de quatrième.* Fernand Nathan. Paris.

[190] LEBOSSE et HEMERY (1947). *Algèbre et géométrie. Classe de troisième. Programme de 1947.* Nathan. Paris.

[191] LESPINARD V. et PERNET P. (1952). *Algèbre et géométrie. Classe de quatrième.* Fernand Nathan.

[192] MARIJON A. (1931). *Géométrie du brevet Elémentaire*. Hatier. Paris.

[193] MAUGUIN A. Coll (1969). *Mathématiques classe de quatrième.* ISTRA Strasbourg.

[194] MAUGUIN A. Coll (1975). *Mathématiques classe de quatrième.* Istra. Paris.

[195] MONGE, GUINCHAN et PECASTAINGS (1974). *Mathématiques Classe de quatrième. Programme du 22 juillet 1971.* Belin. Paris.

[196] MONGE M., BEGOT M. et AUDOUIN MC. Coll (1978). *Mathématique Classe de troisième.* Belin. Paris.

[197] MONNET L.F. (1892). *Cours élémentaire de géométrie théorique et pratique.* 12ème édition. E. André Fils. Victorion. Paris.

[198] NIEWENGLOWSKI B. (1912). *Deuxième année de géométrie. Classe de 4ème B et de 3ème A.* Delagrave. Paris. 3ème édition.

[199] POLLE R., CLOPEAU G.H. et DELOBEL J. Coll POLLE (1980). *Mathématiques classe de seconde C et moderne.* J. de Gigord. Paris.

[200] PUILLE d'AMIEN D. (1887). *Leçons normales de géométrie élémentaire théorique et appliquée.* A. Fauraut. Paris.

[201] PYTHAGORE Coll (1989). *Mathématique 3e*. Hatier. Paris.

[202] QUESANNE et REVUZ (1968). *Mathématiques. Classe de troisième. Par J-P Nuss*. Fernand Nathan. Paris

[203] QUEYSANNE M. et REVUZ A. (1971). *Mathématiques 2e C.T Tome 2.* Fernand Nathan. Paris.

[204] QUESANNE M. et REVUZ A. (1973). *Cours de mathématique 4e. Arrêté du 22 juillet 1971 ; circulaire du 19 février 1973*. Fernand Nathan. Paris.

[205] ROUCHE E. et COMBEROUSSE Ch. (1891). *Traité de géométrie.* Sixième édition. Première partie. Géométrie plane. Gauthier Villard et Fils. Paris. (1874).

[206] SUCH DURRANDE Coll par SUCH S et GALLIE A(1989). *Mathématiques 3e*. Bordas. Paris.

[207] TERRACHER P.H., VINRICH G. et DELORD D. (1989). *Mathématiques 3^{e}*. Ed Hachette. Paris.

[208] TERRACHER P.H., DELORD R. et VINRICH G. (1993). *Mathématiques 3^{e}*. Hachette éducation. Paris.

[209] THERON, COUTURIER et GALMARD (1965). *Mathématiques. Classe de troisième.* Bordas. Paris.

[210] TRANSMATH (1989). *Maths 3ème*. Editions Nathan. Paris.

[211] TRANSMATH (1993). *Maths 3^{e}*. Editions Nathan. Paris.

[212] VACQUANT C. et MACE de LEPINAY (1916). *Premiers éléments de géométrie à l'usage des classes de sciences (Premier cycle). Classe de cinquième, quatrième et de troisième B).* Masson. Paris.

[213] VACQUANT C. et MACE de LEPINAY A (1917). *Eléments de géométrie à l'usage des classes de sciences (Second cycle). Classe de 2ème et 1ère C et D, moderne.* Masson. Paris.

[214] VALLORY J. (1911). *Leçons de géométrie à l'usage de Ecoles Normales et de toutes les écoles de l'enseignement primaire supérieur.* Chez l'auteur et chez L. Jouan. Caen.

[215] VIELLEFOND A. (1937). *Précis de géométrie.* Hachette. Paris.

[216] VINTEJOUX F. (1909). *Eléments d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre.* Hachette. Paris. 8ème édition.

[217] VISSIO P. Coll (1971). Classe de quatrième. Par Renée Polle et G.H Clopeau. Delagrave. Paris.

ANNEXES

Sommaire des annexes

Partie I

Partie II

Partie III

Partie IV

ANNEXE I : EUCLIDE

ANNEXE I 1, a **LIVRE I**

DEFINITIONS (déf.)
1) Le point est ce dont la partie est nulle.
2) Une ligne est une longueur sans largeur.
4) La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
8) Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction.
9) Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont droites, l'angle se nomme rectiligne.
10) Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
13) On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14) Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.
15) Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure étant égales entre elles.
16) Ce point se nomme le centre du cercle.
21) Les figures trilatères sont terminées par trois droites.
24) Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.
25) Le triangle isocèle est la figure trilatère qui a seulement deux côtés égaux.
36) Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre.

ANNEXE I 1, b

DEMANDES (dem.)
1) Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2) Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3) D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4) Tous les angles droits sont égaux.
5) Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6) Deux droites ne renferment point un espace.

ANNEXE I 1, c

NOTIONS COMMUNES (not.)
1) Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.
2) Si, à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3) Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4) Si, à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
7) Les grandeurs qui sont la moitié d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8) Les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles.
9) Le tout est plus grand que la partie.

ANNEXE I 2, a

L I V R E I

Proposition première

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Proposition 2

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Proposition 3

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Proposition 4

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun et si les angles compris par les côtés sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, soutenus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

ANNEXE I 2, b

Proposition 5

Dans les triangles isocèles, les angles sur la base sont égaux entre eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux entre eux.

Proposition 6

Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux seront aussi égaux entre eux.

Proposition 7

Sur une même droite, et à deux points différents placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.

Proposition 8

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

ANNEXE I 2, c

Proposition 9

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Proposition 10

Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Proposition 11

A une droite donnée et à un point donné de cette droite, mener une ligne droite à angles droits.

Proposition 12

A une droite donnée et infinie, et d'un point donné qui n'est pas dans cette droite, mener une ligne droite perpendiculaire.

Proposition 13

Si une droite, placée sur une droite, fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Proposition 15

Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.

ANNEXE I 2, d

Proposition 16

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Proposition 17

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Proposition 18

Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Proposition 19

Dans tout triangle, un plus grand côté soutend un plus grand angle.

ANNEXE I 2, e

Proposition 20

Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant.

Proposition 22

Avec trois droites égales à trois droites données, construire un triangle : il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième, parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième (prop. 20).

Proposition 23

A une droite donnée et à un point de cette droite, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Proposition 26

Si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun et un côté égal à un côté ou celui qui est adjacent aux angles égaux ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

ANNEXE I 2, f

Proposition 27

Si une droite tombant sur deux droites fait des angles alternes égaux entre eux, ces droites sont parallèles.

Proposition 28

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits, ces deux droites sont parallèles.

Proposition 29

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles fait les angles alternes égaux entre eux : l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Proposition 31

Par un point donné, conduite une ligne droite parallèle à une donnée.

Proposition 32

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés et les angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

ANNEXE I 2, g

Proposition 33

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

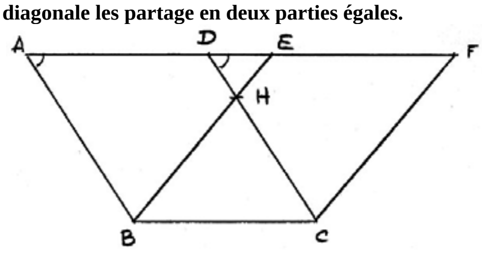
Proposition 34

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux et la diagonale les partage en deux parties égales.

Proposition 35

Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

ABCD et BEFC sont des parallélogrammes, donc (prop. 34), AD = BC et EF = BC. Donc, AD = EF (not. 1). Mais, AB = DC (prop. 34), donc d'après (not. 2), AD + DE = BC + DE, soit AE = DF. Comme AB = DC et angle FDC = angle EAB, d'après (prop. 29), on obtient alors avec (prop. 4) EB = CF. Si on retranche le triangle DEH aux triangles égaux EAB et CDF, les trapèzes sont égaux (not. 3) ; de plus, si on ajoute aux trapèzes ADHB et FEHC le triangle HBC, on aura (not. 2) les parallélogrammes ADCB et BCFE qui seront égaux.



Proposition 36

Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux.

ANNEXE I 2, h

Proposition 37

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux.

Proposition 38

Deux triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux.

Proposition 39

Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

Si ce n'est pas le cas, on construit la parallèle à (BC) passant par A (prop. 31) et on joint E, C (dem. 1). D'après (prop. 37), les triangles ABC et EBC sont égaux. Or, par hypothèse, les deux triangles ABC et BDC sont égaux ; donc, EBC et BDC sont deux triangles égaux (not. 1). Avec (not. 9), c'est impossible. Dans l'autre cas, on relie E à B.

ANNEXE I 3, a

LIVRE V

Définitions

1 - Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.
2 - Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.
3 - Une raison est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quantité.
4 - Une proportion est une identité de raisons.
5 - Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.
6 - Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux ou plus petits à la fois.
7 - Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.
8 - Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a, avec la seconde, une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

ANNEXE I 3, b

Proposition 1

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombres à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même multiple que chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

ANNEXE I 3, c

Proposition 4

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, des équimultiples quelconques de la première et de la troisième comparés à des équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième auront entre eux la même raison.
Corollaire : Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par inversion.

Proposition 20

Si l'on a trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs, étant prises deux à deux, et en même raison, si, par égalité, la première est plus grande que la troisième; la quatrième sera plus grande que la sixième si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième ; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

ANNEXE I 4, a

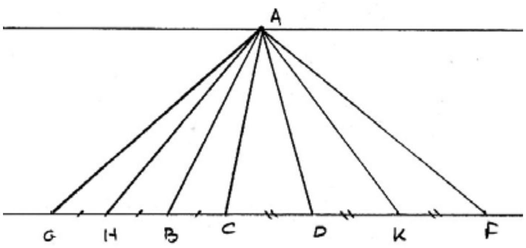
Définitions

1 - Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.
4 - La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.

ANNEXE I 4, b

Proposition 1

Les triangles (et les parallélogrammes) qui ont la même hauteur sont entre eux comme leur base.



On a, au départ, le triangle ABD. On prolonge BD (dem. 2). Puis on place H, G, tels que BH = HG = BC et autant qu'on en voudra, K, F, tels que CD = DK = KF (prop. 3.1). D'après (prop. 38.1), après avoir tracé la parallèle à (BD) passant par A (prop. 31.1), on a les triangles AGH, AHB et ABC qui sont égaux (même aire) et les triangles ACD, ADK et AKF qui sont égaux. Ainsi, l'aire AGC est à l'aire ABC comme GC est à BC et l'aire de ACF est à l'aire de ACD comme CF est à CD. Plus exactement, le triangle AGC est le même multiple du triangle ABC que la base GC l'est de la base BC ; le triangle ACF est le même multiple du triangle ACD que la base CF l'est de la base CD. Ainsi, si GC = CF, alors le triangle AGC est égal au triangle ACF (38.1) ; si GC > CF, alors le triangle AGC surpasse le triangle ACF (not. 9) ; si GC < CF, alors le triangle AGC est plus petit que le triangle ACF.
On a pris des équimultiples quelconques GC et le triangle AGC de la base BC et du triangle ABC ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base CD et du triangle ACD, la base CF et le triangle ACF et l'on a trouvé que si GC surpasse la base CF, le triangle AGC surpasse le triangle ACF ; que si la base GC est égale à la base CF, le triangle AGC est égal au triangle ACF et que si la base GC est plus petite que la base CF, le triangle AGC est plus petit que le triangle ACF. On conclut (déf. 6.5).

Proposition 2

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.
Sigle : (D.P.C.T)

Proposition 3

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle ; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section partage l'angle de ce triangle en deux parties égales.

ANNEXE I 4, c

Proposition 4

Dans les triangles équiangles, les côtés, autour des angles égaux, sont proportionnels et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues. Sigle : (T.E)

Proposition 5

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entre eux.

ABC et DEZ ayant leurs côtés proportionnels, on a : AB est à BC comme ED est à EZ ; BC est à CA comme EZ est à DZ ; BA est à AC comme ED est à DZ. On construit alors angle ZEH = angle ABC (prop. 23.1) et angle EZH = angle BCA. D'après (prop. 32.1), angle BAC = angle ZHE. Les triangles ABC et EHZ sont donc équiangles. D'après (prop. 4.6), AB est à BC comme HE est à EZ ; avec l'hypothèse et (prop. 11.5), on obtient : DE est à EZ comme HE est à EZ. D'après (prop. 9.5) DE = HE. De même DZ = HZ. Comme EZ est un côté commun aux deux triangles, EDZ et EZH la (prop. 8.1) donne angle DEZ = angle HEZ et ainsi, les triangles EDZ et EZH sont égaux (prop. 4.1) et donc angle DZE = angle HZE et angle EDZ = angle ZHE. Puisque angle ZED = angle ZEH et angle ZEH = angle ABC, on a aussi (not. 1) angle ABC = angle DEZ. De même, on montrerait que angle ACB = angle DZE et angle BAC = angle EDZ ; donc les triangles ABC et DEZ sont équiangles.

Proposition 6

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les angles soutendus par des côtés homologues seront égaux.

Proposition 7

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petit ou plus grand qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Proposition 8

Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entre eux.

Corollaire

De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment.

ANNEXE I 4, d

Proposition 9

D'une droite donnée, retrancher la partie demandée.

Proposition 10

Partager une droite donnée, qui n'est pas partagée de la même manière qu'une droite donnée est partagée.

Proposition 11

Etant données deux droites, trouver une troisième proportionnelle.

Proposition 12

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Proposition 13

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

ANNEXE I 4, e

Proposition 18

Sur une droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne, et semblablement placée.

Proposition 20

Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables égaux en nombre, et homologues aux polygones ; et le polygone a avec le polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Proposition 21

Les figures rectilignes semblables à une figure sont semblables entre elles.

Proposition 22

Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables et semblablement construite sur ces droites, seront proportionnelles ; et si les figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont proportionnelles, ces droites seront proportionnelles.

Proposition 24

Dans tout parallélogramme, les parallélogramme autour de la diagonale sont semblables au parallélogrammes entier et semblables entre eux.

Proposition 25

Construire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée.

Proposition 31

Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés qui comprennent l'angle droit.

Proposition 32

Si deux triangles, ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, se touchent par un angle, de manière que leurs côtés homologues soient parallèles, les côtés restants des triangles seront dans la même direction.

Proposition 33

Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprennent, soit que les angle soient placés aux centres ou bien aux circonférences ; il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres.

ANNEXE I 5, a LIVRE X

Proposition 117

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Scholie

Des droites incommensurables en longueur étant trouvées, comme les droites A, B, on trouvera plusieurs autres grandeurs de deux dimensions, c'est à dire des surfaces incommensurables entre elles.

ANNEXE I 5, b LIVRE XI

Définition 11

Un angle solide est l'inclinaison mutuelle de plus de deux lignes qui se rencontrent, et qui ne sont pas dans une même surface. Autrement. Un angle solide est celui qui est compris par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans une même surface, et qui sont construits en un seul point.

Proposition 17

Si deux droites sont coupées par des plans parallèles, elles seront coupées en même raison.

<u>Proposition 23</u>

Construire un angle solide avec trois angles plans, deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prenne, étant plus grands que l'angle restant ; il faut que ces trois angles soient plus petits que quatre droits.

<u>Proposition 27</u>

Sur une droite donnée décrire un parallélépipède semblable à un parallélépipède donné, et semblablement placé.

ANNEXE I 5, c LIVRE XII

<u>Proposition 1</u>

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entre eux comme les carrés des diamètres.

<u>Proposition 3</u>

Toute pyramide triangulaire peut se diviser en deux pyramide triangulaires égales et semblables entre elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prisme égaux ; et ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

<u>Proposition 8</u>

<u>Corollaire</u>

D'après cela, il est évident que les pyramide semblables qui ont des polygones pour bases sont entre elles en raison triplée de leurs côtés homologues.

<u>Proposition 12</u>

Les cônes et cylindres semblables sont entre eux en raison triplée des diamètres de leurs bases.

<u>Proposition 17</u>

Deux sphères étant concentriques, décrire dans la plus grande sphère un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère.

ANNEXE I 5, d LIVRE XIII

<u>Proposition 8</u>

Si des droites soutendent deux angles de suite d'un polygone équilatéral et équiangle, ces droites se couperont en extrême et moyenne raison, et leurs plus grands segments seront égaux au côté du pentagone.

<u>Proposition 9</u>

Si l'on ajoute ensemble le côté de l'hexagone et le côté du décagone, ces polygone étant décrits dans le même cercle, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison, et son plus grand segment sera le côté de l'hexagone.

<u>Proposition 10</u>

Si l'on décrit dans un cercle un pentagone équilatéral, le carré du côté du pentagone sera égal à la somme des carrés du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle.

<u>Proposition 11</u>

Si l'on décrit un pentagone équilatéral dans un cercle ayant un diamètre rationnel, le côté du pentagone sera l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

<u>Proposition 12</u>

Si l'on décrit dans un cercle un triangle équilatéral, le carré du côté du triangle sera triple du carré du rayon.

<u>Proposition 13</u>

Construire une pyramide avec quatre triangles équilatéraux ; la circonscrire par une sphère donnée, et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté de la pyramide.

<u>Proposition 14</u>

Construire un octaèdre, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit la pyramide ; et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est double du carré du côté de l'octaèdre.

<u>Proposition 15</u>

Construire un cube, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est triple du carré du côté du cube.

<u>Proposition 16</u>

Construire un icosaèdre, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le côté de l'icosaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

<u>Proposition 17</u>

Construire un dodécaèdre, et le circonscrire par la même sphère que les figures précédentes, et démontrer aussi que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

<u>Proposition 18</u>

Exposer les côtés des cinq figures, et les comparer entre eux.

ANNEXE II : CAVALIERI

ANNEXE II 1, a

<u>Théorème 3</u>

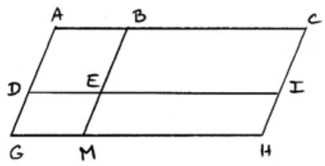
Il y a la même proportion entre deux figures planes qu'entre toutes les lignes de ces deux figures, déterminées selon une règle quelconque ; et il y a la même proportion entre deux figures solides qu'entre tous les plans de ces deux figures déterminés selon une règle quelconque [...].

<u>Corollaire</u>

On voit ainsi que pour trouver quelle proportion ont entre elles deux figures planes, ou deux solides, il nous suffira de trouver, dans les figures planes, quelle proportion ont entre elles toutes les lignes de ces figures, et dans les figures solides, quelle proportion ont entre eux tous les plans de ces figures solides déterminés selon une règle quelconque. Tel est le grand principe sur lequel je fonde ma nouvelle géométrie.

<u>Proposition 9</u>

Si des parallélogrammes sont de hauteur identique, tous leurs carrés pris avec pour règle la base selon laquelle a été déterminée la hauteur, seront entre eux comme les carrés des bases.



[...] Traçons à l'intérieur des parallélogrammes AM et MC une droite quelconque DI parallèle à GH. [...] Puisque DE est égal à GM et que des figures planes semblables décrites par des côtés ou lignes homologues sont égales, il résulte que le carré de DE sera égal au carré de GM, et le carré de EI au carré de MH ; donc, le carré de GM sera au carré de MH, comme le carré de DE au carré de

EI ; et puisque DI est une parallèle quelconque à GH, il s'ensuit que, comme l'un est à l'un, ainsi sont tous à tous, c'est-à-dire que tous les carrés du parallélogramme AM seront à tous les carrés du parallélogramme MC, en prenant GH pour règle, comme le carré de GM est au carré de MH.

ANNEXE III : ARNAULD

ANNEXE III 1, a

Livre premier

Des grandeurs en général

C'est pourquoi, ayant entrepris de traiter ici de la quantité ou grandeur en général, en tant que, ce mot comprend l'étendue, le nombre, le temps, les degrés de vitesse et, généralement, tout ce qui peut augmenter en ajoutant ou multipliant, et diminuer en soustrayant ou divisant, etc. Je ne ferai point de difficulté de supposer qu'on sait de certaines choses qui semblent appartenir à la science des nombres qu'on appelle arithmétique, ou à la science de l'étendue qu'on appelle géométrie ; parce que je ne supposerai rien qu'on ne puisse savoir sans l'aide de l'arithmétique ou de la géométrie pour peu d'attention qu'on y fasse ou qu'on y ait déjà fait [...]. Je suppose, en quatrième lieu, que la multiplication et la division se peuvent appliquer à toutes grandeurs et non seulement aux nombres.

Principes généraux

Du tout et des parties

Toute grandeur est considérée comme divisible en ses parties.

La grandeur est appelée tout au regard de ses parties.

Lorsqu'une partie de la grandeur est contenue précisément tant de fois dans son tout, comme 2 fois, 3 fois, 4 fois, etc., elle s'appelle partie aliquote, ou simplement aliquote. On dit aussi qu'elle en est la mesure ; parce qu'elle la mesure justement étant prise autant de fois qu'il faut.

ANNEXE III 2, a

Livre second

Des proportions de la comparaison des grandeurs

Définitions et divisions

1 - Les grandeurs de même genre s'appellent homogènes, comme deux nombres, deux lignes, deux surfaces.

2 - De divers genres hétérogènes, comme un nombre et une ligne, une surface et un solide.

3 - Quand on compare deux grandeurs homogènes ensembles, le premier terme de cette comparaison s'appelle antécédent et le second conséquent.

4 - Or, cette comparaison peut se faire en deux manières : la première est quand l'une étant plus grande que l'autre, on regarde de combien la plus grande surpasse la plus petite, ce qui s'appelle excès ou différence, comme de combien A surpasse B. Cette différence peut s'exprimer ainsi : A - B.

5 - L'autre est quand on considère la manière dont une grandeur est contenue dans une autre, ou en contient une autre, ce qui s'appelle raison [...].

7 - La manière dont est contenue une grandeur dans une autre que nous avons appelée raison, est encore de deux sortes.

L'une est quand la grandeur ou l'une de ses aliquotes est contenue tant de fois précisément dans une autre, ce qui s'appelle raison exacte ou raison de nombre à nombre [...].

8 - Les grandeurs qui ont entre elles cette raison de nombre à nombre sont appelées commensurables, parce qu'elles ont quelque aliquote qui leur sert de mesure commune.

9 - L'autre manière selon laquelle une grandeur est contenue dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit précisément tant de fois dans l'autre. De sorte que l'une et l'autre aient une infinité d'aliquotes et de mesures, il n'y en a aucune néanmoins qui mesure précisément l'une et l'autre grandeur, mais celle qui mesure précisément la première ne mesurera jamais précisément la seconde, et celle qui mesure précisément la seconde ne mesurera jamais précisément la première. Cette raison s'appelle sourde.

10 - Et les grandeurs qui n'ont entre elles que cette sorte de raison s'appellent incommensurables, parce qu'elles n'ont entre elles aucune mesure commune [...]. L'égalité des différences ou des raisons s'appellent proportion : celle des différences, proportion arithmétique, et celle des raisons , proportion géométrique [...].

1ère définition de l'égalité des raisons

29 - Voici la première notion de l'égalité de deux raisons : deux raisons sont appelées égales quand les antécédents contiennent également les conséquents ou sont également contenus dans les conséquents.

Seconde définition de l'égalité des raisons

38 - Deux raisons appelées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antécédents sont chacune également contenues dans chaque conséquents [...].

Cela étant supposé, afin que, selon cette définition, les quatre grandeurs *b, c, f, g*, soient proportionnelles, il faut que *x* et *y* (aliquotes quelconques pareilles de *b* et *f*) soient également contenues dans *c* et dans *g*. Et alors, la raison de chaque antécédent à son conséquent est de nombre à nombre. Mais, si *x* n'est jamais précisément tant de fois dans *c*, mais toujours avec quelque résidu, il faut que *y* soit aussi autant de fois dans *g*, avec quelque résidu : et alors, leur raison est sourde.

Premier corollaire

39 - Quand *x* et *y* ne sont pas précisément tant de fois dans les conséquents, mais qu'il reste quelque chose, le résidu du premier conséquent soit appelé r, et celui du second *R*. Et alors les aliquotes pareilles de *x* et de *y* seront également contenues dans *r* et *R*, d'où il s'en suivra $x : r :: y : R$.

Second corollaire

40 - On peut voir là que la différence qu'il y a entre l'égalité des raisons sourdes et celle des raison nombre à nombre est que la première se montre négativement et la seconde positivement.

ANNEXE III 2, b

Fondement de cette seconde définition de l'égalité des raisons

Premier théorème

41 - Deux grandeurs qui ont même raison à une même grandeur sont égales ; et si elles sont égales, elles ont même raison à une même grandeur.

Si $b : d :: f : d$, *b* et *f* ne peuvent pas être différentes, car alors la plus grande contiendrait plus de leur aliquote. Il faut que leurs aliquotes pareilles soient également contenues dans *d* (38). Les plus grandes, si elles n'étaient pas égales, y seraient moins contenues que les plus petites. Or, deux grandeurs sont égales quand leurs aliquotes pareilles sont égales (ax 8).

Si *b* et *f* sont égales, leurs aliquotes pareilles seront égales (ax 8) et par conséquent également contenues dans *d*. Ce qui est la même chose qu'avoir même raison à *d*.

Second théorème

Lorsque deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont en même raison étant multipliées qu'avant d'être multipliées b : c :: fb : fc.

Troisième théorème

43 - Deux raisons égales à une troisième raison sont égales entre elles.

Quatrième théorème

44 - Deux grandeurs demeurent en même raison, quoi qu'on ajoute à l'une et à l'autre ou quoi qu'on en ôte pourvu que ce qu'on ajoute à la première, ou ce qu'on ôte, soit à ce qu'on ajoute à la seconde, ou à ce qu'on en ôte, comme la première est à la seconde.

Cinquième théorème

46 - Lorsque 4 termes sont proportionnels, ils le seront encore :

1 - En transposant les termes de chaque raison, ce qui s'appelle Permutendo.

2 - En les prenant alternativement, c'est-à-dire en comparant les antécédents ensembles et les conséquents ensembles : le 1er terme au 3ème et le 2ème au 4ème, ce qui s'appelle Alternendo.

3 - En comparant chaque antécédent plus son conséquent avec son conséquent, ce qui s'appelle Companendo.

4 - En comparant chaque antécédent moins son conséquent avec son conséquent, ce qui s'appelle Dividendo.

Sixième théorème

Etant données 3 grandeurs d'une part et 3 de l'autre, si la 1ère d'une part est à la 2ème comme la 1ère de l'autre part est à la 2ème, et la 1ère d'une part à la 3ème comme la 1ère de l'autre part à la 3ème, la 2ème d'une part sera à la 3ème comme la 2ème de l'autre part à la 3ème.

Septième théorème

Ayant plusieurs termes d'une part et autant de l'autre, si chacun d'une part est à chacun de l'autre en même raison, tous ceux d'une part seront à tous ceux de l'autre en la même raison c'est-à-dire que plusieurs raisons étant égales, tous les antécédents seront à tous les conséquents comme un antécédent quelconque à son conséquent.

ANNEXE III 2, c

La principale propriété de la proportion géométrique

Huitième théorème

Lorsque quatre grandeurs sont en proportion géométrique, si les termes de l'une des raisons sont multipliables par ceux de l'autre ou réellement (homogènes) ou par fiction d'esprit (hétérogène), le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Si $b : c :: f : g$, $5x : 3x :: 5y : 3y$, la multiplication des extrêmes est $5\,x$ par $3\,y$ soit $15\,x\,y$ et la multiplication des moyens est $3\,x$ par $5\,y$ ce qui fait aussi $15\,x\,y$. La même chose se peut montrer quand il y a du résidu. $m : n :: p : q$, $5\,x : 3\,x + r :: 5\,y + 3\,y + r$. La multiplication des extrémités sera $15\,x\,y + 5\,x\,r$ et celle des moyens sera $15\,x\,y + 5\,y\,r$. Il faut prouver que $x\,r = y\,r$. Or on sait que $x : r :: y : r$; ainsi l'égalité qu'on a trouvé dans la multiplication des extrémités et des moyens de la 1ère proposition à ces deux résidus près, se trouvera encore ici à d'autres petits résidus près, sur lesquels on fera encore le même raisonnement, et ainsi à l'infini.

Neuvième théorème

Lorsque quatre grandeurs sont tellement disposées que le produit des deux extrêmes est égal au produit des deux moyens, ces quatre grandeurs sont proportionnelles.

ARNAULD donne un exemple de multiplication fictive : en 10 h quelqu'un doit parcourir combien s'il parcourt 24 lieues en 8 h ? Je multiplie par une fiction d'esprit10 h par 24 lieues, ce qui donne un produit imaginaire d'heures et de lieues de 240, qui, étant divisé par 8h donne 30 lieues.

ANNEXE III 3, a

Livre cinquième

De l'étendue de la ligne droite et circulaire.

Des droites perpendiculaires et obliques

Définitions

Toute grandeur est continue comme est l'étendue, le temps, le mouvement, ou non continue comme le nombre. La continue est ou successive, comme le temps, le mouvement, ou permanente qui s'appelle généralement espace ou étendue. Mais elle se considère ou selon toutes les trois dimensions, longueur, largeur et profondeur et elle s'appelle alors corps ou solide.

Ou selon deux seulement, longueur et largeur et alors, elle s'appelle surface ou superficie, qui est ou plate, et qui s'appelle plan, ou non plane et qui s'appelle surface courbe.

Ou selon une seulement, qui est la longueur et alors elle s'appelle ligne, qui est ou droite ou courbe.

L'extrémité de la ligne s'appelle point, qui doit être conçu indivisible, car, s'il pouvait être partagé en deux, l'une de ces moitiés ne seraient pas à l'extrémité de la ligne. Et par la même raison, la ligne, qui est indivisible selon la largeur, parce qu'elle est considérée comme n'en ayant point, est l'extrémité de la surface.

Première section

De la ligne droite

La ligne droite est la plus courte étendue entre deux points. Et celle qui approche plus de la droite est aussi la plus courte : ce qui a donné occasion à Archimède ce premier principe ou axiome.

ANNEXE III 3, b

Premier axiome

Si deux lignes sur le même plan ont les extrémités communes et sont courbes ou creuses vers la même part, celle qui est continue est plus courte que celle qui la contient.

Quatrième axiome

Si une ligne droite est immédiatement couchée sur une autre en une de ses parties, elle le sera en toutes, pourvu que l'une et l'autre soient prolongées autant qu'il faudra, et elles ne seront proprement qu'une même ligne.

Cinquième axiome

Deux lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point.

Sixième axiome

Deux lignes droites qui, étant prolongées vers un même côté, s'approchent peu à peu, se couperont à la fin.

Euclide prend cette proposition pour un principe et avec raison : car elle a assez de clarté pour s'en contenter, et ce serait perdre le temps inutilement que de se rompre la tête pour la prouver par un long circuit.

ANNEXE III 3, c

Deuxième section
De la ligne circulaire
Premier axiome

22. On demande qu'ayant un intervalle donné, on puisse décrire une circonférence de cet intervalle. Ce qu'on ne peut douter être possible, puisqu'il ne faut pour cela que concevoir que la ligne qui joindra les deux points de cet intervalle se remue, l'une de ses extrémités demeurant immobile.
La machine la plus ordinaire dont on se sert pour la décrire sur le papier s'appelle, *compas*, qui a deux jambes, qui étant ouvertes plus ou moins selon l'intervalle donné, l'une demeurant immobile, l'autre décrit la circonférence.

Deuxième axiome

23. Or comme il faut supposer dans cette opération que les deux jambes du compas gardent toujours la même distance, il n'est en rien plus difficile après avoir mesuré la longueur d'une ligne donnée par l'ouverture du compas, de se servir de cette même ouverture pour décrire ailleurs une ligne égale à celle-là, ou retrancher d'une autre ligne une portion qui soit égale à cette première. C'est pourquoi on peut hardiment mettre ce problème entre les demandes qui n'ont point besoin d'être prouvées.
D'écrire une ligne égale à une ligne donnée, soit par le retranchement d'une autre ligne, soit par tout ailleurs.

Cinquième axiome

26. Dans un même cercle, les cordes qui soutiennent des arcs égaux sont égales, et les arcs qui sont soutenus par des cordes égales sont égaux. C'est une suite évidemment nécessaire de l'entière uniformité de la circonférence. Il ne faut qu'attention pour en apercevoir la certitude. Il en est de même dans deux cercles égaux que dans le même cercle.

ANNEXE III 3, d

Troisième section
Des lignes droites perpendiculaires
31. Définition plus exacte de la perpendiculaire

Pour former une notion plus distincte de deux lignes perpendiculaires, on les peut définir en cette sorte.
Lorsque deux points de la ligne coupée étant pris également distants de l'un des points de la ligne coupante, tout autre point de la ligne coupante sera aussi également distant de ces deux points de la ligne coupée, la ligne coupante est perpendiculaire à la coupée, étant bien clair qu'elle ne peut alors incliner plus d'un côté que d'un autre.

ANNEXE III 3, e

Axiome

32. Pour montrer que tous les points de la ligne coupante sont également distants de deux de la ligne coupée, il suffit d'en avoir deux dans la ligne coupante dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée, car de là s'ensuivra que tous les autres le seront aussi.
Je prétends que la seule considération de la nature de la ligne droite fait voir la vérité de cette proposition et que sans cela, il est impossible de garder, dans la géométrie, l'ordre naturel des choses [...].
Ce qui doit faire regretter le scrupule qu'on pourrait avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle même, c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses et employer des triangles pour démontrer les propriétés des lignes, c'est-à-dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à la véritable méthode.
Soit donc, de justice ou de grâce, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition qui donne un moyen très facile de démontrer les problèmes suivant sans se servir des triangles, comme fait Euclide.

ANNEXE III 3, f

Premier problème

33. D'un point donné hors une ligne donnée, tirer une perpendiculaire sur cette ligne.
KB est perpendiculaire à MN, car les points D et B sont également distants de M et N.

Deuxième problème

34. D'un point donné dans une ligne, élever une perpendiculaire.

Troisième problème

35. Couper une ligne donnée en deux parties égales.

ANNEXE III 3, g

Premier théorème

36 - La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qui puissent être menées d'un point à une ligne.

Second théorème

37 - On ne peut élever du même point d'une ligne plus d'une perpendiculaire ni en mener plus d'une d'un point à une ligne.
Ayant élevé du milieu B de la ligne MN la perpendiculaire BK, il est visible que si on en voulait élever une autre du même point B, on ne le pourrait tirer que plus vers un côté que vers l'autre, ce qui est directement contraire à la notion de perpendiculaire.
Pour la seconde partie, soit KB perpendiculaire sur MN de sorte que B soit également distant de M et N. Si on menait de K une autre perpendiculaire à un autre point G, G ne pourrait être à égale distance de M et N, car si G était entre B et M, il serait plus près de M que de N et s'il était entre B et N, il serait plus près de N que de M et s'il était en B, nous avons déjà vu ce cas.

Premier corollaire

38 - La perpendiculaire est la mesure d'un point hors d'une ligne à cette ligne et de la ligne à ce point.

Second corollaire

39 - Deux différentes lignes étant perpendiculaires à une même ligne, il est impossible qu'elles se rencontrent, quoi que prolongées à l'infini.

Troisième corollaire

40 - Lorsque d'un point hors une ligne on a tiré une oblique sur cette ligne, si de même point on tire une perpendiculaire sur la même ligne, cette perpendiculaire tombera du côté où l'oblique est inclinée sur cette ligne.

Quatrième corollaire

41 - Si d'un point où une oblique coupe une ligne on veut élever une perpendiculaire sur cette ligne, elle s'élèvera du côté vers lequel cette oblique n'est pas inclinée.

Troisième théorème

42 - La perpendiculaire indéfinie qui coupe par la moitié la distance de deux points comprend tous les points du même plan dont chacun peut être également distant de ces deux points.

ANNEXE III 3, h

Quatrième section
Des lignes droites obliques

44 - Proposition fondamentale de la mesure des lignes obliques. Les lignes obliques menées de même point à une même ligne, sont plus longues plus elles sont éloignées du perpendicule.

Corollaire

Il est visible que ce n'est que la même chose si l'on dit que de toutes les obliques qui seront menées au même point d'une même ligne de divers points d'une perpendiculaire à cette ligne pris du même côté, celles qui sont menées des points les plus proches de la ligne où tombe l'oblique sont les plus courtes.

Premier théorème

48 - S'il y a égalité dans la perpendiculaire et dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques sont égales.

Premier corollaire

On ne peut mener d'un point à une ligne que deux lignes égales.

Second corollaire

Il est impossible qu'un même point soit également distant de trois points d'une ligne droite.

Second théorème

50 - S'il y a égalité dans la perpendiculaire et dans l'oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.

Troisième théorème

51 - S'il y a égalité dans l'oblique et dans l'éloignement, il y en a dans la perpendiculaire.

Quatrième théorème

52 - Quand il y a égalité donnée que dans l'une de ces trois lignes, voici ce qui est des deux autres.
S'il n'y a égalité que dans la perpendiculaire, le plus grand éloignement du perpendicule donne la plus grande oblique, et la plus grande oblique donne le plus grand éloignement du perpendicule, grâce à la proposition principale.

Cinquième théorème

53 - S'il n'y a égalité que dans l'éloignement du perpendicule, la plus grande perpendiculaire donne la plus grande oblique, et la plus grande oblique la plus grande perpendiculaire.

Sixième théorème

54 - S'il n'y a égalité que dans les longueurs des obliques, le plus grand éloignement du perpendicule donnera une moindre perpendiculaire et une moindre perpendiculaire donnera un plus grand éloignement du perpendicule.

Septième théorème

55 - Lorsque deux lignes obliques sont menées d'un même point sur une même ligne, la distance des deux points de section est égale à la distance du perpendicule de l'une plus ou moins la distance du perpendicule de l'autre.

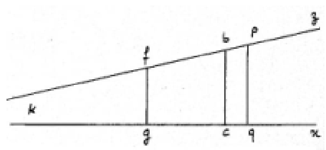
ANNEXE III 4

Livre sixième
Des lignes parallèles

Deux notions des lignes parallèles : l'une négative et l'autre positive.
2. Mais ces lignes peuvent être considérées selon deux notions différentes : l'une négative et l'autre positive.
La négative est de ne se rencontrer jamais, quoique prolongées à l'infini.
La positive, d'être toujours également distantes l'une de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points de chacune sont également distants de l'autre : c'est-à-dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne sont égales. Et il est bien clair que la notion négative est une suite nécessaire de la positive, ne se pouvant pas faire que deux lignes se rencontrent si elles demeurent toujours également distantes l'une de l'autre.

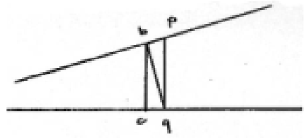
Premier lemme

4 - Quand les deux lignes **x** et **z** sont coupées par **bc**, perpendiculaire sur **x** et oblique sur **z**, il arrive trois choses :
1) Que toutes les autres lignes menées de **z** perpendiculairement sur **x** sont obliques sur **z**.
2) Qu'elles sont inclinées sur **z** du même côté que **cb** l'est aussi sur **z**, lequel côté j'appellerai **k**.
3) Que les perpendiculaires sur **z** sont obliques sur **x** et inclinées sur **x** du même côté que **cb** l'est sur **z**, c'est-à-dire **k**.
Preuve des deux premières parties : Soit tirée de **c** une perpendiculaire sur **z** ; elle sera vers **K** et non pas vers **p** d'après (40 - Livre V). Et ainsi le point où cette perpendiculaire tombera sur **z** sera ou le même point que **f**, ou au delà de **f**, ou entre **f** et **b**.1er cas : **cf** étant perpendiculaire sur la ligne **z**, **gf** sera oblique sur **z** et inclinée vers **K**.



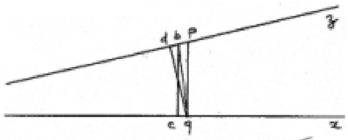
3ème cas : de **d** menant **dh** perpendiculaire sur **x** et de **h**, **hl** perpendiculaire sur **z**. Si **hl** se termine ou à **f**, ou au delà de **f**, on prouvera de la même sorte que, dans le premier et le second cas, **gf** est oblique sur **z** et inclinée vers **k**. Et si **hl** n'allait pas jusqu'à **f**, on tirerait de L, **lm** perpendiculaire sur **x** et de **m** une perpendiculaire sur **z** jusqu'à ce qu'il y en ait une qui se termine à **f**, ou au delà de **f**. On prouve, de la même sorte, que **qp** est oblique sur **z** et inclinée vers **k**, excepté qu'on élèvera de **b** une perpendiculaire sur la ligne **z**, qui coupera la ligne **x**, au delà de **c** d'après (41 - LIVRE V). Et ainsi elle tombera ou à **q**, ou au delà de **q**, ou entre **q** et **c**.

Second lemme

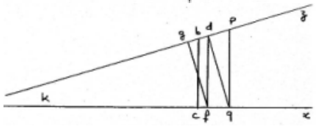


5 - Si les lignes x et z sont coupées par bc perpendiculaire sur x et oblique sur z, et inclinée vers k, toutes les lignes menées des points de z, perpendiculaires sur x seront inégales, et les plus courtes seront celles qui seront vers k, c'est-à-dire vers le côté où la ligne bc est inclinée.
Il suffira de prouver que **bc** étant plus vers **k**, **bc** sera nécessairement plus courte que **pq**.
1er cas : **bc** étant perpendiculaire sur **x** et **bq** oblique, **bc** sera plus courte que **bq** (36 - Livre V).

Or pour la même raison, **qb** étant perpendiculaire sur **z** et **pq** oblique, **qb** est plus courte que **qp**. Donc **bc** doit être plus courte que **pq**.



<u>2ème cas</u> : si ce point est au-delà de **b**, **qb** sera oblique mais plus proche de la perpendiculaire **qd** que **qp** et par conséquent plus courte que **qp** d'après (44 - Livre V). Or (d'après le 1er cas), **bc** est plus courte que **bq** et ainsi **bc** est plus courte que **pq**.



<u>3ème cas</u> : Si **d** se trouve entre **b** et **p**, de **d** on tirera **df** perpendiculaire sur **x** et de **f**, **fg** perpendiculaire sur **z** et **g** se trouvant ou au point **b**, ou au delà du point **b**, on prouvera comme dans le premier et second cas que **bc** est plus court que **df**, laquelle, par le premier cas, est plus courte que **pq**. Que si **fg** n'allait pas jusqu'à **b**, on tirerait d'autres perpendiculaires sur **x**, et puis sur **z**, jusqu'à ce qu'il y en ait une qui aille jusqu'à **b**, ou au delà.

<u>Corollaire</u>

6 - C'est visiblement la même chose de toutes les lignes perpendiculaires à **z** et obliques sur **x**, comparées ensembles.

<u>Troisième lemme</u>

7 - En comparant une perpendiculaire sur x et oblique sur z, avec une perpendiculaire sur z et oblique sur x , si elles ne se croisent pas, elles sont nécessairement inégales et la plus courte est celle qui est plus vers le côté vers lequel elles sont inclinées.

<u>Quatrième lemme</u>

8 - Deux lignes enfermées ne se croisant point ne sauraient être égales et être chacune perpendiculaire sur quelqu'une des enfermantes, qu'elles ne le soient sur toutes les deux.

<u>Cinquième lemme</u>

9 - Si une ligne enfermée est perpendiculaire à l'une et à l'autre des enfermantes, toutes les lignes menées de quelque point que ce soit d'une enfermante perpendiculaire sur l'autre, seront égales à cette enfermée et par conséquent entre elles.

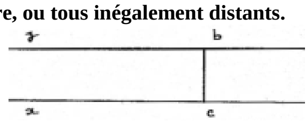
<u>Sixième lemme</u>

10 - Si une ligne est perpendiculaire à deux lignes, toutes les lignes perpendiculaires à l'une de ces lignes seront perpendiculaires à toutes les deux.

<u>Septième lemme</u>

11 - Deux lignes ne se traversant point, tous les points de chacune sont également distants de l'autre, ou tous inégalement distants.

Car menant d'un point de **z**, **bc** perpendiculaire sur **x** . Si **bc** est aussi perpendiculaire sur **z**, de quelque point de **z** qu'on mène des perpendiculaires sur **x**, elles seront égales à **bc**, d'après le (9 - Livre VI). Que si, au contraire, **bc** est oblique sur **z**, toutes les perpendiculaires des points de **z** sur **x** seront inégales et par conséquent tous les points de **z** inégalement distants de **x**.



<u>Huitième lemme</u>

12 - Si deux lignes menées d'un même point sont inclinées l'une sur l'autre, tous les points de chacune sont inégalement distants de l'autre, et les plus courtes perpendiculaires des points de chacune sur l'autre seront celles qui sont les plus proches du point de la section.

<u>Trois propositions fondamentales des parallèles</u>

<u>Première proposition</u>

13 - Si deux lignes coupées par une ligne perpendiculaire à l'une et à l'autre, tous les points de chacune sont également distants de l'autre et par conséquent, elles sont parallèles.

<u>Seconde proposition</u>

14 - Si deux points d'une ligne sont également distants d'une autre ligne, tous les points de chacune sont également distants de l'autre et par conséquent elles sont parallèles.

<u>Troisième proposition</u>

15 - Deux lignes ne se croisant point et étant enfermées entre deux lignes, ne sauraient être égales et être perpendiculaires, l'une sur une des enfermantes et l'autre sur l'autre qu'elles ne soient chacune sur toutes les deux (4ème lemme) et que par conséquent ces lignes enfermantes ne soient parallèles (6ème lemme).

<u>Premier corollaire</u>

16 - Toutes les perpendiculaires entre deux parallèles sont égales car c'est cela même qui les rend parallèles.

<u>Second corollaire</u>

17 - Les obliques entre parallèles sont plus longues que les perpendiculaires. Car chaque oblique est plus longue que la perpendiculaire et toutes les perpendiculaires sont égales.

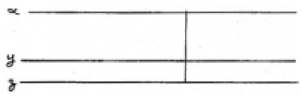
<u>Problème</u>

18 - Mener par un point donné une parallèle à une ligne donnée.

<u>Premier théorème</u>

19 - Deux lignes ne sauraient être parallèles à une troisième qu'elles ne le soient entre elles.

Si **x** et **z** sont parallèles à **y** ; soit élevé d'un point de **x** une perpendiculaire qui coupe **y** et **z**, elle coupera perpendiculairement **y**, et étant perpendiculaire sur **y**, elle le sera aussi sur **z** parce que **y** et **z** sont parallèles. Donc, **x** et **z** auront une même perpendiculaire. Donc, elles seront parallèles (première proposition).



<u>Corollaire</u>

20 - On ne saurait faire passer par le même point deux différentes lignes qui soient parallèles à une même.

<u>Second théorème</u>

21 - Les également inclinées entre les mêmes parallèles sont égales et les égales sont également inclinées.

<u>Troisième théorème</u>

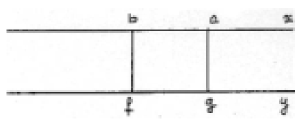
22 - Les plus inclinées entre les mêmes parallèles sont les plus longues, et les plus longues sont les plus inclinées.

<u>Quatrième théorème</u>

23 - Lorsque deux perpendiculaires ou deux obliques également inclinées du même côté coupent des parallèles, les portions de ces parallèles comprises entre ces lignes sont égales.

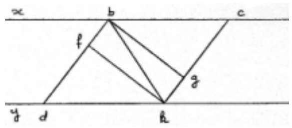
1 - Pour les perpendiculaires, on conclut par le 5ème lemme.

2 - Ici, je dis que **bc** et **dk** se trouvent aussi être égales. Par le premier cas, **bc** est égale à **fg**. Or, les obliques sont supposées également inclinées, donc **df** est égale à **gk**. Donc, ajoutant **fk** à l'une et à l'autre, **dk** sera égale à **fg**. Donc, **dk** est égale à **bc**. Dans cet autre cas : **bc** = **fg**, **df** = **kg**, donc autant **kf** de l'un et l'autre : **dk** = **fg** et par conséquent à **bc**.



Cinquième théorème

24 - Les obliques également inclinées entre parallèles du même côté sont parallèles entre elles.



Soit menée l'oblique **bk**. On a, d'après (23 - Livre VI) **bd** = **ck dk** = **cb**, **bk** = **kb**. On a alors les perpendiculaires de **k** sur **bd** et sur **ck** qui sont égales (57 - Livre V). Ainsi, d'après (15 - Livre VI), les lignes **bd** et **ck** sont parallèles.

Sixième théorème

25 - Les inégalités entre parallèles quoi qu'inclinées du même côté ne peuvent être parallèles, non plus que les inégalités qui sont inclinées de divers côtés.

Septième théorème

26 - Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémités, si les opposées sont égales, elles sont parallèles.

Huitième théorème

27 - Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémités, si les opposées sont parallèles, elles sont égales.

Neuvième théorème

28 - Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémités, si deux opposées sont parallèles et égales, les deux autres opposées sont parallèles et égales.

Dixième théorème

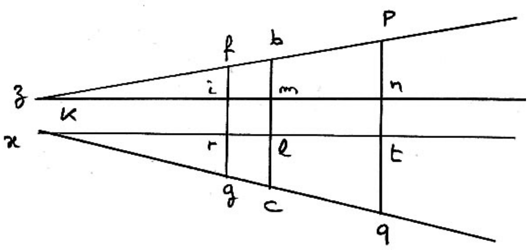
29 - Les lignes qui enferment des parallèles égales sont parallèles et les mêmes. On le prouve de la même sorte.

Corollaire

30 - Les lignes qui enferment des parallèles inégales ne sauraient être parallèles.

Onzième théorème

31 - Quand une ligne en coupe deux obliquement et qu'elle est inclinée sur chacune du même côté, toutes les parallèles à cette coupante enfermées entre ces deux mêmes lignes sont inégales et les plus courtes sont celles qui sont vers le côté vers lequel cette première coupante était inclinée.



x et **z** coupées l'une et l'autre par **bc**, inclinée vers **k**. Je dis que **fg** et **pq** parallèles à **bc** et enfermées entre **x** et **z** seront inégales et **fg** plus proche de **k** sera la plus courte. Car soit menée **zn** perpendiculaire sur les trois parallèles et **xt** de même perpendiculaire sur toutes les trois. Par (12 - Livre VI), **fi** est plus courte que **bm** et **bm** que **pn**. Et de même **rg** plus courte que **lc** et **lc** que **qt**. Or d'après (23 - Livre VI), **ir**, **ml**, **nt** sont égales. Donc, **fg** est plus courte que **bc** et **bc** que **pq**.

Premier corollaire

32 - Deux lignes coupées par une ligne qui coupe toutes les deux obliquement et qui est inclinée sur chacune du même côté ne sauraient être parallèles.

Second corollaire

33 - Que ces lignes se rapprochant toujours vers le côté vers lequel cette coupante est inclinée, étant prolongée de ce côté là, se rencontreront à la fin.

Douzième théorème

34 - Deux différentes lignes se joignant en un même point, les perpendiculaires sur chacune de ces lignes se rencontreront étant prolongées du côté qui regarde la concavité que font ces lignes jointes à un même point.

Treizième théorème

35 - Deux lignes se joignant perpendiculairement, les perpendiculaires sur l'une et sur l'autre se joindront aussi perpendiculairement.

ANNEXE III 5, a

Livre septième

Premier théorème

Les lignes droites qui coupent les cordes peuvent avoir trois conditions.
La 1. De les couper perpendiculairement.
La 2. De les couper par la moitié.
La 3. De passer par le centre.
Or deux de ces conditions étant données, donnent la 3ème. C'est à dire :
1. si elles coupent les cordes perpendiculairement et par la moitié, elles passent par le centre.
2. Si elles coupent les cordes perpendiculairement et qu'elles passent par le centre, elles se coupent par la moitié.
3. Si elles les coupent par la moitié et qu'elles passent par son centre, elles les coupent perpendiculairement.
Soit pour tous les cas le centre c, et la corde mn, coupée par fg.

Deuxième théorème

6. Les lignes qui coupent les cordes perpendiculairement et par la moitié, coupent aussi par la moitié les arcs grands et petits qui soutiennent ces cordes de part et d'autre.

D'une autre mesure des arcs
qui sont les sinus

Définitions

11. Quant un arcs est moindre que la moitié de la demi circonférence, ou le quart de la circonférence, la perpendiculaire de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon où le diamètre terminé à l'autre extrémité, s'appelle le sinus de cet arc ; et la partie du rayon ou du diamètre qui est depuis la rencontre de la perpendiculaire, ou sinus, jusqu'à l'extrémité de l'arc, s'appelle le sinus verse.

Soit une circonférence, dont le centre est c, et un arc moindre que la moitié de la demi circonférence fd, soit tiré le rayon cd, et la perpendiculaire de f sur ce rayon fg ; cette perpendiculaire fg est le sinus de l'arc fd ; et gd en est le sinus verse.

Premier lemme

12. Que si on continue fg jusqu'à h, autre point de la circonférence ; il est clair par le premier théorème que fh est partagée par la moitié par cd, et qu'ainsi le sinus fg est la moitié de la corde fh.

Deuxième lemme

13. Et il est clair aussi par le deuxième théorème que l'arc fdh, soutenu par la corde fh, est double de l'arc fd, dont fg est le sinus.

Sixième théorème

15. Dans le même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs qui ont le sinus égal sont égaux ; et les sinus égaux donnent des arcs égaux ; et les arcs qui ont les plus grands sinus, sont les plus grands.

Huitième théorème

18. Quand plusieurs circonférences sont concentriques et que du centre on tire des lignes indéfinies, les arcs de toutes ces circonférences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonférences.

ANNEXE III 6, a

Livre huitième
Des angles rectilignes

1 - Après avoir parlé des lignes, c'est suivre l'ordre de la nature que de passer aux angles qui sont plus composés que les lignes, tenant quelque chose des surfaces, comme nous allons voir.

Définitions de l'angle rectiligne

2 - L'angle rectiligne est une surface comprise entre deux lignes droites qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, indéfinie et indéterminée selon l'une de ses dimensions, qui est celle qui répond à la longueur des lignes qui la comprennent, et déterminée selon l'autre partie proportionnelle d'une circonférence dont le centre est au point où ces lignes se joignent.

Proposition fondamentale
De la mesure des angles

9. Les arcs de toutes les circonférences qui ont pour centre le point ou les côtés de l'angle se coupant, sont tous proportionnels à leurs circonférences, et par conséquent, déterminent tous la même grandeur de l'angle.

De la première mesure de l'angle
Qui est l'arc compris entre ses côtés

10 - Il s'ensuit de là que pour savoir la vraie grandeur d'un angle, il faut savoir la grandeur proportionnelle de l'arc compris entre les côtés, c'est-à-dire de combien de degré est cet arc. Car un degré n'est pas le nom d'une grandeur absolue, mais proportionnelle, puisque, comme nous avons déjà dit, il signifie la trois cent soixantième partie de quelque circonférence que ce soit [...]. C'est pourquoi on peut appeler arcs égaux, selon qu'il a été dit, ceux qui sont d'autant de degrés, quoiqu'ils puissent être inégaux selon leur grandeur absolue.

Premier théorème

14 - Toute ligne qui en coupe une autre obliquement fait d'un côté un angle aigu et de l'autre un obtus, et les deux ensembles valent deux droites.

Car cette ligne partage inégalement la demi-circonférence, et pourtant fait deux angles inégaux. Mais elle ne la divise qu'en deux portions et pourtant les deux portions prises ensembles valent toute la demi-circonférence.

Second théorème

15 - Lorsque plusieurs lignes droites en rencontrent une en un même point et du même côté, tous les angles que font toutes ces lignes entre elles et avec la rencontrée valent deux droits.

Troisième théorème

17 - Lorsque deux lignes se coupent en passant de part et d'autre, il est bien clair que si elles se coupent perpendiculairement, elles font quatre angles égaux tous les quatre entre eux, c'est-à-dire tous quatre droits. Mais si elles se coupent obliquement, elles en font deux aigus et deux obtus, et cela s'appelle être opposé au sommet. Et les opposés sont égaux.

Quatrième théorème

18 - Lorsque plusieurs lignes droites se rencontrent en un même point étant menées de toutes parts, tous les angles qu'elles font valent quatre droits.

ANNEXE III 6, b

Des autres mesures de l'angle

Comme on ne connaît pas la longueur des lignes courbes, on est obligé d'avoir recours à d'autres mesures.

De la seconde mesure de l'angle
Qui est la corde
[...]
De la troisième mesure de l'angle
Qui est le sinus

34. Le sinus de l'arc qui mesure l'angle peut être appel le sinus de cet angle. D'où il s'en suit,

1. Que comme il n'y a que les arcs moindres que la moitié de la circonférence qui ayant un sinus ; il n'y a aussi que les angle aigu qui en aient. Ce qui n'empêche pas qu'on ne se puisse servir des sinus pour comparer ensembles deux angles obtus, en mesurant par les sinus les angles aigus qui sont les compléments de ces obtus.
2. Il s'ensuit que toute ligne menée d'un point de l'un des côtés d'un angle aigu perpendiculairement sur l'autre côté, est le sinus de l'arc qui mesure cet angle, et par conséquent le sinus de cet angle.

Premier lemme

39. Quand on dit que deux angles qu'on veut mesurer par les sinus ont le rayon égal, c'est de même que si l'on disait qu'il sont mesurés par des arcs de cercles égaux ; et s'ils ont le rayon inégal, par des arcs de cercles inégaux.

Deuxième lemme

40. Dans les cercles égaux les arcs égaux ont des sinus égaux, et les sinus égaux donnent des arcs égaux.

Premier théorème
Premier cas

45. Les angles qui ont le rayon égal et le sinus égal sont égaux. (1^{er} et $2^{ème}$ lemmes)

Des angles faits par les lignes ; entre parallèles

51. Comme les perpendiculaires entre les parallèles font des angles droits sur l'une et sur l'autre, ce qui est toujours la même chose, il n'y a que les angles que font les obliques à considérer. Mais, ces obliques entre parallèles faisant, d'une part, un angle aigu, et de l'autre un obtus, c'est l'aigu qu'on mesure premièrement, et par l'aigu, on connaît l'obtus. Et ainsi, quand nous parlerons d'angles égaux, nous entendrons les aigus, et les obtus par conséquence seulement. Or, dans la considération de ces angles aigus faits par des obliques entre parallèles, l'oblique est le rayon de l'angle. La perpendiculaire de l'extrémité de l'oblique (qui est un point de l'une des parallèles) sur l'autre en est le sinus. D'où il s'en suit que les sinus qui mesurent les angles que font des obliques entre les mêmes parallèles sont tous égaux, parce que les perpendiculaires entre les mêmes parallèles sont égales (16 - Livre VI).

Comme aussi, entre différentes parallèles, pourvu que les deux parallèles d'une part soient autant distantes l'une de l'autre, que celles de l'autre part. Et c'est ce qu'on peut appeler deux espaces parallèles égaux.

Premier corollaire

52. Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part égal à l'aigu qui est de l'autre part et par conséquent l'obtus à l'obtus.

Second corollaire

53. Les obliques égales entre les mêmes parallèles, font les angles égaux, pour la même raison.

Troisième corollaire

54. Les obliques entre parallèles qui font les angles égaux sont égales.

Sixième corollaire

57. La même ligne coupant obliquement plusieurs parallèles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est à dire qu'elle fait sur toute les angles égaux.

ANNEXE III 7, a

Livre dixième

Des lignes proportionnelles

Premier lemme - Définition

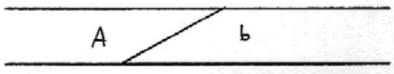
Un espace compris d'une part entre deux parallèles et indéfini de l'autre, soit appelé espace parallèle.

Second lemme - Définition

Comme on ne considère dans ces espaces que la distance entre les parallèles, leur grandeur dépend de cette distance qui est mesurée par les perpendiculaires comprises entre ces parallèles, que nous appellerons pour cette raison les perpendiculaires des espaces. Et de là il s'en suit que ces espaces sont égaux quand les perpendiculaires de l'un sont égales aux perpendiculaires de l'autre.

Troisième lemme - Définition

On dit qu'une ligne est dans un espace parallèle quand elle est terminée par les parallèles comme la ligne **b** est dans l'espace **A**. On dit qu'une ligne est parallèle à un espace quand elle l'est aux lignes qui le déterminent, comme la ligne **b** est parallèle à l'espace **A**.



Quatrième lemme

L'inclinaison d'une ligne dans un espace se considère par l'angle aigu qu'elle fait sur l'une et l'autre parallèle, le faisant toujours égal. D'où il s'en suit que deux lignes sont également inclinées dans le même espace, ou dans deux espaces différents quand les angles aigus que fait l'une sont égaux aux angles aigus que fait l'autre. Et que la moins inclinée est celle qui fait son angle aigu moins aigu et plus approchant du droit.

Cinquième lemme

Lorsque deux ou plusieurs lignes sont menées d'un même point sur la même ligne, elles sont censées être dans un même espace parallèle. Car il ne faut alors que concevoir une ligne menée par ce point commun, qui soit parallèle à celle qui les termine. D'où il s'en suit que les côtés d'un angle terminés par une base sont toujours censés être dans le même espace parallèle.

Sixième lemme

Deux angles sont appelés semblables lorsqu'étant égaux, les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun.

Et on est assuré que cela est :

1) quand on sait qu'ils sont égaux et qu'un des angles sur la base de l'un est égal à l'un des angles sur la base de l'autre, car de là il s'en suit que l'autre est égal aussi ;

2) lorsqu'étant égaux, ils sont de plus isocèles (59 - Livre VIII).

Septième lemme

Quand les sommets de deux angles sont également distants chacun de la base, ces deux angles peuvent être compris dans le même espace parallèle. Car mettant ces deux bases sur une même ligne, la ligne qui passera par les deux sommets sera parallèle à celle qui comprendra les deux bases.

Huitième lemme

Dans le même espace parallèle, ou dans les espaces parallèles égaux, toutes les également inclinées sont égales et toutes les égales sont également inclinées. (54 - Livre VIII). Et au contraire, les espaces parallèles sont égaux quand les également inclinées y sont égales. Car de là il est certain que les perpendiculaires le sont aussi. (56 - Livre VIII).

Neuvième lemme

Lorsqu'une même ligne est coupée par plusieurs lignes toutes parallèles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les parallèles qui les renferment (57 - Livre VIII).

Dixième lemme

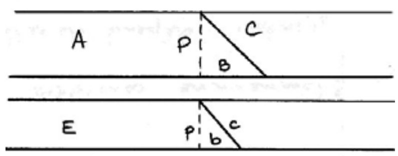
Lorsqu'il y a proportion entre quatre lignes, on dit que deux de ces lignes sont proportionnelles aux deux autres lignes quand les antécédents de la proportion se trouvent dans les deux premières et les deux conséquents dans les deux dernières.

Proposition fondamentale

Des lignes proportionnelles

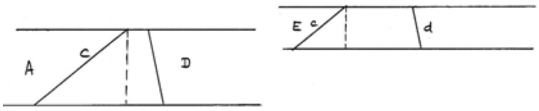
12 - Lorsque deux lignes sont également inclinées en deux différents espaces parallèles, elles sont entre elles comme les perpendiculaires de ces espaces et leurs éloignements du perpendicule sont aussi en même raison.

On doit montrer que **P**:**p** :: **C**:**c**:: **B**:**b**. On divise **P** en quelques parties aliquotes qu'on voudra. Ces parties étant appelées **x**, on tire des parallèles par tous les points de cette division à l'espace **A**. D'après le lemme 2, cet espace sera divisé en autant de petits espaces égaux et parallèles que **x** sera dans **P**, parce qu'ils auront tous **x** pour perpendiculaire. Et de là il s'en suit que **C** sera divisée en aliquotes **y** pareilles à celles de **P** parce que les portions de **C** qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y étaient également inclinées d'après le lemme 9. Si l'on trace de tous les points de la division de **E** des parallèles à **P**, elles couperont encore **B** en parties aliquotes égales toujours pour la même raison. En prenant **x** pour mesurer **E**, **x** est contenu autant de fois dans **p** avec un résidu moindre que **p**. En menant des parallèles à l'espace **E** par tous les points de la division de **p**, on divise **c** en autant de parties égales avec un résidu moindre, que x le sera dans **p**. On divise de même **b** en autant de parties égales avec peut être un résidu ; ainsi, avec la définition des grandeurs proportionnelles, **P** est à **p** comme **C** est à **c** et comme **B** est à **b**.



Premier théorème

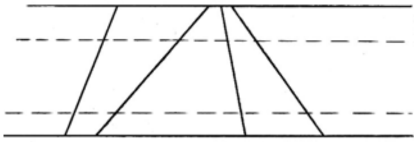
13 - Si deux lignes inégalement inclinées dans le même espace le sont autant chacune que chacune de deux autres le sont dans un autre espace, les également inclinées sont en même raison.



D'après ce qui précède, **C** est à **c** comme la perpendiculaire de **A** est à la perpendiculaire de **E**. Or, **D** est à **d** comme ces deux mêmes perpendiculaires. Donc, **C**:**c** :: **D**:**d**. Nous aurions pu utiliser la même méthode qu'au résultat précédent.

Premier corollaire

14 - Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième, etc., comme chaque autre toute est à la même partie, première, ou deuxième, ou troisième, etc.

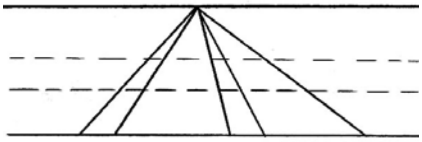


Premier corollaire

14 - Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième, etc., comme chaque autre toute est à la même partie, première, ou deuxième, ou troisième, etc.

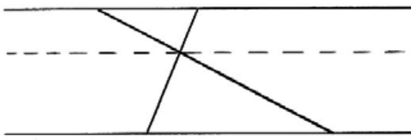
Second corollaire

15 - Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallèles à celles qui les terminent.



Troisième corollaire

16 - Si deux lignes comprises dans un même espace se coupent, elles sont coupées proportionnellement, c'est-à-dire que les parties de l'une sont proportionnelles aux parties de l'autre, outre que la toute est à la toute comme chaque partie à la même partie.

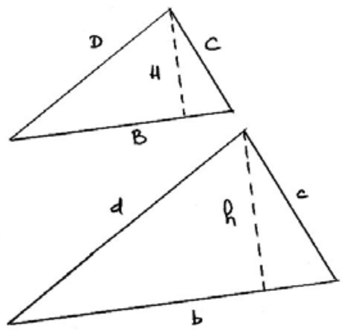


Quatrième corollaire

17 - Si quatre lignes dont les opposées sont parallèles se joignent aux extrémités, elle font deux espaces parallèles, l'un d'un sens et l'autre de l'autre sens, et la ligne tirée de coin à coin s'appelle diagonale. Que si d'un point quelconque de cette diagonale on tire deux lignes comprises chacune dans chacun de ces deux espaces, les parties de l'une de ces lignes seront proportionnelles aux parties de l'autre.

Second théorème

18 - Lorsque deux angles sont semblables (c'est-à-dire, selon le sixième lemme, lorsqu'étant égaux, les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun), ces côtés sont proportionnels aux côtés, et la base à la base, et la hauteur à la hauteur. Sigle : (A.S)



On doit prouver que **C**.**c** :: **D**.**d** :: **B**.**b** ::**H**.**h**. On peut prouver de la même façon qu'on a prouvé la proposition fondamentale. Mais on peut le faire autrement : D'après le lemme 5, **C** et **D**, **c** et **d** sont censés être dans le même espace parallèle. De plus, d'après l'hypothèse, **C** et **c** d'une part et **D** et **d** d'autre part sont également inclinées chacune dans son espace. D'après la proposition fondamentale et par le 1er théorème : **C**.**c** :: **H**.**h**, **D**.**d** ::**H**.**h**, **C**.**c** :: **D**.**d** et alternando **C**.**D** ::**c**.**d**. De même pour **C** et **B**, **c** et **b**, d'après le 1er théorème : **C**.**c** :: **B**.**b** et alternando **C**.**B** :: **c**.**b**. De même pour **D** et **B**, **d** et **b**, d'après le 1er théorème : **D**.**B** :: **d**.**b** et alternando **D**.**d** :: **B**.**b**.. Donc **C**.**c** :: **B**.**b** ::**D**.**d** :: **H**.**h**.

Premier corollaire

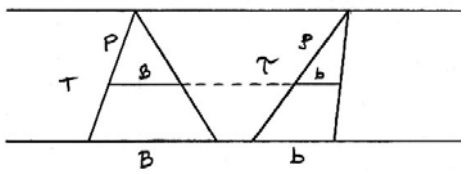
19 - Deux angles isocèles étant égaux, ils sont semblables, et par conséquent les côtés sont aux côtés comme la base est à la base, et la hauteur à la hauteur.

Second corollaire

20 - Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouvera diverses sortes de proportions de grand usage. Sigle : (A.B.P)

Troisième corollaire

21 - Lorsque deux angles ont leur sommet également distant de leur base, et que par conséquent ils peuvent être compris dans le même espace parallèle (selon le lemme 7), si l'on donne à ces deux angles de nouvelles bases parallèles aux anciennes et dont chacune en soit également distante, ces deux nouvelles bases seront proportionnelles aux deux anciennes.



D'après le 1er corollaire du 1er théorème, on a : **T**.**p** :: **t**.**p**. Or par le corollaire précédent, **T**.**P** :: **B**.**B** **T**.**P** :: **b**.**b**. Ainsi puisque **T**.**p** :: **T**.**P**, on a **B**.**B** :: **b**.**b**. Donc alternando **B**.**b** :: **B**.**b**.

Quatrième corollaire

22 - Si d'un même point on tire plusieurs lignes à la même ligne comprises entre la première et la dernière, et qu'on tire des parallèles à celle-là qui soient aussi comprises entre la première et la dernière de ces lignes tirées du même point, toutes ces parallèles seront coupées proportionnellement, c'est à dire que chaque toute et sa première partie seront en même raison que chaque autre toute et sa première partie, et ainsi de suite.

Cinquième corollaire

23 - Si l'une de ces parallèles renfermées entre la première et la dernière de plusieurs lignes tirées d'un même point, et divisée par ces lignes en parties aliquotes, c'est à dire en un certain nombre de parties égales, toutes les autres seront divisées par les mêmes lignes en aliquotes pareilles.

Sixième corollaire

24 - Si un angle a plusieurs bases parallèles, toutes les lignes tirées du sommet qui couperont ces bases, les couperont proportionnellement. D'où il s'ensuit qu'en quelques aliquotes que l'une de ces bases parallèles soit divisée, toutes les autres le seront en aliquotes pareilles. Ce n'est que les deux précédents corollaires un peu autrement énoncé.

Septième corollaire

25 - Les deux cordes d'un cercle sont proportionnelles aux deux cordes d'un autre cercle, si les arcs que soutiennent les unes sont proportionnellement égaux aux arcs que soutiennent les autres, chacun à chacun.

Huitième corollaire

26 - Si deux cordes de divers cercles soutiennent des arcs proportionnellement égaux, (c'est à dire d'autant de degré) elles sont proportionnelles aux diamètres de ces cercles. C'est une suite du précédent.

Neuvième corollaire

27 - Si deux cordes égales divers cercles soutiennent chacune autant de degrés, les cercles sont égaux.

Second corollaire

32 - Si un angle a diverses bases diversement inclinées sur les côtés, la ligne qui divisera cet angle par la moitié fera que les deux parties de chaque base seront proportionnelles aux deux côtés de cet angle selon cette base.

Troisième corollaire

33 - Si la ligne qui divise un angle en divise aussi la base proportionnellement aux côtés, c'est-à-dire en sorte que les deux côtés de l'angle soient en même raison que les deux parties de la base, l'angle est divisé par la moitié. C'est la converse de la précédente.

ANNEXE III 8, a

Livre treizième

Troisième théorème

18 - Deux triangles sont tout égaux quand ils ont un côté égal, et que les angles sur ce côté égal sont égaux chacun à chacun.

Premier corollaire

22 - Les côtés qui soutiennent les angles égaux, sont homologues.

Septième théorème

25 - Si deux triangles sont de même hauteur, les parallèles à la base également distantes de la base dans l'une et dans l'autre sont entre elles comme ces bases.

Des parallélogrammes

Sixième théorème

50 - Si on tire des parallèles aux côtés angulaires qui passent par le même sommet de la diagonale, les paries de ces nouvelles lignes sont proportionnelles.

ANNEXE III 8, b

Livre quatorzième

Des figures planes considérées selon leur aire : c'est à dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent.

Et premièrement des rectangles.

Proposition fondamentale

Les rectangles qui ont un côté égal à un côté, et l'autre inégal, sont entre eux comme l'inégal. Ou les rectangles de même hauteur sont comme leurs bases. D'égale base sont comme leurs hauteurs. Ou d'égale longueur sont comme leurs largeurs. D'égale largeur sont comme leurs longueurs. Tout cela n'est que la même chose.

ANNEXE III 8, c

Livre quinzième

De la mesure de l'aire des parallélogrammes

Des triangles, et des autres polygones.

Nouvelle méthode appelée la géométrie des indivisibles

Quoi que les Géomètres conviennent que la ligne n'est pas composée de points, ni la surface de lignes, ni le solide de surfaces, néanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de démontrer une infinité de choses, en considérant les surfaces comme si elles étaient composées de lignes, et les solides de surfaces. Je n'ai rien vu de ce qui en a été écrit : mais voici ce qui m'en est venu à l'esprit, en ne m'arrêtant maintenant qu'à ce qui regarde les surfaces.

Le fondement de cette nouvelle géométrie est de prendre pour l'aire d'une surface la somme des lignes qui la remplissent ; de sorte que deux surfaces sont estimées égales quand l'une et l'autre est remplie par une somme de lignes égales . Soit que chacune de celles d'une somme soit égale à chacune de celle de l'autre somme ; soit qu'il se fasse en composition ; en sorte par exemple, que deux d'une somme qui pourront être inégales entre elles, soient égales à deux prises ensemble de l'autre somme qui seront égales entre elles.

Mais pour ne pas donner lieu à beaucoup de paralogisme où l'on tombe aisément en se servant de cette méthode, si on n'y prend garde, il faut remarquer,

1. qu'afin que les lignes soient censées remplir un espace, il faut qu'elles soient toutes parallèles entre elles ; soient qu'elles soient droites pour remplir un espace rectiligne, soient qu'elles soient circulaires pour remplir de cercles ou des portions de cercle. Il est facile d'en voir la raison. Et ainsi il faut bien prendre garde de ne pas employer pour cela des lignes qui ne seraient pas parallèles en l'une ou l'autre de ces deux manières.

2. Afin qu'une somme de lignes soit censée être égale à une autre somme de lignes, il ne faut pas s'imaginer qu'on puisse dire le nombre qu'en contient chaque espace (car il n'y a point de si petit espace qui n'en contienne un nombre infini) mais ce qui fait qu'on appelle ces sommes égales, c'est que toutes les lignes d'un côté et d'autre coupent perpendiculairement deux lignes égales. Par exemple si la ligne b est égale à la ligne m, le nombre infini des lignes qui peuvent couper perpendiculairement b en tous ses points; est censé être égal au nombre infini de celles qui peuvent aussi couper perpendiculairement m, étant visible qu'il n'y a point de raison pourquoi on en puisse faire passer d'avantage par l'une que par l'autre. Car les aliquotes pareilles de l'une et de l'autre étant toujours égales jusque à l'infini, on pourra toujours de part et d'autre tirer par tous les points de ces divisions autant de lignes parallèles entre elles, et qui contiendront toujours de part et d'autre un espace parallèle égal. Et c'est proprement de là que dépend la vérité de cette nouvelle méthode (et non que le continu soit composé d'indivisibles) ce qui l'a fait appeler par quelques uns, la Géométrie de l'infini.

Il faut donc bien prendre garde que les lignes (par le rapport desquelles on dit qu'une somme de ces lignes parallèles qui remplissent un espace, est égale à une autre somme) les coupent perpendiculairement. Et c'est où il y a plus de danger de se tromper. Sur ces fondement voici les théorème que l'on établi.

Premier théorème

Tous les parallélogrammes de base égale et de même hauteur sont égaux entre eux.

Deuxième théorème

Tous les parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

ANNEXE IV : ROBERVAL

ANNEXE IV 1, a

Préface

On entreprend de faire un traité général des mathématiques. Et pour ce que l'objet de cette science est tiré de plusieurs genres, principalement trois ; savoir, de la quantité par l'étendue, par les nombres, ..., de la qualité par les puissances ou formes mouvantes et mobiles, par la lumière, les couleurs, ..., et de la relation par l'égalité et l'inégalité, par les raisons et proportions, ..., sans préjudice d'autres genres. Pour cette raison, le traité sera réparti en plusieurs livres et chaque livre sera divisé, suivant le besoin, où l'on fera voir les genres différents d'où seront tirées les matières différentes de l'objet, suivant l'ordre dans lequel elles seront traitées [...].

4ème règle

On ne recevra aucune preuve ou démonstration si elle n'est fondée sur des vérités connues dès auparavant la preuve ou démonstration qu'on veut faire. Cette règle demeurera inviolable et, où elle manquerait, il n'y aurait rien de prouvé. Il n'importe que les vérités connues qui servent de fondement à une démonstration soient de celles que leur évidence a fait recevoir sans preuve, ne pouvant être démontrées par d'autres, ou qu'elles soient de celles qui auront été démontrées, car, après la démonstration, elles ont la même force sur l'esprit que celles qui ont servi de fondement à leur démonstration.

5ème règle

Tout ce qui peut être démontré doit être démontré, quelque clarté ou évidence qu'il paraisse avoir de soi-même, y ayant d'autres vérités évidentes qui lui auront été préférées et en vertu desquelles, il peut être démontré.

Ceci est fondé sur ce que, pouvant être démontré, il ne peut passer pour principe, puisque les principes ne doivent dépendre ni des autres principes, ni d'ailleurs, mais chacun doit être fondé sur soi-même seulement. Il en arrive cette perfection à une science qu'elle en est plus simple, étant fondée sur le moindre nombre de principes évidents et sans preuve qu'il se peut.

En général, toute vérité mathématique qui n'est point principe, doit être démontrée ; autrement, elle n'est point recevable, étant comme une pièce vague, détachée de son tout, et qui interromprait l'unité de la science, laquelle unité doit être maintenue tant qu'il se pourra.

ANNEXE IV 1, b

Premier Livre

Définitions - Postulats et Axiomes

Première définition

Des choses égales sont celles dont l'une n'a rien plus ni moins que l'autre (mais justement autant l'une que l'autre).

Seconde définition

Des choses inégales sont celles dont l'une a quelque chose plus ou moins que l'autre, et celle qui a plus est dite être plus grande que celle qui a moins. Et celle qui a moins est dite être plus petite ou moindre que celle qui a plus.

Troisième définition

L'unité est ce par quoi chaque chose est appelée une.

Quatrième définition

Un nombre est une multitude d'unités jointes ensembles. Et la grandeur d'un nombre est la multitude de ses unités.

Cinquième définition

Un tout est une chose hors laquelle il n'y a rien qui soit de la chose même.

Sixième définition

Une portion d'un tout est ce qui, étant entendu être retranché du tout, il reste encore quelque chose qui est du même tout et ce reste est une portion du même tout.

ANNEXE IV 1, c

Premier axiome

Des deux définitions, 5ème et 6ème, et de la première, il est clair de soi à l'entendement qu'un tout est égal à toutes ses portions prises ensembles et que toutes les portions d'un tout prises ensembles sont égales au même tout.

Deuxième axiome

Des deux définitions 5ème et 6ème et de la seconde, il est encore clair de soi à l'entendement qu'un tout est plus grand que sa portion et qu'une portion est moindre que son tout.

Troisième axiome

Les grandeurs égales à une même troisième sont égales entre elles. On n'entend pas de deux grandeurs seulement égales à une même, mais aussi de trois, quatre, ... égales à une même, ou à des égales. Ce n'est que le même axiome plus ou moins étendu de soi même et non d'ailleurs.

De même, deux ou plusieurs grandeurs auxquelles une autre est égale, sont égales entre elles. Il en est de même de celles à qui des égales sont égales. Et ce n'est que le même troisième axiome converti simplement, sans rien emprunter d'ailleurs.

Quatrième axiome

Si à des grandeurs égales, on ajoute une même grandeur commune, ou des égales, les tous seront égaux. Le même 4ème axiome s'étendra de soi-même et non d'ailleurs de deux sortes. La première, que non seulement, il y ait deux grandeurs égales, auxquelles on ajoute une même grandeur ou deux égales, mais qu'il y en ait trois ou quatre, etc. La seconde sorte, qu'à celles à qui on a déjà ajouté une même commune ou des égales, on en ajoute encore d'autres communes ou égales, puis encore d'autres communes ou égales, ..., toujours autant de part que d'autre.

ANNEXE IV 1, d

Septième définition

Quand toutes les portions qui font un tout sont égales entre elles, chacune est ordinairement appelée une partie du même tout. Or, il est manifeste que partie est un genre dont les espèces sont moitiés, tiers, quart, etc. Les parties de même dénomination sont appelées pareilles parties de leur tout, comme les moitiés entre elles, les tiers entre eux, les quarts entre eux ..., et s'il y a plusieurs touts qui aient autant de parties l'un que l'autre, on dira que les parties de l'un sont aussi pareilles aux parties de l'autre, c'est-à-dire qu'une est telle ou pareille partie de son tout qu'une autre du sien.

Neuvième postulat

Quand un solide tourne autour de deux points pivots, on peut en tendre une ligne entre ces deux points qui sera également posée entre ces mêmes points, c'est-à-dire qu'elle retiendra toujours une même position pendant tout le mouvement du solide et en même temps, tous les points de la même ligne retiendront aussi toujours chacun sa même position.
On peut entendre que cette ligne prolongée, étendant davantage le solide qui tournera toujours sur les mêmes points pivots, la ligne demeurant encore en même position dans toute sa longueur et tous les autres points du solide tournant alentour d'elle et changeant continuellement leur position. Cette ligne est fort considérée dans la mathématique.

Vingt-sixième définition

On appelle la ligne du 9ème postulat ci-dessus une ligne droite et on ne reconnaît point d'autre ligne droite si elle n'a une pareille origine que celle-ci, étant comme elle, également posée entre ces points, comme ci-dessus. Souvent, on la nomme simplement une droite et quand la même ligne droite sert au mouvement d'un solide étant comprise entre ses points, elle est appelée l'axe de ce mouvement.

Vingt-huitième définition

Deux lignes sont dites être inclinées l'une à l'autre quand elles ont inclinaison à un même point. Cette inclinaison peut être de deux sortes : l'une continue quand les deux lignes étant continuées (n'en font qu'une seule ; l'autre non continue quand les deux lignes étant continuées) après le point de rencontre, elles se séparent l'une de l'autre n'en pouvant faire une seule continue.

Vingt-neuvième définition

Un angle est l'inclinaison de deux lignes qui se rencontrent à un point, n'en font pas une seule continue, mais se séparent après le point de rencontre. Ces lignes sont appelées les côtés de l'angle. Et le point de rencontre est appelé le sommet de l'angle et l'inclinaison ou l'ouverture de ces côtés est appelée la grandeur de l'angle.

Douzième postulat

Deux grandeurs inégales étant données ou entendues, si on considère la deuxième définition, on peut entendre une portion de la plus grande, égale à la moindre ; de sorte que de cette plus grande, il restera une autre portion qui sera l'excès de la plus grande par dessus la moindre ou la différence des deux.

ANNEXE IV 1, e

Première proposition théorème

De deux grandeurs égales, soit la première est plus grande qu'une tierce : la seconde sera aussi plus grande que cette tierce.

5ème proposition théorème

Si à des grandeurs égales, on ajoute des inégales : les touts (sommes) seront inégaux et la plus grande sera celle à qui on aura ajouté le plus. Ce sera le même si à des inégales on ajoute des égales.

7ème proposition théorème

Si de grandeurs égales, on retranche des égales, les restes seront égaux.

10ème proposition théorème

Si de grandeurs égales, on retranche des inégales, les restes seront inégaux et le plus grand sera de la part de la grandeur de qui on aura retranché le moins.

12 ème proposition théorème

Si de grandeurs inégales on retranche des égales, les restes seront inégaux et le plus grand sera de la part de la grandeur la plus grande.

14ème proposition théorème

Si une première grandeur est plus grande qu'une seconde et cette seconde plus grande qu'une troisième, la première sera aussi plus grande que la troisième.

2ème remarque

Si la première est moindre que la seconde, la seconde que la tierce ..., pour tant de grandeurs qu'on voudra, on prouvera de même que la première est moindre que la dernière. C'est le même argument par conversion.

15ème proposition théorème

Si à une plus grande, on ajoute plus qu'à une moindre, la plus grande deviendra toujours plus grande. Que si à une moindre, on ajoute moins qu'à une plus grande, la moindre deviendra toujours moindre. Il n'y aura qu'à convertir et nommer les plus grandes les premières et l'argument sera le même en la même figure.

17ème proposition théorème

Si des grandeurs ont leurs pareilles parties égales, ces grandeurs sont égales.

18ème proposition théorème

Si des grandeurs sont égales, leurs pareilles parties seront égales.

19ème proposition théorème

Si des grandeurs ont leurs pareilles parties inégales, ces grandeurs seront inégales et la plus grande sera celle dont les pareilles parties seront les plus grandes.

20ème proposition théorème

Si des grandeurs sont inégales, leurs pareilles parties seront inégales et les plus grandes parties seront celles de la plus grande grandeur.

29ème proposition théorème

De deux grandeurs égales, si la première mesure une troisième, ou une quatrième ou une cinquième ou chacune de tant d'autres qu'on voudra, la deuxième mesurera aussi chacune de toutes ces autres.

ANNEXE IV 2, a

Second livre

1ère définition

Deux grandeurs ont dites convenir l'une à l'autre quand elles occupent entièrement et précisément un même espace, du moins par une opération de l'esprit ; il n'importe que ces soit en même temps ou successivement l'une après l'autre.

1er axiome

Les grandeurs qui conviennent entre elles sont égales entre elles.

2ème axiome

Si un angle rectiligne convient à un autre angle rectiligne, ces angles étant renversés sans changer leur grandeur ou leur ouverture, c'est-à-dire sans changer l'inclinaison de leurs côtés l'un à l'autre, ils conviendront encore ; savoir le sommet au sommet, le premier côté du premier angle au second côté du second angle et le premier côté du second angle au second côté du premier angle.

3ème axiome

La plus courte ligne qui puisse être menée d'un point à un autre point est la ligne droite. Elle est plus courte que toute ligne courbe qui aboutit à ces deux points, et que plusieurs lignes courbes qui, jointes de suite, aboutiront de même. Elle est aussi plus courte que deux ou plusieurs lignes droites qui, jointes de suite et ne faisant pas ensembles une seule droite, aboutiraient aux deux mêmes points.

Premier postulat

Si deux triangles **BCD**, **LMN** conviennent par leur base **BD**, **LN**, les points **B**,L, étant ensembles, et les points **D**, **N** ensembles et que les côtés **BC** et **LM** soient égaux et les côtés **CD** et **MN** aussi égaux, mais que ces triangles soient opposés l'un à l'autre, l'un étant d'une part de la base et l'autre de l'autre part, l'un comme **LMN** retenant toujours sa même position, sans se mouvoir, et l'autre **BCD** pouvant tourner alentour à la base commune **BD**, dans ce mouvement on peut entendre une certaine position des triangles, en laquelle, si on mène une droite par les points opposés **C**, **M**, cette droite **CM** coupera la base commune **BD**, soit par l'un des deux points **B** ou **D**, comme par **D**, soit entre les mêmes points **B**, **D**, comme en **G** ; soit au dehors de ces points **B**, **D**, la base **DB** étant prolongée de part ou d'autre suivant qu'il en sera besoin, comme de la part de **D** en **G**, tellement que la droite ainsi menée sera **CGM**, laquelle au premier cas passera sur les deux côtés, **CD**, **MN** et les trois points **D**, **N**; **G** seront ensembles, mais au second et troisième cas, cette droite **CGM** ne conviendra à aucun côté des triangles.

Deuxième postulat

En tout triangle **BCD** auquel le point **F** pris dans la base, aura servi de point fixe pour décrire la superficie du triangle ; si par dedans le triangle, sur la même superficie, on mène la droite **FG**, prolongée suffisamment, elle coupera l'un ou l'autre des côtés **CB** ou **CD** en un point. Soit de point **G**, ou même, elle coupera tous ces deux côtés au point **C** qui, en ce cas, conviendra au point **G**.

ANNEXE IV 2, b

6ème proposition théorème

Si deux triangles ont deux côtés de l'un égaux aux deux côtés de l'autre, chacun au sien, et les angles égaux compris des mêmes côtés, les bases, c'est-à-dire les côtés restants, seront égales. Les autres angles du premier triangle seront égaux aux autres angles du second triangle, tant les intérieurs sur les bases que les extérieurs sous les bases, chacun aux siens comparant ceux qui seront opposés aux côtés égaux, les intérieurs entre eux et les extérieurs entre eux, les côtés étant prolongés sous les bases, et le triangle sera égal au triangle, c'est-à-dire l'espace ou le champ égal au champ.
Que si les quatre côtés sont tous égaux, les quatre angles intérieurs sur les bases seront égaux entre eux et les quatre angles extérieurs sous les bases égaux entre eux.

7ème proposition théorème

Tout triangle qui a des côtés égaux a des angles égaux opposés à ces côtés égaux, tant les angles intérieurs entre eux que les angles extérieurs entre eux, faits par les côtés égaux prolongés sous la base. Que si le triangle est équilatéral, les trois angles intérieurs seront égaux, et les extérieurs égaux étant comparés.

8ème proposition théorème

En tout triangle, deux côtés pris comme on voudra, sont ensembles plus long que le troisième tout seul.

9ème proposition théorème

En tous les trois cas du premier postulat précédent de ce second livre, je dis que la droite CG est égale à la droite MG.

10ème proposition théorème

Les mêmes choses étant posées, je dis qu'en tous les trois cas, l'angle CBG est égal à l'angle MBG ou MLG et l'angle CGB égal à l'angle MGB ou MGL, même au 2ème et 3ème cas. Je dis aussi que l'angle CDG est égal à l'angle MDG ou MNG, et au 2ème cas en particulier, je dis encore que l'angle CGD est égal à l'angle MGD ou MGN.

ANNEXE IV 2, c

Troisième Livre

Définitions

Première définition

Un angle plan est celui qui est sur un plan, c'est-à-dire dont les côtés sont sur ce plan. Il peut être rectiligne ou curviligne, mais nous ne considérerons ensuite que les rectilignes, sinon qu'on en fut averti expressément au lieu même où on parlera d'autres angles que des rectilignes.

Deuxième définition

Deux angles rectilignes étant entendus être sur un même plan, de sorte que leurs sommets conviennent, et qu'un côté de l'un convienne à un côté de l'autre et que les autres côtés soient d'une même part à l'égard de ceux qui conviennent, si ces autres côtés ne conviennent pas, mais que l'un s'écarte plus que l'autre, et qu'ainsi l'un des angles soit plus ouvert que l'autre, celui sui sera plus ouvert sera appelé le plus grand et l'autre le moindre.

Troisième définition

De cette sorte, un angle qui sera plus grand qu'un angle droit sera appelé un angle obtus, et celui qui sera moindre qu'un angle droit sera appelé un angle aigu et chacun de ces angles sera appelé un angle oblique et la ligne droite qui, rencontrant une autre ligne droite, fait de tels angles avec elle, est dite rencontrer l'autre obliquement.

Quatrième définition

Une figure est une étendue, ou un espace fini, compris, environné et borné de toutes parts d'un ou de plusieurs termes.

Dixième définition

Un cercle est une figure plane comprise d'une seule ligne courbe appelée la circonférence du cercle, à laquelle circonférence toutes les lignes droites menées d'un point de ceux qui sont dans la figure sont égales entre elles. Et chacune de ces lignes est appelée l'intervalle ou le rayon ou de semi-diamètre du cercle. Quant au point, il est appelé le centre du cercle et toute ligne droite laquelle passant par ce centre, aboutit de part et d'autre à la circonférence et est appelée le diamètre de ce même cercle.

ANNEXE IV 2, d

Premier postulat

D'un point donné pour un centre sur un plan et de tel intervalle qu'on voudra donné sur le même plan, décrire un cercle sur ce plan.

Deuxième postulat

Etant donnée une ligne droite si petite qu'on voudra et une autre ligne droite, ou courbe, si longue qu'on voudra, mais finie ; on peut entendre la première ligne droite être prise tant de fois qu'enfin elle excédera la seconde ligne.

Troisième postulat

Si une ligne droite indéfinie passe par dedans une figure plane ou solide, elle la traversera de part et d'autre et en rencontrera les extrémités et elle passera outre si loin qu'on voudra au-delà de la figure.

ANNEXE IV 2, e

Première proposition théorème

Si deux triangles sont sur un même plan, sur une même base et de même part de cette base, et que le sommet de l'un soit compris dans l'espace de l'autre, les deux côtés de ce premier, pris ensembles, seront plus petits que les deux côtés de l'autre pris ensembles.

Deuxième proposition théorème

Tout cercle et toute portion de cercle n'a qu'un seul centre.

15ème proposition problème

Sur une ligne droite donnée et terminée, décrire un triangle équilatéral.

17ème proposition problème

Deux lignes droites inégales étant données, couper de la plus grande une portion égale à la plus petite.

19ème proposition problème

Sur une ligne droite donnée et à un point assigné en icelle, faire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

21ème proposition théorème

Tout triangle qui a des angles inégaux, a aussi des côtés inégaux opposés aux mêmes angles ; savoir un plus grand côté à un plus grand angle et un moindre à un moindre.

Scholie

Si les trois angles d'un triangle sont inégaux, il sera scalène.

22ème proposition théorème

Tout triangle qui a des côtés inégaux, a aussi les angles inégaux opposés aux mêmes côtés, savoir un plus grand angle à un plus grand côté et un moindre à un moindre. Il s'agit de la proposition 19 livre I d'Euclide.

26ème proposition théorème

D'un point donné hors une ligne droite donnée et indéterminée, abaisser sur icelle une autre ligne droite perpendiculaire.
C'est encore la 12ème du premier livre d'Euclide dont il faut prendre la démonstration.

27ème proposition théorème

Quand une ligne droite rencontrant une autre ligne droite, fait deux angles, l'un d'une part et l'autre de l'autre, ces deux angles pris ensembles valent deux angles droits ; que si les deux droites se coupent, les quatre angles pris ensembles vaudront quatre angles droits.

C'est la démonstration de la 13ème d'Euclide.

29ème proposition théorème

Si deux droites se coupent, les angles qui seront opposés au sommet l'un de l'autre seront égaux entre eux.

ANNEXE IV 3, a

Livre IV

Définitions

15ème définition

Celui qui n'a ni les quatre côtés égaux, ni les quatre angles égaux, mais seulement les côtés opposés égaux et les angles opposés égaux, se nomme rhomboïde.

16ème définition

Tout autre quadrangle est appelé un trapèze.

17ème définition

La distance d'un point à une ligne droite qui ne passe pas par ce point est la ligne droite menée du même point perpendiculairement sur la droite proposée.

18ème définition

Une seconde ligne droite est dite être équidistante à une autre première ligne droite, quand toutes les lignes droites menées de tous les points de cette autre première perpendiculairement sur la seconde sont égales entre elles.

19ème définition

Les lignes droites parallèles sont celles qui sont équidistantes réciproquement l'une de l'autre.

ANNEXE IV 3, b

Propositions

Première proposition théorème

Si deux triangles rectangles ont les côtés opposés aux angles droits égaux et qu'un autre côté de l'un soit égal à un autre côté de l'autre, les côtés restants seront égaux et les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien, savoir ceux qui seront opposés aux côtés égaux.

Deuxième proposition théorème

Si un point est hors une ligne droite et que de ce point, sur la ligne droite, tombent tant de lignes droites qu'on voudra, l'une desquelles lui soit perpendiculaire, elle sera la seule perpendiculaire qui puisse tomber de ce point sur la droite proposée et la même sera la plus courte de toutes.

Corollaire

Il s'ensuit que, quand d'un même point, on mène sur une droite deux autres droites, l'une tombant perpendiculairement, l'autre obliquement, la perpendiculaire tombe de la part de l'angle aigu fait par celle qui tombe obliquement.

Troisième proposition théorème

Les mêmes choses étant posées, je dis qu'une plus proche de CD comme CE, sera moindre qu'une plus éloignée, comme CF ou CH.

Scholie

Partant, celles qui sont également éloignées de CD, comme CE et CG sont égales.

Scholie

Quatrième proposition théorème

Les mêmes choses étant posées, je dis que CE tant moindre que CF ou CH, elle fera l'angle aigu CED, vers la perpendiculaire CB, plus grand que l'angle aigu CFD ou CHD.

Scholie

Partant, celles qui sont égales, comme CE et CG, font les angles égaux comme CED et CGD vers la perpendiculaire CD.

Cinquième proposition théorème

Réciproquement, supposant CD plus qu'aucune autre, je dis qu'elle est perpendiculaire sur AB et que, si CF est plus longue que CE, CF sera plus éloignée de CD que n'est CE.

Sixième proposition théorème

Et si l'angle aigu CED est plus grand que l'angle aigu CFD, je dis que la droite CE sera moindre que la droite CF.

Septième proposition théorème

Je dis encore qu'étant proposée quelque droite autre que la perpendiculaire CD, comme CE, on pourra lui en trouver une autre égale, de l'autre part de CD, comme CG et non plus.

Huitième proposition théorème

Un triangle ne peut pas avoir deux angles droits, ni deux obtus. Mais tout triangle qui a un angle droit ou obtus, a chacun des deux autres aigus. Ainsi, tout triangle a au moins deux angles aigus. Et si les trois angles d'un triangle sont égaux, ou deux seulement, ces angles égaux sont aigus.

Car nous avons fait voir (coro. prop. 2 - Livre 4) qu'au triangle rectangle CDE, auquel l'angle D est droit, l'angle CED est aigu. Et on démontrera de même que l'angle ECD est aussi aigu, pourvu qu'on considère la droite ED tombant perpendiculairement sur AB. Que si un triangle a un angle obtus tel que l'angle CEF, au triangle CFE, on fera tomber la perpendiculaire CD hors du triangle de la part de l'angle aigu CED (cor. prop. 2 - Livre 4). Ainsi, il paraîtra clairement que l'angle CFD ou CFE est aigu et aussi l'angle FCE puisqu'il fait une portion de l'angle aigu FCD.

Neuvième proposition théorème

En tout triangle, un côté étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des deux intérieurs qui lui sont opposés. Et deux angles intérieurs pris ensembles valent moins que deux angles droits.

Douzième proposition théorème

Si deux quadrangles ont la base égale à la base et les angles sur la base de l'un égaux aux angles sur la base de l'autre, chacun au sien et les côtés de l'un qui aboutissent à la base, égaux aux côtés de l'autre qui aboutissent à la base, chacun au sien, savoir ceux qui aboutissent aux angles égaux, les autres angles seront égaux aux autres angles et le sien au sien, savoir ceux auxquels aboutissent les côtés égaux et le quatrième côté égal au quatrième côté, et le quadrangle au quadrangle.

13ème proposition

Si un quadrangle a les angles égaux sur la base et les côtés aboutissant à la base aussi égaux, les deux autres angles seront aussi égaux. Et, si les côtés aboutissant à la base sont inégaux, celui des deux autres angles qui sera à l'extrémité du plus grand côté, sera le moindre.

14ème proposition

Si un quadrangle a trois angles droits et deux côtés opposés égaux entre eux, les deux autres côtés opposés seront égaux entre eux et le quatrième angle sera droit.

15ème proposition

Si un quadrangle a quatre angles droits, il aura les côtés opposés égaux, chacun au sien et si on prolonge de part et d'autre tant qu'on voudra, deux des côtés opposés et que d'un point pris dans l'un des deux on abaisse une perpendiculaire sur l'autre, elle sera perpendiculaire à tous les deux, et la perpendiculaire sera égale à chacun des deux autres côtés du quadrangle.

16ème proposition

Si deux lignes droites sont sur un plan, la seconde étant équidistante à la première, cette première sera réciproquement équidistante à la seconde et toute droite perpendiculaire à l'une sera perpendiculaire à toutes les deux.

Scholie

Il s'ensuit que deux telles droites sont parallèles entre elles.

17ème proposition

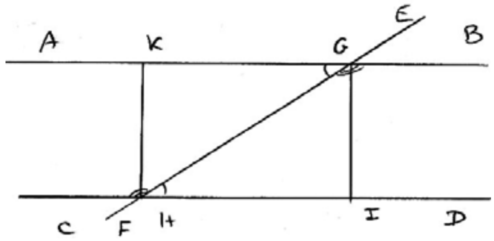
Si deux lignes droites sont parallèles sur un même plan et qu'une troisième droite coupe toutes les deux, les angles alternes seront égaux entre eux. L'angle extérieur sera égal à son intérieur opposé de même part et les deux angles intérieurs de même part seront ensembles égaux à deux droits.

18ème proposition

Si un quadrangle a trois angles droits, il ne se peut pas faire qu'aucun des deux côtés qui comprennent le 4ème angle soit moindre que le côté qui lui est opposé.

Soit le quadrangle EFHG ayant les trois angles E, F, H droits. Je dis que le côté GH ne peut pas être moindre que son opposé EF, ni GE moindre que son opposé HF.

Soit premièrement GH moindre que EF et que l'excès de EF par dessus GH soit égal à la droite I. Soit prise la droite I tant qu'elle surpasse la droite EG (prop. 2 - Livre 3) et qu'en cette sorte, elle compose la droite IK plus grande que la droite EG. Puis, étant prolongée la droite FE vers E jusqu'en Q, de sorte que la droite EQ contienne autant de fois la droite EF, que la droite IK contient de fois la droite I.



Soit menée la droite GQ et de EQ soient les parties EL, LM, ..., PQ qu'on aura prises égales à EF. Sur chacune de ces droites, soit construit un quadrangle égal au quadrangle EFHG. GRSTVXY sera soit une ligne unique et continue, soit composée de plusieurs lignes. Si GY n'est pas en ligne droite, soit menée la ligne droite GY n'excédant pas toutes les droites ensembles GR, RS,... (ax. 2 - Livre 2). Donc la droite GY avec IK n'excédera pas EQ. Mais EG en son égale QY est moindre que IK, par construction. Partant la droite GY avec QY sera moindre que EQ, laquelle EQ est moindre que QG (prop. 2 - Livre 4) à cause de l'angle droit QEG. Partant à plus forte raison (prop. 14 - Livre 4), la droite GY avec QY ensembles, seraient encore moindres que QG, ce qui est absurde (prop. 8 - Livre 2). Partant, il est absurde que GH soit moindre que EF. On démontrerait de même que EG n'est pas moindre que FH. Ainsi, la proposition est vraie.2). Partant, il est absurde que GH soit moindre que EF. On démontrerait de même que EG n'est pas moindre que FH. Ainsi, la proposition est vraie.

Axiome

Si deux lignes droites sont sur un plan et que toutes deux étant prolongées d'une même part, l'une s'écarte continuellement de l'autre, c'est-à-dire que les distances de la première à la seconde deviennent continuellement plus grandes, ces mêmes droites étant prolongées de l'autre part, avant qu'elles se rencontrent, elles s'approcheront, c'est-à-dire que les distances de la première à la seconde deviendront moindres.

19ème proposition

Les lignes droites perpendiculaires d'une même, sur un même plan, sont parallèles entre elles.

20ème proposition

Si une droite coupant deux autres droites sur un même plan, fait l'angle alterne égal à son alterne, ou l'extérieur égal à son intérieur opposé de même part, ou les deux intérieurs de même part égaux ensembles à deux droits, ces deux droites sont parallèles entre elles.

21ème proposition

Les lignes droites parallèles à une même sur un même plan sont parallèles entre elles.

Corollaire : scholie

Par un point, sur un même plan, on ne peut pas mener plus d'une ligne droite parallèle à une autre ligne droite.

<u>23ème proposition</u>

En tout triangle, un côté étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux intérieurs opposés pris ensembles et les trois angles intérieurs pris ensembles sont égaux à deux droits.

<u>Scholie</u>

Si un triangle a un angle droit, les deux autres ensembles vaudront justement un droit. S'il a un angle obtus, les deux autres ensembles vaudront moins qu'un droit et s'il a un angle aigu, les deux autres ensembles vaudront moins qu'un droit. Ainsi, un angle étant droit, ou obtus, en un triangle, il est le plus grand des trois angles. Et de tout triangle, deux angles tels qu'on voudra pris ensembles, valent moins que deux angles droits ensembles.

<u>26ème proposition</u>

En tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux entre eux et les angles opposés aussi égaux entre eux et la diagonale coupe le parallélogramme en deux triangles égaux.
Que si un quadrangle a les côtés opposés égaux chacun au sien, ou les angles opposés égaux chacun au sien, le quadrangle est un parallélogramme.

<u>27ème proposition</u>

Si sur un même plan, une droite rencontrant deux autres droits fait les angles intérieurs de même part, pris ensembles, moindres que deux droits ensembles, ces deux droites continuées de même part, se rencontreront et se couperont.

ANNEXE IV 4, a

<u>Livre VI</u>

<u>Définitions</u>

<u>1ère définition</u>

Une grandeur est dite être les parties d'une autre grandeur quand une même troisième grandeur les mesure toutes deux. Et cette troisième grandeur qui mesure les deux autres est appelée leur commune mesure.

<u>2ème définition</u>

Les grandeurs qui ont une même commune mesure sont dites être commensurables, comme aussi celles qui sont multiples l'une de l'autre. Au contraire, celles qui n'ont point de commune mesure sont dites être incommensurables.

<u>3ème définition</u>

Une première grandeur est dite être les mêmes ou les pareilles parties d'une seconde qu'une troisième d'une quatrième, quand la commune mesure des premières les mesure chacune autant de fois que la commune mesure des deux dernières mesure chacune des mêmes dernières, les prenant comme elles s'entrerépondent.

<u>4ème définition</u>

La raison de deux grandeurs l'une à l'autre réciproquement est le rapport ou la comparaison qu'elles ont entre elles, selon la quantité. Il faut qu'elles soient de même genre prochain, comme nombre à nombre, de ligne à ligne, de superficie à superficie, d'angle à angle, de solide à solide. Il faut aussi que chacune étant prise plusieurs fois, puisse excéder l'autre.

<u>1er avertissement</u>

Par cette définition, est exclu des raisons, le rapport, s'il y en a, du fini à l'infini. Et généralement, deux grandeurs dont l'une contient infiniment l'autre n'ont point de raison et ne se comparent point l'une à l'autre en géométrie. Or, il est clair jusqu'ici, qu'il y aura toujours raison entre deux lignes finies telles qu'on voudra, puisqu'étant de même genre et étant prises plusieurs fois, elles se peuvent excéder l'une l'autre par la 32ème proposition du livre 3 ci-dessus, etc.

<u>2ème avertissement</u>

Il peut y avoir des raisons entre deux choses, les comparant autrement que par la quantité : comme par la pesanteur, par la lumière, par le son, par le mouvement, par les forces et par d'autres accidents. Mais cette raison n'est pas de la pure géométrie qui ne compare que les cinq genres dont il a été parlé, savoir les lignes par leur longueur, les superficies par leur longueur et largeur ensembles, les solides par leur longueur, largeur et profondeur ensembles, les angles par leur ouverture et les nombres par la multitude des unités qu'ils contiennent. Toutes les autres raisons sont de la physique. Et pourtant, elles ne laissent pas d'être en usage dans la mathématique mêlée de la physique, comme dans l'optique, dans la mécanique, dans la musique, dans l'astronomie ... , ce qui n'est pas proprement de ce lieu où nous n'entendons traiter que des raisons géométriques. Mais il faut se souvenir que la même méthode dont nous nous servirons ici servira aussi lorsqu'il faudra traiter des autres raisons. Partant, cet avertissement n'est qu'une exclusion des raisons qui ne sont point de géométrie et qui, pour cette cause, sont renvoyées ailleurs.

<u>6ème définition</u>

Des grandeurs sont dites être en pareille raison, savoir une première grandeur à une seconde en pareille raison qu'une troisième à une quatrième, quand, ayant également multiplié chacun des antécédents qui sont la première et la tierce en telle multiplication qu'on voudra, ayant aussi (également) multiplié chacun des conséquents qui sont la seconde et la quatrième en telle multiplication qu'on voudra, soit que la multiplication des antécédents soit pareille à la multiplication des conséquents, ou non. Il arrive toujours que quand l'antécédent multiplié surpasse son conséquent multiplié, l'autre antécédent multiplié surpasse aussi son conséquent multiplié ; quand égal, égal et quand moindre, moindre.

<u>7ème définition</u>

Une telle ressemblance de raisons pareilles, que celle qui vient d'être expliquée, est appelée une proportion. Et les grandeurs lesquelles étant en pareilles raisons, font une proportion, sont appelées des grandeurs proportionnelles.

<u>Remarque</u>

De même que la comparaison de deux grandeurs fait une raison, ainsi la ressemblance de deux raisons fait une proportion, et si les raisons sont dissemblables, elles font une disproportion. Et quand il y aura tant de raisons semblables qu'on voudra, ce n'est toujours qu'une même proportion. Quelques uns et entre autres ceux qui ont vécu ces derniers siècles, confondent le mot proportion et de raison. Ainsi, ils manquent de mots pour signifier proprement proportion sinon que quelques uns disent analogie ou proportionnalité. Mais Viète et les bons auteurs de ce temps ont rétabli entre ces mots de raison et proportion la différence qu'y ont mis Euclide et les anciens, ainsi qu'il est expliqué ci-dessus aux définitions précédentes.

ANNEXE IV 4, b

<u>3ème proposition théorème</u>

Si à équimultiples de quelques simples grandeurs, on ajoute ou on ôte des equimultiples des mêmes simples ou des égales à celles-ci, les composés ou les restes seront encore equimultiples des mêmes simples ou égales à icelles. Et les simples seront chacune pareille partie de chacune composée ou des restes et elles les mesureront également.

<u>2ème corollaire</u>

Il est aussi clair, par cette proposition, qu'une simple grandeur mesurant chacune de deux ou plusieurs autres, mesurera aussi la composée de toutes et cette composée sera multiple de la simple.

5ème proposition

Si quatre grandeurs sont proportionnelles et qu'on en prenne les équimultiples, suivant la 6ème définition de ce livre, ces équimultiples seront aussi proportionnelles, en même ordre que les simples, savoir que la première multiple sera à la seconde multiple comme la troisième multiple à la quatrième multiple. Et, de plus, la multiple de la première grandeur sera à la seconde grandeur, comme la multiple de la troisième grandeur à la quatrième grandeur. Même la première grandeur sera à la multiple de la seconde, comme la troisième grandeur sera à la multiple de la quatrième grandeur.

13ème proposition

Des antécédents égaux ont des pareilles raisons à un même conséquent, ou à des conséquents égaux. Et un même antécédent a des pareilles raisons à des conséquents égaux.

17ème proposition

Les raisons qui sont pareilles à une même raison ou à des pareilles sont aussi pareilles entre elles, et si une raison est pareille à l'une de deux ou plusieurs.

21ème proposition

Si quatre grandeurs sont proportionnelles et que la première soit égale à la seconde, la tierce sera égale à la quarte, si plus grande, plus grande, si plus petite, plus petite.

25ème proposition

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, les mêmes, en composant ou par composition de raison, seront proportionnelles.

31ème proposition

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'une part et pareil nombre d'autres grandeurs d'autre part, lesquelles prises deux à deux sont en même raison, en proportion ordonnée, les mêmes en raison égales seront proportionnelles.

ANNEXE IV 5, a

Livre VII

Définitions

1ère définition

Des polygones semblables sont ceux desquels chacun des angles de l'un est égal à chacun des angles de l'autre, en même ordre et les côtés qui comprennent ces angles égaux sont proportionnaux aussi en même ordre.

Remarque sur la 1ère définition

De cette première définition, il s'ensuit immédiatement que tous les polygones réguliers de même ordre sont semblables entre eux, puisqu'ils ont tous chacun les angles égaux et tous les côtés proportionnaux, étant tous égaux.

3ème définition

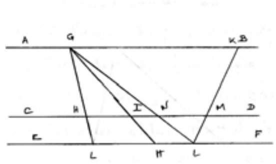
Quand il y a trois ou plusieurs termes de suite et entre ces termes deux ou plusieurs raisons de suite, la raison du premier terme au dernier, est dite être composée de toutes les raisons moyennes prises de suite ; savoir de la raison du premier terme au second, du second au troisième et ainsi des autres de suite jusqu'au dernier terme. Et si autant d'autres raisons sont pareilles aux susdites, chacune à la sienne, quoique ces autres raisons ne fussent pas de suite mais disjointes ; cette même raison du premier terme au dernier de ceux qui sont de suite sera aussi dite être composée de ces autres raisons qui ne sont pas de suite.

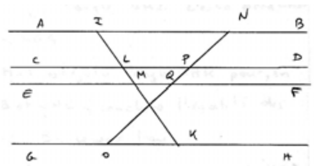
ANNEXE IV 5, b

7ème proposition

Sur des droites parallèles au nombre de trois ou plus, si on mène tant d'autres droites qu'on voudra qui soient coupées par les mêmes parallèles, les portions de l'une seront proportionnelles aux portions de l'autre, prenant les homologues entre les mêmes parallèles.

Sigle : (F.P)





Premier cas GH et GL se rencontrent au point G qui soit dans la parallèle AB. Je dis que GI et IH sont proportionnelles aux deux portions de la seconde droite GL, à savoir aux portions GN et GL.

Au second cas, soient les droites GH et KL qui se rencontrent ou non, la première desquelles GH coupe les parallèles comme ci-dessus et la seconde KL coupe AB au point K, CD au point M et EF au point L. Soit menée la droite GL, elle coupe CD au point N.

(prop. 6 - Livre 7) donne GI est à GH comme GN est à GL et dans le triangles GKL, KM est à ML comme GN est à NL. Donc, (prop. 17 - Livre 6) GI est à IH comme KM est à ML.

Maintenant, soient quatre parallèles AB, CD, EF, GH, sur lesquelles tombent deux lignes droites, savoir IK rencontrant les parallèles suivant l'ordre ci-dessus aux points I,L, M, K et NO aux points N, P, Q, O. Car le premier article de cette proposition appliquée aux parallèles AB, CD, EF, on obtient IL est à LM comme NP est à PQ et à cause des parallèles CD, EF, GH,LM est à MK comme PQ et à QO. Par un même discours, on démontrera que toutes les portions qui sont de suite entre trois parallèles sont proportionnelles. Et pour comparer les portions qui ne sont pas de suite, puisque IL, LM, MK sont des grandeurs d'une part et NP, PQ, QO sont des grandeurs d'autre part et ces grandeurs de part et d'autre prises deux à deux sont de même raison (prop. 31 - Livre 6). Partant IL est à MK comme NP est à QO.

14ème proposition problème

D'une ligne droite proposée, couper telle ou telles parties ou la diviser en tant de parties égales qu'on voudra.

15ème proposition problème

Couper une ligne droite proposée proportionnellement ou semblablement à une autre ligne droite donnée et coupée.

16ème proposition problème

A deux droites données, trouver une troisième droite proportionnelle et à trois droites, trouver une quatrième proportionnelle et ainsi en trouver tant d'autres qu'on voudra en proportion continue.

ANNEXE V : DESCHALLE

ANNEXE V 1, a

Avant propos

Ayant remarqué depuis longtemps, que la plupart de ceux qui apprennent les éléments d'Euclide, s'en dégoûtent fort souvent, pour ne pas savoir à quoi servent des proportions si peu considérables en apparence, et néanmoins si utiles, j'ai cru qu'il serait très à propos, non seulement de les rendre les plus faciles qu'on pourrait, mais encore d'ajouter quelques petits usages, après chaque proposition, qui en fissent voir l'utilité. C'est ce qui m'a obligé à changer quelques démonstrations, que j'ai jugées trop embarrassées, et, au delà de la portée ordinaire des commençants et d'en substituer quelques autres plus intelligibles. C'est pour la même raison que j'ai démontré le cinquième livre d'une méthode beaucoup plus claire que celle qui se sert des équimultiples. Je n'ai pas mis tous les usages des proportions, parce qu'il eut été nécessaire pour cela de rapporter toutes les mathématiques, ce qui rendrait le livre et trop gros et trop difficile. Je me suit contenté d'en choisir quelques un des plus clairs et des plus aisés à concevoir, pour marquer leur utilité. Je ne prétends pas qu'on s'y arrête beaucoup, ni qu'on les entende parfaitement, puisqu'ils dépendent des principes des autres parties [...].

Définition

C'est par le cercle qu'on mesure les angles. Ainsi, voulant savoir la grandeur de l'angle BAD, je mets le pied du compas au point A, et je décris l'arc ou partie de cercle BCD : l'angle sera d'autant plus grand que l'arc BCD, qui le mesure, contiendra plus de parties de son cercle et parce que communément on divise un cercle en trois cent soixante parties, qu'on nomme degrés, on dit qu'un angle est de vingt, trente, quarante degrés quand l'arc renfermé dans ces lignes contient vingt, trente, quarante degrés. Ainsi, l'angle est plus grand, qui contient plus de degrés.

32 - Les lignes droites parallèles sont celles qui ne concourent jamais étant partout également éloignées l'une de l'autre.

ANNEXE V 1, b

Propositions 2 et 3

1 - Tirer d'un point donné une ligne égale à une autre.

2 - Couper d'une grande ligne une partie égale à une plus petite.

Proposition 8

Si deux triangles ont tous les côtés égaux, leurs angles compris par ces côtés égaux seront aussi égaux entre eux.

Proposition 13

Une ligne qui tombe sur une autre, fait avec elle deux angles droits ou deux angles, lesquels pris ensembles sont égaux à deux droits.

Usage

Soit l'angle AEC que l'on ne peut mesurer avec un instrument, parce que je suppose que c'est un mur, ou tout autre corps solide qu'on ne peut parcourir. Il faut prolonger les côtés AE et CE à volonté vers D et B. Je veux dire qu'il faut se mettre sur l'alignement de ces côtés, pour avoir le triangle BDE, qui se fait aussi petit et aussi grand que l'on veut. Cela étant fait, il faut en mesurer les côtés pour les rapporter sur le papier, pour faire un triangle semblable, par lequel on pourra connaître l'angle E qu'on cherche.

Proposition 16

L'angle extérieur d'un triangle fait par la continuation d'un côté est plus grand que chacun des intérieurs opposés.

Proposition 20

Dans quelque triangle que ce soit, deux côtés pris ensembles sont plus grands que le troisième.

Proposition 26

Si un triangle a un côté égal à celui d'un autre triangle, et que les angles aux extrémités de ces côtés soient égaux les uns aux autres, ces triangles seront égaux en tout sens.

Lemme

Si deux lignes droites et parallèles viennent aboutir sur une autre ligne droite, les angles qu'elles formeront de même part seront égaux entre eux.

Proposition 27

Théorème

Quand deux lignes parallèles sont coupées par une troisième, elles forment les angles alternes égaux. Et quand une ligne tombe sur deux autres, et qu'elles forment les angles alternes égaux, ces deux lignes sont parallèles.

ANNEXE VI : LAMY

ANNEXE VI 1, a

Avertissements

La méthode que nous avons suivie jusqu'à présent, ç'a été de considérer l'idée des choses dont nous parlions et d'en tirer leurs propriétés. Par exemple, quand il s'est agi de démontrer les propriétés du cercle, nous avons considéré quelle était la figure qui en donnait ce nom ; comment elle se faisait ; ce qu'elle était : et c'est de l'idée de cette figure, que nous avons déduit ses propriétés. Cette méthode suppose la chose connue. Ces éléments m'étaient connus avant de les écrire ; et ce que j'ai fait, ç'a été de faire apercevoir dans l'idée des choses, ce qui est, et ce que j'y avais vu. Il y a une autre méthode avec laquelle on trouve ce qu'on ne connaissait pas, et que j'ai employé moi même dans ce Eléments dans beaucoup d'occasions, pour trouver ce que je ne savait point ; c'est pourquoi on l'appelle Méthode d'Invention, au lieu que la première se peut nomme Méthode de Doctrine. Cette seconde est très générale, et proprement, elle ne suppose aucune connaissance. J'en ai déjà parlé dans les Eléments de Mathématiques. Mais je l'applique ici à la géométrie et je la traite d'une manière particulière. Ainsi, ce qu'on va voir n'est point une répétition inutile.

ANNEXE VI 2, a

Livre premier

Définition IV

4 - La ligne droite est celle qui est la plus courte qui puisse être menée entre deux points donnés. On peut dire que c'est la trace que laisse un point qui se meut par le plus court chemin.

Définition V

La ligne courbe est celle qui n'est pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points.

ANNEXE VI 2, b

Proposition I

10 - Les extrémités d'une ligne sont deux points.

Proposition II

11 - Lorsque deux différentes lignes se coupent, leurs sections est un pont indivisible.

Proposition III

12 - Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, est plus grande que cette ligne droite.

Les lignes courbes ACB et ADB sont plus grandes que AB et les lignes creuses EGF et EHF sont plus grandes que EF. C'est une suite de la notion de la ligne droite qui est la plus courte qu'on puisse mener entre deux points.

Proposition IV

13 - Deux points étant donnés, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Proposition V

14 - Une ligne droite étant menée, on la peut prolonger. Elle ne peut être prolongée du même côté vers deux différents points.

Proposition VI

15 - Entre deux mêmes points, on ne peut mener qu'une ligne droite.

Proposition VII

16 - Deux lignes droites qui ont deux points communs ne sont qu'une même ligne.

Proposition VIII

17 - Donc, la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

ANNEXE VI 2, c

Section III

De la ligne qui est circulaire

Définition I

20 - Une ligne sur un plan, laquelle n'a ni commencement, ni fin, et qui dans toutes ses parties est également éloignée d'un même point, est un cercle. Ce point dont toutes les parties de cette ligne sont également éloignées, s'appelle le centre du cercle.

ANNEXE VI 2, d

Proposition I

30 - Un intervalle étant donné, on peut décrire une circonférence.
(Eucl - Livre I - Dem.3). L'instrument dont on se sert ordinairement pour décrire un cercle, est un compas, avec lequel on peut, comme il est évident, prendre une ligne égale à une autre ligne donnée, et de deux lignes inégales retrancher de la plus grande une ligne égale à la plus petite. Ce qui fait la deuxième et la troisième proposition du premier livre d'Euclide et la première du quatrième.

Proposition II

31 - Dans un même cercle ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, et les cordes égales, sont les cordes d'arcs égaux (Eucl III - Pr 24).

ANNEXE VI 3, a

Section IV

De la différente position de deux lignes droites au regard d'une de l'autre

Des lignes perpendiculaires

Définition

39 - Une ligne qui tombe sur une autre ligne, ou qui la coupe de sorte qu'elle ne penche pas plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'appelle perpendiculaire.

Proposition 3

42 - Dans une perpendiculaire, si l'un de ses points est également éloigné de deux autres points de la ligne sur laquelle elle est élevée, tous les autres points sont également éloignés de ceux-ci.

Proposition 4

43 - Pour démontrer donc qu'une ligne est perpendiculaire sur une autre, il suffit de faire voir que deux de ses points sont chacun à égale distance de deux points de celle-ci.

Proposition 5

45 - Deux lignes sont perpendiculaires l'une sur l'autre, si l'une l'est sur l'autre.

Problème I

46 - D'un point donné hors d'une ligne, tirer sur elle une perpendiculaire.

Problème II

47 - Sur le point donné d'une ligne, élever une perpendiculaire (Euclide I - Prop. 11).

Théorème III

51 - On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point sur une même ligne.

Théorème IV

52 - Dans un plan, deux lignes qui sont perpendiculaires sur une troisième, ne se peuvent se rencontrer.

Théorème V

53 - La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qu'on puisse mener d'un point à une ligne.

ANNEXE VI 3, b

Des lignes parallèles

Définition

63 - Deux lignes droites qui sont également distantes l'une de l'autre dans toutes leurs parties, sont dites parallèles.

Propositions évidentes touchant les lignes parallèles

Proposition I

64 - Une ligne droite qui est également éloignée en deux de ses points d'une autre ligne droite, est parallèle à cette ligne.

Proposition II

65 - Les perpendiculaires entre deux parallèles sont égales.

Proposition III

66 - Deux lignes parallèles étant prolongées à l'infini ne se rencontrent point.

Proposition IV

67 - Deux lignes droites qui ne sont pas parallèles, mais qui s'approchent plus d'un côté que d'un autre, se rencontrent enfin, si on les prolonge assez.

Proposition V

68 - Deux lignes qui sont perpendiculaires sur une même ligne, sont parallèles entre elles.

Lemme 1

69 - Entre deux parallèles, les lignes perpendiculaires sur l'une le sont sur l'autre.

Lemme 2

70 - La ligne AB ne peut être perpendiculaire sur Z et X, sans que ces deux lignes soient parallèles.

Lemme 3

71 - Si entre deux lignes droites, sont deux autres lignes droites égales, dont l'une est perpendiculaire sur la première, et l'autre sur la seconde, je dis que ces deux premières lignes sont parallèles.

Problème

72- Par un point donné mener une ligne parallèle à une ligne donnée (Euclide I - Prop. 31).

Théorème

73 - Deux lignes parallèles à une troisième sont parallèles entre elles (Euclide I - Prop. 30).

Corollaire

74 - On ne saurait faire passer par le même point deux différentes lignes qui soient parallèles à une même.

ANNEXE VI 4, a

Livre second

Propositions évidentes touchant les angles

Proposition I

5 - Il est évident, par la définition de l'angle, que sa grandeur ne dépend pas de la longueur des lignes qui le forment, mais de leur ouverture.

Proposition II

6 - Un angle ne peut être augmenté ni diminué, que lorsqu'un de ses côtés, en tournant sur le sommet comme sur un centre, s'éloigne ou s'approche de l'autre côté.

Proposition III

7 - Un des côtés de l'angle, en tournant et s'éloignant de l'autre côté, fait toujours cet angle plus grand, jusqu'à ce que, faisant une ligne droite avec cet autre côté, il ne fait plus d'angle.

Proposition IV

8 - Un des côtés de l'angle ne peut faire, en tournant, qu'un tour entier ou un cercle, après quoi, il se joint avec l'autre côté et ne fait avec lui qu'une seule ligne.

Proposition V

9 - Les arcs ou portions de différents cercles décrits par les différents points d'un des côtés de l'angle sont d'un pareil nombre de degrés.

Proposition VI

10 - Du somment d'un angle, comme d'un centre ayant fait un cercle, la portion de ce cercle comprise entre les côtés de cet angle, est la mesure de cet angle.

Théorème II

17 - Toute ligne tombant sur une autre forme deux angles égaux à deux droits.

Corollaire I

18 - Il est évident qu'une infinité de lignes tombant sur une autre ligne dans le même point, formeront des angles qui, tous ensembles, ne vaudront que quatre angles droits.

Théorème III

20 - Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites faisant avec elle de part et d'autre deux angles égaux à deux droits, ces deux lignes se rencontreront directement (Euclide I - Prop. 14).

Théorème IV

21 - Deux lignes qui se coupent font les angles opposés au sommet égaux (Euclide I Prop. 15).

Définition IV

27 - Le sinus d'un arc est la moitié de la corde du double de cet arc, ou la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cet arc sur le rayon.

Définition V

23 - Le sinus d'un angle est le sinus de l'arc qui le mesure.

Théorème V

24 - Les angles égaux ont des sinus égaux, et si les sinus sont égaux, les angles sont égaux.

Théorème VI

25 - Si une ligne coupe obliquement deux parallèles, elle forme huit angles dont il y en a quatre d'alternes intérieurs et quatre extérieurs. Je dis que les alternes extérieurs ou intérieurs sont égaux (Euclide I - Prop. 29).

Théorème VIII

27 - Une ligne coupant deux ou plusieurs parallèles, tous les angles qu'elle fait avec elles d'une même part sont égaux.

Problème I

29 - D'un point donné sur une ligne droite, décrire un angle rectiligne égal à un donné (Euclide I - Prop. 23).

Théorème I

37 - L'angle du segment a pour mesure la moitié de l'arc qu'il comprend entre sa corde (Euclide II - Prop. 32).

Théorème II

39 - L'angle à la circonférence a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

ANNEXE VI 4, b

Section III

Théorème II

73 - L'angle extérieur d'un triangle est égal aux deux intérieurs opposés (Euclide I - Prop. 32).

Théorème III

75 - Les trois angles d'un triangle sont ensembles égaux à deux angles droits (Euclide I - 32).

Corollaire I

76 - Donc, connaissant les deux angles d'un triangle, on connaît le troisième. Car les trois valant 180 degrés, si deux valent 160 degrés, le troisième doit valoir 20 degrés.

Corollaire V

80 - Si dans deux triangles, deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, ils sont équiangles, c'est-à-dire que le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre.

Théorème V

83 - Dans le triangle isocèle, les angles sur la base sont égaux et si les angles sur la base sont égaux, le triangle est isocèle (Euclide I - Prop. 5).

Corollaire I

84 - Aucun des angles de la base d'un isocèle ne peut être droit ni obtus (n° 75).

Théorème XI

95 - Deux triangles équiangles qui ont un côté égal sont entièrement égaux.

Corollaire

96 - Deux triangles qui ont deux angles égaux et un côté égal sont entièrement égaux (Euclide I - Prop. 26).
Car deux triangles qui ont deux angles égaux sont entièrement équiangles (n° 80). Par conséquent, s'ils ont un côté égal, il faut, selon ce théorème, qu'ils soient égaux.

Livre troisième

Des raisons et proportions des lignes, des surfaces et des solides

ANNEXE VI 5, a

Proposition I

41 - Les raisons égales ont des exposants égaux.

Proposition II

42 - Les grandeurs égales ne peuvent être les exposants que de raisons égales.

Proposition V

46 - Quatre grandeurs étant proportionnelles alternando, c'est-à-dire en comparant le premier antécédent avec le second antécédent, et le premier conséquent avec le second conséquent, ces quatre grandeurs seront encore proportionnelles (Euclide V - Prop. 16).

Lemme

43 - Le premier terme d'une raison devient égal au second, quand on le multiplie par l'exposant de cette raison.
L'exposant de la raison de A à B ou ce qui est la même chose le quotient de la division de ces termes l'un par l'autre, soit q, il marque combien de fois A est dans B. Par conséquent, étant pris autant de fois qu'il est contenu, c'est-à-dire étant multiplié par q, il doit être égal à B qu'il a divisé. Ainsi, Aq = B.

Proposition VII

48 - Retranchant des deux termes d'une raison deux autres termes de même raison, l'antécédent de l'antécédent, le conséquent du conséquent, la même raison demeure.
Si l'exposant de la raison A.B est q, on a Aq = B et Cq = D (n° 43). Le quotient de Aq - Cq divisé par A - C est q, donc ces deux termes ont le même exposant et partant la même raison que A et B.

Proposition X

51 - Quatre grandeurs étant en proportions dividendo, c'est-à-dire le premier antécédent moins son conséquent, est à son conséquent comme le second antécédent moins son conséquent est à son conséquent (Euclide V - Prop. 17).

Proposition XI

52 - Deux grandeurs qui ont une même raison avec une troisième, sont égales entre elles (Euclide V - Prop. 9).

ANNEXE VI 5, b

Section IV

Des raisons composées et de leurs propriétés

Définition II

73 - Une raison qui a pour son exposant un carré, est une raison doublée.

Théorème II

77 - La raison de deux plans est composée des raisons qu'ont les côtés de l'un aux côtés de l'autre, de la largeur à la largeur, de la longueur à la longueur.

Théorème III

78 - La raison d'un solide à un autre solide est composée de la raison qu'ont les trois côtés de l'un aux autres côtés de l'autre.

Théorème IV

79 - Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit des antécédents est à celui des conséquents en raison doublée de celle de chaque antécédent à son conséquent, ou comme les carrés de chaque antécédent au carré de son conséquent.

Corollaire

80 - Les plans semblables, c'est-à-dire dont les côtés sont proportionnels sont entre eux en raison doublée de celles des côtés de l'un aux côtés de l'autre.

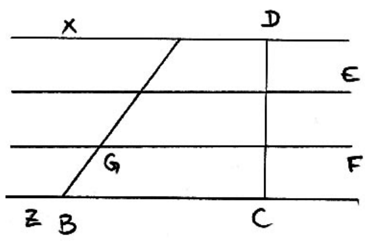
ANNEXE VI 6, a

Livre quatrième

Des raisons et proportions des lignes, des triangles, des figures, tant de leurs côtés et circuit que de leurs surfaces

Lemme premier

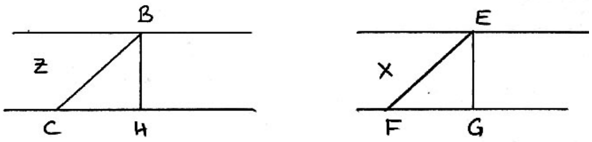
2 - Si l'on coupe un espace parallèle ou la perpendiculaire qui le mesure par des lignes parallèles, les lignes obliques comprises dans cet espace seront partagées en autant de parties que la perpendiculaire.
Les deux parallèles E et F divisent tout l'espace parallèle compris entre X et Z en trois autres espaces parallèles dans lequel se trouve l'oblique AB, aussi bien que DC. Ainsi elle est divisée en autant de parties que la perpendiculaire DC.



Lemme II

3 - Les lignes obliques qui, dans des espaces parallèles égaux, font les mêmes angles, sont égales et également obliques. **Sigle : (F.P)**

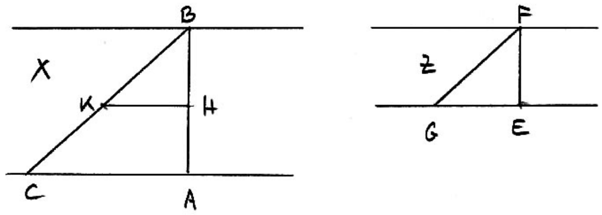
On suppose les angles BCH et EFG égaux. Des points B et E je mène perpendiculairement les lignes BH et EG, lesquelles sont égales (Livre I n° 65). Ainsi, les triangles BCH et EFG sont rectangles et entièrement égaux (Livre II n° 96). Et partant BC et EF sont des lignes égales, comme aussi CH et FG. Par conséquent, BC et EF sont également obliques (Livre I n° 55).



<u>Lemme III</u>

4 - Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans des espaces parallèles inégaux sont inégales, plus grandes si l'espace est plus grand, plus petites si l'espace est plus petit.

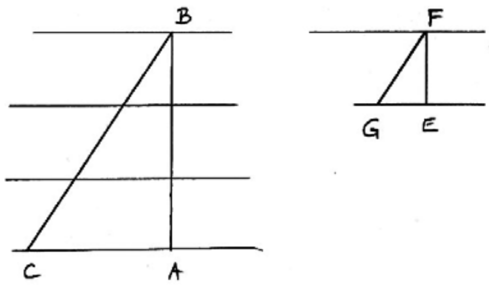
Soit pris sur BA la partie BH égale à EF et par H soit menée une parallèle à la base AC. Les deux triangles ABC et EFG étant rectangles et l'angle BCA étant égal à l'angle FGE, ils sont équiangles (Livre II - 80). L'angle BKH est égal à BCA et BHK à BAC. Ainsi (Livre II n° 27), le triangle BKH est équiangle avec BAC ; et partant avec FGE. On suppose FE égal à BH, donc (Livre II n° 96) FG = BK.



<u>Théorème III</u>

7 - Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans les espaces parallèles différents sont entre elles comme ces espaces. <u>Sigle : (E.P)</u>

Si AB = EF par (n°3) BC = FG. Si AB est plus grand que EF par (n° 4) BC sera plus grand que FG. Si AB est par exemple triple de EF, alors BC sera triple de FG. Car supposant que BA est partagé en trois parties égales, par le lemme premier (n° 2), BC sera aussi partagé en trois parties, lesquelles par (n° 3) seront chacune égale à GF, car ces parties font les mêmes angles (Livre II 27). Si AB est égal ou contient une ou plusieurs fois EF, plus quelque reste, on démontrerait que BC est égal ou contient de la même manière une ou plusieurs fois exactement FG, plus quelque reste. Ainsi, les lignes également obliques.



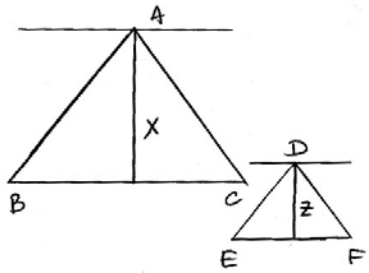
ANNEXE VI 6, b

<u>Des raisons et proportions des côtés des triangles</u>

<u>Théorème I</u>

10 - Deux triangles semblables ont leurs côtés proportionnels (Euclide VI - Prop. 4). <u>Sigle : (T.S)</u>

Je mène par le sommet des deux triangles ABC et DEF des lignes parallèles à leurs bases. Les angles ABC et DEF sont égaux. Les obliques AC et DF font aussi les mêmes angles. Donc (n° 7) AB.DC :: AC.DF car AB.DE :: X.Z :: AC.DF. En menant par B et E les parallèles aux côtés AC et DF on démontrerait de même que AB.DE :: BC.EF



<u>Théorème II</u>

11 - Deux triangles semblables à un troisième sont semblables entre eux (Euclide VI - Prop. 21).

<u>Théorème III</u>

12 - Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront semblables (Euclide VI Prop. 5).

<u>Théorème IV</u>

13 - Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal et les côtés qui comprennent ces angles proportionnels (Euclide VI - Prop. 6), (Livre II n° 52, Livre II n° 96, 12).

<u>Théorème V</u>

14 - Si deux triangles ont un angle égal à un angle et les côtés au long d'un autre proportionnels, les troisièmes angles étant de même espèce, c'est-à-dire ou aigus, ou droits, ou obtus, ces deux triangles sont équiangles, et les angles dont les côtés sont proportionnels sont égaux (Euclide VI - Prop. 7).

<u>Théorème VII</u>

16 - Lorsqu'on coupe deux côtés d'un triangle par une ligne parallèle à la base de l'angle qu'ils comprennent, ils sont coupés proportionnellement. <u>Sigle : (D.P.C.T)</u>

ANNEXE VII : CLAIRAUT

ANNEXE VII 1, a

<u>Préface</u>

[...] Il est vrai que pour sauver cette sécheresse naturellement attachée à l'étude de la géométrie, quelques auteurs ont imaginé de mettre, à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en peut faire pour la pratique. Mais par là, ils prouvent l'utilité de la géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre.

[...] La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de la géométrie. Et c'est, en effet, l'origine de cette science, puisque géométrie signifie mesure de terrain. Quelques auteurs prétendent que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruites par les débordement du Nil, jetèrent les premiers fondements de la géométrie en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines [...]. Afin de suivre, dans cet ouvrage, une route semblable à celle des inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux commençants, les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains et des distances accessibles ou inaccessibles, etc.

ANNEXE VII 1, b

a [...] Pour faire cette opération, on prend un instrument tel que **abc**, composé de deux règles qui puissent tourner autour de **b**, et l'on pose ces règles sur les côtés **AB** et **BC**. Par là, elles font entre elles le même angle que les côtés **AC** et **BC**. Plaçant donc la règle **BC** sur la base **DE**, de manière que le centre **b** réponde au point **D** et que l'ouverture de l'instrument reste toujours la même [...].

b Dans la construction des ouvrages comme des remparts, des canaux, des rues, ..., on a besoin de mener des lignes parallèles, c'est-à-dire dont la position soit telle que leurs intervalles aient partout pour mesure des perpendiculaires de même longueur.
[...] Une ligne qui tombe sur une autre ligne et qui ne penche sur celle-ci d'aucun côté est perpendiculaire à cette ligne.

ANNEXE VII 1, c

27 - ABC est un triangle. Si on ne peut mesurer que deux côtés AB et BC, cela ne suffit pas pour déterminer ce triangle. On doit faire pencher DF sur DE comme AB penche sur BC ; c'est-à-dire l'angle FDE a la même ouverture que l'angle ABC.
28 - Deux côtés et l'angle compris étant donnés, le triangle est déterminé. Pratique simple qui suppose ce principe évident, qu'un triangle est déterminé par la longueur de deux de ses côtés et par leur ouverture.
30 - Deux angles et un côté déterminent un triangle.
39 - Deux triangles dont les angles sont respectivement égaux ont leurs côtés proportionnels.
40 - Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.
41 - Trouver à trois lignes NO, MQ, AB une quatrième proportionnelle.

ANNEXE VII 1, d

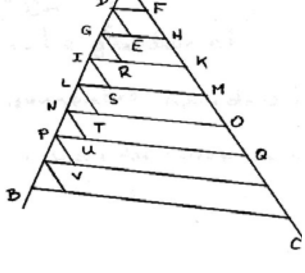
Seconde partie

27 - On donne deux triangles abc et ABC tels que AB soit la diagonale d'un carré de côté ab. On sait que AB et ab son incommensurables.
En partageant ab en parties, AB ne contient jamais un nombre exact de ces parties. Mais plus ce nombre est grand, plus AB approchera d'être mesuré exactement avec les parties de ab. On divise ab en 100 parties égales. AB contiendra des parties entières entre 141 et 142 (car 100 x 100 = 10 000, 141^2 = 19881, 142^2 = 20 164 et 2 x 10 000 = 20 000).
D'après (39) AC contiendra 141 parties de ac avec un reliquat comme AB contiendra 141 parties de AB avec un reliquat. En augmentant la partition, les restes seront de plus en plus petits. On pourra les négliger si la division est poussée à l'infini. Ainsi, le nombre des parties de ac qui contiendra AC égalera le nombre de parties de ab que contiendra AB et qu'ainsi AC sera à ac comme AB est à ab.

ANNEXE VIII : LA CAILLE

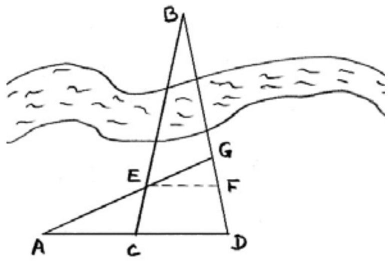
Première partie

359 - D'un point A quelconque, on peut aller à un autre point B, par une infinité de chemins différents. Mais on voit bien qu'il doit y en avoir un plus court que tous les autres, et celui-là, quel qu'il soit, s'appelle ligne droite.
360 - 1) La vraie mesure de la distance d'un point à un autre est toujours la ligne droite qui les joint. Telle est la ligne AB.
2) On ne peut mener qu'une seule ligne droite d'un point à un autre, et par conséquent, deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite quelconque. Toutes les autres que l'on voudrait mener par les mêmes points se confondraient avec la première.
3) Deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point : elles ne peuvent jamais avoir deux points communs.
361 - Lorsqu'une ligne droite en rencontre une autre, il en résulte une ligne brisée. Telles sont les lignes ADB et AFB, qui aboutissent aux mêmes points A et B, que la droite AB. Or, cette droite est plus courte que toute autre ligne qui se termine aux mêmes points ; donc, une ligne droite quelconque menée par deux points donnés est plus courte que toutes les lignes brisées menées entre les mêmes points.
366 - Si deux lignes droites AC et CD se rencontrent , elles forment l'angle ACD qui a son sommet au point de rencontre C et dont les lignes AC, CD, sont les côtés.
367 - La grandeur d'un angle est tout à fait indépendante de la longueur de ses côtés.
371 - On appelle lignes perpendiculaires celles qui, par leur rencontre, forment des angles droits **(Tout angle qui a pour mesure 90° ou le quart de la circonférence, est un angle droit).**
377 - Soit proposé maintenant de faire passer une circonférence par trois points A, B, D qui ne soient pas en ligne droite.
382 - Deux lignes AB, CD, sont parallèles lorsque leur distance est partout la même.
383 - Si une ligne quelconque NQ coupe deux parallèles AB, CD, les angles AFG, FGD formés par l'intersection de cette ligne et des parallèles sont alternes-internes.
384 - D'où on peut conclure :
1) que les angles correspondants NFB, NGD sont égaux, ainsi que NFA, NGC.
2) que les angles alternes-externes CGQ, NFB sont égaux.
Réciproquement, si les angles alternes-internes AFG, FGD sont égaux, les lignes AB, CD sont parallèles.
385 - Cela posé, il est facile de mener d'un point donné G la parallèle GD à la ligne AB.
429 - Lorsqu'une première ligne est à un seconde comme une troisième est à une quatrième, ces lignes sont proportionnelles entre elles.
430 - Supposons d'abord que sur la droite AB on prenne des parties égales AD, DG, GI, ... et que l'on mène les parallèles DF, GH, IK, ... sur la droite AC. Il est clair que les parties AF, FH, HK de cette droite seront égales entre elles, car si on mène parallèlement à AC, les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR seront égaux. Donc AF = DE = GR = FH = HK = ... On aura donc : AD : AF :: DG : FH :: GI : HK. **Sigle (F.P)**



Par conséquent, AP, somme de tous les antécédents est à AQ, somme de tous les conséquents, comme un seul antécédent AD est à son conséquent AF ; et comme un nombre quelconque de parties de AB est au même nombre de parties de AC ; par exemple AG : AH :: AI : AK :: DI : FK, etc.
431 - 1) Donc si deux droites AE, AD sont coupées par deux ou par un plus grand nombre de parallèles ED, CB, leurs parties CE, BD seront proportionnelles aux lignes entières AE, AD.
432 - 2) Si deux triangles ABC, abc sont semblables, tous leurs côtés homologues sont proportionnels.
433 - Réciproquement, si les deux triangles ABC, abc ont tous leurs côtés homologues proportionnels, je dis qu'ils seront semblables.
La propriété des triangles semblables que nous venons d'exposer est un principe fondamental de la géométrie. En voici deux applications :
435 - Le point B étant supposé inaccessible, on demande la distance de B à D.
Du point D ayant visé le point B, on marquera sur le rayon visuel BD un point quelconque G et on construira sur le terrain le triangle AGD dont on mesurera exactement les trois côtés. Cela fait, d'un point quelconque C de la base AD, on visera de nouveau l'objet B et on observera le point E où le rayon visuel BC coupe le côté AG. La distance EG étant mesurée, voici comment on trouvera la distance inconnue BD que j'appelle x :

Soit EF parallèle à AD, soit AD = *a*, AG = *b*, GD = *c*, CD = *d*, EG = *f*. A cause des triangles semblables AGD, GEF, on aura : AG : EG :: AD : EF) :: GD : GF
(= cf/b). Donc BF = BD - FD = BD - (GD - GF) = BD + GF - GD = *x* + cf/b - c.
Or, à cause des triangles semblables BEF, BCD, on a :
BD : CD :: BF : EF ou x : *d* :: *x* + cf//b - c : af/b donc afx/b = *dx* + cfd/b - cd ; et par conséquent *x* = *cd*. (b - f)/(bd - fa). Il n'y a donc qu'à substituer les valeurs dans cette formule.



ANNEXE IX : BEZOUT

ANNEXE IX 1, a

<u>Première section</u>

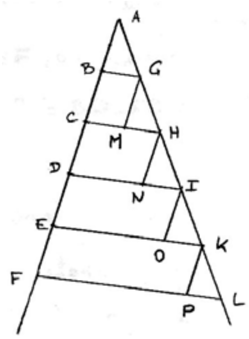
2 - La trace d'un point qui serait mu de manière à tendre toujours vers un seul et même point est ce qu'on appelle une ligne droite. C'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre.
11 - L'angle BAC n'est autre chose que la quantité dont le côté AB aurait dû tourner sur le point A pour venir de la position AC dans la position AB.
12 - Un angle quelconque BAC a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre. Ainsi, quand par la suite, nous dirons : un tel angle a pour mesure un tel arc, on doit entendre qu'il a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de cet arc.

ANNEXES IX 1, b

20 - Les angles BAC, EAD opposés au sommet et fermés par les deux droites BD et EC sont égaux car BAC a pour supplémentaire CAE et EAD a aussi pour supplémentaire CAD.
36 - Deux lignes droites, tracées <u>sur un même plan</u>, sont dites parallèles lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées. Deux lignes parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre, car <u>il est évident</u> que si en quelque endroit elles se trouvaient plus près qu'en un autre, elles seraient inclinées l'une à l'autre, et que, par conséquent, elles pourraient enfin se rencontrer.
37 - 1) Lorsque deux lignes parallèles AB et CD sont coupées par une troisième ligne EF (qu'on appelle alors sécante), les angles BGE, DHE ou AGH, CHF sont égaux.
38 - 2) Les angles AGH, GHD sont égaux car AGH = CHF, donc puisque CHF = GHD (20), on a AGH = GHD.
39 - 3) Les angles BGE et CHF sont égaux, car BGE = AGH (20) et on a de plus
AGH = CHF (37).
41 - 5) Les angles BGE, DHF ou AGE, CHF sont suppléments l'un l'autre car DHF est supplément de DHG qui est égal à BGE.
42 - Réciproquement, toutes les fois que deux lignes droites auront dans leur rencontre avec une troisième, l'une quelconque de ces cinq propriétés, on doit conclure qu'elles sont parallèles. Cela se démontre d'une manière absolument semblable.
43 - Si deux angles ABC, DEF, tournés d'un même côté, ont leurs côtés parallèles, ils seront égaux.
73 - Il est <u>évident</u> que dans tout triangle, la somme de deux côtés, pris comme on le voudra, est toujours plus grande que le troisième.
74 - La somme des trois angles de tout triangle rectiligne vaut deux angles droits ou 180°.
77 - Si deux angles sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront égaux, et réciproquement, si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux.
80 - Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.
81 - Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.
82 - Les parties AC et BD de deux parallèles interceptées entre deux parallèles AB et CD sont égales.

ANNEXE IX 1, c

101 - Si sur un des côtés AZ d'un triangle quelconque ZAX, on marque les parties égales AB, BC, CD, DE, ... de telle grandeur et en tel nombre qu'on voudra, et si après avoir tiré à volonté, par l'un F des points de division, la ligne FL qui rencontre le côté AX en L, on mène par les autres points de division, les lignes BG, CH, DI, EK, ... parallèles à FL. Je dis que les parties AG, GH, HI, ... du côté AX seront aussi égales entre elles. <u>Sigle (P.E)</u>
On mène les parallèles à AZ par les points G, H, I, ... D'après (82), GM, HN, IO, KP sont égales à AB, car elles sont chacune égales à BC, CD, DE, EF. De plus, les angles ABG, GMH, HNI, ... sont égaux, de même que les angles BAG, MGH, NHI, ... d'après (43). Les triangles ABG, GMH, HNI, ... ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, donc ils sont égaux (81). On peut donc écrire :
AD : AI :: AB : AG, DF : IL :: AB : AG et
AF : AL :: AB : AG. Comme AB : AG est commun (arith. Rey - 174) donne : AD : AI :: DF : IL.

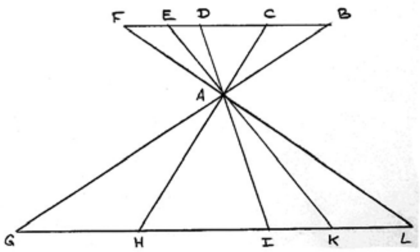


102 - Donc, si par un point D pris à volonté sur un des côtés AF d'un triangle AFL, on mène une ligne DI parallèle au côté FL, les deux côtés AF, AL, seront coupés proportionnellement, c'est-à-dire qu'on aura toujours AD : AI :: DF : IL et AD : AI ::AF:AL, ou bien en échangeant les places des deux moyens (arith. 182) AD : DF ::AI : IL et AD : AF :: AI : AL. <u>Sigle : (D.P.C.T)</u>
En effet, on peut toujours concevoir le côté AF coupé en tel nombre de parties égales qu'on voudra, et par conséquent en un nombre infini de parties égales. Or, dans ce cas le point D ne pouvant manquer d'être un des points de division, le raisonnement de l'article précédent s'applique ici mot à mot.

ANNEXE IX 2, e

103 - 1) Donc, si d'un point A pris à volonté hors de la ligne GL, on tire à différents points de cette ligne plusieurs lignes AG, AH, AI, AK, AL, toute parallèle BF à la ligne GL coupera toutes ces lignes en parties proportionnelles, c'est-à-dire qu'on aura AB : BG :: AC : CH :: AD: AI :: AE: EK :: AF : FL et AB: AG :: AC : AH ::AD : AI :: AE : AK :: AF : AL.
On se place successivement dans les triangles GAH, HAI, IAK et KAL. **<u>Sigle (F.P)</u>**
104 - 2) La ligne AD qui divise en deux parties égales un angle BAC d'un triangle coupe le côté opposé BC en deux parties BD, DC, proportionnelles aux côtés correspondants AB, AC, c'est-à-dire de manière qu'on a BD : DC :: AB : AC.
105 - Si on coupe les lignes AF et AL proportionnellement aux points D et I, c'est-à-dire de manière que AF : AD :: AL : AI, la ligne DI sera parallèle à FL.

106 - Donc, si on coupe proportionnellement aux points B, C, D, E, F, les lignes AG, AH, AI, AK, AL menées du point A à différents points de la ligne GL, la ligne BCDEF qui passera par tous ces points sera une ligne droite parallèle à GL.



107 - Les propositions enseignées sont également vraies lorsque la ligne BF, au lieu d'être entre le point A et la ligne GL, tombe au delà du point A.

109 - Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels et sont, par conséquent, semblables.

112 - Si de l'angle droit A d'un triangle rectangle BAC, on abaisse une perpendiculaire AD sur le côté opposé BC (qu'on appelle hypoténuse) :

1) les deux triangles ADB, ADC seront semblables entre eux et au triangle BAC.
2) la perpendiculaire AD sera moyenne proportionnelle entre les deux parties BD et DE hypoténuse.
3) chaque côté AB ou CA de l'angle droit sera moyen proportionnel entre hypoténuse et le segment correspondant BD ou CD.

113 - Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ont aussi les deux angles égaux et sont, par conséquent, semblables.

114 - Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels ont les angles égaux chacun à chacun et sont, par conséquent, semblables.

117 - La proposition enseignée (101) fournit un moyen naturel de diviser une ligne donnée en parties égales ou en parties qui aient entre elles des rapports donnés

120 - Quatrième proportionnelle et troisième.

ANNEXE X 1, a

ANNEXE X : BOSSUT

Première partie

Les lignes se mesurent et se comparent en les rapportant à une ligne choisie arbitrairement pour unité. Les lignes mesurées sur le terrain sont ordinairement trop longues pour être rapportées sur le papier, dans leur grandeur réelle. On est donc obligé de les réduite, et de les exprimer par d'autres lignes plus petites. C'est à quoi on parvient par la construction d'une échelle de rapport.

ANNEXE X 1, b

Chapitre II

Proposition 1 - Théorème

La somme de deux angles de suite vaut toujours deux droits.

Corollaire I

Lorsque deux lignes AC et CF ne font pas une ligne droite, la somme des deux angles ECA et ACF, qui ont leur sommet au point C et le côté commun EC, vaut plus ou moins que deux angles droits et, réciproquement, si la somme des deux angles ECA et ECF vaut plus ou moins que deux angles droits, la ligne ACF sera brisée en C. Finalement, si les deux angles ECA et ECF valent deux droits, il n'y aura pas de brisure en C et ACF est une droite.

Corollaire II

Si a un point C de la droite AB, on mène un nombre quelconque de lignes GC, EC, FC, la somme de tous les angles ACG, GCE, ECF, FCB vaut deux droits.

Corollaire III

La somme d'un nombre quelconque d'angles HCG, GCE, ECF, FCK, KCI, ICH vaut quatre angles droits.

Proposition 2 - Théorème

Deux lignes AB, CD, qui se coupent, forment autour du point d'intersection E quatre angles, tels que les opposés au sommet sont égaux deux à deux, c'est-à-dire que AEC égal à DEB et AED égale à BEC.

Proposition 3 - Théorème

Si quatre angles AEC, AED, DEB, BEC formés autour d'un même point E sont tels que les opposés au sommet soient égaux deux à deux, c'est-à-dire si l'on a AEC = DEB et AED = BEC, je dis que les deux lignes AB et CD seront des lignes droites.

Proposition 4 - Théorème

La droite CD étant supposée perpendiculaire sur le milieu E de la droite AB, tout point tel que F placé sur CD est également éloigné des extrémités A et B de la ligne AB.

Proposition 5 - Théorème

La droite CD étant toujours supposée perpendiculaire sur le milieu de AB, tout point G, qui n'est pas placé sur cette perpendiculaire n'est pas également éloigné des points A et B.

Corollaire

Un point ne peut pas être également éloigné des extrémités d'une ligne sans être placé sur la perpendiculaire au milieu de cette ligne.

Proposition 6 - Problème

Mener une ligne qui soit perpendiculaire sur le milieu d'une droite donnée AB.

Proposition 7 - Problème

Par un point E donné sur la ligne KH, élever une perpendiculaire.

Proposition 8 - Problème

D'un point F situé hors d'une ligne KH, abaisser une perpendiculaire à cette ligne.

Chapitre III

Définition

Deux droites KH et MN situées dans un même plan sont parallèles, lorsqu'étant coupées par une troisième droite CD, les angles CEH, CFN, qu'elles forment d'un même côté avec cette ligne, sont égaux.

ANNEXE X 1, c

Seconde partie

Proposition 2 I- Théorème

Deux triangles ABC, DEF, sont parfaitement égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, c'est-à-dire, par exemple, si EF = BC et E = D, F = C.

Proposition 6 I - Théorème

Si dans un quadrilatère ABCD, qui a les côtés opposés parallèles, on mène la diagonale BD, elle partagera ce quadrilatère en deux triangles ABD, CBD parfaitement égaux.

<u>**Corollaire**</u>

Les côtés opposés d'un tel quadrilatère sont égaux. Réciproquement, si dans un quadrilatère, les côtés opposés sont égaux, ces côtés sont parallèles deux à deux.

<u>**Proposition 1 - Théorème**</u>

Tout parallélogramme ABCD est égal à un rectangle EBCF de même base et de même hauteur.

<u>**Corollaire I**</u>

Donc, si les deux parallélogrammes ABCD, MNPQ, qui ont des hauteurs égales ont de plus leurs bases BC et NP égales, ils auront des surfaces égales, car chacun d'eux est égal à un rectangle de même base et de même hauteur.

<u>**Corollaire II**</u>

Tout triangle ABC peut être considéré comme la moitié du parallélogramme ABCD (prop. 6 - I - 2ème partie). Or, ce parallélogramme est égal au rectangle de même base et de même hauteur que lui. Donc si deux triangles ABC et MNP ont des hauteurs égales et de plus leurs bases égales, ils auront des surfaces égales car chacun d'eux est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur.

<u>**Proposition 2 - Théorème**</u>

La surface d'un rectangle EBCF est égale au produit de sa base et de sa hauteur.

<u>**Corollaire I**</u>

La surface du parallélogramme ABCD est égale à BC x AO.

<u>**Corollaire II**</u>

Donc, la surface du triangle ABC est égale à $(BC \times AO)/2$ (- fig 1).

<u>**Corollaire III**</u>

Deux parallélogrammes ABCD, MNPQ qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases BC, NP, car ABCD : MNPQ :: BC x AO : NP x MR. Or AO = MR, donc si on divise BC x AO, NP x MR par ces quantités égales, on a (arith. n°170 Bezout) et (arith. n°174 Reynaud) : ABCD : MNPQ :: BC : NP. De même pour les triangles ABC, MNP.

<u>**Chapitre III - Section I**</u>

<u>**Proposition 1 - Théorème**</u>

Si on a deux lignes AV, AZ, qui fassent entre elles un angle quelconque VAZ, et qu'ayant pris sur la première un nombre quelconque de parties égales AB, BC, CD, DE, on mène sous un angle quelconque les parallèles BF, CG, DH, EI, qui rencontrent la seconde aux points F, G, H, I ; qu'ensuite par ces points, on mène parallèlement à AV, les droites FS, GT, HX, je dis :

1) que toutes les parties AF, FG, GH, HI de la droite AZ sont égales entre elles .

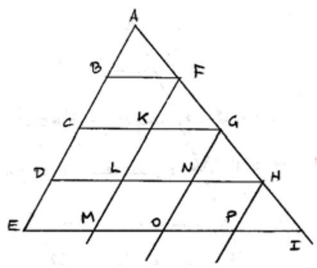
2) que toutes les parties EM, MO, OP, PI de EI sont égales entre elles.

La démonstration est dans l'esprit de celle de Bezout, de La Caille et se fonde sur le parallélogramme (prop. 6 - I - 2ème partie), les angles (prop. 1 - III - 1ère partie), et les cas d'égalités de triangles (prop. 2 - I - 2ème partie).

<u>**Corollaire I**</u>

De là suit la manière de partager une ligne droite en tant de parties égales qu'on voudra.

<u>**Corollaire II**</u>

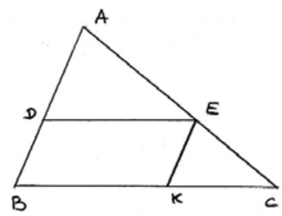


On a AB : BC : CD : DE :: AF : FG : GH : HI :: EM : MO : OP : PI. D'après (arith. n°185 Bezout), dans toute suite de rapports égaux, une somme d'antécédents est à une pareille somme de conséquents correspondants comme un antécédent est à son conséquent. D'où
AB + BC : AF + FG :: AB : AF, soit AC : AG ::AB : AF. De plus (arith. n°182)
AB + BC + CD : AF + FG + GH :: AB : AF :: AB + BC : AF + FG, soit AD : AH :: AB : AF :: AC : AG. De plus AB + BC : EM + MO ::AB : EM, soit encore AD : EP :: AB : EM :: AC : EO.

<u>**Proposition 2 - Théorème**</u>

Si dans le triangle ABC, on mène la droite DE parallèle au côté BC et par le point E la droite EK parallèle au côté AB, je dis que les côtés AB, AC, BC seront coupés proportionnellement aux points D, E, K, c'est-à-dire qu'on aura cette suite de rapports égaux AB : AD ::AC : AE :: BC : BK. Réciproquement, si on a la proportion AB : AD :: AC : AE, la sécante DE sera parallèle au côté BC. Et si on a la proportion AC : AE ::BC : BK, la sécante EK sera parallèle au côté AB. <u>**Sigle (D.P.C.T)**</u>

<u>**Corollaire I**</u>



On a DE = BK (prop. 6). Or AB : AD ::AC : AE :: BC : BK. Donc AB : AD :: AC : AE :: BC : DE ou AB : AC : BC :: AD : AE : DE. Les trois côtés du triangle ABC sont proportionnels aux trois côtés du triangle ADE. <u>**Sigle : théorème de Thalès**</u>

<u>**Corollaire II**</u>

Ainsi, en général, si on coupe deux lignes qui concourent en un point par un nombre quelconque de parallèles, la première ligne et ses parties seront proportionnelles à la seconde ligne et à ses parties. <u>**Sigle : (F.P)**</u>

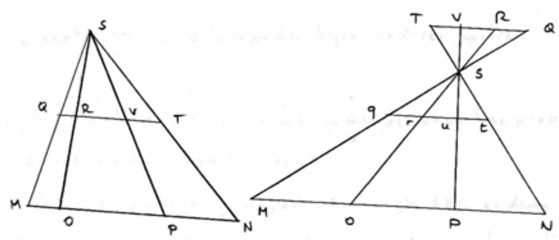
<u>**Corollaire III**</u>

Par là on divise une ligne donnée en parties proportionnelles à des lignes données ou à des nombres donnés.

<u>**Corollaire IV**</u>

Si on partage l'angle A du triangle ABC en deux parties égales par la droite AD, les parties BD, DC de la base seront proportionnelles aux côtés AB et AC.

<u>**Proposition 3 - Théorème**</u>



Si par un point S on mène à une droite MN un nombre quelconque de lignes SM, SO, SP, SN et qu'on tire parallèlement à MN la droite QT qui coupe ces lignes aux points Q, R, V, T, les parties de la ligne QT seront proportionnelles aux parties de la ligne MN, c'est-à-dire : QR : MO :: RV : OP :: VT : PN ou bien QR : RV :: VT : MO :: OP : PN. <u>**Sigle : (F.S)**</u>

<u>**Corollaire**</u>

QR + RV + VT : MO + OP + PN :: QR : MO :: RV : OP ::VT : PN, c'est-à-dire QT : MN :: QR : MO :: RV : OP :: VT : PN. Or QR : MO :: SQ : SM :: SR : SO. Donc, QT : MN :: SQ : SM :: ST : SN. <u>**Sigle : théorème de Thalès**</u>

<u>**Proposition 1 - Théorème**</u>

Deux triangles ABC, DEF sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

Proposition 2 - Théorème

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle compris entre deux côtés proportionnels.

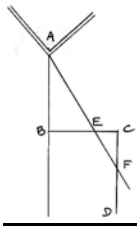
ANNEXE X 1, d

Proposition 6 - Problème

Déterminer la distance BA du point B où l'on veut ouvrir la tranchée sur la capitale d'une demi-lune à l'angle saillant A du chemin couvert.

M. le Maréchal de Vauban donne ce problème dans son traité de l'attaque et de la défense des places.

On tire BC perpendiculaire à AB et l'on porte un certain nombre de parties égales. A l'un des points de la division on place le point E. En C on élève la perpendiculaire CD. Sur cette droite on prend le point F dans l'alignement de A et C. On mesure CF. On a alors : CE : EB :: CF : BA.



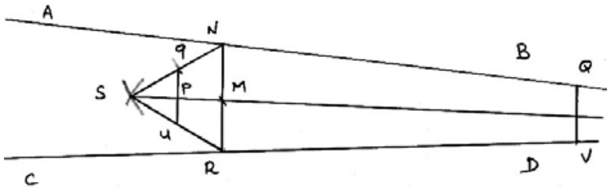
Proposition 7 - Problème

Mesurer la longueur AO d'une rivière.

Proposition 8 - Problème

Par un point M donné, mener une ligne MP qui tende au point de concours de deux lignes AB, CD, lorsque ce point est trop éloigné pour pouvoir être déterminé.

On prend NR quelconque, puis NRS triangle équilatéral. QU parallèle à NR et Sq = QV et qu parallèle à NR. On a alors : NR : qu :: SN : Sq. Or Sq = QV. Donc NR : qu :: SN : QV. Or NR = SN. Donc qu = QV = Sq. De plus NM : MR :: qp : pu ou NM : MR :: QP : PV. Donc MP, AB, CD, vont concourir en un même point.



Proposition 9 - Problème

Diviser une échelle en parties égales. Puis construction de l'échelle de mille parties.

ANNEXE XI 1, a **ANNEXE XI : LEGENDRE**

9 ventôse an VIII (28 février 1800).

Programme d'admission à l'école polytechnique [...].

Programme - Première observation : la considération de l'infini ne sera point admise dans les lignes proportionnelles, ni dans la mesure des cercles.

19 septembre 1809 : Nouveau plan d'études des Lycées.

Des livres classiques § IV - Titre II - Mathématiques.

Dans la première et seconde année d'humanité, on enseignera :

- la géométrie, d'après les éléments de Legendre ou ceux de Lacroix.

28 septembre 1814 : Règlement des études des Lycées et des collèges.

Livres indiqués pour la classe de seconde. Mathématiques : géométrie de M. Legendre ou de M. Lacroix.

ANNEXE XI 1, b

Définitions

3) La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

4) Toute ligne qui n'est ni droit, ni composée de lignes droites est une ligne courbe. Ainsi, AB est une ligne droite, ACDB est une ligne brisée ou composée de lignes droites et AEB est une ligne courbe.

10) Lorsque la ligne droite AB rencontre une autre ligne CD, de telle sorte que les angles adjacents BAC, BAD soient égaux entre eux, chacun de ces angles s'appelle un angle droit et la ligne AB est dite perpendiculaire sur CD.

22) Deux lignes sont dites parallèles lorsque, étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre.

Axiomes

1) Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

2) Si à des quantités égales, on ajoute des quantités égales, les sommes sont égales.

3) Si à des quantités égales, on retranche des quantités égales, les restes seront égaux.

4) Si deux quantités contiennent une troisième le même nombre de fois, elles seront égales entre elles.

6) Le tout est plus grand que sa partie.

8) D'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule droite.

9) Deux grandeurs, lignes, surfaces ou solides sont égaux, lorsque étant placés l'une sur l'autre, ils coïncident dans toute leur étendue.

ANNEXE XI 1, c

Proposition 1

Les angles droits sont tous égaux entre eux.

Proposition 2

Toute ligne droite CD qui rencontre une autre AB fait avec celle-ci deux angles adjacents ACD, BCD, dont la somme est égale à deux droits.

Proposition 3

Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident l'une avec l'autre dans toute leur étendue et ne forment qu'une seule et même ligne.

Proposition 4

Si deux angles adjacents ACD, DCB valent ensembles deux angles droits, les deux côtés AC et CB seront en ligne droite.

Proposition 5

Toute les fois que deux lignes droites AB, DE se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.

Proposition 6

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

Proposition 7

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Proposition 8

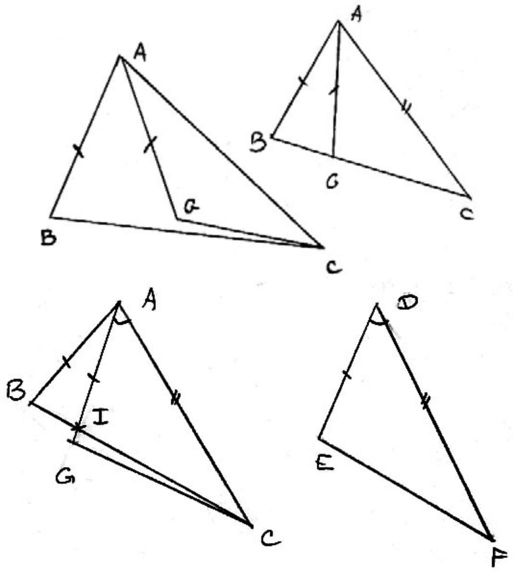
Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

Proposition 9

Si d'un point O pris au dedans du triangle ABC, on mène aux extrémités d'un côté BC les lignes OB, OC, la somme de ces lignes sera moindre que celle des côtés AB, AC.

Proposition 10

Si les côtés AB, AC du triangle ABC sont chacun égaux aux deux côtés DE, DF du triangle DEF, chacun à chacun, si en même temps, l'angle BAC compris par les premiers est plus grand que l'angle EDF compris par les seconds, je dis que le troisième côté BC du premier triangle sera plus grand que le troisième EF du second.



On construit CAG = EDF avec AG = DE (=AB). Or, par hypothèse, AC = DF, donc d'après (prop. 6) GAC et EDF sont des triangles égaux et ainsi GC = EF. Trois cas se présentent :

1er cas : GC < GI + IC ; AB < AI + IB Donc GC + AB < GI + IC + AI + IB. Soit encore GC + AB < AG + BC. Or AB = AG. Donc GC < BC (axiome 3) et de plus GC = EF donc EF < BC.

2ème cas : G est sur [BC]. C'est évident GC = EF < BC (axiome 6).

3ème cas : G est à l'intérieur du triangle ABC. D'après la (prop. 9), AG + GC < AB + BC. Or

AG = AB, donc GC < BC et EF < BC.

Proposition 11

Deux triangles qui sont équilatéraux entre eux sont équiangles.

Proposition 12

Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Proposition 13

Réciproquement, si deux angles sont égaux dans un triangle, les côtés opposés le seront et le triangle sera isocèle.

Proposition 14

De deux côtés d'un triangle celui-là est le plus grand qui est opposé à un plus grand angle, et réciproquement, de deux angles d'un triangle celui-là est le plus grand qui est opposé à une plus grand côté.

Proposition 15

D'un point A donné hors d'une droite DE, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

Proposition 16

Si d'un point A situé hors d'une droite DE on mène la perpendiculaire AB sur cette droite et différentes obliques AE, AC, AD, etc., à différents points de cette droite :

la perpendiculaire AB sera plus courte que toute oblique ; les deux obliques AC, AE menées de part et d'autre de la perpendiculaire à des distances égales BC, BE seront égales.

Proposition 17

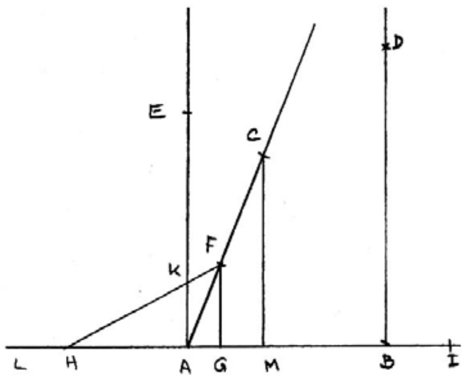
Si par le point C, milieu de la ligne AB, on élève la perpendiculaire EF sur cette ligne : tout point de la perpendiculaire sera également distant des deux extrémités de la ligne AB ; tout point hors de la perpendiculaire sera inégalement distant des extrémités A et B.

Proposition 19

Si deux lignes droites AC, BD sont perpendiculaires à une troisième AB, ces deux lignes seront parallèles, c'est-à-dire qu'elles ne pourront se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge.

Proposition 20

La ligne BD étant perpendiculaire à AB, si une autre ligne AC fait avec AB un angle aigu BAC, je dis que les lignes AC et BD, prolongées suffisamment, se rencontreront.



On supposera AC > AF ; F est sur AC. On trace la perpendiculaire à AB passant par F (prop. 15). Elle coupe AB en G. G n'est pas en A, car BAF n'est pas droit. Ce point ne peut pas tomber non plus dans la direction AL, car s'il tombait par exemple en H, on tracerait la droite AE perpendiculaire à AB en A. Elle rencontrerait FH en K. KH et KA seraient deux perpendiculaires à AL passant par K, ce qui est contradictoire avec (prop. 15). Donc G est du côté de B, dans la direction de A vers I. On trace ensuite CM perpendiculaire à AB passant par C (prop. 15). Elle coupe AB en M. M ne peut pas être en G, car sinon CGI serait droit, ainsi que FGI, ce qui n'est pas, car la partie n'est pas égale au tout (axiome 6). Le point M ne peut pas tomber dans la direction GL grâce à un raisonnement identique au précédent *mutanti mutandi*. Donc M tombe dans la direction GI, avec AM > AG, car si CA > FA, la perpendiculaire CM sera plus éloignée de A que la perpendiculaire FG. Si on suppose, par exemple, que CM est la dernière perpendiculaire la plus éloignée de A, on pourrait démontrer, comme précédemment, qu'en prenant un point P sur le prolongement de AC, PN tomberait à une distance AN plus plus grande que AM. Donc les perpendiculaires abaissées de différents points de AC sur AI passent à des distances de A aussi grandes que l'on veut. Donc il y en aura une qui passera par B.

Proposition 21

Si deux droites AC et BD font avec une troisième AB deux angles intérieurs CAB, ABD, dont la somme soit égale à deux droits, les deux lignes AC et BD seront parallèles.

Proposition 22

Si deux lignes AI, BD font avec une troisième AB deux angles BAI, ABD dont la somme est moindre que deux droits, les lignes AI et BD, prolongées, se rencontreront.

Corollaire

Par un point A donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une ligne donnée. Car si AC et BD sont parallèles, toute autre ligne AI ou AM prises d'un côté ou de l'autre de AC est telle que la somme des angles intérieurs est plus grande ou plus petite que deux droits.

Proposition 23

Si deux lignes parallèles AB, CD, sont rencontrées par une sécante EF, la somme des deux angles intérieurs AGO, GOC, sera égale à deux angles droits.

Corollaire I

Toute ligne perpendiculaire à l'une des parallèles est perpendiculaire à l'autre, car si GOC est droit, AGO aussi.

Corollaire II

AGO + GOC vaut deux droits et GOD + GOC vaut deux droits d'après (prop. 2). Avec (axiome. 3) on obtient AGO = GOD. Or (prop. 5) donne AGO = EGB et GOD = COF. De même AGE = BGO = DOF = GOC.

Scholie

AGO, GOC sont des angles intérieurs d'un même côté. AGO et GOD des angles alternes-internes. EGB et BOD des angles internes-externes (correspondants aujourd'hui). EGB et COF des angles alternes externes.

Réciproquement : Si les angles ainsi dénommés sont égaux, on peut conclure que les lignes auxquelles ils se rapportent sont parallèles.

Proposition 25

Deux parallèles sont partout également distantes.

Proposition 27

Si on prolonge le côté CA d'un triangle vers D, l'angle extérieur BAD sera égal à la somme des deux intérieurs opposés B et C.

Proposition 28

Les trois angles d'un triangle pris ensembles valent deux angles droits.

Proposition 30

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, ainsi que les angles opposés.

BD est commun aux deux triangles ABD et DBC. De plus, AD et BC sont parallèles (déf. 17) donc (prop. 23) on a ADB = DBC. AB et DC sont parallèles, donc on a aussi ABD = BDC. Ainsi, d'après (prop. 7) les triangles ABD et DBC sont égaux donc AB = DC, BC = DA et A = C. De plus ADC = ABC car ADC = ADB + BDC et ABC = ABD + DBC.

ANNEXE XI 1, d

Livre III

Les proportions des figures

Définitions

1 - J'appellerai figures équivalentes celles dont les surfaces sont égales. Deux figures peuvent être équivalentes quoique très dissemblables. Par exemple, un cercle peut être équivalent à un carré, un triangle à un rectangle, etc. La dénomination de figures égales sera conservée à celles qui, étant appliquées l'une sur l'autre, coïncident dans tous leurs points. Tels sont deux cercles dont les rayons sont égaux, deux triangles dont les trois côtés sont égaux chacun à chacun, etc.

2 - Deux figures sont semblables lorsqu'elles ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. Par côtés homologues, on entend ceux qui ont la même position dans les deux figures, ou qui sont adjacents à des angles égaux. Ces angles eux-mêmes s'appellent angles homologues.

N.B. - Pour l'intelligence de ce livre et des suivants, il faut avoir présente la théorie des proportions, pour laquelle nous renvoyons aux traités ordinaires d'arithmétique à d'algèbre.

Suite 1 du N.B. :

Si on a la proportion A : B :: C : D, on sait que le produit des extrêmes A x D est égal au produit des moyens B x C.

Cette vérité est incontestable dans les nombres. Elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres. Et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple si A, B, C, D sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité. Alors, A, B, C, D, représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable. Et la proportion entre les lignes A, B, C, D devient une proportion de nombre.

Suite 2 du N.B. : Le produit des lignes A et D, qu'on appelle aussi leur rectangle, n'est donc autre chose que le nombre d'unité linéaires contenues dans A, multiplié par le nombre d'unités linéaires contenues dans B et on conçoit facilement que ce produit peut et doit être égal à celui qui résulte semblablement des lignes B et C.

Les grandeurs A et B peuvent être d'une espèce, par exemple des lignes et les grandeurs C et D d'une autre espèce, par exemple des surfaces. Alors, il faut toujours regarder ces grandeurs comme des nombres.

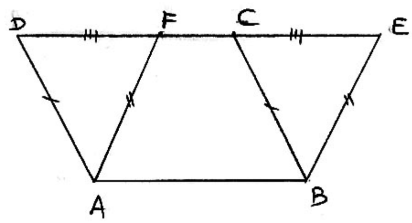
En général, dans toutes les opérations qu'on fera sur les proportions, il faut toujours regarder les termes de ces proportions comme autant de nombres chacun de l'espèce qui lui convient, et on n'aura aucune peine à concevoir ces opérations et les conséquences qui en résultent.

ANNEXE XI 1, e

Proposition 1

Les parallélogrammes qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont équivalents.

ABCD et ABEF ont même hauteur, donc FE et DC sont parallèles à AB et donc confondues (prop. 25). De plus AD = BC, AF = BE et FE = AB (prop. 30-1) donc DC = FE (axiome. 1) et ainsi DE - DC = DE - FE (axiome. 3). Les triangles DAF, CBE sont donc équilatéraux entre eux, donc égaux (prop. 11) et ont donc la même aire. Or aire ABED - aire ADF = aire ABED - aire CBE (axiome. 3). Donc aire ABEF = aire ABCD.



Corollaire

Tout parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle ABEF de même base et de même hauteur.

Proposition 2

Tout triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD qui a même base et même hauteur.

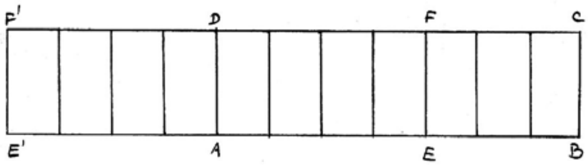
Corollaire 1

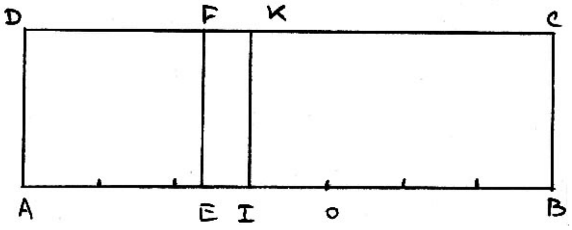
Donc un triangle ABC est la moitié du rectangle BCEF de base BC et de hauteur AO.
Car BCEF et ABCD sont équivalents (prop. 1 - 3)

Corollaire 2

Tous les angles qui ont des bases et des hauteurs égales sont équivalents.

Proposition 3





Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

1er cas : AB , AE commensurables

Soient ABCD et AEFD deux rectangles ayant pour hauteur AD. On se place dans le cas où AB : AE :: 7 : 4. ABCD contient 7 rectangles et AEFD, 4. Donc ABCD : AEFD :: AB : AE. Dans le cas général, on pourra toujours effectuer un découpage de la sorte.

2ème cas : AB, AE incommensurables

Dans la dernière proportion, en conservant les trois premiers termes, on suppose que le quatrième sera plus petit ou plus grand que AE.
On le suppose plus grand : AO > AE et que l'on a ABCD : AEFD :: AB : AO (cela est réalisable grâce à des propriétés arithmétiques de proportions numériques qui assurent l'existence de la quatrième proportionnelle (Arith. Bez 179). AO > AE entraîne que O est sur le segment [AB]. On divise AB en parties égales et plus petites que EO. Il y aura au moins un point de division I entre E et O. On trace IK perpendiculaire à AB. AB et AI sont commensurables. Ainsi, on aura : ABCD : AIKD :: AB : AI, mais par hypothèse, ABCD : AEDF :: AB : AO. Les antécédents sont égaux, donc les conséquents sont proportionnels (arith. Reynaud 175) AIKD : AEFD :: AI : AO. Or AO > AI et aire AEFD < aire AIKD, ce qui est contradictoire (prop 14 Livre 5 - Euclide). De même on montrerait la même chose en supposant AO < AE. Ainsi AO = AE et finalement ABCD : AEFD :: AB : AE.

Proposition 4

Deux rectangles quelconques ABCD et AEGF sont entre eux comme le produit de bases multiplié par les hauteurs, de sorte que l'on a ABCD : AEGF :: AB x AD : AE x AF.

Proposition 5

L'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire

Les parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs et les parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Proposition 6

L'aire d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

Corollaire

Deux triangles sont entre eux comme leurs bases s'ils sont de même hauteur et deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs (arith. Bezout 170).

Proposition 15

La ligne DE menée parallèlement à la base d'un triangle ABC divise les côtés AB et AC proportionnellement de sorte qu'on a : AD : DB :: AD : EC. Sigle : (D.P.C.T)

Corollaire I

Componendo (arith. Bez 184) AD + DB : AD :: AE + EC : EC ; AD + DB : DB :: AE + EC : EC. Soit AB : AD :: AC : AE , AB : BD :: AC : CE (ou AD : AB :: AE : AC)

Corollaire II

Si entre deux droites AB, CD, on mène tant de parallèles qu'on voudra, AC, EF, BD, etc., ces droites seront coupées proportionnellement et on aura : AE : CF :: EG : FH :: GB : HD. Sigle : (F.P)

Proposition 16

Réciproquement, si les côtés AB et AC sont coupés proportionnellement par la ligne DE, de sorte qu'on ait AD : DB :: AE : EC, je dis que la ligne DE sera parallèle à la base BC.
Car si DE n'est pas parallèle à BC, on trace DO parallèle à BC et on a alors d'après (prop. 15 - 3) AD : DB :: AO : OC. Or par hypothèse AD : DB :: AE : EC donc (arith. Rey 174) AO : OC :: AE : EC. Or AE > AO et EC < OC, ce qui est impossible.

Proposition 17

La ligne AD qui divise en deux parties égales l'angle BAC d'un triangle divisera la base BC en deux segments BD, DC proportionnels aux côtés adjacents AB, AC, de sorte qu'on aura BD : DC :: AB : AC.

Proposition 18

Deux triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels et sont semblables. Sigle : (T.E)

Corollaire

Il suffit, en fait, que deux angles soient égaux chacun à chacun, car alors les troisièmes seront égaux.

Proposition 19

Deux triangles qui ont les côtés homologues proportionnels sont équiangles et semblables.

Proposition 20

Deux triangles qui ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels sont semblables.

Proposition 22

Les lignes AF, AG, etc. menées par le sommet d'un triangle divisent proportionnellement la base et sa parallèle DE, de sorte qu'on a DI : BF :: IK : FG :: KL: GH.

Proposition 23

Si de l'angle droit A d'un triangle rectangle on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse, les deux triangles partiels ABD, ADC seront semblables entre eux et au triangle total ABC.

Problème I : Diviser une ligne droite donnée en tant de parties égales qu'on voudra, ou en parties proportionnelles données.

1 - Diviser AC = 1/5.AG ; AI = 1/5.AB.

2 - Diviser [AB] en parties proportionnelles aux lignes données P, Q, R. D'après le corollaire II (prop. 15 - 3) AI, IK, KB sont proportionnels à AC, CD, DE, donc à P, Q et R.

Problème II : Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données A, B, C. DA : DB:: DC : DF.

ANNEXE XII : BLANCHET

ANNEXE XII 1, a

Le changement important, le seul dont je crois devoir parler, est celui qui se rapporte à la mesure du cercle et des corps ronds. J'ai cru, pour la mesure de ces figures, devoir substituer au mode de démonstration par la réduction par l'absurde, la méthode des limites. Cette méthode, la seule applicable dans les parties élevées des mathématiques, a d'ailleurs, sur la première, l'avantage de donner aux élèves une marche sûre pour la découverte de nouveaux théorèmes.

ANNEXE XII 1, b

Livre premier

Proposition première

Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.

Corollaire

Tous les angles droits sont égaux.

Proposition 11

Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun et si en même temps, l'angle compris par les premiers est plus grand que l'angle compris par les seconds, je dis que le troisième côté du premier triangle sera plus grand que le troisième côté du second.

Proposition 14

Si dans un triangle deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux.

Proposition 16

D'un point donné hors d'une droite : 1° - on peut abaisser une perpendiculaire sur cette droite - 2° on n'en peut mener qu'une.

Demande

Si deux droites AB, DC, sont l'une perpendiculaire et l'autre oblique sur CB, ces deux lignes prolongées se rencontreront.

Proposition 23

Par un point on peut mener une parallèle à une droite et on n'en peut mener qu'une seule.

Proposition 24

Deux parallèles forment avec une transversale :

1 - des angles alternes-internes égaux.
2 - des angles alternes-externes égaux.
3 - des angles correspondants égaux.
4 - des angles intérieurs d'un même côté de la sécante, dont la somme est égale à deux droits.

Problème 18

Trouver la plus grande commune mesure de deux lignes AB et CD et leur rapport numérique.

La plus grande comme mesure des deux lignes ne saurait surpasser la plus petite, mais elle pourrait être égale. On suppose que ce n'est pas le cas. On porte par exemple CD sur AB. On trouve AB = 2 CD + IB. La plus grande commune mesure entre AB et CD est la même que celle entre CD et IB. Car toute commune mesure divisant AB et CD divisera AI (car elle divise CD) et divisera IB (car elle divise AB). Elle sera donc une commune mesure de CD et IB. Réciproquement, toute commune mesure de CD et de IB sera une commune mesure de AB et CD, car, étant exactement contenue dans IB et CD, elle sera contenue exactement dans IB et dans AI. Ainsi, toutes les communes mesures de AB et de CD sont les mêmes que celles de CD et IB. La plus grande commune mesure est donc la même. On porte alors IB sur CD et on suppose que CD = IB + KD. On prouvera, comme précédemment, que la plus grande commune mesure entre CD et IB est la même qu'entre IB et KD. On porte alors KD sur IB. Si, par exemple, IB = 2 KD, KD sera la plus grande commune mesure des lignes AB et CD. On a d'ailleurs : CD = 3 KD et AB = 8 KD, donc le rapport des lignes est 3/8 ou 8/3.

<u>Remarque</u> : On suppose ici que les restes sont nuls. Il en est toujours ainsi, quand les deux lignes ont une commune mesure. Dans le cas où elles sont incommensurables, on arrive à des reste plus petits que toute grandeur assignable. Car on a :

$A = B.q_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < B$. Mais $r_1 < \dfrac{A}{2}$ car si B n'est contenu $B = r_1.q_2 + r_2$ avec $r_2 < r_1$ qu'une fois dans A on aura $B > \dfrac{A}{2}$, $r_1 = r_2.q_3 + r_3$ avec $r_3 < r_2$ sinon B est contenu plus d'une fois $r_2 = r_3.q_4 + r_4$ avec $r_4 < r_3$ et cela aura lieu à plus forte raison, donc $r_1 < \dfrac{A}{2}$. De même on a $r_2 < \dfrac{r_1}{2}$ d'où $r_2 < \dfrac{A}{4}$; $r_3 < \dfrac{r_2}{2}$ d'où $r_3 < \dfrac{A}{8}$; $r_4 < \dfrac{r_3}{2}$ d'où $r_4 < \dfrac{A}{16}$ ... Si l'opération se prolongeait indéfiniment, on arriverait à des restes aussi petits qu'on voudrait. Donc s'il y a une commune mesure, on arrivera à un reste nul. Et la plus grande commune mesure sera le dernier reste non nul. Si les grandeurs sont incommensurables, on tomberait sur des restes plus petits que la commune mesure, ce qui est absurde.

Dans le cas où les lignes sont incommensurables, on pourra, après un certain nombre d'opération, négliger le dernier reste. Le reste précédent servira alors de commune mesure, et conduira à une valeur approchée.

Problème 19

Deux angles A et B étant donnés, trouver leur commune mesure, s'ils en ont une, et de là, leur rapport en nombre.

Livre III

Mesure des polygones - Similitude

Proposition 3

Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Proposition 16

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles.

ANNEXE XIII : Lacroix

ANNEXE XIII 1, a

Programme d'admission à l'école Polytechnique

9 ventôse an VIII (28 février 1800) : L'importante circulaire aux professeurs de mathématiques des écoles centrales accompagnant l'envoi des programmes est l'œuvre de Sylvestre François Lacroix. Programme - Première observation : la considération de l'infini ne sera point admise dans les lignes proportionnelles, ni dans la mesure du cercle.
19 frimaire an XI (10 décembre 1802) : L'enseignement des sciences des Lycées.
20 germinal an XI (10 avril 1803) : Programme et livres de sciences des Lycées. Conformément à l'arrêté du 19 frimaire an XI, la commission pour les mathématiques, composée de Laplace, Monge et Lacroix, établit le programme de science des Lycées et fixe la liste des livres devant servir à leur enseignement. Elle choisit des livres existant en mathématiques, ceux de Lacroix, et propose la rédaction de nouveaux ouvrages d'enseignement en sciences physiques.
1ère partie de la géométrie de Lacroix en quatrième classe. Matin et les éléments de la sphère de Biot.
2ème partie de la géométrie de Lacroix en troisième classe. Soir et les éléments d'astronomie de Biot.
19 septembre 1809 : Nouveau plan d'étude des Lycées. Des livres classiques § IV - Titre III. Mathématiques. Dans la première et la seconde année d'humanité, on enseignera : la géométrie, d'après les éléments de Lacroix ou de Legendre.
28 septembre 1814 : Règlement des études des Lycées et des collèges. Livres indiqués pour la classe de seconde. Mathématiques. Géométrie de M. Legendre ou de M. Lacroix.

ANNEXE XIII 1, b

Notions générales sur l'étendue

Nous les considérons, par la pensée, chacune en particulier, en faisant abstraction d'une ou de deux dimensions du corps, qui d'ailleurs, ne sauraient être anéanties. [...].
Par le raisonnement, nous atteignons cette limite. Par le calcul, nous pouvons en approcher indéfiniment, tandis que l'exactitude des opérations mécaniques trouve ses bornes dans l'imperfection inévitable des instruments.

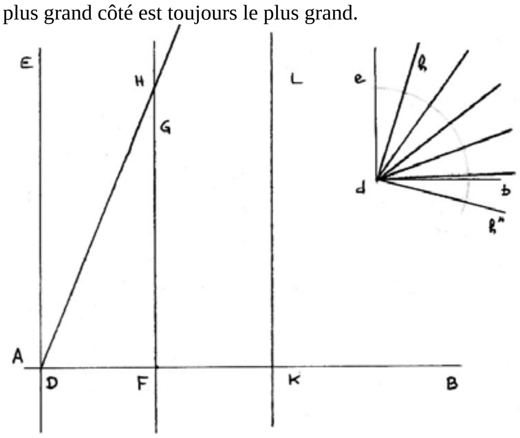
ANNEXE XIII 2, a

Première partie
Section première
Définitions et notions préliminaires

4 - Mesurer la distance de deux point ou la longueur d'une droite, c'est chercher combien de fois cette droite en contient une autre, prise pour unité, ce qui se fait en portant la seconde sur la première, autant qu'il est possible. Et si l'on trouve un reste, il faut tacher d'évaluer ce reste en fraction de la seconde ou de l'unité.
[...] Cette recherche est donc, par rapport aux lignes, ce qu'est celle du commun diviseur à l'égard des nombres.
5 - **Problème : Deux droites étant données, trouver leur commune mesure, ou au moins le rapport approché de l'une à l'autre.**
[...] La comparaison des restes successifs doit être poussée jusqu'à ce qu'on en trouve qui soit contenu un nombre de fois exact dans celui qui précède, ou qui soit tel que le reste qu'il pourrait laisser dans cette opération échappe au sens par sa petitesse. C'est ainsi qu'on parviendra toujours à un résultat au moins approché.

Note : [...] Et deux rapports incommensurables devront être regardés comme égaux, dès qu'on prouvera que, quelque loin que soit poussée l'approximation pour l'un et pour l'autre, leur différence demeurera toujours nulle.
8 - Deux angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement.
9 - La position respective de deux droites dépend de l'angle qu'elles font entre elles. Parmi toutes les situations qu'une droite peut avoir à l'égard d'une autre qu'elle rencontre, la plus remarquable est la situation perpendiculaire. C'est par ce mot que l'on désigne le cas où une droite AC, tombant sur une autre AB, fait avec cette dernière, prolongée en deçà du point A en AD deux angles BAC et DAC égaux entre eux.
12 - Les angles opposés par le sommet, que forment deux droites en se coupant, sont égaux.
15 - Remarque : Puisque la ligne AB est le plus court chemin pour aller du point A au point B, il s'en suit que la somme des deux autres côtés AC et BC du triangle ABC surpasse AB.
Mais si l'on prend dans l'intérieur du triangle ABC, un point quelconque E, la somme de AE et de EB sera moindre que celle des droites AC et BC qui les enveloppent.
16 - **Théorème : Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, ils sont égaux dans toutes les autres parties.**
18 - **Théorème : Lorsque deux triangles ont , chacun à chacun, un côté égal adjacent à deux angles égaux, ces triangles sont parfaitement égaux.**
19 - Théorème : **Si les côtés A'B' et B'C' du triangle A'B'C' sont respectivement égaux aux côtés AB et BC du triangles ABC, et que l'angle B' compris entre les deux premiers soit moindre que l'angle B, compris entre les deux derniers, le côté A'C' opposé à l'angle B' dans le triangle A'B'C' sera moindre que le côté AC opposé à l'angle B dans le triangle ABC.**
20 - **Corollaire : Deux triangles dont les trois côtés sont égaux chacun à chacun sont égaux dans toutes les parties.**
26 - **Théorème : Les lignes AC et CB qui partent d'un point quelconque C de la droite CD perpendiculaire sur AB et qui s'écartent également du pied de cette perpendiculaire, c'est-à-dire du point D, où elle rencontre la ligne AB, sont égales, et celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues.**
On a AD = DB et d'après (9) les angles CDA et CDB sont égaux. De plus DC est commun aux deux triangles ADC et CDB donc, d'après (16) ils sont égaux et ainsi BC = AC. On prolonge maintenant CD de façon à avoir CD = C'D. On aura d'après (15) CE + C'E > CA + C'A.
Or les angles ADC et ADC' sont égaux (9) et par construction CD = C'D et AD est en commun. D'après (16) on conclut que les triangles CAD et C'AD sont égaux et ainsi CA = C'A. On prouvera de même que CE = C'E. Donc 2 CE > 2 CA d'où CE > CA.
27 - 1er corollaire : Si deux obliques sont égales, elles ne tombent pas du même côté de la perpendiculaire.
28 - 2ème corollaire : **1** - La perpendiculaire CD est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener du point C sur la droite AB et est par conséquent la mesure naturelle de la distance entre ce point et cette droite.
2 - Qu'elle a tous ses points à égale distance des points A et B.
3 - Qu'un point G pris hors de la perpendiculaire est inégalement éloigné des points A et B, car on a BG < BF + FG, d'où BG < AG.
32 - **Théorème : D'un point C pris hors d'une droite AB on ne peut mener sur cette droite qu'une seule perpendiculaire.**
33 - 1er corollaire : Deux droites DE et FG perpendiculaires à une même droite AB ne se rencontrent point car si elles se rencontraient, on pourrait, du point où elles se coupent, abaisser deux perpendiculaires sur la droite AB, ce qui est absurde.
34 - **2ème corollaire : 1 - Deux triangles ABC, A'B'C' qui ont chacun un angle droit, l'un en A l'autre en A' sont égaux lorsque leurs côtés BC et B'C' opposés aux angles droits, ainsi qu'un de leurs autres angles B, et B' par exemple, sont égaux. 2 - L'égalité aurait lieu encore si les côtés AC et BC étaient respectivement égaux aux côtés A'C' et B'C'.**

36 - <u>Théorème</u> : Lorsque deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés sont égaux. Et lorsqu'ils sont inégaux, le plus grand des deux est opposé au plus grand angle.
37 - <u>Corollaire</u> : Il suit de là que si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposé sont égaux entre eux, car s'ils étaient inégaux, l'angle opposé au plus grand des deux serait plus grand que l'autre angle. Le même raisonnement prouve aussi que quand deux angles sont inégaux, le plus grand des deux côtés est celui qui est opposé au plus grand des deux angles, puisque l'inégalité des deux angles entraîne celle des côtés et que, quand deux côtés sont inégaux, l'angle opposé au plus grand côté est toujours le plus grand.
40 - <u>Théorème</u> : Une droite qui est perpendiculaire à une autre est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre, et il n'y a, par conséquent, sur un plan, que les droites perpendiculaires à une même ligne qui ne se rencontrent pas ou qui soient parallèles entre elles. (*)
(*) C'est dans la difficulté de prouver immédiatement cette proposition, que réside l'imperfection de la théorie des parallèles [...].
(L'auteur donne ensuite la démonstration de M. Bertrand).



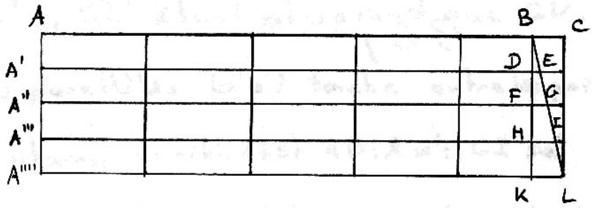
Si on ajoute un angle quelconque **e** et **h** un nombre de fois suffisant à lui même, on parviendra à former un angle total **edh"** plus grand que l'angle droit edb. Si on prend FK = FD et qu'on élève KL perpendiculaire sur AB et que l'on plie ensuite la figure le long de FG, la bande EDFG couvrira exactement la bande GFKL, car les angles GFD et GFK étant droits, la partie DF tombera sur FK et comme DF = FK, le point D se placera sur le point K. De plus l'angle FKL étant droit aussi bien que EDF, la ligne DE se placera sur KL. Cela posé, puisqu'on peut prendre sur la droite indéfinie DB autant de parties égales à DF, sans arriver à son terme, on formera un nombre aussi grand qu'on voudra de bandes égales à EDFG, sans pouvoir couvrir l'espace indéfini compris entre les deux côtés de l'angle droit EDB. Il suit de là que, considérés relativement à leurs limites latérales, la surface de l'angle **edh** est plus grande que celle de la bande EDFG. Si donc on construit dans cette bande, sur la droite ED, un angle EDH égal à **edh**, il ne pourra demeurer contenu entre les lignes ED et FG. Son côté DH coupera nécessairement la droite FG.
41 - <u>Théorème</u> : Lorsque deux droites DE et FG sont parallèles, toutes les droites telles que LM qui sont perpendiculaires sur l'une, le sont en même temps sur l'autre.
43 - <u>Théorème</u> : Lorsque deux droites DE et FG, parallèles entre elles, sont coupées par une droite quelconque IH, les angles ELI et GMI qu'elles font avec cette dernière d'un même côté, l'un en dedans, l'autre en dehors, sont égaux entre eux.
44 - <u>Théorème</u> : Si deux droites DE et FG font avec une troisième IH et du même côté par rapport à celle-ci, des angles égaux ELI, GMI, l'un en dedans et l'autre en dehors, ces deux droites ont parallèles entre elles.
46 - <u>Théorème</u> : Lorsque deux parallèles DE et FG sont coupées par une troisième ligne IH :

1 - les angles correspondants sont égaux.
2 - les angles alternes-internes sont égaux.
3 - les angles alternes-externes sont égaux.
4 - les angles internes du même côté, réunis, forment deux angles droits.
5 - les angles externes du même côté, réunis, forment deux angles droits.
6 - lorsque l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites DE et FG son nécessairement parallèles.

47 - <u>Corollaire</u> : [...] Il s'ensuit que les droites pour lesquelles ces propriétés n'ont pas lieu ne sont pas parallèles.
50 - <u>Théorème</u> : Les angles ABC et DEF qui ont les côtés parallèles et l'ouverture placée dans le même sens, sont égaux.
54 - <u>Théorème</u> : Les parties AC et BD de deux droites parallèles interceptées entre deux droites parallèles, sont égales entre elles, et réciproquement.
56 - <u>Théorème :</u> Si deux droites quelconques AF et GM sont coupées par un nombre quelconque de parallèles, AG, BH, CI, etc., menées par des point pris à des distances égales sur la première; les parties GH, HI, IK, etc. de la seconde seront aussi égales entre elles. <u>Sigle : (P.E)</u>
57 - <u>Corollaire</u> : AB est contenu dans AF autant de fois que GH l'est dans GL. AB : AF :: GH: GL (arith. Bez 182) donne AB : GH :: AF: GL et ainsi (arith. Bez 170) 2 AB : 2 GH :: AF : GL, 3 AB : 3 GH :: AF : GL. C'est-à-dire qu'un nombre quelconque de parties de AF est à un pareil nombre de parties de GM comme AF est à GL.
58 - <u>Théorème</u> : Trois parallèles AG, DK, FM coupent toujours deux droites quelconques AF et GM en parties proportionnelles ou de manière que l'on a : AD : DF :: GK : KM. <u>Sigle (F.P)</u>
59 - <u>1er corollaire</u> : Si on mène dans un triangle une droite OK parallèle à l'un des côtés NM, les deux autres côtés GN et GM seront coupés en parties proportionnelles par cette droite. <u>Sigle : (D.P.C.T)</u>
60 - <u>2ème corollaire</u> : Réciproquement, lorsqu'une droite coupe deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième.
61 - <u>3ème corollaire</u> : La droite BD qui divise en deux parties égales l'un des angles B d'un triangle quelconque ABC, partage le côté opposé AC en deux segments proportionnels aux côtés adjacents, c'est-à-dire que l'on a cette proportion : AD : DC :: AB : BC.
62 - <u>Problème</u> : Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données.
63 - Deux triangles sont semblables, lorsque les angles de l'un sont respectivement égaux aux angles de l'autre et que les côtés qui, dans l'un et dans l'autre, sont opposés aux angles égaux, et que pour cette raison, on nomme côtés homologues, sont proportionnels.
64 - <u>Théorème</u> : Lorsque deux triangles ABC et EDF ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues sont proportionnels, et ils sont par conséquent semblables.
66 - <u>Théorème</u> : Deux triangles sont semblables lorsqu'il ont un angle égal, chacun à chacun, compris entre des côtés proportionnels.
67 - <u>Théorème</u> : Deux triangles qui ont les côtés proportionnels chacun à chacun sont semblables.
69 - <u>Théorème</u> : Tant de lignes AB, AC , AD , AE, AF qu'on voudra, menées par un même point A et rencontrées par deux parallèles GL et BF sont coupées par ces parallèles en parties proportionnelles et les coupent aussi en parties proportionnelles.
<u>Sigle : (F.S)</u>

70 - <u>Problème</u> : Diviser une droite de la même manière qu'une autre est divisée.
71 - La question précédente peut encore se résoudre comme il suit : soit AH la droite à diviser. Sur AP on reporte à la suite les unes des autres, les parties dans lesquelles est partagée la ligne
72 - <u>1er corollaire</u> : Si les parties de la droite BF étaient égales, celles de la droite GL seraient aussi égales entre elles. Il suit de là que le procédé n° 70 et celui du n° 71 peuvent servir à diviser une ligne droite dans un nombre quelconque de parties égales.

73 - <u>2ème corollaire</u> : La division des droites en parties égales, est le fondement de la construction des échelles, c'est-à-dire des droites qui servent à mesurer les autres.
Division par les transversales : AC est divisé en un certain nombre de parties égales et voulant diviser BC en un nombre de parties trop grand pour que chacune de ces dernières puissent être bien distinctes, on mène les perpendiculaires A A"" et CL. On a alors :
BD : BK :: DE : KL ; BF : BK :: FG : KL ; BH : BK :: HI : KL. Or



BD est le ¼ de BK, donc DE l'est aussi de KL ou de BC. BF est le ½ de BK, FG l'est aussi de KL ou de BC. BH étant les ¾ de BK, HI l'est aussi de KL ou de BC. On a de plus A'E égale à AB + ¼ BC ; A"G est égale à AB = 2/4 BC et A'" I est égale à AB + 3/4 BC. Une semblable échelle prend le nom d'échelle des dixièmes quand elle contient dix parallèles à AB parce qu'elle donne alors les dixièmes de BC.
74 - **<u>Théorème</u> : Si de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on nomme hypoténuse :**

1°) cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables et qui le seront par conséquent entre eux.

2°) elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou segments, tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui sera adjacent, et l'hypoténuse entière.

3°) la perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.

ANNEXE XIV : FRANCOEUR

ANNEXE XIV 1, a

113 - Voici un cas bien remarquable dans lequel une équation se partage en deux.
Supposons que les éléments d'une question soient liés par l'équation A + α = B + β, que plusieurs de ces éléments soient variables ensembles et que par leur nature, l'équation doive subsister dans tous les états possibles de grandeur ; qu'enfin quelques termes A, B demeurant constants, tandis que les autres α, β seraient variables et susceptibles de décroître ensembles autant qu'on le veut.
Si A et B ne sont pas égales, on aura A - B = ± K. On en tire β - α = ± K. Les variables α et β conserveraient donc entre elles une différence fixe K, et ne seraient pas de nature à pouvoir être moindres que K, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc A - B = 0
C'est ce qui constitue la méthode des limites, dont nous ferons un fréquent usage par la suite. Quand on peut faire approcher une grandeur d'une autre qui est fixe, de manière à rendre leur différence moindre que toute grandeur donnée, sans cependant qu'elles puissent jamais devenir rigoureusement égales, la seconde est dite limite de la première.

ANNEXE XIV 2, b

<u>Livre troisième</u>
<u>I - Les lignes</u>
<u>Mesure des lignes et des angles</u>

156 - Mesurer une droite, c'est chercher combien de fois sa longueur A en contient une autre B commune et prise pour unité. Et le nombre de fois qu'on trouve, ou le rapport A : B est la mesure cherchée. Il arrive souvent que l'unité B n'est pas contenue un nombre exact de fois dans A. [...]. On cherchera le nombre de fois que A contient B, et le reste R. On divisera de même B par R, puis R par le nouveau reste R', etc., ce qui revient à chercher la commune mesure M entre A et B. Alors M sera contenue un nombre exact de fois par exemple, **a** fois dans A, **b** fois dans B ou A = a M; B = b M et A/B sera égal au rapport a/b. [...] Mais s'il y a toujours un reste à chaque division, l'opération n'a plus de borne, et le rapport A : B ne pouvant être exactement évalué en nombre, est incommensurable. On se contente alors d'une approximation, ce qu'on fait en négligeant celui des restes successifs qu'on juge suffisamment petit.
164 - Lorsque deux droites indéfinies AC , BC se coupent en C, la quantité dont elles sont écartées l'une de l'autre est ce qu'on appelle un angle. C en est le sommet. [...].
165 - Deux angles ACB, A'C'B' sont égaux quand ils peuvent coïncider en les posant l'un sur l'autre.
168 - **Le rapport de deux angles BCA, DON est le même que celui des arcs ba, dn compris entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centre avec le même rayon.**

ANNEXE XIV 2, c

<u>Des perpendiculaires et des obliques</u>

171 - Si l'angle ACB = ACD, BD étant une droite, en pliant la figure suivant AC, CB se couchera sur son prolongement CD. On dit alors que AC est perpendiculaire sur DB ou que l'angle ACB est droit.
172 - Lorsqu'une ligne EC tombe sur une autre BD, les angles adjacents ECB, ECD ont pour somme deux droits. La perpendiculaire AC sur BD rend cela évident.
174 - **Lorsque deux droites DB, AE se coupent en C, les angles**
BCE, ACD opposés au sommet sont égaux
car ACD + ACB = 2 droits = BCE + ACB d'où ACD = BCE.
175 - **Par un point A on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite DE.**
181 - On nomme parallèles deux droites situées sur un même plan et qui, dans leur cours indéfini, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre.

1° - Deux droites CA, BD perpendiculaires à une même ligne KL sont parallèles. Puisque si elles se rencontraient, on aurait d'un point deux perpendiculaires abaissées sur la ligne KL (175).

2° - Deux lignes CA, DB coupées per une sécante HG sont parallèles lorsque les angles AEF et EFD sont égaux.

3° - Si les angles CEG, BFH sont égaux, les lignes CA, DB, sont encore parallèles car étant opposées au sommet à FEA et DFE, ce cas rentre dans le précédent.

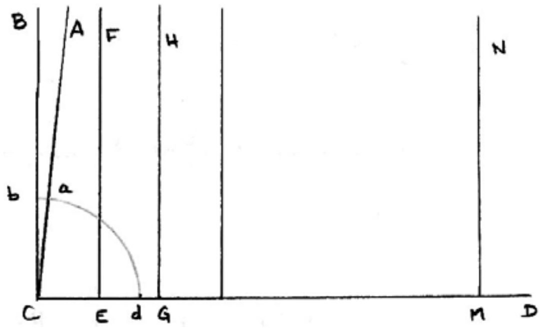
4° - Lorsque l'angle HFB = FEA, car HFB = DFE donne DFE = FEA.

5° - Quand les angles EFB + FEA = 2 droits, car EFB + EFD = 2 droits d'où FEA = EFD.

6° - Quand les angles GEA + HFB = 2 droits car, puisque GEA + FEA = 2 droits, FEA = HFB = EFD.

182 - **Les réciproques de ces proposition sont vraies.**
1°) Lorsque deux droites CA, DB sont parallèles, toute perpendiculaire KL sur l'une l'est aussi sur l'autre.
Il n'est guère d'efforts que les géomètres n'aient tentés pour parvenir à démontrer ce principe, mais aucun n'a pu y réussir. Ils ont simplement dissimulé la difficulté sans la lever.

Au reste, voici ce qu'on a donné de plus lumineux sur cette matière.
Un angle quelconque BCA est contenu dans l'angle droit BCD autant de fois que l'arc ba l'est dans l'arc bd.
Soit n ce rapport : bd/ba = n = BCD/BCA.
Prenons des parties égales EC, EG, ..., et menons les perpendiculaires EF, GH, ..., sur CD. Nous formons ainsi des bandes BCEF, FEGH, ..., toutes égales entre elles, comme on le reconnaît en pliant la figure selon EF, GH, ..., qu'il y ait n de ces bandes ou plus depuis BC jusqu'à MN. Comme la surface entière de l'angle droit BCD surpasse l'étendue BCMN de la somme de ces bandes, on a
BCD > BCMN ou nx BCA > nx BCEF. Partant BCA > BCEF ce qui ne saurait être à moins que CA ne rencontre EF. Quelque soit l'angle BCA, l'oblique CA doit donc couper EF perpendiculaire à CD.



2°) Toute sécante GH qui coupe deux parallèles DB, CA forme les angles alternes-internes égaux DFE = FEA.
3°) Les angles alternes-internes GEC, BFH sont aussi égaux comme opposés aux précédents.
4°) Les angles correspondants BFH, AEF, sont égaux puisque (d'après 2°)BFH = EFD = AEF.
5°) Les angles FEA, EFB internes d'un même côté, sont suppléments l'un de l'autre, ainsi que les angles GEA, HFB externes d'un même côté. Cela se voit aisément.

Donc, lorsque deux parallèles sont coupées par une sécante, les angles sont égaux lorsqu'ils sont de même nature et suppléments lorsqu'ils sont de nature différente (l'un aigu, l'autre obtus).

196 - Deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux lorsqu'ils ont respectivement ou :

1°) deux côtés égaux comprenant un angle égal ou
2°) un côté égal AB = A'B' , ainsi que deux angles égaux placés de la même manière tel que A = A' et B = B' ou A = A' et C = C'.

ANNEXE XIV 2, d

210 - Soient deux droites quelconques AH, ah. Si sur l'une on prend des parties égales AB, BC, CD,... et que par les points de division, on mène des parallèles Aa, Bb, Cc,..., Hh, dans une direction arbitraire, les parties ab, bc, cd, ..., qu'elles interceptent sur ah seront égales entre elles. Sigle : (P.E)
211 - Deux droites AH et ah sont coupées en parties proportionnelles par trois parallèles quelconques Aa, Ea, Hh et AE/EH = ae/eh , car : Sigle (P.E)

1 - Si les parties AH et EH sont commensurables, en portant la commune mesure sur AH, elle sera contenue un nombre de fois exact dans AE et EH. On retombera donc dans le cas ci-dessus.

2 - Si AE et HE sont incommensurables, divisons AE en un nombre arbitraire de parties égales et portons l'une d'elles de E vers H. Soit I le point de division le plus près de H. AE et EH étant commensurables, on a EI/EA = ei/ea et comme EI = EH - EI et ei = eh - hi, il vient EH/EA - HI/EA = eh.ea - hi/ea. Or les distances HI et hi peuvent être rendues aussi petites qu'on voudra, en prenant le nombre de divisions de AE de plus en plus grand, de sorte que l'es points H et h sont les limites de I et de i. Puisque les deuxièmes termes décroissent indéfiniment, le principe fondamental (n° 113) donne donc encore : EH/EA = he/ea.

212 - Une parallèle EB à la base d'un triangle HAC coupe les côtés en parties proportionnelles. Sigle (D.P.C.T)
Réciproquement, si l'on a AE/EB = eh/bc, EB est parallèle à HC, car si cela n'était pas, menant HL parallèle à EB, on aurait AE/EB = HE/BC, donc BL = BC.

ANNEXE XV : DUPIN

ANNEXE XV 1

17 septembre 1849 : Programme scientifique de l'enseignement spécial.

Première année

Les professeurs montreront aux élèves toutes les fois que l'occasion s'en présentera, l'application aux arts ou à l'industrie, des théorèmes qu'ils démontrent en adoptant la méthode suivie dans le cours de géométrie de M. Dupin dans la géométrie de M. Bergery et dans celle de M. Sonnet.
29 - 30 - Lignes proportionnelles. Conditions de similitude des triangles et des polygones quelconques. Faire le plan d'un terrain. Planchett.
31 - Décomposition d'un triangle rectangle en deux triangles semblables au triangle donné.
32 - Rapport entre les aires des polygones semblables.
33 - 34 - 35 - Problèmes élémentaires sur les lignes proportionnelles. Diviser une ligne droite en parties égales ou proportionnelles à des lignes données. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données. Une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Diviser une droite en moyenne et extrême raison.

ANNEXE XV 2, a

Cinquième leçon

Figures proportionnelles : Il ne suffit pas à l'industrie de savoir exécuter une figure symétrique ou égale à une autre. Elle a souvent besoin de produire des figures exactement pareilles à d'autres, mais plus grandes ou plus petites. La géométrie en fournit le moyen, par les propriétés des lignes proportionnelles et des triangles semblables.
On divise AF en parties égales et on trace les parallèles Aa, Bb, ..., Ff, puis les perpendiculaires A1, B2, ..., D4.Tous les triangles ainsi obtenus ont un côté égal (AB = BC = ...) et deux angles correspondants égaux, donc ils sont égaux et ainsi A1 = 12 = ... On mène ensuite les perpendiculaires m1, n1, ..., comme précédemment, on a m1 = m2 = ... et les triangles mn1, no2, op3, ... sont égaux et donc mn = no = op.
Propriété : Donc, enfin, dès qu'une oblique AF est divisée en parties égales par une suite de parallèles Aa, Bb, ..., Dd, ces parallèles divisent, de même, en parties égales, toute autre droite mr qui les coupe.
On fait usage de cette propriété pour diviser une droite donnée, en autant de parties égales qu'on désire.
L'usage des proportions géométriques est infini dans la géométrie et dans l'arithmétique, ainsi que dans leurs applications à d'autres sciences, au commerce, aux opérations de l'industrie, etc. La règle de trois est d'un usage perpétuel dans les calculs de la finance, du commerce et de l'industrie. La géométrie possède aussi sa règle de trois.
Si on connaît A, B, C il est facile de trouver D tel que A : B :: C : D. De plus on aura : OT : OU :: PT : RU ; OT : OU :: QT : US, donc PT : RU :: QT : SU. Les portions PT, QT, RU, SU, de deux parallèles coupées par trois lignes droites parties d'un même point sont proportionnelles. La réciproque de ce principe est également vraie **Sigle : (F.S)**.

Compas de proportion : Pour réduite une figure dans le rapport d'une ligne donnée E à une autre ligne donnée F.
Si deux triangles ABC, abc ont leurs côtés correspondants parallèles, ces côtés sont proportionnels et les triangles sont semblables. On transporte abc sans changer la direction de ses côtés. On prolonge ac et BC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point m. AcmC étant un parallélogramme, nous aurons : AC = cm, cm = BC. Or AB : ab :: AC : ac AB : ab :: BC : Cm ; AB : ab :: cm : ac. Donc AB : ab :: AC : ac :: BC : bc.

ANNEXE XVI : DESDOUIT

ANNEXE XVI 1, a

Première partie

7 - Lorsque deux lignes droites se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre s'appelle angle.

A mesure que l'angle de droite augmente, l'angle de gauche qui lui est adjacent diminue et, ce qui est évident, il diminue exactement de la quantité angulaire dont l'autre s'accroît. Donc, il viendra nécessairement un terme où les deux angles adjacents sont égaux. Dans ce cas, ces angles égaux sont dits angles droits, et la droite qui les forme est dite perpendiculaire.

8 - En appliquant les considérations que fournit la discussion du mouvement, il est inutile de démontrer les principes suivants :

1) tous les angles droits sont égaux entre eux ;
2) deux angles adjacents occupent ensembles le même espace que deux droits ;
3) deux angles opposés par le sommet sont égaux, puisqu'ils résultent d'un même mouvement ;
4) si une droite OG est perpendiculaire sur AB, réciproquement, celle-ci l'est sur GOH.

9 - Si le triangle a seulement deux côtés égaux, on l'appelle triangle isocèle. Dans ce cas, les deux angles opposés seront aussi égaux, car il n'y a pas de raison pour que l'un d'eux soit plus grand que l'autre.

Théorème 8 : Par un point pris sur une droite ou hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

Théorème 13 : Deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Si elles pouvaient se rencontrer, on aurait du point de rencontre deux perpendiculaires abaissées sur une même droite, ce qui est impossible (théorème 8).

Théorème 14 : Deux droites qui font avec une sécante des angles correspondants égaux sont parallèles.

ANNEXE XVI 1, b

Théorèmes fondamentaux de la ligne droite

Théorème 4 : Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Théorème 5 : Deux triangles sont égaux quand il ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun.

Théorème 6 : Deux triangles sont égaux quand ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Théorème 15 : Réciproquement, si deux droites sont parallèles, elles feront avec une sécante quelconque des angles correspondants égaux.

Théorème 16 - Quand deux parallèles sont coupées par une sécante, on a les résultats suivants :

1°) les angles alternes-internes sont égaux ;
2°) les angles alternes-externes sont égaux ;
3°) la somme des angles intérieurs est égale à deux droits et réciproquement.

Pour les n° 1 et 2, les démonstrations sont classiques.

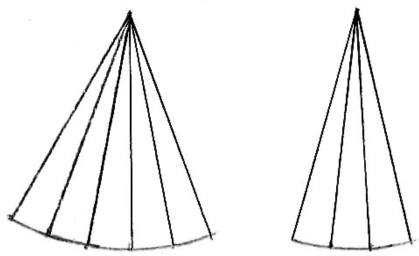
Réciproquement, si la somme des angles intérieurs entre deux droites et une sécante est égale à deux droits, ces deux lignes sont parallèles.

Théorème 17 : Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux.

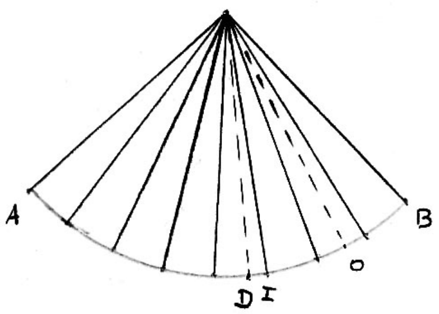
Théorème 29 : Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux droits.

Théorème 28 : Sur lequel se fonde la démonstration du théorème 38.

Dans un cercle ou dans deux cercles égaux, les arcs sont toujours entre eux dans le même rapport que les angles au centre qui les interceptent.



On suppose que deux angles sont entre eux comme 5 et 3. L'un contient cinq parties égales et l'autre trois. Les arcs interceptés contiendront l'un cinq arcs et l'autre trois arcs. Si les deux angles sont entre eux tel que l'un contienne un certain nombre fractionnaire des parties égales de l'autre, cela revient au même, car on peut alors réduire les deux termes du rapport des fractions au même dénominateur, et l'on est ramené au premier cas. Remarque : Cela revient à prendre par exemple, si l'on a 5 et 3 + ½, ½ pour partie aliquote commune 5 → 10 ; et 3 + ½ → 7.



On peut concevoir que le rapport de deux angles ne soit pas de deux entiers ou de deux fractions. Les angles sont alors incommensurables. D'où la nouvelle démonstration. On les place l'un sur l'autre et on a ACB : ACD :: AB : AD car sinon ACB : ACD :: AB : AO (1) avec AO plus grand que AD. On divise alors AB en parties plus petites que DO et égales. Il y aura forcément un point de division I entre D et O. Alors, AB et AI seront entre eux comme deux nombres entiers d'après ce qui précède : ACB : ACI :: AB : AI (2). Dans (1) et (2) les antécédents sont égaux donc (arith. Rey 175) les conséquents sont proportionnels, donc on a ACD : ACI :: AO : AI. Or ACD est plus petit que ACI et AO est plus grand, donc c'est absurde. Cette démonstration existera tant que O sera supposé différent de D. On démontrerait la même chose si AO est plus petit que AD.

Théorème 31 : Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.

Théorème 37 - Si l'on divise en parties égales l'un des côtés AC d'un triangle quelconque ABC, et qu'on mène par les points de division des parallèles à la base, le second côté BC sera divisé par ces parallèles en parties égales. Sigle (P.E)

Théorème 38 : Toute parallèle à la base d'un triangle divise les côtés en parties proportionnelles de sorte qu'on aura CG : GA :: CH : BH. Sigle (D.P.C.T.)

Réciproquement, si la droite GH divise les côtés proportionnellement, elle sera parallèle à la base.

Théorème 43 : Si l'on mène une parallèle GH à la base du triangle ABC et différentes droites CD, CK, Cn, etc., du sommet sur la base, cette dernière ligne et sa parallèle seront divisées en parties proportionnelles. Sigle (F.S)

ANNEXE XVII : programmes 1833 -1854

<u>18 octobre 1833</u> - Programmes de l'enseignement des mathématiques préparatoires dans les collèges royaux de Paris et de Versailles.

<u>Géométrie plane</u>

11 - Propriétés des droites coupées par des séries de parallèles. Quatrième proportionnelle. Similitude des triangles. Propriétés particulières du triangle rectangle. Troisième et quatrième moyennes proportionnelles. Mesure des hauteurs et des distances inaccessibles.
13 - Mesure des aires.

<u>26 septembre 1837</u> - Dispositions relatives aux leçons d'histoire naturelle et de géométrie.
<u>Commentaire</u> : En ce qui concerne la géométrie, la commission propose à l'initiative de POISSON, de prescrire l'usage de la méthode des infiniment petits. Le conseil, qui suit l'avis de la commission, tire ainsi un trait sur les méthodes plus rigoureuses en vigueur dans l'enseignement des collèges depuis Lacroix et Legendre, au profit des procédés plus expéditifs utilisés dans la géométrie scolaire du XVIII ème siècle, en particulier chez Bezout [...]. Cependant, si la géométrie doit être dorénavant fondée sur la méthode des infiniment petits, on peut tolérer provisoirement les anciennes méthodes, en particulier pour les classes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales.

<u>9 octobre 1838</u> - Programmes d'arithmétique et de géométrie dans les collèges royaux.

<u>Géométrie</u>

<u>Classe de troisième</u>

10 - Propriétés des droites coupées par des séries de parallèles. Quatrième proportionnelle. Similitudes des triangles. Propriété du triangle rectangle ; incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré. Troisième et moyenne proportionnelle ; moyens de les construire. Mesure des hauteurs et des distances inaccessibles.
11 - Similitude des triangles...
12 - Mesure des surfaces...

<u>Classe de seconde</u>

5 - Repasser la géométrie plane.

<u>14 juillet 1840</u> - Questions de mathématiques et de physiques au baccalauréat ès lettre.

<u>Géométrie</u>

33 - Théorèmes sur la ligne menée parallèlement à la base d'un triangle (il est également inutile de considérer ici le cas de l'incommensurabilité).
31 - Définitions des figures équivalentes. Des figures semblables, ... Théorème sur l'aire du rectangle (il est inutile de considérer le cas où la base est incommensurable avec la hauteur).
34 - Problèmes - On propose de diviser une droite en parties égales. De trouver une quatrième ou une moyenne proportionnelle.

<u>14 septembre 1841</u> - Programme des conférences préparatoires de mathématiques (pour les élèves des classes d'humanité ou de rhétorique se destinant aux écoles spéciales).
<u>Programmes - Cours préparatoire de géométrie</u>
7 - Propriété des droites coupées par un système de droites parallèles. <u>Nota</u> : on supposera, dans les démonstrations, les lignes commensurables. Similitude des triangles. Propriétés du triangle rectangle. Construire une moyenne proportionnelle. Construction et usage des échelles. Mesure des hauteurs et des distances inaccessibles.
9 - Mesure des aires. Rectangles. <u>Nota</u> : on supposera dans les démonstrations, les lignes commensurables.

<u>13 janvier 1842</u> - Sur les conférences préparatoires de mathématiques dans les collèges royaux.
Cet enseignement raisonné, mais dégagé de toute subtilité, doit être réduit à des démonstrations claires et faciles, et toujours soutenu et pour ainsi dire vérifié par des applications choisies qui en montrent l'utilité. Donné dans cet esprit, et suivant cette méthode dont le livre de Bezout offre un si bon modèle, il ira naturellement à l'intelligence de tous les élèves, et loin de nuire à l'étude des lettres, il ne peut que la fortifier, parce que cette logique pratique qui nous vient de la géométrie dispose à mieux sentir celle qui est cachée dans l'enseignement des mots et qui préside, en secret, à nos meilleures compositions.

ANNEXE XVII 1, a

<u>10 février 1843</u> <u>: Programmes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales.</u>

<u>Géométrie plane</u>

Comparaison des figures. Figures égales, équivalentes, semblables. Théorie des lignes proportionnelles et des polygones semblables. Mesure des aires. Rectangle, triangle, trapèze, polygone quelconque.

<u>26 novembre 1849</u> : <u>Questions de sciences au baccalauréat ès lettres</u>

<u>Géométrie</u>

15 - Lignes proportionnelles. Conditions de similitude des triangles. De polygones quelconques. Décomposition d'un triangle rectangle en deux triangles semblables au triangle donné. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données ; une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Diviser une droite en moyenne et extrême raison.
17 - Mesure des aires. Figures équivalentes. Mesure de l'aire du rectangle dans l'hypothèse de la commensurabilité des côtés...

<u>Mathématiques et physique</u>

<u>Classe de logique</u>

<u>Géométrie plane</u>

15, 16, 17, 18, 19 - Lignes proportionnelles. Conditions de similitude de triangle et de polygones quelconques. Décomposition d'un triangle rectangle en deux triangles semblables au triangle donné, et relations numériques qui en résultent.
20, 21, 22 - Problèmes élémentaires sur la ligne droite. Diviser une droite en deux parties égales. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, et une proportionnelle entre deux lignes données.
Mesure des aires.

<u>Géométrie</u>

<u>Classe de troisième</u>

20. Lignes proportionnelles (en conservant les énoncés habituels, on devra remplacer, dans les démonstrations, l'algorithme des proportions par l'égalité des rapports).
Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle, divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. Réciproque. Propriété de la bissectrice de l'angle d'un triangle.
21, **22**. Polygones semblables. En coupant un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, on détermine un triangle partiel semblable au premier. Conditions de similitude des triangles.
23, **24**. Relations entre perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, les segments de l'hypoténuse, l'hypoténuse elle même et les côtés de l'angle droit.
25, **26**. Diviser une droite donnée en parties égales, ou en parties proportionnelles à des lignes données. Trouver une quatrième proportionnelle à trois ligne; une moyenne proportionnelle à deux lignes.
30, **31**. Mesure de l'aire du rectangle...
Application de la géométrie élémentaire :déterminer la distance à un point inaccessible; la distance entre deux points inaccessibles.

30 août 1852 Nouveaux programmes de l'enseignement scientifique (Lycée)

Enseignement particulier à la section des lettres

Notions générales de géométrie et de physique pour servir d'introduction à l'étude des sciences.

Classe de troisième

Le professeur s'aidera des éléments de géométrie de Clairaut. Il pourra abréger les démonstrations et les supprimer au besoin en les remplaçant par de simples explications.

8.9 - Figures semblables - Rapport des aires des figures semblables [...].

15 Novembre 1854.

Instruction pour la mise à exécution du plan d'études des lycée.

§ 1 - Division de grammaire

La simplicité et l'exactitude sont deux qualités essentielles qui peuvent s'allier merveilleusement, soit dans l'arithmétique, soit dans la géométrie. Les livres élémentaires de Clairaut sont, comme ceux de Bezout, des exemples frappants de cette vérité [...]. Le livre de Clairaut, qui devra être suivi, à peu d'explications près, pour tout ce qui concerne la géométrie, est d'ailleurs le commentaire le plus net et le plus précis qui puisse être fait de cette partie des programmes.

§ 2 - Enseignement particulier à la section des lettres

Notions générales de géométrie et de physique

A la classe de troisième, se rattache un cours d'introduction à l'étude des sciences, qui a pour objet l'exposition des faits généraux ou des principes sur lesquels se font l'étude de la géométrie et de la physique. Cette exposition, appuyée sur des démonstrations pratiques qui mettront toujours le fait et l'application à côté de la théorie, n'aura rien de la sécheresse des leçons dans lesquelles l'étude devient d'autant plus abstraite qu'elle veut être rigoureuse.

§3. Enseignement particulier à la section des sciences.

Enseignement de la géométrie.

[...] Sous ce rapport, on devra laisser de côté, d'une manière absolue, toute démonstration fondée sur ce qu'on appelait la " réduction par l'absurde". Lorsque, pour établir une proposition, on emploie cette tournure indirecte qui consiste à montrer qu'en partant d'une hypothèse contraire on serait conduit à une conséquence absurde, on nous place assurément dans la nécessité de ne pouvoir nier que le contraire de la proposition à démontrer ne soit une absurdité. Mais a-t-on fait comprendre à l'élève pourquoi la proposition est vraie en elle même ? A-t-on développé son intelligence, donné plus d'étendue à son esprit, et l'a-t-on ainsi préparé à faire de nouveaux pas dans l'étude de la science? En aucune façon. Assurément, si la réduction à l'absurde était nécessaire pour établir l'exactitude d'une proposition, il faudrait bien se résigner à l'emploi de cette voie, quelque peu satisfaisante qu'elle soit. Loin de là, cette méthode indirecte, lors même qu'il s'agit de la démonstration d'une proposition réciproque, n'est qu'une forme vicieuse qui ne simplifie pas le langage. On fera mieux sentir cette vérité par un exemple. Ayant établi qu'une parallèle à la base d'un triangle divise les deux côtés en parties qui sont dans les même rapport, on demande de prouver, réciproquement que toute ligne qui divise aux points A et B les côtés en parties proportionnelles, est parallèle à la base. Cette proposition inverse résulte immédiatement de ce que le second côté ne pouvant être divisé qu'en un seul point B, comme le premier côté l'est en A, et la ligne menée parallèlement à la base par le point A, jouissant de la propriété de diviser ainsi le second côté, elle doit passer nécessairement par le point B. Sous cette forme simple et directe, l'élève saisira nettement qu'il existe entre la proposition et sa réciproque une dépendance intime qui fait que l'une entraîne nécessairement l'autre. C'est le résultat qu'on doit chercher à atteindre dans toutes les parties de l'enseignement.

§4. Classe de Logique.

Classe de mathématique spéciale.

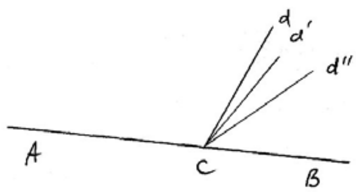
Mathématiques pures.

Géométrie : les méthodes suivies dans le cours élémentaire pour arriver à la mesure des surfaces et des volumes des corps ronds seront conservées dans leur simplicité, attendu qu'elles comportent toute la rigueur possible préparant les esprit aux méthodes du calcul infinitésimal.

ANNEXE XVIII : GUILMIN

ANNEXE XVIII 1, a

Définitions générales.
2. La ligne droite est le plus cours chemin d'un point à un autre.
On admet comme évident: 1° qu'entre deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite.
4. On appelle plan ou surface plane une surface telle que, si on prend deux points à volonté, et qu'on les joignent par une ligne droite, cette ligne est contenue toute entière dans la surface. La surface d'une glace polie, celle d'un tableau bien dressé ou d'une feuille de papier bien tendue sont sensiblement planes.
8. On peut aisément se rendre compte de la génération d'un angle et des accroissements successifs qu'il peut recevoir. Une droite Cd d'abord superposée à une droite fixe CB, tourne autour du point C, de manière à occuper des positions successives Cd, Cd', Cd"... très rapprochées les unes des autres. En suivant par la pensée ce mouvement continu de Cd, on voit un angle dCB se former, puis croître d'une manière continue. Tout angle peut être considéré ainsi engendré.



Théorème

11. En un point donné C d'une droite AB, on peut toujours lui élever une perpendiculaire.

Théorème

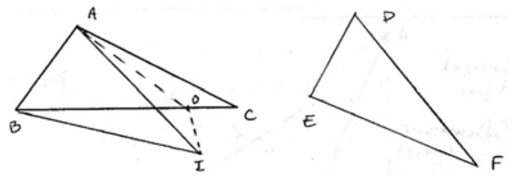
12. En un point donné C d'une droite AB, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite.

Théorème

13. Tous les angles droits sont égaux.

<u>Théorème</u>

31. Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et que l'angle compris est plus grand dans le premier triangle que dans le second, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second.



Transportant le triangle DEF sur ABC, je place le côté DE sur son égal AB, le point D en A et le point E en B; l'angle EDF étant plus petit que BAC, le second côté DF prend dans l'intérieur de BAC la position AI, et le troisième côté EF la position BI. EF étant devenu BI, il suffira de prouver que BC est plus grand que BI. Pour cela, je divise l'angle IAC en deux parties égales par la ligne AO que je termine au point O sur BC; puis je tire IO. Les deux triangles IAO, OAC, ont un angle égal, IAO = OAC (par construction), compris entre deux côtés égaux, savoir AO commun, et AI = DF = AC; ces deux triangles sont égaux (29), et OC = OI. Cela posé, dans le triangle BOI, on a BI < BO + OI; ce qui revient à BI < BO + OC, ou BI < BC. Mais BI = EF; donc EF = BC, ou BC > EF.

<u>Sixième leçon.</u>

Propriétés des perpendiculaires et des obliques menées d'un même point sur la même droite.

<u>Théorème</u>

40. D'un point donné hors d'une droite on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite.

<u>Théorème</u>

41. D'un point A donné hors d'une droite BC, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur cette droite.

<u>Septième et huitième leçon</u>

Théorie des parallèles

<u>Définition</u>

49. On nomme parallèle des droites qui, situées dans le même plan, ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

<u>Théorème</u>

50. **Deux droites AB, CD perpendiculaires à une troisième EF, sont parallèles.**

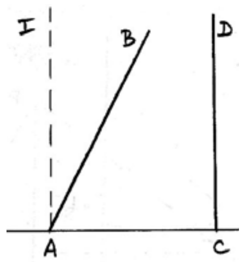
<u>Théorème</u>

51. Par un point donné, on peut toujours mener une parallèle à une droite donnée.
52. Par un point donné, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée.
53. Corollaire. Deux droites AB, CD, parallèles à une même troisième EF sont parallèles.

<u>Théorème</u>

54. Deux droites AB, CD, l'une oblique, l'autre perpendiculaire à la même droite AC, ne sont pas parallèles.

En effet, AB étant oblique à AC, on peut élever au point A une perpendiculaire AI sur AC. Les deux lignes AI, CD étant perpendiculaires à la même droite, AC, sont parallèles. AI étant parallèle à CD, AB ne l'est pas, puisque par le point A il ne peut passer qu'une parallèle à CD. (52).



<u>Théorème</u>

55. Si deux lignes AB, CD sont parallèles, toute droite EF, perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

ANNEXE XVIII 2, a

LIVRE III

Relations métriques entre lignes de diverses figures.- Figures semblables. Polygones réguliers.

<u>Vingtième leçon</u>

<u>Préliminaires</u>

136. Principe. Une ligne AB étant divisée au point C dans un certain rapport, on ne peut placer le point C sans altérer le rapport AC/CB.
En effet, si l'on avance C vers la droite, le numérateur AC du rapporteur augmentant, tandis que le dénominateur CE diminue, le rapport augmente. Le contraire a lieu quand on recule le point C vers la gauche.

Lignes proportionnelles

137. Toute ligne parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. **<u>Sigle : (D.P.C.T)</u>**
Si DE est parallèle à BC, AD/DB = AE/EC.

105. Mesure des angles. En se fondant sur la proposition précédente, on ramène la mesure ou l'évaluation d'un angle à celle d'un arc de cercle qui est beaucoup plus facile.
Quand les arcs AB et DF n'ont pas de commune mesure, on peut démontrer que les rapports AB/DF et AOB/DEF évalués avec la même approximation quelconque sont toujours égaux. Evaluons par exemple ces rapports à moins de 0,00.1 près. Soit DK la millième partie de DF; portons cet arc DK sur AB à partir de A, autant de fois que possible; supposons qu'in y soit contenu 1246 fois avec un reste IB moindre que DK, de telle sorte qu'en portent DK une fois de plus, on arrive en C au delà de B. Il résulte de là que AB contient les 1246/1000 de DF, et pas 0,001 de plus; on dit que AB/DF = 1246/1000, à moins de 0,001 près. Menons maintenant les lignes EK, OI, OC. L'angle DEK est la millième partie de DEF; AI valant 1246 DK, l'angle AOI = 1246/1000 DEK = 1246/1000 de DEF; l'angle AOB contient 1246/1000 de DEF, et pas 0,001 de plus; on dit que AOB/DEF = 1246/1000 à moins de 0,001 près. On démontrerait de même qu'ils contiennent le même nombre de dix millièmes, de cet millièmes, etc. Ces rapports ne sauraient donc différer ni de 0,001, ni de 0,0001, ..., ni en général d'une unité décimale, si petite qu'elle soit; il sont donc égaux.

<u>Théorème</u>

139. Une ligne qui divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles est parallèle au troisième côté.

ANNEXES XIX : F.I.C.

ANNEXE XIX 1, a **programmes de 1863, 1865**

<u>22 septembre 1863.</u> <u>Instruction sur les nouveaux programmes de l'enseignement scientifique. Victor Duruy, ministre de l'instruction publique.</u>

[...]Les notions de géométrie, au lieu d'embrasser, comme par le passé, toute la géométrie plane conformément à la géométrie de CLAIRAUT, seront restreintes aux principales propriétés de la ligne droite et du cercle, présentées dans l'ordre didactique que l'expérience a consacré. Je n'ai pas la pensée de contester le mérite de CLAIRAUT. Il restera entre les mains de nos élèves comme livre de lecture : il y a toujours profit

à suivre la pensée d'un homme illustre, lors même qu'il s'écarte des voies didactiques, parce qu'un grand esprit laisse son empreinte dans tout ce qu'il touche. Mais comme texte d'enseignement, ce traité ne saurait être conservé.
Les professeurs sont unanimes sur ce point : quand l'heure des interrogations arrivent, que reste-t-il dans l'esprit des élèves de cette promenade à travers le géométrie ? Rien de saisissable. Et malheureusement, ce n'est pas seulement dans la classe de quatrième, mais aussi dans celle de troisième (lettre), qu'un système d'enseignement géométrique sans rigueur avait prévalu. Le programme n°22 de l'ancien plan d'études portait en tête ces lignes :
" Le professeur s'aidera des éléments de géométrie de Clairaut : il pourra abréger les démonstrations, et les supprimer au besoin, en les remplaçant par de simples explications".
Quel travail la maître peut-il exiger d'élèves qui savent officiellement qu'il leur est permis de supprimer les démonstrations ? Les épreuves du baccalauréat ès lettres sont là pour attester la faiblesse extrême des candidats sur toutes les parties du programme des mathématiques.
Je repousse ce mode d'enseignement ; il est périlleux, ne fût-ce que pendant un semestre, d'habituer les élèves à se contenter de l'à peu près en matière géométrique. Je préfère de beaucoup les initier de bonne heure à l'admirable enchaînement des propositions d'Euclide : enseigner moins de choses, mais enseigner mieux.

24 et 25 mars 1865. Programmes modifiés de l'enseignement scientifique de Lycées.

Classe de troisième.

N°3 Eléments de géométrie plane (1ère partie).

Lignes proportionnelles. Polygones semblables. Conditions de similitude des triangles. Relations entre la perpendiculaire abaissée de sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, les segments de l'hypoténuse, l'hypoténuse elle-même et les côtés de l'angle droit.
Problèmes : diviser une droite donnée en parties égales ou proportionnelles à des longueurs données. Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

ANNEXE XIX 2, a

Définitions préliminaires

4. La ligne droite est le plus cours chemin d'un point à un autre. Un fil tendu en présente l'image. D'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite ; on peut dire: deux points suffisent pour déterminer une droite. Une ligne droite est plus courte que toute autre ligne qui a les mêmes extrémités.
10. Deux figures sont égales lorsqu'elles peuvent coïncider par superposition. Equivalentes quand elles ont mêmes grandeur sans avoir même forme. Semblables quant elles ont même forme sans avoir même grandeur.
19. Un angle est la figure formée par deux droites qui partent d'un même point. Ces deux lignes sont les côtés de l'angle, et leur intersection le sommet.[...] La grandeur d'un angle dépend uniquement de l'ouverture comprise entre les côtés, et non de leur longueur.
21. Une droite est perpendiculaire à une autre lorsqu'elle forme avec celle-ci des angles adjacents égaux; elle est oblique lorsque les angles adjacents sont inégaux.
25. Deux angles égaux ont des compléments égaux et des suppléments égaux. Réciproquement, deux angles qui ont des compléments égaux ou des suppléments égaux sont égaux.
39. Corollaires. 2° Les obliques égales AC, AE forment des angles égaux BAE, BAC avec la perpendiculaire AB.
3° Si deux obliques partent d'un même point sont égales, leurs pieds sont également distants du pied de la perpendiculaire ; car l'inégalité des distances entraînerait l'inégalité des obliques.
52. Théorème.
Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés respectivement égaux.
76. Théorème.
Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.

ANNEXE XIX 2, b

207. Définitions.
Le rapport de deux lignes est le rapport des nombres qui expriment les longueurs de ces lignes, lorsqu'elles ont été mesurées à l'aide de la même unité.
208. Lemme
Sur une droite limitée AB, on ne peut trouver qu'un point dont le rapport des distances aux points donnés A et B égale un rapport donné.
Soit AB la droite donnée ; 3/2 le rapport et un point C tel qu'on ait : AC/BC = 3/2. Si un point C' pouvait donner AC'/BC' = 3/2, on pourrait écrire : AC/BC = AC'/BC'.
Or la somme des deux premiers termes d'une proportion est au second terme comme la somme des deux deniers est au quatrième, donc (AC + BC)/BC = (AC' + BC')/BC' ou AB/BC = AB/BC'. Les numérateurs étant égaux, il faut qu'il en soit de même des dénominateurs ; ainsi C' se confond avec le point C, et il n'y a qu'un seul point qui divise AB dans le rapport voulu.
210. Théorème.
Les parallèles qui déterminent des parties égales sur une sécante donnée déterminent aussi des parties égales sur toute autre droite. Sigle : (P.E)
211. Corollaire.
Pour diviser une droite donnée AB en un nombre quelconque de parties...
212. Théorème.
Toute parallèles à un côté d'un triangle divise dans un même rapport les deux autres côtés. Sigle (D.P.C.T)
213. Scolie.
III. La parallèle DE peut être menée en dehors du triangle soit au delà de la base, soit au delà du sommet. Le théorème est toujours vrai et peut se démontrer comme dans le cas ci-dessus.
IV. Si deux droites quelconques OA et OB sont coupées par une série de parallèles AB, CD, EF, GH, les segments de la première droite sont tous dans un même rapport avec les segments correspondants de la seconde.
214. Théorème.
Toute droite qui coupe dans un même rapport deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.
144. Théorème.
Deux angles quelconque sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets avec un même rayon.

Pour démontrer le théorème dans le cas où les arcs sont incommensurables, on porte le petit angle DOE sur le grand DOF, et l'on suppose l'arc DF divisé en un nombre quelconque n de parties égales. Le point E se trouve entre deux points de division, par exemple entre le m° et le point suivant, marqué m+1. On a donc $\frac{m}{n} < \frac{arcDE}{arcDF} < \frac{m+1}{n}$. Si l'on joint chaque point de division au point O, l'angle DOF est divisé en n parties égales, et l'angle DOE est plus grand que m de ces angles partiels, et plus petit que m+1 de ces mêmes angles. On a donc $\frac{m}{n} < \frac{angleDOE}{angleDOF} < \frac{m+1}{n}$. Dans les deux cas, les rapports extrêmes diffèrent de 1/n ; par suite, si l'on divise DF en un très grand nombre de parties égales, la différence $1/n$ pouvant devenir aussi petite que l'on voudra, tend vers zéro ; et dans tous les cas on a la proportion $\frac{angleDOE}{angleDOF} = \frac{arcDE}{arcDF}$.

§II. Triangle semblables.

221. Théorème de Thalès. Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.

231. Si un faisceau de droites issues d'un même point est traversé par deux parallèles, ces dernières lignes sont coupées en parties proportionnelles. **Sigle : (F.S)**

232. Si plusieurs sécantes coupent proportionnellement deux droites parallèles, ces sécantes concourent en un même point.

ANNEXE XX : BOS

ANNEXE XX 1

13. Deux angles sont égaux lorsqu'ils peuvent être placés l'un sur l'autre, de manière à coïncider, c'est à dire à avoir même sommet et leurs côtés dirigés suivant les mêmes droites et dans le même sens. On fait la somme de deux angles en les plaçant à côté l'un de l'autre, de manière qu'ils soient adjacents.

26. Figures symétriques.

Deux points A et A' sont dits symétriques par rapport à une droite XY lorsque cette droite XY est perpendiculaire à la droite AA' en son milieu ; la droite XY s'appelle l'axe de symétrie.

28. Théorème.

Réciproquement, si un triangle est isocèle, la perpendiculaire élevée au milieu de sa base passe par le sommet.

39. Théorème.

D'un point pris hors d'une droite AB :

1° On peut mener une perpendiculaire à cette droite.

2° On n'en peut mener qu'une.

ANNEXE XX 2

180. Rapports et proportions.

[...] On appelle rapport de deux grandeurs de même espèce le nombre qui exprime la mesure de la première quand on prend la seconde pour unité.[...] Pour avoir le rapport de deux grandeurs de même espèce, on mesure ces deux grandeurs avec une même unité, et on prend le rapport des deux nombres ainsi obtenus.

181. On dit que quatre nombres sont en proportion, quand le rapport du premier nombre au second est égal au rapport du troisième au quatrième. Plus brièvement, on peut dire qu'une proportion est l'égalité de deux rapports. [...] Dans une proportion on peut changer les moyens ou les extrêmes de place, ou encore, mettre les moyens à la place des extrêmes, sans que la proportion cesse d'être exacte.

182. Dans une suite de rapports égaux, le rapport de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs est égal à l'un quelconque des rapports donnés.

184. Théorème.

Une parallèle à un côté d'un triangle divise deux autres côtés en parties proportionnelles. Sigle : (D.P.C.T)

189. Théorème.

Toute parallèle DE à l'un des côtés d'un triangle ABC détermine un nouveau triangle ADE semblable au premier. Sigle : (T.S)

187. Théorème.

Réciproquement, si une ligne partage deux côtés d'un triangle en segments proportionnels, elle est parallèle au troisième côté.

ANNEXE XXI : GRAPIN

Théorème VII.

283. Lemme. Si sur le côté BA d'un angle ABC on porte, partir du sommet, des longueurs égales : BD = DE = EF = ... et que par les points de divisions on mène des parallèles rencontrant le côté opposé BC, ces parallèles déterminent sur ce côté BC et à partir de ce sommet, des longueurs égales. **Sigle : (P.E)**

Théorème VIII. Théorème de Thalès

284. Une parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux côtés des segments proportionnels.

285. Remarque. Le raisonnement est indépendant de la grandeur de la commune mesure ; il est donc encore applicable quand cette commune mesure diffère de zéro d'aussi peu que l'on veut. On conçoit qu'il le soit encore et que le théorème soit encore vrai quand cette différence est nulle, c'est à dire quand les deux segments n'ont plus de commune mesure.

ANNEXE XXII : ROUCHE et COMBEROUSSE

ANNEXE XXII 1

C'est ainsi qu'on arrive à regarder inversement une ligne comme lieu des positions successives d'un point mobile, et une surface comme lieu des positions successives d'une ligne qui se meut suivant une loi déterminée.

2. Deux droites qui ont deux points communs coïncident, non seulement entre ces deux points, mais encore dans toute leur étendue.

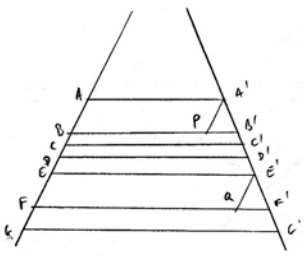
[...] Nous n'admettons pas que la distance ainsi définie représente le plus court chemin du point A au point B ; c'est là, non un axiome, mais un théorème, qui sera démontré ultérieurement.

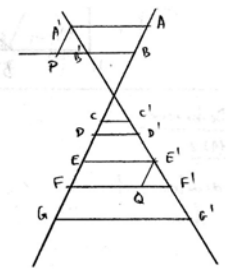
14. Théorème.
Tous les angles droits sont égaux.
28. Théorème.
Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.
32. Théorème.
Deux triangles sont égaux :
1° Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun;
2° Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.
3°Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.
34. Théorème.
Si un triangle a deux côtés inégaux, l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés est plus grand que l'angle opposé à l'autre.
35. Théorème.
Réciproquement, si un triangle a deux angles inégaux, le côté opposé au plus grand de ces deux angles est plus grand que le côté opposé à l'autre.
36. Théorème.
Dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres côtés.
42. Théorème.
Si un point O pris hors d'une droite AB on mène à cette droite la perpendiculaire OI et plusieurs obliques OC, OD, OE...: 1° Deux obliques OC et OE dont les pieds Cet E sont également distants du pied I de la perpendiculaire sont égales. 2° La perpendiculaire OI est plus courte que toute obliques OC.
125. Théorème
Dans le même cercle ou dans deux cercles égaux :
1° Deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux ;
2° Si un angle au centre est la somme de deux autres angles au centre, l'arc intercepté par cet angle est la somme des arcs interceptés par les deux autres.
126. Corollaire.
Il résulte de là (Note I) que, dans le même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre est égal au rapport des arcs qu'ils interceptent ; en d'autres termes, l'angle au centre d'un cercle est proportionnel à l'arc correspondant.

ANNEXE XXII 2

Notions préliminaires

179. Etant donnés deux points fixes A et B, il existe toujours sur la droite indéfinie XY qui les contient, deux points, et seulement deux, tels que le rapport des distances de chacun d'eux aux points A et B aient une même valeur donnée.
180. Le point N, situé entre A et B, divise réellement la droite AB dans le rapport donné ; par extension, on dit que le point extérieur N' divise aussi la droite AB dans ce même rapport. Pour éviter toute confusion, on qualifie d'additifs les segments NA et NB déterminés par le point N, et dont AB est la somme, et de soustractifs les segments N'A et N'B déterminés par le point N', et dont AB est la différence.
181. Théorème
Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de droites parallèles ; en d'autres termes, lorsque deux droites AG, A'G', sont coupées par une série de parallèles AA', BB', ...,GG', le rapport de deux segments quelconques de la première droite est égal au rapport des segments correspondants de la seconde.





Sigle : (F.P)
Il suffit (Note I) de prouver :
1° Que, si deux segments AB et EF de la première droite sont égaux entre eux, les segments correspondants A'B' et E'F' de la seconde droite sont aussi égaux entre eux ;
2° Que, si sur la première droite, un segment EG est égal à la somme de deux autres AB et CD, sur la seconde droite, le segment E'G', correspondant à EG, est aussi égal à la somme des segments A'B' et C'D' qui correspondent à AB et à CD.
182. Toute parallèle DE à l'un des côtés BC d'un triangle ABC, divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. Sigle (D.P.C.T)
183. Réciproquement, si deux points D et E, situés respectivement sur deux côtés AB et AC du triangle ABC, divisent ces côtés en parties proportionnelles, la droite DE qui unit ces deux points est parallèle au troisième côté BC.
Cette réciproque demande une certaine attention ; l'hypothèse renferme en réalité deux parties : la première consiste dans l'existence de la proportion (1), et l'autre est relative à la situation des points D et E qui doivent être placés dans la même manière sur les côtés AB et AC. Bien que sous-entendue d'ordinaire pour plus de brièveté, cette seconde partie est indispensable ; car si l'un des points était, par exemple, sur le côté lui-même et l'autre E sur l'un des prolongements, la droite ne saurait être parallèle à BC, bien que la proportion (1) fût satisfaite.
198. Lemme.
En coupant un triangle ABC par une parallèle DE à l'un des côtés BC, on détermine un nouveau triangle ADE semblable au premier. Sigle : (T.S)
213. Théorème.
Deux parallèles quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de sécantes issues d'un même point. Sigle : (F.S)
214.
Le rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux parallèles est le même que celui des distances du point O aux deux points où l'une quelconque des sécantes rencontre les deux parallèles.
215.
Réciproquement, lorsque plusieurs sécantes AA', BB', CC', DD', coupent deux parallèles en parties proportionnelles, ces sécantes concourent en un même point.
216. Lorsque le rapport a/b est égal à l'unité, les parties correspondantes de deux parallèles sont égales entre elles, et les sécantes sont toutes parallèles. Le théorème énoncé subsiste donc, à la condition de regarder deux parallèles comme deux droites qui concourent à l'infini.
224. Théorème.

Les trois côtés d'un triangle rectangle étant évaluées en nombres au moyen d'une unité commune, le carré du nombre qui mesure l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui mesurent les deux côtés de l'angle droit ; ou plus brièvement, dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
417. Théorème.
1° Si deux rectangle de même base ont des hauteurs égales, ces deux rectangles sont égaux.
2° Si deux rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier rectangle est égal à la somme de deux autres.
418. Corollaire.
Le rapport de deux rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs ; en d'autres termes, l'aire d'un rectangle de base constante est proportionnelle à sa hauteur.
419. Théorème.
L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur, lorsque l'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur.

ANNEXE XXIII Les programmes du 24 janvier 1891.
Programmes de sciences de la classe de mathématiques élémentaires.
Mathématiques Géométrie.

Figure planes.
Longueur proportionnelles. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. Réciproque. Propriété des bissectrices d'un triangle. Triangles semblables. Cas de similitude. Figures homothétiques. Ligne proportionnelles dans le cercle.
Diviser une droite en parties proportionnelles à des droites. Quatrième proportionnelle ; moyenne proportionnelle. Division d'une droite en moyenne et extrême raison. Aire des polygones, aire du cercle. Mesure de l'aire du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque.

15 juin 1891. Programmes de sciences de l'enseignement secondaire moderne.
Classe de troisième.
Mathématiques Géométrie.

Lignes proportionnelles. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. Réciproque. Propriété des bissectrices d'un triangle. Triangles semblables. Cas de similitude.
Problèmes. Diviser une droite donnée en parties égales, en parties proportionnelles à des longueurs données. Quatrième proportionnelle. Moyenne proportionnelle.

ANNEXE XXIV : ANDRE

207. Théorème. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres en parties proportionnelles. Sigle : (D.P.C.T)
Remarque : cette démonstration étant indépendante de la longueur de la commune mesure BF, serait encore rigoureuse dans le cas où cette commune mesure serait plus petite que toute quantité appréciable et par conséquent, dans le cas où les lignes BD et DA seraient incommensurables.
210. Corollaire BF/BG = FD/GE = DA/EC avec les points F et D sur [AB], G et E sur [BC].

211. Réciproque. Toute droite qui partage deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles est parallèle au troisième côté.

Supposons que BD/AD = BE/CE. Si DM est une droite parallèle à AC, on aura : BD/AD = BM/MC et donc BE/CE = BM/MC. Or BM > BE et MC < CE ce qui est impossible.

ANNEXE XXV : COMBETTE

Théorème 1. Par un point d'une droite, passe une perpendiculaire à cette droite, et il n'en passe qu'une seule.
Corollaire. Par superposition, tous les angles droits sont égaux.
Théorème 28. Dans un parallélogramme :
1° Les angles opposés sont égaux.
2° Les côtés opposés sont égaux.
3° Les diagonales se coupent en leur milieu.

Corollaire1. Les portions de parallèles comprises entre parallèles sont égales.

Troisième Livre
Lignes proportionnelles.

Théorème 1. Il existe deux points sur une droite, et rien que deux dont le rapport des distances à deux points donnés de cette droite ait une valeur donnée.
Supposons qu'un mobile parcoure de gauche à droite une ligne droite infinie XY sur laquelle sont marqués deux points A et B et étudions les variations du rapport des distances du mobile aux points A et B. A gauche du point A le rapport considéré décroît d'une manière continue de 1 à 0. De A en O, milieu de AB, le rapport croît d'une manière continue de 0 à 1. De O à B le rapport considéré croît d'une manière continue de 1 à ∞. A droite de B le rapport considéré décroît d'une manière continue de l' ∞ à 1. Supposons PA/PB = m/n, avec le rapport supérieur à 1. P se trouve soit sur le segment OB soit sur BY.

Dans la première hypothèse : $\dfrac{P_1A}{P_1B} > \dfrac{m}{n}$ et ainsi, $\dfrac{P_1A}{m} = \dfrac{P_1B}{n} = \dfrac{AB}{m+n}$.(Cours Arithmétique Livre III théorème 14). D'où $PA = \dfrac{m}{m+n} \times AB$. De plus, $P_1A < AB$ car $\dfrac{m+n}{n} < 1$ et $m + m > m + n$ donc $P_1A > \dfrac{AB}{2}$.

Dans la seconde hypothèse, on aurait : $\dfrac{P_2A}{m} = \dfrac{P_2B}{n} = \dfrac{AB}{m-n}$; $P_2A = \dfrac{m}{m-n} \times AB$. $P_2A > AB$. Ces deux positions répondent à la question.

Supposons que $\frac{PA}{PB} < \frac{m}{n}$, on trouverait de même deux positions et deux seules.
Définitions segments additifs AM, MB, la somme des segments reproduit la portion AB ; segments soustractifs, AM', M'B, AB est égale à la différence des segments d'extrémité M'.
Théorème 2. Théorème de Thalès. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle partage les deux autres côtés en parties proportionnelles.
Corollaire. Deux droites d'un même plan, coupées par des parallèles, sont partagées en parties proportionnelles.
Théorème 3 Livre III. Réciproque du théorème 2. Lorsqu'une droite partage deux cotés d'un triangle en segments de même espèce, proportionnels, elle est parallèle au troisième côté.
Théorème 4. La bissectrice d'un angle intérieur ou extérieur d'un triangle partage le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.
Théorème 5. Si une droite, issue d'un sommet d'un triangle, partage le côté opposé en segments additifs ou soustractifs proportionnels aux côtés adjacents, elle est la bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur formé par ces côtés.
Théorème 7. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine un nouveau triangle qui a les mêmes angles que le premier, et dans ces triangles, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels. Sigle : (T.S)
Remarque : il est clair que la démonstration précédente n'exige pas que (B'C') soit intérieur au triangle ; elle s'applique à tous les cas de figure.
Théorème 13. Plusieurs droites concourantes interceptent des segments proportionnels sur deux parallèles et réciproquement. Sigle : (F.S)

ANNEXE XXVI : HADAMARD

ANNEXE XXVI 1

3.Figures égales. Une figure quelconque peut être translatée d'une infinité de façons dans l'espace sans transformation, comme cela a lieu pour les corps solides usuels.
Note B : une figure invariable est une figure à laquelle on ne fait subir que les transformations d'un certain groupe (dit groupe des déplacements).
4. La ligne droite. La plus simple des lignes est la ligne droite, dont un fil tendu nous offre l'image. La notion de la ligne droite est claire par elle même ; pour la faire entrer dans nos raisonnements, nous considérons la ligne droite comme définie par ses propriétés évidentes, en particulier les deux suivantes :
2° Par deux points on peut faire passer une ligne droite, et on n'en peut faire passer qu'une.
De la définition résulte immédiatement que deux droites différentes ne peuvent se rencontrer qu'en un point, puisque, si elles avaient deux points communs, elles ne seraient pas distinctes.

ANNEXE XXVI 2

10. On nomme angle la figure formée par deux demi-droites issues du même point. Ce point est dit le sommet de l'angle te les deux demi-droites en sont les côtés. Deux angles sont égaux, conformément à la définition des figures égales (3) si, en les transportant l'un sur l'autre, on arrive à les faire coïncider.
12. Théorème. Deux angles opposés par le sommet sont égaux.
23. Théorème. Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.
Réciproque. Si dans un triangle deux angles sont égaux, le triangle est isocèle.
25. On nomme angle extérieur d'un polygone convexe, l'angle formé par un côté et le prolongement du suivant.
Théorème. Tout angle extérieur d'un triangle et plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.
38 Définition. On nomme droites parallèles deux droites situées dans le même plan et qui, si loin qu'on les prolonge dans les deux sens, ne se rencontrent jamais.
Deux droites étant coupées par une même sécante, ces deux droites sont parallèles :
1° Si les angles intérieurs du même côté sont supplémentaire ;
2° Si les angles alternes-internes sont égaux;
3° Si les angles correspondants sont égaux.
Si les deux droites se rencontraient, soit d'un côté soit de l'autre de la sécante, elles formeraient un triangle dans lequel (25) la somme des deux angles intérieurs du même côté serait plus petite que deux droits. Les deux autres cas se ramènent au premier.
39. Théorème. Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite.
40. Théorème. La construction précédente pouvant être effectuée d'une infinité de façon, puisque le point A peut être pris arbitrairement sur xy, il semble qu'elle donne une infinité de parallèles distinctes. Il n'en est rien, d'après l'axiome suivant :
Axiome. Par un point pris hors d'une droite, on peut mener qu'une parallèle à cette droite.
Cet axiome est connu sous le nom de postulatum d'Euclide. En réalité il doit être considéré comme faisant partie de la définition des notions fondamentales.
41. Réciproque. Quand deux parallèles sont coupées par une même sécante :
1° Les angles intérieurs du même côté sont supplémentaires ;
2° Les angles alternes-internes sont égaux ;
3° les angles correspondants sont égaux.
105. On sait (1) que l'on appelle proportion l'égalité de deux rapports et que deux grandeurs sont dites proportionnelles lorsque leurs valeurs se correspondent de manière que le rapport de deux valeurs quelconques de la première soit égal aux rapports des valeurs correspondantes de la seconde. [...] Nous remplaçons les lignes elles mêmes par les nombres qui les mesures.
(1). Voir les Leçon d'Arithmétique de M. Tannery, chapitres VI et XIII.
113. Théorème fondamental. Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles. Sigle : (F.P)
2° Cas général (1).
Les points A, B, C, D, étant quelconques, nous allons démontrer que les valeurs à 1/n près des deux rapport CD/AB et C'D'/A'D' sont égales, quel que soit n. Soit, par exemple, n= 5 : divisons AB en cinq parties égales aux points 1, 2, 3, 4 et supposons que la cinquième partie

de AB soit contenue deux fois, mais non trois dans CD : soient I, II, II les extrémités de trois segments égaux au cinquième de AB et portés successivement sur la droite CD à partir du point C ; de sorte que les points I et II sont entre C et D (le dernier pouvant toutefois coïncider avec C), le point II au delà du point D. Par tous ces points 1, 2, 3, 4, I, II, III, menons des parallèles à la direction commune des droites AA', BB', CC', DD', jusqu'à rencontre en 1', 2', 3', 4', I', II', III', avec la droite A'B'C'D'. nous avons ainsi divisé A'B' en cinq partie égales et porté tris fois l'une de ces parties à partir du point C' dans la direction C'D'. Les points I', II', étant dans l'intervalle C'D' et le points III' au delà du point D' (d'après la remarque faite tout d'abord) le théorème est démontré.

114. Théorème. Une parallèle DE à l'un des côtés d'un triangle ABC partage les deux autres côtés AB, AC en parties proportionnelles. <u>Sigle : (D.P.C.T)</u>

Réciproque. Si une droite divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième côté.

117. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle forme avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier. <u>Sigle : (T.S)</u>

121. Théorème. Un faisceau de droites concourantes découpe sur deux parallèles des segments proportionnels. [...] <u>Sigle : (F.S)</u>

Remarque. Les segments qui correspondent sont tous de même sens ou de sens contraire, suivant que le point S est extérieur ou intérieur aux parallèles.

123. Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.

131. Théorème. Si, d'un point A pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances du point aux deux points d'intersection de la sécante avec le cercle est constant.

133. Définition. On nomme puissance d'un point A, par rapport à une circonférence, le produit des segments qui vont du point A aux points d'intersection, avec la circonférence, d'une sécante quelconque issue de ce point (produit qui d'après le n° 131 est indépendant de la direction de la sécante) : ce produit étant précédé du signe + si le point A est extérieur au cercle, du signe - s'il est intérieur.

141. Théorème. Dans deux système homothétiques, la droite qui joint deux joints quelconques de l'un des systèmes et celle qui joint les deux points homologues de l'autre sont toujours parallèles et dans le rapport de similitude ; elles sont de même sens ou de sens contraire suivant que l'homothétie est directe ou inverse.[...]

142. Théorème. Réciproquement, s'il existe dans le plan de deux systèmes de points O, O' tels que la droite qui joint le point O à un point M quelconque du premier système et celle qui joint le point O' au point M' homologue du second soient constamment parallèles et dans un rapport donné k (toujours de même sens ou toujours de sens contraire), les deux systèmes sont homothétiques.

ANNEXE XXVII : HILBERT
Chapitre 1
<u>Les cinq groupes d'axiomes</u>

<u>Premier groupe d'axiomes : appartenance.</u>

Les axiomes de ce groupe expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan.

(I,2) Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points A et B.

(I,3) Sur une droite, il y a au moins deux points ; il existe au moins trois points non alignés.

(I,4) Il existe un plan α lié à trois points non alignés A,B,C auquel appartiennent ces trois points A,B,C. A tout plan appartient au moins un point.

<u>Théorème 1.</u> Deux droites coplanaire ont au plus un point en commun.

Car s'il y en avait deux, par deux points passerait deux droites.

<u>Théorème 2.</u> Par une droite et un point non incident ou par deux droites distinctes qui se coupent, il passe un plan et un seul.

<u>Deuxième groupe d'axiomes : ordre.</u>

Les axiomes de ce groupe définissent le terme "entre" ; si l'on s'appuie sur la relation ainsi déterminée, ils permettent d'établir l'ordre des points alignés, coplanaires ou situés dans l'espace.

<u>Définition:</u> Entre les points d'une droite, il existe une relation dans la description de laquelle figure le mot "entre".

(II,2) Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC et tel que C soit entre A et B.

(II,3) De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.

<u>Définition.</u> Sur une droite a, considérons deux points A et B; nous appelons segments le système des deux points A et B et nous le désignons par AB ou BA. Les points situés entre A et B sont les points du segments AB ou les points intérieurs au segment AB. Les points A et B sont les extrémités su segment AB. Tous les autres points de la droite a sont extérieur au segment AB.

(II,4) Soient A,B, et C trois points non alignés et a une droite du plan ABC qui passe par aucun des points A,B,C ; si la droite passe par l'un des points du segment AB, elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC. D'une façon plus intuitive, si une droite entre dans un triangle, elle en sort.

<u>Théorème 3.</u> Deux points étant donnés, il existe sur la droite AC au moins un point D situé entre A et C.

<u>Théorème 4.</u> De trois points alignés A, B, C, il y en a un qui est entre les deux autres.

<u>Théorème 5.</u> Quatre points d'une droite étant donnés, on peut désigner par A, B, C et D de telle sorte que le point B soit entre A et C et entre A et D et que C soit entre A et D et entre B et D.

Soient A, B, C et D quatre points d'une droite g.

<u>Lemme 1.</u> Si B appartient au segment AC, et C au segment BD, les points B et C appartiennent au segment AD.

<u>Lemme 2.</u> Si B appartient au segment AC et C au segment AD, le point C apparient au segment BD et B au segment AD.

<u>Théorème 6.</u> Soient donnés des points d'une droite en nombre fini; il est possible de les désigner par A, B, C, D, E, ..., K de telle sorte que B soit entre A et chacun des autres, que C soit entre A et B d'une part et D,E, ..., K d'autre part, que D soit entre A, B, et C d'une part et E,..., K d'autre part et ainsi de suite. Seule la dénomination K,...,E, D, C, B, A jouit des mêmes propriétés. C'est une généralisation du théorème 5.

<u>Théorème 7.</u> Entre deux points d'une droite, il y a une infinité de points.

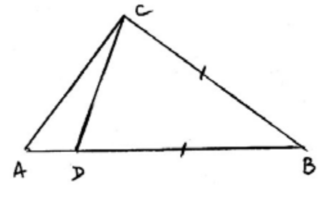
<u>Théorème 8.</u> Toute droite a d'un plan partage les points de ce plan qui n'appartiennent pas à la droite a en deux catégories ; celles-ci jouissent des propriétés suivantes : tout point A de la première catégorie déterminent avec un point B de la seconde un segment AB à l'intérieur duquel figure un point de la droite a ; par contre deux points A et A' de la même catégorie déterminent un segment auquel n'appartient aucun point de a.

<u>Définition.</u> Les points A et A' sont dans le plan du même côté de la droite a, tandis que A et B sont dans le plan de côtés différents de la droite a.

5 Troisième groupe d'axiomes : congruence.
Les axiomes de ce groupe définissent la notion de congruence et, par là, celle de déplacement.
Définition. Entre les segments, il existe certaines relations exprimées par les mots congruent ou égal.

(III,1) Si A et B sont deux points d'une droite a et A' un point de cette droite ou d'une autre droite a', sur a', d'un côté de A', on peut trouver un point B' tel que le segment AB soit congruent ou égal au segment A'B', nous écrirons cette relation $AB \equiv A'B'$.
Cet axiome introduit la possibilité du report des segments dont l'univocité sera démontrée plus bas.
(III,2) Si un segment A'B' et un segment A"B" sont congruents, à un même segments AB, le segment A'B' est congruent au segment A"B'" ; en bref, si deux segments sont congruents à un troisième, ils sont congruents entre eux.
Conséquence : si le segment AB est congruent à A'B', $AB \equiv A'B'$ et $A'B' \equiv AB$ d'après (III,2) $AB \equiv AB$.
(III,3) Soient AB et BC deux segments sans points communs portés par la droite a d'une part, A'B' et B'C' deux segments de la droites a' ; si $AB \equiv A'B'$ et $BC \equiv B'C$ alors $AC \equiv A'C'$.
Cet axiome exprime la possibilité d'additionner les segments.

Définition. Soient h et k deux demi-droites différentes d'un plan α , issues d'un point O et appartenant à des droites différentes. L'ensemble des demi-droites h et k est appelé un angle; nous le désignons par (h,k) ou (k,h).
Définition. Entre les angles, il existe certaines relations par les termes congruent ou égal.
(III,4) Soient un angle (h,k) d'un plan α et une droite a' d'un plan β ainsi qu'un côté donné de a' et β. Désignons par h' une demi-droite portée par a' issue du point O', dans le plan β, il existe une unique demi-droite k' telle que l'angle (h,k) est congruent, ou égal, à l'angle (h',k') et dont l'intérieur est du côté donné de la droite a'.
Tout angle est congru à lui même.
Définition. Un angle de sommet B dont les côtés portent chacun un point A et C est aussi désigné par CBA ou brièvement par B.
(III,5) Si dans deux triangles ABC et A'B'C' les congruences suivantes sont satisfaites AB = A'B', AC = A'C', BAC = A'B'C' la congruence ABC = A'B'C' l'est aussi.
L'unicité du report des segments résulte de celle du report des angles et de l'axiome (III,5).
Théorème 11. Dans un triangle, si deux côtés sont congruents entre eux, les angles opposés à ces côtés sont congruents entre eux, ou brièvement; les angles à la base d'un triangle isocèle sont congruent.
(III,5) et (III,4). AB = BC, BC = AB et ABC = ABC donne BAC = BCA.
Définition. Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits congruents si toutes les congruences suivantes sont réalisées : AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C', A = A', B = B' et C = C'.
Théorème 12. C'est le premier cas de congruence des triangles. Si entre deux triangles ABC et A'B'C' sont satisfaites les congruences AB = A'B', AC = A'C' et A = A' ces deux triangles sont congruents.
Théorème 13. C'est le deuxième cas de congruence des triangles. Un triangle ABC est congruent à un autre triangle A'B'C' si les congruences suivantes sont satisfaites. AB = A'B',
A = A', B = B'.
Théorème 14. Si un angle ABC est congruent à un autre A'B'C', son supplément CBD est congruent au supplément C'B'D' de l'autre.
Théorème 15. Soient h, k, et l trois demi-droites d'un plan, issues d'un point O et h', k' et l' trois demi-droites d'un autre plan issues du point O' telles que si h et k sont du côté de l ou de côtés opposés de l, il en est de même de h' et k' par rapport à l'. Si les congruences suivantes sont satisfaites: (h,l) = (h',l') ; (k,l) = (k',l'), nous avons aussi (h,k) = (h',k').
Théorème 16. Supposons congruents l'angle (h,k) contenu dans un plan et l'angle (h',k') d'un autre plan ; soit l une demi-droite du plan α issue du sommet de l'angle (h,k) contenu à l'intérieur de cet angle ; il existe une unique demi-droite l' du plan α ' issue du sommet de l'angle (h',k') intérieure à cet angle telle que : (h,l) = (h',l') et (k,l) = (k',l').
Théorème 17. Si deux points Z_1 et Z_2 sont situés de part et d'autre d'une droite XY, et si les congruences $XZ_1 = XZ_2$ et $YZ_1 = YZ_2$ sont satisfaites, l'angle XY Z_1 est congruent à l'angle XYZ_2.
Théorème 18. C'est le troisième cas de congruence des triangles. Dans deux triangles ABC et A'B'C', si les côtés homologues sont congruents, les deux triangles sont congruents.
Théorème 19. Si deux angles (h',k') et (h",k") sont congruents à un troisième angle l'angle (h',k') est congruent à l'angle (h",k").
On déduit, ici également, la symétrie de la congruence des angles.
Théorème 20. Soient deux angles (h,k) et (h',k'). Si le report de l'angle (h,k) à partir de h' du côté de l' donne une demi-droite k' intérieure à l'angle (h',l'), le report de l'angle (h',l') à partir de h du côté de k donne une demi-droite extérieure à l'angle (h,k) et réciproquement.
Théorème 21. Tous les angles droits sont congruents entre eux.
Théorème 22. Un angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des deux angles non congruents.
Théorème 23. Dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.
Portons le plus court sur le plus long. D'après (th11), CDB = BCD et (th22), donne BAC < BAC ; donc BCD > BAC et a fortiori BCA > BAC.



Théorème 24. Un triangle qui possède deux angles congruents est isocèle.
Conséquence du (th23).
Théorème 25. Deux triangles ABC et A'B'C' sont congruents si les congruences suivantes sont satisfaites: AB = A'B', A = A', C = C'.
Théorème 26. Tout segment peut être bissecté.
Quatrième groupe d'axiomes : parallèles.
On prend un point A extérieur à une droite a ; une droite C coupant a et passant par A. On trace ensuite la droite b telle que c coupe a et b sous des angles correspondants égaux. D'après (th22), si a et b se coupaient du côté "droite", nous aurions un triangle et alors l'angle extérieur serait plus grand que l'angle opposé intérieur. Or il sont égaux, donc les droites ne se coupent pas.
Définition. Deux droites coplanaire qui ne se coupent pas sont dites parallèles.
(IV) Axiome d'Euclide. Soient une droite a et un point A extérieur à a ; dans le plan déterminé par a et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a.
Il en résulta de ce qui précède et de l'axiome des parallèles que, par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.
Proposition. Si deux droites coplanaires a et b ne coupent pas une droite c de leur plan, elles ne se coupent pas.

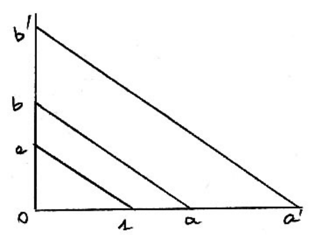
<u>Théorème 30.</u> Si deux parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes et alternes-externes sont congruents entre eux et réciproquement, la congruence des angles alternes - interne ou alternes-externes implique le parallélisme des droites données.
<u>Théorème 31.</u> Les angles d'un triangle font ensemble deux angles droits.

<u>Cinquième groupe d'axiomes : continuité.</u>
<u>(V,1) Axiome de la mesure ou d'Archimède.</u>
Si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B.
<u>(V,2) Axiome de l'intégrité linéaire.</u>
L'ensemble des points d'une droite soumis aux relations d'ordre et de congruence, n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle sont valable les relations précédentes et les propriétés de l'ordre linéaire et de congruence déduites des axiomes (I) à (III) et de l'axiome (V;1).

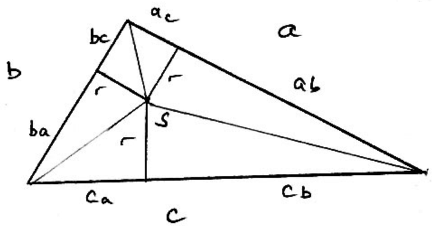
<u>Théorème 32.</u> **<u>Théorème de l'intégrité.</u>** Les éléments de la géométrie (les points, les droites et les plans) constituent un ensemble qui n'est susceptible d'aucune extension si les axiomes d'appartenance, d'ordre, de congruence et l'axiome d'Archimède sont conservés.

Chapitre III

<u>Théorie des proportions</u>
<u>2. Démonstration du théorème de Pascal.</u>
Dans ce chapitre, nous admettons les axiomes I (1 à 3), (II) à (IV).
<u>Théorème 40. Théorème de Pascal.</u>
Soient A, B, C et A', B', C' deux groupes de trois points appartenant respectivement à deux droites et tous différents de l'intersection de ces trois droites ; si CB' est parallèle à BC' et CA' parallèle à AC', BA' est parallèle à AB'.
Le calcul segmentaire permet d'établir rigoureusement la théorie euclidienne des proportions et cela sans recours à l'axiome d'Archimède.
<u>Définition.</u> Soient a, b, a', b' quatre segments quelconques; on les dit liés par la proportion
a : b = a' : b' si l'équation a.b' = b.a' est satisfaite.
<u>Définition.</u> Deux triangles sont dits semblables si leurs angles homologues sont congruents.
<u>Théorème 41.</u> Si a, b et a', b' sont des côtés homologues de deux triangles semblables, la proportion a : b = a' : b' est satisfaite.



1[er] cas. Les triangles sont droits; supposons les deux triangles reportés sur le même angle droit. A partir du sommet, sur l'un des côtés, portons le segments 1 et, par son extrémité menons la parallèle aux deux hypoténuses ; sur le second côté, cette parallèle coupe le segment e. on a, par définition, du produit segmentaire : b = e.a et b' = e.a'. Nous avons donc
a.b' = a.e.a' et b.a' = e.a.a'. soit a.b' = e.a.a' et b.a' = e.a.a'. donc a.b' = b.a'.
2[ème] cas. Passons au cas général. Dans les deux triangles donnés, on construit les points de concours S et S' des bissectrices des angles; de ces points abaissons les perpendiculaires r et r' sur les côtés. Appelons les segments obtenus sur les côtés a, b, et c du premier triangle et $a'_b, a'_c, b'_c, b'_a, c'_a, c'_b$, la propriété de distributive implique puisque $a_b.r' = a'_b.r$ et $a_c.r' = a'_c.r$, $(a_b + a_c).r' = (a'_b + a'_c).r.$
Donc a.r' = a'.r et b.r' = b'.r. Soit encore : a : r = a' : r' et b : r = b' : r' ; a.r' = r.a' ; b.r' = r.b' et a : a' = r : r'; b : b' = r : r'. Donc finalement a : a' = b : b' et a : b = a' : b'. Le théorème (41) conduit au théorème fondamental de la similitude.



<u>Théorème 42.</u> **Si deux parallèles coupent sur les côtés d'un triangle quelconque les segments a, b et a', b', la proportion a : b = a' : b' est satisfaite. Réciproquement, si quatre segments a, b, a', b' satisfont à la proportion ci-dessous et sont reportés sur les côtés d'un angle, les droites qui joignent les extrémités de a et de b à celles de a' et de b' sont parallèles.** **<u>Sigle : (D.P.C.T)</u>**

ANNEXE XXIX : FORT et DREYFUS (1908)

§II. Théorème de Thalès. Applications
239. Segments proportionnels à leurs projections.
Théorème. Des segments pris sur une même droite sont proportionnels à leurs projections sur une autre. **<u>Sigle : (P)</u>**
242. Théorème de Thalès. Pour qu'une droite soit parallèle aux deux bases d'un trapèze ABCD, il faut et il suffit qu'elle coupe les côtés non parallèles AD et BC ou leur prolongements en deux points E et F tels que l'on ait : AE/BF = AD/BC.

ANNEXE XXX : GREVY (1909)

179 Relation vectorielle. Il existe sur une droite, un seul point M que le rapport des vecteurs qui ont ce point pour origine et deux points donnés A et B de cette droite pour extrémité ait une valeur donnée ; ce point est entre A et B ou en dehors de l'intervalle AB suivant que le rapport est négatif ou positif. Deux points M et M' sont dits conjugués harmoniques par rapport à A et B, si les rapports $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ et $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ sont opposés.
182. Théorème. Une parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés ou leur prolongements des segments proportionnels. **<u>Sigle : (D.P.C.T)</u>**

Remarque II. Les points D et E étant simultanément entre A et B, A et C ou étant simultanément sur les prolongements de AB et AC, les vecteurs $\overline{DA}$ et $\overline{DB}$, $\overline{EA}$ et $\overline{EC}$ ont en même temps même sens ou des sens différents, de sorte que $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ et $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}$ ont toujours même signe, on a donc $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

184. Corollaire I. Des parallèles déterminent sur les droites qu'elles rencontrent des segments proportionnels. Sigle : (F.P)

185. Corollaire II. La parallèle à un côté d'un triangle détermine avec les deux autres côtés un triangle dont les côtés sont proportionnels à ceux du premier. Sigle (T.S)

186. Corollaire III. Trois droites concourantes déterminent en même temps sur deux parallèles des vecteurs proportionnels. Sigle : (F.S)

187. Théorème (Réciproque). Si deux points D et E, situés sur les côtés AB et AC d'un triangle ou sur les prolongements de ces côtés, déterminent des vecteurs d'origine A proportionnels, la droite qui les joint est parallèle au troisième côté BC du triangle.

ANNEXE XXXI : BOREL (1910)

PREFACE

L'idée que l'enseignement de la Géométrie élémentaire doit être renouvelé gagne chaque jour du terrain. Elle se heurte cependant encore à de sérieuses résistances, de la part d'excellents esprits qui redoutent la disparition de l'édifice logique bâti sur les Eléments d'Euclide. Ne vaut-il pas mieux, disent-ils, continuer à faire à cet édifice des modifications, des réparations, au lieu de le démolir pour reconstruire à nouveau ? Tel n'est mon avis, et, je suis fièrement convaincu que, dans quelques dizaines d'années au plus tard, l'enseignement de la géométrie aura une base plus moderne. Il trouvera cette base dans les travaux des grands géomètres et analystes du XIX ème siècle, qui nous ont appris que : la géométrie est l'étude du groupe des mouvement. Substituer de plus en plus l'étude dynamique des phénomènes à leur étude statique, est d'ailleurs une tendance essentielle de l'esprit moderne ; c'est l'idée de l'évolution qui domine toujours davantage la pensée contemporaine. [...] C'est pourquoi j'ai cherché à écrire une Géométrie plus concrète, où les considérations de symétrie, de déplacements, sont invoquées le plus souvent possible. Les démonstration qui en résultent sont plus simples et me paraissent plus claires que les démonstrations euclidiennes.

PREMIERE PARTIE

I. Généralités sur les figures planes.

Propriété fondamentale de la droite.

Par deux points on peut faire passer une droite et on ne peut en faire passer qu'une.

Egalité des figures planes.

Définition. On dit que deux figures planes sont égales lorsqu'on peut amener leurs plans en coïncidence de telle manière que ces figures coïncident.

[...] **Définition complémentaire.**

Lorsque deux figures planes égales sont tracées chacune sur un côté déterminé de son plan, on dit qu'elles sont directement égales ou inversement égales, suivant que, pour les faire coïncider, il est ou non nécessaire de retourner l'un des plans.

[...] Symétrie d'une figure.

Soit maintenant une figure située dans la partie supérieure du plan ; cette figure est, par exemple, un triangle MNP. Retournons le plan de manière à appliquer la droite AB sur elle-même, les points A et B coïncidant avec leur ancienne position ; après ce retournement, la partie supérieure du plan se trouvera appliquée sur la partie inférieure, et inversement. La figure MNP prendra alors une certaine position M'N'P' que nous figurons en pointillé.

XI. Mouvement de translation. Parallèles.

Le glissement de l'équerre le long de la règle, que nous avons utilisé dans le paragraphe précédent, a des propriétés très importantes qui méritent une étude plus approfondie. On lui donne le nom de mouvement de translation ; nous allons tout d'abord le définir d'une manière générale, en nous bornant toutefois pour l'instant aux figures planes.

Définition. Etant donnés deux plans appliqués l'un sur l'autre, si l'un P reste fixe et que l'autre Q se déplace de manière qu'une certaine droite de Q reste constamment appliquée sur une droite fixe de P, on dit que le mouvement de Q par rapport à P est un mouvement de translation rectiligne parallèle à la droite fixe ou, plus brièvement, un mouvement de translation.

Propriété fondamentale de la translation.

Dans une translation, tous les points de la figure mobile se déplacent de longueurs égales. Nous regardons cette propriété comme évidente.

XVI. Symétrie par rapport à un centre ; angles formés par des parallèles.

Figures symétrique. On dit que deux figures sont symétriques par rapport à un centre O si, à tout point A de l'une d'elles correspond un point A' de l'autre, tel que O soit le milieu du segment AA'.

XXVI Propriétés simples du triangles

Si l'on mène par chacun des trois sommets du triangle ABC la parallèle au côté opposé, on forme trois nouveaux triangles A'BC, B'AC, C'AB égaux à ABC et les quatre triangles réunis forment un grand triangle A'B'C' ; les côtés du triangle A'B'C' sont doubles des côtés de ABC.

TROISIEME PARTIE

Lignes proportionnelles

Théorème I. Etant données deux demi-droites AB et AC formant un angle A, si les droites parallèles BC et B_1C_1 rencontrent ces demi-droites de telle manière que AB_1 soit égal à un certain nombre de fois AB, on peut en conclure que AC_1 est égal au même nombre de fois AC et B_1C_1 au même nombre de fois BC. Sigle : (A.B.P)

Théorème II. Diverses parallèles à une direction déterminent sur les côtés d'un angle des segments proportionnels. Sigle : (F.P)

Définition des grandeurs proportionnelles.

Lorsque l'on parle de grandeurs proportionnelles, il faut toujours entendre qu'il y a deux séries de grandeurs ; [...] De plus on admet qu'à chaque grandeur de la première série correspond d'une manière bien déterminée une grandeur et une seule de la deuxième et réciproquement.

Définition. On dit que deux séries de grandeurs sont proportionnelles lorsque le rapport de deux grandeurs quelconques de la première série est égal au rapport des deux grandeurs correspondantes de la deuxième.

La définition précédente exige seulement que les grandeurs de la première série soient de même espèce et que les grandeurs de la deuxième série soient aussi de même espèce, les deux grandeurs des deux séries pouvant être d'espèces différentes. Lorsque les grandeurs de deux séries sont toutes d'une même espèce, comme dans le théorème précédent, on peut donner une autre définition équivalente.

Autre définition : Deux séries de grandeurs, toutes de même espèce, sont dites proportionnelles lorsque le rapport d'une grandeur quelconque de la première série à la valeur correspondante de la seconde série est le même, quelle que soit la grandeur choisie dans la première série.

Théorème III. Etant donnés un angle A et des droites parallèles B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 ... on a :

$\frac{AB_1}{B_1C_1} = \frac{AB_2}{B_2C_2} = \frac{AB_3}{B_3C_3}$ ou, ce qui revient au même $\frac{AB_1}{B_1C_1} = k'$ ne dépendant pas de la position de B_1, mais seulement de l'angle A et de la direction à laquelle les droites B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 ... sont assujetties à être parallèles.

ANNEXE XXXII : VALLORY (1911)

§II. Segments commensurables ou incommensurables

56. Recherche de la plus grande partie aliquote commune à deux segments.

Si B n'est pas contenue exactement dans A, A tombera entre deux termes de la suite B, 2B, 3B,...,nB, (n+1)B,... Par exemple $A = n_1B + B_1$ ou $B_1 < B$.

Si B_1 est une partie aliquote de B c'est la plus grande partie aliquote de B_1 et B et donc la plus grande partie aliquote commune à A et B. Sinon $B = n_2B_1 + B_2$ avec $B_2 < B_1$ et on raisonne comme ci-dessus. Si B_2 est une partie aliquote de B_1, on conclue.

Sinon, $B_1 = n_3B_2 + B_3$ avec $B_3 < B_2$.

On a alors une suite (α) A, B, B_1, B_2, ..., B_α, ... telle que les parties aliquotes communes à deux segments consécutifs sont les mêmes pour toutes les paires de segments consécutifs.

Si la suite se termine, les segments A et B sont commensurables entre eux. Car B_α par exemple est une partie aliquote de $B_{\alpha-1}$ et la plus grande partie aliquote commune de $B_{\alpha-1}$ et de B_α est B_α et on remonte jusqu'à A et B. Réciproquement, si A et B sont commensurables entre eux, la suite (α) se termine.

57. Si la suite (α) ne se termine pas, les segments A et B sont incommensurables entre eux et réciproquement.

59. Définition. On a, si deux segments sont commensurables

A = mU, B = nU d'où $U = \frac{A}{m} = \frac{B}{n}, A = \frac{m}{n}B = B \times \frac{m}{n}, B = \frac{n}{m}A = A \times \frac{n}{m};$

Définition des nombres rationnels

Mesure d'un segment incommensurable

117. Théorème. Le rapport de deux segments OA et OB est égal au quotient de leurs mesures A et B obtenues avec une même unité U.

Pour démontrer l'égalité des nombres OA/OB et A/B nous montrerons que les valeurs approchées de ces nombres à 1/n près par défaut sont égales quel que soit le nombre entier n.

Soit pOA/n le plus grand multiple de OB/n qui ne dépasse pas le segment Oab ; on a $p.\frac{OA}{n} \leq OA < (p+1).\frac{OB}{n}$. Mesurons ces segments avec l'unité U ; OA a pour mesure A, OB pour mesure B. Donc OB/n a pour mesure B/n et ainsi, $p.\frac{B}{n} \leq A < (p+1).\frac{B}{n}$.

En divisant par le nombre B, $\frac{p}{n} \leq \frac{A}{B} < \frac{p+1}{n}$. Ceci montre que p/n est une valeur approchée des deux nombres OA/OB et A/B à 1/n près par défaut, ce qui établit la proposition.

170. Proportionnalité des angles et des arcs.

La rapport de deux arcs (d'une même circonférence) est égal au rapport des angles au centre correspondants.

173. Théorème général permettant de reconnaître si deux grandeur sont proportionnelles.

Deux grandeurs A et B sont proportionnelles si elles satisfont à la fois les deux conditions suivantes :

1. A deux grandeurs égales de l'une (arbitrairement choisies) correspondent deux valeurs égales de l'autre.
2. Si une valeur de la première est la somme de deux valeurs, sa correspondante est la somme des correspondantes de ces dernières.

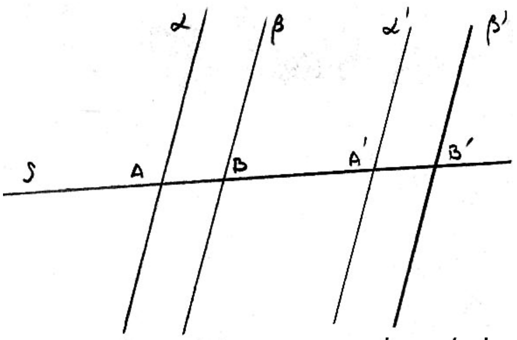
CHAPITRE VI

§6 Bandes et murs, parallélogrammes

233. Proportionnalité des bandes parallèles aux segments qu'elles interceptent sur une même sécante. **Sigle : (B.P)**

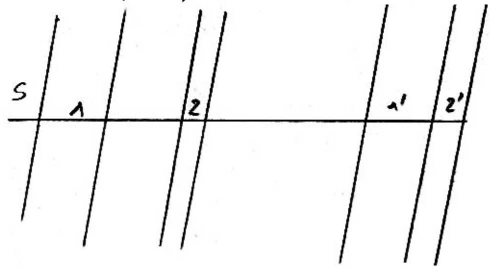
Cette proportionnalité résulte des deux théorèmes suivants où nous ne considérons que des bandes parallèles situées dans un même plan.

Théorème I. Deux parallèles égales interceptent sur une même sécante des segments égaux.



La translation AA' juxtapose intérieurement la bande $\alpha\beta$ à la bande $\alpha'\beta'$; donc elle superpose la première à la seconde puisque ces bandes sont égales. Or par cette translation le segment AB glisse sur la sécante S ; à la fin du mouvement, lorsque le point A est en A', le point B se trouve dont à la fois sur S et sur le bord β ', lequel est la position finale du bord β ; il coïncide donc avec le point B' et le segment AB coïncide avec le segment A'B'.

Théorème II. Des bandes parallèles étant coupées par une sécante, si l'une d'elles est la somme de deux autres, il lui correspond sur cette sécante un segment égal à la somme de ceux qui correspondent à ces dernières.

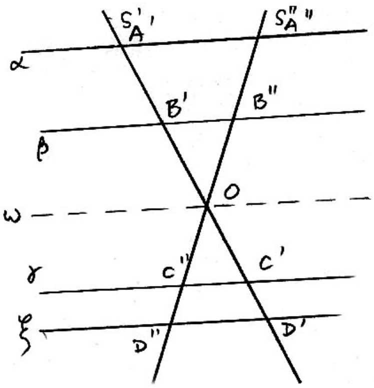


1 et 2 et leur somme (1' +2'). Sur une même sécante S, les bandes égales et parallèles 1 et 1' interceptent des segments égaux 1 et 1' ; de même, les segments 2 et 2' sont égaux. Par suite, le segment (1'+2') correspondant à la bande (1'+2') est la somme 1 et 2.

<u>Le théorème de Thalès.</u>

298. Théorème de Thalès. Si deux droites concourantes sont coupées par des droites parallèles, les segments déterminés par celle-ci sur la première sont proportionnels aux segments qu'elles déterminent sur la seconde. <u>Sigle : (F.P)</u>

Le point de concours O peut être considéré comme la double intersection des droites S' et S'' avec la parallèle ω ; il joue à la fois le rôle du point A', par exemple, et du point A''. D'après (233) on a, $\dfrac{bande\,\alpha\beta}{bande\,\omega\gamma} = \dfrac{A'B'}{OC'}$ et $\dfrac{bande\,\alpha\beta}{bande\,\omega\gamma} = \dfrac{A''B''}{OC''}$. On en déduit de là : A'B'/OC' = A''B''/OC''.



299. Deuxième manière d'écrire le théorème de Thalès.

Ici, les grandeurs qui sont proportionnelles sont toutes de même espèce. Par suite, on peut écrire que le rapport de deux grandeurs correspondantes est constant.

A'B'/A''B'' = B'O/B''O = OC'/OC'' = C'D'/C''D'' = k

300. Enoncés particuliers du théorème de Thalès.

I. Une parallèle aux bases d'un trapèze partage les côtés non parallèles en segments proportionnels.

II. Une parallèle à un côté d'un triangle partage les deux autres côtés en segments proportionnels.

302. Premier cas de similitude.

Deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun sont semblables.

303. Corollaire I. Une parallèle à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier. <u>Sigle : (T.S)</u>

Les réciproques du théorèmes de Thalès et leurs corollaires.

I. Si une droite partage les côtés non parallèles d'un trapèze dans le même rapport et de la même manière, elle est parallèle à la base.

II. Si une droite partage deux côtés d'un triangle dans le même rapport et de la même manière, elle est parallèle au troisième côté.

XXXIII : NIEWENGLOWSKI (1911)

CHAPITRE II

Segments proportionnels

6.[...] Soient AB et CD deux segments égaux, portés par une même droite XY ; si, par les extrémités de ces segments, on trace des droites parallèles AA', BB', CC', DD', ces parallèles déterminent sur toute droite X'Y' qu'elle rencontre, deux segment A'B', qui sont égaux comme AB et CD. En effet, AE et CF étant tracés parallèlement à X'Y', on obtient deux parallélogrammes AEA'B', CFC'D', de sorte que A'B' = AE, C'D' = CF. Or, si l'on fait subir au triangle ABE une translation équipollente à AC, il viendra s'appliquer sur CDF et, par suite, AE = CF ; donc A'B' = C'D'.

8. Théorème de Thalès. Des droites parallèles découpent sur deux droites quelconques des segments proportionnels.

9. Réciproque. Si l'on porte sur deux droites concourantes, à partir de leur point commun, des segments proportionnels, les droites joignant les extrémités correspondantes sont parallèles.

12. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine par sa rencontre avec les deux autres côtés ou leur prolongement, un nouveau triangle, dont les côtés sont proportionnels à ceux du premier.

Chapitre V

<u>Polygones semblables</u>

6. La notion de similitude est une de ces notions primordiales que l'esprit humain avait élaborées bien avant que la géométrie fût constituée en un corps de doctrine. Il est probable que cette notion provient de la différence de grandeur des images formées sur la rétine par des objets identiques placés à des distances différentes. Quoi qu'il en soit, il est certain que nous avons la faculté de nous représenter la forme d'un objet indépendamment de sa grandeur, c'est à dire que nous concevons qu'on puisse, par exemple, doubler les dimensions d'un objet ou, au contraire, les réduire de moitié, sans altérer la forme. L'égalité nous paraît ainsi comme un cas particulier de la similitude.

XXXIV : VACQUANT et MACE de LEPINAY (1916) et (1917)

LIVRE PREMIER

§I. Angles ; droites perpendiculaires

30. Théorème. Par un point O d'une droite AB on peut mener d'un côté de cette droite, une demi-droite perpendiculaire à cette droite et on ne peut en mener qu'une.
34. Théorème. Quand deux angles adjacents ont leurs côtés extérieurs en ligne droite, leur somme est égale à deux angles droits.
Théorème. Une sécante rencontrant deux droites parallèles forme avec elles huit angles, dont généralement quatre sont égaux et quatre obtus.
45. Par un point O pris hors d'une droite AB, on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite et on n'en peut mener qu'une.
271.Théorème de Thalès. Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels. (D.P.C.T)

ANNEXE XXXV : Programmes du 10 juillet 1925 et 13 mai 1925

L'enseignement secondaire des garçons.

Classe de troisième

Droites parallèles et lignes proportionnelles. Triangles semblables. Construction de la quatrième proportionnelle.
Polygones réguliers : carré, hexagone, triangle équilatéral.
Mesure des airs : rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze.
Rapport des aires de deux triangles semblables.

Classe de seconde

Longueurs proportionnelles. Points qui partagent un segment dans un rapport donné. Définition de la division harmonique. Droite parallèle et lignes proportionnelles.
Triangles semblables. Polygones semblables.

Classe de mathématique élémentaire

Homothétie. Similitude. Puissance d'un point.

ANNEXE XXXVI : LEBESGUE (1931)

21. Voyons donc comment se présenteront les démonstrations. On prouvera, à la façon ordinaire, le théorème géométrique de Thalès : des droites ou des plans parallèles qui déterminent sur une sécante des segments égaux entre eux. Ceci étant, soient des éléments parallèles déterminant sur une sécante les segments AB et CD et sur une autre A'B' et C'D'. On sait déjà que si AB est une, deux, trois ... fois CD, A'D' est une deux trois fois C'D'; comparons plus généralement la mesure AB avec l'unité U = CD à la mesure de A'B' avec l'unité U' = C'D'. D'après ce qui précède, on obtient la même valeur approchée par défaut aux premiers stades des deux opérations de mesure, c'est à dire les deux nombres mesures cherchés ont la même partie entière.

Pour les seconds stades, il faut utiliser des unités U_1 et U'_1 contenues respectivement dix fois dans U et U'. Or, si l'on suppose U_1 porté dix fois sur AB et si par les 9 points de subdivision on mène des éléments parallèles à ceux donnés, ils divisent A'B' en dix segments égaux entre eux donc à U'_1 . Ainsi U_1 et U'_1 se correspondent par les éléments parallèles comme U et U' et aux seconds stades des opérations de mesure, on obtient la même valeur approchée par défaut. En d'autres termes, le premier chiffre décimal est le même pour les deux nombres mesures cherchés. En continuant, on arrive donc à : AB/CD = A'B'/C'D'; on a à prouver que deux nombres sont égaux; ces deux nombres ont été définis chiffre par chiffre ; on constate qu'ils sont identiques chiffre par chiffre en appliquant la définition. Et le procédé de la démonstration sera le même dans tous les cas. (angle arc par exemple).

ANNEXE XXXVII, 1 : CHENEVIER (1931)

325. Etude de la réciproque.
Théorème. Si deux divisions semblables portée par des droites sont telles que le point commun aux deux droites soit son propre homologue, les droites qui joignent les points homologues sont parallèles.

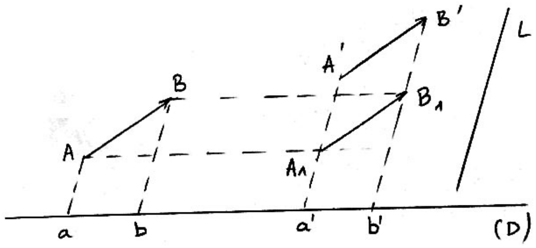
ANNEXE XXXVII 2 : ESTEVE et MITHAULT (1935)

40. Rapport de deux vecteurs dont les supports sont parallèles.
C'est le nombre algébrique ayant pour valeur absolue le rapport des grandeurs des deux vecteurs, et pour signe, le signe + ou le signe - suivant que les vecteurs sont de même sens ou non.

IV. Projections.

49. Définition.
On appelle projection d'un point M sur une droite (D), parallèlement à une direction L, l'intersection m de (D) avec la parallèle à L menée par M. Dessin, o

50. **Si deux vecteurs sont équipollents, ils ont des projections équipollentes sur une même droite ou sur des droites parallèles.**
Si les vecteurs se déduisent l'un de l'autre par une translation parallèle à (D), leurs projections se déduisent l'une de l'autre par cette translation: elles sont donc équipollentes. Dans le cas contraire, amenons $\overline{A}\vec{B}$ en $\overline{A_1}\vec{B_1}$ par la translation $\overline{a}\vec{a}'$: A_1 est sur A'a. $\overline{A_1}\vec{B_1}$ étant équipollent à $\overline{A'}\vec{B'}$, le quadrilatère $A'A_1B_1B'$ est un parallélogramme et B_1 est donc sur $B'b'$. Par suite $a\vec{b} = a'\vec{b'}$.



51.Théorème de Thalès.
On conclut immédiatement que :
Des parallèles déterminent sur deux sécantes des vecteurs proportionnels.

En effet, il est clair que $\dfrac{a\vec{b}}{a\vec{d}} = \dfrac{a'\vec{c'}}{a'\vec{d'}}$. Il suffit de se rappeler la définition de l'expression rapport de vecteurs.

ANNEXE XXXVIII

<u>30 août 1937 et 11 avril 1938</u>.

<u>Classe de seconde.</u>

Longueurs proportionnelles. Points partageant un segment dans un rapport donné. Définition de la division harmonique. Droites parallèles et lignes proportionnelles. Triangles semblables. Polygones semblables. Propriété des bissectrices d'un triangle.

<u>Classe de quatrième.</u>

Produit d'un segment par une fraction. Rapport de deux segments. Diverses formes du théorème de Thalès. (La définition et l'utilisation de l'homothétie sont facultatives).
Proportionnalité d'un segment et de sa projection. Application à la construction du produit d'un segment par une fraction, d'une quatrième proportionnelle, des points d'une droite dont le rapport des distances à deux points de cette droite est donné.
Triangle semblables ; cas de similitude.

<u>Instructions du 30 septembre 1938 :</u>
Arithmétique et Algèbre.
Vecteurs et droites orientés. Classe de quatrième.
On peut aussi utiliser en géométrie la notion de rapport algébrique de vecteurs parallèles (diverses formes du théorème de Thalès et propriété des projections).

ANNEXE XXXIX : VIEILLEFOND (1937)

§3. Mouvement de translation rectiligne.
199. Sur un plan P plaçons une règle que nous maintenons fixe. Posons sur le plan une équerre de façon qu'un de ses côtés s'appuie sur le bord de la règle. Nous pourrons faire glisser l'équerre le long de la règle. Ce mouvement s'appelle un mouvement de translation rectiligne.
201. Deux figures dérivant l'une de l'autre par une translation rectiligne sont directement égales.
202. Théorème. Dans un mouvement de translation rectiligne toute droite D du plan mobile parallèle à la glissière glisse sur elle même. La droite D forme avec la glissière mobile AB une figure invariable.
203. Théorème. Si une droite rencontre la glissière elle devient, par une translation rectiligne une droite D' parallèle à D'.
204. Réciproquement. Si deux droites sont parallèles elles sont superposables par translation rectiligne.
388. Lemme. Si deux segments rectilignes sont parallèles (ou porté par une même droite), leurs projections sur une même droite sont égales.
389. Théorème des projections. Le rapport de deux segments parallèles ou portés par une même droite AB et CD est égal au rapport de leurs projections sur une même droite XY.
392. Théorème de Thalès. Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments proportionnels.
Si l'on suppose que l'on projette AB et CD sur X'Y' parallèlement à AA' on a, AB/CD = A'B'/C'D' et en permutant les moyens : AB/A'B' = CD/C'D'. D'où le nouvel énoncé : Lorsque plusieurs droites parallèles sont coupées par deux sécantes, le rapport de deux segments correspondants des deux sécantes est égal au rapport des deux autres segments correspondants quelconques de ces même sécantes.
394. Réciproque. Si les points B' et C' partagent les côtés AB et AC du triangle ABC en segments proportionnels et si les points A, B', B de la droite AB se succèdent dans le même ordre que les points A,C',C de la droite AC, les deux droites BC et B'C' sont parallèles.

ANNEXE XL : ITARD et LECONTE (1940)
III Théorème de Thalès

21. Bandes égales à bords parallèles.
Si les bords de deux bandes xy et uv, x'y' et u'v' sont parallèles et si ces bandes découpent sur une droite deux segments égaux AB = A'B', elles découpent aussi sur toute autre droite des segments égaux, CD = C'D'.
22. Premier cas du théorème de Thalès.
Si deux bandes dont les bords sont parallèles découpent sur une première sécante deux segments AB, A'B', dont le rapport est la fraction p/q, elles découpent sur une seconde sécante deux segments CD, C'D' dont le rapport est aussi égal à p/q, de telle manière que l'on peut écrire l'égalité : AB/A'B' = CD/C'D'.
23. Deuxième cas du théorème de Thalès.
Théorème. Deux bandes parallèles découpent sur toute sécante deux segments dont le rapport reste le même quelle que soit la sécante.
24. Nouvelle forme du théorème de Thalès.
Si deux sécantes coupent deux bandes parallèles, le rapport des deux segments compris dans une bande est égal au rapport des deux segments compris dans l'autre bande.
26. Réciproque du théorème de Thalès.
Les bords d'une bande coupant deux sécantes en A et B, en C et D. Si deux points E et F de AB et CD, tous deux intérieurs ou extérieurs à ces segments sont tels que EA/EB = EC/FD, la droite EF est parallèle à AC et BD.

ANNEXE XLI : LEBOSSE et HEMERY (1940)

183. Segments homothétiques.

Soient deux segments parallèles AB et A'B'. AA' et BB' se coupent en O et $\frac{\overline{OA}'}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}'}{\overline{OB}}$. Soit k la valeur algébrique des rapports précédents, nous avons : $\overline{OA}' = k.\overline{OA}$ et $\overline{OB}' = k.\overline{OB}$. Les points A' et B' sont dits homothétiques des points A et B par rapport au point O appelé centre d'homothétie.

Considérons un points M de AB et l'intersection M' de A'B' et de OM. Nous avons $\frac{\overline{OM}'}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OA}'}{\overline{OA}} = k$. Les triangles OA'B' et OAB sont semblables (181) : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$. Or $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens ou de sens contraire en même temps que $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OA}$, c'est à dire suivant que le rapport k est positif ou négatif. D'où : $\frac{\overline{A}'\overline{B}'}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}'}{\overline{OA}} = k.$

Théorème. Le rapport de deux segments homothétiques est égal au rapport d'homothétie.
184. Division homothétiques.
Théorème. Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des segments homologues proportionnels.
185. Réciproque. Lorsque trois droites déterminent sur deux sécantes parallèles des segments proportionnels, elles sont concourantes.
186. Corollaire. La droite qui joint les milieux des bases d'un trapèze passe par le point de rencontre des côtés non parallèles et par le point de rencontre des diagonales.

ANNEXE XLII : BRACHET et DUMARQUE (1940)

Vecteurs proportionnels.
208. Théorème. Si deux bandes sont parallèles, elles déterminent sur deux sécantes des vecteurs homologues proportionnels. <u>Sigle : (B.P)</u>
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens ainsi que les vecteurs A'B' et C'D'.
Donc $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ et $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$ ont le même signe.
1er cas, on connaît une commune mesure aux segments AB et CD. Les parallèles déterminent des bandes égales.
2ème cas, on ne connaît pas de commune mesure à AB et CD. On raisonne comme au n°124.
Application du théorème de Thalès au triangle.
212. Théorème. Pour qu'une droite soit parallèle à un côté du triangle, il faut et il suffit qu'elle détermine sur les supports des deux autres côtés des vecteurs proportionnels.

ANNEXE XLIII : BENOIT (1940)

29. Théorème de Thalès. Des droites parallèles (trois au moins) déterminent sur deux droites quelconques des segments proportionnels. <u>Sigle (D.P.C.T)</u>
30. Segments déterminés sur deux côtés d'un triangle par une parallèle au troisième côté.
Théorème. Les sommets d'un triangle et les points où une parallèle à l'un des côtés coupe les droites dont fond partie les deux autres côtés déterminent sur ces droites des segments proportionnels.

CHAPITRE VI

Un vecteur est un segment de droite que l'on suppose parcouru par un point mobile d'un bout à l'autre dans un sens déterminé. Le sens de déplacement du mobile s'appelle le sens du vecteur. La position de départ du mobile s'appelle l'origine du vecteur; sa position d'arrivée est l'extrémité du vecteur.
[...]
33. Rapport de deux vecteurs ayant même support. Forme algébrique du théorème de Thalès.
Définition. Etant donnés deux vecteurs AB et CD ayant même support, on appelle rapport de ces deux vecteurs le nombre algébrique qui a pour valeur absolue le quotient de leurs longueurs et pour signe le signe + ou le signe - suivant que les deux vecteurs sont de même sens ou

de sens contraire. Si l'on coupe deux droites orientée Δ et Δ 'par des droites parallèles, le rapport des mesures algébriques de deux quelconques des vecteurs qu'elles déterminent sur Δ est égal au rapport des mesures algébriques des deux vecteurs correspondants sur Δ '.
Car suivant que les vecteurs AB et CD sont de même sens ou de sens contraire, les vecteurs A'B' et C'D' sont aussi de même sens ou de sens contraire ; le rapport des mesures algébriques de ces derniers est donc de même signe que le rapport algébrique des deux premiers. Les valeurs algébriques absolues étant égales, on obtient : $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'}\,\overline{B'}}{\overline{C'}\,\overline{D'}}$. On déduit aussi : $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'}\,\overline{B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'}\,\overline{D'}}$. D'où : Si l'on coupe deux droites orientées Δ et Δ ' par des droites parallèles, le rapport des mesures algébriques de l'un quelconque des vecteurs quelles déterminent sur Δ et du vecteur correspondant de Δ ' a la même valeur quel que soit le vecteur choisi sur Δ .

Application au triangle : $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. (ABC est un triangle $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$).

34. Point partageant un vecteur situé sur un axe dans un rapport ayant une valeur algébrique donnée.
Supposons qu'un sens positif ait été adopté sur la droite que déterminent deux points donnés A et B. Si un point se situe entre A et B, le rapport dans lequel P partage le segment AB est négatif. Sinon, il est positif.

ANNEXE XLIV CAMMAN (1942)

Axiomes sur la droite
25. Déplacement. On appelle déplacement tout glissement dans le plan, accompagné ou non d'un retournement. Un déplacement ne déforme pas une figure et n'altère la grandeur d'aucune de ses parties.
La possibilité du déplacement des figures planes, ou l'existence de figures invariables ou indéformables, constitue un postulat fondamental de la géométrie plane.
26.Figures égales. Deux figures d'un plan sont égales quand un déplacement convenablement choisi amène leur coïncidence.
40. Vecteur. Un vecteur est la partie d'une droite comprise entre deux points, c'est à dire, un segment rectiligne, sur lequel on a marqué un sens de parcours. Le point de départ, qui est l'un des points qui limitent le vecteur, est l'origine.
245. Vecteurs équipollents. Deux vecteurs équipollents sont deux vecteurs égaux parallèles et de même sens.
257. Théorème. Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments proportionnels.
Propriété des projections.
303. Théorème. Le rapport de deux vecteurs portés par un axe est égal au rapport de leurs projections orthogonales sur un autre axe.

ANNEXE XLV : LEBOSSE et HEMERY (1947)

Théorème de Thalès et applications.

20. Enoncé général.
Lorsque deux droites sont parallèles, elles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.
22. 1ère forme particulière du théorème de Thalès.
Toute parallèle aux bases d'un trapèze détermine sur les côtés non parallèles des segments proportionnels. Sigle : (D.P.C.Tr)
23. 2ème forme particulière du théorème de Thalès.
Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments correspondants proportionnels. Sigle (D.P.C.T)

ANNEXE XLVI : DOLLON et GILLET (1950)

Résultat fondamental. Sur une droite il existe deux points partageant un segment AB de cette droite dans un rapport k quelconque différent de l'unité ; l'un de ces points est intérieur à AB, l'autre extérieur et tous deux sont du même côté du milieu de AB.
317. Rapport algébrique de deux vecteurs parallèles.
Définition. Etant donnés deux vecteurs AB et A'B' ayant leurs supports parallèles, on appelle rapport algébrique des ces deux vecteurs un nombre algébrique ayant pour valeur absolue le rapport des segments AB/A'B', le signe + si les vecteurs sont de même sens, le signe - s'ils sont de sens contraire. On représente ce rapport par : $\frac{\overline{A}\vec{B}}{\overline{A'}\,\vec{B'}}$.
318. Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe parallèle.
On donne un vecteur AB et un axe xx' parallèle à ce vecteur ; sur cet axe on prend un vecteur $\vec{u}$ ayant pour sens celui de l'axe et une longueur égale à 1 : $\vec{u}$ est appelé vecteur unitaire.
Définition. On appelle mesure algébrique du vecteur AB le rapport algébrique du vecteur AB au vecteur unité de l'axe. La valeur algébrique de AB est représentée par la notation $\overline{AB}$. On pourra écrire $\frac{\overline{A}\vec{B}}{\overline{A'}\,\vec{B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'}\,\overline{B'}}$.
325. Parallèles équidistantes.
Théorème I. Des parallèles équidistantes découpent sur une sécante des segments consécutifs égaux. Inversement, si l'on mène par les points de division d'un segment en segments consécutifs égaux des parallèles à une droite quelconque, ces parallèles sont équidistantes. Sigle : (P.E)
326. Théorème II. Théorème de Thalès.
Trois droites parallèles découpent sur deux sécantes quelconques des segments proportionnels. Sigle : (F.P)
327. Emploi des rapports algébriques.

Lorsque C est entre A et B, C' est entre A' et B' et lorsque C est extérieur à AB, C' est extérieur à A'B'. en d'autres termes on a : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$.

333. Autre énoncé du théorème de Thalès.
Théorème. Les projections des segments de même supports sont proportionnels aux longueurs de ces segments. Le rapport des longueurs de deux segments de même support est égal au rapport de leurs projections.
Théorème. Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport des mesures algébriques de leurs projections sur un même axe. **Sigle : (P.V)**

ANNEXE XLVII : LESPINARD et PERNET (1952)

99. Définition. On dit que plusieurs parallèles sont équidistantes si les distances de deux parallèles consécutives sont égales.
100. Propriété.
Théorème. Des parallèles équidistantes déterminent sur une sécante commune des segments consécutifs égaux.
Réciproque. Plusieurs parallèles qui déterminent sur une sécante commune des segments consécutifs égaux sont équidistants.
173. Théorème de Thalès pour trois parallèles.
Théorème. Trois parallèles déterminent sur des sécantes communes des segments correspondants proportionnels. **Sigle : (F.P)**
174. Autre forme du théorème.
Théorème. Le rapport des valeurs algébriques de deux vecteurs consécutifs d'une même droite est égal au rapport des valeurs algébriques des deux vecteurs correspondants déterminés sur une autre droite par les trois parallèles passant par leurs extrémités.
175. Réciproque.
Théorème. Si trois points A, B, C d'une droite et trois points A',B',C' d'une autre droite vérifient les conditions : 1. AA' et CC' parallèles. 2. $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}}$.
BB' est parallèle aux deux autres droites.
176. Cas particulier du triangle.
Théorème. Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels. Réciproquement, si M et N sont deux points des côtés AB et AC d'un triangle ABC vérifient $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$, MN est parallèles à BC.

Généralisation. Théorème de Thalès.

177. Théorème de Thalès.
Les segments correspondant découpés sur deux droites par une série de parallèles sont proportionnels.

Applications du théorème de Thalès.

Triangles homothétiques par rapport au sommet.

178 Définition. Deux triangles sont appelés homothétiques par rapport à un sommet s'ils ont ce sommet en commun, les supports des côtés issus de ce sommet confondus et les troisième côtés parallèles.
179. Théorème. Dans deux triangles homothétiques par rapport à un sommet, les côtés correspondants sont proportionnels.

ANNEXE XLVIII 1

Année 1959. Arrêté du 27 juin 1945. Modifié par les arrêtés du 31 juillet 1959 et du 28 novembre 1958.

Classe de troisième classique A et B et moderne

A.- Géométrie plane

1. Rapport de deux segments. Rapport de deux segments orientés portés par une même droite. Division d'un segment dans un rapport donné (arithmétique et algébrique). Théorème de Thalès. Application au triangle et au trapèze. Etude de la réciproque dans le cas du triangle et du trapèze.
2. Triangle semblables. Cas de similitude.
3. Projections orthogonales. Relations métriques dans le triangle rectangle.
Rapport trigonométriques (Sinus, cosinus, tangente et cotangente) d'une angle aigu. Valeurs numériques des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45°, 60°. Usage des tables de rapports trigonométriques.
4. Relations entre les longueurs des segments joignant un point donné aux points d'intersection d'un cercle avec deux sécantes passant par ce point. Puissance d'un point par rapport à un cercle.
5. Révision des notions de polygones réguliers étudiées en quatrième. Relations entre le côté, le rayon du cercle circonscrit et l'apothème du carré, de l'hexagone régulier, du triangle équilatéral. Formules (sans démonstration) donnant la longueur (le périmètre) du cercle en fonction du rayon, et le longueur d'un arc de cercle. Définition du radian.
6. Révision des formules relatives aux aires des polygones plans (rectangle, triangle, trapèze, parallélogramme). Formule (sans démonstration) donnant l'aire d'un cercle en fonction du rayon et l'aire d'un secteur circulaire.

ANNEXE XLVIII 2 : DUBREIL (1964)

Division d'un vecteur ou d'un segment dans un rapport donné.

Définition : Le nombre rationnel r est le rapport du segment CD au segment AB. C'est aussi la mesure de CD quand on prend AB comme unité. Mais il peut arriver aussi que les deux segments donnés AB, CD ne soient pas commensurables. (Exemple le côté et la diagonale du carré).

3. Propriété du rapport d'un segment à un autre.

Théorème. Le rapport de deux segments est le quotient de leurs mesures prises avec la même unité.

4. Vecteurs.

Définitions : Deux vecteurs dont les supports sont confondus sont dits colinéaires. Deux vecteur AB, CD dont les supports sont parallèles sont dits parallèles. Dans ces deux cas, on dit que les vecteurs ont même direction. Si deux vecteurs AB, CD ont même direction et si en outre la demi-droite [Ax) d'origine A contenant B et la demi-droite [Cy) contenant D sont de même sens, on dit que les vecteurs AB et CD sont de même sens. Deux vecteurs AB, MN ayant même direction, même sens, même longueur sont dits équipollents.

5. Rapport de deux vecteurs colinéaires :

Le produit d'un vecteur AB par un nombre relatif k est le vecteur AK qui a même support que AB, dont la longueur est le produit de la longueur de AB par la valeur absolue de k, et qui est de même sens que le vecteur AB si k est positif, de sens contraire si k est négatif.

Théorème 2. Le rapport de deux vecteurs portés par un même axe est égal au rapport de leurs mesures sur cet axe.

6. Détermination d'un point M de la droite AB, connaissant la valeur k du rapport $\frac{\overline{\vec{MA}}}{\overline{\vec{MB}}}$.

Etant donné $k \in R$ et deux points A et B distincts, connaissant la valeur k du rapport M tel que $\frac{\overline{\vec{MA}}}{\overline{\vec{MB}}} = k$, M étant différent de B. D'où on obtient, d'après ce qui précède : (x - a)/ (x - b) = k.

7. Points M de la droite AB tels que le rapport $\frac{\overline{\vec{MA}}}{\overline{\vec{MB}}}$ **soit égal à un nombre donné p.**

Théorème 4. Pour tout nombre p>0 et différent de 1, il existe sur la droite AB $(A \neq B)$ deux points M_1 et M_2, le premier intérieur, le second extérieur au segment AB tels que l'on ait : $\frac{M_1 A}{M_1 B} = \frac{M_2 A}{M_2 B} = p.$

Théorème de Thalès

Théorème 1. $(L_1),(L_2),(L_3),(L_4)$ étant quatre parallèles à une même droite (L), si les vecteurs AB, CD découpés sur une sécante (Δ), respectivement par $(L_1),(L_2)$ et par $(L_3),(L_4)$ sont de même sens, les vecteurs A'B' et C'D' découpés par les mêmes parallèles sur une sécante quelconque (Δ') sont eux aussi de même sens.

Théorème 2. (L_1), $(L_2),(L_3),(L_4)$ étant quatre parallèles à une même droite (L), si les vecteurs AB, CD découpés sur une sécante (Δ), respectivement par $(L_1),(L_2)$ et par $(L_3),(L_4)$ sont équipollents, les vecteurs A'B' et C'D' découpés par les mêmes parallèles sur une sécante quelconque (Δ') sont eux aussi équipollents.

Théorème 3. Théorème de Thalès.

Etant donné quatre parallèles quelconques $(H_1),(H_2),(H_3),(H_4)$, on a, entre les vecteurs AB et CD découpés sur (Δ) respectivement par $(H_1),(H_2)$, et les vecteurs A'B', C'D' découpés par les mêmes droites sur (Δ'), la relation : $\frac{\overline{\vec{AB}}}{\overline{\vec{CD}}} = \frac{\overline{\vec{A'B'}}}{\overline{\vec{C'D'}}}$.

5. réciproque du théorème de Thalès.

Théorème 4. Réciproque du théorème de Thalès.

Considérons deux parallèles $(L_3),(L_4)$ à une droite (L), découpant sur deux sécantes (Δ) et (Δ') les vecteurs non nuls CD,C'D' et une parallèle (L_1) à (L) coupant (Δ) en A, (Δ') en A'. Si deux vecteurs AB, A'B' portés respectivement par (Δ) et (Δ') vérifient l'égalité $\frac{\overline{\vec{AB}}}{\overline{\vec{CD}}} = \frac{\overline{\vec{A'B'}}}{\overline{\vec{C'D'}}}$. B et B' sont situés sur une même parallèle (L_2) à (L).

ANNEXE XLIX 1 : ITARD et HUISMAN (1964)

Théorème. Des droites parallèles déterminent sur deux droites fixes des segments homologues proportionnels. Sigle : (F.S)

4. Réciproque du théorème de Thalès.

Théorème. Si une sécante détermine sur deux côtés d'un triangle des segments proportionnels, elle est parallèle au troisième côté.

ANNEXE XLIX 2 : THERON, COUTURIER et GALMARD (1965)

151. Etant données, dans un plan (P) deux droites (D) et (D') et un troisième (Δ) les coupant toutes les deux, associons à tout point M de (D) le point d'intersection M' de (D) avec la parallèle à (Δ) passant par M. Le point M' s'appelle projection sur (D'), faite parallèlement, à (Δ), du point M.

a. A tout point M de (D) correspond un seul point de (D'), donc la relation liant M à M' est une fonction. Un point M' de (D') est la projection d'un seul point de (D), donc la correspondance entre M et M' est biunivoque.

Deux points M et M' qui se correspondent sont appelés homologues; le point d'intersection I des droites (D) et (D'), s'il existe est son propre homologue.

b. A et B étant deux points de (D), A' et B' leurs homologues, à tout point du segment AB correspond un point du segment A'B' et inversement.

La correspondance définie associe donc à tout segment de (D) un segment de (D') que nous appellerons homologue du premier, ou projection sur (D'), faite parallèlement à (Δ) , du premier.

A. Correspondance entre segments.

Lorsque des parallèles déterminent sur une sécante (D) des segments consécutifs égaux, elles déterminent sur toute autre sécante (D') des segments correspondants (ou homologues égaux).

153. a. A deux segments de (D) égaux correspondent deux segments égaux de (D'). Si deux segments de (D) sont égaux, leurs projections sur (D'), faites parallèlement à (Δ) , sont égales.

b. La projection sur (D'), faite parallèlement à (Δ) , de la somme de deux segments portés par (D) est égale à la somme des projections de ces segments.

154. Théorème de Thalès.

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments tels que le rapport de deux segments portés par l'une est égal au rapport des segments correspondants portés par l'autre.

Deuxième forme du théorème de Thalès.

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments tels que le rapport d'un segment porté par l'une au segment correspondant porté par l'autre est le même quel que soit le couple de segments choisis.

157. Remarque préliminaire.

Si deux vecteurs AB et CE portés par (D) sont de même sens, leurs projections sur (D') A'B' et C'D' sont deux vecteurs de même sens. Si les vecteurs AB et CE de (D) sont de sens contraire, A'B' et C'D' le sont aussi.

159. Théorème de Thalès.

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des vecteurs tels que le rapport de deux vecteurs ports par l'une est égal au rapport des vecteurs correspondants portés par l'autre.

161. c. Etude réciproque.

Lorsque trois droites, dont deux sont parallèles, déterminent deux sécantes (D) et (D') des vecteurs homologues dont les mesures algébriques sont proportionnelles, les trois droites sont parallèles.

ANNEXE L 1 : ITARD et HUISMAN (1967)

2. Projection. Géométrie.

Soit dans le plan, une droite $d(O,\vec{u})$ et un vecteur $\vec{v}$ indépendant de $\vec{u}$. On pourra prendre, pour repère du plan, l'origine O et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on appelle projection de M sur d parallèlement à $\vec{v}$, l'intersection m des droites $d(O,\vec{u})$ et $(M,\vec{v})$ parallèle à $\vec{v}$ issue de M. $(M,\vec{v})$ est dite la projetante de M.

Si $\overline{O}\vec{m} = X\vec{u}$ et $m\vec{M} = Y\vec{v}$, $\overline{O}\vec{M} = X\vec{u} + Y\vec{v}.$

Ainsi X = x et Y = y. L'abscisse de m est identique à celle de M et la projection fait correspondre à la matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

La projection des vecteurs du plan, sur une droite, parallèlement à une direction, est une transformation linéaire.

3. Théorème de Thalès.

Des parallèles déterminent sur deux sécantes des vecteurs de même rapport. Sigle : (T.V)

4. Théorème de Ménélaos.

Trois droites se coupent en A, B, et C et une quatrième les coupent en M, P, et N .

On a alors : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$

Réciproquement. Si les trois points M, N, P satisfont à l'égalité de Ménélaos, ils sont alignés.

ANNEXE L 2 : DURRANDE (1967)

II. Théorème de Thalès.

Théorème fondamental. Une famille de droites parallèles déterminent sur deux sécantes fixes des segments correspondants proportionnel.

Le théorème de Thalès est une traduction géométrique de l'application linéaire $x \mapsto x' = k.x,$ entre les abscisses x et x' de deux points variables associés, décrivant respectivement deux droites (D) et (D') équipées en axes. Nous pouvons définir cette application de deux façons :

$k = \dfrac{\overline{OA}'}{\overline{OA}}$ et $k = \dfrac{\overline{A}'\overline{B}'}{\overline{AB}}$.

Réciproque triangle. Si une sécante détermine sur les deux côtés d'un triangle des segments proportionnels correspondants, cette sécante est parallèle au troisième côté.

ANNEXE LI : QUEYSANNE et REVUZ (1968)

8. Axiome des segments emboîtés.

Nous dirons qu'une suite de segments $S_n = [a_n, b_n]$ est une suite de segments emboîtés si elle possède les deux propriétés suivantes :

1. Quel que soit l'entier positif n, on a $S_{n+1} \subseteq S_n$.

2. Pour tout nombre entier positif p, il existe un segment S_n pour lequel $0 \leq b_n - a_n < \frac{1}{p}$.

<u>Axiomes des segments emboîtés.</u> Pour toute suite de segments emboîtés de R, il existe un élément et un seul qui appartienne à tous ces segments.

<u>a. définition.</u>

Soient dans le plan, une direction de droite δ et une droite (D) fixe n'appartenant pas à δ. Quel que soit le point M dans le plan, la droite appartenant à δ qui passe par M rencontre (D) en un point M' unique.

<u>b. Propriété.</u>

<u>Théorème.</u> Dans une projection sur une droite parallèle à une direction, l'image d'un segment est un segment.

<u>Remarque.</u> Supposons (D) orienté par le choix d'un couple de points distincts A et B tels que $A \prec B$. Sur (D'), la projection parallèlement à δ fait correspondre à cet ordre ou bien l'ordre défini par $A' \prec B'$ ou bien défini par $A' \succ B'$. Or on a vu que si $P \in [MN]$ alors $P' \in [M'N']$. Si on choisi sur (D') l'ordre défini par $A' \prec B'$, on a quels que soient M et N sur (D) et $P \in [MN]$, $M \prec P \prec N \Leftrightarrow M' \prec P' \prec N'$.

<u>IV. Théorème de Thalès.</u>

<u>a. Rappel :</u> En résumé, la projection parallèlement à la direction de droite δ de (D) sur (D') transforme une suite de points consécutifs équidistants de (D) en une suite de points consécutifs équidistants de (D').

<u>b. Projection d'une droite graduée.</u>

Soient O et A deux points fixes sur (D). En prenant $O \prec A$, on définit sur (D) un ordre et une orientation.
On construit une graduation entière en prenant O et A comme images des nombres 0 et 1. A partir de cette graduation entière, on sait construire toutes les graduations décimales associées. Sur (D'), on définit un ordre et une graduation entière en prenant O' et A' comme image des nombres 0 et 1. D'après le a), une graduation décimale de rang donné sur (D') est une projection de la graduation décimale de même rang sur (D). Donc deux points correspondants appartenants respectivement à deux graduations décimales de même rang sur (D) et (D') ont même abscisse sur les deux droites, cette abscisse étant un nombre décimal.

<u>c. Théorème de Thalès.</u> Si l'on projette parallèlement à une direction de droites, la droite graduée (D) sur la droite graduée (D') graduée de façon que les points d'abscisse 0 et 1 sur (D) aient pour image les points d'abscisses 0 et 1 sur (D'), un point M appartenant à (D) et son image M' sur (D') ont même abscisse. <u>Sigle : (C.A)</u>

Soit M un point sur (D), point unique commun aux éléments d'une suite de segments emboîtés, tels que les extrémités d'un des segments soient deux points consécutifs d'une même graduation décimale. Si [BC] est un tel segment, on a $M \in [BC]$ et l'abscisse de M est le seul nombre réel supérieur à l'abscisse de tous les points tels que B et inférieur à l'abscisse de tous les points tels que C. D'après ce qui précède, on a $M' \in [B'C']$ et les abscisses de B' et C' sur (D') sont respectivement celles de B et C sur (D). Les segments tels que [B'C'] forment donc une suite de segments emboîtés telle que M' soit le seul élément commun à tous les segments de le suite. [...] L'abscisse de M' sur (D') est le seul nombre réel supérieur à l'abscisse de tous les points B' et inférieur à l'abscisse de tous les points C'. L'abscisse de M' sur (D') est donc l'abscisse de M sur (D).

<u>Corollaire 1.</u> Etant donnés deux droites coplanaires (Δ') et (Δ) et une bijection $M \mapsto M'$ de (Δ) sur (Δ') telle que A' et B' étant les images respectives de A et B, les droites (AA') et (BB') soient strictement parallèles, (MM') est parallèle à (AA') quel que soit M si et seulement si :

$$\frac{\overline{A}\vec{M}}{\overline{A}\vec{B}} = \frac{\overline{A}'\vec{M}'}{\overline{A}'\vec{B}'}.$$

ANNEXE LII 1 : MAUGUIN (1969)

<u>C. Symétrique d'une droite par rapport à un point.</u>

<u>Théorème.</u> Dans la symétrie par rapport à un point, la symétrie d'une droite D, ne passant pas par ce point, est la droite D' parallèle à D et telle que le centre de symétrie soit équidistant de D et D'.

<u>27. Parallèles équidistantes.</u>

<u>A. Eléments de symétrie d'une bande.</u>

Une bande est une portion de plan limité par deux parallèles appelées bords de la bande.

<u>Théorème.</u> Toute perpendiculaire commune aux bords d'une bande est un axe de symétrie pour cette bande.

<u>2. Axe de symétrie d'une bande, parallèle aux bords de la bande.</u>

<u>Théorème.</u> La bande formée par deux droites parallèles admet pour axe de symétrie la parallèle aux bords de la bande qui est médiatrice de tous les points de la perpendiculaire quelconque aux bords de la bande et dont les extrémités appartiennent à ces bords.

<u>3. Centre de symétrie d'une bande.</u>

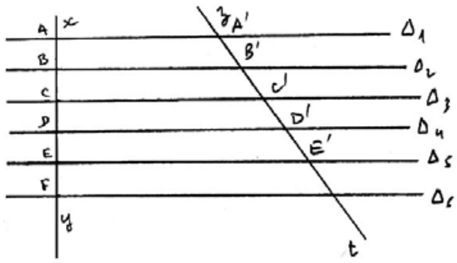
<u>Théorème.</u> Tout point de l'axe de symétrie d'une bande parallèle aux bords de cette bande est un centre de symétrie de cette bande.

<u>B. Droites parallèles équidistantes.</u>

<u>4. Définition.</u> Un ensemble ordonné de parallèles est un ensemble de parallèles équidistantes si ces parallèles déterminent sur une de leurs perpendiculaires commune un ensemble ordonné de segments égaux.

5. Intersection par une sécante d'un ensemble de parallèles équidistantes.

Théorème. Un ensemble ordonné de parallèles équidistantes détermine sur une sécante un ensemble ordonné de segments égaux. Sigle : (P.E)



Par hypothèse, on a AB = BC = CD = DE...

La droite Δ_2 est par construction la médiatrice du segment AC donc elle est l'axe de symétrie de la bande dont les bords sont Δ_1 et Δ_3. Coupons cette bande par une sécante zt. Le points B' de l'axe de symétrie de la bande dont les bords sont Δ_1 et Δ_3 est une centre de symétrie pour cette bande d'après §3. Donc B'A' = B'C'. De proche en proche, on montre que A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = ...

6. Etude d'un ensemble ordonné de droites parallèles déterminant sur une sécante un ensemble ordonné de segments égaux.

Théorème. Si un ensemble ordonné de parallèles détermine sur une sécante un ensemble ordonné de segments égaux, les parallèles sont équidistantes.

7. Conséquence.

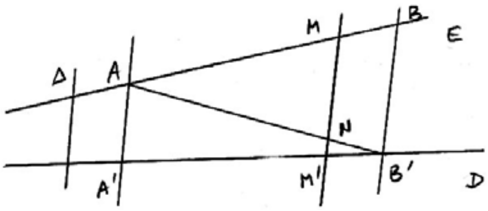
Théorème. Si un ensemble ordonné de droites parallèles détermine sur une sécante un ensemble ordonné de segments égaux, il détermine sur toute autre sécante un autre ensemble ordonné de segments égaux.

ANNEXE LII 2 : QUEYSANNE et REVUZ (1971)

Axiome. Les points A, B, et C étant tous distincts dans un plan P et D étant une droite du plan P ne contenant aucun de ces points, parmi les trois ensembles $[AB]\cap D, [BC]\cap D$ et $[CA]\cap D$, il y a soit un ensemble vide, soit trois ensembles vides.

2. propriété.

Théorème. Toute projection d'un segment est un segment.



P(A) = A', p(B) = B', p(M) = M' avec $M\in[AB]$. $[AB]\cap(MM')\neq\varnothing$ et $[BB']\cap(MM')=\varnothing$ donc d'après l'axiome précédent, $[AB']\cap(MM')\neq\varnothing$.

Soit N le point d'intersection de [AB'] et (MM'). $[AB']\cap(MM')\neq\varnothing$ et $[AA']\cap(MM')=\varnothing$ donc $[A'B']\cap(MM')\neq\varnothing$ et cette intersection contient déjà M' donc $M'\in[A'B']$.

Axiome. Toute projection parallèle du milieu d'un segment est le milieu de la projection de ce segment.

Théorème de Thalès. Si l'on projette, parallèlement à une direction, une droite D, munie d'un bipoint unité (O,I), sur une droite D', munie du bipoint unité (O',I') projection de (O,I) alors tout point M de D et sa projection M' sur D' ont même abscisse.

ANNEXE LIII 1 Programmes 1971

Géométrie. Classe de quatrième

III. Géométrie de la droite.

1. Droite. Distance de deux points sur une droite ; repères normés d'une droite. Abscisse d'un point M dans un repère normé ; notation $\overline{MM'}$.

Changement de repères normés sur une droite.

Expression de la distance de deux points en fonction de leurs abscisses dans un repère normé. Changements d'unités.

2. Ordre sur une droite. Droite orientée (ou axe). Demi-droite. Segment. Milieu de deux points. Exercices sur les barycentres de deux points.

IV. Géométrie plane.

1. Droites du plan. Détermination d'une droite par deux points. Droites parallèles. Le parallélisme est une relation d'équivalence ; définition d'une direction de droites comme classe d'équivalence.

Projection, de direction donnée, du plan sur une droite, d'une droite sur une droite.

Enoncé de Thalès. Rapport de projection, pour une direction donnée, d'un axe sur un axe.

2. Triangle. Application de l'énoncé de Thalès aux triangles. Projection sur une droite de milieux, de barycentres.

Construction graphique du barycentre de deux points donnés, affectés de coefficients donnés.

Symétrie par rapport à un point (symétrie centrale) : image d'une droite.

Parallélogramme propre ou aplati (défini par l'existence d'un centre de symétrie). Parallélisme des droites portant les côtés d'un parallélogramme propre ; réciproque. Projection d'un parallélogramme ; réciproque.

3. Equipollence de bipoints. C'est une relation d'équivalence. Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations.

Direction d'un vecteur non nul.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriété.

Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur est en combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. Repère du plan ; coordonnées cartésiennes par rapport à un repère. Exercices de calculs vectoriel ; médiane d'un triangle.

Présentation mathématique d'un plan affine réel.

Par définition, un plan affine réel P, - ou plus simplement plan affine ou plan, s'il n'y a pas d'ambiguïté, - est un ensemble E dont les éléments sont appelés points du plan, structuré par les quatre axiomes suivants :

a), b), c), les trois axiomes d'incidence

d) l'axiome de Thalès.

Ces quatre axiomes sont indissociables ; toutefois l'axiome de Thalès sera énoncé séparément, car sa terminologie relative au parallélisme et aux projections, et si l'on établi certains résultats, conséquences des seuls axiomes d'incidence.

ANNEXE LIII 2 : Collection BREARD (1971)

17.1 Plan affine réel.

On considère un plan Π satisfaisant aux deux axiomes suivants :

Axiome de structure des droites de Π.

P_1 Toute droite de Π a une structure de droite réelle.

Axiomes de Thalès.

P_2. Soient deux axes D et D', et une direction de droites Δ telle $\Delta \neq dirD$ et $\Delta \neq dirD'$.

On considère la projection p de D sur D' parallèlement à Δ. Soient M et N deux points de D, et M' = p(M), N' = p(N) les projections de M et de N sur D'. Il existe un nombre réel k tel que, quel que soit le couple (M,N), on a : $\overline{M'}\,\overline{N'} = k.\overline{MN},$ k est le rapport de projection.

17.4 Vecteur associé à un point du plan

On sait que $(R^2,+,\times)$ est un espace vectoriel ; $\vec{m} = (x, y)$ est un vecteur de cet espace vectoriel. Il existe une bijection du plan sur cet espace vectoriel. Le vecteur $\vec{m}$ est le vecteur associé au point M relativement au repère.

17.13 Théorème de Thalès.

Soient deux axes D et D', et une direction de droite Δ telle que $\Delta \neq dirD$ et $\Delta \neq dirD'$. Soient A, B, M trois points de D, et A', B', M' leurs projections sur D'. D'après l'axiome de Thalès, on a : $\overline{A'}\,\overline{B'} = k.\overline{AB}$ et $\overline{A'}\,\overline{M'} = k.\overline{AM}$ De plus, il existe un réel $\lambda.$ tel que $\overline{AM} = \lambda.\overline{AB}$. Par suite : $\overline{A'}\,\overline{M'} = k.(\lambda.\overline{AB}) = \lambda.(k.\overline{AB}) = \lambda.\overline{A'}\,\overline{B'}.$ D'où $\dfrac{\overline{A'}\,\overline{M'}}{\overline{A'}\,\overline{B'}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$

17.14 Caractérisation de l'appartenance d'un point à une droite.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

a) Le point M est un point de la droite D.

b) Il existe un réel $\lambda.$ tel que : $\overline{A}\vec{M} = \lambda.\overline{A}$.

ANNEXE LIII 3 : VISSIO (1971)

1. Translation et vecteurs.

Définitions techniques.

Une bijection de P dans P définie au moyen du glissement d'un plan auxiliaire P' sur P, de sorte qu'une droite de P' reste au contact d'une droite de P, s'appelle une translation du plan technique.

Le couple de points (A, A_1) donné pour déterminer le glissement s'appelle ordonnateur de la translation, d'origine A et d'extrémité A_1. La droite technique définie par AA_1 s'appelle la glissière.

1. Théorème de Thalès. **Si A, B, C sont trois points distincts d'une droite, et r le réel tel que $\overline{A}\vec{C} = r.\overline{A}\vec{B}.$**

Si A', B', C' sont trois points distincts d'une autre droite, et r' le réel tel que $\overline{A'}\vec{C'} = r.\overline{A'}\vec{B'}.$

Si, de plus, les droites (AA'), (BB'), (CC') appartiennent à la même direction : r = r'.

Réciproque :

Si A, B, C sont trois points distincts d'une droite, et r le réel tel que $\overline{A}\vec{C} = r.\overline{A}\vec{B}..$

Si A', B', C' sont trois points distincts d'une autre droite, et r' le réel tel que $\overline{A'}\vec{C'} = r.\overline{A'}\vec{B'}..$

Si de plus, (AA') est parallèle à (BB') et si r = r'.

Alors (CC') est parallèle à (AA') et à (BB').

Application du théorème de Thalès au triangle.

Théorème 1. **Etant donné un triangle (A, B, C) et, sur la droite (AB) un point M tel que $\overline{A}\vec{M} = r.\overline{A}\vec{B},$ si, par M, on mène la parallèle à (BC), alors cette parallèle coupe la droite (AC) en un point P tel que $\overline{A}\vec{P} = r.\overline{A}\vec{C}.$**

Théorème 2. **Etant donné un triangle (A, B, C), si un point M est un point de la droite (AB) et P un point de la droite (AC) tels que : $\overline{A}\vec{M} = r.\overline{A}\vec{B},$ et $\overline{A}\vec{P} = r.\overline{A}\vec{C}.$, alors la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).**

Théorème 3. **Etant donné un triangle (A, B, C), si, sur la droite (AB) le point M est tel que $\overline{A}\vec{M} = r.\overline{A}\vec{B}$ et que par M on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en P alors $\overline{M}\vec{P} = r.\overline{B}\vec{C}.$**

Théorème 4. (Réciproque du 3) **Si (B, C, P, M) est un trapèze de base [BC], [PM], et un réel (non nul et différent de 1) tel que $\overline{M}\vec{P} = r.\overline{B}\vec{C},$ alors les droites MP et BC se coupent en un point A et l'on a : $\overline{A}\vec{M} = r.\overline{A}\vec{B}$ et $\overline{A}\vec{P} = r.\overline{A}\vec{C}.$**

Généralisation du théorème de Thalès

Le coefficient de dépendance de deux vecteurs représenté par deux bipoints d'une droite D est égal au coefficient de dépendance des vecteurs représentés par les bipoints selon une direction sur une droite D'.

ANNEXE LIII 4 : QUEYSANNE et REVUZ (1973)

Définition : on appelle droite graduée, un couple (Δ, g), où Δ est un ensemble et g une bijection de Δ sur R.

Théorème et définition :

Etant donnée une droite graduée (Δ, g).

1°. Pour tout couple de réels (a',b') tel que a' $\neq$ 0, l'application g' de Δ sur R définie pour tout élément M de Δ par : $g'(M) = a'.g(M) + b'$ est bijective.

2°. La famille de toutes les bijections ainsi définies, possède la propriété: pour deux bijections quelconques g' et g" de cette famille, il existe un couple (a,b) de nombres réels tel que a $\neq$ 0, et pour tout élément M de Δ : $g''(M) = a.g'(M) + b$.

On appelle alors graduation de Δ , toute bijection de cette famille, et le nom de g'(M) est appelé abscisse de M dans la graduation.

Définition : Etant donné une droite graduée (Δ, g) , on appelle droite réelle, l'ensemble Δ muni de la famille des graduations associées à g.

Théorème. Etant donnés deux points distincts u et v d'une droite Δ , il existe une graduation unique de Δ dans laquelle l'abscisse de u est 0 et celle de v est 1; u est appelé origine et v point unitaire de cette graduation. Le couple (u,v) est appelé repère de cette graduation.

19. L'axiome de Thalès.

1. Graduations de droites distinctes du plan :

g est une graduation de la droite Δ et g' une graduation de la droite Δ '. On lit sur le dessin...

Définition : un plan mathématique est appelé réel, s'il vérifie les deux axiomes suivants :

$P_1)$ Toute droite de ce plan est une droite réelle.

$P_2)$ (Axiome de Thalès).

Pour trois droites quelconques, Δ , Δ ', Δ ", de ce plan telles que la troisième ait une direction distincte de celles des deux premières, si p désigne la projection sur Δ ' parallèlement à Δ ". Pour toute graduation g de Δ ,(A, B)étant le repère de cette graduation : l'abscisse dans la graduation g d'un point quelconque de Δ , est égale à l'abscisse de sa projection p(M) dans la graduation g' de repère (p(A), p(B)).

L'axiome de Thalès se traduit par : pour tout point M de la droite Δ $g'\big(p(M)\big) = g(M)$.

Théorème 1 : La droite Δ'' ayant une direction distincte de celles des droites Δ et Δ' , si p désigne la projection sur Δ' parallèlement à Δ'' . (A,B) étant le repère de la droite g de Δ et g' la graduation de Δ' , de repère (p(A),p(B))).

Pour tout point M de Δ et tout point M' de Δ' , on a : $g'(M') = g(M) \Rightarrow M' = p(M)$.

Si g'(M') = g(M) comme d'après l'axiome de Thalès, on a : g(M) = g'(p(M)) on déduit que g'(M') = g'(p(M)) ; g étant bijective, on obtient M' = p(M).

Théorème 2. Si (A, B, C) est un triangle, g la graduation de repère (A,B), et g' la graduation de repère (A,C). Pour qu'un point M de la droite (A,B) et un point N de la droite (A,C) soient tels que g(M) = g'(N), il faut et il suffit que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.

2. Projection du barycentre de deux points.

Théorème. Si deux droites ont des directions différentes et si m et n sont deux nombres réels de somme non nulle. La projection sur l'une de ces droites parallèlement à l'autre, du barycentre de deux points, affectés des coefficients m et n, est le barycentre des projections de ces deux points affectés des mêmes coefficients m et n.

On a $g(J) = \dfrac{m.g(M) + n.g(N)}{m+n}$. D'après l'axiome de Thalès : g(J) = g'(p(J)), g(M) = g'(p(M)), g(N) = g'(p(N)). Donc : $g'(J) = \dfrac{m.g'(M) + n.g'(N)}{m+n}$.

Pour m = n = 1, la projection sur une droite, parallèlement à une droite, du milieu de deux ponts est le milieu de la projection de ces deux points.

ANNEXE LIII 5 : MONGE, GUINCHAN et PECASTAINGS

Axiomes de Thalès.

Soient D et D' deux droites de P, A l'axe de support déterminé par un repère normé (O,U) de D, A' l'axe de support D' déterminé par un repère normé $\left(O_1, U_1\right)$ de D' et p une projection non constante de A sur A'. Il existe un nombre réel k tel que pour tout bipoint (M,N) de A, on ait $\overline{p(M)p(N)} = k.\overline{MN}$. Le réel k dépend de A, A' et de p.

On l'appelle rapport de projection de l'axe A sur l'axe A' associé à la projection p.

ANNEXE LIII 6 : GIRARD, GERLL D, COHEN et GERL A (1975)

Axiomes translations :

Axiome 1 : l'application identique du plan est une translation.

Axiome 2 : l'image, par une translation, de toute droite D est une droite D' parallèle à D.

Axiome 3 : pour toute translation différente de l'identité, il existe une direction d et une seule, telle que toute droite D de direction d a pour image la droite D elle même.

Axiome 4 : quels que soient les points A et B, il existe une translation t et une seule, telle que l'image de A soit B.

Axiome vecteurs :

Axiome 1 : quel que soit l'élément $\vec{u}$ de V, 1. $\vec{u}$ = $\vec{u}$.

Axiome 2 : (distributivité de la multiplication par un nombre réel sur l'addition des vecteurs)

Axiome 3 : (distributivité sur l'addition des réels)

Axiome 4 : (pseudo-associativité)

Axiome 5 : si a est un réel non nul, et $\vec{u}$ un vecteur non nul, alors $\vec{u}$ et a. $\vec{u}$ ont même direction.

Axiome 6. Si le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ non nul, alors il existe un réel x unique tel que : $\vec{v}$ =x. $\vec{u}$.

I. Théorème de Thalès.

1. Comparaison des graduations de deux droites dans le plan.

<u>Théorème 1.</u> Soit D et D' deux droites graduées concourantes en O, de repères respectifs (O,OI) et (O,OI') ; soit M un point de D et M' un point de D'. Les abscisses des points M et M' sont égales si et seulement si les droites (MM') et (II') sont parallèles.

<u>2. Théorème de Thalès.</u>

<u>Théorème 2.</u> Soit M, N, P trois points d'une droite graduée D, distincts deux à deux et soit M', N', P' leurs projetés respectifs sur une droite graduée D' parallèlement à une direction ne contenant ni D ni D'.

Quels que soient les repères choisis sur D et sur D', on a : $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = \dfrac{\overline{M'}\,\overline{N'}}{\overline{M'}\,\overline{P'}}$.

ANNEXE LIII 7 : MAUGUIN (1975)

<u>3. Axiome de Thalès.</u>

Dans le plan réel, si on projette une droite D sur une droite D' selon une direction d à laquelle D et D' n'appartiennent pas, le quotient des mesures algébriques de deux bipoints quelconques (M,N) et (P,Q) de la droite D est égal au quotient des mesures algébriques de leurs projections (M',N') et (P',Q') sur la droite D'.

ANNEXE LIV 1

<u>Classe de quatrième</u>

II. Géométrie.

L'étude de la géométrie est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation, lesquelles requièrent l'usage des instruments de dessin : règle graduée, compas, équerre: l'effort de réflexion qu'elles suggèrent conduit au raisonnement déductif.

<u>Programme de la classe de 3ème des collèges.</u>

(Arrêté du 16 novembre 1978).

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous, leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur seront admises; elles permettront d'obtenir les autres par voie de déduction.

I.-ALGEBRE

Racine carrée ; notation $\sqrt{a}$ avec $a \geq 0$. (On admettra que l'application $x \longmapsto x^2$ de R* dans R* est bijective). Usage des tables pour le calcul des carrés et des racines carrées. Racine carrées d'un produit, d'un quotient de réels.

Construction, sur des exemples, de la représentation graphique d'une application d'une partie de R dans R.

Applications linéaires et applications affines de R dans R ; leurs représentations graphiques.

Equations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficient numériques; résolution d'une équation, d'une inéquation, d'un système de deux équations ; résolution graphique d'un système d'équations ou inéquation.

Exemples variés de problèmes du premier degré.

II.- GEOMETRIE

Notions et propriétés fondamentales.

Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Equation d'une droite dans un repère.

Rapport de projection orthogonale ; symétrie de ce rapport.

Propriété de Pythagore et sa réciproque.

Orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé.

Notions pratiques de trigonométrie.

On admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée.

Angle de deux demi-droites de même origine ; sa mesure. Bissectrice.

Somme des mesures des angles d'un triangle.

Cosinus, sinus d'un angle ; tangente. Usage des tables trigonométriques en degrés décimaux et en radians.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

Applications

Expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé.

Symétrie laissant globalement invariant: un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux demi-droites.

Exercices (distances et angles) sur le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange, le rectangle, le carré, les polygones réguliers...

Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple: sphère (intersection avec un plan) : cube (calcul de la diagonale) ; pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).

ANNEXE LIV 2 : MONGE (1978)

<u>2. Propriété de Thalès.</u>

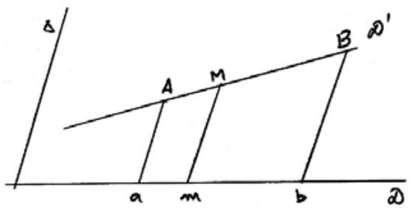
Soient d une direction de droites, et Δ et Δ_1 deux droites qui n'appartiennent pas à d. Choisissons sur Δ une unité dé longueur U et un repère (0,U) et sur Δ_1, une unité de longueur U_1 et un repère (O_1, U_1). Désignons par q la projection selon la direction d de Δ_1. Si A, B, C sont trois points quelconques de Δ tels que C soit distinct de A, et si A', B', C' sont les images respectives de A, B, C par la projection q, alors on a l'égalité : $\dfrac{\overline{A'}\,\overline{B'}}{\overline{A'}\,\overline{C'}} = \dfrac{\overline{A}\,\overline{B}}{\overline{A}\,\overline{C}}$.

ANNEXE LIV 3 BORDAS (s.d)

<u>3. Projection.</u>

<u>Définition.</u> Etant données une droite D et une droite Δ non parallèle à D, on appelle projection de direction Δ du plan sur D, l'application qui à chaque point du plan associe le point commun à D et à la parallèle à Δ contenant ce point.

Projection d'un segment



Théorème 1. Dans une projection non constante p d'une droite sur une droite, la projection d'un segment [AB] est le segment [ab] tel que a = p(A) et b = p(B).

La droite (Mm) est parallèle à la droite (Aa) donc toute entière dans un même demi-plan de frontière (Aa). De même (Mm) est toute entière dans un même demi-plan de frontière (Bb) ; le point m appartient donc au segment [ab]. Réciproquement: soit n un point du segment [ab]. L'antécédent N de n est l'intersection de D' avec la parallèle à Δ contenant n. on démontre comme précédemment que N appartient au segment [AB].

Projection du milieu d'un segment.

Théorème 2. Si p est une projection non constante, l'image par p du milieu d'un segment est le milieu de la projection du segment.

3.3 Théorème de Thalès.

Théorème 1. Soient A et B deux points distincts et M un point quelconque d'une droite S ; les points A', B' et M' étant les images des points A, B et C par une projection non constante p de la droite D sur une droite D', le point M' a même abscisse dans le repère (A',B') que le point M dans le repère (A,B).

ANNEXE LIV 4 : Coll POLLE (1980)

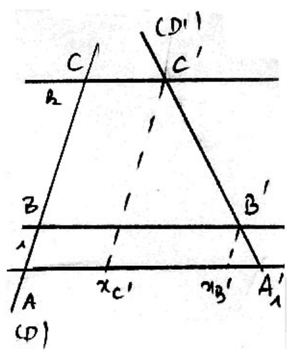
I. Sous multiple d'un vecteur.

Rappel : Les points A,B,C,D étant donné dans cet ordre sur une droite D et tels que AB = BC = CD = DE si l'on projette D sur D' parallèlement à une droite Δ donnée, on obtient sur D' des points A',B',C',D',E' dans cet ordre et tels que A'B' = B'C' = C'D' = D'E'. Cela permet de construire un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{v} = n.\vec{u}$, v étant donné.

II. Multiplication d'un vecteur par un rationnel :

Pour que soit respecté la définition de l'ensemble Q$\left((a,b) \propto (a',b') \Leftrightarrow ab' = ba'\right)$, le produit $\vec{w}$ d'un vecteur $\vec{v}$ par un rationnel a/b doit être : Pour tout $(a,b) \in Z \times Z^*$ et tout $(\vec{v},\vec{w}) \in V_p{}^2, \vec{w} = \frac{a}{b}.\vec{v} \Leftrightarrow a\vec{v} = b\vec{w}.$

IV. Théorème de Thalès.



Dans le repère $\left(A, \overline{A}\vec{A}', \overline{A}\vec{B}\right)$ on peut écrire :

$A'(1,0)$; $B'(x_{B'},1)$; $C'(x_{C'},k)$. Donc : $\overline{A}'\vec{B}' \begin{matrix} x_{B'} - 1 \\ 1 \end{matrix}$; $\overline{A}'\vec{C}' \begin{matrix} x_{C'} - 1 \\ k \end{matrix}$.

Or $C' \in (A'B')$, donc il existe un réel k' tel que $\overline{A}'\vec{C}' = k'.\overline{A}'\vec{B}'$. Or $y_{\overline{A}'\vec{C}'} = k$ et $y_{\overline{A}'\vec{B}'} = 1$ donc $y_{\overline{A}'\vec{C}'} = k\ .\ y_{\overline{A}'\vec{B}'}$. Il en résulte que k' = k. Ainsi, si $\overline{A}\vec{C} = k.\overline{A}\vec{B}; \overline{A}'\vec{C}' = k.\overline{A}'\vec{B}'.$

V. Enoncé du théorème de Thalès.

1. Enoncé vectoriel.

Soit une projection d'une droite D sur une droites D' parallèlement à une droite Δ , telle que D et D' ne soient pas parallèles à Δ et telle que $p_\Delta : D \to D', A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'.$

Si $\overline{A}\vec{C} = k.\overline{A}\vec{B}$ alors $\overline{A}'\vec{C}' = k.\overline{A}'\vec{B}'.$

ANNEXE LIV 5 : AGUADO (1980)

Théorème 1. Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine avec les deux autres côtés un triangle homothétique du premier.

II Théorème de Thalès.

Théorème. Etant donné une direction d et deux axes Δ et Δ 'n'ayant pas la même direction d, si D_1 et D_2 sont deux droites de direction d coupant Δ en A et B, Δ ' en A' et B', le nombre A'B'/AB est indépendant des droites D_1 et D_2 .

Ce nombre s'appelle rapport de projection de Δ sur Δ ' parallèlement à d.

ANNEXE LV 1 Programmes 1989

Classe de troisième

I. TRAVAUX GEOMETRIQUES.

1. Enoncé de Thalès relatif au triangle.

Application à des problèmes de construction (moyenne géométrique) ;

Pyramide et cône de révolution : volume, section par un plan parallèle à la base.

Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires, volumes, masses.

Bulletin officiel du 17 mai 1990 présentant le programme de seconde :

"On a voulu entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique".[...]

Organisation de l'enseignement.

"Entraîner les élèves à l'activité scientifique et promouvoir l'acquisition de méthodes : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de synthèse dégageant clairement quelques idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée.

Développer les capacités de communication : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite".

ANNEXE LV 2 : SUCH DURRANDE (1989)

Théorème de Thalès.
Soit ABC un triangle. Si B' est un point de la droite (AB), C' est un point de la droite (AC), la droite (B'C') est parallèle à la droite (BC) alors : AB'/AB = AC'/AC = B'C'/BC.
Réciproque du théorème de Thalès

Soit un triangle, B' un point de la droite (AB), C' un point de la droite (AC) tel que AB'/AB = AC'/AC.
Si $B' \in [AB)$ **et** $C' \in [AC)$ **alors (BC) est parallèle à (B'C').**
Si $B' \notin [AB)$ **et** $C' \notin [AC)$ **alors (BC) est parallèle à (B'C').**

ANNEXE LV 3 : ISTRA (1989)

Nous savons déjà : Si des droites parallèles découpent sur une sécante des segments consécutifs de même longueur, alors elles sont équidistantes et découpent sur toute autre sécante des segments consécutifs de même longueur. **Sigle : (P.E)**
Théorème. Dans une triangle, toute parallèle à un côté fait apparaître des segments sur chacun des deux autres côtés. Le quotient des longueurs de deux segments portés par l'un de ces côtés est égal au quotient des longueurs des segments correspondants portés par l'autre côté. Sigle : (D.P.C.T)
Réciproque du théorème de Thalès.
Théorème. Si dans un triangle ABC, M et N occupent des positions analogues respectivement sur (AB) et sur (AC) et si on a : AM/AB = AN/AC ou BM/AB = CN/AC alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Test 1 - A

Partie II Annexe I 1.a

Imaginer puis dessiner, à l'aide du matériel habituel, quatre figures géométriques pour lesquelles l'application du théorème de Thalès est pertinente. On donnera un numéro d'ordre de traçage à chaque droite, pour chaque dessin.   (5 à 10 minutes)

Dessin - A -

Dessin - B -

Dessin - C -

Dessin - D -

Partie II Annexe I 1.b

Ces trois tests étaient présentés aux élèves séparément sur trois feuilles distinctes de format A_4. Dans ces annexes, par soucis de gain de place, nous condensons leurs présentations.

Test 2 - A

Nom : **Classe :**

Prénom : **Collège :**

a. Tracer deux droites (d) et (d') sécantes en A.
b. Tracer deux droites (d_1) et (d_2) parallèles et coupant toutes les deux les droites (d) et (d').
La droite (d_1) coupe la droite (d) et B et la droite (d') en C.
La droite (d_2) coupe la droite (d) et D et la droite (d') en E.

(5 minutes)

Test 3 - A

Nom : **Classe :**

Prénom : **Collège :**

a. Tracer un triangle quelconque.
b. Tracer une droite parallèle à un des côtés du triangle et coupant les deux autres côtés.

(5 minutes)

Test 4 - A

Nom : **Classe :**

Prénom : **Collège :**

1.a. Tracer deux droites parallèles (d) et (d').
1.b. Tracer deux droites sécantes (d_1) et (d_2).

2.a. Tracer deux droites sécantes (d_1) et (d_2).
2.b. Construire une droite (d_3) parallèle à la droite (d_1).
2.c. Construire une droite (d_4) coupant les droites (d_1), (d_2) et (d_3) respectivement en A, B et C.

(10 minutes)

Quatrième expérience

Etablissement :

1ère Partie

Nom :

Prénom :

Classe :

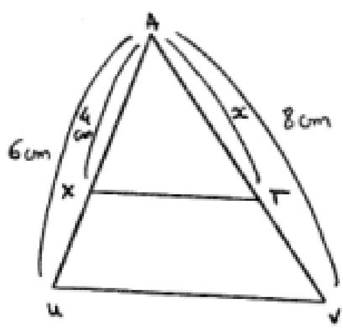
Pour cette épreuve, vous ne devez tenir compte que des indications portées sur les figures et en aucun cas vous ne devez utiliser une règle graduée.

Convention :

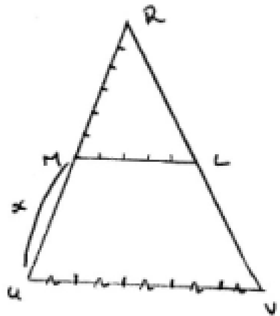
Ce segment est partagé en quatre segments de même longueur.

Ce segment est partagé en quatre segments de même longueur.

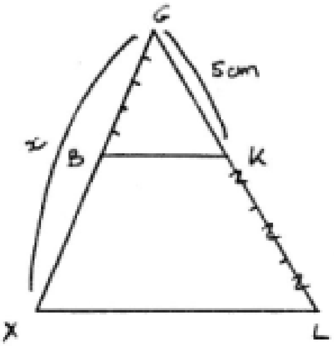
Mais les segments partageant [AB] et [CD] n'ont pas la même longueur.



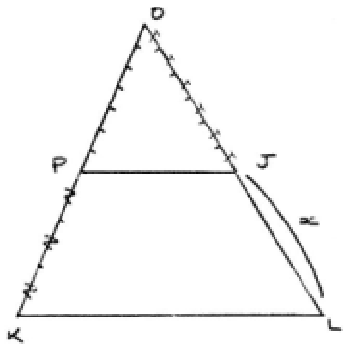
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



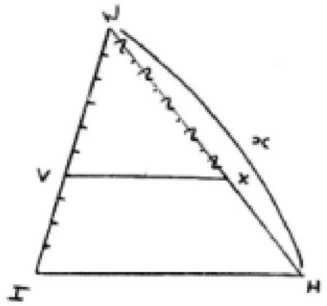
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



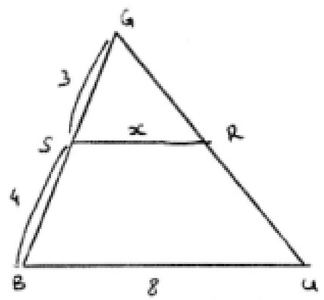
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Effectuer les calculs.
Si non ☐ Expliquez pourquoi ?



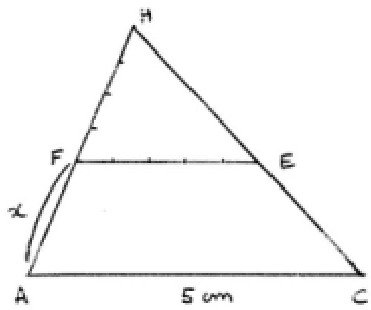
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Effectuer les calculs.
Si non ☐ Expliquez pourquoi ?



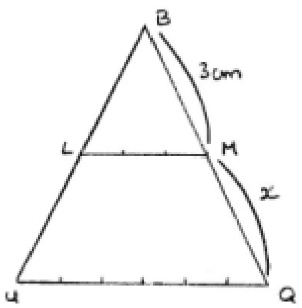
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Effectuer les calculs.
Si non ☐ Expliquez pourquoi ?



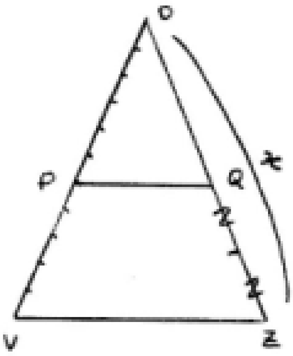
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Effectuer les calculs.
Si non ☐ Expliquez pourquoi ?



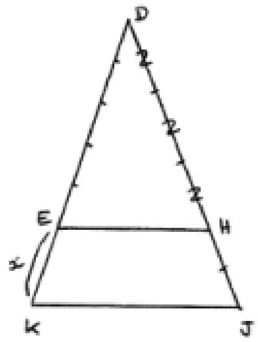
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Effectuer les calculs.
Si non ☐ Expliquez pourquoi ?



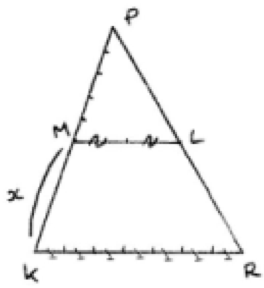
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Effectuer les calculs.
Si non ☐ Expliquez pourquoi ?



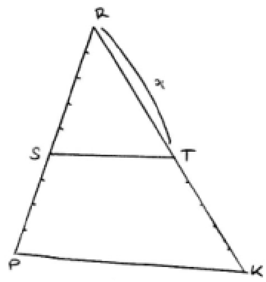
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



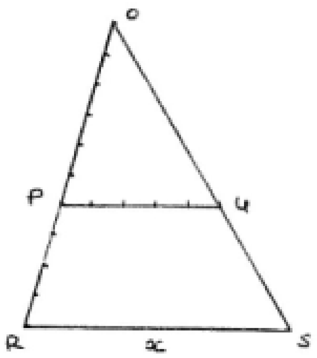
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



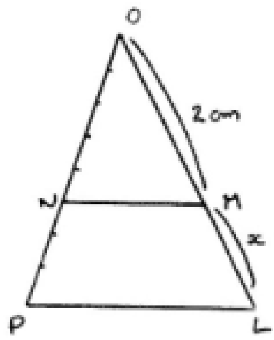
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



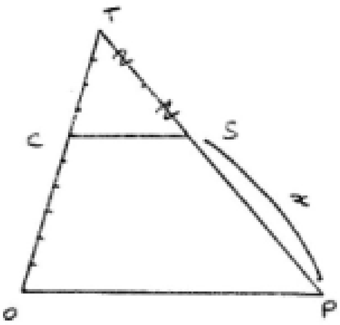
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



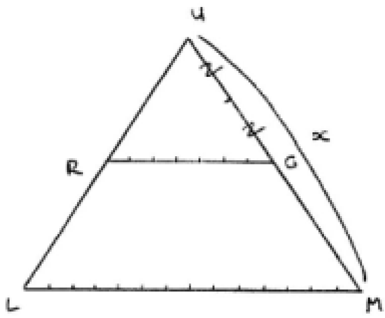
Peut-on calculer la longueur inconnue ?
Si oui ☐ Si non ☐
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



Peut-on calculer la longueur inconnue ?

Si oui ☐ Si non ☐

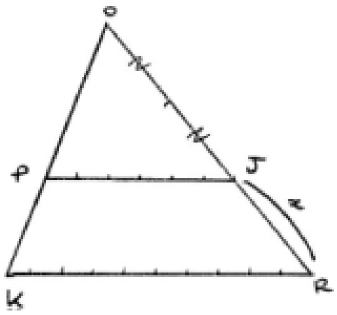
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



Peut-on calculer la longueur inconnue ?

Si oui ☐ Si non ☐

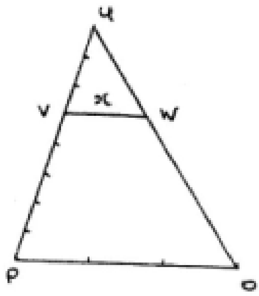
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



Peut-on calculer la longueur inconnue ?

Si oui ☐ Si non ☐

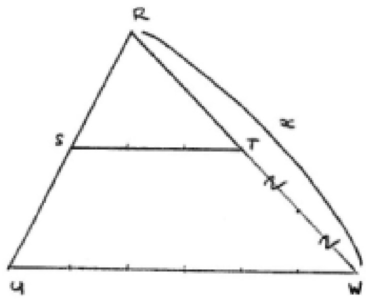
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



Peut-on calculer la longueur inconnue ?

Si oui ☐ Si non ☐

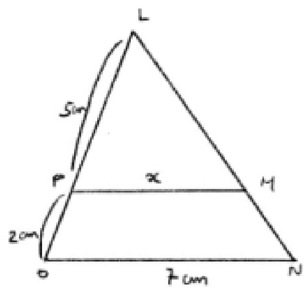
Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



Peut-on calculer la longueur inconnue ?

Si oui ☐ Si non ☐

Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?



Peut-on calculer la longueur inconnue ?

Si oui ☐ Si non ☐

Effectuer les calculs. Expliquez pourquoi ?

Quatrième expérience

Etablissement :

2

Nom :

Prénom :

Classe :

L'usage de la règle gradué et du compas n'est pas autorisé.

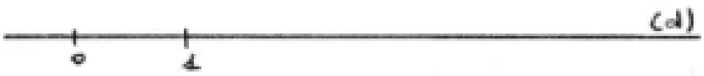
Exercice 1 : Répondre aux questions suivantes.

a) Deux segments peuvent-ils toujours être mesurés simultanément à l'aide de la même unité de longueur ?

b) Un segment a-t-il toujours une mesure (entière : 0, 1, 2, 3, ...; décimale : 2,912 ; 0,7381 ; ... ; fractionnaire : 2/3, 1/9, ...) exacte en prenant une unité de référence ?

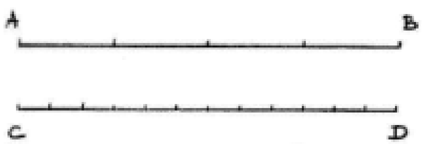
c) En changeant plusieurs fois d'unité, peut-on finalement toujours obtenir de façon pratique la mesure exacte (entière, décimale, fractionnaire) de tout segment ?

d) On donne une droite graduée (d) :



Tout point A de cette droite peut-il être repéré par une abscisse entière, décimale ou fractionnaire ?

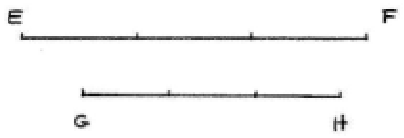
Exercice 2 :



1.a) Les deux segments suivants ont-ils la même longueur ?

1.b) Quelle est leur mesure respective avec l'unité choisie ?

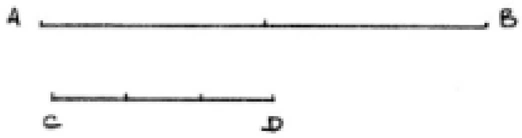
2.a) Les deux segments suivants ont-ils la même longueur ?



2.b) Quelle est leur mesure respective avec l'unité choisie ?

<u>Exercice 3 :</u>

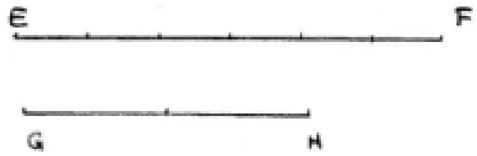
1.a) Peut-on savoir quel est le plus grand des deux segments ?



Si oui, lequel est-ce ?

1.b) Peut-on savoir de combien il est le plus grand ?
Si oui, dites de combien ?

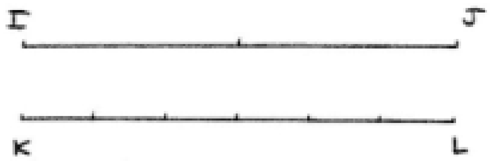
2.a) Peut-on savoir quel est le plus grand des deux segments ?



Si oui, lequel est-ce ?

2.b) Peut-on savoir de combien il est le plus grand ?
Si oui, dites de combien ?

3.a) Peut-on savoir quel est le plus grand des deux segments ?

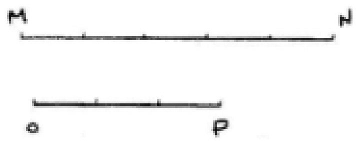


Si oui, lequel est-ce ?

3.b) Peut-on savoir de combien il est le plus grand ?
Si oui, dites de combien ?

?

4.a) Peut-on savoir quel est le plus grand des deux segments ?



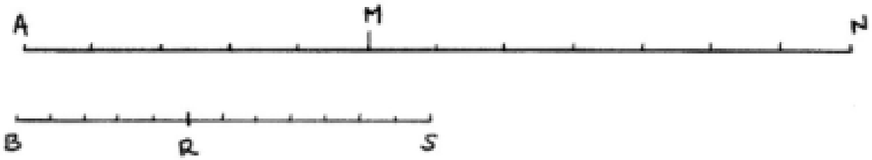
Si oui, lequel est-ce

4.b) Peut-on savoir de combien il est le plus grand ?
Si oui, dites de combien ?

5 Donner un exemple pour chaque type de nombre que vous connaissez.

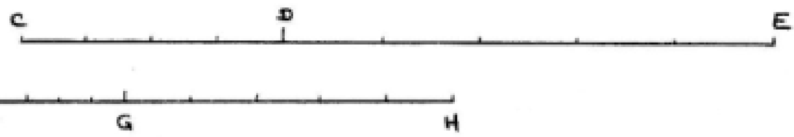
Exercice 4 :

1



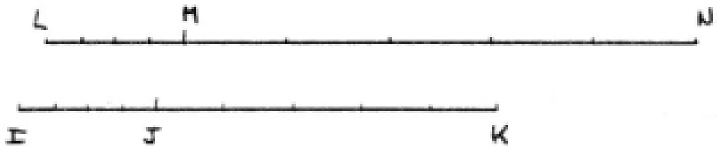
. Peut-on écrire : a) AM/AN = BR/BS = 5/12 ? oui ☐ non ☐
b) AM/BR = MN/RS = 1 ? oui ☐ non ☐
Expliquez. c) AM/MN = BR/RS = 5/7 ? oui ☐ non ☐

2



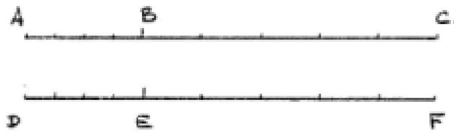
Peut-on écrire : a) CD/CE = FG/FH = 4/9 ? oui ☐ non ☐
b) CD/FG = DE/GH = 1 ? oui ☐ non ☐
Expliquez c) CD/DE = FG/GH = 4/5 ? oui ☐ non ☐

3



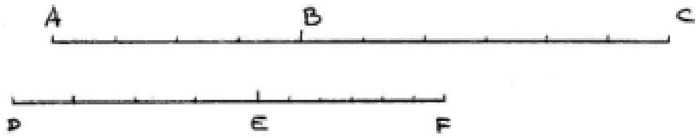
Peut-on écrire : a) IJ/JK = LM/MN = 4/5 ? oui ☐ non ☐
b) IJ/LM = JK/MN = 1 ? oui ☐ non ☐
Expliquez. c) IJ/IK = LM/LN = 4/9 ? oui ☐ non ☐

4.



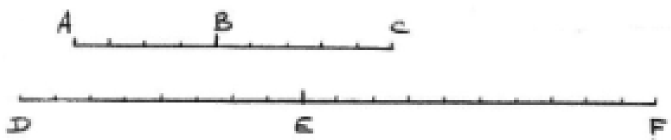
Peut-on écrire : a) AB/AC = DE/EF = 4/9 ? oui ☐ non ☐
b) AB/DE = BC/EF = 1 ? oui ☐ non ☐
Expliquez. c) AB/BC = DE/EF = 4/5 ? oui ☐ non ☐

5



Peut-on écrire : a) AB/BC = DE/EF = 4/6 ? oui ☐ non ☐
b) AB/AC = DE/DF = 4/10 ? oui ☐ non ☐
Expliquez. c) AB/DE = BC/EF = 1 ? oui ☐ non ☐

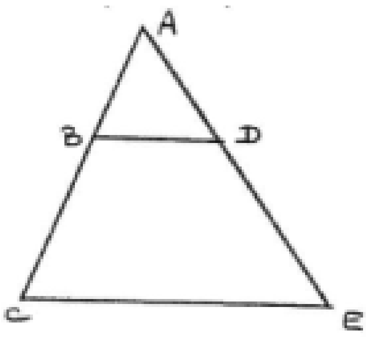
6.



Peut-on écrire : a) AB/BC = DE/EF = 4/6 ? oui ☐ non ☐
b) AB/AC = DE/DF = 4/10 ? oui ☐ non ☐

Expliquez. | c) AB/DE = BC/EF = 1 ? oui ☐ non ☐

Exercice 5 : Pour la figure ci-dessous, les droites (BD) et (CE) sont parallèles.
Les égalités suivantes sont-elles vraies ? **Partie II Annexe I 2.c**



BA/BC = DA/DE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AB/AC = AD/AE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

CB/CA = ED/EA oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

BA/BC = DA/DE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

CB/CA = ED/EA = BD/CE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AB/AD = BC/DE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AB/AC = AD/AE = BD/CE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AB/AD = AC/AE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AC/AE = BC/DE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AE/AC = AD/AB oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AC/AE = BC/DE = BD/CE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AB/AD = BC/DE = BD/CE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

BA/BC = AE/AC oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AB/AD = AC/AE = BD/CE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

AB/AC = BC/DE oui ☐ non ☐ . Pourquoi ?

Annexe I 1, a

Programme de la classe de quatrième

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
<u>1 - Triangles</u> Triangles déterminés coupant deux sécantes	Connaître, utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes : Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si (MN) est parallèle à (BC), alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$	L'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers. Elle s'étend bien sûr au cas où M et N appartiennent respectivement aux demi-droites [AB) et [AC), mais on n'examinera pas le cas où les demi-droites [AM) et [AB), de même que les demi-droites [AN) et [AC), sont opposées. Le théorème de Thalès dans toute sa généralité ainsi que sa réciproque seront étudiées en classe de 3ème.

Annexe I 1, b

Présentation

[...] L'élargissement des domaines étudiés et l'enrichissement des outils acquis au fur et à mesure, alliés à une plus grande maturité des élèves, permettent de les initier davantage à l'activité mathématique. A ce propos, les études expérimentales (calculs numériques, avec ou sans calculatrices, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.,) permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves ne les confondent avec des démonstrations : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré.

On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes.

Annexe I 1, c

Programme de la classe de troisième

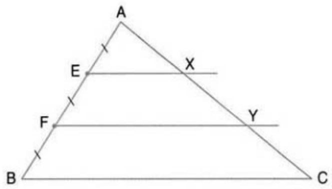
Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
2 - Propriété de Thalès	Connaître et utiliser dans une situation donnée les deux théorèmes suivants : - Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux point de d, distincts de A. Soient C et N deux points de d', distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ - Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d, distincts de A. Soient C et N deux points de d', distincts de A. Si AM/AB = AN/AC et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.	Il s'agit d'un prolongement de l'étude faite en classe de 4ème. L'étude de la propriété de Thalès est l'occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique du plan et de l'espace. La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite. L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique peut permettre de créer des situations reliées au théorème de Thalès, notamment lors des activités d'approche de la propriété par la mise en évidence de la conservation des rapports. Le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de la position relative de ces points sur la droite. On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donnés deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport CA/CB a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

Annexe I2,a
Pythagore Quatrième

Activités

1 Avec des tiers

ENTRE NOUS
Objectif
Réinvestir la propriété de la droite des milieux et avancer vers la propriété de Thalès.



A. Les hypothèses et la figure

On considère un triangle ABC.
Les points E et F sont sur le segment [AB] et vérifient AE = EF = FB.
La parallèle à (BC) passant par E coupe [AC] en X et la parallèle à (BC) passant par F coupe [AC] en Y.
Construire une figure.

B. Comparaisons de longueurs

1. Démontrer que AX = XY, puis exprimer FY en fonction de EX.
2. La droite (XB) coupe le segment [FY] en M.
Démontrer que XY = YC.
3. Exprimer FM en fonction de EX puis MY en fonction de BC.
En déduire FY en fonction de EX et de BC.
4. À l'aide des résultats obtenus en **1** et **3**, exprimer BC en fonction de EX.

C. Comparaisons de rapports

Utiliser les résultats du **B** pour répondre aux questions suivantes.

1. Évaluer $\frac{AE}{AB}$ $\frac{AX}{AC}$ $\frac{EX}{BC}$.

Que constate-t-on ?

2. Évaluer $\frac{AF}{AB}$ $\frac{AY}{AC}$ $\frac{FY}{BC}$.

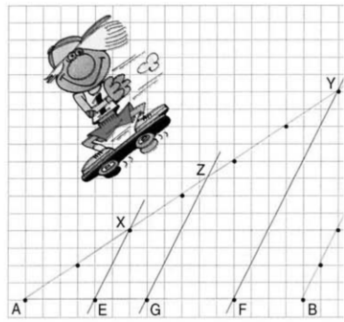
Que constate-t-on ?

2 Avec des quadrillages

ENTRE NOUS
Objectifs
• Découvrir la propriété de Thalès à partir de figures sur un quadrillage.
• Énoncer la propriété de Thalès.
• Utiliser cette propriété.

A. Un premier quadrillage

ABC est un triangle et les droites (EX), (GZ), (FY)



1. Évaluer, avec le quadrillage, les rapports $\frac{AE}{AB}$

2. Même travail avec $\frac{AF}{AB}$ $\frac{AY}{AC}$ $\frac{FY}{BC}$.

3. Même travail avec $\frac{AG}{AB}$ $\frac{AZ}{AC}$ $\frac{GZ}{BC}$.

4. Compléter la propriété suivante que nous adm

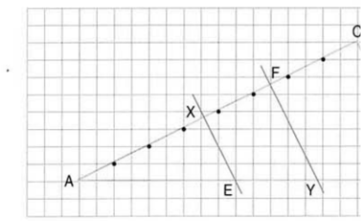
PROPRIÉTÉ

Soit un triangle ABC et soit M un point de [AB] e

Si (MN) // (BC), **alors** $\frac{A...}{AB} = \frac{A...}{AC} = \frac{...}{BC}$.

B. Un deuxième quadrillage

ABC est un triangle, les droites (EX), (FY) et (BC)



1. Avec le quadrillage, évaluer $\frac{AE}{AB}$.

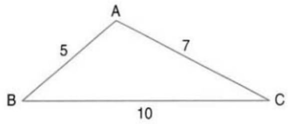
En utilisant la propriété énoncée au **A**, exprimer

2. Avec le quadrillage, évaluer $\frac{AF}{AC}$ puis calcul

3 Avec une règle graduée

ENTRE NOUS
Objectifs
• Découvrir la propriété de Thalès en mesurant sur une figure.
• Énoncer la propriété de Thalès.

1. Construire soigneusement un triangle ABC ayant (en cm) les dimensions indiquées sur la figure ci-contre.



2. Placer les points E et F sur [AB] tels que AE = 1 cm et AF = 3 cm.
Placer le point G sur [AC] tel que AG = 3 cm.
Construire :
– la parallèle à (BC) passant par E, elle coupe [AC] en X ;
– la parallèle à (BC) passant par F, elle coupe [AC] en Y ;
– la parallèle à (BC) passant par G, elle coupe [AB] en T.

3. Mesurer AX, AY, AT, EX, FY et TG.

4. Donner des valeurs approchées des quotients suivants.

$$\frac{AE}{AB} \quad \frac{AF}{AB} \quad \frac{AT}{AB} \quad \frac{AX}{AC} \quad \frac{AY}{AC} \quad \frac{AG}{AC} \quad \frac{EX}{BC} \quad \frac{FY}{BC} \quad \frac{TG}{BC}$$

Que constate-t-on ?

5. Compléter la propriété suivante que nous admettons.

PROPRIÉTÉ

Soit un triangle ABC et soit M un point de [AB] et N un point de [AC].

Si (MN) // (BC), **alors** $\frac{A...}{AB} = \frac{A...}{AC} = \frac{.....}{BC}$.

4 La propriété de Thalès

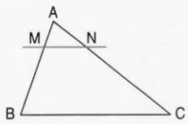
ENTRE NOUS
Prérequis
• Avoir étudié l'activité 2 ou l'activité 3.
• Savoir calculer un terme inconnu dans une égalité de quotients.
Objectifs
• Énoncer (si cela n'a pas déjà été fait) la propriété de Thalès.
• Appliquer cette propriété.

A. L'énoncé

Compléter l'énoncé de la propriété de Thalès.

PROPRIÉTÉ

Dans le triangle ABC, M est un point de [AB] et N est un point de [AC].
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles,
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$.

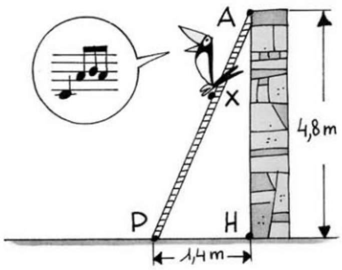


B. Une application

Il était une fois... une échelle AP de 5 m accotée à un mur AH de 4,8 m. Une pie est perchée sur l'échelle au point X tel que XP = 3 m.

1. À quelle hauteur du sol est perchée la pie ?

2. À quelle distance du mur se trouve la pie ?



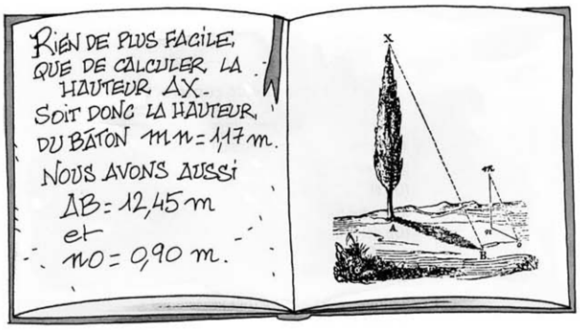
Activités

5 Thalès dans la vie pratique

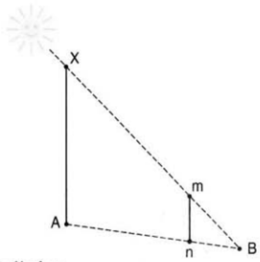
ENTRE NOUS
Objectif
Appliquer la propriété de Thalès à un vieux problème (**A**) et à un problème plus « pratique » (**B**).

A. Calcul de la hauteur d'un arbre

Thalès avait séjourné en Égypte. On raconte (voir « Histoire des mathématiques » p. 142) qu'il avait calculé la hauteur d'une pyramide en utilisant l'ombre d'un bâton. Cette technique fut longtemps enseignée, comme en témoigne cet extrait d'un vieux livre d'arpentage.



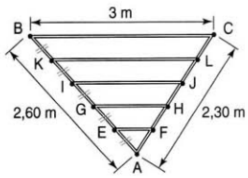
(D'après *Notions de géométrie pratique et d'arpentage*, Eysserie, Delagrave.)



Calculer la hauteur de l'arbre.

B. Calcul de longueurs

Un élément de charpente a la forme d'un triangle.
Quatre chevrons parallèles renforcent ce triangle (voir figure).



Calculer la longueur de chaque chevron (on néglige l'épaisseur du bois).

Activités

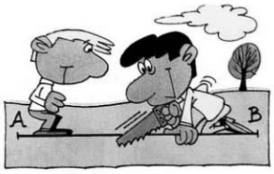
6 Partage d'un segment

ENTRE NOUS
Objectif
Appliquer la propriété de Thalès pour partager un segment.

Le problème

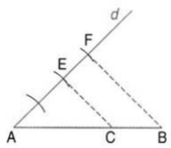
Soit un segment [AB].
Construire à la règle et au compas le point C de [AB] tel que :

$AC = \frac{2}{3} AB.$



Voici un programme de construction

1. Tracer une droite *d* passant par A.
2. Choisir une longueur unité.
(On choisit un écartement de compas.)
3. Porter trois fois cette longueur sur *d*.
(On détermine ainsi E et F tels que :
$AE = 2$ et $AF = 3$.)
4. Tracer (BF).
5. Tracer la parallèle à (BF) passant par E.
Elle coupe [AB] en C.



1. Évaluer $\frac{AE}{AF}$.

Démontrer que $AC = \frac{2}{3} AB$.

2. Tracer un autre segment [AB] et adapter le programme de construction pour construire un point D de [AB] tel que :

$AD = \frac{3}{5} AB.$

3. Tracer un autre segment [AB] et adapter le programme de construction pour construire un point K de (AB) tel que :

$AK = \frac{5}{3} AB.$

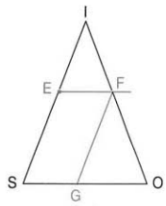
Activités

7 Thalès et les triangles particuliers

ENTRE NOUS
Objectif
Résoudre des problèmes relevant de la propriété de Thalès tout en révisant les définitions des triangles particuliers.

A. Avec un triangle isocèle

On considère un triangle ISO isocèle en I avec $IS = 7$ et $SO = 5$.
E est le point de [IS] tel que $IE = 3$.
La parallèle à (SO) passant par E coupe (IO) en F et la parallèle à (IS) passant par F coupe (SO) en G.



1. Faire une figure.
2. Démontrer que IEF est isocèle en I.
3. Calculer OG.

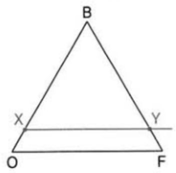
Pythagore 6e

B. Avec un triangle équilatéral

On considère un triangle équilatéral BOF de côté 6.
X est le point de [BO] tel que OX = 1.
La parallèle à (OF) passant par X coupe (BF) en Y.

1. Calculer BY et XY.

2. Que peut-on dire du triangle BXY ?



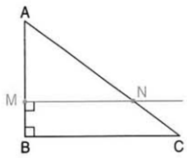
C. Avec un triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en B.
AB = 3 et BC = 4.
M est un point de [AB] tel que AM = 2,1.
La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe (AC) en N.

1. Calculer MN.

2. Calculer l'aire du triangle AMN.

3. L'aire du triangle AMN est-elle supérieure à la moitié de l'aire du triangle ABC ?



8 Construction d'une 4e proportionnelle

ENTRE NOUS
Objectif
Appliquer la propriété de Thalès pour obtenir un nombre à partir d'une représentation graphique.

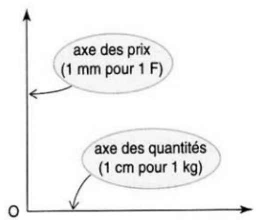
Rappel. Dans un tableau de proportionnalité où trois nombres sont connus, le quatrième nombre est appelé « **quatrième proportionnelle** ».

Le problème

Quantité (en kg)	Prix (en F)
7	59,5
12	*x* ?

1. Calculer *x*.

2. Graphiquement :
• Tracer deux axes sécants en O.
• Marquer, sur l'axe des quantités, les points A et B d'abscisse 7 et 12.
• Marquer, sur l'axe des prix, le point C d'ordonnée 59,5.
• Joindre A et C et tracer la parallèle à (AC) passant par B. Elle coupe l'axe des prix en D.
• Mesurer OD. Que constate-t-on ?
• Expliquer pourquoi on retrouve *x*.



Activités

Annexe I2,b
Pythagore Troisième

Activités

1 Barres parallèles

Révision active

ENTRE NOUS
Objectif
Revoir la propriété de Thalès étudiée en quatrième.

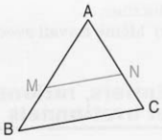
A. Rappel de la propriété de Thalès

Compléter.

PROPRIÉTÉ

Soit un triangle ABC, M un point de [AB] et N un point de [AC].

Si (MN) // (BC), **alors** $\frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$.

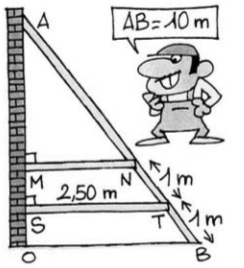


B. L'échafaudage

Un échafaudage est constitué d'une barre AB de 10 m et d'une barre ST de 2,50 m.
Tony veut consolider cet échafaudage en plaçant une barre MN parallèle à (ST) et telle que NT = 1 m.

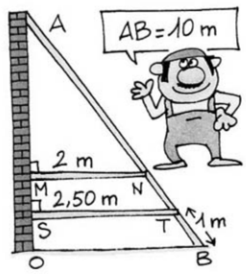
1. Quelle doit être, au cm près, la longueur de la barre MN ?

2. Calculer OB et AS.



3. Tony n'a finalement pas trouvé une barre MN de bonne longueur ; en revanche, une barre de 2 m s'offre à lui et il compte bien l'utiliser.

Mais à quelle distance MS de la première barre doit-il la placer ? Pour répondre :
• Calculer AM à 1 cm près.
• En déduire MS à 1 cm près.



Activités

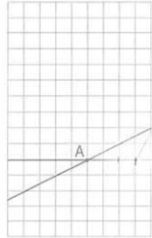
126

2 Zoom

ENTRE NOUS
Objectifs
• Approcher la propriété de Thalès telle que le programme la propose.
• Étudier l'effet d'une réduction ou d'un agrandissement sur les aires.

A. Réductions

1. Placer le point B′ sur [AB] tel que $\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{4}$.
Placer C′ sur (AC) tel que (B′C′) // (BC).



2. En lisant sur le quadrillage, évaluer : $\frac{AC'}{AC}$ et $\frac{B'C'}{BC}$.

Compléter : $\frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$.

3. En considérant le triangle ABC, on peut dém
à la question **2**. Comment ?

4. Compléter la phrase suivante.
Le triangle AB′C′ est une réduction du triangle

5. Évaluer les aires des triangles ABC et AB′C′
reau).
Compléter : aire(AB′C′) = ... × aire(ABC).

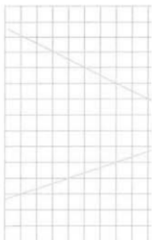
6. Placer le point B″ sur (AB) tel que A soit entr

Placer le point C″ sur (AC) de façon que (B″C″)

7. Reprendre les questions **2**, **4** et **5** avec les po

B. Agrandissements

1. Placer le point B′ sur (AB) tel que B soit entre A et B′, et $\frac{AB'}{AB} = 3$.
Placer C′ sur (AC) tel que (B′C′) // (BC).



2. En lisant sur le quadrillage, évaluer : $\frac{AC'}{AC}$ et $\frac{B'C'}{BC}$.

Compléter : $\frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$.

3. En considérant le triangle AB′C′, on peu
obtenu à la question **2**. Comment ?

4. Compléter la phrase suivante.
Le triangle AB′C′ est un agrandissement du tria

5. Évaluer les aires des triangles ABC et AB′C′
reau).
Compléter : aire(AB′C′) = ... × aire(ABC).

6. Placer le point B″ sur (AB) tel que A soit entr

Placer C″ sur (AC) tel que (B″C″) // (BC).

7. Reprendre les questions **2**, **4** et **5** avec les po

3 La propriété de Thalès...

ENTRE NOUS

Objectifs

• Partir de la propriété de Thalès vue en quatrième pour démontrer une propriété de Thalès plus générale.

• Revoir des propriétés de la symétrie centrale.

A. On le sait déjà (avec M entre A et B) !

En classe de quatrième, on a étudié un énoncé de la propriété de Thalès. Compléter cet énoncé.

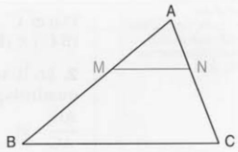
PROPRIÉTÉ

Soit un triangle ABC.

Si M est sur [AB] et N sur [.....]

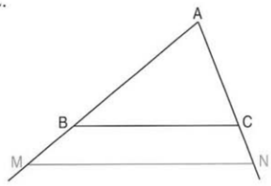
et si (MN) // (.....)

alors $\frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$.



B. On va un peu plus loin (avec M plus loin que B)

Soit un triangle ABC.

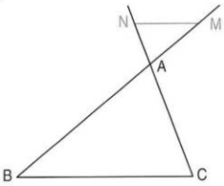


M est un point de (AB) tel que B est entre A et M ; N est un point de (AC) tel que C est entre A et N. On suppose que (MN) // (BC).

Démontrer que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

C. Encore plus loin (avec M de l'autre côté de A)

Soit un triangle ABC.



M est un point de (AB) tel que A est entre B et M ; N est un point de (AC) tel que A est entre C et N. On suppose que (MN) // (BC).

1. Reproduire ce dessin.

2. Construire le symétrique M' de M par rapport à A puis le symétrique N' de N par rapport à A.

3. Revoir les **Pages bleues** p. 237 pour justifier les résultats suivants :

• (MN) // (M'N') • AM = AM' AN = AN' MN = M'N'.

4. Démontrer que $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$.

En déduire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

D. En conclusion

Écrire un énoncé de la propriété de Thalès regroupant les trois cas étudiés dans les parties **A**, **B** et **C**.

Activités

4 ...Et sa réciproque

La propriété de Thalès a une réciproque qui permet de démontrer aisément que deux droites sont parallèles. Mais dans quels cas ? Voyons cela.

A. Les mauvaises positions

1. Construire trois triangles ABC tel que AB = 50 mm, AC = 40 mm et BC = 45 mm.

Pour la suite, on considère un point M de (AB) et un point N de (AC).

2. Pour chaque cas, compléter la figure et répondre aux trois questions suivantes.

a) Est-ce que A, M et B sont dans le même ordre que A, N et C ?

b) Est-ce que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$?

c) Est-ce que (MN) // (BC) ?

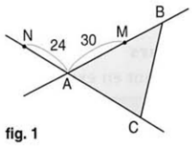


fig. 1

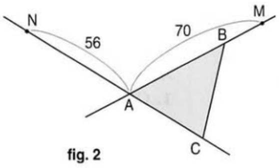


fig. 2

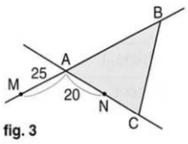


fig. 3

B. Les bonnes positions

1. Pour chacune des figures précédentes, construire le point N′ de (AC) tel que N ≠ N′ et AN = AN′.

2. Pour chaque cas, répondre aux trois questions suivantes.

a) Est-ce que A, M et B sont dans le même ordre que A, N′ et C ?

b) Est-ce que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$?

c) Est-ce que (MN′) // (BC) ? (On ne demande pas de démontrer.)

C. La propriété réciproque de Thalès

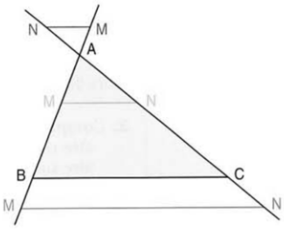
Compléter la propriété suivante, dite **réciproque de Thalès**.

PROPRIÉTÉ

Soit un triangle ABC.
Soit un point M de (AB) et un point N de (AC).
Si A, M et B sont dans le même ordre que A, N et C,

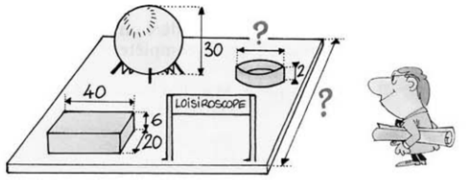
et si $\frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$

alors (.....) // (.....).



5 La maquette du loisiroscope

Une cité des loisirs a la forme d'un carré de 40 000 m^2. Elle comporte en particulier :
- une géode de 30 m de diamètre ;
- une piscine cylindrique de 2 m de profondeur, contenant 628 m^3 d'eau ;
- un bâtiment rectangulaire dont les dimensions sont 40 m × 20 m × 6 m.



Une maquette de cette cité est réalisée à l'échelle 1/100.

A. Rapport des longueurs

1. Compléter le tableau suivant en exprimant les longueurs en **mètres**.

	Longueur sur la maquette L	Longueur dans la réalité L'	$\frac{L'}{L}$
Côté de la cité			
Longueur du bâtiment			
Largeur du bâtiment			
Hauteur du bâtiment			
Diamètre de la géode			
Profondeur de la piscine			
Diamètre de la piscine			

2. Compléter :
longueur réelle = ... × longueur sur la maquette
longueur sur la maquette = ... × longueur réelle.

B. Rapport des aires

1. Compléter le tableau suivant en exprimant les aires en **mètres carrés**.

	Aire sur la maquette A	Aire dans la réalité A'	$\frac{A'}{A}$
Aire de la cité			
Aire de la piscine			
Aire de la sphère			

2. Compléter :
aire réelle = ... × aire sur la maquette
aire sur la maquette = ... × aire réelle
mais aussi : $A' = \boxed{...}^2 \times A$ et $A = \boxed{...}^2 \times A'$.

3. Que deviennent les formules ci-dessus si l'échelle est 1/20 ?

Activités

C. Rapport des volumes

1. Compléter le tableau suivant en exprimant les volumes en mètres cubes.

	Volume sur la maquette V	Volume dans la réalité V'	$\frac{V'}{V}$
Volume de la géode			
Volume de l'eau dans la piscine			
Volume du bâtiment			

2. Compléter :

volume réel = ... × volume sur la maquette

volume sur la maquette = ... × volume réel

mais aussi : $V' = \boxed{...}^3 \times V$ et $V = \boxed{...}^3 \times V'$.

3. Que deviennent les formules ci-dessus si l'échelle est 1/20 ?

D. Applications

1. Neuf mille mètres carrés sont gazonnés ; quelle superficie cela représente-t-il sur la maquette ?

2. Un bac à sable de la maquette contient 10 cm^3 de sable.
Calculer le volume de sable dans la réalité.

6 Spécial compétition

A. Tour Eiffel (Rallye mathématique Champagne-Ardenne, 1989)

Construite pour le centenaire de la Révolution française, la tour Eiffel s'élève à 300 mètres et pèse 8 000 tonnes.
Imaginons une maquette la reproduisant fidèlement, avec les mêmes matériaux, haute de 1,5 mètre.

Quelle serait la masse de cette maquette en grammes ?

La tour Eiffel vue par Robert Doisneau (1912-1994).

B. L'aire d'un cube (Olympiades mathématiques belges, 1995)

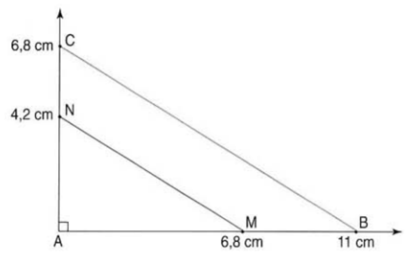
De combien augmente l'aire totale d'un cube lorsque la longueur de chacune des arêtes augmente de 50 % ?

- ❑ 50 %
- ❑ 125 %
- ❑ 225 %
- ❑ 237,5 %
- ❑ 2 500 %.

Activités

7 Un cas louche

1. Construire cette figure en respectant les dimensions indiquées.



2. Que pourrait-on penser des droites (BC) et (MN) ?

Qu'en déduirait-on pour les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$?

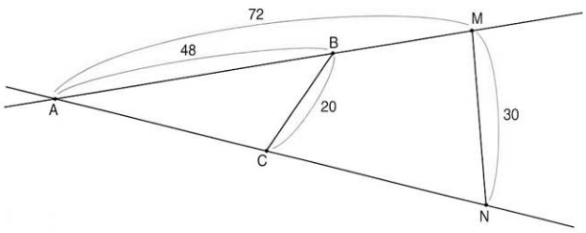
3. Calculer $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ à 0,000 1 près.

4. Conclure.

5. Les points A, C, M et N restant en place, à quelle distance de A devrait-on placer le point B pour que les droites (BC) et (MN) soient parallèles ?

8 Un cas douteux

On considère la figure suivante où les points A, B et M sont dans le même ordre que les points A, C et N.



1. Comparer $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{MN}{BC}$.

2. A-t-on $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$?

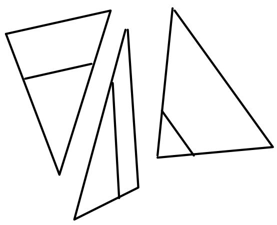
3. Réaliser la figure ci-dessus (en prenant le millimètre comme unité) et construire le point P de (AC) tel que :
- A, B et M sont dans le même ordre que A, C et P ;
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}$.

4. Combien vaut MP ?

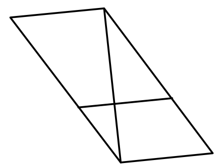
Activités

Annexe I 2 c

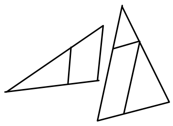
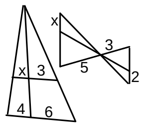
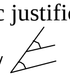
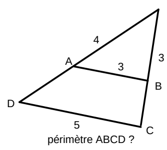
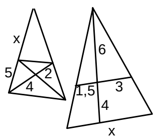
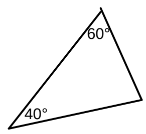
Quatrième Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 1	**Exercice type 2**	**Exercice type 3**	**Exercice type 4**
Nombre de parallèles	2	2	2	2
Nombre de sécantes	2	2	2	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	Prototype I ou III	Pathogène I'	Prototype I ou III	Pathogènes I'
Distribution longueurs	Groupe I	Groupe I	Groupe III ou III bis $3/x = 5/4 + 2$ ou $x/8 = 16 - 4/16$	Groupe III bis $\frac{x}{5} = \frac{2}{2+0.5}$
Figure congruente	oui	oui	non	non
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul 1 longueur	Calcul 1 longueur (ou de deux)	Calcul 1 longueur	calcul 1 longueur
Théorème	direct	direct	direct	direct
Longueurs	Latérales ou Mixtes	Latérales ou Mixtes	Latérales ou Mixtes	Latérales ou mixtes
Variable de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	1	1	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	non	non
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	9.	3.	3	0.
Classification	U.G	U.G	U.G	U.G.

Quatrième Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 5	**Exercice type 6**	**Exercice type 7**	**Exercice type 8**
Nombre de parallèles	2	2	2	plus de 3
Nombre de sécantes	2	2	2	plus de 3
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	La figure plongée dans une une configuration complexe
Orientation de la figure	Prototype I ou III	Prototype I ou III	Prototype I ou III	3 figures clefs
Distribution longueurs	Groupe I	Groupe I	Groupe II ou IV bis $\frac{x-7}{x}=\frac{1}{3}$ $\frac{x}{x+9}=\frac{5}{5+x}$	atypique
Figure congruente	oui	oui	non	non
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Quelle longueur peut-on calculer ?	Calcul de plusieurs longueurs	Calcul 1 longueur	Calcul de plusieurs longueurs
Théorème	direct	direct	direct	(4) direct
Longueurs	latérales ou mixtes	latérales ou mixtes	latérales ou mixtes	latérales ou mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Nombre d'outil	1	1	1	2
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	non	oui 2 Thalès et soustraction
Répétition d'une méthode généralités...	non	non	non	oui
Interprétation, conjecture	non	non	non	non
Nombre d'exercices	1.	1	8	1.
Classification	U.G	U.G	U.G.S	U.G.S

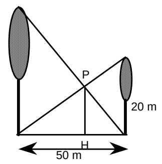
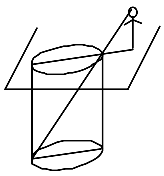
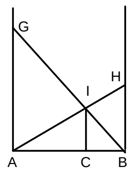
Quatrième Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 9	**Exercice type 10**	**Exercice type 11**	**Exercice type 12**
Nombre de parallèles	2	2	2	2
Nombre de sécantes	2	3 ou 2 paires	2	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	La figure est plongée dans une configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles	/
Orientation de la figure	prototype I ou III	3 figures clefs	quelconque	/
Distribution longueurs	atypique	type	type	/
Figure congruente	non	oui	oui	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	éventuellement quadrillage
Type de la question	indirecte : "montrer triangle isocèle "calculer le périmètre du parallélogramme""	Calcul 1 longueur	Calcul 1 longueur ou deux "calculer le périmètre du parallélogramme"	construction 4ème proportionnelle ou partage d'un segment
Théorème	direct	direct	direct avec justification // 	direct
Longueurs	latérales ou mixtes	Latérales	Mixtes 2 longueurs	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	1	2	1	1
Nombre de possibilités de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	2 Thalès + transitivité	justification Thalès pour	non
Répétition d'une méthode	oui	oui	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	1.	2.	2	3
Classification	U.G.S	U.R.C	U.G.S	U.G

Quatrième Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 13	**Exercice type 14**	**Exercice type 15**	**Exercice type 16**
Nombre de parallèles	2	2	2	3
Nombre de sécantes	2	2	2	2
Complexité	/	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	La figure est plongée dans une configuration complexe
Orientation de la figure	/	Prototype I	Prototype I	Prototype I
Distribution longueurs	/	/	non typique	/
Figure congruente	/	/	non	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport		littéral	rationnel	littéral
Type de la question	Construction, pourcentage	Démonstration égalités littérales	Démonstration non parallélisme avec nombre	Démonstration non parallélisme (littérale)
Théorème	direct	direct	contraposée	contraposée +
Longueurs	Latérales	/	Latérales	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	outil	outil	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	ouvert	½ ouvert	fermé	fermé
Nombre d'outil	1	2	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	2
Raisonnement reliant des résultats	non	oui Thalès + égalité AB = AC(=BC)	non	oui Thalès $\downarrow$ contraposée
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	1.	2.	1.	1.
Classification	U.G.S	U.R.C.	U.G.S	U.R.C

Quatrième   Le nouveau Pythagore

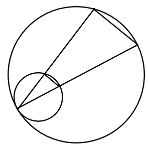
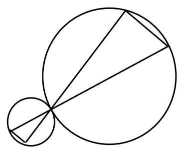
Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables		
	Exercice type 17	**Exercice type 18**	**Exercice type 19**
Nombre de parallèles	/	2	/
Nombre de sécantes	/	2	/
Complexité	Configuration com- plexe	Seuls figurent les éléments utiles, avec habillage	Configuration com- plexe 2 figures clefs
Orientation de la figure	/	/	/
Distribution longueurs	/	quelconque	/
Figure congruente	/	non	/
Variables autres que celles de la figure			
Nature du rapport	littéral	rationnel	rationnel
Type de la question	Démonstration aire (littérale)	Calcul 1 longueur	Calcul 1 longueur
Théorème	direct	direct	direct
Longueurs	/	Mixte	/
Variables de la situation didactique			
Outil / objet	objet	"outil"	objet
Changement de cadre	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	½ ouvert
Nombre d'outil	2 Thalès et produit en croix	1	2
Nombre de possibilité de résolution	1	1	2
Raisonnement reliant des résultats	oui Thalès → produit en x	non	oui 2 Thalès, fraction segment
Répétition d'une méthode	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non
Nombre d'exercices	1.	4.	1
Classification	U.R.C	U.G.	U.P

Annexe I 2 d

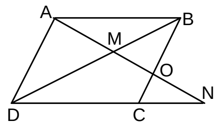
Troisième   Le nouveau Pythagore

Variables des figures **Milieu proposé**	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 1	**Exercice type 2**	**Exercice type 3**	**Exercice type 4**
Nombre de parallèles	2	2	2	2
Nombre de sécantes	2	2	2	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	Prototypes I et II	Pathogène I ou I'	Prototype I et III	Prototype I et III
Distribution longueurs	Groupes I et D	Groupe I	Groupe V $\frac{x-10}{x} = \frac{13}{13+26}$	Groupe I
Figure congruente	oui	oui	non	oui
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul 1 longueur	Calcul 1 longueur	Calcul 1 longueur	Quelle longueur peut-on calculer ?
Théorème	Direct	Direct	Direct	Direct
Longueurs	latérales - mixtes	latérales	latérales	mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	ouvert
Nombre d'outil	1	1	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	non	non
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture, généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	3	1.	1	1
Classification	U.G	U.G	U.G.S	U.G.

Troisième   Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 5	**Exercice type 6**	**Exercice type 7**	**Exercice type 8**
Nombre de parallèles	2	2	2	/
Nombre de sécantes	2	3	2	/
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	Prototype II	Prototype II	Prototypes I et II	/
Distribution longueurs	Groupe D	Groupe D	Groupes I et D	/
Figure congruente	oui	oui	oui	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	avec éventuellement quadrillage à utiliser
Type de la question	calcul de plusieurs longueurs	calcul 1 longueur	calcul 1 longueur	Construction : partage segment ; abscisses.
Théorème	Direct	Direct	Direct avec justification	Direct
Longueurs	Mixtes	Externes	Latérales	
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	1	1	2	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	Thalès +transitivité	angles alterne - interne + Thalès ###	non
Répétition d'une méthode	oui	non	non	non
Interprétation, conjecture, généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	2	1.	1.	4
Classification	U.G	U.R.C	U.G	U.G

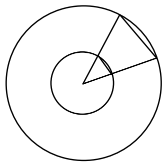
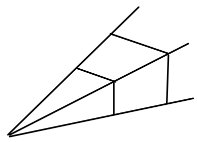
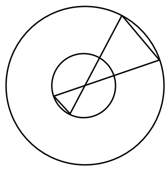
Troisième   Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 9	**Exercice type 10**	**Exercice type 11**	**Exercice type 12**
Nombre de parallèles	2	/	2 x 2	2
Nombre de sécantes	2	/	2	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	Prototypes I ou III	/	/	Prototypes I ou III
Distribution longueurs	non typique	/	/	/
Figure congruente	non	/	/	non
Variables autres que celles de la figure			 $MA^2 = MN\ MO$	
Nature du rapport	rationnel	Unité segmentaire ou radical		rationnel
Type de la question	Que dire de ABC ?	calcul de plusieurs longueurs	égalité littérale (+ carré)	calcul d'une longueur en fonction d'une autre
Théorème	Direct	Thalès - Pythagore justification //	Thalès - Produit en croix - transitivité	Thalès
Longueurs	Mixte	/	/	Mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	outil	outil	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	ouvert	½ fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	2	2 ou 3	3 Thalès,Transitivit produit en x milieu carré ou GE=FE	Thalès + algèbre
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	2 calculs de longueurs	T → P → T ou P→T→ soustr long	2 T → trans →pro- duit en x ou milieu	Thalès → produit en x
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	1..	2.	2.	1
Classification	UG	U.R.C	U.R.C	U.R.C

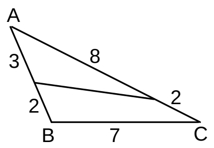
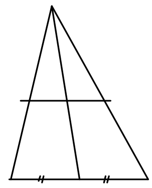
Troisième Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 13	**Exercice type 14**	**Exercice type 15**	**Exercice type 16**
Nombre de parallèles	/	2	2	2
Nombre de sécantes	/	2	2	2
Complexité	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	/	Prototype I	Prototypes I ou II	Prototypes I ou II
Distribution longueurs	/	atypique	Groupes I et D	atypique
Figure congruente	non	non	oui	non
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel éventuellement quadrillage	rationnel
Type de la question	calcul 1 longueur en fonction d'une autre	Méthode Construction figure proposée	Parallèles ou non ?	Parallèle ou non ?
Théorème	Thalès	Thalès	réciproque ou contraposée	réciproque ou contraposée
Longueurs	Mixtes	Mixtes	/	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	outil	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	½ ouvert	fermé	fermé
Nombre d'outil	Thalès + algèbre	Thalès 1	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	Thalès → produit en croix	Thalès	non	non
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	Interprétation	non	non
Nombre d'exercices	1.	1.	2.	3
Classification	U.R.C.	U.R.C.	U.G	U.G

Troisième Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 17	**Exercice type 18**	**Exercice type 19**	**Exercice type 20**
Nombre de parallèles	2	2	2	/
Nombre de sécantes	2	2	4 paires	/
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe	Configuration complexe
Orientation de la figure	Prototypes I ou II	Prototypes I ou II	/	/
Distribution longueurs	atypique	/	/	/
Figure congruente	non	/	/	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	littéral	littéral	littéral
Type de la question	Parallèle ou non ?	Parallèle	Parallèle	Que dire du quadrilatère ? (parallélogramme)
Théorème	réciproque ou contraposée + Pythagore	réciproque	réciproque	réciproque
Longueurs	/	/	/	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	ouverte
Nombre d'outil	Pythagore, réciproque et contraposée	1	1	2
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	2
Raisonnement reliant des résultats	oui	oui - rayon cercle + réciproque	2 fois Thalès dans 2 figures, transitivité	4 réciproques + ou 2 réciproques +
Répétition d'une méthode	non	non	non	oui
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	interprétation	Interpréter Rassembler
Nombre d'exercices	2.	1.	2	1
Classification	U.G.S	U.G.S	U.P	U.P

Troisième   Le nouveau Pythagore

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables		
	Exercice type 21	**Exercice type 22**	**Exercice type 23**
Nombre de parallèles	2	2	/
Nombre de sécantes	2	2	/
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe
Orientation de la figure	Prototype I	Prototype I	/
Distribution longueurs	/	/	/
Figure congruente	/	/	/
Variables autres que celles de la figure			
Nature du rapport	littéral\numérique		
Type de la question	Contre exemple à fournir ou proposé	démonstrations théorèmes : milieux bissectrices - cours	démonstration parallélisme - milieu
Théorème	/	direct / réciproque	/
Longueurs	/	/	/
Variables de la situation didactique			
Outil / objet	objet	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	½ ouvert
Nombre d'outil	1	2	2 ou 3
Nombre de possibilité	1	1	1
de résolution			
Raisonnement reliant des résultats	/	oui	2 Thalès + transifivité 2 Thalès + trans+ milieu
Répétition d'une méthode	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	Interpréter	Interpréter	Interpréter
Nombre d'exercices	2. .	3.	2.
Classification	U.R.C	U.R.C	U.P

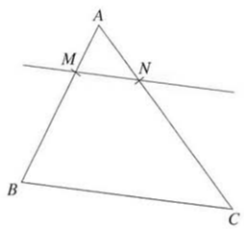
Activité 3 Droite parallèle à un côté

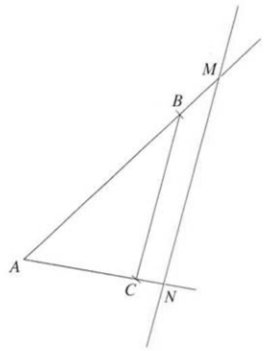
Objectifs
- Conjecturer, mesurer, admettre la proportionnalité entre les longueurs.
- Démontrer cette propriété dans le cas particulier où le rapport est $\frac{1}{4}$.

Dans chacune des figures ci-dessous, la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).

1° a) Mesurer les côtés du triangle ABC et ceux du triangle AMN ; noter ces mesures dans un tableau.

mesures de	AB	AC	BC
	↓ ...	↓ ...	↓ ...
	... ↑	... ↑	... ↑
mesures de	AM	AN	MN





b) Calculer et comparer les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$.

c) Les longueurs AM, AN et MN sont-elles proportionnelles aux longueurs AB, AC et BC (on tiendra compte de l'imprécision des mesures) ?

Quel est le coefficient de proportionnalité ?

2° Tracer un triangle ABC. Placer les points I, milieu de $[AB]$ et M, milieu de $[AI]$. La droite parallèle à (BC) et passant par I coupe (AC) en J. La droite parallèle à (BC) et passant par M coupe (AC) en N.

a) Expliquer pourquoi $AJ = \frac{1}{2}AC$ et $IJ = \frac{1}{2}BC$.

b) Expliquer pourquoi $AN = \frac{1}{2}AJ$ et $MN = \frac{1}{2}IJ$.

c) À partir des résultats précédents, compléter les égalités :

$AN = ... \times AC$; $MN = ... \times BC$.

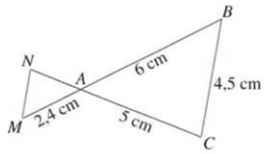
Compléter de même : $AM = ... \times AB$.

d) Qu'a-t-on démontré pour les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$?

Dans un triangle ABC, si une droite parallèle au côté $[BC]$ coupe le côté $[AB]$ en M et le côté $[AC]$ en N, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Activité ❶ Théorème de Thalès

1° Construire en vraie grandeur la figure ci-contre : les points A, B et M sont alignés ainsi que les points A, C et N, dans le même ordre.
Les côtés $[BC]$ et $[MN]$ sont parallèles.
$AB = 6$ cm ; $AC = 5$ cm ;
$BC = 4{,}5$ cm ; $AM = 2{,}4$ cm.



2° Construire les points M' et N' symétriques respectifs des points M et N par rapport au point A.

3° a) Que peut-on dire des droites (MN) et $(M'N')$? Et des droites $(M'N')$ et (BC) ? Justifier les réponses en citant les propriétés utilisées.
b) Quelles égalités de rapports peut-on écrire dans les triangles ABC et $AM'N'$?
c) Comparer AM' et AM ; AN' et AN ; $M'N'$ et MN.

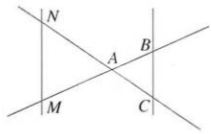
En déduire que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Sur la figure proposée, on sait que les droites (BC) et (MN) sont parallèles. On peut conclure que les longueurs des côtés du triangle ABC sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle AMN qui leur sont parallèles.

Activité ❷ À quoi sert le théorème de Thalès ?

1. Calculer une longueur

1° Reproduire en vraie grandeur la figure ci-contre :
$M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.
Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
$AB = 21$ mm ; $AC = 27$ mm ; $BC = 33$ mm ;
$AM = 35$ mm.



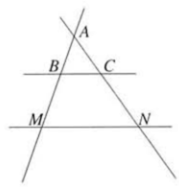
2° Quelles égalités de rapports peut-on écrire ?

3° Calculer AN et MN.

2. Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

1° Reproduire la figure ci-contre à l'échelle 1/100 :
$\widehat{BAC} = 70°$; $AB = 37$ m ; $AC = 42$ m ;
$M \in (AB)$ et $AM = 48$ m ; $N \in (AC)$ et $AN = 56$ m.

2° Comparer les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.



3° Pourquoi est-on sûr que les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles ?

Le théorème de Thalès peut être utilisé pour calculer une longueur ou bien pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

Activité ❸ Réciproque du théorème de Thalès

1° Tracer un triangle ABC. Placer sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ les points I et J tels que $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$.

a) Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC) ?
Justifier en citant le théorème utilisé.

b) Placer sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ les points M et N tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$.

Démontrer que les droites (MN) et (IJ) sont parallèles. En déduire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

2° Construire un triangle ABC tel que : $AB = 5{,}6$ cm ; $AC = 3{,}5$ cm ; $BC = 6$ cm.

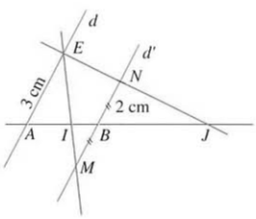
Placer sur les droites (AB) et (AC) les points M et N tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{7}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{7}$.

Que constate-t-on pour les droites (MN) et (BC) ?
Nous admettrons la propriété suivante :

> **Si** des points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre sur deux droites sécantes en A **et si** les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux, **alors** les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Activité ❹ Construction

1° Reproduire la figure ci-contre : $[AB]$ est un segment, les droites d et d' sont parallèles et passent respectivement par A et B.
E est un point de la droite d tel que $AE = 3$ cm.
M et N sont deux points distincts de la droite d' tels que $BM = BN = 2$ cm.
Les droites (AB) et (EM) se coupent en I et les droites (AB) et (EN) se coupent en J.



2° a) Calculer $\frac{IA}{IB}$ en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles IAE et IBM.

b) Calculer $\frac{JA}{JB}$ en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles JAE et JBN.

c) En déduire que $\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB}$.

3° Peut-on trouver sur la droite (AB) un autre point K tel que $\frac{KA}{KB} = \frac{3}{2}$?

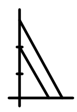
> Étant donné un segment $[AB]$, il existe deux points I et J de la droite (AB) tels que : $\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{3}{2}$.

Annexe I 3 c

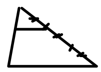
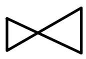
Quatrième Bordas

Variables des figures **Milieu proposé**	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 1 **(idem Pythagore)**	**Exercice type 2** **(Type 6 Pythagore)**	**Exercice type 3** **(Type 6 Pythagore)**	**Exercice type 4** **(Type 3 Pythagore)**
Nombre de parallèles	2	2	2	2
Nombre de sécantes	2	2	2	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Figure à construire	Figure un peu complexe à construire
Orientation de la figure	Prototypes I et III	Prototypes I et III	Prototypes I et III	Prototypes I et III
Distribution longueurs	Groupe I	Groupe I	Groupe I	Groupes III et IV bis $\frac{3}{x}=\frac{5}{4+2}$ $\frac{x}{8}=\frac{16-4}{16}$
Figure congruente	oui	oui	oui	non
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul 1 longueur	Calcul plusieurs longueurs	Calculs plusieurs longueurs	calcul 1 longueur
Théorème	Direct	Direct	Direct	Direct
Longueurs	Latérales et mixtes	Latérales et mixtes	Latérales ou mixtes	Latérales ou mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	1	1	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	non	non
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	2.	2.	1.	1
Classification	U.G	U.G	U.G	U.G

Quatrième Bordas

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 5 (Type 15 Pythagore)	**Exercice type 6 (Type 18 Pythagore)**	**Exercice type 7 (Type 9 Pythagore)**	**Exercice type 8 (Type 12 Pythagore)**
Nombre de parallèles	2	2	2	2
Nombre de sécantes	2	2	2	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles (habillage)	Figure un peu élaborée	/
Orientation de la figure	Prototype I	/	Prototype I	/
Distribution longueurs	non typique	quelconque	atypique	/
Figure congruente	non	non	non	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel (segment)	rationnel	rationnel	/
Type de la question	démonstration non // avec nombres (segments)	Calcul 1 longueur	indirecte : calculer le périmètre du parallé. Calculer coordonnées de A	construction : partage d'un segment
Théorème	Contraposée	Direct	Direct	Direct
Longueurs	Latérales	Mixtes	Latérales ou mixtes	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	"outil"	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	1	1	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	non	non
Répétition d'une méthode	non	non	oui	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	1	2.	2	2.
Classification	U.G.S	U.G	U.G.S	U.G

Quatrième Bordas

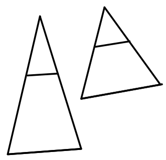
Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 9	**Exercice type 10**	**Exercice type 11** **(Type 22 Pythagore 3e)**	**Exercice type 12**
Nombre de parallèles	2	2	2 x 2	/
Nombre de sécantes	2	2	2	/
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent éléments utiles figure à construire	Figure à construire 2 Thalès adjacentes
Orientation de la figure	Prototype I	Prototype I	Prototype I	/
Distribution longueurs	type	atypique	/	/
Figure congruente	oui	non	/	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel : cm et segment ou quadrillage	rationnel	littéraux	rationnel
Type de la question	calcul de longueurs	Calcul de deux longueurs	Démonstration troisième égalité	Calcul d'aire triangle
Théorème	Direct : coefficient de proportionnalité	Direct : justifier le // avec alterne interne	Direct	Direct
Longueurs	/	Mixtes	/	Mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	outil
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	½ ouvert
Nombre d'outil	1	2 :Thalès et alterne interne	2 : Thalès et Fractions	2 : Aires + Thalès
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	oui	oui
Répétition d'une méthode	non	non	oui	oui
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	oui	oui
Nombre d'exercices	3.	1	1	2.
Classification	U.G.	U.G.S	U.R.C	U.R.C

Quatrième   Bordas

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables	
	Exercice type 13	**Exercice type 14**
Nombre de parallèles	2	2
Nombre de sécantes	2	2
Complexité	configuration complexe 2 figures adjacentes	Figure à compléter
Orientation de la figure	Prototype I	Atypique
Distribution longueurs	Groupe I	Type
Figure congruente	oui	oui
Variables autres que celles de la figure		
Nature du rapport	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul de 3 longueurs	Calcul 1 longueur
Théorème	Direct	Direct : justifier // avec médiatrice
Longueurs	Mixtes	Latérales
Variables de la situation didactique		
Outil / objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non
Ouvert / fermé	fermé	½ fermé
Nombre d'outil	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non
Répétition d'une méthode	oui	oui
Interprétation, conjecture généralités...	non	non
Nombre d'exercices	1.	1.
Classification	U.G.S	U.R.C

Annexe I 3 d

Troisième Bordas

Variables des figures Milieu proposé	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 1 **(Type 1 Pythagore 3e)**	**Exercice Type 1 bis**	**Exercice type 2** **(Type 9 Pythagore 4e)**	**Exercice type 3** **(Type 10 Pythagore 3e)**
Nombre de parallèles	2	2	2	/
Nombre de sécantes	2	2	2	/
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	avec construction de la figure	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe
Orientation de la figure	Prototypes I et II	Prototypes I et II	Prototype I	/
Distribution longueurs	Groupe I et D	Groupe I et D	Groupe I	/
Figure congruente	oui	oui	non	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul 1 ou plusieurs longueurs	Calcul 1 ou plusieurs longueurs	Indirecte : montrer que triangle est isocèle ou équilatéral	Calcul de plusieurs longueurs
Théorème	Direct	Direct	Direct	Direct et Pythagore. Justification // par perpendiculaire
Longueurs	Latérales ou mixtes	Latérales ou mixtes	Latérales et mixtes	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	½ ouvert
Nombre d'outil	1	1	1	2 ou 3
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	non	$\left.\begin{matrix}P\\P\end{matrix}\right\}\to T$
Répétition d'une méthode	non	non	oui	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	11	1	1.	1.
Classification	U.G	U.G	U.G	U.R.C

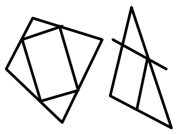
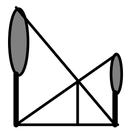
Troisième Bordas

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 4 **(Type 8 Pythagore 3e)**	**Exercice type 5** **(Type 3 Pythagore 3e)**	**Exercice type 6** **(Type 11 Pythagore 3e)**	**Exercice type 7** **(Type 15 Pythagore 3e)**
Nombre de parallèles	/	2	2 x 2	2
Nombre de sécantes	/	2	2	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	/	Prototype I et II	/	Prototypes I et II
Distribution longueurs	/	non typique Groupe II $\frac{x}{x+9} = \frac{4}{4+x}$	/	Groupe I et D
Figure congruente	/	non	/	oui
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport		rationnel	littéral	rationnel
Type de la question	Construction : partage d'un segment	Calcul 1 longueur	Egalités littérales	Parallèles ou non ?
Théorème	Direct	Direct	Thalès et Produit en croix	Réciproque ou contraposée
Longueurs	/	Latérales	/	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	outil	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	1	1	3 Thalès - Transitivité + produit en croix	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	2 T $\rightarrow$ Transitivité	non
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	8	4.	1	12.
Classification	U.G	U.G.S	U.R.C	U.G

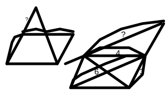
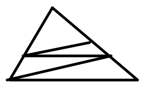
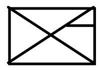
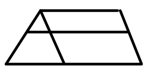
Troisième Bordas

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 8 (Type 16 Pythagore 3e)	**Exercice type 9** (Type 18 Pythagore 4e)	**Exercice Type 9 bis**	**Exercice type 10** (Type 19 Pythagore 3e)
Nombre de parallèles	2	2	/	2
Nombre de sécantes	2	2	/	4 paires
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles + habillage	Configuration complexe + habillage	configuration complexe
Orientation de la figure	Prototype I	/	/	/
Distribution longueurs	atypique	quelconque	/	/
Figure congruente	non	/	/	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	littéral
Type de la question	Parallèle ou non ?	Calcul 1 longueur	Calcul 1 longueur	Parallèle
Théorème	Réciproque ou contraposée	Direct	Direct	Réciproque
Longueurs	/	Mixte	Mixte	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	"outil"	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	½ouvert (que se passe-t-il si...)	fermé
Nombre d'outil	1	1	1	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	Analyse de la situation + Thalès	2 Thalès dans 2 figures et transitivité
Répétition d'une méthode	non	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	oui + compléter la figure	Interprétation
Nombre d'exercices	3	2.	3	3.
Classification	U.G	U.G	U.R.C	U.P

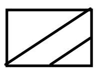
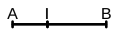
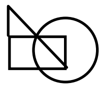
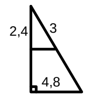
Troisième Bordas

Variables des figures **Milieu proposé**	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 11 **(Type 20 Pythagore 3e)**	**Exercice type 12** **(Type 22 Pythagore 3e)**	**Exercice type 13** **(Type 21 Pythagore 3e)**	**Exercice type 14** **(Type 19 Pythagore 4e)**
Nombre de parallèles	/	2	2	/
Nombre de sécantes	/	2	2	/
Complexité	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe
Orientation de la figure	/	Prototype I et II	Prototypes I et II	2 figures clefs
Distribution longueurs	/	/	/	/
Figure congruente	/	/	/	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	littéral	littéral	littéral /numérique	rationnel
Type de la question	Démontrer que IJKL est un parallélogramme	Démonstrations du cours : théorème de Thalès, bissectrices...	contre exemple "faux ami"	calcul 1 longueur
Théorème	Réciproque	Direct / Réciproque	/	Direct
Longueurs	/	/	/	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	outil	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	ouvert	fermé	fermé	ouvert
Nombre d'outil	2	2	1	2
Nombre de possibilité de résolution	2	1	1	2
Raisonnement reliant des résultats	4 réciproques + □ ou 2 réciproques + □ (//)	oui	/	2 Thalès, fractions segment
Répétition d'une méthode	oui	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	Interpréter Rassembler	Interpréter	Interpréter	Interpréter
Nombre d'exercices	1.	2.	3.	
Classification	U.R.C U.G	U.R.C U.G	U.G.S U.G	U.P U.R.C

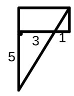
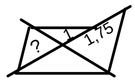
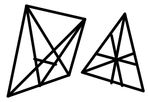
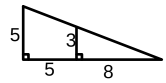
Troisième Bordas

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 15	**Exercice type 16**	**Exercice type 17**	**Exercice type 18**
Nombre de parallèles	2 x 2	2	/	/
Nombre de sécantes	2	2	/	/
Complexité	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe à construire	Configuration complexe à construire
Orientation de la figure	2 figures clefs	Prototype I ou II	2 figures clefs	
Distribution longueurs	/	atypique	non	
Figure congruente	/	non	non	
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	calcul 1 longueur	Calcul 1 longueur. Correction d'une solution proposée.	calcul de 2 longueurs	Construction. Calcul longueur. Parallèle
Théorème	Direct	Direct / Réciproque	Direct	Pythagore - Thalès et réciproque
Longueurs	Mixtes	Mixtes	Mixtes - latérales	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	½ ouvert
Nombre d'outil	1	1	1	2
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	non	non	oui - Pythagore → réciproque Thalès
Répétition d'une méthode	non	non	oui	non
Interprétation, conjecture généralités...	non	non	non	non
Nombre d'exercices	11	1.	1	1.
Classification	U.G	U.G	U.G	U.G.S 1.E.P.P U.R.C

Troisième   Bordas

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 19	**Exercice type 20**	**Exercice type 21**	**Exercice type 22**
Nombre de parallèles	/	/	/	2
Nombre de sécantes	/	/	/	2
Complexité	Configuration complexe à construire	Segment [AB] avec $IA/IB = 2/3$	Configuration complexe à construire	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	/	/	/	Prototype I
Distribution longueurs	/	/	/	Groupe I
Figure congruente	/	/	/	oui
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Construction. calculs	Calculs	Calculs	Calculs. Parallèles
Théorème	Pythagore + Thalès	/	Direct - Pythagore	Pythagore - Thalès et réciproque
Longueurs	/	/	Mixtes	Mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	/	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	½ ouvert	fermé	fermé	½ ouvert
Nombre d'outil	2	1	2 Thalès. Pythagore	2 ou 3 - Thalès. Pythagore - réciproque de Thalès
Nombre de possibilité de résolution	2 ↗ Thalès ↘ Pythagore	1	2 ↗ Thalès (1) ↘ Thalès (2)	2 ↗ Thalès ↘ Pythagore
Raisonnement reliant des résultats	oui/Pythagore→Thalès et Thalès ou Pythagore	non	Pythagore → Thalès	Pythagore → réciproque Thalès puis Thalès ou Pythagore
Répétition d'une méthode	oui	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	oui	non	oui à la fin, Méthode préférable à l'autre	non
Nombre d'exercices	1.	2.	1	1.
Classification	U.R.C 11.E.D U.G	U.G 1.E.D U.G	U.G.S 1.E.D U.G	U.G.S 1.E.P.P U.R.C

Troisième Bordas

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 23	Exercice type 24	Exercice type 25	Exercice type 26
Nombre de parallèles	/	2 x 2	/	2
Nombre de sécantes	/	2	/	2
Complexité	Configuration complexe à construire	Configuration complexe. 2 figures clefs	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	/	/	/	oui
Distribution longueurs	/	/	/	atypique
Figure congruente				
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	radical	rationnel	rationnel
Type de la question	Construction. Calcul 1 longueur. Trapèze ?	Calcul 1 longueur	Parallélisme	Points alignés ou non ?
Théorème	Thalès et Perpendiculaires	Thalès – Transitivité racine carrée	Réciproque Thalès	Contraposée
Longueurs	/	/	/	Mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	½ ouvert	½ ouvert	fermé
Nombre d'outil	2 Thalès ; perpendiculaires à une même droite	Thalès - Transitivité. Produit en croix. Racine carrée	Réciproque Thalès. Centre gravité, figure complémentaire	Contraposée 1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	ou Thalès→transitiv produit croix→carrée	gravité → Thalès quadril→ récip Thalè	oui BD/BA ≠ ED/AC⇒AC non parallèles à ED ou B, E, C non alignés ou B, D, A non alignés
Répétition d'une méthode	non	oui	oui	non
Interprétation, conjecture généralités...	oui	oui	oui	oui
Nombre d'exercices	1.	1.	2.	1.
Classification	U.G.S 11.E.D U.G	U.P 1.E.D U.G	U.P 1.E.D U.G	U.P 1.E.P.P U.R.C

11 Droite des milieux

Objectif
Découvrir et démontrer la propriété de la droite des milieux.

① Étude expérimentale

a. Trace trois triangles ABC : un avec l'angle $\hat{A}$ aigu, un autre avec l'angle $\hat{A}$ obtus, et un dernier avec l'angle $\hat{A}$ droit.

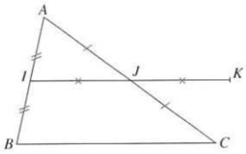
b. Sur chaque figure, marque le milieu I du côté $[AB]$ et le milieu J du côté $[AC]$. Trace la droite (IJ) : elle est appelée « droite des milieux ».

c. Sur chaque figure, comment semblent être les droites (IJ) et (BC) ? les longueurs IJ et BC ?

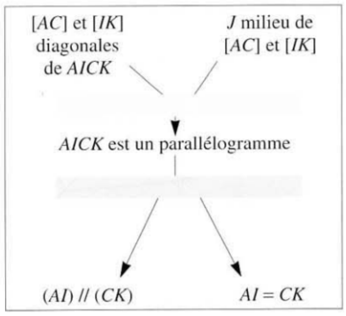
Commentaire ▶
Pour démontrer que $(IJ) // (BC)$ et $2IJ = BC$, on peut penser introduire le point K ci-contre et démontrer que $[IK]$ et $[BC]$ sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.

② Une démonstration

a. Sur l'une des figures précédentes, marque le point K tel que J soit le milieu de $[IK]$. Trace le quadrilatère $AICK$.

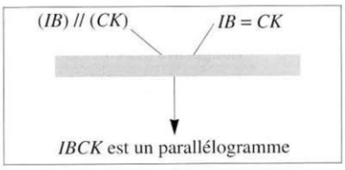


b. Nature de *AICK*
Énonce la propriété que l'on doit écrire dans le cadre jaune ci-contre pour conclure que « $AICK$ est un parallélogramme ».



Commentaire ▶
Faire ressortir que « $AICK$ est un parallélogramme », conclusion du 1[er] pas de démonstration, est devenue l'hypothèse du 2[e] pas.

c. Nature de *IBCK*
• Énonce la propriété que l'on doit écrire dans le cadre vert ci-contre.
• Explique pourquoi tu peux dire alors que : $(IB) // (CK)$ et $IB = CK$.
• Énonce la propriété que l'on doit écrire dans le cadre bleu ci-dessous.

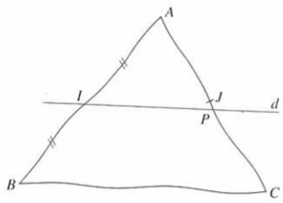


d. Conclusion
• Tu sais maintenant que $IBCK$ est un parallélogramme.
Explique alors pourquoi : $(IJ) // (BC)$ et $BC = 2 \times IJ$.
• Énonce la propriété que tu viens de démontrer.

2 Milieu et parallèle

Objectif
Établir une propriété de la droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un 2e côté du triangle.

Éric vient de faire cette figure à main levée.
Il a voulu traduire les données suivantes :
- I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AC]$;
- d parallèle à (BC) et d passe par I.



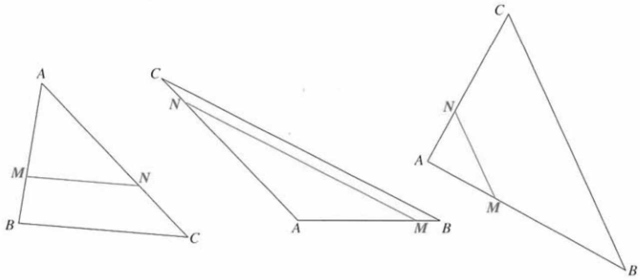
a. Utilise la propriété vue à l'activité précédente pour expliquer pourquoi cette figure est fausse.

b. Recopie et complète l'énoncé suivant :
« Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un second côté, coupe le troisième côté … ».

3 Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes

Objectif
Découvrir expérimentalement la proportionnalité des longueurs pour les côtés de deux triangles « emboîtés » comme ci-contre.

Sur chacune des figures suivantes : $(MN) // (BC)$.



a. Pour chaque figure, mesure les longueurs AB, AC, BC, AM, AN, MN en cm.
Inscris ces longueurs dans un tableau comme celui-ci :

	AM	AN	MN
Longueurs des côtés de AMN			
Longueurs des côtés de ABC			
	AB	AC	BC

b. Vérifie, qu'aux erreurs de mesure près, chacun des tableaux obtenus est un tableau de proportionnalité.

Commentaire
Conformément au programme, nous démontrons cette propriété dans un cas particulier à l'activité suivante.

▶ De façon plus générale nous admettons la propriété suivante :
« Pour deux triangles AMN et ABC avec M sur $[AB]$, N sur $[AC]$ et (MN) parallèle à (BC), les longueurs des côtés de AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés correspondants de ABC ».

Transmath 4e

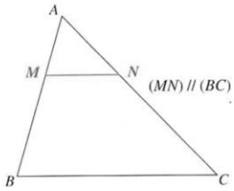
4 Égalité de trois rapports

Objectif
Démontrer la propriété précédente dans un cas particulier.

① Autre formulation de la propriété précédente

Recopie et utilise la propriété énoncée à l'activité 3 pour compléter :

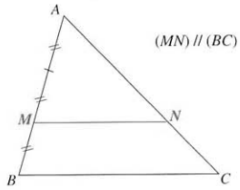
$$\frac{\dots}{AB} = \frac{\dots}{AC} = \frac{\dots}{\dots}$$



② Une démonstration de l'égalité des rapports dans le cas : $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$

a. Fais cette figure ; note I le milieu du segment $[AM]$. Trace par I la parallèle à (MN) ; elle coupe $[AC]$ en J.

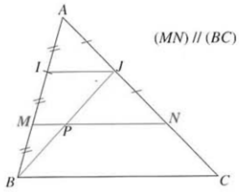
Pour démontrer que $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ et $\frac{MN}{BC} = \frac{2}{3}$, fais le travail suivant.



b. Position de J
Énonce la propriété que l'on doit écrire dans le cadre jaune ci-dessous :

J point de $[AN]$ et I milieu de $[AM]$ ——— ⟶ J milieu de $[AN]$ $(IJ) // (MN)$

c. Position de P
Complète la figure en traçant $[BJ]$ et note P le point commun à $[BJ]$ et $[MN]$.
Utilise le triangle BIJ pour démontrer que P est le milieu de $[BJ]$.



d. Position de N
Utilise le triangle BJC pour démontrer que N est le milieu de $[JC]$.

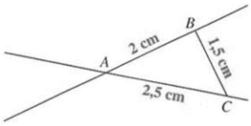
e. Une première conclusion
Explique alors pourquoi : $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$.

f. Une deuxième conclusion
- Aide-toi de ce qui précède pour donner la valeur de $\frac{MN}{IJ}$, $\frac{MP}{IJ}$, $\frac{PN}{BC}$.
- Calcule $\frac{PN}{IJ}$ à l'aide des deux premiers quotients ci-dessus.
- Calcule $\frac{IJ}{BC}$ à l'aide de $\frac{PN}{BC}$ et $\frac{PN}{IJ}$. Explique alors pourquoi : $\frac{MN}{BC} = \frac{2}{3}$.

11 La propriété de Thalès

Objectif
Repartir de la proportionnalité des longueurs des côtés de deux triangles « emboîtés », introduite en 4e. Étendre cette propriété au cas de triangles « opposés par le sommet ».

Imaginons une droite d :
– qui coupe la droite (AB) en M, la droite (AC) en N,
– et qui se déplace parallèlement à (BC).
Envisageons plusieurs positions de cette droite d.



① Des figures connues : *ABC* et *AMN* sont « emboîtés »

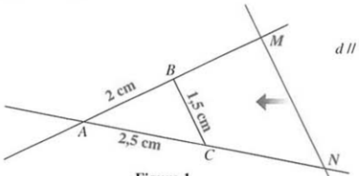


Figure 1

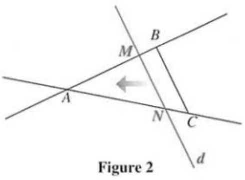


Figure 2

a. Pour chacune de ces figures, recopier et compléter : $\frac{AM}{AB} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

b. Sur la figure 1 : $AM = 4$ cm.
Calculer mentalement les longueurs AN et MN.

c. Sur la figure 2 : $AM = 1{,}6$ cm. Calculer les longueurs AN et MN.

② Une figure nouvelle : *ABC* et *AMN* sont « opposés par le sommet »

a. Faire cette figure.

b. Par la symétrie de centre A, construire les symétriques M' de M et N' de N.

c. Que peut-on dire des droites $(M'N')$ et (BC) ? Pourquoi ?

d. Expliquer alors pourquoi :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

e. *Application numérique*
Sur la figure 3 : $AM = 2{,}4$ cm.
Calculer AN et MN.

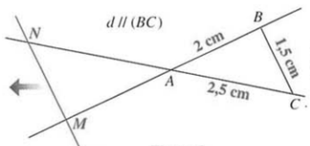


Figure 3

DOCUMENT A PHOTOCOPIER

③ Conclusion

Recopier et compléter l'énoncé ci-dessous, appelé propriété de Thalès :
« Les points A, M, B sont alignés et les points A, N, C sont alignés.
Si les droites (BC) et … sont parallèles, alors
$$\frac{\dots}{AB} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}\text{ »}$$

Info

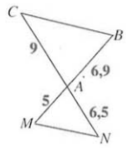
Thalès est né en Grèce aux alentours de −640. Mathématicien, astronome et philosophe, il aurait rapporté d'Égypte en Grèce les fondements de la géométrie.
Il semble que la propriété énoncée ci-contre ne soit pas due à Thalès; cette appellation est apparue seulement à la fin du XIXe siècle.

22 La « réciproque » de la propriété de Thalès

Objectif
Mettre en place un nouveau procédé pour étudier le parallélisme de deux droites.

Commentaire
Conformément au document d'accompagnement, du programme de 3ᵉ on utilise ici un raisonnement par l'absurde.

① Droites (MN) et (BC) avec $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$



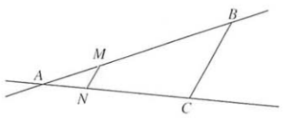
Sur cette figure, on ne sait pas si les droites (MN) et (BC) sont parallèles ou ne sont pas parallèles.

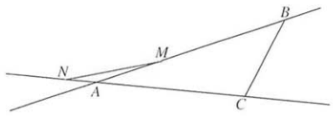
a. Supposons que : $(MN) \parallel (BC)$. Que permet d'affirmer alors la propriété de Thalès pour les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$?

b. Calculer ces rapports avec les informations ci-contre.

c. Pourquoi sait-on alors que la supposition « $(MN) \parallel (BC)$ » est fausse ? Conclure pour les droites (MN) et (BC).

② Droites (MN) et (BC) avec $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$





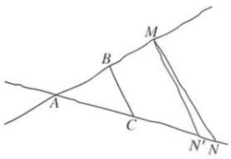
Sur ces deux figures : $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $AM = 1{,}2$ cm, $AN = 0{,}9$ cm.

a. Calculer les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$

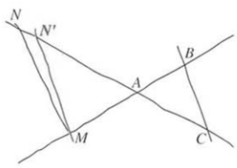
b. Ces rapports sont égaux ; à votre avis quelle précision supplémentaire sur l'emplacement de M et N faut-il avoir pour pouvoir conclure que $(MN) \parallel (BC)$?

③ Droites (MN) et (BC) avec $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et une autre condition

Marc a fait ces figures à main levée avec les consignes ci-dessous :



- A, M, B alignés dans le même ordre que A, N, C.
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



Commentaire
On constate à la question 2 que la réciproque de la propriété de Thalès est fausse. Néanmoins au collège, pour faciliter la rédaction, on appelle parfois « réciproque de la propriété de Thalès » l'énoncé ci-contre.

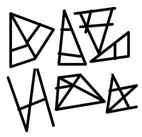
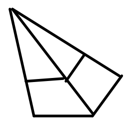
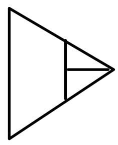
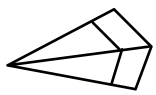
a. N' est le point de la droite (AC) tel que : $(MN') \parallel (BC)$.
Utiliser la propriété de Thalès pour expliquer pourquoi ces figures sont fausses.

b. Recopier et compléter l'énoncé suivant :

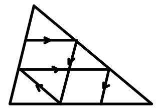
« Si les points A, M, B sont alignés dans le même ordre que les points … et si $\frac{\dots}{AB} = \frac{\dots}{\dots}$, alors les droites (MN) et (BC) sont … . »

Annexe I 4 c

Quatrième Nouveau Transmath Nathan

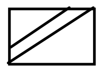
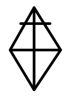
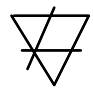
Variables des figures Milieu proposé	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 1	**Exercice type 2**	**Exercice type 3**	**Exercice type 4**
Nombre de parallèles	2 paires	2	2 paires	/
Nombre de sécantes	Plusieurs	2	3	/
Complexité	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration complexe	Configuration complexe
Orientation de la figure	Quelconque	Type	Type	/
Distribution longueurs	/	Type	Type	/
Figure congruente	/	oui	oui	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	/	rationnel	rationnel	/
Type de la question	Ecrire toutes les égalités possibles ou quatre quotients égaux à AC/AB	Faire reproduite une figure et imaginer des questions	On peut (ou non) calculer .... (vrai, faux)	Interprétation de textes anciens : Ozanam, Descartes
Théorème	Thalès	Thalès	Direct	Direct
Longueurs	/	Latérales	"milieu"	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	outil
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	½ fermé	½ ouvert	½ ouvert	fermé
Nombre d'outil	1	1	2	2
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	oui parfois	non	2 Thalès + transitivi-té	oui
Répétition d'une méthode	oui	non	oui	oui
Interprétation, conjecture généralisation	non	non	non	oui
Nombre d'exercices et catégorie	6 .E.T.T	1 .E.T.T	2. E.P.P	2. E.P.P
Classification	U.G.S	U.G.S	U.R.C	U.R.C

Quatrième Nouveau Transmath Nathan

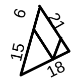
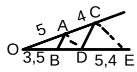
Variables des figures **Milieu proposé**	**Valeurs des variables**		
	Exercice type 5	**Exercice type 6**	**Exercice type 7**
Nombre de parallèles	2	2	/
Nombre de sécantes	2	2	/
Complexité	Habillage (funiculaire)	Plusieurs figures simples	Configuration complexe
Orientation de la figure	Type	Type	/
Distribution longueurs	Type	Type	/
Figure congruente	oui	oui	/
Variables autres que celles de la figure			
Nature du rapport	rationnel	rationnel	/
Type de la question	Indirecte : de combien sait-on élevé ? ...	Calculs longueurs. Calculs d'aires	En continuant que va-t-il se passer ? démonstration
Théorème	Direct et justification // à l'aide de deux perpendiculaires	Direct	Direct
Longueurs	Mixtes	Latérales	/
Variables de la situation didactique			
Outil / objet	objet	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	ouvert
Nombre d'outil	2	2	1
Nombre de possibilité de résolution	1 Thalès ; 2 perpendiculaire à une même droite	1 Thalès. Aire triangle	1 oui
Raisonnement reliant des résultats	oui	oui	oui
Répétition d'une méthode	oui (de combien s'élève-t-on ?...)	oui	oui
Interprétation, conjecture généralisation			
Nombre d'exercices et catégorie	1. E.T.T	1. P	1. P
Classification	U.G.S U.G.S	U.P U.G.S	U.P U.R.C

Annexe I 4 d

Troisième   Nouveau Transmath Nathan

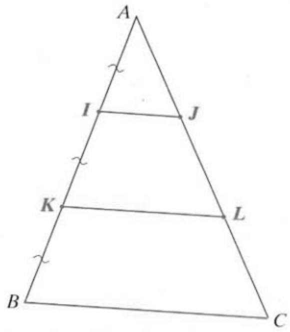
Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 1	**Exercice type 2**	**Exercice type 3**	**Exercice type 4**
Nombre de parallèles	/	2	/	2 paires
Nombre de sécantes	/	2	/	2 paires
Complexité	La figure est plongée dans une configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles	Figure plongée dans une configuration complexe	Figure complexe
Orientation de la figure	/	atypique	/	/
Distribution longueurs	Type	Atypique	/	Atypique
Figure congruente	oui	non	/	non
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	littéral	rationnel
Type de la question	Montrer que (EP) et (BD) sont parallèles	ABC = 55° ; AMN = 50 "tu as fait une erreur"	Montrer que AEF est isocèle	variation sur *a* et EHBF
Théorème	Réciproque	Réciproque	Direct	Direct +...
Longueurs	Latérales	Latérales	/	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	outil	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	ouvert	fermé	½ ouvert
Nombre d'outil	1	2	2 (+1)	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	non	oui - Réciproque + angles correspondants	Thalès + losange + fraction	Thalès, losange, Pythagore, rectangle, cosinus
Répétition d'une méthode	non	non	non	oui
Interprétation, conjecture généralisation	non	oui	non	oui
Nombre d'exercices	1.	1.	1.	1.
Classification	U.G	U.G.S	U.G.S	U.P

Troisième   Nouveau Transmath Nathan

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables Exercice type 5	 Exercice type 6
Nombre de parallèles	2 paires	2 paires
Nombre de sécantes	2 paires	2
Complexité	Figure complexe à construire	2 figures clefs
Orientation de la figure	/	Type
Distribution longueurs	Type	Atypique
Figure congruente	oui	non
Variables autres que celles de la figure		
Nature du rapport	rationnel	rationnel
Type de la question	Calculer les longueurs des côtes du triangle PNC	Parallèle ? (AO) et (CE)
Théorème	Direct	Direct et réciproque
Longueurs	Mixtes	Latérales
Variables de la situation didactique		
Outil / objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non
Ouvert / fermé	½ fermé	ouvert
Nombre d'outil	2	2
Nombre de possibilité de résolution	1 2 Thalès + parallélo-gramme ou 3 Thalès	1 Thalès + réciproque
Raisonnement reliant des résultats	oui (2x)	non
Répétition d'une méthode	oui - //⇒ parallélo-gramme	non
Interprétation, conjecture généralisation		
Nombre d'exercices	1.	1.
Classification	U.R.C U.G	U.R.C U.G.S

Cinq sur cinq 4e

Activité 8 Partage



Les hypothèses

- ABC est un triangle.
- $AI = IK = KB$.
- $(IJ) // (KL) // (BC)$.

Le but

Démontrer que le segment $[AC]$ est lui aussi partagé en trois segments de même longueur ($AJ = JL = LC$).

1 ***a)*** Construire la figure ci-contre avec $AB = 6$ cm.
b) Vrai ou faux : $JL = IK$?

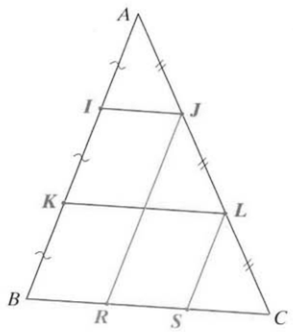
2 Démontrer que : ***a)*** J est le milieu de $[AL]$; ***b)*** L est le milieu de $[JC]$.
Coup de pouce (pour b)) : Soit M le point d'intersection de $[BJ]$ et $[KL]$. Démontrer que M est le [redacted] de $[BJ]$, puis que L est celui de [••].

3 ***a)*** Déduire du 2° que : $AJ = JL = JC$.

b) Recopier et compléter : $AI = \frac{\bullet}{\bullet} AB$; $AJ = \frac{\bullet}{\bullet} AC$.

c) Vrai ou faux ? $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{3}$.

Activité 9 De mieux en mieux !



On a complété (ci-contre) la figure de l'activité 8 en traçant, par J et L, les parallèles au côté $[AB]$ qui coupent respectivement $[BC]$ en R et S.

1 ***a)*** En utilisant le résultat démontré au 3° *a)* de l'activité 8, prouver que : $BR = RS = SC$.
b) Préciser la nature du quadrilatère $IJRB$.

2 Déduire du 1° que $\frac{IJ}{BC} = \frac{1}{3}$.

Commentaire !

Les activités 8 et 9 ont permis de démontrer, dans un cas particulier, que :

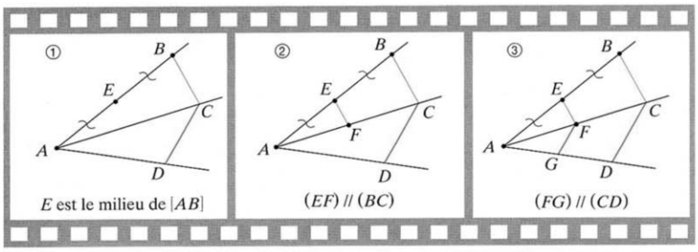
$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}.$$

Nous admettrons que ce résultat est vrai quelle que soit la position du point I sur le côté $[AB]$ d'un triangle ABC (avec J sur $[AC]$ et $(IJ) // (BC)$). Autrement dit : deux droites parallèles (IJ) et (BC) coupant deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ de même origine A déterminent deux triangles AIJ et ABC dont les longueurs des côtés sont proportionnelles.

Triangles : milieux et parallèles

1 Théorèmes des milieux

1° Réaliser la construction décrite par le film suivant :



2° ***a)*** Recopier et compléter le déductogramme ci-contre :

E est le ■ *de* [*A*•]	*donc* →	*F est le* ■ *de* [••]
(*EF*) // (*BC*)		

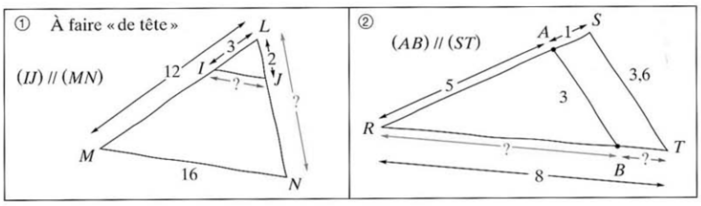
b) Citer le théorème permettant de justifier la conclusion (si besoin, voir la page 285).

3° En s'inspirant du **2°**, démontrer que G est le milieu du segment $[AD]$.

4° Terminer le raisonnement suivant, en citant les théorèmes utilisés.
Considérons le triangle ABD. E est le ■ *du segment* [*AB*] *(par hypothèse) et G celui du segment* [*AD*] *(d'après le* **3°***). Par conséquent,* $(EG) \,//\, (\bullet\bullet)$ *et* $\bullet\bullet = \dfrac{\bullet\bullet}{2}$.

2 Proportionnalité de longueurs

Dans chaque cas, calculer les longueurs inconnues en justifiant.



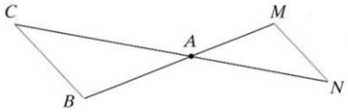
Réponses en vrac : 4 ; $\dfrac{4}{3}$; 8 ; $\dfrac{20}{3}$.

Le théorème de Thalès et sa réciproque

Cinq sur Cinq 3e

3 Le théorème de Thalès

1° Réaliser la figure ci-contre dans laquelle les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



2° ***a)*** Placer le point P, symétrique du point M par rapport à A, et le point Q, symétrique du point N par rapport à A.

b) Justifier les affirmations suivantes :

$\boxed{P \in (AB)}$ $\boxed{Q \in (AC)}$ $\boxed{PQ = MN}$ $\boxed{(PQ) // (MN)}$ $\boxed{(PQ) // (BC)}$.

3° ***a)*** Citer la propriété permettant d'affirmer que $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$.

b) En déduire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Commentaire !

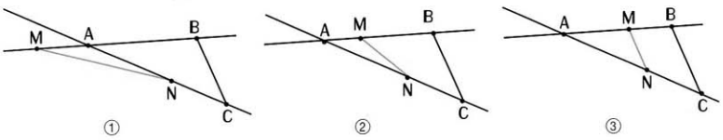
Le résultat obtenu au **3°**, connu sous le nom de théorème de Thalès*, peut se résumer ainsi :

Deux droites sécantes coupées par deux parallèles déterminent deux triangles dont les longueurs des côtés sont proportionnelles.

4 « Réciproquement »

À exécuter avec un logiciel de construction géométrique.

Expérimenter la situation ci-dessous ($M \in (AB)$, $N \in (AC)$, on déplace le point M sur la droite (AB) jusqu'à ce que les droites (BC) et (MN) semblent parallèles).



① ② ③

1° Faire *afficher* les longueurs des segments ainsi que les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

2° Alexis pense que si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors $(BC) // (MN)$.

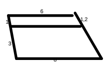
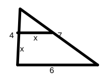
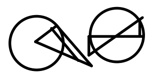
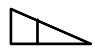
Marie prétend avoir trouvé un contre-exemple grâce à la figure ①. Qui a raison ?

Commentaire !

Nous admettrons que le résultat énoncé à la page 147 est vrai.

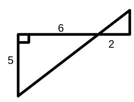
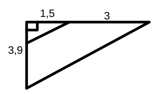
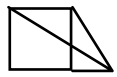
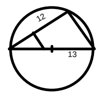
* Voir la rubrique *Math-info* de la page 160.

Annexe I 5 c **Quatrième Cinq sur cinq**

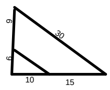
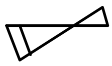
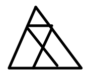
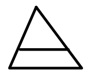
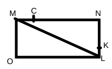
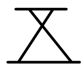
Variables des figures	**Valeurs des variables**			
Milieu proposé	**Exercice type 1**	**Exercice type 2**	**Exercice type 3**	**Exercice type 4**
Nombre de parallèles	/	2	2	2
Nombre de sécantes	/	2	2	2
Complexité	La figure est plongée dans une configuration complexe	Figure à construire	Figure avec cercle à construire	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	/	/	/	atypique
Distribution longueurs	atypique	atypique x/6 = 4 - x / 4	atypique	Type
Figure congruente	/	non	/	oui
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul de trois longueurs	Calculer x pour que BMN soit isocèle en M	Calcul OB et longueur cercle ou périmètre AOF	Placer les lettres puis calculer EA RD
Théorème	Direct	Direct	Direct	Direct...
Longueurs	Latérales	Mixtes	Latérales	Mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	outil	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	½ fermé	ouvert	fermé
Nombre d'outils	3	2	4	1
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	oui □ : côtés // 2 à 2 + côtés opposés de même longueur + Thalès	Triangle isocèle + Thalès et résolution	tangente + perpendiculaires à une droite + Pythagore et Thalès	non
Répétition d'une méthode	oui	non	non	non
Interprétation, conjecture, généralisation	Interprétation (parallélogramme)	Interprétation (isocèle⇒ MN = x)	interprétation : longueur cercle⇒ON⇒Thalès	non
Nombre d'exercices	1.	1	3.	1.
Classification	U.G.S	U.R.C	P.	U.G

Annexe I 5 d

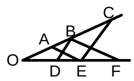
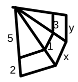
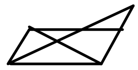
Troisième   Cinq sur cinq

Variables des figures **Milieu proposé**	**Valeurs des variables**			
	Exercice type 1	**Exercice type 2**	**Exercice type 3** **(Type 10 Pythagore)**	**Exercice type 4**
Nombre de parallèles	2	2	/	2
Nombre de sécantes	2	2	/	2
Complexité	Seuls figurent les élé-ments utiles	Seuls figurent les éléments utiles	Configuration com-plexe	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	Type	Type	/	Figure à construire
Distribution longueurs	Type	$\frac{1,5}{1,5+3}=\dots$	$\frac{x}{5-x}=\frac{3}{1}$	Type
Figure congruente	oui	non	non	non
Variables autres **que celles de la figure**				
Nature du rapport	radical	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul de longueurs	Calculer le périmètre de STUV	Calcul de longueurs AC, AO	Calcul de longueurs EF, MN, FN
Théorème	Direct	Direct	Direct	Direct...
Longueurs	Latérales	Latérales	Mixtes	Latérales
Variables de la **situation didactique**				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	½ ouvert
Nombre d'outils	3	2	2	4
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	P → perpendiculaire → T	T → P → T	P et T	triangle isocèle → P → perpendiculaire → T
Répétition d'une méthode	oui	oui	non	non
Interprétation, conjecture généralisation	non	non	non	oui pour triangle inscrit dans un cercle
Nombre d'exercices	1	1	1	1.
Classification	U.G.S	U.G.S	U.R.C	U.R.C

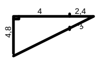
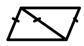
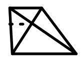
Troisième Cinq sur cinq

Variables des figures	**Valeurs des variables**			
Milieu proposé	**Exercice type 5**	**Exercice type 6**	**Exercice type 7**	**Exercice type 8**
Nombre de parallèles	2	3	/	2
Nombre de sécantes	2	2	/	2
Complexité	Seuls figurent les éléments utiles	2 figures clefs	Configuration complexe	Configuration complexe
Orientation de la figure	"faux ami"	Type	Figure à construire	Figure à construire
Distribution longueurs	atypique	atypique	/	/
Figure congruente	non	non	/	non
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Parallélisme + longueur	Calcul NC + parallèle (AM) et(OB)	Parallèle et BI = IJ = JC	Calcul AN, MN, et MNPB parallélo-gramme
Théorème	Réciproque + direct	Direct et réciproque	Réciproque T + T	T + parallélogramme
Longueurs	Mixtes	Latérales	Mixtes	/
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	outil	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	ouvert	ouvert
Nombre d'outils	2	2	3	2 ou 3
Nombre de possibilité de résolution	1	1	2	2
Raisonnement reliant des résultats	Réciproque → T	T → Réciproque	réciproque →T ↘ T ou ↘ □ puis calcul segments	T + □ ou T + réci-proque et caractéris-tique parallélo-gramme
Répétition d'une méthode	non	non	oui	non
Interprétation, conjecture généralisation	non	non	oui	non
Nombre d'exercices	1.	2.	1.	1.
Classification	U.G.S	U.G.S	U.P	U.R.C

Troisième   Cinq sur cinq

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables			
	Exercice type 9	**Exercice type 10**	**Exercice type 11**	**Exercice type 12**
Nombre de parallèles	2 paires	3 paires	/	2
Nombre de sécantes	2	4	/	2
Complexité	Configuration complexe	Configuration complexe	Configuration complexe	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	/	/	/	Figure à construire
Distribution longueurs	/	/	/	Type
Figure congruente	/	/	non	oui
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	littéral	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Que peut-on conclure Pour (AD) et (CF)	Calcul de 2 longueurs	Calculer (x)	Trouver x tel que aire AFE = aire BEFC
Théorème	Direct + réciproque	Direct	Direct	Direct
Longueurs	/	/	/	Mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	outil	objet	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	½ ouvert	½ fermé	½ ouvert	fermé
Nombre d'outils	3	2	3	2
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	2 T → produit x tran-si→frac→réciproque T.	2 T → transitivité	T → parallélo-gramme Calcul fraction	T → mise en équation
Répétition d'une méthode	oui	oui	non	non
Interprétation, conjecture généralisation	non	non	non	non
Nombre d'exercices	1	1.	1.	1.
Classification	U.P	U.G.S	U.R.C	U.R.C

Troisième Cinq sur cinq

Variables des figures Milieu proposé	Valeurs des variables		
	Exercice type 13 **(Type 17 Pythagore)**	**Exercice type 14**	**Exercice type 15**
Nombre de parallèles	/	/	/
Nombre de sécantes	/	/	/
Complexité	Figure simple	Configuration complexe	Configuration complexe
Orientation de la figure	Figure à construire	Figure à construire	Figure à construire
Distribution longueurs	atypique	/	/
Figure congruente	non	type oui	/
Variables autres que celles de la figure			
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul + parallèle	Montrer que I, J, K alignés(conjecture)	Calculer une distance d (0,(BC))
Théorème	Réciproque	Réciproque	Direct
Longueurs	Mixtes	Latérales	Mixtes
Variables de la situation didactique			
Outil / objet	objet	outil	outil
Changement de cadre	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	ouvert	ouvert
Nombre d'outils	2	3	2
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	P → réciproque T	2 récipro T → transi "//"→+prop //	2 T → algèbre
Répétition d'une méthode	non	oui	oui
Interprétation, conjecture généralisation	non	oui - conjecture interprétation	oui - trouver la méthode
Nombre d'exercices	1.	1.	1
Classification	U.G.S	U.P	U.P

chapitre **9**

Triangle et sécantes

découvrir

1 • Les milieux

En classe, le professeur a demandé de tracer le milieu du segment [AB] (fig. 1).

Antoine a oublié sa règle et demande l'aide de sa camarade Yasmina. Pour toute réponse, elle lui rend le dessin de la figure 2.

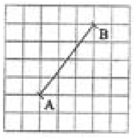


fig. 1

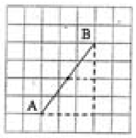
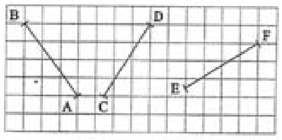


fig. 2

Reproduire le dessin ci-contre puis, en traçant comme Yasmina un triangle et des parallèles, déterminer les milieux des segments [AB], [CD] et [EF].



BILAN

Recopier et compléter :
« Dans un triangle, une droite qui passe ...... et qui est ...... passe aussi par .... »
On utilisera les expressions : parallèle au deuxième côté, milieu d'un côté, milieu du troisième côté.

Cette propriété est admise sans démonstration.

2 • Droite des milieux

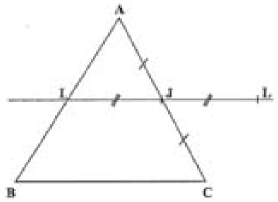
A Observation

1. Tracer un triangle ABC, I le milieu de [AB], puis J le milieu de [AC].
2. Quelle remarque peut-on faire sur les droites (BC) et (IJ) ?
3. Mesurer les longueurs des segments [BC] et [IJ]. Que constate-t-on ?

À l'aide des propriétés du parallélogramme, nous allons justifier les remarques précédentes.

B Parallélisme

Pour justifier la première remarque, on complète la figure en traçant L, le symétrique du point I par rapport à J.



1. Pourquoi le quadrilatère IALC est-il un parallélogramme ?
2. Pourquoi les droites (AI) et (LC) sont-elles parallèles ?
3. a. Justifier que les longueurs AI et LC sont égales.
b. En déduire que les longueurs LC et IB sont égales.
4. a. À l'aide des réponses précédentes, démontrer que le quadrilatère ILCB est un parallélogramme.
b. Que peut-on en déduire pour les droites (IJ) et (BC) ?

BILAN

Énoncer, à l'aide des expressions suivantes, la propriété démontrée :

alors elle est parallèle   Dans un triangle,   si une droite passe

par les milieux de deux côtés,   au troisième côté.

C Longueurs

Reprenons la remarque faite à la question A.3. Nous allons maintenant la justifier.

1. On peut déduire de la réponse à la question B.4.a. que les longueurs BC et IL sont égales. Par quelle propriété ?

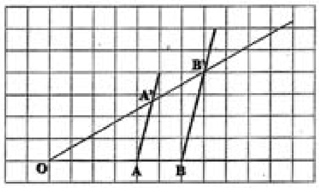
2. En déduire que : $IJ = \frac{1}{2} BC$.

BILAN

Recopier et compléter :
« Dans un triangle, la ...... du segment joignant les ...... de deux côtés est égale à la ...... de la longueur du troisième côté. »

3• Droites parallèles coupant deux sécantes

Sur le dessin ci-dessous, les droites tracées en mauve sont parallèles.



1. a. Mesurer au mm près les longueurs OA, OA', OB, OB', AA', BB'.

b. Donner, à l'aide d'une calculatrice, les quotients $\frac{OA}{OB}$, $\frac{OA'}{OB'}$ et $\frac{AA'}{BB'}$.

(On arrondira au dixième.) Que constate-t-on ?

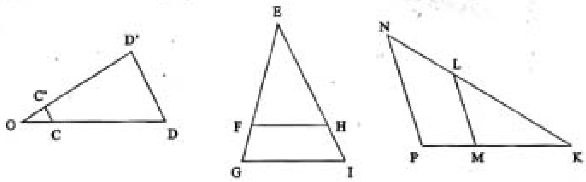
c. Recopier le tableau ci-dessous en remplaçant les longueurs par leur valeur mesurée sur le dessin ci-dessus et en déduire la valeur de *a*.

OA	OA'	AA'	× a
OB	OB'	BB'	

d. Que peut-on en déduire pour les longueurs des côtés des triangles OAA' et OBB' ?

Nous admettrons que cette remarque se généralise aux triangles relevant de cette configuration.

2. Sur chacune des figures ci-dessous, les droites en rouge sont parallèles.



a. En s'inspirant de la question 1.b., recopier et compléter les égalités sans mesurer :

$\frac{OC}{OD} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$; $\frac{EF}{EG} = \frac{\dots}{EI} = \frac{FH}{\dots}$; $\frac{ML}{PN} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$.

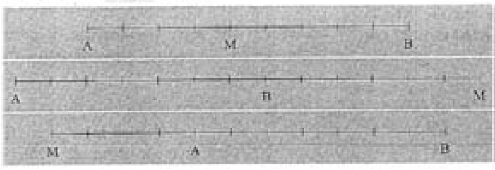
b. Vérifier à la calculatrice après avoir mesuré sur les figures.

CHAPITRE 10 Propriété de Thalès

activités

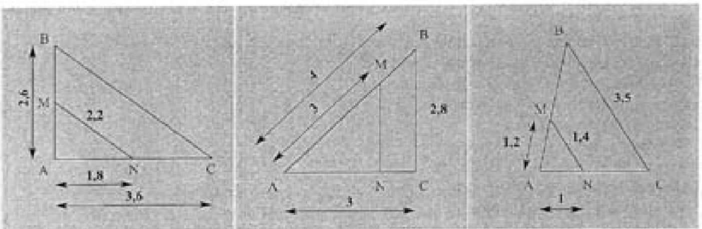
AVANT DE DÉMARRER

1. Choisir la bonne réponse :



$\frac{AM}{AB} =$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{AM}{AB} =$	$\frac{13}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{13}{6}$
$\frac{AM}{AB} =$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{11}{7}$

2. On a tracé la droite (MN) parallèle à (BC). Déterminer la ou le(s) bonne(s) réponse(s).

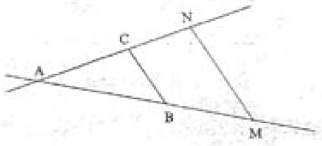


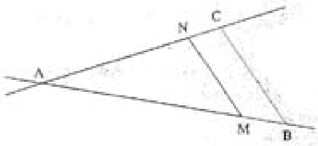
AM =	2,3	AN =	$\frac{9}{4}$	AB =	3
	1,8		2,25		3,2
	1,3		2		2,8
BC =	4,4	MN =	2,1	AC =	2
	4		2		2,5
	3,6		1,9		3

1 • Théorème de Thalès

Dans chacun des cas suivants, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1.

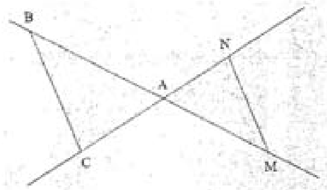




Recopier et compléter les égalités :

$\frac{AM}{AB} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

2. a. Reproduire une figure du même type que celle ci-dessous.



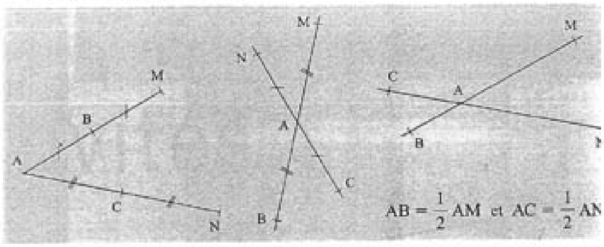
b. Placer les points M' et N' symétriques de M et N par rapport au point A.
c. Écrire des égalités de rapports faisant intervenir les points A, B, C, M' et N'.
d. Comparer AM et AM' d'une part, AN et AN' d'autre part.
Quelles égalités de rapports peut-on en déduire ?

BILAN

Recopier et compléter :
Dans chacune des configurations précédentes, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors ....

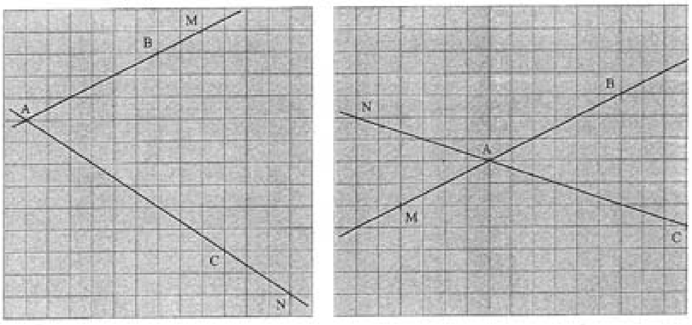
2 • Réciproque du théorème de Thalès

1. Dans chacun des cas suivants, comparer $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$. Justifier que les droi
(BC) et (MN) sont parallèles.



2. Dans chacun des cas suivants, en utilisant le quadrillage, comparer $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{A}{A}$

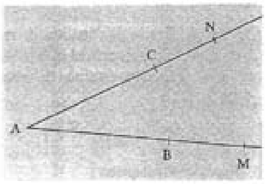
Que peut-on dire des droites (BC) et (MN) (on ne demande pas de justifier) ?



3. Reproduire une figure du même type que celle ci-contre avec $AM = 10$ cm, $AB = 8$ cm, $AN = 7$ cm et $AC = 5{,}6$ cm.

Comparer $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

Que peut-on dire des droites (CB) et (MN) (on ne demande pas de justifier) ?



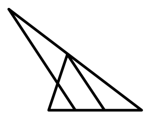
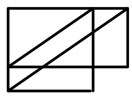
BILAN

Recopier et compléter :

Si les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = ...$, alors les droites (B
et (MN) sont ....

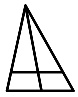
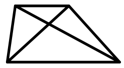
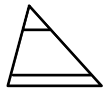
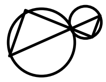
Annexe I 6 c

Quatrième Dimathème Didier

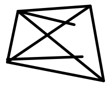
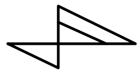
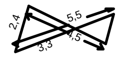
Variables des figures	**Valeurs des variables**	
Milieu proposé	**Exercice type 1**	**Exercice type 2**
Nombre de parallèles	/	/
Nombre de sécantes	/	/
Complexité	La figure est plongée dans une configuration plus complexe	Configuration complexe
Orientation de la figure	2 figures clefs	/
Distribution longueurs	/	/
Figure congruente	non	non
Variables autres que celles de la figure		
Nature du rapport	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul PN/AI ; PM/AI PN + PM = 2 AI	calcul de longueur AC+ comparaison d'aires
Théorème	Direct	Direct
Longueurs	Mixtes	/
Variables de la situation didactique		
Outil / objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non
Ouvert / fermé	½ fermé	fermé
Nombre d'outil	2 : 2 Thalès + addition membre à membre	2 : Thalès + aire
Nombre de possibilité de résolution	1	1
Raisonnement reliant des résultats	oui	non
Répétition d'une méthode	non	non
Interprétation, conjecture généralisation...	non	non
Nombre d'exercices	1.	1.
Classification	U.P.	U.G.S

Annexe I 6 d

Troisième   Dimathème Didier

Variables des figures	**Valeurs des variables**			
Milieu proposé	**Exercice type 1**	**Exercice type 2**	**Exercice type 3**	**Exercice type 4**
Nombre de parallèles	2	/	/	2
Nombre de sécantes	3	/	2	2
Complexité	La figure est plongée dans une configuration complexe	Figure complexe	Figure complexe	Figure complexe à faire
Orientation de la figure	3 figures clefs	/	Type	/
Distribution longueurs	/	/	/	/
Figure congruente	non	/	/	/
Variables autres que celles de la figure				
Nature du rapport	rationnel	rationnel	rationnel	rationnel
Type de la question	Calcul de longueurs AD, AC, DG, GE	Les droites (AR), (SM) sont-elles // ? (AS) et (RM) ?	[CD], [AB] sont-ils horizontaux sachant que [ED] l'est ?	calcul NF, FP, ME
Théorème	Direct + centre de gravité	Direct et réciproque	Direct et réciproque	Direct
Longueurs	Mixtes	/	/	Mixtes
Variables de la situation didactique				
Outil / objet	objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	non	non
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	2 : centre de gravité ($1/3, 2/3$) + Thalès	2 : Thalès et réciproque	2 : Thalès et réciproque	4 : Triangle rectangle cercle, perpendiculaire puis Thalès
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	oui	non	non	oui : Triangle dans cercle→ perpendiculaire → Thalès
Répétition d'une méthode	oui	non	non	non
Interprétation, conjecture généralités...	oui pour G	non	non	oui
Nombre d'exercices	1.	1.	1.	1.
Classification	U.R.C	U.R.C	U.G.S	U.R.C

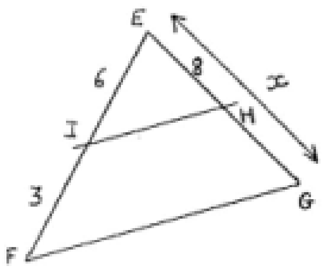
Troisième Dimathème Didier

Variables des figures	Valeurs des variables		
Milieu proposé	Exercice type 5	Exercice type 6	Exercice type 7
Nombre de parallèles	2 x 2	/	2
Nombre de sécantes	/	/	2
Complexité	La figure est plongée dans une configuration complexe	Figure complexe à construire	Seuls figurent les éléments utiles
Orientation de la figure	/	/	Type
Distribution longueurs	/	/	atypique
Figure congruente	/	/	non
Variables autres que celles de la figure			
Nature du rapport	littéral	rationnel	rationnel
Type de la question	Montrer que (IJ) et (DC) sont parallèles	Calcul et parallélisme	Calcul TR, RG, puis $TA/TC = x/y$
Théorème	Direct et réciproque	Direct et réciproque	Direct
Longueurs	/	Mixtes	Mixtes
Variables de la situation didactique			
Outil / objet	objet	objet	objet
Changement de cadre	non	non	oui (Algèbre)
Ouvert / fermé	fermé	fermé	fermé
Nombre d'outil	3 : 2 Thalès → transitivité→ produit en croix → réciproque	Réciproque Pythagore → Thalès → réciproque Thalès	Thalès → Thalès et calcul segment→système équations
Nombre de possibilité de résolution	1	1	1
Raisonnement reliant des résultats	oui	oui	oui
Répétition d'une méthode	oui	non	oui (Thalès)
Interprétation, conjecture généralités...	oui	non	oui
Nombre d'exercices	1	2.	1.
Classification	U.P	U.G.S	U.P

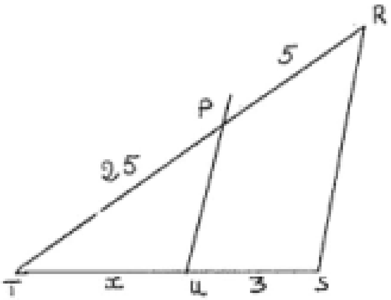
3ème1 CONTRÔLE N°2

N°1:

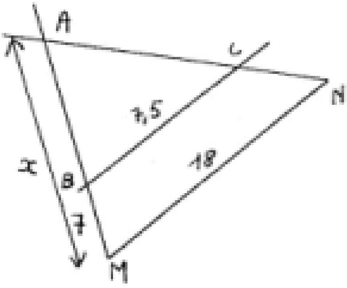
A l'aide des indications portées sur chaque figure, calculer la longueur x demandée.
Les longueurs sont en cm



(HI) // (FG)



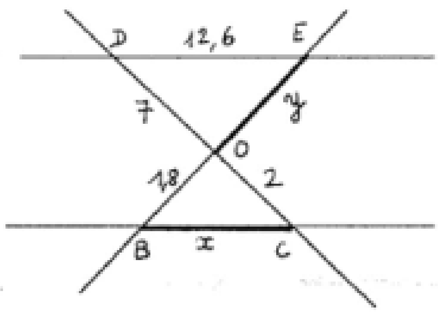
(PU) // (RS)



(BC) // (MN)

N°2: 3

Sur le schéma ci-contre les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
En justifiant la méthode employée et en tenant compte des indications citées, calculer les longueurs x et y .



N°3:

Construire un triangle AMN de façon que l'on ait en centimètres:
AM = 3,2 AN = 4 et MN = 3,8

a) Placer le point B de la droite (AM) tel que : AB = 8
La parallèle à (MN) passant par B coupe la droite (AN) en C
Faire le dessin en vraie grandeur.

b) Calculer le périmètre du triangle ABC

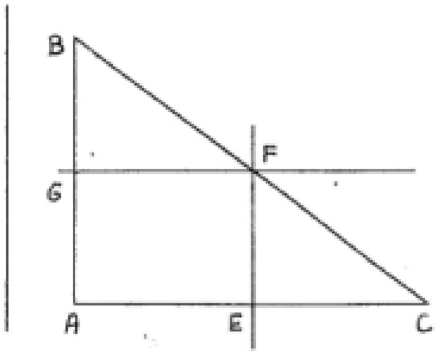
N°4 :

L'unité de longueur est le cm. Le triangle ABC est tel que :

AB = 5,25 BC = 8,75 AC = 7

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

2) Soit E le point du segment [AC] tel que EC = 4. Calculer AE.



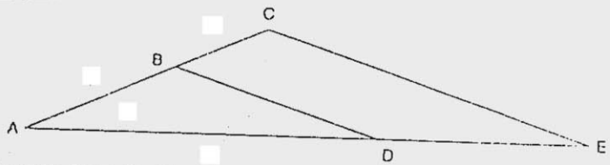
3) La parallèle à (AB) passant par E coupe [BC] en F. Calculer EF.

4) La parallèle à (AC) passant par F coupe [AB] en G. Quelle est la nature du quadrilatère AEFG ? *Justifier*

5) Calculer BF en détaillant bien la méthode employée.

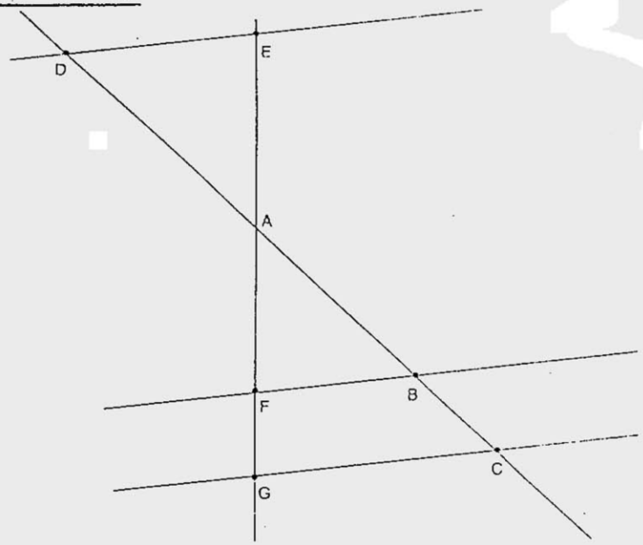
Devoir surveillé n°3 - 3ème

Exercice 1.



Sur cette figure, l'unité est le centimètre. On donne les longueurs suivantes :
AB = 5 ; BC = 3 ; AE = 16,8 ; DE = 6,3.
Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ?
Justifier la réponse.

Exercice 2



Sur la figure ci-dessus, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, les droites (BF) et (CG) sont parallèles.

1. On donne : AB = 5 ; BC = 4 et AF = 3.
Calculer AG puis FG.

2. On donne AD = 7 et AE = 4,2
Démontrer que les droites (ED) et (BF) sont parallèles.

Exercice 3

1°) Reproduire sur votre copie le segment [AB] et construire le point M du segment [AB] tel que. $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{7}$

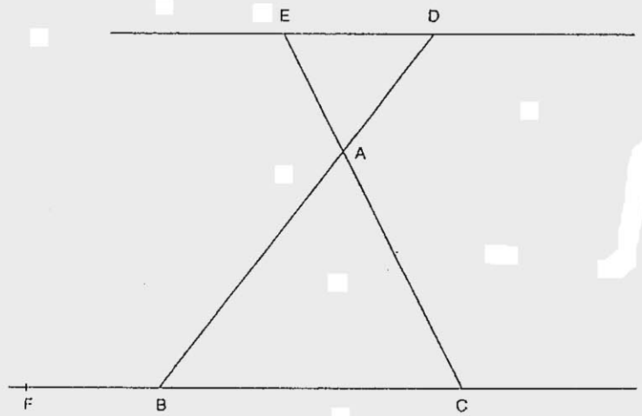
2°) Reproduire sur votre copie le segment [CD] et construire les points M et N de la droite (CD) tel que $\frac{MC}{MD} = \frac{NC}{ND} = \frac{5}{9}$

Exercice 4

La figure ci-dessous est donnée à titre d'exemple pour préciser la disposition des points, segments et droites. Elle n'est pas conforme aux mesures données. L'unité de longueur est le centimètre.
On donne :
AB = 7,5 ; BC = 9 ; AC = 6 ; AE = 4 ; BF = 6.
Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

1. Calculer AD.

2. Les droites (EF) et (AB) sont-elles parallèles ?
Calculer EF.

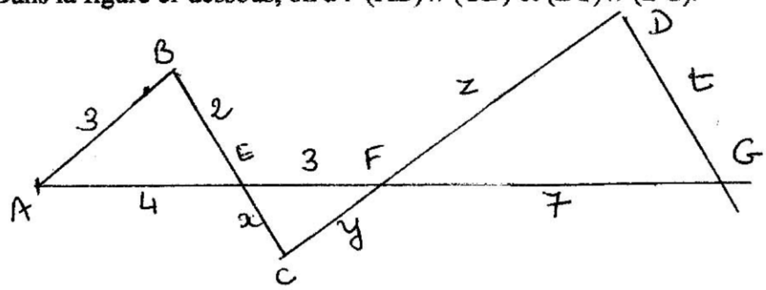


Classe de 3ème4

D.C.5

Exercice 1 *(sur 6)*

Dans la figure ci-dessous, on a : (AB) // (CD) et (BC) // (DG).



1. Recopier, compléter et justifier :

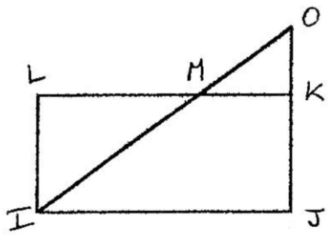
$$\frac{EB}{EC} = \frac{EA}{\quad} = \frac{\quad}{CF} \qquad\qquad \frac{DG}{EC} = \frac{FD}{\quad} = \frac{\quad}{EF}$$

2. Calculer x, y, z et t.

Exercice 2 *(sur 5)*

Tracer un triangle MNP tel que : MN = 12 cm, NP = 8 cm et MP = 9 cm.
Soit Q le point de [MN] tel que MQ = 10 cm et R le point de [MP] tel que RP = 1,5 cm.
Démontrer que les droites (NP) et (QR) sont parallèles.

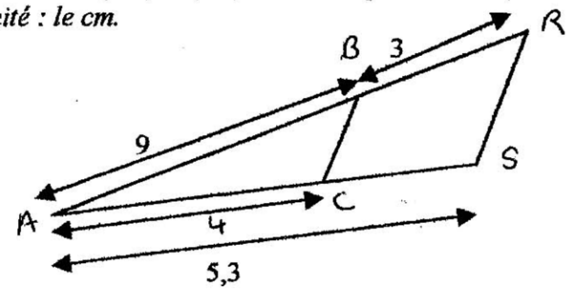
Exercice 3 *(sur 5)*



On considère la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur.
IJKL est un rectangle.
O, M, I sont alignés ainsi que O, K et J.
Les mesures en cm sont : IJ = 7,5 KJ = 3 OK = 1,5
Calculer les valeurs exactes de MK et de OI, puis l'arrondi au mm de OI.

Exercice 4 *(sur 4)*

Les droites (BC) et (RS) sont-elles parallèles ? (B est un point de [AR], C un point de [AS]).
Unité : le cm.

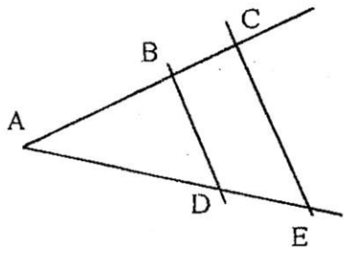


3ème 1 CONTRÔLE N° 4

EXERCICE N°1:

Les droites (BD) et (CE) sont parallèles
On donne:
AB = 3 cm   AC = 5 cm   AE = 7,5 cm

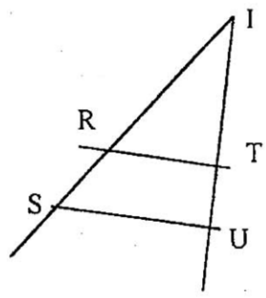
Calculer AD. justifier.



EXERCICE N°2:

On donne:
IR = 3 cm   RS = 2 cm
IT = 2,7 cm   TU = 1,5 cm

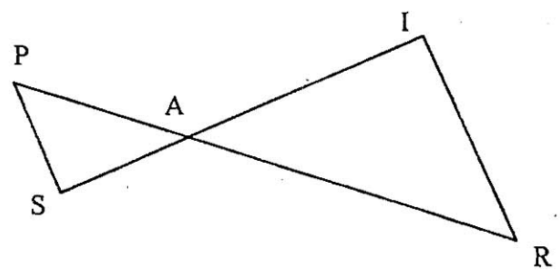
Les droites (RT) et (SU) sont-elles parallèles ? Justifier.



EXERCICE N°3:

Les droites (SP) et (IR) sont parallèles.
On donne:
AS = 17,1 cm   AR = 35,7 cm
PS = 16,2 cm   IR = 30,6 cm

Calculer AI.   *JUSTIFIER.*



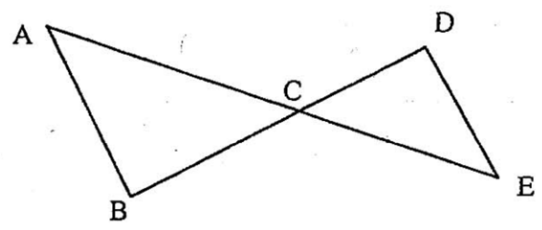
EXERCICE N°4:

On a tracé la droite (DE) perpendiculaire à la droite (BD).
On donne AC = 6 cm, AB = 3,6 cm, BC = 4,8 cm et CD = 3,6 cm.

1°) Faire la figure.

2°) Quelle est la nature du triangle ABC? *JUSTIFIER*

3°) Calculer DE.   *JUSTIFIER*



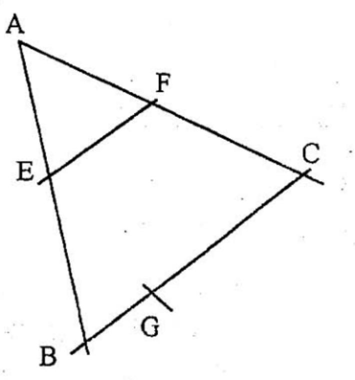
EXERCICE N°5:

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
Les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Toutes les longueurs sont en cm. On donne :

AE = 6   EB = 1,5   AC = 9
BC = 6,5   BG = 1,8

1°) Calculer AF. *Justifier la méthode*
2°) Les droites (AC) et (EG) sont-elles parallèles? *Justifier*



Lundi 15 novembre 1999 **durée : 1 heure**

Contrôle n°2 - Sujet B

Exercice 1 : (points)

a) Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$A = \frac{20}{6} \times \frac{-7}{45} \times \frac{9}{14}$ $\qquad B = \frac{7}{5} + \frac{12}{15} - \frac{120}{20}$

b) On considère $x = 15 \times 10^{-3}$ et que $y = 0{,}3 \times 10^4$.

Donner l'écriture scientifique de x ; de y ; de xy et de $\frac{x}{y}$.

Exercice 2 : (points)

a) Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$B = (3a + 4)(2a - 5)$ $\qquad D = (\frac{6}{5}y - \frac{1}{4})^2$

b) Factoriser les expressions suivantes au maximum :

$E = (3x + 1)(x + 6) - (3x + 2)(3x + 1)$

$F = 9 - 30y + 25y^2$

$G = 16 - (3x - 2)^2$

Exercice 3 : (points)

Soit $H = (2x + 1)^2 - (x - 2)(2x + 1)$

1) Développer et réduire et ordonner H.
2) Factoriser H.
3) Résoudre l'équation : $(2x + 1)(x + 3) = 0$.

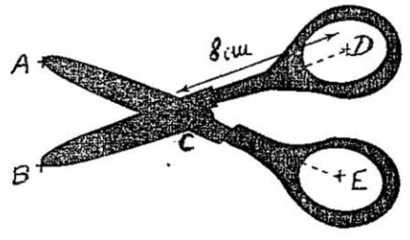
Exercice 4 : (points)

On considère un triangle EFG tel que EF = 15 cm ; FG = 12 cm et GE = 8 cm.
H est le point du segment [EG] tel que GH = 4,8 cm.
La parallèle à la droite (FG) coupe le segment [EF] en I.

a) Faire la figure.
b) Calculer EH.
c) Calculer IH.
d) Calculer IF.

Exercice 5 : (points)

On considère une paire de ciseaux schématisée ci-dessous. Quelle que soit son ouverture, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
(le dessin n'est pas à l'échelle)



a) DC = EC = 8 cm et CB = CA = 6 cm.
Lorsqu'on utilise cette paire de ciseaux, l'écartement DE maximal entre les doigts est 12 cm.
Quel est l'écartement AB maximal entre les deux lames ?

b) On souhaite fabriquer des ciseaux de façon qu'à un écartement ED de 15 cm entre les doigts corresponde un écartement AB de 9 cm entre les lames.
Calculer alors la longueur CA (et CB) des lames. (on a encore DC = EC = 8 cm)

(1) **Résumé des activités menées dans la classe de 3ᵉC du Collège Georges Clemenceau (Paris 18ᵉ), en septembre 1999 autour du théorème de Thalès.**

Il s'agit d'une classe de 20 élèves dont les 2/3 sont d'un niveau très faible (scolarité antérieure chaotique, démotivation, etc), particulièrement en mathématique (année de 4ème assez catastrophique...) Tous ont des lacunes considérables, surtout en ce qui concerne le calcul.

1ère séance (1 heure) : Rappels sur la proportionnalité à partir des notions d'agrandissement et de réduction

Il s'agit d'un travail de recherche (éventuellement par groupes de 2) à partir de la photocopie n° 1.

1) Après observation, je demande aux élèves de désigner les figures qui leur semblent être un agrandissement ou une réduction du modèle, et d'expliciter leurs critères.

Les élèves parlent de "conservation de la forme". Je leur demande de préciser (conservation des angles, des longueurs relatives...)
Un élève prononce le mot proportionnalité.

2) Mesurer et compléter le tableau.
(Certains reconnaissent les tableaux de proportionnalité vus antérieurement)

- Après discussion, on met en évidence l'existence d'un coeff. multiplicateur entre les nombres de la ligne correspondant au modèle et ceux de la ligne correspondant à une réduction ou à un agrandissement.
- On les calcule tous (sous forme fractionnaire). Discussion sur leurs valeurs selon qu'il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction. Utilisation de la notation opérateur $\times\ldots$

3) Compléter la dernière ligne qui correspond à l'agrandissement commencé, puis achever celui-ci.
La plupart calculent le coeff avant de compléter.
Certains utilisent la méthode de calcul d'une 4ᵉ proportionnelle.

2ème séance : Calculs liés à un tableau de proportionnalité (Rappels). (1 heure) ②

(Travail dirigé sur cahier et au tableau)

1) Compléter le tableau suivant pour en faire un tableau de proportionnalité

2		8,4		6
3,5	5,25		8,75	

Faire expliquer les démarches (rappels sur les propriétés des tableaux de proportionnalité)

2) Justifier que l'on a $\frac{2}{3,5} = \frac{3}{5,25} = \frac{8,4}{14,7} = \frac{5}{8,75} = \frac{6}{10,5}$.

et que cette suite d'égalités est équivalente au tableau.

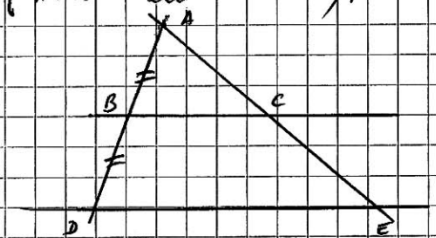
3) Systématisation : _ égalités des produits en croix
_ Calcul d'une 4e proportionnelle.

4) Application : Résoudre les équations suivantes :

$\frac{4}{x} = \frac{2}{3}$; $\frac{3x}{5} = \frac{1}{4}$; $\frac{x+5}{2} = \frac{4}{7}$; $\frac{3}{x+1} = \frac{8}{x+2}$

3ème séance : Théorème de Thalès direct (1). (1 heure)

Ⓐ Rappel sur la droite des milieux vue sous l'aspect proportionnalité (Travail au tableau).



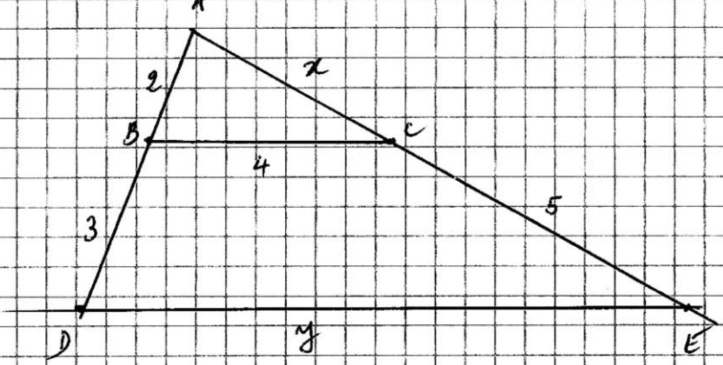
(BC) // (DE).

1) Quelles sont les hypothèses ? Que peut-on en conclure ?

2) Que peut-on dire des triangles ABC et ADE ? Quel est le coefficient de proportionnalité ?

On peut donc écrire $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{1}{2}$.

Ⓑ 1) Travail par groupes de 2 à partir de la figure suivante : ③



(BC) // (DE).

Le but est de calculer x et y. Les élèves sont amenés à réinvestir tout ce qui a été fait précédemment.

2) Mise en commun des démarches et des résultats.

3) Discussion : Qu'est-ce qui nous permet d'utiliser la proportionnalité entre les triangles ABC et ADE ?

→ Alignement des points A, B, D d'une part, et A, C, E d'autre part.

→ Parallélisme des droites (BC) et (DE)

Contre-exemples où les triangles ne sont pas semblables.

En tout état de cause, on $\boxed{\text{admet}}$ que la réunion des conditions d'alignement des points et de parallélisme des droites autorise à utiliser la proportionnalité.

C'est cela le théorème de Thalès.

Insister sur la notion de côtés homologues 2 à 2. En particulier, [BD] et [CE] ne sont les côtés d'aucun triangle.

4) Rédaction-type (élaborée en commun et consignée sur le cahier)

description suffisante de la figure { Les points A, B et D sont alignés dans cet ordre*
Les points A, C et E sont alignés dans cet ordre*
Les côtés [BC] et [DE] sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

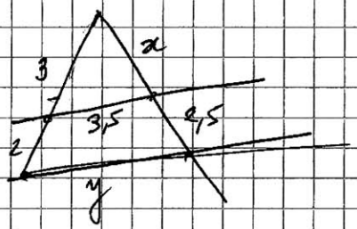
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$. (et on peut faire les calculs).

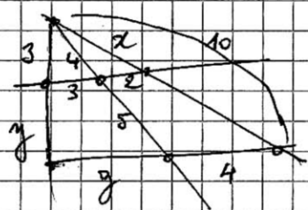
* Cette précision est redondante mais décrit bien le fait que ABC est "dans ADE".

(C1) Exercices d'application directe :

Calculer les longueurs demandées, sachant que dans chaque cas les droites tracées en rouge sont parallèles.

Exemples :

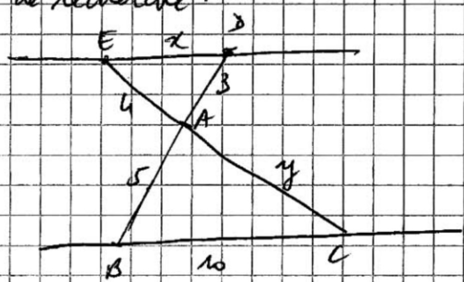




etc

4ème séance (1 heure) : Théorème direct (2).

(A) Activité de recherche.



(BC)//(DE)

Calculer x et y (Faire intervenir D' et E', symétriques respectifs de D et E par rapport à A).

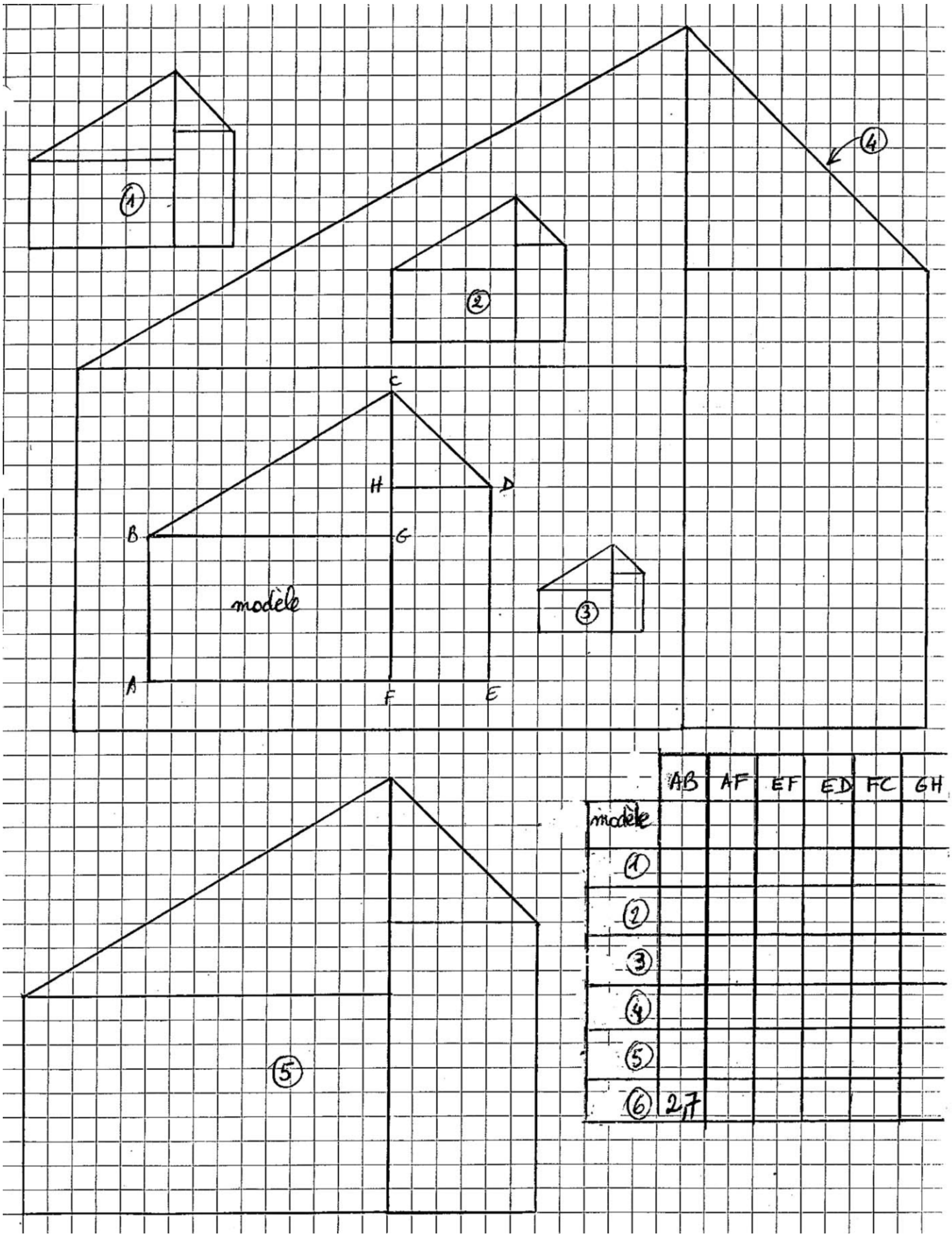
(B) Mise en commun : (BC) et (ED) déterminent 2 triangles proportionnels (nommer les couples de côtés homologues).

C'est une 2e situation où le th. de Thalès s'applique

(C) Rédaction-type à faire énoncer par les élèves ~~en~~ s'inspirant de celle de la 1re situation.

(D) Exercices d'application directe (calculs de longueurs)

Feuille d'activités

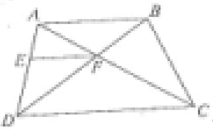


	AB	AF	EF	ED	FC	GH
modèle						
1						
2						
3						
4						
5						
6	27					

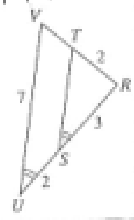
⑤ 5ème séance : Exercices d'utilisation du théorème de Thalès pour le calcul de longueurs. (3 heures) Annexe I 6 b

- Figures faisant intervenir plus de 2 triangles (① à ⑥) (Difficulté de bien repérer dans quels triangles on travaille)
- Nécessité de prouver au préalable le parallélisme de 2 droites (⑤ à ⑦)
- Problème de construction (⑧)
- Recherche d'erreurs (⑨ et ⑩)

① On considère la figure ci-dessous dans laquelle les droites vertes sont parallèles.
Citer les *trois* couples de triangles en « *situation de Thalès* » et écrire, dans chaque cas, les égalités de rapports correspondantes.



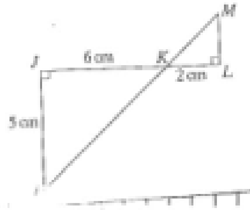
⑤ • $\widehat{RST} = \widehat{RUV}$;
• $RS = 3$ cm ;
• $RT = SU = 2$ cm ;
• $UV = 7$ cm.
1° Démontrer que les droites (ST) et (UV) sont [redacted].
2° Calculer RV et ST.



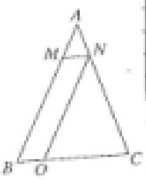
②

1° Sachant que les segments bleus sont parallèles, indiquer tous les rapports égaux à :
a) $\frac{OM}{OD}$; *b*) $\frac{ON}{OA}$; *c*) $\frac{BN}{CD}$.
2° On suppose que :
$OA = 4$, $AC = 2$, $OM = CD = 3$ et $ON = 5$.
Calculer AM, OD, MD, OB et BN.

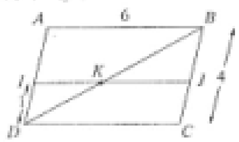
⑥ Calculer les valeurs exactes de KI, KM, LM.



③ Le quadrilatère $BMNO$ est un parallélogramme ;
$AB = 8$ cm ;
$BC = CN = 7$ cm ;
$AN = 2$ cm.
Calculer la valeur exacte de AM, de MN et du périmètre de $BMNO$.

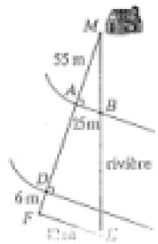


④ Dans la figure suivante, $ABCD$ est un parallélogramme, $(IJ) \parallel (AB)$ et $BD = 8$.

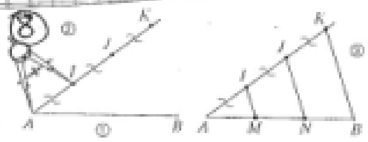


a) Calculer les valeurs exactes de DK et IK.
b) En déduire le périmètre du triangle BKJ.

⑦ Par un système de visées, on a placé deux séries de piquets alignés avec la maison : les piquets A, D et F, d'une part, puis les piquets B et E, d'autre part, de façon que (EF) soit parallèle aux bords de la rivière.
Calculer la largeur de la rivière.



⑧



① Tracer un segment $[AB]$.
② Sur une demi-droite d'origine A, placer trois points I, J et K tels que $AI = IJ = JK$.
③ Tracer les parallèles à (KB) passant par I et J. Justifier que le segment $[AB]$ a été partagé en trois segments de même longueur.

Applications

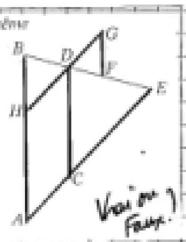
1° *a*) Tracer un segment $[AB]$. Le partager en six segments de même longueur.
b) Placer sur la demi-droite $[AB)$ les points M, N et P tels que $AM = \frac{1}{6}AB$, $\frac{AN}{AB} = \frac{5}{6}$ et $AP = \frac{7}{6}AB$.
2° Tracer une droite graduée, munie d'un repère (O, I) tel que $OI = 6$ cm. Placer les points E, F et G d'abscisses respectives $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{7}$ et $-\frac{5}{7}$.

⑨ (*Les droites d'une même couleur sont parallèles.*)

① $\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

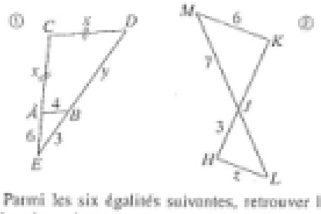
② $\frac{HB}{FH} = \frac{HD}{HG} = \frac{BD}{BF}$.

③ $\frac{BH}{BA} = \frac{BD}{BE} = \frac{HD}{AE}$.



Vrai ou Faux ?

⑩ **Rechercher des erreurs**
On considère les figures suivantes dans lesquelles les segments bleus sont parallèles.



1° Parmi les six égalités suivantes, retrouver les trois qui sont incorrectes.

$\frac{4}{x} = \frac{3}{y}$	$\frac{4}{x} = \frac{6}{6+x}$	$\frac{x}{4} = \frac{y}{x}$
$\frac{IJ}{7} = \frac{z}{6}$	$\frac{3}{7} = \frac{z}{6}$	$\frac{MJ}{JL} = \frac{6}{z}$

2° *a*) Dans la figure ①, les données sont-elles suffisantes pour calculer x et y ?
Si oui, effectuer les calculs.
Sinon, compléter les données en choisissant une longueur convenable, puis faire le calcul.
b) Même consigne qu'au *a*) avec la figure ② et le calcul de z.

6ème séance : Réciproque du Théorème de Thalès (2 heures)

(6)

(A) Travail de recherche (sur la photocopie n° 2).

(B) Mise en commun et discussion :

- Bien situer le problème : il s'agit ici, dans le cas de 2 triangles formés par 2 droites sécantes elles-mêmes coupées par 2 droites, de conclure au parallélisme de celles-ci, alors que jusqu'à présent, ce parallélisme était donné en hypothèse.
- Dans les cas ① et ②, quel que soit le rapport choisi, quelles que soient les longueurs, on obtient 2 droites apparemment parallèles.

Dans les cas ③ et ④, les hypothèses ne suffisent pas et conduisent à des configurations où les droites ne sont manifestement pas parallèles.

<u>On admet que les conditions des situations ① et ② sont suffisantes pour que les droites soient parallèles. C'est la réciproque du th. de Thalès</u>

D'où ~~l'énoncé~~ la rédaction suivante :

- A, B et D sont alignés dans cet ordre
  A, C, et E ———

(ou B, A et D et C, A et E)

- $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on a (BC) // (DE).

(Alors on a aussi l'égalité du rapport $\dfrac{BC}{DE}$ avec les 2 autres, mais celui-ci n'intervient pas dans la réciproque.)

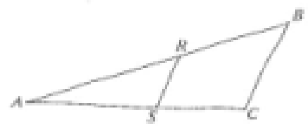
(C) Travail dirigé :

1) A, B, D d'une part, A, C et E d'autre part sont alignés dans cet ordre.
AB = 3 ; BD = 2 ; AC = 4 ; CE = 2,5.
Faire une figure
2) A-t-on (BC) // (DE) ?

(7)
La figure tracée, la plupart des élèves affirment que (BC) et (DE) sont parallèles ce qui est légitime, étant donné que dans la partie (A) de cette séance, je leur avais demandé de conclure au parallélisme sans justification, au vu de la figure uniquement.
Cependant, je leur indique qu'ici, ils ont les moyens de prouver leur réponse, qu'elle soit positive ou négative. Cela les amène à calculer $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{AC}{AE}$ et à constater que, bien que très proches ($\frac{39}{65}$ et $\frac{40}{65}$) ces rapports ne sont pas égaux. Ils en concluent alors naturellement que les droites ne sont pas parallèles.
Je leur pose alors la question : « Quel théorème avez-vous utilisé ? »
Tous répondent : la réciproque, évidemment.
Je leur demande alors si les hypothèses requises par la réciproque sont ici réunies. A l'évidence non, puisqu'on n'a pas $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.
(On a eu bien une discussion intéressante sur ce que sont les hypothèses d'un théorème) Ce n'est donc pas la réciproque qu'on a utilisée. Il s'agit donc du théorème direct ?
Je leur pose la question : « Si (BC) et (DE) étaient parallèles, que pourriez-vous affirmer ? » et les amène ainsi à prendre conscience que c'est bien le théorème direct que l'on utilise ici.
Il est clair que cette "subtilité" n'a été vraiment comprise que par une minorité d'élèves. Tous ont cependant compris que s'il n'y a pas égalité des rapports, il n'y a pas parallélisme, et pourquoi.

(D) Exercices d'application directe

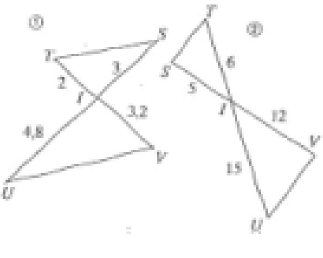
19 Dans chaque cas, refaire le dessin à main levée ci-dessous en indiquant les longueurs proposées. Préciser ensuite si les droites (RS) et (BC) sont parallèles. Justifier.



a) $AR = 3$; $AS = 9$; $AC = 15$; $AB = 5$.
b) $AR = 5$; $BR = 3$; $AS = 30$; $SC = 50$.
c) $AR = 7$; $AB = 11$; $AS = 10{,}5$; $SC = 6$.

20 Tracer un triangle ABC tel que :
$AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.
Placer les points M et N tels que :
$M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $BM = CN = 1$ cm.
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

21 Dans les deux cas suivants, préciser, en justifiant, si les droites (ST) et (UV) sont parallèles.



8

7ème séance : Consignation des résultats du chapitre dans le cahier (4-5 heures) de cours (cf photocopies) et exercices de récapitulation et d'approfondissement

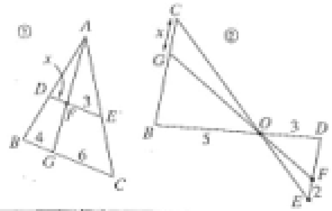
On a consacré une bonne semaine aux exercices suivants (faits en classe ou à la maison) ainsi qu'à la correction du devoir

10 Recherche d'un rapport intermédiaire

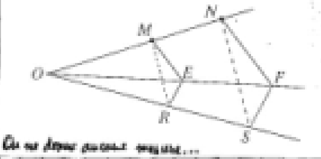
Dans chaque cas, sachant que les segments d'une même couleur sont parallèles :

a) écrire *cinq* rapports égaux à $\frac{FE}{GC}$;

b) calculer x.



Sachant que $(ME) // (NF)$ *et* $(ER) // (FS)$, *montrer que* $(MR) // (NS)$.



On ne trouve aucune mesure...

15 1° *a)* Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 5 cm.
Soit un diamètre $[AB]$ et M le point du segment $[OB]$ tel que $OM = 3$ cm.
Soit E l'un des points d'intersection de la perpendiculaire en M à (AB) et du cercle.

b) Calculer la valeur exacte de ME.

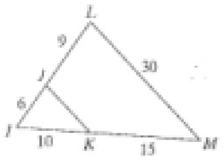
2° Soit F le point d'intersection de la droite (OE) et de la tangente en A au cercle.

a) Démontrer que les droites (AF) et (ME) sont parallèles.

b) Calculer le périmètre du triangle AOF.

Facultatif : Calculer AE, puis BE.

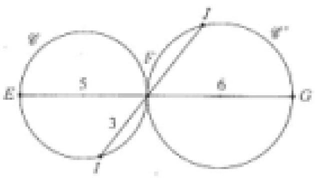
23



Démontrer que les droites (JK) et (LM) sont parallèles. Calculer ensuite JK.

63 Résultats intermédiaires à démontrer

On considère la figure ci-dessous dans laquelle les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents extérieurement en F, $[EF]$ et $[FG]$ étant des diamètres (voir la page 284).



Voici ce qu'a écrit Jonathan et son « prof » :

$\frac{FI}{FJ} = \frac{FE}{FG}$ Quel théorème as-tu utilisé ? Pourquoi en as-tu le droit ?

$\frac{3}{FJ} = \frac{5}{6}$, $5\,FJ = 3 \times 6$ $\boxed{FJ = \frac{18}{5}}$

1° Démontrer que les droites (EI) et (IF) sont perpendiculaires.

2° *a)* Quelle question avait-on posée à Johnatan ?

b) Rédiger correctement la réponse.

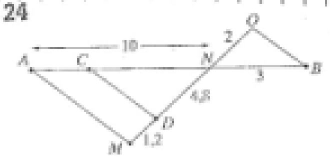
3° Calculer les valeurs exactes de FI et FJ.

16 1° *a)* Tracer un segment $[DE]$ mesurant 13 cm, puis le cercle de diamètre $[DE]$. Soit F un point du cercle tel que $DF = 12$ cm.

b) Calculer, en justifiant, la longueur EF.

2° Soit M le point du segment $[DE]$ tel que $DM = 4$ cm.
Tracer la perpendiculaire à (DF) passant par M : elle coupe (DF) en N.
Calculer les longueurs exactes MN et FN.

24



Les droites (AM) et (CD) sont parallèles.

1° Calculer NC.

2° Les droites (AM) et (OB) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

22 1° *a)* Tracer deux cercles concentriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de même centre O, de rayons respectifs 3 cm et 5 cm. Une demi-droite $[Ox)$ d'origine O coupe $\mathscr{C}$ en M et $\mathscr{C}'$ en N. Une autre demi-droite $[Oy)$ d'origine O, non opposée à $[Ox)$, coupe $\mathscr{C}$ en R et $\mathscr{C}'$ en S.

b) Une conjecture s'impose à propos des droites (MR) et (NS). La démontrer.

2° Généraliser avec deux cercles concentriques de rayons r et r'.

64 *Extrait de Dijon, septembre 1995*

Soit un triangle ABC tel que :

$AB = 5$ cm, $BC = 7{,}5$ cm et $AC = 8$ cm.

D est le point du segment $[AB]$ tel que $AD = 2$ cm.
La parallèle à la droite (BC) passant par D coupe la droite (AC) en E.

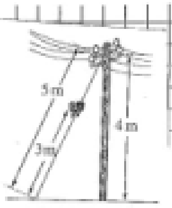
a) Construire la figure.

b) Calculer DE.

c) Démontrer que les angles $\widehat{DEB}$ et $\widehat{EBC}$ sont égaux.

d) Sachant que $DE = 3$ cm, donner la nature du DEB, puis en déduire que la demi-droite [BE) est la bissectrice de l'angle DBC

17 Un poteau téléphonique est retenu par un cable métallique de 5 m de long ainsi que l'indique le schéma ci-contre.
Un papillon se prélasse sur le cable à 3 m de l'extrémité du cable fixée au sol.



À quelle distance du sol le papillon se trouve-t-il ? Et à quelle distance du poteau ?

(A) Dans chaque cas, tracer des figures vérifiant les hypothèses données

Situation 1 : A, B et D sont alignés dans cet ordre
A, C et E sont alignés dans cet ordre.

AB	BD	AC	CE
4	1,6	5	2
3	2,1	4	2
3,6	4,8	1,5	2

Situation 2 : D, A, B sont alignés dans cet ordre
E, A, C sont alignés dans cet ordre

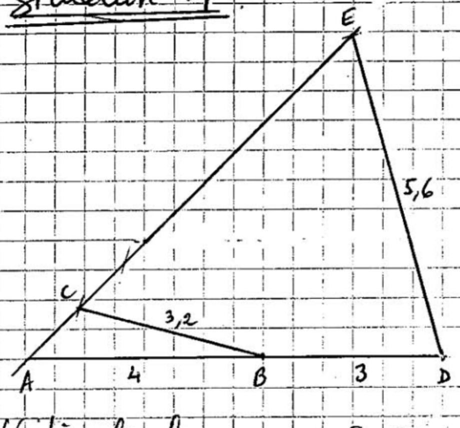
AB	AD	AC	AE
2	2,8	3,5	4,9
5,6	2,4	3,5	1,5
3,6	6,3	4	7

Situation 3 : A, B, D alignés dans un ordre non précisé
A, C, E alignés dans un ordre non précisé.

AB = 4 cm ; AD = 5,6 cm ; AC = 5 cm ; AE = 7 cm
(Etudier plusieurs ordres d'alignement des points.)

(B) Pour chaque figure, calculer $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{AC}{AE}$. Dans quels cas les droites (BC) et (DE) ne semblent-elles pas parallèles ?

(C) Situation 4 :



- Vérifier les longueurs, puis comparer $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{BC}{DE}$.
- A, B et D d'une part, et A, C et E d'autre part, sont bien alignés dans cet ordre

Et pourtant, que dire de (BC) et (DE) ?...

3C CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES n° 1.

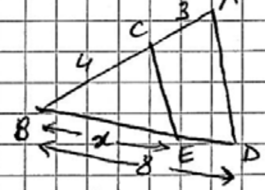
Vendredi 1er octobre 1999

(1 heure)

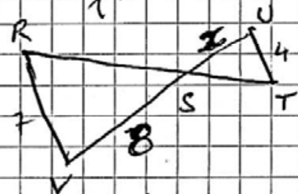
Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes (on donnera les solutions sous la forme de fractions irréductibles)

a) $\frac{x}{5} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{x+3} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{x-4}{6} = \frac{x}{9}$

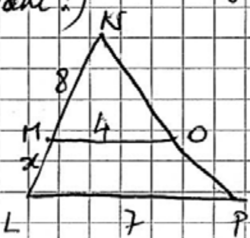
Exercice 2 : Dans chacune des figures ci-dessous, calculer x, sans justifier les calculs effectués (mais en les écrivant !)



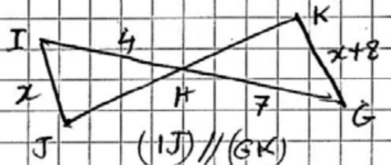
(CE)//(AD)



(RV) // (UT)



(MO) // (PL)



(IJ) // (GK)

Exercice 3 (Tous les calculs doivent être justifiés)

- A, E et B sont 3 points alignés dans cet ordre, tels que AE = 5 cm et EB = 3 cm.
- $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont les cercles de diamètres respectifs [AE] et [EB].
- G est un point de $(\mathcal{C})$ tel que AG = 4 cm. La droite (GE) recoupe $(\mathcal{C}')$ en R.
- Z est un point de [AG] tel que AZ = 3,2 cm
- K est un point de [AE] tel que EK = 1 cm.

1) Faire une figure

2) Calculer GE, puis calculer ER et RB.

3) Les droites (GR) et (ZK) sont-elles parallèles ?

4) Calculer ZK.

ANNEXE I : Ingénierie niveau quatrième

ANNEXE I 1, a

Activité I , séquence 1

Prévision de présentation de la tâche aux élèves ::
Une coupe d'un escalier a été collée sur une vitre de fenêtre. L'ombre de cette coupe se projette sur une feuille de papier placée sur une table.
1.a) Vous allez devoir, tracer au crayon à papier, le contour de la forme obtenue. Pour cela, vous placerez les principaux points qui permettront, une fois reliés, d'obtenir ce contour.
1.b) Grâce à des morceaux de ficelles que vous fixerez à l'aide de scotch, vous relirez les arêtes des marches à leurs ombres.
Que remarquez-vous ? Que peut-on en déduire quant aux rayons du soleil ? Pour prendre un modèle, nous pourrions penser à la situation d'un lampadaire très éloigné.
1.c) En observant les schémas obtenus et la coupe de l'escalier, que pouvez-vous remarquer de plus ? Il faudra lister les choses qui auront été repérées.
2.a) Après cela, plusieurs bandes de papiers accessibles ont été disposées "verticalement" sur les fenêtres de la classe. Des tables ont également été placées horizontalement sous certaines de ces fenêtres afin de pouvoir percevoir des ombres.
Indépendamment des longueurs, que pouvez-vous constater concernant les bandes et les ombres ?
Vous avez à votre disposition un mètre pour mesurer la longueur des ombres sur les tables et sur le sol pour certaines. Vous inscrirez cette longueur dans la case " table horizontale" inscrite sur la fiche numérotée collée sur la table qui vous concerne.
2.b) Vous reprendrez ces mesures en soulevant le table en question. Vous inscrirez cette longueur sur la fiche à la case "table oblique". Que remarquez-vous ?
2.c) En consignant les mesures trouvées dans un tableau qui fera apparaître le numéro des bandes, vous pourrez faire une première remarque puis, en vous aidant éventuellement d'une calculette, vous chercherez une relation qui pourrait relier longueurs des ombres aux longueurs des bandes correspondantes.
Quelle constatation pouvez-vous faire ?
Prévoir une récapitulation des constatations qui ont été faites.
2.d) Un groupe va retracer le contour de l'ombre du même escalier que précédemment qui est placé de la même façon. Que constatez-vous ?
2.e) Nous pouvons à présent revenir sur la question initiale de cette séquence à savoir : comment trouver la hauteur des fenêtres ? En vous aidant des constatations que vous avez faites précédemment, il vous sera possible de trouver une méthode de calcul. Faites des propositions. Nous effectuerons ensuite ces calculs. ***(Si le temps manque, donner cette question à résoudre à la maison)***
2.f) Cette méthode sera ensuite utilisée pour calculer la hauteur inaccessible d'un objet de la cour.

ANNEXE I 1, b

Activité I , séquence 2

Présentation de la tâche aux élèves :

a. Nous vous proposons de trouver la hauteur du panneau de basket grâce à la méthode que vous avez mise en évidence précédemment pour la hauteur des fenêtres. Trois longueurs étaient accessibles dans cet exemple.
Dans la nouvelle situation qui vous est proposée dans la cour, vous allez devoir transposer la méthode précédente. Pour cela, trois longueurs dites accessibles, équivalentes au trois dernières, devront être mesurées.
b. Quels objets proposez-vous pour procéder à ces mesures ? *(Il sera possible soit de fixer un morceau de carton plus large que le poteau de basket, soit de se référer à un bâton)* Par groupe de quatre élèves, vous prendrez alors ces mesures à l'aide du décamètre quitte à invalider votre choix si ces manipulations s'avéraient difficiles voire impossibles.
c. Nous retournerons en classe afin de schématiser cette situation. Pour cela, qu'avons-nous à notre disposition ? *(carton, son ombre, l'ombre du panneau)*. Vous effectuerez alors un dessin à l'échelle représentant l'expérience.
d. Vous effectuerez ensuite les calculs. Vous vérifierez, par une mesure prise sur le dessin, que le calcul que vous avez fait semble correct. Vous confirmerez également une propriété des rayons du soleil. Nous pourrons comparer ensuite vos résultats avec la hauteur effective du panneau qui a été communiquée par la société de montage des installations.
e. Même si il existe une certaine cohérence dans tout ce que nous venons de faire depuis le début, nous avons mis en évidence certains écueils que présente cette méthode qui est relativement aléatoire du fait qu'elle soit tributaire de l'ombre des objets (soleil). De plus, pour les objets lointains, elle ne convient pas.
Par conséquent, nous allons vous proposer une autre méthode de mesure de distances inaccessibles qui utilisera d'autres moyens matériels et qui se fondera sur l'application d'un théorème que nous établirons ensemble. Avant cela, vous allez réfléchir sur les questions suivantes qui concernent les éclipses de soleil. ***A la maison ou sur place suivant le temps disponible)***

ANNEXE I 1, c

Activité I , séquence 3

Présentation des tâches aux élèves :
a. Vous avez tous entendus parler ou vous avez éventuellement été témoins de l'éclipse de soleil du 11 août 1999. En vous rendant au C.D.I, ou en consultant une encyclopédie ou un dictionnaire chez vous ou dans une bibliothèque, renseignez-vous sur le phénomène général des éclipses de soleil. Dans chaque groupe composés de cinq ou six élèves, vous aurez à nous rapporter les informations nécessaires à la compréhension du phénomène. En particulier, vous devrez trouver les diamètres respectifs du soleil, de la lune, de la terre et les distances terre lune et terre soleil.
b. Après qu'un des groupes ait exposé ses résultats, groupe après groupe, vous allez devoir trouver un "paradoxe" dans cette situation d'éclipse de soleil. Comme certains d'entre-vous l'ont énoncés, lors d'une éclipse totale de soleil, la lune cache parfaitement le soleil. Les tailles apparentes des deux astres sont les mêmes à quelque chose près. Il est dit alors que les diamètres apparents sont égaux.
c. Notre but est de comprendre le phénomène car il est en relation avec notre problématique initiale. Pour cela, vous réfléchirez à la question suivante : qu'y a-t-il de gênant pour que nous puissions comprendre les éclipses de soleil en agissant directement sur les paramètres réels, c'est à dire les distances réelles, de la situation ?
Comment pourrions-nous y remédier ?

d. Pour comprendre le phénomène des éclipses de soleil, nous modéliserons cette situation dans un espace accessible aux mesures. Ainsi, pour se rendre compte déjà des proportions, vous allez répondre aux questions suivantes :

1. Si nous représentons la lune par un disque, qui sera en fait un point, de 0,05 cm de diamètre, calculer les autres dimensions à l'échelle de la situation. Que pouvez-vous en conclure ? Peut être pourrions-nous alors adopter une échelle pour les distances entre les astres et une autre pour les représentations de ces astres ?
2. Si, au tableau, nous représentons la distance terre lune par un segment de longueur 0,4 cm (resp 0,05 cm), par quelle longueur devrons nous représenter la distance terre soleil? Deux élèves effectueront les tracés en question au tableau.
3. Si nous schématisons, toujours sur le tableau, la lune par un disque de 0,40 cm (resp 0,05 cm) de diamètre, quels seront les diamètres respectifs des disques qui modéliseront la terre et le soleil ? Deux élèves réaliseront encore les trois constructions. (En nous référant à ces représentations, il sera facile de faire comprendre aux élèves que le schéma à l'échelle d'une éclipse de soleil n'est pas réalisable sur une feuille et même sur le tableau. Par conséquent, ils imagineront aisément les raisons qui nous inciteront à ne donner qu'un schéma ne respectant pas les proportions de la situation.) Nous effectuerons alors une schématisation de la situation.

e. Deux disques ont été dessinés sur le tableau. Ils représentent, sans respecter les proportions, la lune et le soleil. A l'aide de la lorgnette qui est à votre disposition et qui est percée d'un côté d'un petit trou de visée et de l'autre côté d'un disque, vous allez viser, à deux endroits différents et l'un après l'autre, les deux disques de façon à les voir exactement dans la lorgnette. Quelle remarque pouvez-vous faire ?

f. Après vous être décalés de trois pas sur le côté, vous viserez à nouveau. Que se passe-t-il ? Qu'en déduisez-vous de fondamental quant à votre position pour effectuer une visée ?

ANNEXE I 1, d

Activité I , séquence 4a

Présentation des tâches aux élèves :

Nous allons nous intéresser à la recherche d'autres longueurs que celles qui sont dites verticales que nous avons reliées aux ombres.

a. Vous allez vous diviser en groupe de deux élèves, c'est à dire en binômes (il pourra y avoir un trinôme dans le cas où vous seriez un nombre impair d'élèves. Quinze lorgnettes numérotées, accompagnées d'un carton sur lequel, également, est inscrit le numéro de la lorgnette correspondante, sont devant vous. Chaque binôme devra choisir une lorgnette et son carton d'identification. S'il reste des lorgnettes, certains binômes effectueront deux fois l'expérience qui va suivre. L'une des questions pratiques qu'il faut se poser est savoir si on est vraiment en face pour viser. Vous avez pu remarquer que par rapport à la lorgnette que vous avez utilisée précédemment, une fente a remplacée le trou circulaire et qu'un réticule, un petit morceau de ficelle est placée au milieu de cette fente. Ce n'est qu'une contrainte de plus. Elle va justement servir pour que vous sachiez si vous êtes bien en face ou non. En effet, pour cela, il faudra, lors d'une visée, que le réticule et le milieux de la mire que nous avons matérialisé, coïncident.

b. Chaque binôme va devoir trouver le point de visée de la mire avec sa propre lorgnette. Pour cela, un premier membre du binôme va procéder à une visée; le lieu obtenu sera marqué grâce au carton de la lorgnette qui sera déposée sur le sol de façon à bien marquer la verticale des yeux du viseur. Le deuxième membre du binôme procédera à son tour à une visée. Un nouveau point sera obtenu. Les deux membres du binôme devront se mettre d'accord pour déposer définitivement le carton identificateur à l'endroit qu'ils considéreront comme étant le lieu de la visée "parfaite". Ces manipulations se feront sous les yeux attentifs du binôme suivant qui jouera en quelque sorte un rôle d'arbitre et qui prendra la place de ce premier couple. Et ainsi de suite...

c. Lorsque tous les binômes seront passés et lorsque toutes les lorgnettes auront été épuisées, vous devrez constater certaines choses. *Les élèves remarqueront inévitablement que les lorgnettes se rassemblent en trois groupes.* Vous avez constaté que les cartons d'identifications étaient rassemblés, à quelque chose près, en trois tas. Comment expliquer ce fait ? Qu'est-ce que cela signifie ? Quel rapport ont entre elles les lorgnettes d'un même amas ? Il leur sera demandé, si l'idée ne leur vient pas spontanément, de mesurer les distances qui séparent les trois tas. Pour répondre à toutes ces questions plus posément, nous allons retourner en classe pour, dans un premier temps, schématiser l'expérience et dans second temps modéliser la situation. Mais avant cela, nous allons procéder à une dernière expérience.

d. Avant de poursuivre l'étude de la situation, chaque binôme, l'un après l'autre visera avec une nouvelle lorgnette percée de cinq trous et d'une fente de visée que l'on retournera. Vous viserez la mire par un des premiers trous, et vous marquerez l'endroit de la visée grâce au tracé d'une croix à la craie. *(Deux possibilités : on recule, mais alors il n'y a plus coïncidence entre le réticule et le milieu de la mire ou on se décale) (Si un élève n'invite pas les autres à viser avec une lorgnette bien parallèle à la mire, il faudra l'imposer)* Du même endroit, vous viserez la mire par le trou suivant et ainsi de suite. Une fois que vous aurez retourné la lorgnette, vous viserez par se même trou et vous marquerez également les endroits de visée. Que constatez-vous ? *(Points alignés, éventuellement parallélisme)* Qu'avez vous dû faire pour obtenir une visée correcte, c'est à dire pour que le réticule et le milieu de la mire coïncident ? Que peut-on en déduire de fondamental pour la mire et la fente de visée *(parallélisme)* ? Nous remonterons alors en classe afin de faire des remarques complémentaires sur les résultats obtenus dans cette activité et qui concernent les trois groupements de lorgnettes, les différentes positions de visée et le différents trous de visée.

ANNEXE I 1, e

Présentation des tâches aux élèves:

Dans cette activité, le but principal sera de savoir, sans se rendre dans la cour, si une mire pourrait être vue à l'aide d'une lorgnette dont on connaît les caractéristiques. Pour cela, une schématisation puis une modélisation du problème est rendue nécessaire.
(Il faudra prévoir en classe le parallélisme de la mire et de la droite.)

Activité I , séquence 4.b

a. Nous allons tout d'abord effectuer des schémas pour tenter de comprendre le fonctionnement de cette méthode de visée. Chaque élève va produire un tel schéma général qu'il viendra tracer au tableau et ensuite, une discussion devra s'engager pour savoir si un des dessins schématise bien les situations et le fonctionnement des lunettes *(Dessins génériques)*.

b. Nous allons donc maintenant modéliser les situations. Vous allez représenter à l'échelle les lorgnettes et leur champ de visée. Quelles longueurs devons-nous retenir pour modéliser la situation ? Nous allons réfléchir ensemble, sur un exemple, pour mettre au point une méthode de construction de la figure en question. Chaque binôme construira ensuite le calque de sa lorgnette en quatre exemplaires.
L'échelle que nous adoptons consiste à représenter une longueur de 4 cm sur la lorgnette par un segment de 1,5 cm sur le dessin. Un tableau rassemblant toutes les mesures retenues pourra être dressé avec les mesures à l'échelle en correspondance. Nous construirons nous même une mire à l'échelle afin que les élèves constatent, comme pour l'éclipse du soleil, que tous les objets ne pourront pas être représentés à l'échelle.

c. Sur une feuille de format A3, vous allez placer et fixer un des calques. *(Nous aurons tracé l'axe médian de chaque feuille qui correspondra à l'axe de visée. Chaque groupe aura l'en semble des calques représentant les lunettes équivalentes d'un même tas)* Vous prolongerez les côtés du champ de visée que vous pourrez terminer à un endroit par une segment symbolisant la mire qui est visée. Comment peut-on se rendre compte avec ces calques que des lunettes différentes sont tout de même équivalentes quant à la visée de la mire ? Les schémas qui vous avez à votre disposition représentant des lorgnettes équivalentes quant à l'endroit de visée, vous placerez, dans les mêmes conditions de visée que pour le précédent instrument, toutes les autres lorgnettes.
Quels commentaires pouvez-vous faire ?

d. Vous avez remarqués que les fentes de visée et les longueur des lorgnettes équivalentes sont proportionnelles. Quelles autres longueurs vous paraissent-elles proportionnelles sur les dessins ? Vous pourrez prendre des mesures. *(Ce qui compte est le rapport longueur lorgnette sur longueur de la mire est égal au rapport distance à la mire sur longueur de la mire.)*

e. Vous allez schématiser la situation de la dernière question de l'activité précédente. Vous obtiendrez ainsi de nouvelles proportions. Ainsi, pour pouvez trouver les distances qui séparaient les différents tas. Vous vérifierez vos résultat avec les mesures que vous aviez prises sur le terrain.

f. Une fois que nous nous serons assurés que les schémas seront convenablement exécutés et afin de vérifier que ce modèle est bien compris, nous vous proposerons de répondre à deux autres questions afin de mimer sur une feuille les manipulations effectuées dans la cour. Un schéma vous sera distribué. Le trait UV, qui n'est pas bien sûr représenté à l'échelle, est parfaitement vu du point indiqué B. Dites si ce même trait sera parfaitement vu des points A et C, rétréci, ou si la vue dépasserait le trait. Expliquez la situation en vous aidant bien sûr des papiers calques quitte à prolonger parfois, encore une fois, les côtés des champs de visée.

g. Vous allez devoir anticiper, dans la salle de classe, une visée que vous effectuerez, par la suite réellement dans la cour. En vous aidant des résultats précédents et en procédant à des calculs, à quel endroit et plus exactement à quelle distance du tableau devez vous vous placer pour apercevoir avec exactitude la mire blanche de 1 m de long ? Vous êtes supposés connaître les caractéristiques de votre lorgnette. *(les élèves devrons choisir le calque d'une lorgnette)* Nous nous rendrons dans alors dans la cour afin de vérifier l'exactitude de vos prévisions.

ANNEXE I 2

<u>Présentation des tâches aux élèves</u>

Cette première séquence de cette seconde activité aura pour objectif de démontrer un théorème.

<u>Activité II , séquence 1.a</u>

<u>1. Théorème des milieux.</u>

<u>Phase de conjecture et phase heuristique :</u>

ABC est un triangle. I est le milieu du segment [AB] et on trace la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point I. Cette droite coupe la droite (AC) en J.

a. Effectuer le dessin.

b. Que pouvez-vous remarquer sur ce dessin ? En mathématique, nous pouvons appeler cela une conjecture. Mais une conjecture n'est pas un théorème. Pour qu'elle se transforme en proposition, en un résultat définitif utilisable par tout le monde simplement en l'énonçant, il faut la démontrer. Sans cela, certains énoncés sont restés des conjectures pendant des centaines d'années comme le théorème de Fermat (358 ans sans démonstration).

c. Pour cela, vous allez devoir faire la recherche d'une méthode, d'outils qui seraient utiles pour parvenir à vos fins. Cela pourra consister, par exemple, à compléter judicieusement le dessin afin de faire apparaître une figure classique dont on connaît des propriétés intéressantes qui se rapprochent de la conjecture que nous voulons démontrer.

<u>Phase de démonstration :</u>

On trace la droite parallèle à la droite (IB) passant par le point C, puis on prolonge la droite (IJ) qui coupera la droite précédente en K.

a. Que peut-on dire du quadrilatère IKCB ? Le justifier, pour cela il vous sera possible de vous remémorer, à l'aide du livre par exemple, les différentes caractérisations possibles du parallélogrammes. Les trois seront utiles dans cette démonstration.

b. Démontrer l'égalité IA = CK. En déduire que le quadrilatère IAKC est un parallélogramme.

c. Conclure alors que J est bien le milieu du segment [AC] et exprimer les rapports AI/AB et AJ/AC. (Suivant les propositions faites par les élèves, nous aurons sûrement à donner des indications supplémentaires pour que cette démonstration puisse être menée à terme.)

<u>Phase de rédaction d'un texte :</u>

Vous allez à présent rédiger un texte en français qui décrive ce que vous venez de démontrer et la façon dont vous y êtes parvenus. Cela constituera le corps de la démonstration.

Vous donnerez ensuite la rédaction de ce premier théorème (1).

<u>2. Propriété complémentaire.</u>

a. Démontrer que IK = BC.

b. En déduire, grâce également à un autre résultat obtenu précédemment, que IJ = (1/2).BC.

c. Que peut-on alors dire des rapports AI/AB, AJ/AC, et IJ/BC ?

<u>Phase de rédaction d'un texte :</u>

Vous allez à présent rédiger un texte en français qui décrive ce que vous venez de démontrer et la façon dont vous y êtes parvenus. Vous donnerez pour finir l'énoncé de ce nouveau théorème (2).

<u>Activité II, séquence 1.b.</u>

1. Construire le quadrilatère ABCD qui est un trapèze quelconque de petite base AB et de grande base CD. Placer le point M milieu du segment [AD]. Tracer la droite passant par le point M et parallèle à la droite (DC); elle coupe la droite (BC) en N. Les segments [MN] et [BD] se coupent en O.

2. En appliquant deux fois le premier théorème, dans les triangles ABD et BDC, démontrer que N est le milieu du segment [BC].

3. Rédiger ce nouveau théorème (3) en partant des données initiales pour parvenir à la conclusion.

<u>Activité II , séquence 1.c.</u>

a. On considère un triangle ABC. Les points E et F sont sur le segment [AB] et vérifient AE=EF=FB. La parallèle à la droite (BC) passant par le point E coupe le segment [AC] en M et la parallèle à la droite (BC) passant par le point F coupe le segment [AC] en N. Construisez la figure.

b. Que pouvez-vous remarquer ? Faites une ou plusieurs conjectures.
c. Démontrer alors, en appliquant les théorèmes 1 et 3 dans deux figures convenablement choisies, que le point M est le milieu du segment [AN] et que N est le milieu du segment [MC]. (Dans le triangle AFN puis dans le trapèze EMCB).
d. Ecrire ensuite deux rapports qui sont égaux. (Nous compléterons ces égalités s'il en manquait).
e. Si nous notons EM = l, FN = m et BC = n quelle relation lit l et m ?
f. Le droite (EC) coupe [FN] en K. Trouver les relations qui lient FK à BC et KN à EM.
g. En déduire une relation qui relie m, n et l ; puis démontrer que l'on a m = (2/3).n et enfin que l = (1/3).n.

Activité II, séquence 1.d.

Vous allez devoir maintenant exécuter le dessin suivant :
On a un triangle ABC. E, F et G sont des points du segment [AB] et vérifient AE = EF = FG = GB. La parallèle à la droite (BC) passant par le point E coupe le segment [AC] en M; la parallèle à la droite (BC) passant par le point F coupe le segment [AC] en N et la parallèle à la droite (BC) passant par le point G coupe le segment [AC] en O.
a. Faites maintenant une conjecture.
b. A l'aide de ce que vous avez produit précédemment et en particulier les théorèmes 1 et 2, démontrez que AM = MN = NO = OC.
c. Ecrire alors deux rapports qui sont égaux.
d. Nous allons tenter de généraliser ce résultat. ABC est un triangle avec M un point du segment [AB] tel que AM = 0,6.AB. Par M mener la parallèle à la droite (BC) qui coupe la droite (AC) en N. Quelle relation existe entre AN et AC ? Comment pourriez-vous la démontrer ? (En divisant AC en dix parties égales, en traçant toutes les parallèles passant par les points de ces subdivisions et en plaçant M sur la sixième en partant de A.)
e. Reprenez le même exercice mais maintenant avec AM = (5/12).AB (ou, suivant les réponses données à la séquence 1.d : AM = (5/7).MB).
f. En gardant toujours l'égalité AM = x. AB (ou AM = x.MB suivant les réponses à la séquence 1.d), pour quels nombres x peut-on généraliser les résultats qui précèdent ? (Décimaux, rationnels).
g. Nous allons nous intéresser aux rapports des longueurs des segments aux supports parallèles. On notera EM = k, FN = l, GO = m, BC = n. En appliquant le résultat obtenu à la question g de la séquence 1.c précédente à la figure AGO, montrer que k = (1/3).m et que l = (2/3).m.
h. La droite (FC) coupe le segment [GO] en K. Démontrer que m = (1/2)/n + (1/2).l. En déduire que m = (1/2).n + (1/3).m et ainsi que m = (3/4).n. Trouver les relations qui lient alors k et l à m.
i. Voulez-vous passer au cas où nous partagerions le segment [AB] en cinq segments de même longueur ? *(Nous nous attendons à ce que les élèves disent non)* Vous allez tout de même écrire les rapports comme précédemment. Si nous divisons le segment [AB] en n segments de même longueur et si nous traçons les parallèles en question, qu'en pensez-vous ? *(Prendre un point sur [AB] correspondant au rapport p/n puis faire apparaître tous les rapports 1/n, 2/n, 3/n ...)*

ANNEXE I 3, a

Activité II, séquence 2.

1. Sur la figure qui vous a été distribuée, ABC est un triangle et D est un point du segment [AB]. Nous ne connaissons pas le rapport AD/AB. Une mesure directe de AD ne donnerait qu'une approximation de cette longueur. Par ce point D tracez la parallèle à la droite (BC). Cette droite coupe la droite (AC) en E.
Nous vous proposons de démontrer que AD/AB = AE/AC Cette égalité a été établie précédemment dans le cas où les rapports en questions étaient égaux à un nombre décimal ou à un nombre rationnels donnés, ce qui n'est pas le cas ici.
2. Placer les points M, N et P sur le segment [AB] tel que AM = MN = NB. Où se trouve le point D ? Que peut-on dire des longueurs AM, AD, et AN, quelles relations les lient-elles ? Quelles relations existent entre les rapports AM/AB, AD/AB, AN/AB; (donner les rapports exacts que vous connaissez) ?
3. En déduire un encadrement de AD/AB.
4. Tracer alors, à partir des points M et N, les droites parallèles à la droite (BC). Elles coupent la droite (AC) respectivement en R et S. Quelles égalités peut-on déduire de l'activité II séquence 1 question d précédente ?
5. Donner alors un encadrement du rapport AE/AC. Comment peut-on améliorer cet encadrement, c'est à dire comment peut-on le rendre plus précis ?
6. *(Prendre les propositions des élèves, sinon :)* Diviser le segment [AB] en dix parties égales. Pour cela, pour différencier cette nouvelle division de la précédente, vous utiliserez de la couleur pour placer les points de division. Vous donnerez un encadrement du rapport AD/AB et en déduire un encadrement du rapport AE/AC, toujours en appliquant la méthode des parallèles et le résultat de la dernière séquence d de l'activité II. Comment peut-on encore affiner ces encadrements ?
7. Diviser en vingt segments le segment [AB]. Et reprenez les questions. Jusqu'où, d'après vous serait-il possible, dans certains cas, de pousser ce procédé ? Qu'en déduisez-vous, intuitivement, pour les rapports AD/AB et AE/AC ? Vu verrez en classe de troisième qu'il y a effectivement des rapports, comme le rapport de la diagonale d'un carré rapporté à son côté, qui ne peuvent pas s'exprimer sous forme de fraction. Mais même dans ce cas, le raisonnement précédent serait applicable puisque nous avons travaillé avec des rapports non identifiés.
Nous allons maintenant démontrer d'autres égalités de rapports ; *(suivants les rapports proposés par les élèves, nous commencerons par l'une des trois égalités (1), (2), (3) et nous démontrerons les autres comme dans le cas suivant) :* Nous savons que (1) DA/DB = EA/EC Or DA = BA - BD et EA = AC - EC. Ainsi, DA/BD = BA/BD - 1 et EA/EC = AC/EC - 1. Par conséquent, on a : BA/BD = AC/EC ou (2) BD/BA = CE/AC on en déduit que : - BD/BA = - CE/AC et par conséquent, 1 - BD/BA = 1 - CE/AC soit encore (AB - DB)/AB = (AC - EC)/AC et ainsi : (3) AD/AB = AE/AC. Ce résultat peut se résumer par le théorème suivant :
Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.
Par exemple, dans un triangle ABC tel que le point D appartienne au segment [AB], et que la droite parallèle à la droite (BC) passant par D coupe [AC] en E, nous avons : DA/DB = EA/EC ; BD/BA = CE/AC ; AD/AB = AE/AC. Mais la conjecture que a été faite précédemment est un peu plus complète. Nous vous proposons maintenant de finir la démonstration.

ANNEXE I 3, b

Présentation des tâches aux élèves :
Le but de cette séquence est de démontrer une dernière égalité afin d'obtenir un dernier théorème déduit du théorème de Thalès.

Activité II , séquence 3

a. ABC est un triangle avec D un point du segment [AB]. Tracer la droite parallèle à la droite (BC). Cette droite coupe le segment [AC] en E. Nous savons que cette droite coupe les côtés en des segments proportionnels. Il reste à établir le dernier rapport, c'est à dire que DE/ BC = AE/AC.
b. Pour cela, vous allez devoir faire la recherche d'une méthode et d'outils qui seraient utiles pour démontrer cette égalité. Cela pourra consister, par exemple, à compléter le dessin que vous aurez produit afin de faire apparaître une autre figure classique ou familière dans laquelle nous pourrions appliquer un résultat ou un théorème.

c. La droite parallèle à la droite (AB) passant par E coupe le segment [BC] en le point F. Démontrer alors l'égalité proposée en utilisant, dans une figure bien choisie, l'une des égalités de rapports que nous avons trouvées et une propriété du parallélogramme.

d. Vous allez devoir maintenant rédiger le théorème en question à l'aide de phrases en français. (On a : AE/AC = BF/BC. Or, puisque BDEF est un parallélogramme, DE = BF. Ainsi, nous avons : AE/AC = DE/BC)

ANNEXE I 3, c

Exercice d'application 1

a. Le but de cet exercice est de mesurer la hauteur de n'importe quel plafond. Nous vous proposons de mesurer celle du plafond de la salle de cours. Pour cela, à l'aide de la règle du tableau, vous allez viser, par deux fois, c'est à dire à deux endroits différents, un point fixé M à l'angle du plafond et du plan du tableau matérialisé par une pastille. Ces deux visées étant réalisées, à chaque fois, vous tracerez la droite de visée en question de façon à atteindre les deux côtés parallèles et "horizontaux" du tableau.
b. On supposera le tableau parfaitement parallèle à la droite considérée du plafond. Quelles longueurs peut-on mesurer directement sur le tableau ? Trois seront nécessaires pour calculer la hauteur cherchée, lesquelles ?
c. Nous schématisons la situation sur le dessin suivant. *(A communiquer sur une partie du tableau)*Appliquer une première fois le théorème de Thalès dans le triangle ABC. Puis une seconde fois dans le triangle ACD. Il serait envisageable de demander tous les rapports possibles dans les trois figures pour lesquelles le théorème de Thalès est applicable et de faire le tri après.
Trouver les deux rapports égaux qui permettront de calculer la longueur demandée. Puis effectuer les calculs. *(Si les élèves ne parviennent pas à trouver ces deux rapports, nous en proposerons plusieurs et nous leur demanderons de déterminer ceux qui conviennent, en justifiant leur égalité.)*

Exercice d'application 2

Le but de l'exercice est de trouver une approximation du rapport de deux segments incommensurables ou de trouver un encadrement de ce rapport.

On reporte les deux segments sur une même droite, l'un dans le prolongement de l'autre. On obtient donc trois points.
A partir de deux premiers, on trace deux droites parallèles. A partir du troisième, on trace un droite qui coupe les deux parallèles et de façon à ce que le segment qui se trouve en ces deux parallèles mesure exactement 10 cm ou 100 mm suivant la précision que l'on désire. Le rapport des deux longueurs initiales est donné par la mesure au centimètre près ou au millimètre près du quatrième segment déterminé par les deux parallèles.

Le deuxième cas serait de prendre les 10 cm sur la parallèle extérieure et de tracer la sécante aux deux parallèles en dernier.

Recherche sur l'éclipse de soleil

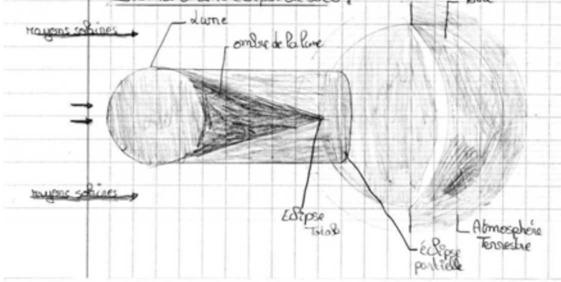
Annexe I 4 a

Eclipses de soleil

Vous avez tous sûrement entendus parler ou vous avez éventuellement été témoins de l'éclipse de soleil du 11 août 1999.
En vous rendant au C.D.I, ou en consultant une encyclopédie chez vous, dans une bibliothèque ou bien en surfant sur internet, renseignez-vous sur le phénomène général des éclipses de soleil.
Vous formerez des groupes de cinq ou six élèves, et chacun de ces groupes nous rapportera les informations nécessaires à la compréhension de ce phénomène (pour lundi 23 septembre à 16h00).

En particulier, vous devrez trouver les diamètres respectifs du soleil, de la lune, de la terre et les distances terre - lune et terre - soleil.
Dans un second temps, vous tenterez de trouver un "paradoxe" apparent dans cette situation d'éclipse de soleil.

Définition : Disparition momentanée d'un astre lorsqu'un autre astre s'interpose sur le trajet des rayons lumineux qui l'éclairent. Eclipse de soleil : se dit lorsque la lune passe entre la terre et le soleil, intercepte les rayons lumineux de celui-ci
Eclipse de lune : se dit lorsque la terre porte ombre sur la lune
Shéma d'une éclipse de soleil :



Shéma :

a) RL → 0,85 cm
RT → $\frac{6,37 \times 0025}{1,738} \simeq 0,09$
RS → 9,8 cm
TS → 2157 cm
TL → 5,52 cm

b) T → L représentée, 0,4 cm
T → S " " 156 cm

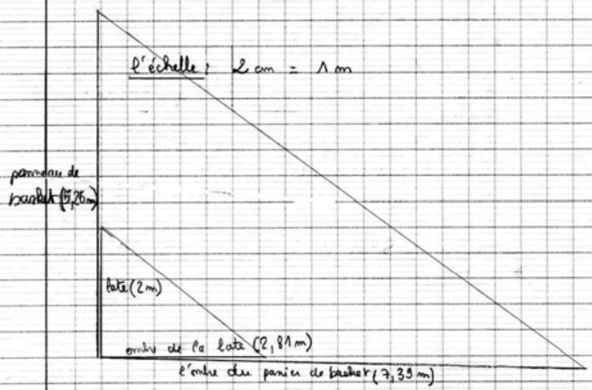
c) DL → 0,4 cm
DT → 0,740 cm
DS → 80,8 cm

On ne peut pas faire un shéma à l'échelle de la situation

Lundi 23 septembre 2002

Schéma à l'échelle.

Annexe I 4 b



0,04 cm X 2 m : 50

= 7,39 : 50 = 0,1478 m = 14,78 cm

= 2,81 : 50 = 0,0562 m = 5,62 cm

= 5,26 m : 50 = 0,1052 m = 10,52 cm

$$\frac{2\ m \times 7{,}39\ m}{2{,}81\ m} = 5{,}26\ m.$$

désavantages :

- Soleil bouge
- Mesures approximatives
- l'ombre peut être encombrée

~~Le soleil~~ est caché par la lune

les diamètres ~~apparent~~ s sont égaux

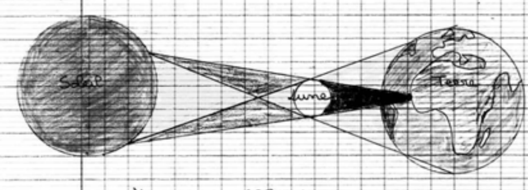
"paradoxe".

Eclipse de Soleil !

- Le Soleil éclaire la Terre. Une éclipse de Soleil se produit lorsque celui-ci est masqué pendant un certain temps parce que la Lune fait écran.
- Pour qu'une éclipse de soleil puisse être observée, il faut que la Lune passe entre le Soleil et la Terre à la nouv lune ; cela ne peut se produire que lors de la phase de la nouvelle lune.

Cependant, on n'observe pas une éclipse à chaque nouvelle lune. Il faut également que la lune ne soit ni au-dessus, ni au-dessous, lorsqu'elle passe entre la Terre et le Soleil.

Position du Soleil, de la Lune et de la Terre lors d'une éclip totale de soleil



Diamètre Terre : 6370 km

Diamètre Lune : 3476 km

Diamètre Soleil : 1 392 400 km

Distance Terre - Lune : 380 400 km

Distance Terre - Soleil : 141 à 152,1 millions de km.

Lundi 26 Septembre 2002

Annexe I 4 c

Eclipses de soleil

Vous avez tous sûrement entendus parler ou vous avez éventuellement été témoins de l'éclipse de soleil du 11 août 1999.
En vous rendant au C.D.I, ou en consultant une encyclopédie chez vous, dans une bibliothèque ou bien en surfant sur internet, renseignez-vous sur le phénomène général des éclipses de soleil.
Vous formerez des groupes de cinq ou six élèves, et chacun de ces groupes nous rapportera les informations nécessaires à la compréhension de ce phénomène (pour lundi 23 septembre à 16h00).

En particulier, vous devrez trouver les diamètres respectifs du soleil, de la lune, de la terre et les distances terre - lune et terre - soleil.
Dans un second temps, vous tenterez de trouver un "paradoxe" apparent dans cette situation d'éclipse de soleil.

La définition la plus simple de l'éclipse de soleil est l'occultation de ce dernier par la Lune. Ce phénomène n'est visible que depuis une région très limité à la surface.

Eclipses de Soleil

Pour qu'une éclipse de Soleil puisse être observée, il faut que la Lune passe entre le Soleil et la Terre à la nouvelle Lune, cela ne peut se Produire que lors de la phase de la nouvelle Lune.
Cependant, on observe pas une éclipse à chaque nouvelle lune. Il faut également que la Lune ne soit ni au-dessus, ni au-dessous, lorsqu'elle passe entre la Terre et le Soleil.

Les diamètres et les distances

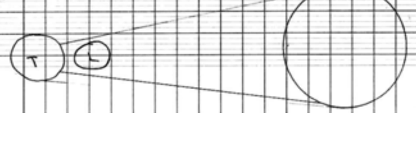
- Le rayon de la Terre est de 6378 km et son diamètre est de 12 756 km
- Le rayon du soleil est de 696 000 km et son diamètre est de 1392 000 km
- Le rayon de la Lune est de 1738 km et son diamètre est de 3476 km

- La distance entre la Terre et le Soleil est de 149 597 800 km.
- La distance entre la Terre et la Lune est de 364 000 à 405 500 km.
- La distance entre la Lune et le Soleil est de 149 820 000 km

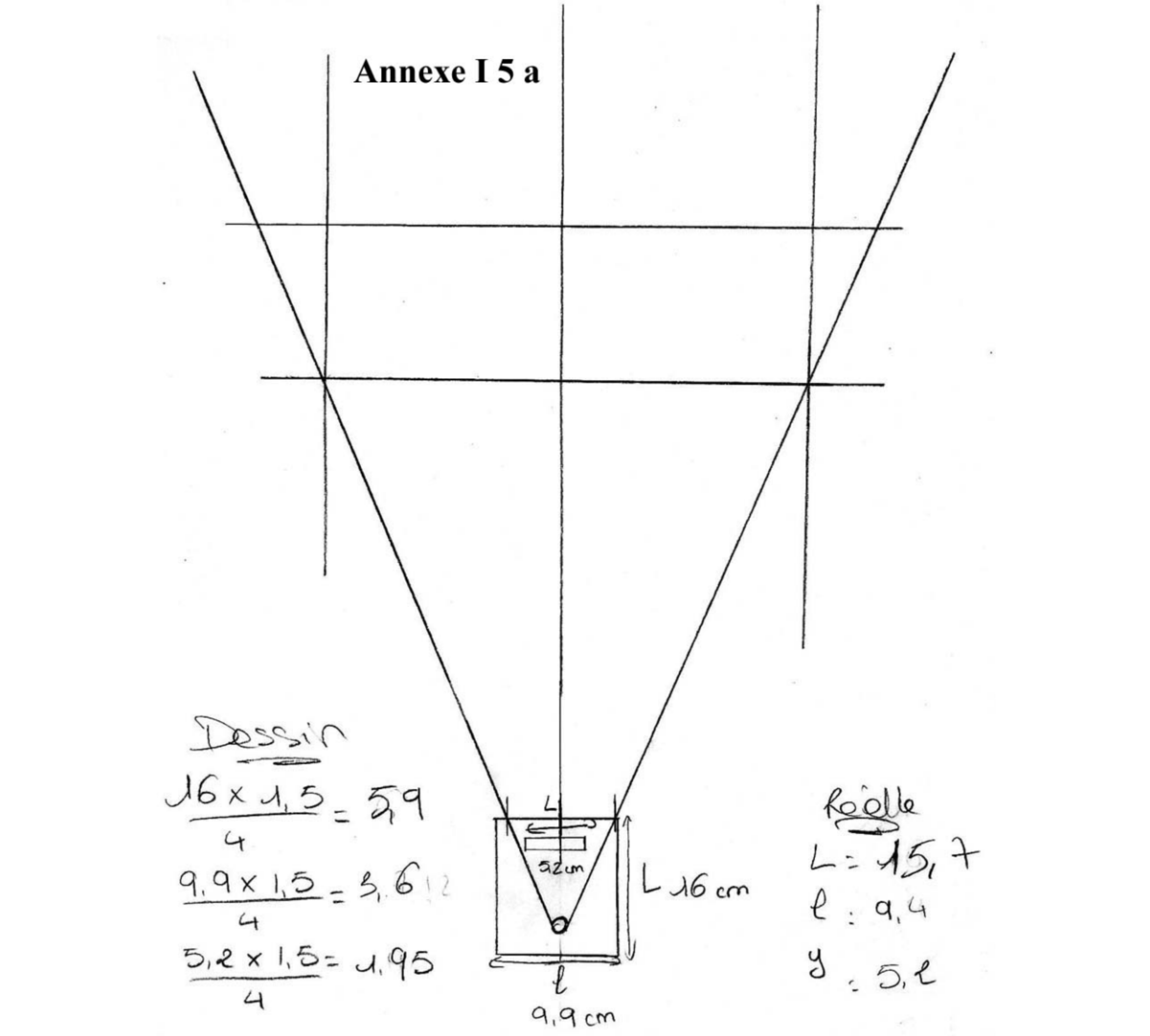
Schéma :

1- RL → 0,085 cm
RT → 6,37 x 0,085 ÷ 1,738 = 0,05
RS → 3,8
TS → 2,57
TL → 5,57
2- T ↔ L représentée par 0,4 cm
3- DL → 0,4 cm
DT → 0,740 cm
DS → 80,8 cm

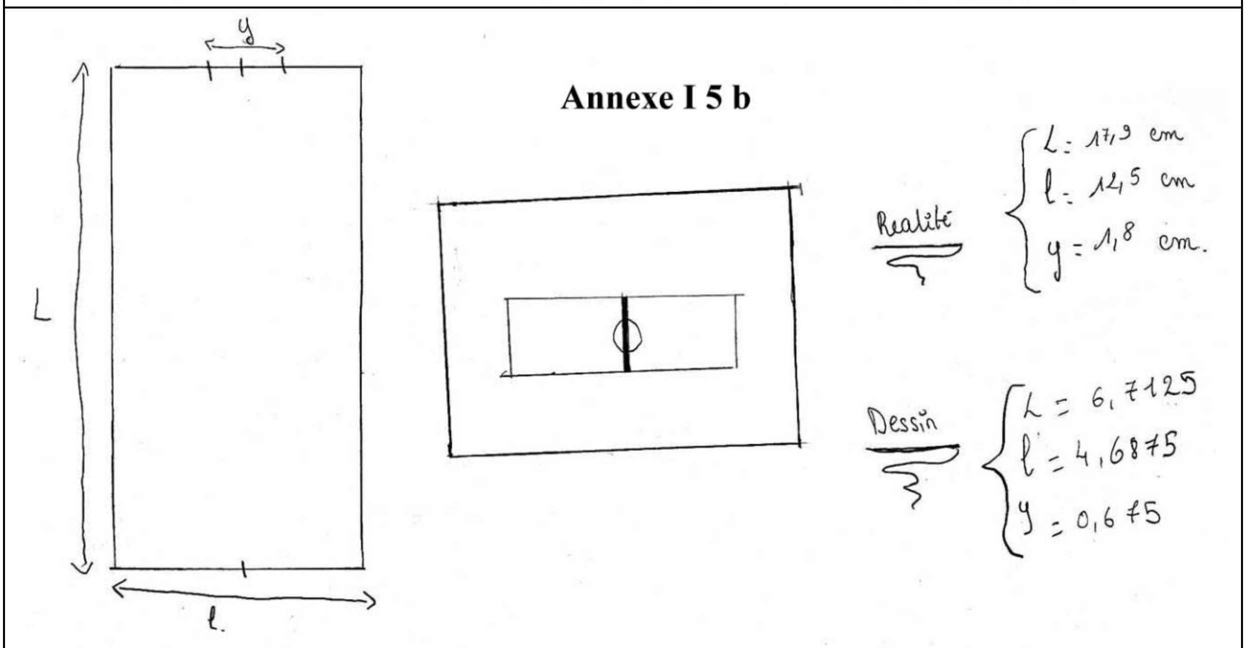
On ne peut pas faire un schéma à l'échelle de la situation

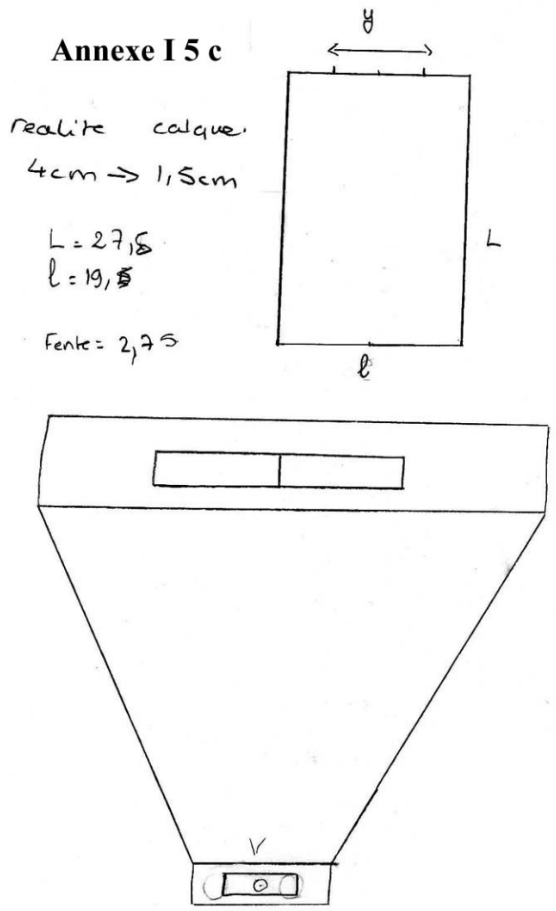


Annexe I 5 a

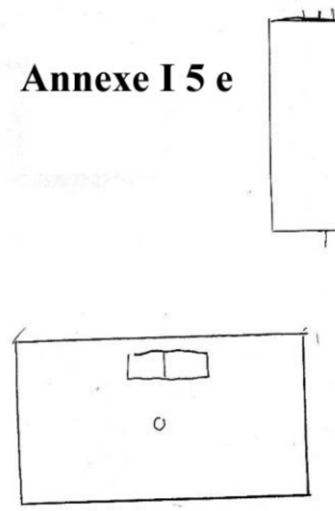


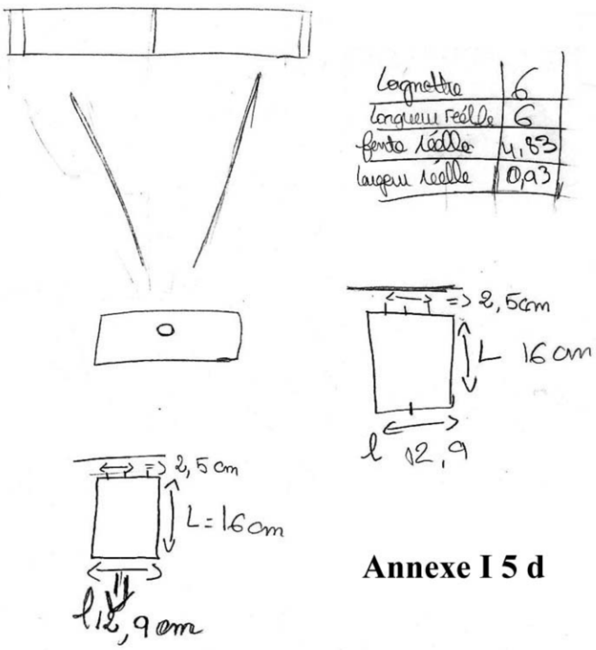
Annexe I 5 b



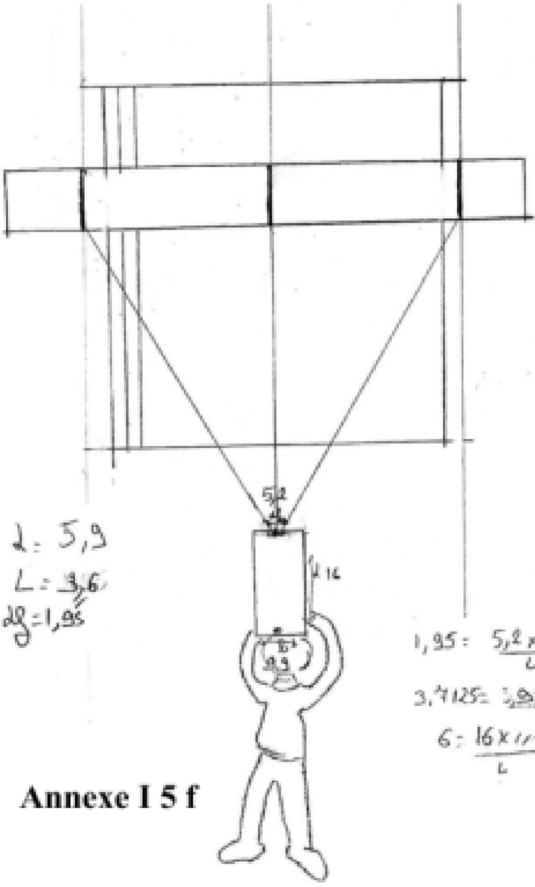


Annexe I 5 c


Annexe I 5 e

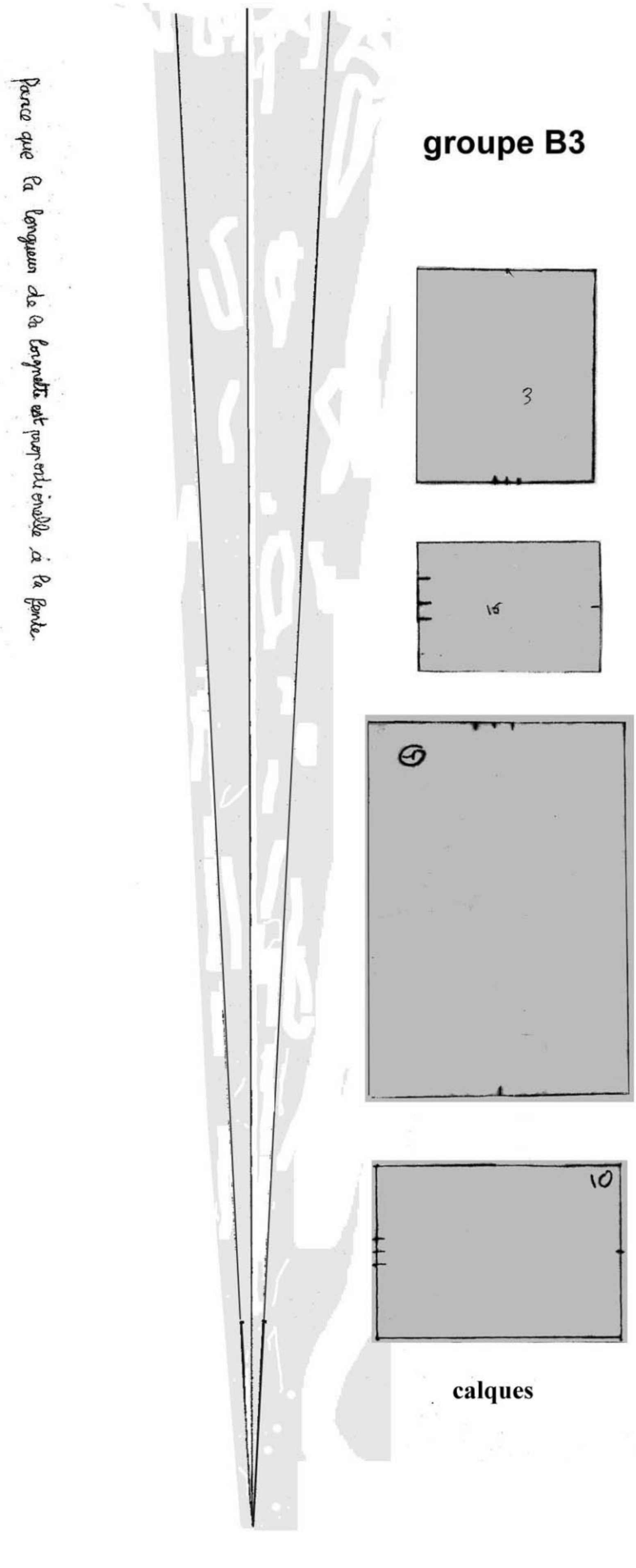


Annexe I 5 d



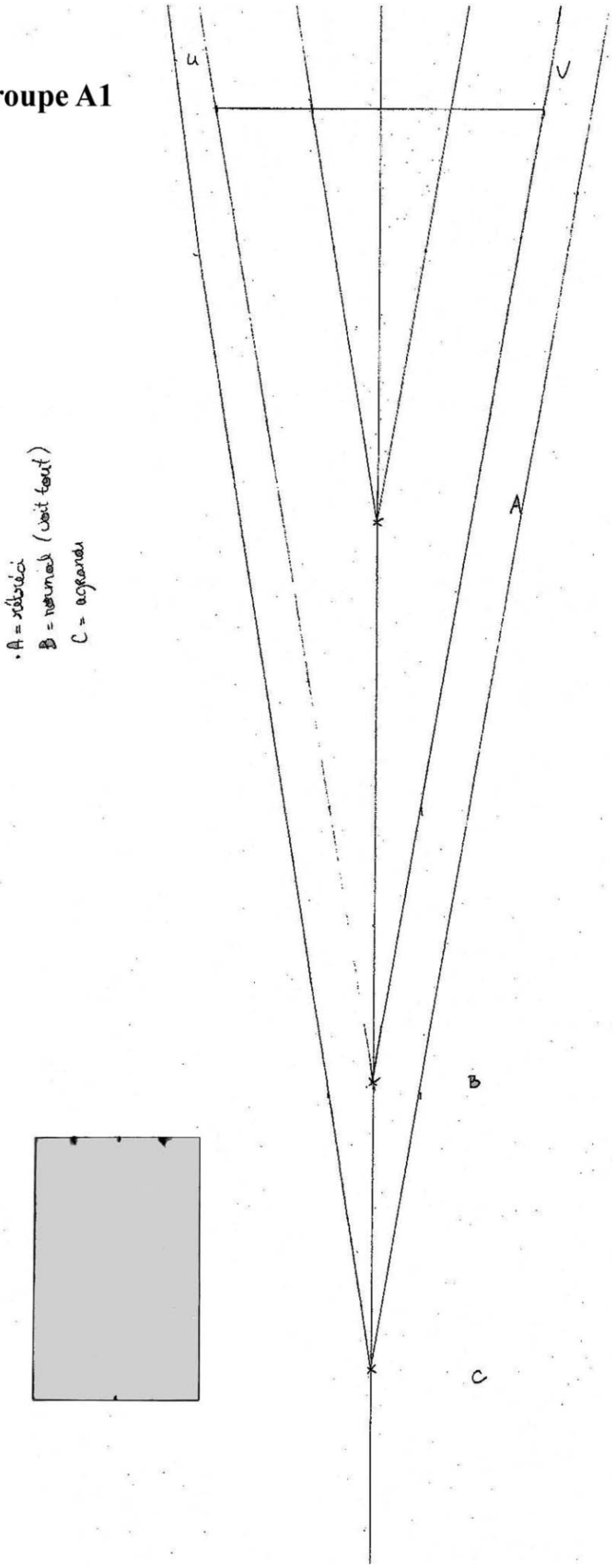
Annexe I 5 f

groupe B3



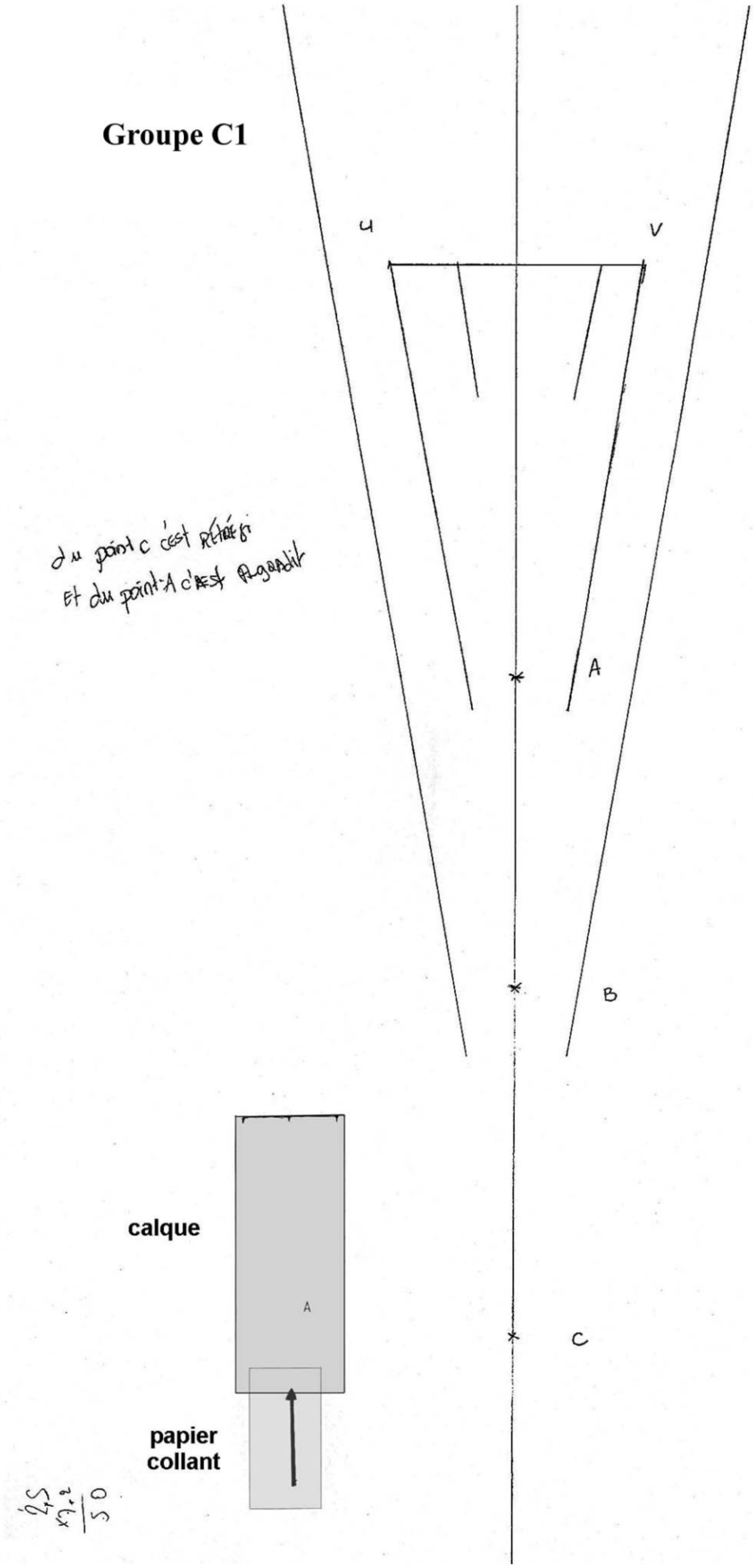
calques

Groupe A1

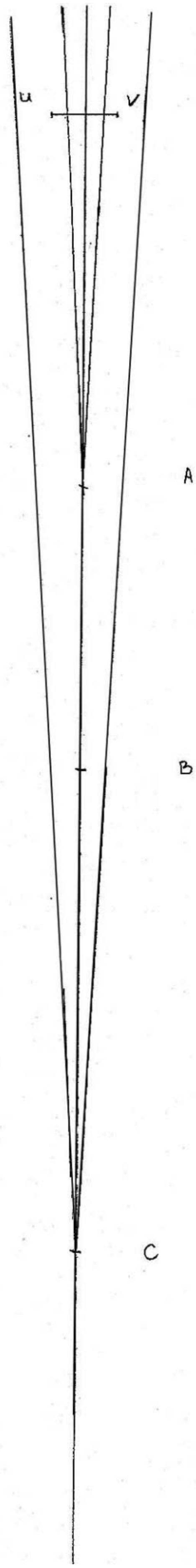


calque

Groupe C1


u
v
du point c c'est rétrécit
Et du point A c'est agrandit
A
B
calque
A
C
papier
collant
2,5
×2
5,0

Groupe C2



B = normal.

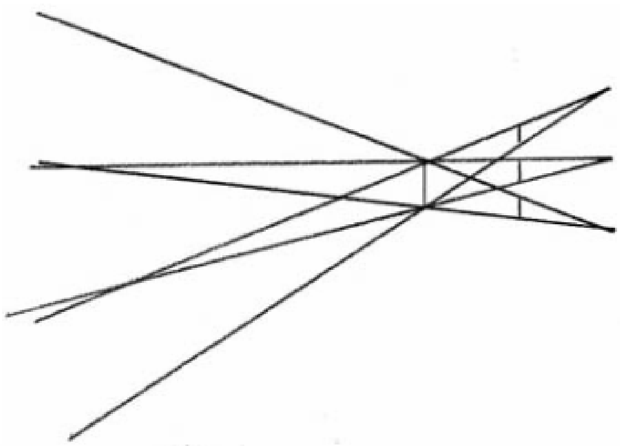
A = rapprochement du segment.
vue rétrécie

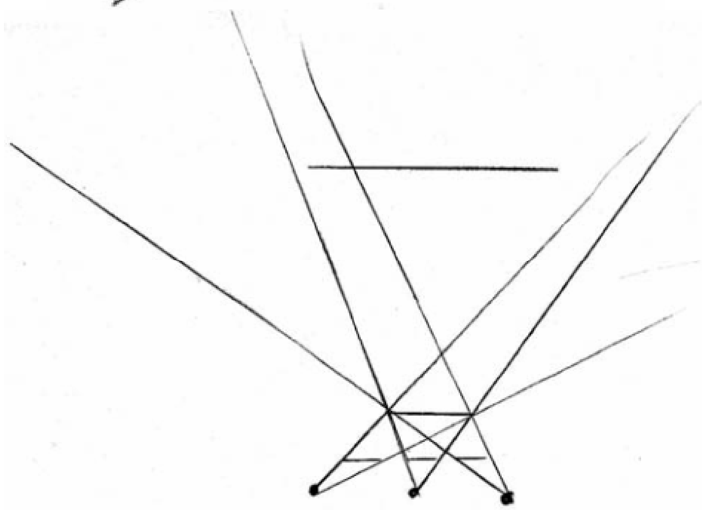
C = éloignement du segment
vue agrandie.

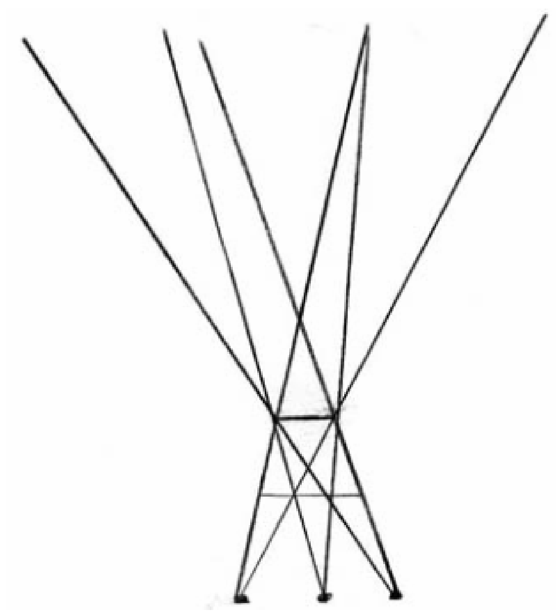
calque égaré

Annexe I 8

Champs de visée obtenus avec la lorgnette à plusieurs trous par trois groupes d'élèves.







ANNEXE II : Ingénierie niveau troisième

ANNEXE II 1

Activité I , séquence 1.a.

Vous allez devoir répondre aux questions suivantes :

a. Peut-on toujours trouver la mesure exacte de tous les segments à l'aide d'un double décimètre ou bien en changeant d'unité de mesure ? Si la réponse est négative donner un contre exemple.

b. Deux segments peuvent-ils toujours être mesurés en même temps à l'aide de la même unité ?

c. Vous allez lire ce qui va suivre pour ensuite imaginer et dire ce qu'il risque de se passer si on réitère le procédé. Nous partons avec deux segments de taille différente A et B. Au plus grand A, on enlève autant de fois que l'on peut le petit B. Il resta ensuite un morceau C du grand segment A plus petit que le segment B sinon nous pourrions enlever B de A une fois de plus. Ensuite, on enlève autant de C que l'on peut du segment B. Il restera encore un petit morceau que l'on va appeler D plus petit que C. On retirera encore de C autant de segments entiers D que l'on pourra. Il restera un reliquat plus petit que D. Et ainsi de suite...Pour mieux comprendre, vous pouvez travailler en groupe et vous aider d'un schéma. Lorsque un groupe pensera avoir compris le mécanisme, un de ses membres viendra l'expliquer au reste de la classe. Ensuite il faudra répondre à la question suivante :
Que peut-il arriver?

Activité I , séquence 1.b.

a. ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. La longueur de son hypoténuse est a et celle
des deux autres côtés b. Nous traçons ensuite le hauteur issue de A ; elle coupera le segment [BC] en D. Nous reportons alors la longueur AC sur le segment [BC] à partir du point C ; nous obtenons le point E.
Pourquoi a-t-on $a/2 < b < a$? Où va tomber le point E ? Combien de fois exactement, a contient b ?
b. On note $a - b = c$. On trace alors la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par E. Elle coupe la droite (AB) en F. Expliquer pourquoi nous avons : $AE = EF = EB < FB$? Et pourquoi nous en déduisons que $c < b/2$? En déduire le nombre de c qui est contenu exactement dans AB. On notera $b - 2c = d$.

c. Nous placerons ensuite le point H tel que $FH = FE$. On aura encore $BH < c/2$.

d. Pour passer de c à d, on opère exactement de la même façon que nous avons opéré pour passer de b à c, puisqu'on fait des constructions analogues. On poursuivra ainsi les constructions indéfiniment. Que se passera-t-il alors ?

e. Revenez aux questions de l'activité I séquence 1.a, et tentez d'y répondre à nouveau. A la différence de ce qui se passe pour les nombres entiers, comme nous le verrons au chapitre suivant, pour certains nombres que l'on appelle les nombres réels, le procédé peut ne pas s'arrêter. Nous allons tenter de comprendre pourquoi.

ANNEXE II 2

Activité II, séquence 1a

Une parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels.

1. a. Avez-vous démontré ce résultat l'an dernier ?
   b. A quel autre théorème vous fait-il penser ?
2. Tout d'abord, nous allons démontrer ce résultat dans le cas ou les mesures des côtés coupés par la parallèle sont fractionnaires.
3.Réfléchissez maintenant à la question suivante : tous les segments ont-ils une mesure rationnelle ? Comment être sûr alors que le résultat précédent est valable dans tous les cas de figure ?

Activité II, séquence 1b

1.a. Tracer un triangle ABC. Un point D appartient au segment [AB]. On trace alors la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point D ; cette droite coupe le segment (AC) en E. Nous supposerons que les deux segments [AD]et [BD] ne peuvent pas être mesurés avec la même unité de longueur sinon, nous retrouverions le cas précédent.
1.b. Nous partageons le segment [BD] en n parties égales et nous reportons alors sur le segment [AD] autant de fois que nous le pouvons cette n ième partie de mesure λ. Compléter les inégalités et l'égalité suivantes :
$< AD <$ et $BD =$
Soit encore : $< AD/BD <$ ou $< AD/BD <$
2.a. Tracer alors des parallèles à partir des points de division de [AB].
2.b. D'après ce que nous avons vu précédemment, compléter les inégalité suivantes :
$< EA/EC <$ et $< - EA/EC <$
2.c Que peut-on en déduire pour DA/DB - EA.EC et ainsi pour DA/DB et AE/AC ?
3. Nous avons par conséquent démontré le théorème précédent pour un cas. Donner les autres égalités qui traduisent complètement ce théorème.

ANNEXE II 3

Démonstration du troisième rapport

Activité II séquence 2

Nous allons compléter maintenant le théorème précédent par une propriété qui en sera une conséquence.
a. En conservant une même figure que précédemment, tracer la droite parallèle à la droite (AB) et passant par le point E.
b. Démontrer alors, en vous plaçant dans deux figures différentes, que : $AD/AB = AE/AC$ et $AE/AC = BF/BC$.
c. En déduire que nous avons alors : $AD/ AB = AE/AC = DE/BC$.

ANNEXE II 4, a

Programmes de physique **C. lumière et images.**

.

Exemples d'activités	Contenus – notions	Compétences
- Comment obtient-on une image à l'aide d'une lentille? - Manipuler des lentilles convergentes et divergentes - Réception d'une image sur des écrans diffusants. - Détermination des foyers. - Emploi d'un logiciel montrant le trajet des faisceaux lumineux	Principe de formation des images En optique géométrique Concentration de l'énergie. Exemple de la lentille mince convergente. Distance focale.	Distinguer une lentille convergente d'une lentille divergente Etre capable de positionner une lentille par rapport à un objet pour obtenir une image nette sur un écran. Etre capable de trouver le foyer d'une lentille convergente et d'estimer sa distance focale

ANNEXE II 4, b

Séance lentilles

Activité III

Introduction et mise au point :

Il est physiquement impossible d'isoler un rayon lumineux, de ce fait celui-ci est une fiction. Nous admettrons qu'un faisceaux lumineux est composé de rayons lumineux, rectilignes dans une portion homogène et transparente de l'espace.

La propriété fondamentale qui sera supposée être vérifiée est que le trajet suivi par la lumière est indépendant de son sens de propagation. C'est le **principe du retour inverse** dans les milieux dits isotropes.

On appelle **lentille** tout milieu transparent limité par deux surfaces dont l'une, au moins, n'est pas plane.

Un dispositif classique de lentille est à votre disposition. Il s'agit d'une rampe optique. Vous devrez mesurer l'*objet*, son *image* ainsi que le distance OA *objet lentille*, et OA' *lentille image*.

Que remarquez-vous ?

Lentilles convergentes

Tout rayon passant par le centre optique O (intersection de l'axe principal et du plan de la lentille) n'est pas dévié.

Tout rayon lumineux parallèle à l'axe principal de la lentille émerge en un rayon convergent en un point F' appelé **foyer principal image**.

Un rayon émergeant est parallèle à l'axe optique si le support du rayon incident passe par le **foyer principal objet** F. $\overline{OF} = \overline{OF'}$ est appelé **distance focale f**.

Les groupes devront schématiser la situation précédente, en rapport avec le centre optique, ainsi que celles liées aux deux foyers.

Vous allez pouvoir faire apparaître une nouvelle figure dite de Thalès.

ANNEXE II 5

Démonstration complète du théorème (papillon)

Activité IV

a. ABC est un triangle avec D et E deux points situés respectivement sur les prolongements des côtés [AB] et [AC] du même côté de A de telle sorte que les droites (ED) et (BC) soient parallèles. Soit D' le symétrique du point D par rapport au point A et E' le symétrique du point E par rapport à A. Que peut-on dire des droites (ED) et (E'D') des segments [AD], [AD'] et [EA] et[AE'] ?

b. En déduire une nouvelle égalité de rapports.

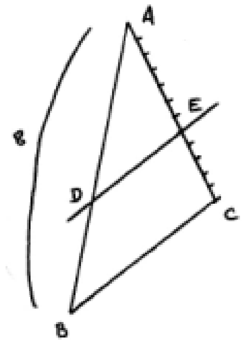
c. Pour parvenir à un énoncé complet concernant cette nouvelle figure, vous compléterez le dessin d'une façon judicieuse afin de faire apparaître un figure dans laquelle nous pourrons appliquer le théorème de Thalès déjà connu. Tracer la parallèle à la droite (AB), passant par le point E ; cette droite coupe la droite (BC) en F.

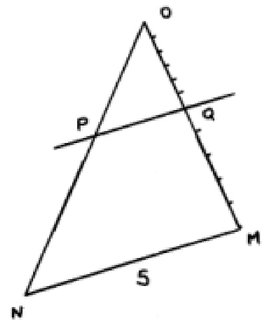
Appliquer le théorème dans deux figures différentes pour démontrer que AD/AB = AE/AC et que AE/AC = BF/BC. En déduire que AD/AB = AE/AC = DE/BC.

ANNEXE II 6

Activité V , séquence 1.a.

a. Sur les dessins ci-dessous, peut on calculer les longueurs AD et PQ sachant que les droites (DE) et (BC) d'une part et les droites (PQ) et (MN) d'autre part, sont supposées parallèles? Dans chaque cas, si la réponse est négative, expliquer pourquoi.


A
E
D
C
B


O
P
Q
M
5
N

b. Voici quatre segments que vous ne devez pas mesurer à l'aide d'un instrument.

Peut-on classer leurs grandeurs par ordre décroissant ? Peut-on classer leurs mesures par ordre décroissant ? Argumentez votre réponse.

c. Peut-on savoir si AB/CD = EF/GH ? Expliquez votre réponse.

<u>**Activité V , séquence 1.b.**</u>

a. Voici différents segments et leurs longueurs. Peut-on classer directement ces longueurs dans l'ordre décroissant ? AB= 5 cm ; CD = 8 dm ; EF = 11miles ; GH = 28 yards. Sinon, que doit-on faire ?

b. Pour comparer différentes longueurs, il est effectivement nécessaire que ces longueurs soient exprimées à l'aide de la même unité. C'est justement cela, c'est cette motivation qui a permis d'unifier le système des mesures à la fin XVIII ème siècle.

c. Mais par contre, est-il vraiment nécessaire d'exprimer, par exemple des longueurs, avec la même unité pour comparer des rapports de mesures ? u et v étant des unités de référence, si AB= 8u, CD = 5u, EF = 16v, GH = 10v, peut-on écrire que l'on a : AB/CD = EF/GH = 8/5 ? Expliquer.

ANNEXE II 7

Conjecture et démonstration de la réciproque

<u>**Activité VI**</u>

<u>**Phase de conjecture et phase heuristique :**</u>

a. Vous êtes en présence d'un montage simple. Le but sera de trouver les conditions minimales pour que deux morceaux de ficelles tendus et accrochés à des endroits différents du mécanisme soient parallèles. Un morceau est déjà attaché, le second ne l'étant qu'à moitié. Vous devrez trouver le point d'attache de cette seconde ficelle afin de rendre les deux parallèles. Faites plusieurs expériences et après discussion, un rapporteur de chaque groupe viendra conclure pour ses camarades.

b. Une discussion collégiale prendra alors place. L'objectif sera de parvenir à un énoncé avec lequel tout le monde sera d'accord.

<u>Phase de construction d'un graphe propositionnel :</u>

ABC est un triangle quelconque. E et F sont des points respectivement des segments [AB] et [AC] tels que nous ayons : AE/AB = AF/AC. Vous allez devoir reconstituer le graphe déductif de la démonstration du théorème que vous avez conjecturé.

Pour cela, nous supposons que les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles. Nous traçons alors la droite (BC') parallèle à la droite (EF) passant par le point B.

<u>E.T</u> Le théorème de Thalès   <u>E.T</u> Transitivité de l'égalité : a = b et b = c donne a = c.   AF/AC = AF/AC'

<u>E.T</u> a/b = a/d donne alors b = d   AC = AC'   Les droites (BC') et (EF) sont parallèles

AE/AB = AF/AC   <u>E.T</u> AB = AD et B et D sont du même côté du point A, B et D sont confondus.   C et C' sont confondus

Conclusion

<u>**Phase de rédaction d'un texte en français :**</u>

Vous devez maintenant rédiger un texte en français qui décrive ce que vous venez de démontrer et la façon dont vous y êtes parvenus. Cela constituera le corps du théorème réciproque des droites parallèles dans un triangle.

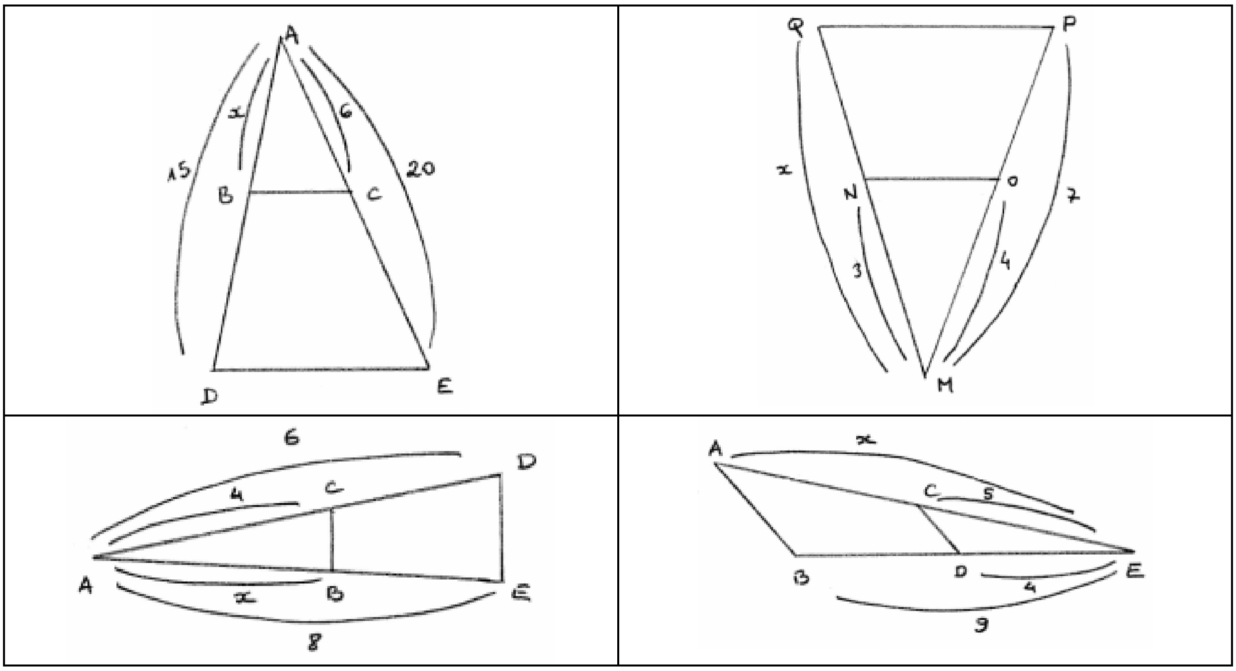
ANNEXE III : tests de comparaison quatrième et troisième

Test n°1

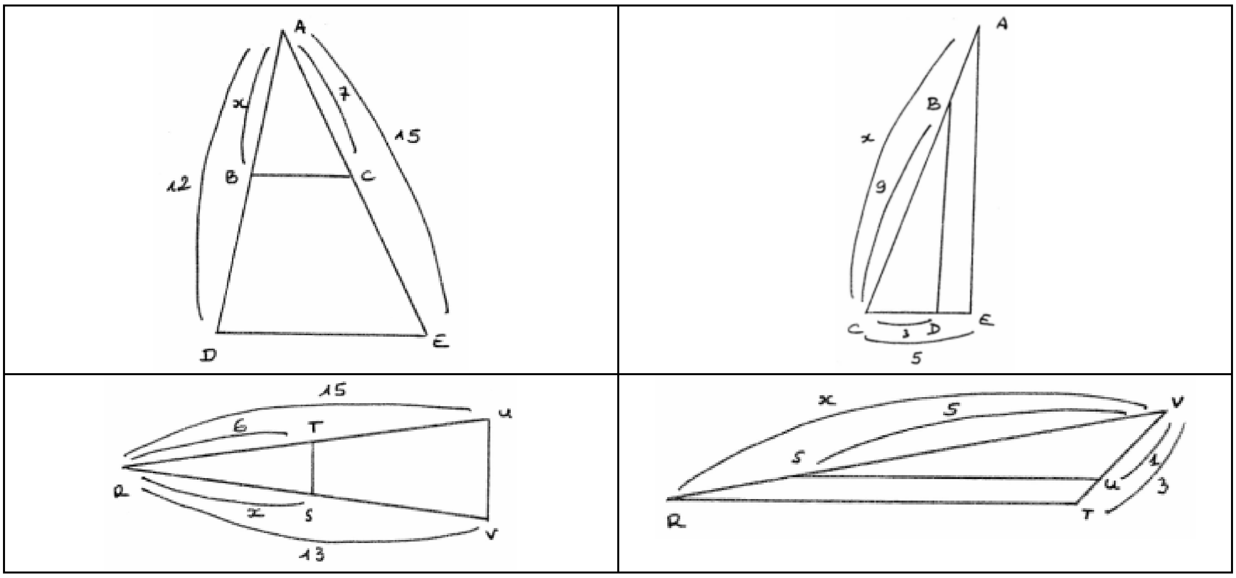
Quatrième et troisième

Dans les figures ci-après, vous calculerez les longueurs x cherchées, sachant que les conditions d'application du théorème de Thalès sont requises. Vous écrirez les égalités de rapports, vous mettrez le problème en équation, puis vous résoudrez cette équation.

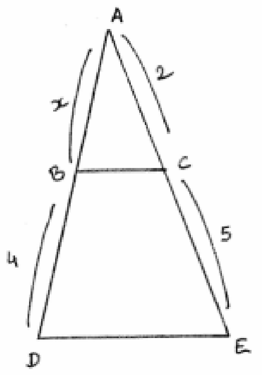
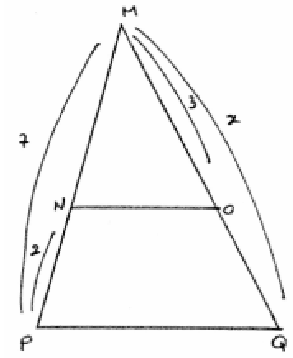
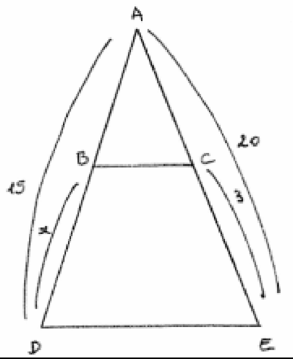
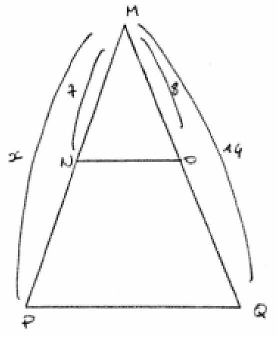
Première feuille (Quatrième et Troisième)



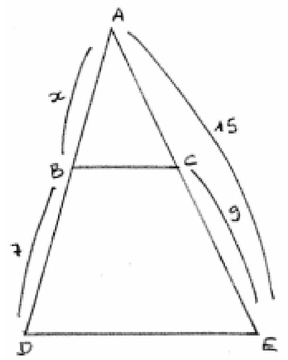
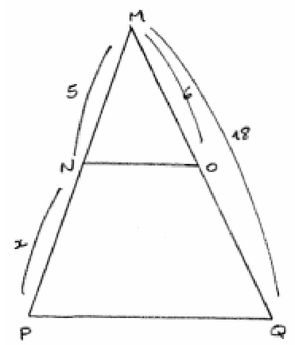
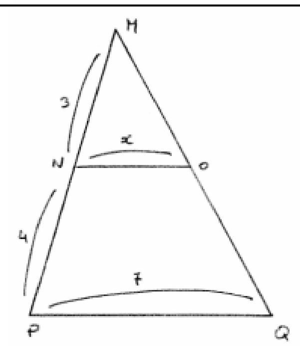
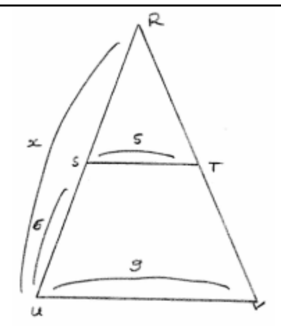
Deuxième feuille (Quatrième et Troisième)



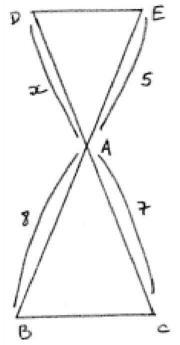
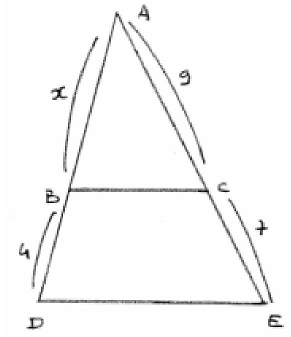
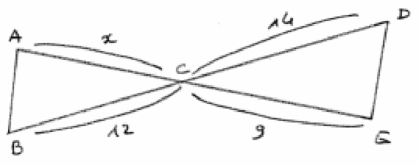
Troisième feuille (Quatrième et Troisième)

Quatrième feuille (Quatrième et Troisième)

Cinquième feuille (Troisième uniquement)

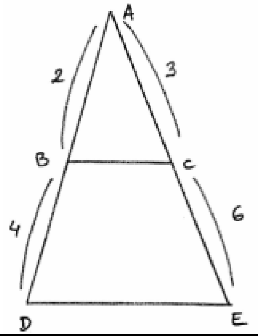
ANNEXE IV : tests de comparaison troisième

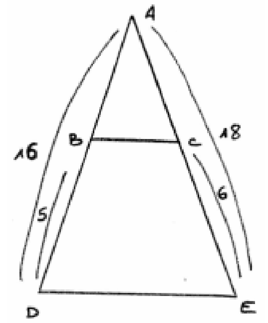
Test n°2

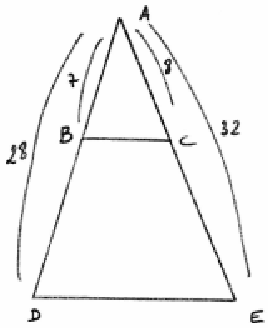
Troisième

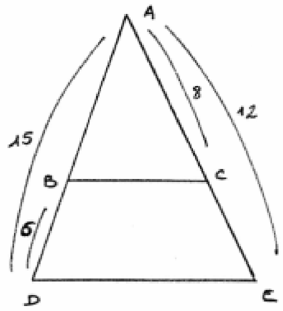
Pour chaque figure suivante, vous justifierez le fait que les droites (BC) et (DE) sont ou ne sont pas parallèles.

Première feuille









Deuxième feuille