



# Statistique des zéros non-triviaux de fonctions L de formes modulaires

Damien Bernard

## ► To cite this version:

Damien Bernard. Statistique des zéros non-triviaux de fonctions L de formes modulaires. Mathématiques générales [math.GM]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2013. Français. <NNT : 2013CLF22408>. <tel-00922713v2>

**HAL Id: tel-00922713**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00922713v2>**

Submitted on 11 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. 2408

**UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL**  
École Doctorale Sciences Fondamentales

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL  
spécialité MATHÉMATIQUES

Par **Damien BERNARD**

**STATISTIQUES DES ZÉROS  
NON-TRIVIAUX DE FONCTIONS  $L$  DE  
FORMES MODULAIRES**

Soutenue publiquement le 09 Décembre 2013 devant le jury composé de :

Frédéric BAYART		Université Blaise Pascal
Christophe DELAUNAY	Président du jury	Université de Franche-Comté
Guillaume RICOTTA	Directeur de thèse	Université Bordeaux 1
Emmanuel ROYER	Directeur de thèse	Université Blaise Pascal
Jie WU		Université de Lorraine

Rapporteurs :

Yuk-Kam LAU	Hong-Kong University
Jie WU	Université de Lorraine



**Résumé** Cette thèse se propose d'obtenir des résultats statistiques sur les zéros non-triviaux de fonctions  $L$ . Dans le cas des fonctions  $L$  de formes modulaires, on prouve qu'une proportion positive explicite de zéros non-triviaux se situe sur la droite critique. Afin d'arriver à ce résultat, il nous faut préalablement étendre un théorème sur les problèmes de convolution avec décalage additif en moyenne de manière à déterminer le comportement asymptotique du second moment intégral ramolli d'une fonction  $L$  de forme modulaire au voisinage de la droite critique. Une autre partie de cette thèse, indépendante de la précédente, est consacrée à l'étude du plus petit zéro non-trivial d'une famille de fonctions  $L$ . Ces résultats sont en particulier appliqués aux fonctions  $L$  de puissance symétrique.

**Mots clés** Fonction  $L$ , forme modulaire, zéros non-triviaux, proportion, Levinson, problème de convolution, décalage additif, moments intégraux, second moment ramolli, théorème de densité, plus petit zéro, équation différentielle avec retards.

### Statistics on non-trivial zeros of modular $L$ -functions

**Abstract** The purpose of this dissertation is to get some statistical results related to non-trivial zeros of  $L$ -functions. In the modular case, we prove and determine an explicit positive proportion of non-trivial zeros lying on the critical line. In order to obtain this result, we need to extend a theorem on shifted convolution sums on average to be able to determine the asymptotic behaviour of the mollified second integral moment of a modular  $L$ -function close to the critical line. Independently of these results, we study the smallest non-trivial zero in a family of  $L$ -functions. These results are applied to symmetric power  $L$ -functions.

**Key words**  $L$ -function, modular form, non-trivial zeros, proportion, Levinson, shifted convolution sums, integral moments, mollified second moment, density theorem, smallest zero, differential equation with temporal shifts.

#### Laboratoire où la thèse a été préparée

Université Blaise Pascal  
Laboratoire de Mathématiques - UMR 6620  
Campus des Cézeaux  
BP 80026  
63171 Aubière cedex, France



C'est très sincèrement que je tiens à remercier tous ceux qui ont permis la réalisation de ce travail qui vient conclure ces trois dernières années.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Emmanuel Royer, qui m'a initié à la théorie analytique des nombres et qui a accepté d'encadrer cette thèse, et à Guillaume Ricotta, pour avoir accepté de co-encadrer ces recherches ainsi que pour l'accueil qu'il m'a réservé à chacune de mes visites à Bordeaux.

Je remercie vivement Christophe Delaunay qui me fait l'honneur de faire parti du jury et de le présider.

Je remercie Jie Wu pour avoir accepté de rapporté ce travail, pour ses remarques pertinentes et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie infiniment Yuk-Kam Lau pour son accueil à Hong-Kong en Mai 2013 et qui a bien voulu rapporter ce travail.

Je remercie également Frédéric Bayart pour sa disponibilité et le temps qu'il a bien voulu m'accorder.

Merci à Henri Dichi pour sa bonne humeur et avec qui j'ai eu le plaisir de partager mes services d'enseignement au cours de ces trois années.

C'est très sincèrement que je souhaite une bonne réussite à l'ensemble des doctorants du laboratoire de mathématiques de Clermont-Ferrand avec une pensée toute particulière pour Colin et Romuald avec qui j'ai eu la joie de parcourir ces trois années de thèse.

Un immense merci à Carole, mes parents et toute ma famille pour leur soutien sans cesse renouvelé.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>xi</b>
<b>Notations</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Fonctions <math>L</math></b>	<b>1</b>
1.1 Présentation générale . . . . .	1
1.1.1 Axiomatique . . . . .	1
1.1.2 Premiers exemples . . . . .	2
1.1.3 Répartition élémentaire des zéros . . . . .	3
1.2 Fonctions $L$ associées à une forme modulaire . . . . .	4
1.2.1 Formes modulaires . . . . .	4
1.2.2 Opérateurs de Hecke . . . . .	6
1.2.3 Fonctions $L$ de forme modulaire . . . . .	7
1.2.4 Fonctions $L$ de puissance symétrique . . . . .	9
1.2.5 Formes de Maaß . . . . .	9
1.2.6 Structure des fonctions $L$ . . . . .	12
1.3 Taille des fonctions $L$ . . . . .	13
1.3.1 Ordre de grandeur . . . . .	13
1.3.2 Région sans zéro . . . . .	15
1.4 Fonctions $L$ et matrices aléatoires . . . . .	16
1.4.1 Familles de fonctions $L$ et conjecture de densité . . . . .	16
1.4.2 Matrices aléatoires et théorèmes de densité . . . . .	19
1.4.3 Plus petit angle propre . . . . .	21
<b>2 Problème de convolution en moyenne</b>	<b>23</b>
2.1 Énoncé du problème et résultat . . . . .	23
2.2 Méthode du cercle . . . . .	24
2.2.1 Une approximation de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$ . . . . .	24
2.2.2 Contribution des arcs mineurs . . . . .	24
2.3 Arcs majeurs et partie diagonale . . . . .	27
2.3.1 Formule sommatoire . . . . .	27
2.3.2 Contribution des termes diagonaux . . . . .	29
2.4 Arcs majeurs et décomposition spectrale . . . . .	30



---

2.4.1	Initialisation . . . . .	30
2.4.2	Formule de trace . . . . .	35
2.4.3	Contribution du spectre discret . . . . .	37
2.4.4	Contribution du spectre continu . . . . .	46
2.4.5	Contribution des formes primitives . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Moments intégraux de fonctions <math>L</math> de formes modulaires</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Moment ramolli d'ordre 2 . . . . .	52
3.2.1	Équation fonctionnelle approchée . . . . .	54
3.2.2	Évaluation des termes non-diagonaux . . . . .	56
3.2.3	Évaluation des termes diagonaux . . . . .	62
3.3	Moment non ramolli d'ordre 2 . . . . .	73
3.3.1	Contribution diagonale . . . . .	73
3.3.2	Conjecture de Conrey, Farmer, Keating, Rubinstein et Snaith . . . . .	76
3.3.3	Lien avec la sous-convexité . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Proportion de zéros non-triviaux sur la droite critique</b>	<b>79</b>
4.1	État des lieux . . . . .	79
4.2	Proportion effective . . . . .	81
4.2.1	Moment et dérivées . . . . .	81
4.2.2	Évaluation numérique . . . . .	84
4.3	Moments et proportion . . . . .	85
4.4	Limites de la méthode . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Plus petit zéro d'une famille de fonctions <math>L</math></b>	<b>99</b>
5.1	Correspondance entre $Sp$ et $SO^-$ . . . . .	99
5.2	Proportion de fonctions $L$ ayant un petit premier zéro . . . . .	100
5.3	Taille du plus petit zéro d'une famille de fonctions $L$ . . . . .	105
5.3.1	Application du théorème de densité . . . . .	105
5.3.2	Arguments de densité et topologiques . . . . .	106
5.3.3	Analyse de Fourier . . . . .	110
5.3.4	Une équation de Volterra avec décalages temporels . . . . .	113
5.3.5	Fonction test optimale . . . . .	117
5.3.6	Valeur exacte du minimum . . . . .	129
<b>A</b>	<b>Fonctions et transformations de Bessel</b>	<b>137</b>
<b>B</b>	<b>Formulaire</b>	<b>141</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>





# Introduction

Le propos de ce travail réside dans l'obtention de résultats statistiques sur les zéros non-triviaux de fonctions  $L$  attachées à une forme modulaire primitive.

Le premier chapitre contient une présentation générale des fonctions  $L$  agrémentée d'exemples fondamentaux qui nous permettent d'introduire des notions et des résultats qui nous seront nécessaires par la suite. Ce chapitre ne se veut pas être une présentation exhaustive des fonctions  $L$  ni de leurs propriétés mais un intérêt tout particulier a été porté dans les choix faits afin que ces derniers trouvent échos dans les résultats obtenus et les méthodes utilisées dans les chapitres suivants.

Les chapitres 2, 3 et 4 contiennent les preuves de tous les résultats nécessaires afin d'exhiber une proportion positive de zéros non-triviaux de fonctions  $L$  de formes modulaires primitives se trouvant sur la droite critique. Ainsi, le deuxième chapitre établit une estimation en moyenne des problèmes de convolution avec décalage additif, généralisant un théorème de Blomer, et qui sera essentiel lors du chapitre 3.

Le troisième chapitre est consacré à l'estimation du second moment ramolli d'une fonction  $L$  de forme modulaire primitive le long de la droite critique et améliore sensiblement un résultat de Farmer en augmentant la longueur autorisée du ramollisseur. Ce chapitre est également l'occasion d'obtenir un développement asymptotique du moment intégral d'ordre 2 (non ramolli) au voisinage de la droite critique.

Utilisant l'expression du moment ramolli d'ordre 2 obtenue lors du chapitre précédent, le quatrième chapitre détermine une proportion explicite de zéros non-triviaux des fonctions  $L$  de formes modulaires primitives se trouvant sur la droite critique en appliquant le principe développé par Levinson dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann.

Le chapitre 5 est indépendant des précédents. Celui-ci est consacré à l'étude du plus petit zéro non trivial d'une fonction  $L$  générale en utilisant les théorèmes de densité relatifs à la distribution des petits zéros d'une famille de fonctions  $L$ . Ces résultats étendent ceux établis par Hughes et Rudnick pour les fonctions  $L$  de Dirichlet, et sont appliqués en particulier aux fonctions  $L$  de puissance symétrique.

Depuis les premiers résultats de Hardy affirmant l'existence d'une infinité de zéros non-triviaux de la fonction  $\zeta$  de Riemann se trouvant sur la droite critique, d'intenses recherches ont été effectuées afin de préciser ce résultat. Hardy et Littlewood, Selberg, Levinson et Conrey sont à l'origine des principales avancées dans cette direction, toujours dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann, et on sait aujourd'hui que plus de 41% de ses zéros non-triviaux sont situés sur la

droite critique. Il est naturel de s'intéresser à l'analogie de ces résultats pour d'autres fonctions  $L$ .

Considérant les fonctions  $L$  de formes modulaires primitives, on applique alors la méthode de Levinson basée sur une évaluation du moment ramolli d'ordre 2 le long de la droite critique en suivant la version simplifiée développée par Young. Au moyen d'une équation fonctionnelle approchée, on scinde ce second moment ramolli en une partie diagonale d'une part, et non-diagonale d'autre part. Dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann, la méthode de Young permet d'estimer la contribution non diagonale à l'aide de simples intégrations par parties et permet ainsi d'obtenir rapidement une proportion explicite de zéros sur la droite critique. Malheureusement, les fonctions  $L$  que l'on considère étant de degré 2, les propriétés arithmétiques de ces fonctions sont plus élaborées et la méthode de Young échoue dans cette situation. L'outil fondamental pour palier ce problème sera l'estimation en moyenne de problèmes de convolution avec décalage additif.

**Problème de convolution avec décalage additif en moyenne** De tels problèmes apparaissent lors de la recherche de bornes de sous-convexité et sont, à ce titre, l'objet de nombreuses recherches. L'énoncé suivant est une généralisation d'un théorème de Blomer paru dans [Blo05] dans lequel  $f$  désigne une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau  $N$  et de caractère  $\chi$  dont on note  $(\lambda_f(n))_{n \geq 1}$  la suite des coefficients de Fourier normalisés.

**Théorème A** *On considère une famille de fonctions  $g_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  dont le support vérifie  $\text{supp } g_h \subset [M_1, 2M_1] \times [M_2, 2M_2]$  et telle que, pour tous entiers positifs  $i$  et  $j$ , on ait la majoration indépendante de  $h$*

$$x^i y^j \frac{\partial^{i+j} g_h}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \ll_{i,j} P_1^i P_2^j.$$

*On désigne par  $(a(h))$  une suite complexe et par  $h_1$  un entier positif relié à la suite complexe  $(a(h))$  grâce à la propriété*

$$a(h) \neq 0 \Rightarrow h \leq H, \quad h_1 | h \quad \text{et} \quad \left( h_1, \frac{h}{h_1} \right) = 1.$$

*Alors, pour  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$  et s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que*

$$H \ll \frac{A}{\max\{P_1, P_2\}^2} \frac{1}{(\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2)^\epsilon},$$

*alors pour tout réel  $\epsilon$  strictement positif, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H a(h) \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 1 \\ \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = h}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} g_h(m_1, m_2) &\ll A^{\frac{1}{2}} h_1^\theta \|a\|_2 \max\{P_1, P_2\}^{\frac{3}{2}} \\ &\times \left[ \sqrt{P_1 + P_2} + \left( \frac{A}{\max\{P_1, P_2\}} \right)^\theta \left( 1 + \sqrt{\frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \right] (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2 H)^\epsilon \end{aligned}$$

*uniformément en  $\ell_1, \ell_2, P_1, P_2, M_1, M_2, H$  et  $\|a\|$ , où  $\theta$  désigne l'exposant apparaissant dans l'approximation de la conjecture de Ramanujan-Petersson (confer relation (1.2.7)).*

Pour obtenir ce résultat, on utilise la méthode du cercle en construisant une approximation (au sens  $L^2$ ) de la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, 1]$  construite à partir de combinaisons linéaires de fonctions indicatrices de petits intervalles au voisinage de rationnels à grands dénominateurs. Par ailleurs, les oscillations supplémentaires provenant de la sommation sur le décalage sont exploités grâce à la formule des traces de Kuznetsov qui fournit une décomposition spectrale pour certaines sommes de sommes de Kloosterman. Chacun des termes issus de cette décomposition spectrale est estimé au moyen des inégalités de grand crible établies par Deshouillers et Iwaniec.

**Remarques** Dans l'article original de Blomer, le théorème est énoncé lorsque  $\ell_1$  et  $\ell_2$  ainsi que  $M_1$  et  $M_2$  sont de même taille, et pour  $f$  désignant une forme primitive modulaire ou de Maaß. Étant donné que les théorèmes suivants ne seront énoncés que dans le cas modulaire, nous n'avons pas généralisé au cas des formes de Maaß. Il ne fait cependant aucun doute que le théorème A reste valable dans cette situation. Autrement dit, le théorème A prolonge le résultat de Blomer uniquement dans la situation qui nous préoccupe, à savoir lorsque  $\ell_1 M_1$  et  $\ell_2 M_2$  sont de même taille dans le cas modulaire.

Il apparaît un facteur  $\left(\frac{LM}{HP}\right)^\theta$  dans la version de Blomer provenant de la contribution des éventuelles valeurs propres exceptionnelles composant le spectre discret. Celui-ci devrait se transformer en  $\left(\frac{A}{H(P_1+P_2)}\right)^\theta$  dans notre théorème, cependant nous ne retrouvons que  $\left(\frac{A}{(P_1+P_2)}\right)^\theta$ .

**Moments intégraux et proportion** Le théorème précédent nous permet ensuite d'estimer la partie non diagonale du second moment ramolli d'une fonction  $L$  de forme modulaire primitive. La partie diagonale quant à elle, s'étudie en utilisant les propriétés analytiques de la fonction  $L$  de Rankin-Selberg associée à la forme modulaire et en suivant la méthode développée par Young dans [You10]. Le ramollisseur  $\psi$  est un polynôme de Dirichlet de longueur  $T^\nu$  défini par la relation (3.2.3) page 52. Par ailleurs, on introduit une fonction de localisation  $w$  à support compact inclus dans  $[T/4, 2T]$  et pour laquelle on impose des conditions sur la taille de ses dérivées (confer relations (3.2.4a), (3.2.4b) et (3.2.4c)). On prouve le théorème suivant.

**Théorème B** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau sans facteurs carrés et de caractère trivial. Pour  $0 < \nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$  et pour tous nombres complexes  $\alpha, \beta$  tels que  $\alpha, \beta \ll 1/\ln T$  avec  $|\alpha + \beta| \gg 1/\ln T$ , alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) |\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = \widehat{w}(0) c(\alpha, \beta) + O(T(\ln L)^4/L)$$

où

$$c(\alpha, \beta) = 1 + \frac{1}{\nu} \frac{1 - T^{-2(\alpha+\beta)}}{(\alpha + \beta) \ln T} \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{-\beta x - \alpha y} \int_0^1 P(x+u) P(y+u) du \right] \Big|_{x=y=0}.$$

Ce résultat améliore sensiblement celui de Farmer ([Far94]) où le même développement asymptotique est obtenu mais pour des  $\nu < 1/6$  seulement. Dans ce même papier, Farmer s'intéresse en particulier aux proportions de zéros se trouvant sur la droite critique et de multiplicité fixée. Bien qu'il ne l'énonce pas, son résultat permet d'affirmer qu'au moins 1,65% des zéros non-triviaux

d'une fonction  $L$  de forme modulaire primitive se trouve sur la droite critique (voir la section 4.2.2). Nous améliorons cette proportion. On désigne par  $N_f(T)$  (respectivement  $N_{f,0}(T)$ ) le nombre de zéros  $\rho$  non-triviaux (respectivement sur la droite critique) de  $L(f, s)$  vérifiant  $0 < \Im(\rho) \leq T$ .

**Corollaire A** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau sans facteurs carrés et de caractère trivial. Alors au moins 2,97% des zéros non-triviaux de  $L(f, s)$  sont situés sur la droite critique  $\Re s = 1/2$ . En admettant la conjecture de Selberg, on augmente ce pourcentage jusqu'à 6,93%. Autrement dit,*

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}(T)}{N_f(T)} \geq \begin{cases} 0,0297 & \text{inconditionnellement} \\ 0,0693 & \text{en admettant la conjecture de Selberg.} \end{cases}$$

Sous les mêmes conditions que lors du théorème précédent, la méthode employée fournit également une estimation du second moment intégral au voisinage de la droite critique. On montre le théorème suivant.

**Théorème C** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau sans facteurs carrés et de caractère trivial. Pour tous nombres complexes  $\alpha, \beta$  tels que  $\alpha, \beta \ll 1/\ln T$ , on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) dt = \mathfrak{a}_f \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \ln t dt + \left[ \mathfrak{b}_f + \mathfrak{a}_f \ln\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right) \right] \widehat{w}(0) + O\left(|\alpha + \beta| T (\ln T)^2 + T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right)$$

avec

$$\mathfrak{a}_f = \frac{12N}{\pi^2 \nu(N)} L(\text{Sym}^2 f, 1) \text{ et } \mathfrak{b}_f = \frac{12N}{\pi^2 \nu(N)} L(\text{Sym}^2 f, 1) \left( \frac{L'(\text{Sym}^2 f, 1)}{L(\text{Sym}^2 f, 1)} + \gamma + \sum_{p|N} \frac{\ln p}{p+1} - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right).$$

**Remarque** Ce résultat est significatif dès lors que  $|\alpha + \beta| = o(1/\ln T)$  et il est nécessaire d'avoir  $|\alpha + \beta| = o(1/\ln^2 T)$  afin de ne pas absorber le terme d'ordre  $T$  dans le terme d'erreur. En particulier, ce théorème fournit le corollaire suivant précisant le moment sur la droite critique.

**Corollaire B** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau sans facteurs carrés et de caractère trivial. On a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left| L\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left[ \mathfrak{a}_f \ln\left(\frac{t\sqrt{N}}{2\pi}\right) + \mathfrak{b}_f \right] dt + O\left(T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right)$$

et  $\int_0^T \left| L\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = \mathfrak{a}_f T \ln T + \left[ \mathfrak{b}_f + \mathfrak{a}_f \ln\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi e}\right) \right] T + O(T/\ln T).$

Jusqu'à présent, nous avons recherché des résultats sur la répartition des zéros non-triviaux au sein de la bande critique. Dans le chapitre 5, nous supposons l'hypothèse de Riemann vérifiée pour n'importe quelle fonction  $L$  et nous nous intéressons davantage à la répartition des zéros sur la droite critique elle-même. En utilisant leur résultat sur la répartition des petits zéros de fonctions  $L$  de Dirichlet, Hughes et Rudnick ([HR03a]) ont réussi à obtenir des informations relatives au plus petit des zéros se trouvant sur la droite critique. Nous étendons leurs résultats à d'autres familles de fonctions  $L$ .

**Plus petit zéro d'une famille de fonctions  $L$**  Pour ce faire, on considère un ensemble fini  $\mathcal{F}(Q)$  de fonctions  $L$  de conducteur analytique égal à  $Q$ . On construit la famille associée en posant  $\mathcal{F} = \bigcup_{Q \geq 1} \mathcal{F}(Q)$  et on suppose l'hypothèse de Riemann vérifiée pour chaque élément de  $\mathcal{F}$ . On suppose également établi le théorème de densité pour la famille  $\mathcal{F}$  avec des fonctions tests  $\Phi$  vérifiant  $\text{supp } \widehat{\Phi} \subset [-\nu; \nu]$  avec  $\nu < \nu_{\max}(\mathcal{F})$ . On désigne par  $W^*[\mathcal{F}]$  la densité de niveau 1 associée à la distribution des petits zéros non-triviaux des fonctions de  $\mathcal{F}$ . Il se trouve que les densités identifiées jusqu'à présent s'écrivent toutes sous la forme  $W[G]$  dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{W[G]}(y) = \delta_0(y) + \frac{\delta}{2}\eta(y) + \varepsilon$$

où  $\delta_0$  est la distribution de Dirac en 0, la fonction  $\eta$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\eta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |y| = 1 \\ 0 & \text{si } |y| > 1 \end{cases}$$

et  $\delta$  et  $\varepsilon$  sont donnés par le tableau ci-dessous.

$G$	$U$	$O$	$Sp$	$SO^+$	$SO^-$
$\delta$	0	0	-1	1	-1
$\varepsilon$	0	1/2	0	0	1

Enfin, pour  $G = Sp, SO^+$  ou  $SO^-$ , on considère l'unique entier  $n \geq 1$  tel que  $n-1 < \nu_{\max}(\mathcal{F}) \leq n$  et on considère l'équation d'inconnue  $\lambda$  donnée par

$$\frac{\delta}{\lambda} \cos \theta_\lambda - \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \sin \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) \left[ \frac{\delta \alpha_R(k)}{2} - 1 + \varepsilon \beta_R(k) \right] + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \cos \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (*)$$

Dans cette équation, on désigne par  $U_k$  le  $k$ -ème polynôme de Tchebychev de seconde espèce, les paramètres  $(\delta, \varepsilon)$  sont donnés par le tableau précédent et les paramètres  $\theta_\lambda, \alpha_R$  ainsi que  $\beta_R$  sont définis dans le lemme 5.3.17 (page 126) et dans la proposition 5.3.3 (page 130). On prouve le théorème suivant sur la valeur de la partie imaginaire  $\tilde{\gamma}_{f,1}$  du plus petit zéro non trivial normalisé de  $L(f, \cdot)$  dans  $\mathcal{F}$ .

**Théorème D** *On a*

$$\limsup_{Q \rightarrow +\infty} \min_{L(f, \cdot) \in \mathcal{F}(Q)} \tilde{\gamma}_{f,1} \leq \frac{1}{2\nu_{\max}(\mathcal{F})} \times \begin{cases} 1 & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[U] \\ 4V^{-1} \left( 1 + \frac{2}{\nu_{\max}(\mathcal{F})} \right) & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[O] \\ 4V^{-1} \left( 1 + (\delta + 2\varepsilon) \frac{2}{\nu_{\max}(\mathcal{F})} \right) & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[Sp], W[SO^+] \text{ ou } W[SO^-] \text{ et } \nu_{\max}(\mathcal{F}) \leq 1 \\ \frac{\nu_{\max}(\mathcal{F})}{\pi} \lim_{R \rightarrow \nu_{\max}(\mathcal{F})/2^-} \lambda_R & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[Sp], W[SO^+] \text{ ou } W[SO^-] \text{ et } \nu_{\max}(\mathcal{F}) > 1 \end{cases}$$

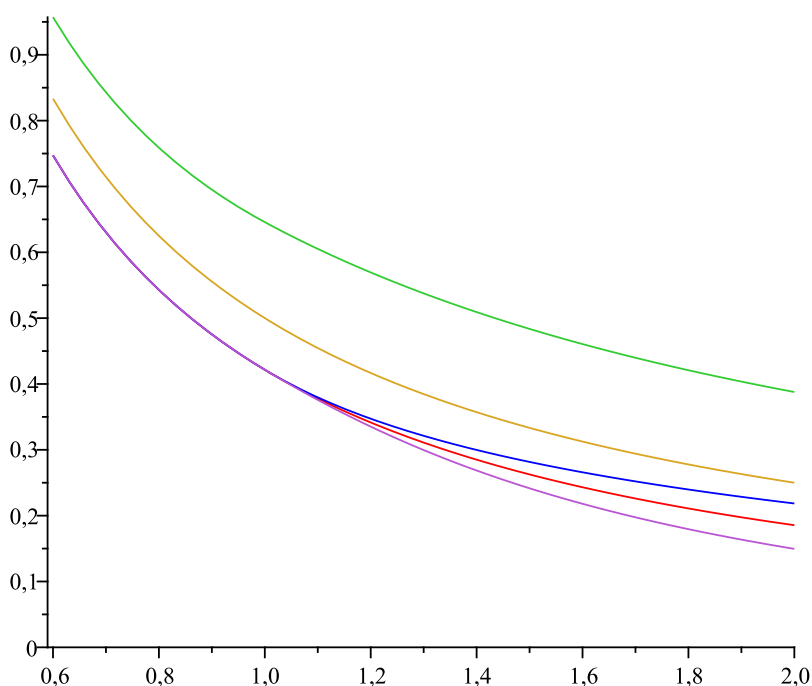


où  $\lambda_R$  est la plus petite solution strictement positive de l'équation  $(\star)$  qui n'est pas une racine de  $U_n U_{n-1}$  (avec  $n-1 < \nu_{\max}(\mathcal{F}) \leq n$ ) et où  $V$  est définie par

$$V : \begin{cases} [0, \frac{1}{4}[\cup] \frac{1}{4}, x_1[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\tan(2\pi x)}{2\pi x} \end{cases}$$

avec  $x_1 = \inf \left\{ x > 0, \frac{\tan(2\pi x)}{2\pi x} = 1 \right\} \approx 0,71$ .

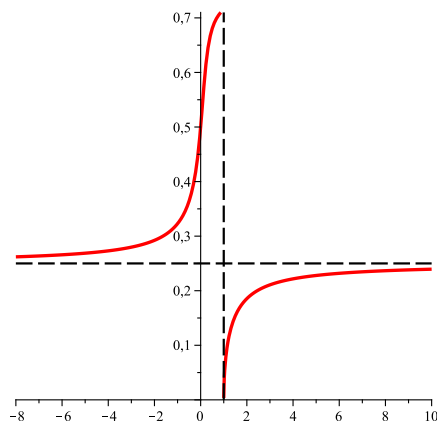
**Remarque** On représente la fonction définie par le membre de droite du théorème D, notée  $M_{W^*[\mathcal{F}]}(\nu_{\max}(\mathcal{F}))$ , pour chaque  $W^*[\mathcal{F}]$ . De haut en bas, on a  $W^*[\mathcal{F}] = W[Sp]$ ,  $W^*[\mathcal{F}] = W[U]$ ,  $W^*[\mathcal{F}] = W[SO^+]$ ,  $W^*[\mathcal{F}] = W[O]$  et  $W^*[\mathcal{F}] = W[SO^-]$ .



Courbe représentative de  $\nu_{\max}(\mathcal{F}) \longmapsto M_{W^*[\mathcal{F}]}(\nu_{\max}(\mathcal{F}))$

**Remarque** Dans le cas orthogonal, on obtient le développement asymptotique lorsque  $\nu_{\max}(\mathcal{F})$  tend vers l'infini

$$\frac{2}{\nu_{\max}(\mathcal{F})} V^{-1} \left( 1 + \frac{2}{\nu_{\max}(\mathcal{F})} \right) = \frac{\sqrt{6}}{\pi \nu_{\max}(\mathcal{F})^{3/2}} \left( 1 - \frac{6}{5 \nu_{\max}(\mathcal{F})} + o \left( \frac{1}{\nu_{\max}(\mathcal{F})^{3/2}} \right) \right).$$

Courbe représentative de  $V^{-1}$ 

**Remarque** Dans le cas  $1 < \nu_{\max}(\mathcal{F}) \leq 2$ , on peut simplifier l'équation  $(\star)$  sous la forme

$$(\delta + 2\varepsilon) \frac{1 - 4\lambda^2}{\lambda} (\sin \lambda(1 - R) - 2\delta\lambda \cos \lambda R) - [(\delta + 2\varepsilon)(1 - R) - 1 + 4\varepsilon] [\cos \lambda(1 - R) - 2\delta\lambda \sin \lambda R - 2\lambda \tan \Theta_R (\sin \lambda(1 - R) - 2\delta\lambda \cos \lambda R)] = 0$$

avec

$$\Theta_R = \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right).$$

De plus, cette relation s'annule toujours pour  $\lambda = 1/2$  qui est une racine de  $U_2$ .

On applique ces résultats aux fonctions  $L$  de puissance symétrique  $L(\text{Sym}^r f, s)$  où  $f$  appartient à l'ensemble  $H_k^*(q)$  des formes modulaires primitives de poids pair, de niveau  $q$  premier et de caractère trivial. Des théorèmes de densité ont été établis pour ces fonctions  $L$ , ainsi que pour leurs sous-familles composées des fonctions  $L$  où on a imposé le signe de l'équation fonctionnelle ( $\varepsilon(\text{Sym}^r f) = \pm 1$ ), par Iwaniec, Luo et Sarnak dans le cas  $r = 1$  ([ILS00]) et par Royer et Ricotta dans le cas général ([RR11]). En posant

$$\nu_{1,\max}(1, k, \theta_0) = 2 \text{ et } \nu_{1,\max}(r, k, \theta) = \left( 1 - \frac{1}{2(k - 2\theta)} \right) \frac{2}{r^2} \text{ si } r \geq 2 \text{ avec } \theta = \frac{7}{64},$$

et pour  $\varepsilon = \pm 1$ ,

$$\nu_{1,\max}^\varepsilon(1, k, \theta) = 2 \text{ et } \nu_{1,\max}^\varepsilon(r, k, \theta) = \inf \left\{ \nu_{1,\max}(r, k, \theta), \frac{3}{r(r+1)} \right\} \text{ si } r \geq 2,$$

le théorème D donne

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \min_{f \in H_k^*(N)} \tilde{\gamma}_{f,1} &\leq V^{-1}(2) < 0, 19 \\ \limsup_{N \rightarrow +\infty} \min_{f \in H_k^+(N)} \tilde{\gamma}_{f,1} &\leq 0, 22 \\ \limsup_{N \rightarrow +\infty} \min_{f \in H_k^-(N)} \tilde{\gamma}_{f,1} &\leq 0, 39 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\limsup_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \min_{f \in H_k^*(q)} \tilde{\gamma}_{Sym^r f, 1} \leq \frac{2}{\nu_{1, \max}(r, k, \theta)} V^{-1} \left( 1 + (-1)^{r+1} \frac{2}{\nu_{1, \max}(r, k, \theta)} \right)$$

et pour  $r$  impair,  $\epsilon = \pm 1$ ,

$$\limsup_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \min_{\substack{f \in H_k^*(q) \\ \epsilon(Sym^r f) = \epsilon}} \tilde{\gamma}_{Sym^r f, 1} \leq \frac{2}{\nu_{1, \max}^\epsilon(r, k, \theta)} V^{-1} \left( 1 + \epsilon \frac{2}{\nu_{1, \max}^\epsilon(r, k, \theta)} \right).$$

Étant donné qu'il existe des formes modulaires primitives dont le signe de l'équation fonctionnelle est égale à  $-1$  pourvu que le niveau soit suffisamment grand (confer proposition 1.1.1 page 4), on a même  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \min_{f \in H_k^*(N)} \tilde{\gamma}_{f, 1} = 0$ .

**Proportion de fonctions  $L$  ayant un petit premier zéro** En combinant les résultats statistiques sur la distribution des petits zéros d'une famille de fonctions  $L$  et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on détecte une proportion de fonctions  $L$  au sein d'une famille ayant un petit premier zéro. Ce phénomène a été exposé par Hughes et Rudnick dans le cas des fonctions  $L$  de Dirichlet, dont la symétrie associée est unitaire. Nous étendons ces résultats à tous les autres types de symétrie connus à travers l'exemple des fonctions  $L$  de puissances symétriques. En notant  $\omega_q(f)$  le poids harmonique associé à une forme modulaire de poids pair, de niveau  $q$  et de caractère trivial, on prouve le théorème suivant.

**Théorème E** *Soit  $r$  un entier strictement positif fixé. On suppose l'hypothèse de Riemann vérifiée pour toutes les fonctions  $L$  de puissance symétrique d'ordre  $r$ .*

$$\text{Si } \beta \geq \sqrt{\frac{\pi r^4}{4} \frac{6\pi^3 r^4 - 24(-1)^r \pi r^2 + 9\pi - \pi^3 + 2\sqrt{6} \sqrt{-\pi^4 + 6\pi^4 r^4 + 7\pi^2 + 12 - 24(-1)^r \pi^2 r^2}}{6\pi^4 r^4 + 48(-1)^{r+1} \pi^2 r^2 + 96 - 3\pi^2 - \pi^4}}$$

alors

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \sum_{\substack{f \in H_k^*(q) \\ \tilde{\gamma}_{Sym^r f, 1} \leq \beta}} \omega_q(f) \geq 1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{16(\pi^2 + 3)\beta^4 + 8r^4(9 - \pi^2)\beta^2 + (3 + \pi^2)r^8}{[r^6\pi^2 - 4\beta^2 r^2 \pi^2 + 16\beta^2(-1)^r]^2}.$$

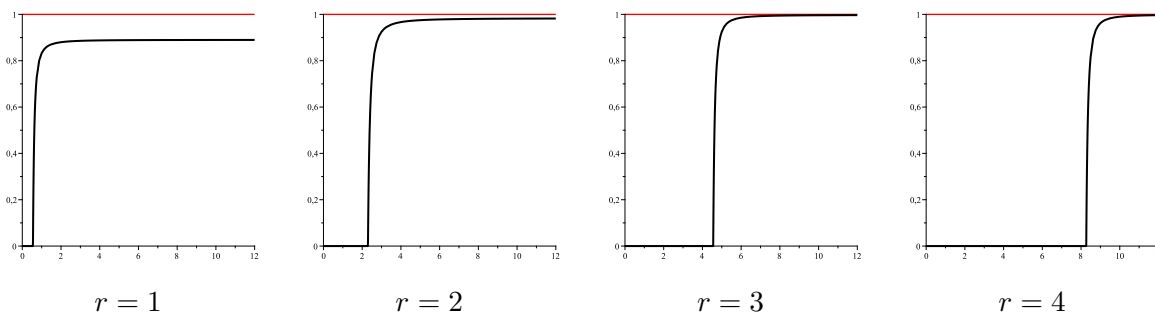
De plus, dans le cas  $r$  impair et  $\sigma = \pm 1$ . Si  $\frac{\beta}{r(r+2)\sqrt{\pi}} \geq$

$$\sqrt{\frac{\pi[24\pi^2 r^2 (r+2)^2 + 48\sigma r (r+2) + 9 - \pi^2] + 2\sqrt{6} \sqrt{-\pi^4 + 24\pi^4 r^2 (r+2)^2 + 7\pi^2 + 12 + 48\sigma \pi^2 r (r+2)}}{24\pi^4 r^2 (r+2)^2 + 96\sigma \pi^2 r (r+2) + 96 - 3\pi^2 - \pi^4}}$$

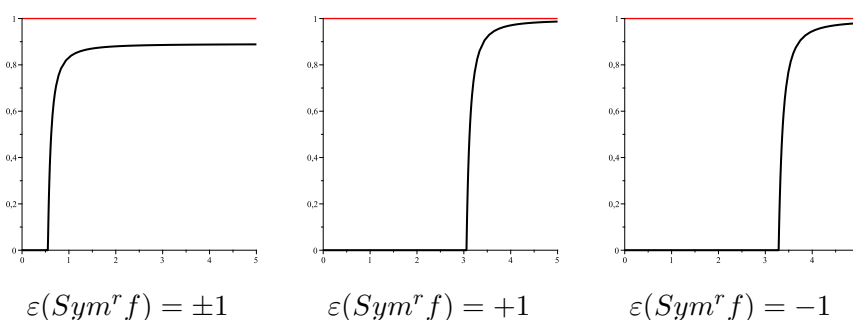
alors

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} 2 \sum_{\substack{f \in H_k^*(q) \\ \epsilon(Sym^r f) = \sigma \\ \tilde{\gamma}_{Sym^r f, 1} \leq \beta}} \omega_q(f) \geq 1 - \frac{\pi^2}{24} \frac{(\pi^2 + 3)\beta^4 + 2r^2 (r+2)^2 (9 - \pi^2)\beta^2 + (\pi^2 + 3)r^4 (r+2)^4}{[2\sigma\beta^2 + \pi^2\beta^2 r (r+2) - \pi^2 r^3 (r+2)^3]^2}.$$

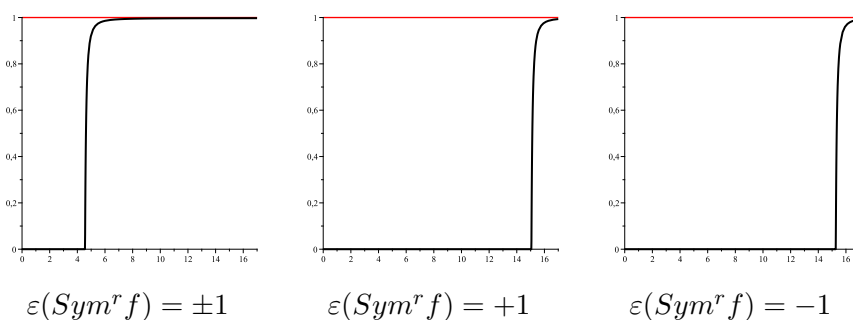
Afin de donner des exemples de ce résultat pour de petites valeurs de  $r$ , on représente le graphe de la fonction de  $\beta$  associée à la borne inférieure de la première partie du théorème E. Sur ces représentations graphiques, la valeur critique du paramètre  $\beta$  correspond à la valeur minimale admise dans l'énoncé du théorème E.



De la même manière, pour de petites valeurs impaires de  $r$ , on représente les bornes inférieures du théorème E dans différentes situations : quand il n'y a aucune restriction sur le signe  $\varepsilon(\text{Sym}^r f)$  de l'équation fonctionnelle, quand  $\varepsilon(\text{Sym}^r f) = +1$  et finalement, quand  $\varepsilon(\text{Sym}^r f) = -1$ . Tout d'abord, si  $r = 1$  :



Puis, si  $r = 3$  :





# Notations

## Ensembles

On désigne par  $\mathbb{N}$  (respectivement  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ) l'ensemble des entiers naturels (respectivement des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels, des nombres complexes). On note  $\mathcal{H}$  le demi-plan de Poincaré. On désigne par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers :

$$\mathcal{P} = \{2; 3; 5; 7 \dots\}$$

On note  $[x]$  la partie entière du nombre réel  $x$ . On note  $\Re(z)$  (respectivement  $\Im(z)$ ) la partie réelle (respectivement la partie imaginaire) du nombre complexe  $z$ .

## Arithmétique

Dans ce mémoire, en dehors de la situation des espaces fonctionnels  $L^p$ , la lettre  $p$  désigne toujours un nombre premier. Si  $m$  et  $n$  sont des entiers, la notation  $m|n$  (respectivement  $m \nmid n$ ) signifie que  $m$  divise  $n$  (respectivement  $m$  ne divise pas  $n$ ). On notera également  $(m, n)$  le plus grand diviseur commun de ces deux entiers.

Par ailleurs, on utilisera le symbole  $\sum^*$  pour désigner une somme pour laquelle l'indice de sommation parcourt l'ensemble des entiers positifs impairs.

On considérera également les fonctions arithmétiques suivantes. La fonction de Möbius  $\mu$  est l'inverse de convolution de la fonction arithmétique constante égale à 1. La fonction indicatrice d'Euler  $\varphi$  est définie par

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

La fonction  $\nu$  est définie par

$$\nu(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|n}} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

La fonction nombre de diviseurs  $\tau$  est définie par

$$\tau(n) = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d|n}} 1.$$

### Analyse complexe

On note  $\Gamma$  la fonction Gamma d'Euler et  $\zeta$  la fonction zêta de Riemann. Pour un entier  $N$ , on note  $\zeta^{(N)}$  la fonction zêta privée des facteurs eulériens associés à  $N$

$$\zeta^{(N)}(s) = \zeta(s) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

On note également  $e(z) = e^{2i\pi z}$ . Pour un nombre réel  $\sigma$ , et lorsque cela a un sens, on note

$$\int_{(\sigma)} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma + it) i dt$$

l'intégrale sur la droite  $\Re(z) = \sigma$  de la fonction  $f$ .

### Analyse fonctionnelle

La notation  $I$  désigne un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{C}_c^\infty(I)$  l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$  à support compact inclus dans  $I$  et  $\mathcal{S}$  la classe de Schwartz.

Pour tout réel  $p$  fini et supérieur ou égal à 1, on note  $L^p(I)$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f^p$  soit intégrable sur  $I$ . Dans ce cas, on note

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_I |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

L'espace  $L^2(I)$  est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_I f(t)g(t) dt.$$

On définit la transformée de Fourier d'une fonction  $\Phi$  de  $L^1(\mathbb{R})$  en posant

$$\hat{\Phi}(u) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) e(-xu) dx.$$

Lorsque cela est valable, la formule d'inversion s'écrit

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(u) e(xu) dx.$$

Le produit de convolution de deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $L^2(\mathbb{R})$  est défini par

$$f * g(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(u-t) dt.$$

On note  $\mathcal{S}_\nu(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions paires de  $\mathcal{S}$  dont la transformée de Fourier est à support compact inclus dans  $[-R, R]$  avec  $0 < R < \nu$ .

**Relations de comparaison**

Soient deux fonctions  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . On écrira aussi bien  $f \ll_{k,l,\dots} g$  ou  $f = O_{k,l,\dots}(g)$  s'il existe une constante positive  $C$  dépendant de  $k, l, \dots$  telle que, pour  $z$  appartenant à un domaine explicite ou implicite, on ait

$$|f(z)| \leq Cg(z).$$

On écrira parfois  $g \gg f$  en lieu et place de  $f \ll g$ . Dans la situation où, à la fois  $f \ll g$  et  $g \ll f$ , on notera  $f \asymp g$ .

On écrira uniquement  $f = o(g)$  s'il est possible d'écrire

$$f(z) = \varepsilon(z)g(z)$$

où  $\varepsilon$  est une fonction tendant vers 0 lorsque  $z$  tend vers un complexe explicite ou implicite, éventuellement infini.





# Chapitre 1

## Fonctions $L$

### 1.1 Présentation générale

De par la simplicité de sa définition mais aussi de par la renommée des nombreuses conjectures qui l'entourent, la fonction  $\zeta$  de Riemann est incontestablement la fonction  $L$  la plus connue. Cependant, celle-ci ne met pas en évidence certaines notions fondamentales de la théorie générale des fonctions  $L$ . Citons notamment les notions de famille, de conducteur ou de zéro exceptionnel. Le but des sections suivantes est de présenter une approche générale des fonctions  $L$  tout en l'illustrant d'exemples fondamentaux qui seront réutilisés tout au long de cette thèse. La présentation qui est donnée ici correspond au chapitre 5 de [IK04].

#### 1.1.1 Axiomatique

Soit  $d$  un entier strictement positif. On appelle fonction  $L$  de degré  $d$  un produit eulérien absolument convergent dans le domaine  $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$ , de la forme

$$L(f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{j=1}^d (1 - \alpha_{f,j}(p)p^{-s})^{-1},$$

où, pour  $1 \leq j \leq d$ , les coefficients  $\alpha_{f,j}(p)$  sont des nombres complexes, appelés *paramètres locaux de  $L(f, s)$  en  $p$* , vérifiant  $|\alpha_{f,j}(p)| < p$  et où, excepté pour un nombre fini de nombres premiers  $p$ ,  $\prod_{j=1}^d (1 - \alpha_{f,j}(p)p^{-s})$  est un polynôme de degré  $d$  en  $p^{-s}$ . Le produit eulérien peut alors se développer en une série de Dirichlet

$$L(f, s) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{-s}.$$

La fonction  $n \mapsto \lambda_f(n)$  définit une fonction multiplicative et vérifie en particulier  $\lambda_f(1) = 1$ .

Par ailleurs, on suppose qu'il existe d'une part un entier  $q(f)$ , appelé *conducteur de  $L(f, s)$* , vérifiant  $\alpha_{f,j}(p) \neq 0$  si  $p \nmid q(f)$ , et d'autre part un *facteur gamma*  $\gamma(f, s)$  de la forme

$$\gamma(f, s) = \pi^{-ds/2} \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{s + \kappa_j}{2}\right)$$

où les coefficients  $\kappa_j$ , appelés les *paramètres locaux de  $L(f, s)$  en l'infini*, vérifient  $\Re(\kappa_j) > -1$  et où  $\kappa_j$  est soit réel, soit  $\overline{\kappa_j}$  est aussi un paramètre local en l'infini. En posant

$$\Lambda(f, s) = q(f)^{s/2} \gamma(f, s) L(f, s),$$

le conducteur et le facteur gamma définissent une fonction, appelée *fonction complétée de  $L(f, s)$* , holomorphe dans le demi-plan  $\Re(s) > 1$ , devant d'une part admettre un prolongement méromorphe sur le plan complexe en une fonction d'ordre 1 avec des pôles au plus en 0 et en 1, et d'autre part satisfaire une *équation fonctionnelle* de la forme

$$\Lambda(f, s) = \varepsilon(f) \Lambda(\overline{f}, 1 - s)$$

où  $\varepsilon(f)$  est un nombre complexe de module 1, appelé *signe de l'équation fonctionnelle*, et où  $\overline{f}$  est un objet dual associé à  $f$  vérifiant

$$\lambda_{\overline{f}}(n) = \overline{\lambda_f(n)}, \quad \gamma(\overline{f}, s) = \gamma(f, s), \quad q(\overline{f}) = q(f).$$

### 1.1.2 Premiers exemples

On définit sur le demi-plan  $\Re(s) > 1$  la fonction  $\zeta$  de Riemann par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

On trouvera dans [Ten95] la preuve du fait que la fonction  $\zeta$  est une fonction  $L$  de degré 1 dont la fonction complétée est donnée par  $\Lambda(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ , de signe d'équation fonctionnelle égal à 1 et admettant un pôle simple de résidu 1 en  $s = 1$ .

La fonction  $\zeta$  s'inscrit dans le cadre plus général des fonctions  $L$  de Dirichlet dont nous allons parler maintenant. Soit  $\chi$  un caractère de Dirichlet primitif de module  $q$ . On lui associe la fonction, définie pour  $\Re(s) > 1$ ,

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Alors  $L(\chi, s)$  est une fonction  $L$  de degré 1, de conducteur  $q$ , de paramètre local en l'infini  $(1 - \chi(-1))/2$ , dont l'objet dual associé est  $\overline{\chi}$  et dont le signe de l'équation fonctionnelle est relié aux sommes de Gauss par la relation

$$\varepsilon(\chi) = -i^{\frac{1-\chi(-1)}{2}} \frac{\sum_{1 \leq m \leq q} \chi(m) e(m/q)}{\sqrt{q}}.$$

De plus, la fonction  $L(\chi, s)$  est entière, excepté dans l'éventualité où le caractère est trivial, auquel cas le point  $s = 1$  est l'unique pôle, simple, de résidu 1.

L'intérêt que l'on porte aujourd'hui aux fonctions  $L$  est en partie dû aux succès arithmétiques que l'étude analytique de ces fonctions a permis d'obtenir. Citons, d'une part, la preuve de non-annulation de la fonction  $\zeta$  de Riemann sur la droite  $\Re(s) = 1$  qui est à l'origine de la première preuve du théorème des nombres premiers, et d'autre part, c'est grâce à la non-annulation en  $s = 1$  des fonctions  $L$  de Dirichlet  $L(\chi, s)$  (pour  $\chi$  non trivial) que ce dernier a réussi à prouver le théorème portant son nom sur la progression arithmétique des nombres premiers.

### 1.1.3 Répartition élémentaire des zéros

On présente dans cette partie les résultats élémentaires concernant les valeurs d'annulation des fonctions  $L$ . La fonction complétée  $\Lambda(f, s)$  étant méromorphe avec des pôles au plus en 0 et en 1, les pôles du facteur gamma  $\gamma(f, s)$  correspondent à des zéros de la fonction  $L(f, s)$ . On en déduit que l'ensemble

$$\bigcup_{j=1}^d \{-\kappa_j - 2m, m \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\},$$

est composé de zéros de  $L(f, s)$ . On les appelle communément les *zéros triviaux*. Si 0 n'est pas un pôle de  $\Lambda(f, s)$  et si 0 est également un paramètre local en l'infini de  $L(f, s)$ , alors on a aussi  $L(f, 0) = 0$ . De plus, étant donné que les paramètres locaux en des places finies vérifient  $|\alpha_{j,f}(p)| < p$ , le produit eulérien définissant  $L(f, s)$  ne s'annule pas dans le demi-plan  $\Re s > 1$ . Grâce à l'équation fonctionnelle, on en déduit que  $\Lambda(f, s)$  ne s'annule également pas dans le demi-plan  $\Re s < 0$ . Autrement-dit, les zéros de  $L(f, s)$  qui ne sont pas des zéros triviaux, appelés *zéros non-triviaux*, vérifient  $0 \leq \Re s \leq 1$ . On appelle *bande critique* la région du plan complexe définie par  $\{s \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re s \leq 1\}$ . De la même manière, on appelle respectivement *droite critique* et *point critique* la droite  $\Re s = 1/2$  et le point  $s = 1/2$ .

*Conjecture* : Les zéros non-triviaux de  $L(f, s)$  sont répartis sur la droite critique.

Dans toute la suite, on désignera par *hypothèse de Riemann* de  $L(f, s)$  cette conjecture. Si cela n'est pas évident, on s'efforcera systématiquement de préciser pour quelle fonction  $L$  nous supposons cette conjecture .

Parmi les zéros triviaux de  $L(f, s)$ , le sous-ensemble  $\{-\kappa_j, 1 \leq j \leq d\} \setminus \{0\}$  peut contenir des éléments se trouvant dans la bande critique ouverte bien que l'on conjecture que cela ne soit pas le cas. Cette dernière hypothèse est équivalente à la *conjecture de Selberg pour  $L(f, s)$* , qui prédit que pour tout entier  $j$ , on ait  $\Re \kappa_j \geq 0$ . Notons que  $L(f, s)$  peut contenir des zéros triviaux sur la droite  $\Re s = 0$ .

La conjecture de Selberg pour  $L(f, s)$  est également appelée *conjecture de Ramanujan-Petersson en l'infini* par analogie avec la conjecture de Ramanujan-Petersson pour  $L(f, s)$  qui stipule que pour tout entier  $1 \leq j \leq d$ , on a  $|\alpha_{f,i}| \leq 1$  si  $p$  divise  $q(f)$  et  $|\alpha_{f,i}| = 1$  dans le cas contraire. À titre d'exemple, on vérifie aisément que les fonctions  $L$  de Dirichlet précédemment introduites vérifient les conjectures de Selberg et Ramanujan-Petersson.

Détecter des zéros non-triviaux sur la droite critique est un problème délicat auquel une partie de cette thèse est consacrée. Néanmoins, il est une situation dans laquelle une réponse partielle relative au point critique peut-être donnée.

On dira que  $f$  est *auto-duale* si l'objet dual  $\bar{f}$  est égal à  $f$ , ce qui, en vertu des relations reliant  $f$  à  $\bar{f}$ , revient à dire que les coefficients  $(\lambda_f(n))$  de la série de Dirichlet de  $L(f, s)$  sont réels. On a alors le lemme suivant :

**Proposition 1.1.1** *Si  $f$  est auto-duale alors le signe de l'équation fonctionnelle  $\varepsilon(f)$  est égal à  $\pm 1$ . Par ailleurs, si  $f$  est auto-duale et  $\varepsilon(f)$  égal à  $-1$  alors  $L(f, 1/2) = 0$ .*

Preuve : En appliquant deux fois l'équation fonctionnelle pour  $f$  auto-duale, pour tout nombre complexe  $s$ , on obtient

$$\Lambda(f, s) = \varepsilon(f)^2 \Lambda(f, s).$$

On en déduit  $\varepsilon(f)^2 = 1$ , puis  $\varepsilon(f) = \pm 1$ . Étant donné sa définition, le facteur gamma  $\gamma(f, s)$  ne s'annule pas sur son ensemble de définition. Cependant, il se peut que  $1/2$  soit un pôle de  $\gamma(f, s)$ . Si tel est le cas, la fonction complète  $\Lambda(f, s)$  n'ayant pas de pôle en  $1/2$ , on en déduit que  $1/2$  est un zéro trivial de la fonction  $L(f, s)$  au sens où ce zéro annihile le pôle de  $\gamma$ . Enfin, si  $1/2$  n'est pas un pôle de  $\gamma(f, s)$ ,  $\gamma(f, 1/2)$  est bien défini et est non nul. En évaluant l'équation fonctionnelle en  $s = 1/2$  on obtient ainsi, pour  $f$  auto-duale,  $(1 - \varepsilon(f))\gamma(f, 1/2)L(f, 1/2) = 0$ . D'où  $L(f, 1/2) = 0$  si  $\varepsilon(f) = -1$ .

□

Citons enfin un dernier résultat alternatif concernant la répartition des valeurs d'annulation de  $L(f, s)$ . Bien que ne sachant pas les situer précisément, le principe de l'argument nous permet de les compter. En désignant par  $N_f(T)$  le nombre de zéros de  $L(f, s)$  dans la bande critique et de partie imaginaire comprise entre 0 et  $T$ , et en utilisant le fait que  $L(f, \sigma + it)$  soit bornée de manière polynomiale<sup>1</sup> dans les bandes verticales, on prouve le théorème suivant.

**Théorème 1.1.1** *Soit  $L(f, s)$  une fonction  $L$  de degré  $d$ , alors*

$$N_f(T) = \frac{dT}{2\pi} \ln T + \frac{T}{2\pi} \ln \left( \frac{q(f)}{(2\pi e)^d} \right) + O(\ln T)$$

où le terme d'erreur dépend de  $f$ .

On renvoie au théorème 5.8 de [IK04] pour trouver la preuve complète de ce résultat.

## 1.2 Fonctions $L$ associées à une forme modulaire

### 1.2.1 Formes modulaires

On appelle *demi-plan de Poincaré*, et on le note  $\mathcal{H}$ , l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Le groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  agit sur  $\mathcal{H}$  par homographie. Plus précisément, pour  $\gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  et  $z$  dans le demi-plan de Poincaré, cette action est définie par

$$\gamma.z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{où } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Cette action se prolonge naturellement à  $\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  en posant

$$\gamma.\infty = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \gamma.\left(\frac{m}{n}\right) = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{m}{n} = -\frac{d}{c} \\ \frac{am+bn}{cm+dn} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Nous reviendrons de manière beaucoup plus précise sur ce résultat dans la section 1.3.1.

Pour tout entier naturel non nul  $N$ , on désigne par  $\Gamma_0(N)$  le sous-groupe de congruence de  $SL_2(\mathbb{Z})$  défini par

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), N \text{ divise } c \right\}.$$

$\Gamma_0(N)$  est un sous-groupe de  $SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(1)$ , d'indice fini avec

$$[\Gamma_0(1); \Gamma_0(N)] = \nu(N).$$

On appelle domaine fondamental de  $\Gamma_0(N)$  tout ouvert  $\mathcal{D}_0(N)$  de  $\mathcal{H}$  tel que :

- pour tout  $z$  dans  $\mathcal{H}$ , il existe  $\gamma$  dans  $\Gamma_0(N)$  tel que  $\gamma.z$  soit dans  $\overline{\mathcal{D}_0(N)}$ ,
- s'il existe  $\gamma$  dans  $\Gamma_0(N)$  tel que  $z' = \gamma.z$  avec  $z$  et  $z'$  dans  $\mathcal{D}_0(N)$  alors  $z = z'$ .

On appelle pointe de  $\Gamma_0(N)$  les classes d'équivalence issues de l'action de  $\Gamma_0(N)$  sur  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Pour chaque pointe  $\mathfrak{a}$ , le stabilisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $\Gamma_0(N)$  est un groupe monogène dont on considère un générateur  $\gamma_{\mathfrak{a}}$ . Il existe une matrice  $\sigma_{\mathfrak{a}}$  dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  telle que

$$\sigma_{\mathfrak{a}}.\infty = \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\gamma_{\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On étend l'action de  $SL_2(\mathbb{Z})$  à l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur  $\mathcal{H}$ . Soit  $k$  un entier positif pair et non nul. Pour une telle fonction  $f$ , pour  $\gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  et  $z$  dans  $\mathcal{H}$ , on pose

$$(f|_k \gamma)(z) = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad \text{où } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On dit que  $f$  vérifie la condition de modularité sur  $\Gamma_0(N)$  si  $f|_k \gamma = f$  pour tout élément  $\gamma$  du groupe  $\Gamma_0(N)$ . Pour chaque pointe  $\mathfrak{a}$  de  $\Gamma_0(N)$ , la fonction  $f_{\mathfrak{a}} = f|_k \sigma_{\mathfrak{a}}$  est une fonction 1-périodique et holomorphe sur  $\mathcal{H}$ . À ce titre, la fonction  $f_{\mathfrak{a}}$  admet un développement de Fourier de la forme

$$f_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{\mathfrak{a}}(n) e(nz).$$

On dit que  $f$  est holomorphe en la pointe  $\mathfrak{a}$  si  $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(n)$  est nul pour tout entier  $n$  strictement négatif. Si  $f$  vérifie la condition de modularité sur  $\Gamma_0(N)$  et est holomorphe en toutes les pointes de  $\Gamma_0(N)$ , on dit alors que  $f$  est une *forme modulaire de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère trivial*. Si de plus les coefficients de Fourier  $\hat{f}_{\mathfrak{a}}(0)$  sont nuls en chaque pointe  $\mathfrak{a}$  de  $\Gamma_0(N)$ , on dit que  $f$  est une *forme parabolique de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère trivial*.

On désigne alors par  $S_k(N)$  l'ensemble des formes paraboliques de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère trivial. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie sur lequel on définit un produit hermitien, appelé *produit scalaire de Petersson*, en posant

$$\langle f, g \rangle_N = \int_{\mathcal{D}_0(N)} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2} \quad \text{avec } z = x + iy$$

et où  $\mathcal{D}_0(N)$  désigne un domaine fondamental de  $\Gamma_0(N)$ .

### 1.2.2 Opérateurs de Hecke

Pour tout entier  $n$  strictement positif, on définit le  $n$ -ième *opérateur de Hecke*  $T_n$  sur  $S_k(N)$  en posant

$$T_n(f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ (a,N)=1}} a^k \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

On pourra se référer à [Iwa97] pour trouver les preuves des résultats énoncés ci-après. Les opérateurs de Hecke sont des endomorphismes de  $S_k(N)$  et vérifient la relation de multiplicativité

$$T_m T_n = \sum_{\substack{d|mn \\ (d,N)=1}} d^{k-1} T_{mn/d^2} \quad \text{pour } m, n \geq 1,$$

ou de manière équivalente

$$T_{mn} = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} \mu(d) d^{k-1} T_{m/d} T_{n/d}.$$

En particulier, les opérateurs de Hecke commutent deux à deux. Par ailleurs, pour  $(n, N) = 1$ ,  $T_n$  est un opérateur autoadjoint de  $S_k(N)$  muni du produit scalaire de Petersson. On en déduit qu'il existe une base orthonormale de  $S_k(N)$  formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke  $T_n$  tels que  $(n, N) = 1$ .

Une *forme de Hecke* est une forme parabolique qui est vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke  $T_n$  avec  $n$  premier au niveau  $N$ . Une telle forme  $f$  admet un développement en série de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} n^{\frac{k-1}{2}} \hat{f}(n) e(nz)$$

et pour laquelle on note  $n^{\frac{k-1}{2}} \lambda_f(n)$  la valeur propre qui lui est associée pour  $T_n$  ( $n$  premier à  $N$ ). Cet opérateur étant autoadjoint, on en déduit que pour tout entier  $n$  non nul et premier à  $N$ , on a

$$\hat{f}(n) = \lambda_f(n) \hat{f}(1).$$

En particulier, si  $\hat{f}(1)$  est non nul, les coefficients de Fourier (normalisés) et les valeurs propres normalisées sont égaux à une constante multiplicative près.

Jusqu'à présent, nous avons toujours la contrainte d'être premier au niveau qui apparaît lorsque l'on parle de forme de Hecke et on aimerait s'en affranchir et ainsi disposer d'une base orthonormée composée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke. Dans ce cas, on aurait  $\hat{f}(n) = \lambda_f(n) \hat{f}(1)$  quelle que soit la valeur de  $n$ , et en particulier,  $\hat{f}(1)$  devrait être non nul sous peine de considérer  $f$  nulle. On pourrait alors identifier valeurs propres et coefficients de Fourier comme nous l'avons remarqué précédemment. À cette fin, on introduit la notion de formes anciennes et nouvelles. L'espace des formes anciennes de niveau  $N$ , noté  $S_k^a(N)$  est défini par

$$S_k^a(N) = \text{Vect} \left\{ z \mapsto f(dz); N'|N, d|\frac{N}{N'}, d \neq 1, f \in S_k(N/N') \right\}$$

et l'espace des formes nouvelles par rapport à  $N$ , noté  $S_k^n(N)$ , est l'orthogonal de  $S_k^a(N)$  dans  $S_k(N)$ , autrement dit,

$$S_k^n(N) = S_k^a(N)^\perp.$$

Ces deux espaces sont stables par tous les opérateurs de Hecke  $T_n$  avec  $n$  premier au niveau. On appelle *forme primitive* une forme de Hecke qui est nouvelle et qui vérifie  $\hat{f}(1) = 1$ . L'ensemble des formes primitives forme une base orthogonale de  $S_k^n(N)$ . Sur l'ensemble des formes nouvelles, la contrainte d'être premier au niveau devient inutile. Autrement dit, une forme primitive est vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke, et en particulier, vérifie  $\hat{f}(n) = \lambda_f(n)$  pour tout entier strictement positif.

La relation de multiplicativité des opérateurs de Hecke précédemment énoncée donne alors, pour tous entiers  $m$  et  $n$  strictement positifs,

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad (1.2.1)$$

$$\text{et } \lambda_f(mn) = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} \mu(d)\lambda_f\left(\frac{m}{d}\right)\lambda_f\left(\frac{n}{d}\right). \quad (1.2.2)$$

On appelle *involution de Fricke* l'opérateur  $W$  défini sur  $S_k(N)$  par

$$Wf(z) = N^{-k/2}z^{-k}f\left(-\frac{1}{Nz}\right).$$

On montre que  $W$  est un endomorphisme de  $S_k(N)$  et que  $W$  est une involution de  $S_k(N)$  (ie  $W^2 = id$ ). Par ailleurs, les formes primitives sont des vecteurs propres de l'involution de Fricke et les valeurs propres associées sont des nombres complexes de module 1. Ainsi, pour toute forme nouvelle  $f$ , il existe un nombre complexe  $\eta_f(N)$  tel que

$$Wf = \eta_f(N)f \quad \text{avec } |\eta_f(N)| = 1.$$

L'involution de Fricke appartient à la classe plus grande des opérateurs d'Atkin-Lehner et pour lesquels les formes nouvelles sont des vecteurs propres (voir [AL70]).

### 1.2.3 Fonctions $L$ de forme modulaire

Dans toute la suite,  $f$  désigne une forme primitive de poids  $k$  pair, de niveau  $N$  et de caractère trivial. On note  $\chi_0$  le caractère principal modulo  $N$ . On désigne par  $\alpha_f(p)$  et  $\beta_f(p)$  les racines complexes de l'équation  $X^2 - \lambda_f(p)X + \chi_0(p) = 0$ .

On définit la fonction  $L$  associée à une forme primitive en posant

$$L(f, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\chi_0(p)}{p^{2s}}\right)^{-1} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\alpha_f(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$



Grâce aux travaux de Deligne (voir [Del74]), cette série de Dirichlet et ce produit eulérien convergent absolument dans le demi-plan  $\Re s > 1$ . Il s'agit d'une fonction  $L$  auto-duale de degré 2 qui se prolonge en une fonction entière et dont la fonction complétée est donnée par

$$\Lambda(f, s) = \left( \frac{\sqrt{N}}{\pi} \right)^s \Gamma \left( \frac{s + \frac{k-1}{2}}{2} \right) \Gamma \left( \frac{s + \frac{k+1}{2}}{2} \right) L(f, s). \quad (1.2.3)$$

Le signe de l'équation fonctionnelle vérifiée par  $\Lambda(f, s)$  est relié à l'involution de Fricke par la relation

$$\varepsilon(f) = i^k \eta_f(N).$$

Enfin,  $L(f, s)$  vérifie clairement la conjecture de Selberg et grâce aux travaux de Deligne cités précédemment, vérifie également la conjecture de Ramanujan-Petersson telle qu'elle est énoncée dans la section 1.1.3.

Lorsque le niveau est sans facteurs carrés, on définit la *fonction  $L$  de carré symétrique* d'une forme primitive  $f$  de  $S_k(N)$  pour  $\Re s > 1$  en posant

$$\begin{aligned} L(\text{Sym}^2 f, s) &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 - \frac{\alpha_f(p)^2}{p^s} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha_f(p)\beta_f(p)}{p^s} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\beta_f(p)^2}{p^s} \right)^{-1} \\ &= \zeta^{(N)}(2s) \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s}. \end{aligned}$$

Il est prouvé (voir [Shi75]) que  $L(\text{Sym}^2 f, s)$  est une fonction  $L$  auto-duale de degré 3 se prolongeant en une fonction entière, de signe égal à  $\varepsilon(\text{Sym}^2 f) = 1$  et dont la fonction complétée est donnée par

$$\Lambda(\text{Sym}^2 f, s) = \left( \frac{N}{\pi^{3/2}} \right)^s \Gamma \left( \frac{s+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{s+k-1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{s+k}{2} \right).$$

Il est également une fonction dont les propriétés analytiques nous seront essentielles et qui est attachée aux fonctions  $L$  de forme modulaire et aux fonctions  $L$  de carré symétrique. On définit la *fonction de Rankin-Selberg*

$$L(f \times f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 - \frac{\alpha_f(p)^2}{p^s} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha_f(p)\beta_f(p)}{p^s} \right)^{-2} \left( 1 - \frac{\beta_f(p)^2}{p^s} \right)^{-1} \quad (1.2.4)$$

$$= \zeta^{(N)}(2s) \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}. \quad (1.2.5)$$

On en déduit la relation

$$L(f \times f, s) = \zeta^{(N)}(s) L(\text{Sym}^2 f, s).$$

$L(f \times f, s)$  se prolonge ainsi sur le plan complexe avec un pôle simple en  $s = 1$ , de résidu

$$\text{Res}_{s=1} L(f \times f, s) = L(\text{Sym}^2 f, 1) \prod_{p|N} \left( 1 - \frac{1}{p} \right).$$

### 1.2.4 Fonctions $L$ de puissance symétrique

La construction des fonctions  $L$  de puissance symétrique permet d'obtenir des fonctions  $L$  de n'importe quel degré  $d \geq 2$  à partir d'une forme primitive. Ces résultats sont établis pour de petites valeurs de  $r$  et nous les supposons vrais par la suite.

Soit  $r$  un entier strictement positif et  $f$  une forme primitive de poids  $k$  pair, de niveau  $q$  premier et de caractère trivial. Pour  $\Re s > 1$ , on définit la fonction  $L$  de puissance symétrique d'ordre  $r$  associée à  $f$  par le produit eulérien absolument convergent

$$L(\text{Sym}^r f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{i=0}^r \left( 1 - \frac{\alpha_f(p)^i \beta_f(p)^{r-i}}{p^s} \right)^{-1}.$$

On pose, pour  $r$  impair,

$$\Lambda(\text{Sym}^r f, s) = \left( \frac{q^r}{\pi^{r+1}} \right)^{s/2} \prod_{0 \leq a \leq (r-1)/2} \Gamma \left( \frac{s + \frac{(2a+1)(k-1)}{2}}{2} \right) \Gamma \left( \frac{s + 1 + \frac{(2a+1)(k-1)}{2}}{2} \right),$$

et pour  $r$  pair

$$\Lambda(\text{Sym}^r f, s) = \left( \frac{q^r}{\pi^{r+1}} \right)^{s/2} \Gamma \left( \frac{s}{2} \right) \prod_{1 \leq a \leq r/2} \Gamma \left( \frac{s + a(k-1)}{2} \right) \Gamma \left( \frac{s + 1 + a(k-1)}{2} \right).$$

On remarque d'ores et déjà que les cas  $r = 1$  et  $r = 2$  correspondent respectivement aux fonctions  $L$  de formes modulaires primitives et aux fonctions  $L$  de carré symétrique pour lesquelles les propriétés relatives aux fonctions  $L$  ont déjà été énoncées. Dans toute la suite, on supposera que :

- la fonction complétée se prolonge en une fonction entière d'ordre 1 sur le plan complexe,
- la fonction complétée vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(\text{Sym}^r f, s) = \varepsilon(\text{Sym}^r f) \Lambda(\text{Sym}^r f, 1 - s)$$

avec  $\varepsilon(\text{Sym}^r f) = 1$  lorsque  $r$  est pair et

$$\varepsilon(\text{Sym}^r f) = \eta_f(q) i^{\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 (k-1) + \frac{r+1}{2}} \quad \text{pour } r \text{ impair.}$$

Avec ces hypothèses,  $L(\text{Sym}^r f, s)$  est une fonction  $L$  de degré  $r + 1$ . Suite aux travaux de Kim et Shahidi (voir [Kim03], [KS02a] et [KS02b]), nous savons que ces suppositions sont également vérifiées dans les cas  $r = 3$  et 4. Pour de plus grandes valeurs de  $r$ , nous ne disposons que de résultats partiels. On pourra consulter [RR11] et [CM04] pour trouver davantage d'informations relatives aux fonctions  $L$  de puissance symétrique.

### 1.2.5 Formes de Maaß

Considérons une fonction  $f$  définie sur le demi-plan de Poincaré  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ . Pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma_0(N)$ , nous avons déjà considéré l'action

$$f|_0 \gamma(z) = f \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) \quad \text{où } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Supposons  $N = 1$  quelques instants. Il est naturel de chercher les fonctions invariantes sous l'action de  $\Gamma_0(N)$ . Si l'on considère l'action sur l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\mathcal{H}$ , l'ensemble des invariants est restreint à la fonction nulle. Afin d'obtenir un résultat non-trivial, il nous faut modifier quelques hypothèses. La première solution consiste à modifier l'action  $|_0$  de  $\Gamma_0(N)$ . C'est le point de vue adopté dans la section précédente et qui est à l'origine de la théorie des formes modulaires en considérant les actions  $|_k$ . La deuxième solution consiste à modifier l'ensemble des fonctions sur lequel agit  $\Gamma_0(N)$ . C'est le point de vue qui est esquissé dans cette section. Ainsi, nous modifions l'espace des fonctions holomorphes en l'ensemble des fonctions réelles analytiques sur  $\mathcal{H}$ . Par ailleurs, les fonctions holomorphes étant harmoniques, on imposera également une condition portant sur le Laplacien. Pour toute cette section, nous nous référons à [IK04], [DFI02], [Sel56] et [BK08].

Soit  $N$  un entier strictement positif et soit  $\Delta_0$  le Laplacien donné par

$$\Delta_0 = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

On s'intéresse aux fonctions propres de  $\Delta_0$  qui, de fait, sont des fonctions réelles analytiques étant donné les propriétés des opérateurs elliptiques. On note alors par  $\mathcal{A}_s$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathcal{H}$ , invariantes sous l'action  $|_0$  et vecteur propre de  $\Delta_0$  de valeur propre  $\lambda = s(1-s)$ .

$$\mathcal{A}_s = \left\{ f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, f|_0\gamma = f \text{ pour tout } \gamma \text{ dans } \Gamma_0(N) \text{ et } \Delta_0 f = s(1-s)f \right\}.$$

On considère également  $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  l'espace des fonctions  $f$  invariantes sous l'action de  $\Gamma_0(N)$  de poids 0 et telles que  $\langle f, f \rangle_N$  soit fini. Muni du produit scalaire de Petersson,  $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  est un espace de Hilbert. Par ailleurs, on peut prolonger  $\Delta_0$  en un opérateur autoadjoint et positif sur  $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  qui, par ailleurs, admet une base composée de vecteurs propres de  $\Delta_0$ .

Les premiers exemples d'éléments de  $\mathcal{A}_s$  sont donnés par les séries d'Eisenstein qui ne sont pas de carré intégrable. À chaque pointe  $\mathfrak{a}$  de  $\Gamma_0(N)$ , la série d'Eisenstein de niveau  $N$ , de poids 0 et de caractère trivial est définie pour  $\Re s > 1$  par

$$E_{\mathfrak{a}}(z, s) = \sum_{\gamma \in (\Gamma_0(N))_{\mathfrak{a}} \backslash \Gamma_0(N)} (\Im(\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\gamma.z))^s$$

où  $(\Gamma_0(N))_{\mathfrak{a}}$  désigne le stabilisateur de  $\mathfrak{a}$ , et  $s \mapsto E_{\mathfrak{a}}(z, s)$  se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . Alors, pour tout  $s_0$  qui n'est pas un pôle de  $s \mapsto E_{\mathfrak{a}}(z, s)$ , la fonction  $z \mapsto E_{\mathfrak{a}}(z, s_0)$  appartient à  $\mathcal{A}_{s_0}$  et admet le développement en série de Fourier de la forme

$$E_{\mathfrak{a}}(z, s_0) = \delta_{\infty}(\mathfrak{a})y^{s_0} + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s_0 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_0)} \rho_{\mathfrak{a}}(s_0, 0)y^{1-s_0} + \frac{2\pi\sqrt{y}}{\Gamma(s_0)} \sum_{m \neq 0} |m|^{s_0 - \frac{1}{2}} \rho_{\mathfrak{a}}(s_0, m) K_{s_0 - 1/2}(2\pi|m|y) e(mx).$$

Pour toute fonction lisse à support compact  $\psi$ , on associe à chaque pointe  $\mathfrak{a}$  une fonction appelée série d'Eisenstein incomplète et définie par

$$E_{\mathfrak{a}}(z, \psi) = \sum_{\gamma \in (\Gamma_0(N))_{\mathfrak{a}} \backslash \Gamma_0(N)} \psi(\Im(\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\gamma.z)).$$

On pose alors  $\mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  l'adhérence, pour la norme associée au produit scalaire de Petersson, de l'espace vectoriel engendré par les séries d'Eisenstein incomplètes. De plus, on considère l'orthogonal de  $\mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  dans  $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  que l'on note  $L_0^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  et que l'on appelle ensemble des formes de Maaß de poids 0, de niveau  $N$  et de caractère trivial. Si  $u$  est une forme de Maaß dont la valeur propre associée est  $\lambda = s(1-s)$ , elle admet un développement en série de Fourier de la forme

$$u(z) = \sqrt{y} \sum_{m \neq 0} \rho(m) K_{s-1/2}(2\pi|m|) e(mx). \quad (1.2.6)$$

En posant  $s = 1/2 + ir$ , on obtient  $\lambda = 1/4 + r^2$ .  $\Delta_0$  étant un opérateur autoadjoint positif, ses valeurs propres sont réelles et positives. Plusieurs cas peuvent alors se produire :

- Soit  $r$  est réel, auquel cas  $\Re s = 1/2$  et

$$\lambda \geq 1/4.$$

- Soit  $r = \pm i/2$ , auquel cas  $s = 0$  ou  $s = 1$  et

$$\lambda = 0.$$

La forme de Maaß  $u$  est alors une forme modulaire parabolique de poids 0, de niveau  $N$  et de caractère trivial, ie  $f$  appartient à  $S_0(N)$ .

- Soit  $r$  est un imaginaire pur tel que  $0 < |\Im(r)| < 1/2$  auquel cas

$$0 < \lambda < 1/4.$$

De telles valeurs propres sont appelées valeurs propres exceptionnelles, il y en a un nombre fini et l'on conjecture qu'il n'en existe pas. C'est la conjecture de Selberg.

Toute la théorie des opérateurs de Hecke (qui, par ailleurs, commutent avec le Laplacien) pour les formes modulaires paraboliques s'étend à l'espace  $L_0^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})$  des formes de Maaß. On obtient ainsi un espace des formes de Maaß nouvelles qui admet une base orthogonale composée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke. Les éléments de cette base sont appelés formes de Maaß primitives auxquelles nous savons également associer une fonction  $L$  à partir des coefficients de leur développement en série de Fourier. Pour ce faire, si  $u$  est une forme de Maaß primitive s'exprimant sous la forme (1.2.6), on pose

$$L(u, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\rho(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 - \frac{\rho(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

Il s'agit d'une fonction  $L$  de degré 2, de conducteur  $N$ , dont les paramètres locaux en l'infini sont  $\pm ir$  où  $s = 1/2 + ir$ . Ainsi, la conjecture de Selberg pour les fonctions  $L$  correspond bien à la conjecture de Selberg relative aux valeurs propres associées aux formes de Maaß que nous venons d'énoncer.

À la différence du cas modulaire, la conjecture de Ramanujan-Petersson n'est pas encore prouvée dans le cas des formes de Maaß primitives. En notant  $\alpha(p)$  et  $\beta(p)$  les racines complexes

de l'équation  $1 - \rho(p)X + X^2 = 0$ , suite aux travaux de Kim, Shahidi et Sarnak ([Kim03],[KS02a]), nous disposons actuellement de la borne

$$|\alpha(p)|, |\beta(p)| \leq p^\theta \quad \text{avec } \theta = 7/64, \quad (1.2.7)$$

ce qui correspond à l'inégalité

$$|\Re(ir)| \leq \frac{7}{64}.$$

### 1.2.6 Structure des fonctions $L$

Jusqu'à présent, nous avons illustré la notion de fonction  $L$  à travers les exemples de la fonction  $\zeta$  de Riemann, de fonctions  $L$  de Dirichlet et de fonctions  $L$  de formes primitives (paraboliques ou de Maaß). Remarquons par ailleurs que le produit de fonctions  $L$  est encore une fonction  $L$ . Ces exemples sont fondamentaux dans le sens où, selon le programme de Langlands, une fonction  $L$  générale se décompose comme produit de fonctions  $L$  que l'on pourrait qualifier de primitives au sens où elles seraient indécomposables. Les fonctions  $L$  primitives de degré 1 se trouvent alors être la fonction  $\zeta$  et celles associées aux caractères de Dirichlet primitifs. Quant aux fonctions  $L$  primitives de degré 2, elles correspondent aux fonctions  $L$  de formes modulaires primitives (quitte à rajouter un caractère dans la définition) et aux fonctions  $L$  de formes de Maaß primitives. Pour un degré  $d$  quelconque, on imagine que ces fonctions primitives sont celles associées à des formes automorphes cuspidales de  $GL(d)\backslash\mathbb{Q}$ . À ce propos, on pourra consulter [BK08].

Selon cette philosophie, la fonction  $\zeta$  de Riemann est la seule fonction primitive à posséder un pôle en  $s = 1$  (et ce en raison de la divergence de la série harmonique). Aussi, pour une fonction  $L(f, s)$  générale admettant un pôle d'ordre  $\nu$  en  $s = 1$ , la valuation de cette fonction en  $\zeta$  serait égale à  $\nu$ .

Ainsi, les fonctions  $L$  associées aux courbes elliptiques de conducteur  $N$  sont égales à des fonctions  $L$  de formes modulaires primitives de  $S_2(\Gamma_0(N))$  (voir [Wil80] et [BCDT01]).

De la même manière, soit  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  un corps quadratique imaginaire ( $D$  sans facteurs carrés et  $D \equiv 3[4]$ ). On note  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers algébriques sur  $K$ . À un caractère  $\psi$  du groupe des classes de  $K$  prolongé trivialement sur les idéaux principaux, on associe une fonction  $L$  en posant

$$L(\psi, s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\psi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s}$$

où la somme porte sur les idéaux  $\mathfrak{a}$  non triviaux de  $\mathcal{O}_K$  dont la norme est notée  $N\mathfrak{a}$ . Notons  $\chi_D$  le caractère défini par le symbole de Legendre  $\chi_D(n) = \left(\frac{-D}{n}\right)$ . Si  $\psi$  n'est pas le caractère trivial,  $L(\psi, s)$  est la fonction  $L$  d'une forme modulaire de poids 1, de niveau  $D$  et de caractère  $\chi_D$ . Si  $\psi = \psi_0$  est le caractère trivial,  $L(s, \psi_0)$  est le produit de la fonction  $\zeta$  de Riemann par la fonction  $L$  de Dirichlet  $L(\chi_D, s)$ . De ce fait provient une égalité fondamentale quant au cardinal du groupe des classes de  $K$ .

## 1.3 Taille des fonctions $L$

### 1.3.1 Ordre de grandeur

Dans cette section,  $L(f, s)$  désigne une fonction  $L$  quelconque de conducteur  $q(f)$ . Dans les applications, nous avons besoin de connaître une borne de  $L(f, s)$  lorsque  $s$  varie mais également lorsque  $f$  varie dans un ensemble “naturel”. Les informations sur  $f$  sont également portées par son degré et par ses paramètres locaux en l’infini. À cette fin, en complément du conducteur  $q(f)$  que l’on qualifie de conducteur arithmétique, on introduit un nouveau conducteur  $\mathfrak{q}(f, s)$ , appelé *conducteur analytique*, défini par

$$\mathfrak{q}(f, s) = q(f) \prod_{j=1}^d (|s + \kappa_j| + 3).$$

À titre d’exemple, lorsque  $f$  est un caractère de Dirichlet primitif modulo  $q$ , noté  $\chi$ , on a  $\mathfrak{q}(\chi, s) \asymp q(1 + |s|)$ . De même, en utilisant la formule de Stirling, lorsque  $f$  est une forme primitive de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère trivial, on a  $\mathfrak{q}(f, s) \asymp k^2 N(1 + |s|^2)$ .

Grâce aux propriétés de convergence de la série de Dirichlet définissant  $L(f, s)$  pour traiter le cas  $\Re s > 1$ , de la formule de Stirling et de l’équation fonctionnelle pour le cas  $\Re s < 0$  et grâce au principe de Phragmen-Lindelöf pour  $s$  dans la bande critique, on montre que  $L(f, s)$  est bornée de manière polynomiale dans les bandes verticales. Ceci permet de définir pour tout réel  $\sigma$ , la fonction

$$\mu(f, \sigma) = \inf \{v > 0, |L(f, \sigma + it)| \ll \mathfrak{q}(f, \sigma + it)^v\}.$$

La preuve esquissée précédemment montre en réalité de manière plus précise que

- $\mu(f, \sigma) = 0$  si  $\sigma \geq 1$ ,
- $\mu(f, \sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$  si  $\sigma \leq 0$ ,
- la fonction  $\sigma \mapsto \mu(f, \sigma)$  est convexe.

En particulier, nous en déduisons que pour  $0 \leq \sigma \leq 1$  on a l’inégalité  $\mu(f, \sigma) \leq \frac{1-\sigma}{2}$ , ou de manière équivalente, que l’on a  $\mu(f, 1/2) \leq 1/4$ . On appelle *borne de convexité* cette majoration en raison de la manière dont elle est obtenue. L’hypothèse de Lindelöf pour  $L(f, s)$  prédit la valeur exacte de la fonction  $\mu(f, \sigma)$  dans la bande critique. Elle conjecture l’égalité

$$\mu(f, \sigma) = \max \left\{ \frac{1}{2} - \sigma, 0 \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma & \text{si } \sigma \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } \sigma \geq 1/2 \end{cases}$$

ce qui revient au même que de conjecturer  $\mu(f, 1/2) = 0$ . On appelle alors *borne de sous-convexité* n’importe quel résultat prouvant  $\mu(f, 1/2) < 1/4$ .

Dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann, pour tout  $\epsilon > 0$ , la borne de convexité est donnée par  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\frac{1}{4} + \epsilon}$  et est notamment améliorée par le résultat de sous-convexité de Huxley ([Hux05])

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\frac{32}{205} + \epsilon}.$$

Étant donné que le conducteur analytique encode différents aspects de la fonction  $L$ , dans la pratique les bornes de sous-convexité obtenues ne sont pas les mêmes en fonction de l'aspect considéré. Ainsi, pour les fonctions  $L$  de caractère de Dirichlet modulo  $q$ , la borne de convexité est donnée, pour tout  $\epsilon > 0$ , par

$$L(\chi, 1/2 + it) \ll_{\epsilon} (q|t|)^{\frac{1}{4} + \epsilon}.$$

La majoration de Burgess ([Bur63]) donne une borne de sous-convexité uniquement par rapport au module du caractère. Précisément, pour tout caractère  $\chi$  modulo  $q$  non principal et pour tout  $\epsilon$  strictement positif, on a

$$L(\chi, 1/2 + it) \ll_{t, \epsilon} q^{\frac{3}{16} + \epsilon}$$

et la dépendance en  $t$  est polynomiale mais moins bonne que celle donnée par la borne de convexité. Heath-Brown ([HB80]) a obtenu une borne de sous-convexité à la fois par rapport au module et par rapport à  $t$ , en prouvant

$$L(\chi, 1/2 + it) \ll_{\epsilon} (q|t|)^{\frac{3}{16} + \epsilon}.$$

Pour les fonctions  $L$  associées à une forme primitive  $f$  de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère trivial, la borne de convexité est  $L(f, 1/2 + it) \ll (k^2 N |1/2 + it|^2)^{\frac{1}{4} + \epsilon}$ . Dans le  $t$ -aspect, Good ([Goo82]) a obtenu la borne de sous-convexité

$$L(f, 1/2 + it) \ll_{k, N} t^{1/3} (\ln t)^{5/6}. \quad (1.3.1)$$

Cette borne a été étendue par Jutila et Motohashi ([JM05]) en considérant simultanément le poids  $k$  et le paramètre  $s$ . Ils prouvent

$$L(f, 1/2 + it) \ll_{N, \epsilon} (k + |t|)^{1/3 + \epsilon}.$$

Le problème de sous-convexité est également résolu pour ces fonctions par rapport au niveau. Dans [DFI94], Duke, Friedlander et Iwaniec obtiennent la majoration

$$L(f, 1/2 + it) \ll_{k, t, \epsilon} N^{\frac{47}{192} + \epsilon}.$$

À ce sujet, on pourra également consulter [DFI02] et [BHM07a]. Enfin, dans [MV10], Michel et Venkatesh résolvent le problème de sous-convexité pour les fonctions  $L$  de formes modulaires et de formes de Maaß primitives. En particulier, ils prouvent qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$L(f, 1/2 + it) \ll (k^2 N |t|^2)^{1/4 - \delta}.$$

Les résultats de sous-convexité ont de nombreuses applications en théorie des nombres. On pourra consulter le très complet [Mic07] à ce propos. Nous nous contenterons de donner une application relative aux zéros non-triviaux simples de la fonction  $L$  associée à la fonction  $\Delta$  de Ramanujan. En posant  $q = e(z)$ , celle-ci est définie par

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) e(nz).$$

On trouvera dans [Ser77] la preuve du fait que  $\Delta$  est une forme parabolique de poids 12 et de niveau 1 (et donc primitive car  $\tau(1) = 1$  et  $S_{12}(1)$  est un espace vectoriel de dimension 1). En utilisant la borne de sous-convexité de Good dans le  $t$ -aspect précédemment citée, Conrey et Gosh ([CG88]) ont montré que  $L(\Delta, s)$  possédait une infinité de zéros simples dans la bande critique. Plus précisément, pour tout  $\epsilon$  strictement positif et en notant  $N_{\Delta}^s(T)$  le nombre de zéros simples dans la bande critique et de partie imaginaire comprise entre 0 et  $T$ , ceux-ci ont établi la minoration

$$N_{\Delta}^s(T) \gg_{\epsilon} T^{\frac{1}{8}-\epsilon}.$$

Par ailleurs, toute amélioration de la borne de sous-convexité de Good améliorerait cette minoration. D'autres résultats sur les zéros simples de fonctions  $L$  de formes modulaires existent, nous y reviendrons dans le chapitre 4.

### 1.3.2 Région sans zéro

Pour la fonction  $\zeta$  de Riemann, nous disposons assez facilement d'une région sans zéro au sein de la bande critique<sup>2</sup>. Nous avons le résultat suivant.

**Théorème 1.3.1** *Il existe une constante positive  $c$  telle que  $\zeta(\sigma + it)$  ne s'annule pas dans la région du plan complexe définie par l'inégalité*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(2 + |t|)}.$$

On trouvera la preuve de ce résultat dans [Tit86] par exemple. Ce résultat se généralise aisément à d'autres fonctions  $L$  mais il apparaît alors un phénomène que la fonction  $\zeta$  ne met pas en évidence : le zéro exceptionnel. Ainsi, pour les fonctions  $L$  de caractère de Dirichlet, le résultat précédent se généralise sous la forme suivante dont on trouvera la preuve dans [Ten95].

**Théorème 1.3.2** *Il existe une constante positive  $c$  telle que pour tout caractère de Dirichlet modulo  $q$  primitif  $\chi$ ,  $L(\chi, \sigma + it)$  s'annule au plus une fois dans la région du plan complexe définie par l'inégalité*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(q(2 + |t|))}.$$

*De plus, l'éventuel zéro est réel, simple et n'existe qu'au plus pour un seul caractère réel.*

On trouvera dans [IK04] (théorème 5.10) un énoncé général concernant une région sans zéro pour une fonction  $L$  au sens où nous l'avons défini en début de chapitre. Nous nous contentons ici d'énoncer le résultat relatif à la fonction de Rankin-Selberg  $L(f \times f, s)$  associée à une forme primitive  $f$  et dont nous aurons besoin au cours du chapitre 3.

**Théorème 1.3.3** *Soit  $f$  une forme primitive de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère trivial. Il existe une constante  $c$  strictement positive telle que  $L(f \times f, \sigma + it)$  ne s'annule pas dans la région du plan complexe définie par l'inégalité*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(kN(2 + |t|))}.$$

---

2. On sait également déterminer numériquement que  $\zeta$  ne s'annule pas dans des rectangles de sommets  $1/2 + \epsilon$ ,  $1$ ,  $1 + iK$  et  $1/2 + \epsilon + iK$  avec  $\epsilon$  petit,  $K$  dépendant de  $\epsilon$  et bien évidemment borné. Dans sa preuve de la version faible de la conjecture de Goldbach, Helfgott utilise de telles régions sans zéro.



Ce résultat correspond au théorème 5.44 de [IK04] auquel on pourra se référer pour en trouver la preuve. Cependant, celui-ci y est énoncé avec l'existence d'un éventuel zéro exceptionnel. Néanmoins, comme Iwaniec et Kowalski le font remarquer, grâce aux travaux de Banks ([Ban97]), cet éventuel zéro exceptionnel n'existe pas pour les fonctions  $L$  de Rankin-Selberg d'une forme primitive.

Dans la suite, nous travaillerons avec de telles fonctions  $L$  dans la région sans zéro énoncée. Nous aurons besoin du résultat suivant.

**Proposition 1.3.1** *Il existe une constante  $c$  strictement positive telle que l'on ait, pour  $|t| \geq 3$  et  $\sigma \geq 1 - c/\ln(t)$ ,*

$$\frac{1}{L(f \times f, \sigma + it)} \ll \ln |t|.$$

Preuve : La preuve de ce résultat reproduit celle que l'on trouvera dans [Ten95] pour la fonction  $\zeta$  de Riemann et utilise la formule du produit de Hadamard (voir [IK04], théorème 5.6). Cependant, en notant  $(\Lambda_{f \times f}(n))$  la suite définie par

$$-\frac{L'(f \times f, s)}{L(f \times f, s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda_{f \times f}(n)}{n^s},$$

nous avons besoin de savoir que ces coefficients sont réels et positifs, ce qu'un calcul rapide donne immédiatement.

$$\Lambda_{f \times f}(n) = \begin{cases} (\alpha_f(p)^\ell + \beta_f(p)^\ell)^2 \ln p & \text{si } n = p^\ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

## 1.4 Fonctions $L$ et matrices aléatoires

L'existence d'un lien profond entre les zéros non-triviaux d'une famille de fonctions  $L$  et les angles propres de matrices aléatoires a été mis en évidence par les travaux de Montgomery ([Mon73]). La notion de famille de fonctions  $L$  n'est pas bien définie mais par là, nous désignons un ensemble de fonctions  $L$  associées à des objets  $f$  de même nature. Ainsi, pour une famille de fonctions  $L$  naturelle, nous sommes en mesure de lui associer un groupe compact de matrices. L'objet de cette section est de présenter cette philosophie et quelques résultats que l'on peut en tirer. Nous y reviendrons lors du chapitre 5.

### 1.4.1 Familles de fonctions $L$ et conjecture de densité

Considérons une famille naturelle  $\mathcal{F}$  de fonctions  $L$  pour lesquelles nous supposons que l'hypothèse de Riemann est vérifiée. On ordonne cette famille à l'aide du conducteur analytique  $\mathfrak{q}_f = \mathfrak{q}(f, 0)$ . Ainsi, nous avons des sous-ensemble  $\mathcal{F}(Q)$  définis par  $\mathcal{F}(Q) = \{L(f, s) \in \mathcal{F}, \mathfrak{q}_f = Q\}$ . Chaque zéro  $\rho_f$  de  $L(f, s)$  sur la droite critique  $\Re(s) = 1/2$  pouvant s'écrire sous la forme  $\rho_f = \frac{1}{2} + i\gamma_f$ , nous posons  $\tilde{\rho}_f = \frac{1}{2} + i\tilde{\gamma}_f$  où  $\tilde{\gamma}_f = \gamma_f \frac{\ln \mathfrak{q}_f}{2\pi}$  est appelé zéro normalisé.

Afin d'étudier la distribution des petits zéros de  $L(f, s)$ , pour chaque fonction test  $\Phi$  appartenant à  $\mathcal{S}_\nu(\mathbb{R})$ , on définit

$$D[\Phi](f) = \sum_{\tilde{\gamma}_f} \Phi(\tilde{\gamma}_f)$$

où la somme porte sur les parties imaginaires des zéros normalisés comptés avec multiplicité. L'ensemble  $\mathcal{F}(Q)$  peut être vu comme un espace probabilisé associé à la tribu composée de tous les sous-ensembles et équipé de la mesure de dénombrement  $\mu_{\mathcal{F}(Q)}$ . Vu sous cet angle, la fonction  $D[\Phi]$  est une fonction mesurable définie sur  $\mathcal{F}(Q)$ . Cependant, nous ne sommes pas en mesure de déterminer le comportement asymptotique de  $D[\Phi](f)$  pour une seule fonction  $L$ . Pour palier cette insuffisance et obtenir des résultats significatifs, nous devons aborder ce problème en moyenne et considérer toute une famille de fonctions  $L$ . C'est pourquoi on définit la densité de niveau 1 comme étant l'espérance de la variable aléatoire  $D[\Phi]$  :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}(Q)}(D[\Phi]) = \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} D[\Phi](f).$$

On définit également la variance de  $D[\Phi]$  par

$$\mathbb{V}_{\mathcal{F}(Q)}(D[\Phi]) = \mathbb{E}([D[\Phi] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}(Q)}(D[\Phi])]^2) = \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} \left[ D[\Phi](f) - \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} D[\Phi](f) \right]^2$$

On cherche alors à déterminer le comportement asymptotique de  $\mathbb{E}_{\mathcal{F}(Q)}(D[\Phi])$  et  $\mathbb{V}_{\mathcal{F}(Q)}(D[\Phi])$  quand  $Q$  tend vers l'infini. La *conjecture de densité* prédit

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} D[\Phi](f) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W[\mathcal{F}](t) dt$$

où  $W[\mathcal{F}]$  est une fonction de densité ne dépendant que de  $\mathcal{F}$ .

Les exemples principaux que l'on considérera sont les familles de fonctions  $L$  associées à des caractères de Dirichlet et les familles de fonctions  $L$  de puissance symétrique. On note  $\mathcal{G}(q)$  l'ensemble des fonctions  $L$  associées à des caractères de Dirichlet primitifs modulo  $q$  et on définit alors la famille  $\mathcal{G}$  en posant

$$\mathcal{G} = \bigcup_{q \geq 1} \mathcal{G}(q).$$

De plus, on désigne par  $H_k^*(q)$  l'ensemble des formes primitives de poids  $k$  pair et de niveau  $q$  premier. Soit  $r$  un entier strictement positif. Soient

$$\mathcal{H}_r(q) = \{L(\text{Sym}^r f, s), f \in H_k^*(q)\}$$

et pour  $r$  impair,

$$\mathcal{H}_r^\pm(q) = \{L(\text{Sym}^r f, s), f \in H_k^*(q) \text{ et } \varepsilon(\text{Sym}^r f) = \pm 1\}.$$

On définit les familles de fonctions  $L$  de puissance symétrique en posant

$$\mathcal{H}_r = \bigcup_{q \text{ premier}} \mathcal{H}_r(q) \text{ et } \mathcal{H}_r^\pm = \bigcup_{q \text{ premier}} \mathcal{H}_r^\pm(q).$$

D'une manière générale, afin d'estimer la densité de niveau 1, on transforme la somme sur les zéros normalisés en une somme sur les nombres premiers. Malheureusement, nous ne sommes capable d'évaluer ces sommes que lorsque le support des fonctions tests est petit. Il en résulte que les théorèmes de densité existants ne sont établis que pour des fonctions tests appartenant à  $\mathcal{S}_{\nu_{\max}(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$  avec  $\nu_{\max}(\mathcal{F})$  fixé. Actuellement, la valeur maximale de  $\nu_{\max}(\mathcal{F})$  existante est 2 suite aux travaux de Iwaniec, Luo et Sarnak ([ILS00]), dans le cas des fonctions  $L$  de formes modulaires, alors que la conjecture de densité ne prédit aucune restriction de support.

Parfois, il est préférable d'utiliser la mesure harmonique en lieu et place de la mesure de dénombrement et cela pour des raisons purement techniques. Cela est le cas par exemple, pour les fonctions  $L$  de puissance symétrique. Plus précisément, pour un sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{H}_r(q)$ , on pose

$$\mu_{\mathcal{H}_r(q)}^h(A) = \sum_{L(\text{Sym}^r f, s) \in A} w_q(f) \quad \text{où} \quad \omega_q(f) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle_q}$$

ainsi que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{H}_r(q)}^h(D[\Phi]) = \sum_{f \in H_k^*(q)} \omega_q(f) D[\Phi](\text{Sym}^r f)$$

$$\text{et} \quad \mathbb{V}_{\mathcal{H}_r(q)}^h(D[\Phi]) = \sum_{f \in H_k^*(q)} \omega_q(f) \left[ D[\Phi](\text{Sym}^r f) - \mathbb{E}_{\mathcal{H}_r(q)}^h(D[\Phi]) \right]^2.$$

Par ailleurs, pour  $r$  impair et  $A$  un sous-ensemble de  $\mathcal{H}_r^\pm(q)$ , on pose

$$\mu_{\mathcal{H}_r^\pm(q)}^h(A) = 2 \sum_{L(\text{Sym}^r f, s) \in A} w_q(f)$$

ainsi que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^\pm(q)}^h(D[\Phi]) = 2 \sum_{\substack{f \in H_k^*(q) \\ \varepsilon(\text{Sym}^r f) = \pm 1}} \omega_q(f) D[\Phi](\text{Sym}^r f)$$

$$\text{et} \quad \mathbb{V}_{\mathcal{H}_r^\pm(q)}^h(D[\Phi]) = 2 \sum_{\substack{f \in H_k^*(q) \\ \varepsilon(\text{Sym}^r f) = \pm 1}} \omega_q(f) \left[ D[\Phi](\text{Sym}^r f) - \mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^\pm(q)}^h(D[\Phi]) \right]^2.$$

En réalité, cette mesure harmonique n'est pas une mesure de probabilité mais elle l'est asymptotiquement. En fait, grâce à la formule des traces de Petersson ([RR11], proposition 2.2) d'une part, et grâce à l'expression conjecturée précédemment quant à la valeur du signe  $\varepsilon(\text{Sym}^r f)$  d'autre part, nous avons

$$\lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \sum_{f \in H_k^*(q)} \omega_q(f) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \sum_{\substack{f \in H_k^*(q) \\ \varepsilon(\text{Sym}^r f) = \pm 1}} \omega_q(f) = \frac{1}{2}. \quad (1.4.1)$$

## 1.4.2 Matrices aléatoires et théorèmes de densité

Jusqu'à présent, parmi toutes les familles de fonctions  $L$  pour lesquelles la conjecture de densité a été mise à l'épreuve (citons [ILS00], [FI03], [HR03a], [RR11] ou [Mil04]), seules cinq densités  $W[\mathcal{F}]$  différentes sont apparues et il est remarquable que les densités obtenues correspondent aux densités associées à la répartition des angles propres de sous-groupes  $G$  de matrices unitaires de grandes tailles munis de leur mesure de Haar (À ce propos, on pourra consulter [Roy06], [Mic02] ou encore [KS99]). Ainsi, les fonctions de densités  $W[\mathcal{F}]$  sont égales à une densité  $W[G]$ . Ceci nous permet d'associer un groupe de symétries  $G$  aux familles de fonctions  $L$ .

Les groupes de symétries en question sont les groupes formés des matrices unitaires  $U$ , des matrices symplectiques  $Sp$ , des matrices orthogonales  $O$ , des matrices spéciales orthogonales de rang pair  $SO^+$  et de rang impair  $SO^-$  pour lesquels la transformée de Fourier de la densité  $W[G]$  est donnée par

$$\widehat{W[G]}(y) = \delta_0(y) + \frac{\delta}{2}\eta(y) + \varepsilon \quad (1.4.2)$$

où  $\delta_0$  est la distribution de Dirac en 0, la fonction  $\eta$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\eta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |y| = 1 \\ 0 & \text{si } |y| > 1 \end{cases}$$

et  $\delta$  ainsi que  $\varepsilon$  sont donnés par le tableau 1.1 ci-après.

$G$	$U$	$O$	$Sp$	$SO^+$	$SO^-$
$\delta$	0	0	-1	1	-1
$\varepsilon$	0	1/2	0	0	1

Tableau 1.1 – Valeur de  $(\delta, \varepsilon)$ .

Pour les familles de fonctions  $L$  précédemment introduites, on résume les théorèmes de densité dans l'énoncé suivant. Ceux-ci sont dûs à Hughes et Rudnick ([HR03a]) pour les fonctions  $L$  de Dirichlet, à Iwaniec, Luo et Sarnak ([ILS00]) pour les fonctions  $L$  de formes modulaires. Royer et Ricotta ont étendu ces résultats aux fonctions  $L$  de puissance symétrique. On pose

$$\nu_{1,max}(1, k, \theta) = 2 \text{ et } \nu_{1,max}(r, k, \theta) = \left(1 - \frac{1}{2(k-2\theta)}\right) \frac{2}{r^2} \text{ si } r \geq 2 \text{ avec } \theta = \frac{7}{64},$$

et pour  $\epsilon = \pm 1$ ,

$$\nu_{1,max}^\epsilon(1, k, \theta) = 2 \text{ et } \nu_{1,max}^\epsilon(r, k, \theta) = \inf \left\{ \nu_{1,max}(r, k, \theta), \frac{3}{r(r+1)} \right\} \text{ si } r \geq 2.$$

Par ailleurs, on introduit différents paramètres en fonction de la famille considérée. Ceux-ci sont donnés par le tableau ci-après.

$\mathcal{F}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{H}_r$ ( $r$ pair)	$\mathcal{H}_r$ ( $r$ impair)	$\mathcal{H}_r^+$ ( $r$ impair)	$\mathcal{H}_r^-$ ( $r$ impair)
$\nu_{\max}(\mathcal{F})$	2	$\nu_{1,\max}(r, k, \theta)$	$\nu_{1,\max}(r, k, \theta)$	$\nu_{1,\max}^+(r, k, \theta)$	$\nu_{1,\max}^-(r, k, \theta)$
$\rho_{\max}(\mathcal{F})$	1	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{2r(r+2)}$	$\frac{1}{2r(r+2)}$
$W[\mathcal{F}]$	$W[U]$	$W[Sp]$	$W[O]$	$W[SO^+]$	$W[SO^-]$
$W^*[\mathcal{F}]$	$W[U]$	$W[Sp]$	$W[O]$	$W[SO^+]$	$W[Sp]$

Tableau 1.2 – Quelques familles naturelles de fonctions  $L$ .

En admettant suffisamment d'hypothèses de Riemann<sup>3</sup>, on a le théorème suivant.

**Théorème 1.4.1** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions  $L$  du tableau précédent. Alors, pour toute fonction test  $\Phi$  appartenant à  $\mathcal{S}_{\nu_{\max}(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ , on a*

$$\lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{E}_{\mathcal{F}(q)} (D[\Phi]) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W[G](t) dt.$$

De plus, si  $\Phi$  appartient à  $\mathcal{S}_{\rho_{\max}(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ , alors

$$\lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{V}_{\mathcal{F}(q)} (D[\Phi]) = \begin{cases} \int_{-1}^1 |u| \hat{\Phi}(u)^2 du & \text{si } \mathcal{F} = \mathcal{G}, \\ 2 \int_{-1}^1 |u| \hat{\Phi}(u)^2 du & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 1.4.1** Dans le cas des fonctions  $L$  de puissance symétrique, ces résultats s'énoncent avec la mesure harmonique.

En associant un groupe de matrices à une famille de fonctions  $L$ , on dispose alors d'un modèle qui nous permet de conjecturer des résultats sur les fonctions  $L$  en s'intéressant à son pendant du point de vue matrices aléatoires. De nombreuses conjectures ont ainsi été émises, on pourra notamment consulter [CFK<sup>+</sup>05]. Par ailleurs, les théorèmes de densités permettent d'obtenir d'autres résultats relatifs aux fonctions  $L$ . Bien souvent, ces nouveaux résultats sont soumis à la validité d'une ou plusieurs hypothèses de Riemann. Ainsi, Iwaniec, Luo et Sarnak obtiennent des minoration de la proportion de fonctions  $L$  de formes modulaires ne s'annulant pas au point critique (voir [ILS00], corollaires 1.6, 1.7 et 1.8). De telles proportions sont intimement liées à la

3. Nous ne détaillerons pas les hypothèses en question par souci de lisibilité. Par ailleurs, dans nos applications du chapitre 5, nous supposons l'hypothèse de Riemann vérifiée pour chaque fonction  $L$ . Pour plus de précisions, nous renvoyons aux articles précédemment cités.

non-existence du zéro exceptionnel pour les fonctions  $L$  de Dirichlet, pour lesquelles les auteurs supposent vérifiées les hypothèses de Riemann au cours de la preuve des théorèmes de densité!

Une autre application relative au plus petit zéro non-trivial a été donnée par Hughes et Rudnick ([HR03a]) dans le cas des fonctions  $L$  de Dirichlet. Le propos du chapitre 5 est de généraliser cette application à n'importe quelle famille de fonctions  $L$  en fonction du groupe de symétries qui lui est associé.

### 1.4.3 Plus petit angle propre

Dans le chapitre 5, nous utiliserons les théorèmes de densité afin d'obtenir des informations sur le comportement asymptotique du plus petit zéro non-trivial d'une famille de fonctions  $L$ . Penchons-nous quelques instants sur l'analogie de ce problème du point de vue des matrices aléatoires. En notant pour toute matrice  $A$  unitaire,  $\Phi_1(A)$  son plus petit angle propre et en posant

$$\tilde{\Phi}_1(A) = \begin{cases} \frac{N}{2\pi} \Phi_1(A) & \text{si } A \in U(N), \\ \frac{N}{\pi} \Phi_1(A) & \text{si } A \in SO(2N) \text{ ou } A \in Sp(2N), \\ \frac{N+1/2}{\pi} \Phi_1(A) & \text{si } A \in SO(2N+1), \end{cases}$$

on trouve dans [Roy06] les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Haar} \left\{ A \in U(N) : \tilde{\Phi}_1(A) \in [0, x] \right\} &= x - \frac{\pi^2}{36} x^4 + O(x^6), \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Haar} \left\{ A \in SO(2N) : \tilde{\Phi}_1(A) \in [0, x] \right\} &= 2x - \frac{2\pi^2}{9} x^3 + O(x^5), \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Haar} \left\{ A \in SO(2N+1) : \tilde{\Phi}_1(A) \in [0, x] \right\} &= \frac{2\pi^2}{9} x^3 + O(x^5), \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Haar} \left\{ A \in Sp(2N) : \tilde{\Phi}_1(A) \in [0, x] \right\} &= \frac{2\pi^2}{9} x^3 + O(x^5). \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que quel que soit le groupe de symétries  $G$  intervenant, on a, pour tout  $x > 0$ , pour tout  $N$  assez grand,

$$\text{Haar} \left\{ A \in G(N) : \tilde{\Phi}_1(A) \in [0, x] \right\} > 0.$$

Ainsi, pour tout  $x > 0$ , pour tout  $N$  assez grand, il existe une proportion positive de matrices  $A$  dans  $G(N)$  telles que  $0 < \tilde{\Phi}_1(A) < x$ . En particulier, il en existe au moins une. Autrement dit,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \inf_{A \in G(N)} \tilde{\Phi}_1(A) = 0.$$



## Chapitre 2

# Problème de convolution en moyenne

### 2.1 Énoncé du problème et résultat

Considérons une famille de fonctions  $g_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\text{supp } g_h \subset [M_1, 2M_1] \times [M_2, 2M_2]$  et telle que, pour tous entiers positifs  $i$  et  $j$ , on ait la majoration indépendante de  $h$

$$x^i y^j \frac{\partial^{i+j} g_h}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \ll_{i,j} P_1^i P_2^j.$$

Pour une forme modulaire primitive  $f$  de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère  $\chi$ , nous désignons par  $(\lambda_f(n))_{n \geq 1}$  la suite des coefficients de Fourier normalisés de  $f$ . Le but de cette étude est d'obtenir une borne non triviale de  $\Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a)$ , définie par

$$\Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a) = \sum_{h=1}^H a(h) \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 1 \\ \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = h}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} g_h(m_1, m_2),$$

uniforme en  $\ell_1, \ell_2, P_1, P_2, M_1, M_2, H$  et  $a$  où  $(a(h))$  désigne une suite de nombres complexes. On montre le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1** *Soit  $h_1$  un entier positif relié à la suite complexe  $(a(h))$  grâce à la propriété*

$$a(h) \neq 0 \Rightarrow h \leq H, \quad h_1 | h \quad \text{et} \quad \left( h_1, \frac{h}{h_1} \right) = 1.$$

*Alors, pour  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$  et s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que*

$$H \ll \frac{A}{\max\{P_1, P_2\}^2} \frac{1}{(\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2)^\epsilon}, \quad (2.1.1)$$

*alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a*

$$\begin{aligned} \Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll A^{\frac{1}{2}} h_1^\theta \|a\|_2 \max\{P_1, P_2\}^{\frac{3}{2}} \\ &\times \left[ \sqrt{P_1 + P_2} + \left( \frac{A}{\max\{P_1, P_2\}} \right)^\theta \left( 1 + \sqrt{\frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \right] (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2 H)^\varepsilon. \end{aligned}$$



## 2.2 Méthode du cercle

### 2.2.1 Une approximation de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$

On trouvera la preuve du lemme suivant dans [Jut97]. Il s'agit d'une variante de la méthode du cercle.

**Lemme 2.2.1** *Soient deux paramètres  $Q$  et  $\delta$  tels que  $Q \geq 1$  et  $Q^{-2} \leq \delta \leq Q^{-1}$ . Soit une fonction  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , positive, bornée, dont le support est contenu dans  $[Q, 2Q]$  et vérifiant  $\sum_{Q \leq q \leq 2Q} w(q) > 0$ . Pour chaque rationnel  $r$ , on note  $I_r$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $[r - \delta, r + \delta]$  et on pose*

$$\Lambda = \sum_{q \geq 0} w(q) \varphi(q), \quad \tilde{I}(\alpha) = \frac{1}{2\delta\Lambda} \sum_{q \geq 0} w(q) \sum_{d(q)}^* I_{d/q}(\alpha)$$

où  $\varphi$  désigne la fonction indicatrice d'Euler et où l'astérisque restreint la somme aux classes de congruences modulo  $q$  inversibles dans  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . Alors, pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a

$$\int_0^1 (1 - \tilde{I}(\alpha))^2 d\alpha \ll_\varepsilon \frac{Q^{2+\varepsilon}}{\delta\Lambda^2}.$$

**Remarque 2.2.1** La fonction  $\tilde{I}$  est construite pour approcher la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour ce faire,  $\tilde{I}$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'indicatrices de petits intervalles autour des rationnels de  $[0, 1]$  dont le dénominateur de la représentation sous forme irréductible est compris entre  $Q$  et  $2Q$ . Ces rationnels forment une suite de Farey. Par ailleurs, le voisinage autour de ces rationnels est pris suffisamment petit pour que les fonctions indicatrices ainsi construites soient à support disjoint. Le paramètre  $\Lambda$  représente alors le nombre de rationnels dans la suite de Farey, c'est-à-dire le nombre de fonctions indicatrices définissant  $\tilde{I}$ . Le facteur  $1/2\delta\Lambda$  est un facteur de normalisation assurant  $\int_0^1 \tilde{I}(\alpha) d\alpha = 1$ . Le lemme 2.2.1 précise alors de quelle manière  $\tilde{I}$  approche  $\mathbb{1}_{[0,1]}$ .

### 2.2.2 Contribution des arcs mineurs

Soit  $\Delta = \min \left\{ \frac{P_1}{\ell_1 M_1}, \frac{P_2}{\ell_2 M_2} \right\}$ . Soit  $Q \geq 1/\Delta$ . On pose  $\delta = 1/Q$  de telle sorte que  $\delta \leq \Delta$ . Dans la suite, on choisira  $Q = (P_1 P_2 M_1 M_2 H \ell_1 \ell_2)^A$  avec  $A$  grand et ainsi  $Q$  désignera un paramètre de grande taille. On considère également  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lisse, vérifiant  $\phi(0) = 1$ ,  $\text{supp } \phi \subset [-\Delta^{-1}, \Delta^{-1}]$  et  $\|\phi^{(j)}\|_\infty \ll_j \Delta^j$ . On pose alors

$$W_h(x, y) = g_h(x, y) \phi(\ell_1 x - \ell_2 y - h).$$

Étant donné la définition de  $\Delta$ , comme  $g_h$ , la fonction  $W_h$  vérifie

$$x^i y^j \frac{\partial^{i+j} W_h}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \ll_{i,j} P_1^i P_2^j$$

mais le support de  $W_h$  se retrouve quelque peu restreint par rapport à celui de  $g_h$  puisque  $\text{Vol}(\text{supp } g_h) \ll M_1 M_2$  alors que

$$\text{Vol}(\text{supp } W_h) \ll \begin{cases} \frac{M_1 M_2}{P_1} & \text{si } \frac{\ell_1 M_1}{P_1} \gg \frac{\ell_2 M_2}{P_2}, \\ \frac{M_1 M_2}{P_2} & \text{si } \frac{\ell_1 M_1}{P_1} \ll \frac{\ell_2 M_2}{P_2}. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

On considère également une fonction lisse  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à support dans  $[Q, 2Q]$  et dont les dérivées successives vérifient  $\|w^{(j)}\|_\infty \ll_j Q^{-j}$ . On pose

$$\Lambda = \sum_{q=0}^{\lfloor N\ell_1\ell_2 \rfloor} w(q)\varphi(q) \asymp \frac{Q^2}{N\ell_1\ell_2}. \quad (2.2.2)$$

**Proposition 2.2.1** *Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$\Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) + O\left(\frac{\ell_1\ell_2 P_1 P_2 N^3 k^3 \sqrt{M_1 M_2}}{\sqrt{Q}} \|a\|_1 (QM_1 M_2 N k)^\varepsilon\right)$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{1}{2\delta\Lambda} \sum_{h=1}^H a(h) \sum_{q=0}^{\lfloor N\ell_1\ell_2 \rfloor} w(q) \sum_{d(q)}^* \int_{-\delta}^{\delta} \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \\ &\quad e\left(\ell_1 m_1 \left(\frac{d}{q} + \eta\right)\right) e\left(-\ell_2 m_2 \left(\frac{d}{q} + \eta\right)\right) W_h(m_1, m_2) e\left(-h \left(\frac{d}{q} + \eta\right)\right) d\eta. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Preuve : Étant donné que  $\phi(0) = 1$ , on peut changer  $g_h$  en  $W_h$  dans la définition de  $\Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a)$ . Par ailleurs, on détecte la condition  $\ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = h$  grâce à la relation  $\int_0^1 e(n\alpha) d\alpha = \delta(n)$  (le symbole  $\delta$  désignant ici la distribution de Dirac en 0). Ce faisant, on obtient

$$\Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a) = \sum_{h=1}^H a(h) \int_0^1 \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} e(\ell_1 m_1 \alpha) e(-\ell_2 m_2 \alpha) W_h(m_1, m_2) e(-h\alpha) d\alpha.$$

On applique alors le lemme 2.2.1 avec les paramètres  $Q, \delta$  précédemment définis et avec la fonction  $q \mapsto w(q) \mathbb{1}_{\{q=0\}}(q)$ . Il vient immédiatement

$$\begin{aligned} \Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) \\ &+ \sum_{h=1}^H a(h) \int_0^1 \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} e(\ell_1 m_1 \alpha) e(-\ell_2 m_2 \alpha) W_h(m_1, m_2) e(-h\alpha) (1 - \tilde{I}(\alpha)) d\alpha. \end{aligned}$$

Le terme  $\Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a)$  correspond ainsi à la contribution de  $\alpha$  au voisinage des rationnels de la suite de Farey considérée (les arcs majeurs). La différence entre  $\Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a)$  et  $\Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a)$

correspond quant à elle à la contribution des  $\alpha$  loin des rationnels de la suite de Farey, ce sont les arcs mineurs. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} & \Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a) - \Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) \\ & \ll \sum_{h=1}^H |a(h)| \int_0^1 |1 - \tilde{I}(\alpha)| d\alpha \max_{\alpha \in [0,1]} \left| \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} e(\ell_1 m_1 \alpha) e(-\ell_2 m_2 \alpha) W_h(m_1, m_2) \right|. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au lemme 2.2.1, nous avons d'une part

$$\int_0^1 |1 - \tilde{I}(\alpha)| d\alpha \leq \sqrt{\int_0^1 |1 - \tilde{I}(\alpha)|^2 d\alpha} \ll \frac{Q^{1+\varepsilon}}{\sqrt{\delta} \Lambda} \ll \frac{Q^\varepsilon N \ell_1 \ell_2}{\sqrt{Q}}.$$

D'autre part, grâce à une double transformation d'Abel et à la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha \in [0,1]} \left| \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} e(\ell_1 m_1 \alpha) e(-\ell_2 m_2 \alpha) W_h(m_1, m_2) \right| \\ & \leq \max_{\substack{\alpha_1 \in [0,1] \\ \alpha_2 \in [0,1]}} \left| \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} e(\ell_1 m_1 \alpha_1) e(-\ell_2 m_2 \alpha_2) W_h(m_1, m_2) \right| \\ & \leq \max_{\substack{\alpha_1 \in [0,1] \\ \alpha_2 \in [0,1]}} \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \left| \sum_{n_1 \leq m_1} \lambda_f(n_1) e(\ell_1 n_1 \alpha_1) \right| \left| \sum_{n_2 \leq m_2} \lambda_f(n_2) e(\ell_2 n_2 \alpha_2) \right| \int_{m_1}^{m_1+1} \int_{m_2}^{m_2+1} \left| \frac{\partial^2 W_h}{\partial u \partial v}(u, v) \right| dudv. \end{aligned}$$

On trouvera dans [HM06a] (proposition 2.5) la majoration suivante relative aux sommes d'exponentielles associées à une forme primitive. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , uniformément en  $x$ ,  $\alpha$  réel et  $f$ , on a

$$\sum_{n \leq x} \lambda_f(n) e(n\alpha) \ll_\varepsilon N k^{3/2} x^{1/2} (N k x)^\varepsilon.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \Sigma(\ell_1, \ell_2, H, a) - \Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) \\ & \ll \|a\|_1 \frac{Q^\varepsilon N \ell_1 \ell_2}{\sqrt{Q}} N^2 k^3 \sqrt{M_1 M_2} (N k M_1 M_2)^\varepsilon \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\partial^2 W_h}{\partial u \partial v}(u, v) \right| dudv \\ & \ll \|a\|_1 \frac{N^3 k^3 \ell_1 \ell_2 P_1 P_2 \sqrt{M_1 M_2}}{\sqrt{Q}} (Q N k M_1 M_2)^\varepsilon. \end{aligned}$$

□

La suite de ce chapitre sera intégralement dédiée à l'estimation de la contribution des arcs majeurs.

## 2.3 Arcs majeurs et partie diagonale

### 2.3.1 Formule sommatoire

Le lemme suivant présente une formule sommatoire de type Voronoï qui permet de transformer des sommes courtes d'exponentielles en sommes plus longues d'exponentielles. Cette formule est un cas particulier de celles établies dans l'annexe A de [KMV02].

**Lemme 2.3.1** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids  $k$ , de niveau  $N$  et de caractère  $\chi$ . Soit  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_\pm^*$  lisse et à support compact. On suppose que  $d$  et  $q$  sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux tels que  $N$  divise  $q$ . Soit  $\bar{d}$  tel que  $\bar{d}d \equiv 1[q]$ . Alors*

$$\sum_{m \geq 1} \lambda_f(m) e\left(\frac{dm}{q}\right) w(m) = \bar{\chi}(d) \sum_{m \geq 1} \lambda_f(m) e\left(-\frac{\bar{d}m}{q}\right) \frac{2i^k \pi}{q} \int_0^{+\infty} w(x) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mx}}{q}\right) dx.$$

**Lemme 2.3.2** *Soit  $\psi$  une fonction lisse à support compact inclus dans  $[M, 2M]$  et vérifiant pour tout entier  $j$  positif*

$$\left| x^j \psi^{(j)}(x) \right| \ll_j P^j$$

où  $P$  est un réel tel que  $P \geq 1$ . Soit  $\lambda$  un réel strictement positif et  $\nu$  un complexe. Alors pour tout entier  $i$  positif, il existe une fonction  $\psi_i$  lisse à support dans  $[M, 2M]$ , vérifiant

$$\left| x^j \psi_i^{(j)}(x) \right| \ll_{i,j} P^j$$

et telle que

$$\int_0^{+\infty} J_{\nu-1}(\lambda\sqrt{x}) \psi(x) dx = \left( \frac{P\nu}{\lambda\sqrt{M}} \right)^i \int_0^{+\infty} J_{\nu+i-1}(\lambda\sqrt{x}) \psi_i(x) dx.$$

Preuve : On prouve ce lemme par récurrence sur  $i$ . L'initialisation de cette récurrence étant immédiate, il nous faut prouver l'hérédité. Par ailleurs, quitte à remplacer  $\psi_i$  par  $\psi$ , il suffit de prouver l'existence de  $\psi_1$ . De la relation (A.2), on déduit

$$\frac{d}{dx} \left[ x^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{x}) \right] = \frac{\lambda}{2} x^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(\lambda\sqrt{x}).$$

Dès lors, une intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} J_{\nu-1}(\lambda\sqrt{x}) \psi(x) dx = \frac{P\nu}{\lambda\sqrt{M}} \int_0^{+\infty} J_\nu(\lambda\sqrt{x}) \psi_1(x) dx$$

avec

$$\psi_1(x) = -\frac{2\sqrt{M}}{\nu P} x^{\nu/2} \frac{d}{dx} \left[ x^{\frac{1-\nu}{2}} \psi(x) \right] = \frac{2\sqrt{M}}{\nu P} \left( \frac{\nu-1}{2\sqrt{x}} \psi(x) - \sqrt{x} \psi'(x) \right).$$

La formule de Leibnitz montre enfin que les dérivées successives de  $\psi_1$  vérifient bien les majorations annoncées. □

Les deux lemmes analytiques précédents nous permettent de déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 2.3.1** *On a*

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{1}{2\delta\Lambda} \sum_{h=1}^H a(h) \sum_{q \equiv 0[N\ell_1\ell_2]} w(q) \int_{-\delta}^{\delta} e(-\eta h) \\ &\quad \times \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} S(-h, \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1; q) G_{q, h, \eta}(m_1, m_2) d\eta \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G_{q, h, \eta}(x_1, x_2) &= \frac{4\pi^2 \ell_1 \ell_2}{q^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_h(t_1, t_2) e(\ell_1 t_1 \eta - \ell_2 t_2 \eta) \\ &\quad \times J_{k-1} \left( \frac{4\pi \ell_1 \sqrt{x_1 t_1}}{q} \right) J_{k-1} \left( \frac{4\pi \ell_2 \sqrt{x_2 t_2}}{q} \right) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

De plus, la fonction  $G_{q, h, \eta}$  vérifie

$$\begin{aligned} G_{q, h, \eta}(m_1, m_2) &\ll_{r_1, r_2} \frac{\ell_1 \ell_2}{q^2} \text{Vol}(\text{supp } W_h) \left( \frac{P_1 k q}{\ell_1 \sqrt{m_1 M_1}} \right)^{r_1} \left( \frac{P_2 k q}{\ell_2 \sqrt{m_2 M_2}} \right)^{r_2} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ell_1 \sqrt{M_1 m_1}}{q}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ell_2 \sqrt{M_2 m_2}}{q}}}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Preuve : En appliquant à deux reprises le lemme 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} e \left( \ell_1 m_1 \left( \frac{d}{q} + \eta \right) \right) e \left( -\ell_2 m_2 \left( \frac{d}{q} + \eta \right) \right) W_h(m_1, m_2) \\ &= \sum_{m_1, m_2 \geq 1} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} e \left( \frac{\bar{d}(\ell_2 m_2 - \ell_1 m_1)}{q} \right) G_{q, h, \eta}(m_1, m_2). \end{aligned}$$

En insérant cette relation dans la relation (2.2.3) définissant  $\Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a)$ , la somme sur  $d$  se transforme en la somme de Kloosterman  $S(-h, \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1; q)$  et on obtient la relation annoncée. Concernant la taille de la fonction  $G_{q, h, \eta}$ , étant donné que  $|\eta| \leq \delta = 1/Q \leq \Delta$ , l'application  $W_{h, \eta} : (t_1, t_2) \mapsto W_h(t_1, t_2) e(\ell_1 t_1 \eta - \ell_2 t_2 \eta)$  a son support inclus dans celui de  $W_h$  et vérifie

$$t_1^i t_2^j \frac{\partial^{i+j} W_{h, \eta}}{\partial t_1^i \partial t_2^j}(t_1, t_2) \ll_{i, j} P_1^i P_2^j.$$

Dès lors, grâce au lemme 2.3.2, pour tout couple d'entiers positifs  $(r_1, r_2)$ , il existe une fonction lisse  $W_{h, \eta, r_1, r_2}$  bornée (dont la borne ne dépend que de  $r_1$  et  $r_2$ ) dont le support est inclus dans celui de  $W_h$  telle que

$$\begin{aligned} G_{q, h, \eta}(m_1, m_2) &= \frac{4\pi^2 \ell_1 \ell_2}{q^2} \left( \frac{P_1 k q}{4\pi \ell_1 \sqrt{m_1 M_1}} \right)^{r_1} \left( \frac{P_2 k q}{4\pi \ell_2 \sqrt{m_2 M_2}} \right)^{r_2} \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_{h, \eta, r_1, r_2}(t_1, t_2) J_{k+r_1-1} \left( \frac{4\pi \ell_1 \sqrt{m_1 t_1}}{q} \right) J_{k+r_2-1} \left( \frac{4\pi \ell_2 \sqrt{m_2 t_2}}{q} \right) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

On obtient alors la majoration (2.3.1) en utilisant la borne  $J_\nu(z) \ll \frac{1}{(1+z)^{1/2}}$  pour  $\nu$  entier positif (confer [KMV02], appendice C ou [Blo05], partie 5).

□

On décompose alors

$$\Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_1^D(\ell_1, \ell_2, H, a) + \Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) \quad (2.3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_1^D(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{1}{2\delta\Lambda} \sum_{h=1}^H a(h) \sum_{q \equiv 0 [N\ell_1\ell_2]} w(q) \int_{-\delta}^{\delta} e(-\eta h) \\ &\quad \times \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 1 \\ \ell_1 m_1 = \ell_2 m_2}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} S(-h, \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1; q) G_{q, h, \eta}(m_1, m_2) d\eta \end{aligned}$$

et

$$\Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a) - \Sigma_1^D(\ell_1, \ell_2, H, a).$$

### 2.3.2 Contribution des termes diagonaux

L'objet de cette partie est d'estimer la contribution des termes diagonaux dans  $\Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a)$ . Plus précisément, on prouve la proposition suivante :

**Proposition 2.3.1** *Pour  $i = 1, 2$ , posons  $\ell'_i = \ell_i / (\ell_1, \ell_2)$ . Alors pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , on a*

$$\Sigma_1^D(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll \frac{HP_1P_2k^2\|a\|_1}{Q\sqrt{M_1M_2\ell'_1\ell'_2}} \text{Vol}(\text{supp } W_h) \left( \frac{P_1P_2k^2Q^2}{\ell_1\ell_2\sqrt{M_1M_2}} \right)^\varepsilon.$$

**Remarque 2.3.1** Dans cette majoration, il apparait une puissance négative de  $Q$  (on a  $Q^{2\varepsilon-1}$ ). En prenant  $Q$  grand devant les autres paramètres, on montre ainsi que la contribution diagonale est négligeable.

Preuve : On a défini  $\ell'_1$  et  $\ell'_2$  de telle sorte que la condition  $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$  soit équivalente à  $(m_1, m_2) = (m\ell'_2, m\ell'_1)$  avec  $m$  entier. On a alors

$$\Sigma_1^D(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll \frac{1}{\Lambda} \sum_{h=1}^H |a(h)| \sum_{\substack{Q \leq q \leq 2Q \\ q \equiv 0 [N\ell_1\ell_2]}} \sum_{m \geq 1} \tau(m\ell'_1) \tau(m\ell'_2) |S(-h, 0; q)| \max_{\eta \in [-\delta, \delta]} |G_{q, h, \eta}(m\ell'_2, m\ell'_1)|.$$

On a d'une part la majoration des sommes de Ramanujan qui nous donne  $|S(-h, 0; q)| \leq (h, q) \leq H$  et d'autre part, grâce à l'estimation (2.3.1), on a pour tout entier  $r$  positif

$$\max_{\eta \in [-\delta, \delta]} |G_{q, h, \eta}(m\ell'_2, m\ell'_1)| \ll \frac{\ell_1\ell_2}{q^2} \text{Vol}(\text{supp } W_h) \left( \frac{P_1P_2k^2q^2}{m\ell_1\ell_2\sqrt{M_1M_2\ell'_1\ell'_2}} \right)^r.$$

Dès lors, en appliquant la majoration précédente avec  $r = 0$  pour les petites valeurs de  $m$  et avec  $r \geq 2$  pour les grandes valeurs de  $m$ , on en déduit

$$\begin{aligned} \Sigma_1^D(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll \frac{H\ell_1\ell_2}{Q^2\Lambda} \text{Vol}(\text{supp } W_h) \|a\|_1(\ell'_1\ell'_2)^\varepsilon \left( \sum_{\substack{Q \leq q \leq 2Q \\ q=0[N\ell_1\ell_2]}} 1 \right) \\ &\times \left[ \sum_{m < \frac{P_1P_2k^2Q^2}{\ell_1\ell_2\sqrt{M_1M_2\ell'_1\ell'_2}}} m^{2\varepsilon} + \left( \frac{P_1P_2k^2Q^2}{\ell_1\ell_2\sqrt{M_1M_2\ell'_1\ell'_2}} \right)^r \sum_{m \geq \frac{P_1P_2k^2Q^2}{\ell_1\ell_2\sqrt{M_1M_2\ell'_1\ell'_2}}} m^{2\varepsilon-r} \right] \\ &\ll \frac{H\ell_1\ell_2}{Q^3} \text{Vol}(\text{supp } W_h) \|a\|_1(\ell'_1\ell'_2)^\varepsilon \left( \frac{P_1P_2k^2Q^2}{\ell_1\ell_2\sqrt{M_1M_2\ell'_1\ell'_2}} \right)^{1+2\varepsilon}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé après simplification.  $\square$

## 2.4 Arcs majeurs et décomposition spectrale

On étudie dans cette partie la contribution des termes non diagonaux figurant dans  $\Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a)$ . On montre la proposition suivante, qui combinée avec la relation 2.3.2 et les propositions 2.2.1 et 2.3.1, prouve le théorème 2.1.1 au détail près que le facteur  $\max\{P_1, P_2\}^{3/2}$  est remplacé par  $\frac{\max\{P_1, P_2\}^{5/2}}{\min\{P_1, P_2\}}$ . Pour obtenir le théorème sous la forme annoncée, il suffit de remarquer que les fonctions  $g_h$  vérifient clairement pour tout couple d'entiers positifs  $(i, j)$

$$x^i y^j \frac{\partial^{i+j} g_h}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \ll_{i,j} \max\{P_1, P_2\}^{i+j}.$$

**Proposition 2.4.1** *Si  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$ , alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a*

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll A^{\frac{1}{2}} h_1^\theta \|a\|_2 \frac{\max\{P_1, P_2\}^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\min\{P_1, P_2\}} \\ &\times \left[ \sqrt{P_1 + P_2} + \left( \frac{A}{\max\{P_1, P_2\}} \right)^\theta \left( 1 + \sqrt{\frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \right] (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2 H)^\varepsilon. \end{aligned}$$

### 2.4.1 Initialisation

On introduit les paramètres  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  définis, pour  $\varepsilon > 0$ , par

$$\mathcal{M}_1 = \frac{Q^2 P_1^2 k^2}{\ell_1^2 M_1} (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2)^\varepsilon \text{ et } \mathcal{M}_2 = \frac{Q^2 P_2^2 k^2}{\ell_2^2 M_2} (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2)^\varepsilon.$$

Soit  $w_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  lisse, à support dans  $[1/2, 2H]$ , constante égale à 1 sur  $[1, H]$  et vérifiant  $|w_1'(h)| \ll 1/h$ . Par ailleurs, on pose

$$a_{\eta, t_1, t_2}(h) = a(h)e(-\eta h)W_h(t_1, t_2)e(\ell_1 t_1 \eta - \ell_2 t_2 \eta)$$

et  $\Phi_{t_1, t_2}(x; m_1, m_2, r, h) = \frac{Qx}{\sqrt{h|r|}} J_{k-1} \left( \frac{x \ell_1 \sqrt{m_1 t_1}}{\sqrt{h|r|}} \right) J_{k-1} \left( \frac{x \ell_2 \sqrt{m_2 t_2}}{\sqrt{h|r|}} \right) w \left( \frac{4\pi \sqrt{h|r|}}{x} \right) w_1(h)$ .

On introduit également les fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  définies par

$$\Phi_1(x; y, z, \xi) = \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial z \partial y} \left[ \Phi_{t_1, t_2} \left( x; y, \frac{z + \ell_1 y}{\ell_2}, z, \xi \right) \right] \quad (2.4.1)$$

$$\text{et } \Phi_2(x; y, z, \xi) = \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial z \partial y} \left[ \Phi_{t_1, t_2} \left( x; \frac{z + \ell_2 y}{\ell_1}, y, z, \xi \right) \right]. \quad (2.4.2)$$

L'étude de ces fonctions sera essentielle dans l'estimation de  $\Sigma_1(\ell_1, \ell_2, H, a)$ , c'est pourquoi on commence par énoncer quelques lemmes précisant les propriétés analytiques de  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Dans toute la suite, on considère les paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  définis par

$$\alpha_1 = \frac{\ell_1 \sqrt{t_1 y}}{\sqrt{z \xi}}, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{\ell_2 t_2 (z + \ell_1 y)}}{\sqrt{z \xi}},$$

$$\alpha_2 = \frac{\ell_2 \sqrt{t_2 y}}{\sqrt{z \xi}}, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{\ell_1 t_1 (z + \ell_2 y)}}{\sqrt{z \xi}}.$$

**Lemme 2.4.1** *Il existe des fonctions lisses  $u_1$  et  $v_1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , à support dans  $[1/2, 2H]$  vérifiant  $u_1|_{[1, H]} = v_1|_{[1, H]} = 1$  et  $\|u_1\|_\infty, \|v_1\|_\infty \ll 1$  et des fonctions  $u, v$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , à support dans  $[Q, 2Q]$  et dont les dérivées successives vérifient  $\|u^{(j)}\|_\infty, \|v^{(j)}\|_\infty \ll_j Q^{-j}$  et il existe une constante  $c$  strictement positive telles que, pour  $(i, j) = (1, 2)$  ou  $(2, 1)$ , pour tous réels positifs  $x, y, z$  et  $\xi$  vérifiant  $\xi \gg 1, z \gg 1$  et  $1 \ll y \ll \mathcal{M}_i$ , alors*

$$\Phi_i(x; y, z, \xi) = \frac{\sqrt{\ell_i}}{Qz\xi\sqrt{y}} \left[ u_1(\xi)u \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) + v_1(\xi)v \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \right]$$

$$\times \left[ \sqrt{\ell_i t_i} J'_{k-1}(x\alpha_i) J_{k-1}(x\beta_i) + \sqrt{\ell_j t_j} J_{k-1}(x\alpha_i) J'_{k-1}(x\beta_i) \right]$$

$$+ O \left( \frac{(\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2 k)^c}{Q^2} \right).$$

Preuve : On traite uniquement le cas de  $\Phi_1$ . On obtient de la même manière le résultat annoncé pour  $\Phi_2$ . Afin d'alléger quelque peu les notations, on pose

$$A(x; y, z, \xi) = \ell_1 \sqrt{t_1} J'_{k-1}(\alpha_1 x) J_{k-1}(\beta_1 x) + \sqrt{\ell_1 \ell_2 t_2} J_{k-1}(\alpha_1 x) J'_{k-1}(\beta_1 x).$$



Dès lors,

$$\begin{aligned}
& \Phi_1(x; y, z, \xi) \\
&= \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial z \partial y} \left[ \frac{Qx}{\sqrt{z\xi}} w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) w_1(\xi) J_{k-1}(\alpha x) J_{k-1}(\beta x) \right] = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \left[ \frac{Qx^2}{2z\xi\sqrt{y}} w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) w_1(\xi) A(x; y, z, \xi) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{Qx^2}{2\xi z^2 \sqrt{y}} w_1(\xi) \left( \frac{2\pi\sqrt{z\xi}}{x} w' \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) - w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \right) A(x; y, z, \xi) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{Qx^2}{2z\xi\sqrt{y}} w_1(\xi) w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \frac{\partial A}{\partial \xi}(x; y, z, \xi) \right] \\
&= \frac{Qx^2}{2z^2\xi^2\sqrt{y}} \left( [\xi w_1'(\xi) - w_1(\xi)] \left[ \frac{2\pi\sqrt{z\xi}}{x} w' \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) - w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + w_1(\xi) \left[ -\frac{\pi\sqrt{z\xi}}{x} w' \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) + \frac{4\pi^2 z \xi}{x^2} w'' \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \right] \right) A(x; y, z, \xi) + E_1 + E_2 + E_3
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{Qx^2}{2z^2\xi\sqrt{y}} w_1(\xi) \left[ \frac{2\pi\sqrt{z\xi}}{x} w' \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) - w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \right] \frac{\partial A}{\partial \xi}(x; y, z, \xi) \\
E_2 &= \frac{Qx^2}{2z\xi^2\sqrt{y}} \left[ (\xi w_1'(\xi) - w_1(\xi)) w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) + w_1(\xi) \frac{2\pi\sqrt{z\xi}}{x} w' \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \right] \frac{\partial A}{\partial z}(x; y, z, \xi) \\
E_3 &= \frac{Qx^2}{2z\xi\sqrt{y}} w_1(\xi) w \left( \frac{4\pi\sqrt{z\xi}}{x} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial z}(x; y, z, \xi).
\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial z}(x; y, z, \xi) &= -\frac{x\sqrt{y}}{2z\sqrt{z\xi}} \left[ \ell_1^2 t_1 J_{k-1}''(\alpha x) J_{k-1}(\beta x) + 2\ell_1 \sqrt{\ell_1 \ell_2 t_1 t_2} J_{k-1}'(\alpha x) J_{k-1}'(\beta x) \right. \\
&\quad \left. + \ell_1 \ell_2 t_2 J_{k-1}(\alpha x) J_{k-1}''(\beta x) \right]. \quad (2.4.3)
\end{aligned}$$

Or pour tout entier naturel  $j$ , on dispose de la majoration<sup>1</sup>  $|J_{k-1}^{(j)}(x)| \leq 1$ . Dès lors, étant donné que  $\frac{x}{\sqrt{z\xi}} \asymp 1/Q$  grâce au support de  $w$  et comme  $z, \xi \gg 1$ , on en déduit

$$E_2 \ll \frac{Qx^3}{(\xi z)^{5/2}} (\ell_1^2 t_1 + \ell_1 \sqrt{\ell_1 \ell_2 t_1 t_2} + \ell_1 \ell_2 t_2) \ll \frac{(\ell_1 \sqrt{t_1} + \sqrt{\ell_1 \ell_2 t_2})^2}{Q^2}.$$

On montre de la même manière

$$E_1 \ll \frac{(\ell_1 \sqrt{t_1} + \sqrt{\ell_1 \ell_2 t_2})^2}{Q^2}.$$

Pour finir, en dérivant la relation (2.4.3), on montre

$$E_3 \ll \frac{(\ell_1 \sqrt{t_1} + \sqrt{\ell_1 \ell_2 t_2})^2}{Q^2} + \frac{\sqrt{y}}{z^{3/2}\xi} \frac{(\ell_1 \sqrt{t_1} + \sqrt{\ell_1 \ell_2 t_2})^3}{Q^3}.$$

Étant donné que  $y \ll \mathcal{M}_1$ ,  $t_1 \asymp M_1$  et  $t_2 \asymp M_2$ , le terme  $E_1 + E_2 + E_3$  donne bien le terme d'erreur annoncé. □

---

1. Ceci est une conséquence de la représentation intégrale (confer (A.1)) de la fonction de Bessel.

Dans toute la suite, on posera

$$\tilde{x} = \frac{2\pi\sqrt{z\xi}}{Q}.$$

**Lemme 2.4.2** *Pour  $i = 1, 2$ , il existe des fonctions lisses  $C_i^{\pm\pm}$  à support dans  $[\tilde{x}, 2\tilde{x}]$  vérifiant pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout entier  $n \ll 1$*

$$x^n \frac{d^n C_i^{\pm\pm}}{dx^n}(x) \ll_{k,n} \frac{Q^\varepsilon \sqrt{\ell_1 M_1 + \ell_2 M_2}}{\sqrt{1 + \alpha_i \tilde{x}} \sqrt{1 + \beta_i \tilde{x}}},$$

et telles que, pour tous réels positifs  $x, y, z$  et  $\xi$  vérifiant  $\xi \gg 1, z \gg 1$  et  $1 \ll y \ll \mathcal{M}_i$ , on ait

$$\Phi_i(x; y, z, \xi) = \frac{\sqrt{\ell_i}}{Qz\xi\sqrt{y}} \sum_{\pm, \pm} C_i^{\pm\pm}(x) e\left(\frac{x}{2\pi}(\pm\alpha_i \pm \beta_i)\right) + O\left(\frac{(\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2 k)^c}{Q^2}\right).$$

Preuve : Soit  $n \leq n_0$  et  $\varepsilon = \varepsilon/n_0$ . Pour  $x\alpha_i \leq Q^\varepsilon$ , on pose

$$J_{k-1}(\alpha_i x) = e\left(\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) J_{k-1}(\alpha_i x) \frac{e\left(-\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right)}{2} + e\left(-\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) J_{k-1}(\alpha_i x) \frac{e\left(\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right)}{2}$$

et  $J'_{k-1}(\alpha_i x) = e\left(\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) J'_{k-1}(\alpha_i x) \frac{e\left(-\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right)}{2} + e\left(-\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) J'_{k-1}(\alpha_i x) \frac{e\left(\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right)}{2}.$

Pour  $\alpha_i \leq Q^\varepsilon$ , à partir du développement asymptotique

$$J_{k-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{2k-1}{8}\right) \sum_{j=0}^{M-1} \frac{j! \Gamma(k-1/2+j)}{j! \Gamma(k-1/2-j)(2x)^j}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e\left(-\frac{x}{2\pi} + \frac{2k-1}{8}\right) \sum_{j=0}^{M-1} \frac{(-i)^j \Gamma(k-1/2+j)}{j! \Gamma(k-1/2-j)(2x)^j} + O(x^{-M-1/2})$$

que l'on trouvera dans [Wat95] (équation 1 paragraphe 3.61 et équations 1 et 2 du paragraphe 7.2), on décompose

$$J_{k-1}(\alpha_i x) = e\left(\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) \frac{C_1(\alpha_i x)}{\sqrt{\alpha_i x}} + e\left(-\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) \frac{C_2(\alpha_i x)}{\sqrt{\alpha_i x}} + O(Q^{-(M+1/2)\varepsilon})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des fonctions lisses vérifiant  $x^i C_{1,2}^{(i)}(x) \ll_{k,i} 1$ . Une telle décomposition existe également pour  $J'_{k-1}$ . Dans tous les cas, on peut écrire

$$J_{k-1}(\alpha_i x) = e\left(\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) C_+(x) + e\left(-\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) C_-(x) + O(Q^{-A})$$

et  $J'_{k-1}(\alpha_i x) = e\left(\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) D_+(x) + e\left(-\frac{x\alpha_i}{2\pi}\right) D_-(x) + O(Q^{-A})$

avec  $x^n C_\pm^{(n)} \ll \frac{Q^{n_0\varepsilon}}{\sqrt{1+x\alpha_i}}$  et  $x^n D_\pm^{(n)} \ll \frac{Q^{n_0\varepsilon}}{\sqrt{1+x\alpha_i}}$ . On décompose de la même manière  $J_{k-1}(x\beta_i)$  et  $J'_{k-1}(x\beta_i)$ , puis on conclut grâce au lemme 2.4.1 en prenant  $M$  suffisamment grand.

□

On note

$$\Xi_i = \frac{\sqrt{\ell_i}}{\sqrt{1 + \tilde{x}\alpha_i}\sqrt{1 + \tilde{x}\beta_i}} \frac{Q^\varepsilon \sqrt{\ell_1 M_1 + \ell_2 M_2}}{Qz\xi\sqrt{y}}.$$

**Lemme 2.4.3** *Il existe des fonctions  $\Phi_i^\pm(x; y, z, \xi)$  et une constante  $c$  strictement positive telles que, pour  $y, z$  et  $\xi$  vérifiant  $\xi \gg 1$ ,  $z \gg 1$  et  $1 \ll y \ll \mathcal{M}_i$ , on ait*

$$\Phi_i(x; y, z, \xi) = \Phi_i^+(x; y, z, \xi) + \Phi_i^-(x; y, z, \xi) + O\left(\frac{(\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2 k)^c}{Q^2}\right)$$

où les fonctions  $\Phi_i^\pm$  vérifient, pour tous réels strictement positifs  $\epsilon, \varepsilon$  et  $A$ ,

$$\check{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi), \hat{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi) \ll_{A, \varepsilon} \begin{cases} \frac{\Xi_i}{Q^A} & \text{si } t \geq (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon, \\ \frac{\Xi_i Q^\varepsilon}{1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}} & \text{si } t \leq (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon \end{cases} \quad \text{pour } t > 0, \quad (2.4.4a)$$

$$\tilde{\Phi}_i^\pm(k; y, z, \xi) \ll_{A, \varepsilon} \begin{cases} \frac{\Xi_i}{Q^A} & \text{si } k \geq (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon, \\ \frac{\Xi_i Q^\varepsilon}{1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}} & \text{si } k \leq (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon \end{cases} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}, \quad (2.4.4b)$$

$$\check{\Phi}_i^\pm(it; y, z, \xi), \hat{\Phi}_i^\pm(it; y, z, \xi) \ll_{A, \varepsilon} \Xi_i Q^\varepsilon \frac{\tilde{x}^{-2t}}{1 + (|\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x})^A} \quad \text{pour } 0 < t < 1/2. \quad (2.4.4c)$$

Preuve : En reprenant les notations du lemme 2.4.2, on décompose  $\Phi$  sous la forme désirée en posant

$$\begin{aligned} \Phi_i^+(x; y, z, \xi) &= \frac{\sqrt{\ell_i}}{Qz\xi\sqrt{y}} \left[ C_i^{++}(x) e\left(\frac{x}{2\pi}(\alpha_i + \beta_i)\right) + C_i^{--}(x) e\left(-\frac{x}{2\pi}(\alpha_i + \beta_i)\right) \right], \\ \Phi_i^-(x; y, z, \xi) &= \frac{\sqrt{\ell_i}}{Qz\xi\sqrt{y}} \left[ C_i^{+-}(x) e\left(\frac{x}{2\pi}(\alpha_i - \beta_i)\right) + C_i^{-+}(x) e\left(-\frac{x}{2\pi}(\alpha_i - \beta_i)\right) \right]. \end{aligned}$$

Remarquons de plus que pour  $j = 1$  ou  $j = 2$ , grâce à la condition (2.1.1), il existe  $\varepsilon' > 0$  tel que l'on ait

$$\tilde{x} \ll \frac{\sqrt{H\ell_j \mathcal{M}_j}}{Q} \ll \frac{kP_j \sqrt{H}}{\sqrt{\ell_j M_j}} (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2)^\varepsilon \ll (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2)^{-\varepsilon'} \leq 1.$$

En utilisant la majoration (A.4a), on a

$$\check{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi), \hat{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi) \ll_A \Xi_i \left( \frac{1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}}{t} \right)^A \ll_{A, \varepsilon} \frac{\Xi_i}{Q^A} \text{ si } t \geq (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon.$$

Pour  $t \leq (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon$ , si  $|\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x} \ll 1$ , alors les dérivées successives de  $\Phi_i^\pm$  vérifient  $\tilde{x}^j \|\Phi_i^{\pm(j)}\|_\infty \ll_j \Xi_i$  de quoi l'on déduit grâce à la majoration (A.3)

$$\check{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi), \hat{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi) \ll_\epsilon \Xi_i (1 + |t|)^\epsilon \ll_\epsilon \Xi_i Q^\epsilon.$$

Enfin, dans le cas  $t \leq (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon$  et  $|\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x} \gg 1$ , grâce à la majoration (A.4a), on a

$$\check{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi), \hat{\Phi}_i^\pm(t; y, z, \xi) \ll_\epsilon \Xi_i \frac{1}{(|\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x})^{1-\epsilon}}.$$

On obtient alors le résultat annoncé en remarquant que pour  $y \leq \mathcal{M}_i$  et  $z \leq \ell_j \mathcal{M}_j$ , on a

$$|\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x} \ll \frac{\ell_i \sqrt{\mathcal{M}_i y} + \sqrt{\ell_j \mathcal{M}_j (z + \ell_i y)}}{Q} \ll \left[ P_j + P_i \left( 1 + \sqrt{\frac{\ell_j \mathcal{M}_j}{\ell_i \mathcal{M}_i}} \right) \right] Q^\varepsilon. \quad (2.4.5)$$

La majoration (2.4.4b) s'obtient de la même manière en utilisant l'estimation (A.4b) en lieu et place de la borne donnée en (A.4a). Pour finir, la majoration (2.4.4c) est une application directe des estimations (A.3) dans le cas  $|\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x} \ll 1$  et (A.4c) dans le cas  $|\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x} \gg 1$ .

□

**Remarque 2.4.1** Le facteur  $1/Q^2$  apparaissant dans le terme d'erreur du lemme précédent assure que la contribution de ce dernier dans  $\Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  est très petite.

## 2.4.2 Formule de trace

**Lemme 2.4.4** *Pour tout réel strictement positif  $A$ , on a*

$$\Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) + O(Q^{-A})$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{\pi \ell_1 \ell_2}{2\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{h=1}^H a_{\eta, t_1, t_2}(h) \sum_{r \neq 0} \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq \mathcal{M}_1 \\ 1 \leq m_2 \leq \mathcal{M}_2 \\ \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \\ &\quad \times \sum_{q=0[N\ell_1 \ell_2]} \frac{S(-h, r; q)}{q} \Phi_{t_1, t_2} \left( \frac{4\pi \sqrt{h|r|}}{q}; m_1, m_2, r, h \right) dt_1 dt_2 d\eta. \end{aligned}$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{1}{2\delta\Lambda} \sum_{h=1}^H a(h) \sum_{q=0[N\ell_1 \ell_2]} w(q) \int_{-\delta}^{\delta} e(-\eta h) \\ &\quad \times \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 1 \\ \ell_2 m_2 \neq \ell_1 m_1}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} S(-h, \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1, q) G_{q, h, \eta}(m_1, m_2) d\eta. \end{aligned}$$

On scinde alors la somme sur  $m_1$  (resp.  $m_2$ ) suivant que  $m_1$  (resp.  $m_2$ ) soit supérieur ou inférieur à  $\mathcal{M}_1$  (resp.  $\mathcal{M}_2$ ). Ainsi on obtient, en utilisant la majoration (2.3.1) et la borne de Weil pour

les sommes de Kloosterman,

$$\begin{aligned} & \Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) = \\ & \frac{1}{2\delta\Lambda} \sum_{h=1}^H a(h) \sum_{q \equiv 0 [N\ell_1\ell_2]} w(q) \int_{-\delta}^{\delta} e(-\eta h) \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq M_1 \\ 1 \leq m_2 \leq M_2 \\ \ell_2 m_2 \neq \ell_1 m_1}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} S(-h, \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1, q) G_{q,h,\eta}(m_1, m_2) d\eta \\ & + O \left( \frac{\|a\|_1}{\Lambda} \frac{Q}{N\ell_1\ell_2} \sqrt{H} Q^{1/2+\epsilon} \frac{\ell_1\ell_2}{Q^2} \text{Vol}(\text{supp } W_h) \left[ \mathcal{M}_2^{1+\epsilon} \sum_{m_1 > \mathcal{M}_1} m_1^\epsilon \left( \frac{P_1^2 k^2 Q^2}{m_1 M_1 \ell_1^2} \right)^{r_1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{M}_1^{1+\epsilon} \sum_{m_2 > \mathcal{M}_2} m_2^\epsilon \left( \frac{P_2^2 k^2 Q^2}{m_2 M_2 \ell_2^2} \right)^{r_2} + \sum_{m_1 > \mathcal{M}_1} m_1^\epsilon \left( \frac{P_1^2 k^2 Q^2}{m_1 M_1 \ell_1^2} \right)^{r_1} \sum_{m_2 > \mathcal{M}_2} m_2^\epsilon \left( \frac{P_2^2 k^2 Q^2}{m_2 M_2 \ell_2^2} \right)^{r_2} \right] \right). \end{aligned}$$

En regroupant suivant la valeur de  $\ell_2 m_2 - \ell_1 m_1$  dans le terme principal ci-dessus et en utilisant la définition de  $G_{q,h,\eta}$ , on obtient après réécriture

$$\begin{aligned} & \Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) \\ & + O \left( \frac{\|a\|_1 \sqrt{H} \ell_1 \ell_2 \text{Vol}(\text{supp } W_h)}{Q^{5/2-\epsilon}} \mathcal{M}_1^{1+\epsilon} \mathcal{M}_2^{1+\epsilon} \left[ \left( \frac{P_1^2 k^2 Q^2}{M_1 \ell_1^2 \mathcal{M}_1} \right)^{r_1} + \left( \frac{P_2^2 k^2 Q^2}{M_2 \ell_2^2 \mathcal{M}_2} \right)^{r_2} \right] \right). \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  et avec  $r_1 = r_2 = r$ , il vient

$$\Sigma_1^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) + O \left( \frac{\|a\|_1 \sqrt{H} \text{Vol}(\text{supp } W_h) P_1^2 P_2^2 k^4}{M_1 M_2 \ell_1 \ell_2} \frac{Q^{3/2+\epsilon}}{(\ell_1 \ell_2 P_1 P_2 k N M_1 M_2)^{\epsilon r}} \right).$$

On obtient le résultat annoncé en prenant  $r$  suffisamment grand. □

**Lemme 2.4.5 ([DI83], théorème 1)** *Soient  $m$  et  $n$  deux entiers positifs et  $\psi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  à support compact inclus dans  $]0, +\infty[$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \equiv 0 [N]} \frac{1}{\gamma} S(m, n; \gamma) \psi \left( \frac{4\pi\sqrt{mn}}{\gamma} \right) = \sum_j \frac{\hat{\psi}(t_j)}{\cosh(\pi t_j)} \overline{\rho_j(m)} \rho_j(n) \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \equiv 0 [2]} \tilde{\psi}(k-1) \frac{i^k (k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N)} \overline{\hat{f}_{j,k}(m)} \hat{f}_{j,k}(n) \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{m}{n} \right)^{ir} \overline{\rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + ir, m \right)} \rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + ir, n \right) \hat{\psi}(r) dr \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \equiv 0 [N]} \frac{1}{\gamma} S(m, -n; \gamma) \psi \left( \frac{4\pi\sqrt{mn}}{\gamma} \right) = \sum_j \frac{\check{\psi}(t_j)}{\cosh(\pi t_j)} \overline{\rho_j(m)} \rho_j(n) \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{\mathfrak{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} (mn)^{ir} \overline{\rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + ir, m \right)} \rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + ir, n \right) \check{\psi}(r) dr. \end{aligned}$$

Grâce à ce lemme, appliqué au sous-groupe de congruence  $\Gamma_0(N\ell_1\ell_2)$ , on décompose alors  $\Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  en

$$\Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a) + \Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a) + \Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a) \quad (2.4.6)$$

où  $\Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a)$ ,  $\Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  et  $\Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  sont définies par les relations (2.4.8), (2.4.18) et (2.4.19). Chacune de ces quantités sera estimée au moyen de l'inégalité de grand crible établie par Deshouillers et Iwaniec ([DI83], théorème 2).

**Lemme 2.4.6 (Inégalité de grand crible)** *Soient  $K, M \geq 1$  réels. Pour toute suite de nombres complexes  $(b_n)$ , on a*

$$\sum_{|t_j| \leq K} \frac{1}{\cosh(\pi t_j)} \left| \sum_{m \leq M} b_m \rho_j(m) \right|^2 \ll_{\varepsilon} M^{\varepsilon} \left( K^2 + \frac{M}{N} \right) \sum_{m=1}^M |b_m|^2, \quad (2.4.7a)$$

$$\sum_{\substack{k \equiv 0[2] \\ 2 \leq k \leq K}} \frac{(k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N)} \left| \sum_{m \leq M} b_m \hat{f}_{j,k}(m) \right|^2 \ll_{\varepsilon} M^{\varepsilon} \left( K^2 + \frac{M}{N} \right) \sum_{m=1}^M |b_m|^2, \quad (2.4.7b)$$

$$\sum_a \int_{-K}^K \left| \sum_{m \leq M} b_m \rho_a \left( \frac{1}{2} + ir, m \right) \right|^2 dr \ll_{\varepsilon} M^{\varepsilon} \left( K^2 + \frac{M}{N} \right) \sum_{m=1}^M |b_m|^2. \quad (2.4.7c)$$

### 2.4.3 Contribution du spectre discret

La contribution des formes de Maaß dans  $\Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{\pi \ell_1 \ell_2}{2\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{h=1}^H a_{\eta, t_1, t_2}(h) \\ &\left[ \sum_{r>0} \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq \mathcal{M}_1 \\ 1 \leq m_2 \leq \mathcal{M}_2 \\ \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \sum_j \frac{\hat{\Phi}_{t_1, t_2}(t_j; m_1, m_2, r, h)}{\cosh(\pi t_j)} \overline{\rho_j(h)} \rho_j(r) \right. \\ &\left. + \sum_{r>0} \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq \mathcal{M}_1 \\ 1 \leq m_2 \leq \mathcal{M}_2 \\ \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \sum_j \frac{\check{\Phi}_{t_1, t_2}(t_j; m_1, m_2, r, h)}{\cosh(\pi t_j)} \overline{\rho_j(h)} \rho_j(r) \right] dt_1 dt_2 d\eta. \quad (2.4.8) \end{aligned}$$

Dans cette section, on prouve la proposition suivante estimant la taille de  $\Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a)$ .

**Proposition 2.4.2** *Si  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$ , alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a*

$$\begin{aligned} \Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll A^{\frac{1}{2}} h_1^{\theta} \|a\|_2 \frac{\max\{P_1, P_2\}^{\frac{5}{2}}}{\min\{P_1, P_2\}} \\ &\times \left[ \sqrt{P_1 + P_2} + \left( \frac{A}{\max\{P_1, P_2\}} \right)^{\theta} \left( 1 + \sqrt{\frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \right] (\ell_1 \ell_2 M_1 M_2 P_1 P_2 H)^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Les transformations de Bessel portant sur la première variable de  $\Phi_{t_1, t_2}$ , à l'aide d'une triple intégration par parties on réécrit  $\Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a) = & -\frac{\pi\ell_1\ell_2}{2\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \\ & \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_1} \int_{1/2}^{\ell_2\mathcal{M}_2} \sum_j \frac{\check{\Phi}_1(t_j; y, z, \xi)}{\cosh(\pi t_j)} \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_j(h)} \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(1)}(r) dz dy \right. \\ & \left. + \int_{1/2}^{\mathcal{M}_2} \int_{1/2}^{\ell_1\mathcal{M}_1} \sum_j \frac{\hat{\Phi}_2(t_j; y, z, \xi)}{\cosh(\pi t_j)} \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_j(h)} \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(2)}(r) dz dy \right] d\xi dt_1 dt_2 d\eta \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A_y^{(1)}(r) = \sum_{\substack{m_1 \leq y \\ \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \text{ et } A_y^{(2)}(r) = \sum_{\substack{m_2 \leq y \\ \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)}.$$

**Lemme 2.4.7** *Pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$  et pour  $(i, j) = (1, 2)$  ou  $(2, 1)$ , on a*

$$\sum_{r \leq z} \left| A_y^{(i)}(r) \right|^2 \ll_{N, k, \varepsilon} \left[ y \left( \frac{z + \ell_i y}{\ell_j} \right) \right]^{1+\varepsilon}.$$

Preuve : Il s'agit d'une conséquence immédiate de la majoration

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq X_1 \\ 1 \leq m_2 \leq X_2 \\ \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \right|^2 \ll_{N, k, \varepsilon} (X_1 X_2)^{1+\varepsilon}$$

dont on trouvera la preuve dans [Blo04] (lemme 3.2) par exemple. □

On scinde alors la somme sur  $j$ , apparaissant dans la définition de  $\Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a)$ , suivant que  $t_j$  soit réel (véritable forme de Maaß) ou imaginaire pur (avec  $\Im(t_j) < 1/2$ ) (forme de Maaß exceptionnelle). La conjecture de Selberg prédit que le spectre discret ne contient pas de valeur propre exceptionnelle. On écrit alors

$$\Sigma_{disc}(\ell_1, \ell_2, H, a) = \Sigma_{disc}^{\mathbb{R}}(\ell_1, \ell_2, H, a) + \Sigma_{disc}^{except}(\ell_1, \ell_2, H, a). \quad (2.4.9)$$

### Contribution du spectre réel

**Lemme 2.4.8** *Si  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$ , alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a*

$$\Sigma_{disc}^{\mathbb{R}}(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll A^{1/2} \|a\|_2 h_1 \frac{\max\{P_1, P_2\}^{5/2}}{\min\{P_1, P_2\}} \left( \sqrt{P_1 + P_2} + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) Q^\varepsilon.$$

Preuve : Grâce au lemme 2.4.3 (relation (2.4.4a)), en posant  $Z_i^\pm = (1 + |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x}) Q^\varepsilon$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma_{disc}^{\mathbb{R}}(\ell_1, \ell_2, H, a) = & -\frac{\pi \ell_1 \ell_2}{2\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \sum_{\pm} \\ & \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_1} \int_{1/2}^{\ell_2 \mathcal{M}_2} \sum_{\substack{t_j \text{ réel} \\ |t_j| \leq Z_1^\pm}} \frac{\check{\Phi}_1^\pm(t_j; y, z, \xi)}{\cosh(\pi t_j)} \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_j(h)} \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(1)}(r) dz dy \right. \\ & \left. + \int_{1/2}^{\mathcal{M}_2} \int_{1/2}^{\ell_1 \mathcal{M}_1} \sum_{\substack{t_j \text{ réel} \\ |t_j| \leq Z_2^\pm}} \frac{\hat{\Phi}_2^\pm(t_j; y, z, \xi)}{\cosh(\pi t_j)} \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_j(h)} \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(2)}(r) dz dy \right] d\xi dt_1 dt_2 d\eta \\ & + O(Q^{-A}). \end{aligned}$$

On effectue un découpage dyadique des intégrales en la variable  $z$ . Plus précisément, pour  $Z \leq \left[ P_j + P_i \left( 1 + \sqrt{\frac{\ell_j M_j}{\ell_i M_i}} \right) \right] Q^\varepsilon$  (confer équation (2.4.5)), posons

$$\mathcal{I}(Z, y) = \{z; Z/2 \leq |\alpha_i \pm \beta_i| \tilde{x} \leq Z\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \Sigma_{disc}^{\mathbb{R}}(\ell_1, \ell_2, H, a) = & -\frac{\pi \ell_1 \ell_2}{2\Lambda} \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \sum_Z \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \\ & \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z, y)} \sum_{\substack{t_j \text{ réel} \\ |t_j| \leq Z_i^\pm}} \frac{\check{\Phi}_i^\pm(t_j; y, z, \xi)}{\cosh(\pi t_j)} \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_j(h)} \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(i)}(r) dz dy \right] d\xi dt_1 dt_2 d\eta + O(Q^{-A}). \end{aligned}$$

En appliquant la majoration (2.4.4a) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma_{disc}^{\mathbb{R}}(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll & \frac{\ell_1 \ell_2}{\Lambda} \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \sum_Z \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z, y)} \frac{\Xi_i}{1 + \bar{Z}} \\ & \left( \sum_{|t_j| \leq Z_i^\pm} \frac{1}{\cosh(\pi t_j)} \left| \sum_{h \leq \xi} \overline{a_{\eta, t_1, t_2}(h) \rho_j(h)} \right|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{|t_j| \leq Z_i^\pm} \frac{1}{\cosh(\pi t_j)} \left| \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(i)}(r) \right|^2 \right)^{1/2} \\ & dz dy d\xi dt_1 dt_2 d\eta. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de grand crible (2.4.7a) et le lemme 2.4.7, il vient

$$\sum_{|t_j| \leq Z_i^\pm} \frac{1}{\cosh(\pi t_j)} \left| \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(i)}(r) \right|^2 \ll y Q^\varepsilon \left( Z_i^{\pm 2} + \frac{z}{\ell_1 \ell_2} \right) \frac{z + \ell_i y}{\ell_j}.$$



On exploite la condition de divisibilité portant sur  $h_1$  grâce à la relation (3.8) de [BHM07b], d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de grand crible,

$$\begin{aligned}
\sum_{|t_j| \leq Z_i^\pm} \frac{1}{\cosh(\pi t_j)} \left| \sum_{h \leq \xi} \overline{a_{\eta, t_1, t_2}(h)} \rho_j(h) \right|^2 &\leq \tau(h_1) h_1^{2\theta} \sum_{d|(h_1, N \ell_1 \ell_2)} \sum_{|t_j| \leq Z_i^\pm} \frac{1}{\cosh(\pi t_j)} \left| \sum_{h \leq \xi/h_1} \overline{a_{\eta, t_1, t_2}(hh_1)} \rho_j(dh) \right|^2 \\
&\ll \tau(h_1) h_1^{2\theta} \sum_{d|(h_1, N \ell_1 \ell_2)} \left( \frac{dH}{h_1} \right)^\varepsilon \left( Z_i^{\pm 2} + \frac{dH}{h_1 \ell_1 \ell_2} \right) \|a\|_2^2 \\
&\ll Q^\varepsilon h_1^{2\theta} \left( Z_i^{\pm 2} + \frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2} \right) \|a\|_2^2. \tag{2.4.10}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\Sigma_{disc}^{\mathbb{R}}(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll \frac{(\ell_1 \ell_2)^2 Q^\varepsilon \delta h_1^\theta \text{Vol}(\text{supp } W_h) \|a\|_2}{Q^2} \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \\
&\int_{1/2}^{2H} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{1/2}^{\ell_j \mathcal{M}_j} \frac{\Xi_i}{1 + \tilde{x} |\alpha_i \pm \beta_i|} \left( Z_i^\pm + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( Z_i^\pm + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{z + \ell_i y}{\ell_j}} \sqrt{y} dz dy d\xi \\
&\ll \frac{(\ell_1 \ell_2)^2 h_1^\theta Q^\varepsilon \text{Vol}(\text{supp } W_h) \|a\|_2 (\ell_1 \mathcal{M}_1 + \ell_2 \mathcal{M}_2)^{1/2}}{Q^4} \\
&\times \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\tilde{x} |\alpha_i \pm \beta_i| \ll 1} \frac{1}{z} \frac{\left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i(z + \ell_i y)}{\ell_j}}}{\left( 1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z + \ell_i y)}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \right. \\
&\quad \left. + \sum_{Z \gg 1} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z, y)} \frac{1}{zZ} \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i(z + \ell_i y)}{\ell_j}}}{\left( 1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z + \ell_i y)}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \right]. \tag{2.4.11}
\end{aligned}$$

On scinde les intégrales précédentes afin de mieux les estimer.

- Ainsi, pour  $y \ll \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}$ , on a

$$Z \asymp \tilde{x} |\alpha_i \pm \beta_i| \asymp \left| \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \pm \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z + \ell_i y)}}{Q} \right|.$$

On en déduit  $z + \ell_i y \asymp \frac{Z^2 Q^2}{\ell_j M_j} \asymp \frac{Z^2 Q^2}{A}$  avec  $\ell_i M_i \asymp \ell_j M_j \asymp A$ , puis comme  $\ell_i y \ll Q^2/A$ , il vient  $z \asymp Z^2 Q^2/A$ . Dès lors, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{1/2}^{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{zZ} \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left( 1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \\ & \ll \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right)}{Z^{3/2}} \int_{1/2}^{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}} \sqrt{\frac{\ell_i}{\ell_j}} \frac{QZ}{\sqrt{A}} \left( Z + \frac{QZ}{\sqrt{\ell_1 \ell_2 A}} \right) dy \ll \frac{Q^4 Z^{1/2}}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

• Dans le cas du signe positif, on a  $z + \ell_i y \asymp \frac{Z^2 Q^2}{A}$  de quoi l'on déduit que l'on peut restreindre l'intégrale en  $y$  à  $y \ll \frac{Q^2 Z^2}{\ell_i A}$  et  $z \asymp Q^2 Z^2/A$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{zZ} \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left( 1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \\ & \ll \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right)}{Z^{3/2}} \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\frac{Q^2 Z^2}{\ell_i M_i}} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{z} \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i}{\ell_j}} \frac{QZ}{\sqrt{A}}}{\left( \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \\ & \ll \sqrt{Z} \left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \frac{Q^{5/2}}{A \sqrt{\ell_1 \ell_2}} \sqrt{\frac{\ell_i}{\ell_j}} \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\frac{Q^2 Z^2}{\ell_i M_i}} \frac{1}{(\ell_i A y)^{1/4}} dy \ll \frac{Q^4 Z^2}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

• Dans le cas du signe moins, de l'inégalité  $QZ/2 \leq |\ell_i \sqrt{M_i y} - \sqrt{\ell_j M_j(z + \ell_i y)}| \leq QZ$ , on déduit  $\sqrt{z + \ell_i y} \ll \frac{QZ}{\sqrt{A}} + \sqrt{\ell_i y}$  et que la longueur de l'intervalle  $\mathcal{I}(Z, y)$  est bornée par  $\frac{(QZ)^2}{A} + \frac{QZ \sqrt{\ell_i y}}{\sqrt{A}}$ .

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{zZ} \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left( 1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \\
& \ll \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right)}{Z} \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \left( \frac{Q^2 \sqrt{\ell_i}}{A \ell_j} \right)^{1/2} \frac{1}{y^{1/4}} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{z} \left( Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) (z + \ell_i y)^{1/4} dz dy \\
& \ll \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right)}{Z} \left( \frac{Q^2 \sqrt{\ell_i}}{A \ell_j} \right)^{1/2} \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \frac{\left( \frac{QZ}{\sqrt{A}} \right)^{1/2} + (\ell_i y)^{1/4}}{y^{1/4}} \int_{1/2}^{\frac{QZ}{\sqrt{A}} \left( \frac{QZ}{\sqrt{A}} + \sqrt{\ell_i y} \right)} \frac{1}{z} \left( Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) dz dy \\
& \ll \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right)}{\sqrt{Z}} \frac{Q^{3/2} \ell_i^{3/4}}{\ell_1 \ell_2 A^{3/4}} \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 A}}^{\mathcal{M}_i} \frac{1}{y^{1/4}} \left( \frac{QZ}{\sqrt{A}} + \sqrt{\ell_i y} \right) dy \ll \frac{\left( Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right)}{\sqrt{Z}} (Z + P_i) \frac{Q^{4+\varepsilon} P_i^{3/2}}{\ell_1 \ell_2 A^2}.
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

- Dans le cas du signe plus, de  $|\alpha_i + \beta_i| \tilde{x} \ll 1$  on déduit  $y \ll \frac{Q^2}{\ell_i A}$  et  $z \ll Q^2/A$ . Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
& \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\tilde{x}|\alpha_i + \beta_i| \ll 1} \frac{1}{z} \frac{\left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left( 1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \\
& \ll \frac{\ell_i}{\sqrt{\ell_j}} \left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \int_{1/2}^{\frac{Q^2}{\ell_i A}} \int_{1/2}^{\frac{Q^2}{A}} \frac{1}{z} \left( 1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \left( \sqrt{y} + \sqrt{\frac{z}{\ell_i}} \right) dz dy \\
& \ll \frac{Q^4}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right).
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

- Enfin, dans le cas où l'intervalle d'intégration en  $y$  est de la forme  $|\alpha_i - \beta_i| \tilde{x} \ll 1$ , il existe une constante réelle  $c > 0$  telle que  $|\alpha_i - \beta_i| \tilde{x} \leq c$ . On scinde alors l'intégrale en  $y$  suivant que  $y \leq c_1 \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}$  ou  $y \geq c_1 \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}$  avec  $c_1 > c$ .

Pour  $y \leq c_1 \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}$ , on a  $\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)} \leq cQ + \ell_i \sqrt{M_i y} \ll Q$ . On en déduit  $z \ll Q^2/A$  puis

$$\begin{aligned}
& \int_{1/2}^{c_1 \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}} \int_{\tilde{x}|\alpha_i - \beta_i| \leq c} \frac{1}{z} \frac{\left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left( 1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q} \right)^{1/2}} dz dy \\
& \ll \frac{\ell_i}{\sqrt{\ell_j}} \left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \int_{1/2}^{\frac{Q^2}{\ell_i A}} \int_{1/2}^{\frac{Q^2}{A}} \frac{1}{z} \left( 1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}} \right) \left( \sqrt{y} + \sqrt{\frac{z}{\ell_i}} \right) dz dy \\
& \ll \frac{Q^4}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right).
\end{aligned}$$

Pour  $y \geq c_1 \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}$ , l'inégalité  $\tilde{x}|\alpha_i - \beta_i| \leq c$  implique

$$\left(1 - \frac{c}{c_1}\right) \ell_i \sqrt{M_i y} \leq \ell_i \sqrt{M_i y} - cQ \leq \sqrt{\ell_j M_j (z + \ell_i y)} \leq \ell_i \sqrt{M_i y} + cQ \leq \left(1 + \frac{c}{c_1}\right) \ell_i \sqrt{M_i y}.$$

On en déduit  $\sqrt{\ell_j M_j (z + \ell_i y)} \asymp \ell_i \sqrt{M_i y}$  et que  $z$  varie dans un intervalle dont la longueur est bornée par  $\frac{Q \ell_i \sqrt{M_i y}}{\ell_j M_j} \asymp \frac{Q \sqrt{\ell_i y}}{\sqrt{A}}$ . Il s'ensuit les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_{c_1 \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \int_{\tilde{x}|\alpha_i - \beta_i| \leq c} \frac{1}{z} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i (z + \ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j (z + \ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz dy \\ & \ll \frac{Q \sqrt{\ell_i}}{\sqrt{A} \ell_j} \left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) \int_{c_1 \frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \int_{\tilde{x}|\alpha_i - \beta_i| \leq c} \frac{1}{z} \left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) dz dy \\ & \ll \frac{Q \sqrt{\ell_i}}{\sqrt{A} \ell_j} \left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \int_{1/2}^{\frac{Q \sqrt{\ell_i y}}{\sqrt{A}}} \frac{1}{z} \left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) dz dy \ll \frac{Q^{4+\varepsilon} P_i^{5/2}}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) \end{aligned}$$

en utilisant la décroissance de la fonction  $z \mapsto \frac{1}{z} \left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right)$ .

On obtient ainsi

$$\int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\tilde{x}|\alpha_i - \beta_i| \ll 1} \frac{1}{z} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i (z + \ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j (z + \ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz dy \ll \frac{Q^{4+\varepsilon} P_i^{5/2}}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right). \quad (2.4.16)$$

• En utilisant les majorations (2.4.12) à (2.4.16) et en sommant sur les intervalles dyadiques  $[Z/2, Z]$  avec  $Z \ll (P_1 + P_2)Q^\varepsilon$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\tilde{x}|\alpha_i \pm \beta_i| \ll 1} \frac{1}{z} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i (z + \ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j (z + \ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz dy \right. \\ & \quad \left. + \sum_{Z \gg 1} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z, y)} \frac{1}{zZ} \frac{\left(Z + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) \left(Z + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i (z + \ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j (z + \ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz dy \right] \\ & \ll \frac{Q^{4+\varepsilon} (P_1 + P_2)^{5/2}}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left( \sqrt{P_1 + P_2} + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right). \end{aligned}$$

On obtient alors la majoration du lemme 2.4.8 en repartant de l'estimation (2.4.11) et en utilisant la majoration (2.2.1).  $\square$

### Contribution des formes exceptionnelles

**Lemme 2.4.9** *Si  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$ , alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a*

$$\Sigma_{disc}^{except}(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll A^{\frac{1}{2}+\theta} h_1^\theta \|a\|_2 \frac{\max\{P_1, P_2\}^{\frac{5}{2}-\theta}}{\min\{P_1, P_2\}} \left(1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}}\right) Q^\varepsilon.$$

Preuve : On reprend les notations introduites au cours de la preuve du lemme 2.4.8. On a alors

$$\Sigma_{disc}^{except}(\ell_1, \ell_2, H, a) = -\frac{\pi \ell_1 \ell_2}{2\Lambda} \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \sum_Z \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \sum_{it_j \text{ except}} \frac{\check{\Phi}_i^\pm(it_j; y, z, \xi)}{\cosh(i\pi t_j)} \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_j(h)} \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(i)}(r) dz dy \right] d\xi dt_1 dt_2 d\eta + O(Q^{-A}).$$

En appliquant la majoration (2.4.4c) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\Sigma_{disc}^{except}(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll \frac{\ell_1 \ell_2}{\Lambda} \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \sum_Z \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \Xi_i \frac{\tilde{x}^{-2\theta}}{1+Z^A} \left( \sum_{it_j \text{ except}} \frac{1}{\cosh(i\pi t_j)} \left| \sum_{h \leq \xi} \overline{a_{\eta, t_1, t_2}(h) \rho_j(h)} \right|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{it_j \text{ except}} \frac{1}{\cosh(i\pi t_j)} \left| \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(i)}(r) \right|^2 \right)^{1/2} dz dy d\xi dt_1 dt_2 d\eta.$$

En utilisant l'inégalité de grand crible (2.4.7a) et le lemme 2.4.7, il vient

$$\sum_{it_j \text{ except}} \frac{1}{\cosh(i\pi t_j)} \left| \sum_{r \leq z} \rho_j(r) A_y^{(i)}(r) \right|^2 \ll y Q^\varepsilon \left(1 + \frac{z}{\ell_1 \ell_2}\right) \frac{z + \ell_i y}{\ell_j}.$$

On exploite la condition de divisibilité portant sur  $h_1$  grâce à la relation (3.8) de [BHM07b], d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de grand crible,

$$\begin{aligned} \sum_{it_j \text{ except}} \frac{1}{\cosh(i\pi t_j)} \left| \sum_{h \leq \xi} \overline{a_{\eta, t_1, t_2}(h) \rho_j(h)} \right|^2 &\leq \tau(h_1) h_1^{2\theta} \sum_{d|(h_1, N \ell_1 \ell_2)} \sum_{it_j \text{ except}} \frac{1}{\cosh(i\pi t_j)} \left| \sum_{h \leq \xi/h_1} \overline{a_{\eta, t_1, t_2}(hh_1) \rho_j(dh)} \right|^2 \\ &\ll \tau(h_1) h_1^{2\theta} \sum_{d|(h_1, N \ell_1 \ell_2)} \left(\frac{dH}{h_1}\right)^\varepsilon \left(1 + \frac{dH}{h_1 \ell_1 \ell_2}\right) \|a\|_2^2 \\ &\ll Q^\varepsilon h_1^{2\theta} \left(1 + \frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2}\right) \|a\|_2^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \Sigma_{disc}^{except}(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll \frac{(\ell_1 \ell_2)^2 h_1^\theta Q^{2\theta+\varepsilon} \text{Vol}(\text{supp } W_h) \|a\|_2 (\ell_1 M_1 + \ell_2 M_2)^{1/2}}{Q^4} \left( 1 + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) \\ &\times \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{1/2}^{2H} \int_{\bar{x}|\alpha_i \pm \beta_i| \ll 1} \frac{1}{(z\xi)^{1+\theta}} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz d\xi dy \right. \\ &\left. + \sum_{Z \gg 1} \frac{1}{Z^A} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{1/2}^{2H} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{(z\xi)^{1+\theta}} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz d\xi dy \right]. \quad (2.4.17) \end{aligned}$$

On estime ces intégrales de la même manière que nous l'avons déjà fait au cours de la preuve du lemme 2.4.8. On se contente ici d'indiquer les estimations intermédiaires qui nous seront utiles. On renvoie aux calculs complets se trouvant dans la preuve du lemme 2.4.8 pour plus de détails. On a

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\bar{x}|\alpha_i \pm \beta_i| \ll 1} \frac{1}{z^{1+\theta}} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz dy &\ll \begin{cases} \frac{Q^4}{\ell_1 \ell_2 A^2} \left(\frac{A}{Q^2}\right)^\theta & (\text{cas } +), \\ \frac{Q^{4+\varepsilon} P_i^{5/2}}{\ell_1 \ell_2 A^2} \left(\frac{A}{Q^2 P_i}\right)^\theta & (\text{cas } -), \end{cases} \\ \int_{1/2}^{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{z^{1+\theta}} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz dy &\ll \frac{Q^4 Z^{3/2}}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left(\frac{A}{Q^2 Z^2}\right)^\theta, \\ \int_{\frac{Q^2}{\ell_i^2 M_i}}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{z^{1+\theta}} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz dy &\ll \begin{cases} \frac{Q^4 Z^3}{A^2 \ell_1 \ell_2} \left(\frac{A}{Q^2 Z^2}\right)^\theta & (\text{cas } +), \\ \frac{Q^{4+\varepsilon} P_i^{3/2} Z^{1/2}}{\ell_1 \ell_2 A^2} \left(\frac{A}{Q^2 Z}\right)^\theta [Z^{1-\theta} + P_i^{1-\theta}] & (\text{cas } -). \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{1/2}^{2H} \int_{\bar{x}|\alpha_i \pm \beta_i| \ll 1} \frac{1}{(z\xi)^{1+\theta}} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz d\xi dy \right. \\ \left. + \sum_{Z \gg 1} \frac{1}{Z^A} \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{1/2}^{2H} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{1}{(z\xi)^{1+\theta}} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{z}{\ell_1 \ell_2}}\right) \sqrt{\frac{\ell_i(z+\ell_i y)}{\ell_j}}}{\left(1 + \frac{\ell_i \sqrt{M_i y}}{Q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\sqrt{\ell_j M_j(z+\ell_i y)}}{Q}\right)^{1/2}} dz d\xi dy \right] \\ \ll \frac{Q^{4+\varepsilon}}{\ell_1 \ell_2 A^2} \left(\frac{A}{Q^2}\right)^\theta (P_1 + P_2)^{5/2-\theta}. \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat annoncé en utilisant la majoration (2.2.1).

□

Il s'ensuit immédiatement l'estimation de la proposition 2.4.2 en insérant les résultats des lemmes 2.4.8 et 2.4.9 dans la relation (2.4.9).

#### 2.4.4 Contribution du spectre continu

La contribution des séries d'Eisenstein dans  $\Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{\ell_1 \ell_2}{2\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{h=1}^H a_{\eta, t_1, t_2}(h) \\ &\left[ \sum_{r>0} \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq M_1 \\ 1 \leq m_2 \leq M_2 \\ \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \sum_{\mathfrak{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{h}{r}\right)^{iv} \overline{\rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, h\right)} \rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, r\right) \hat{\Phi}_{t_1, t_2}(v; m_1, m_2, r, h) dv \right. \\ &\left. + \sum_{r>0} \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq M_1 \\ 1 \leq m_2 \leq M_2 \\ \ell_2 m_2 - \ell_1 m_1 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \sum_{\mathfrak{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} (hr)^{iv} \overline{\rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, h\right)} \rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, r\right) \check{\Phi}_{t_1, t_2}(v; m_1, m_2, r, h) dv \right] \\ &dt_1 dt_2 d\eta. \quad (2.4.18) \end{aligned}$$

Dans cette section, on prouve la proposition suivante estimant la taille de  $\Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a)$ .

**Proposition 2.4.3** *Si  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$ , alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a*

$$\Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll A^{1/2} \|a\|_2 \frac{\max\{P_1, P_2\}^{5/2}}{\min\{P_1, P_2\}} \left( \sqrt{P_1 + P_2} + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) Q^\varepsilon.$$

Preuve : La démonstration suit les mêmes étapes que celles de la preuve du lemme 2.4.8. C'est pourquoi on réutilise les notations introduites lors de cette dernière. À l'aide d'une triple intégration par parties, on peut exprimer  $\Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a) &= -\frac{\ell_1 \ell_2}{2\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \\ &\left[ \int_{1/2}^{\mathcal{M}_1} \int_{1/2}^{\ell_2 \mathcal{M}_2} \sum_{\mathfrak{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{\Phi}_1(v; y, z, \xi) \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, h\right)} h^{iv} \sum_{r \leq z} \rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, r\right) r^{iv} A_y^{(1)}(r) dv dz dy \right. \\ &\left. + \int_{1/2}^{\mathcal{M}_2} \int_{1/2}^{\ell_1 \mathcal{M}_1} \sum_{\mathfrak{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_2(v; y, z, \xi) \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, h\right)} h^{iv} \sum_{r \leq z} \rho_{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{2} + iv, r\right) r^{-iv} A_y^{(2)}(r) dv dz dy \right] \\ &d\xi dt_1 dt_2 d\eta. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.4.3 (relation (2.4.4a)) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma_{cont}(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll \frac{\ell_1 \ell_2}{\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \sum_{\pm} \sum_{i=1,2} \sum_Z \int_{1/2}^{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{I}(Z,y)} \frac{\Xi_i}{1+Z} \\ &\left( \sum_{\mathfrak{a}} \int_{|v| \leq Z_i^{\pm}} \left| \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + iv, h \right)} h^{iv} \right|^2 dv \right)^{1/2} \left( \sum_{\mathfrak{a}} \int_{|v| \leq Z_i^{\pm}} \left| \sum_{r \leq z} \rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + iv, r \right) r^{\pm iv} A_y^{(i)}(r) \right|^2 dv \right)^{1/2} \\ &dz dy d\xi dt_1 dt_2 d\eta. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de grand crible (2.4.7c) et le lemme 2.4.7, il vient

$$\sum_{\mathfrak{a}} \int_{|v| \leq Z_i^{\pm}} \left| \sum_{r \leq z} \rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + iv, r \right) r^{\pm iv} A_y^{(i)}(r) \right|^2 dv \ll y Q^{\varepsilon} \left( Z_i^{\pm 2} + \frac{z}{\ell_1 \ell_2} \right) \frac{z + \ell_i y}{\ell_j}.$$

On exploite la condition de divisibilité portant sur  $h_1$  en suivant le paragraphe 3.2 de [BHM07b] d'où l'on tire, en utilisant l'inégalité de grand crible,

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathfrak{a}} \int_{|v| \leq Z_i^{\pm}} \left| \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \overline{\rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + iv, h \right)} h^{iv} \right|^2 dv \\ &\ll \tau(N \ell_1 \ell_2)^3 \tau(h_1)^2 \sum_{d|(h_1, N \ell_1 \ell_2)} \int_{|v| \leq Z_i^{\pm}} \sum_{\mathfrak{a}} \left| \sum_{h \leq \xi/h_1} a_{\eta, t_1, t_2}(h h_1) \overline{\rho_{\mathfrak{a}} \left( \frac{1}{2} + iv, dh \right)} (dh)^{iv} \right|^2 dv \\ &\ll \tau(N \ell_1 \ell_2)^3 \tau(h_1)^2 \sum_{d|(h_1, N \ell_1 \ell_2)} \left( \frac{dH}{h_1} \right)^{\varepsilon} \left( Z_i^{\pm 2} + \frac{dH}{h_1 \ell_1 \ell_2} \right) \|a\|_2^2 \ll Q^{\varepsilon} \left( Z_i^{\pm 2} + \frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2} \right) \|a\|_2^2. \end{aligned}$$

On conclut alors exactement de la même manière que dans la preuve du lemme 2.4.8. □

## 2.4.5 Contribution des formes primitives

La contribution des formes primitives dans  $\Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{\ell_1 \ell_2}{4\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{h=1}^H a_{\eta, t_1, t_2}(h) \\ &\sum_{r>0} \sum_{\substack{1 \leq m_1 \leq \mathcal{M}_1 \\ 1 \leq m_2 \leq \mathcal{M}_2 \\ \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = r}} \lambda_f(m_1) \overline{\lambda_f(m_2)} \sum_{k \equiv 0[2]} \tilde{\Phi}_{t_1, t_2}(k-1; m_1, m_2, r, h) \frac{i^k (k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N \ell_1 \ell_2)} \overline{\hat{f}_{j,k}(h)} \hat{f}_{j,k}(r) dt_1 dt_2 d\eta. \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Dans cette section, on prouve la proposition suivante estimant la taille de  $\Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a)$ .



**Proposition 2.4.4** *Si  $\ell_1 M_1 \asymp \ell_2 M_2 \asymp A$ , alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a*

$$\Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a) \ll A^{1/2} \|a\|_2 \frac{\max\{P_1, P_2\}^{5/2}}{\min\{P_1, P_2\}} \left( \sqrt{P_1 + P_2} + \sqrt{\frac{H(h_1, \ell_1 \ell_2)}{h_1 \ell_1 \ell_2}} \right) Q^\varepsilon.$$

Preuve : La preuve de cette proposition suit le même principe que celles du lemme 2.4.8 et de la proposition 2.4.3. On maintient les notations introduites au cours de ces démonstrations et on indique ici uniquement les modifications nécessaires à cette situation. À l'aide d'une triple intégration par parties, on réécrit  $\Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a) &= \frac{\ell_1 \ell_2}{4\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \int_{1/2}^{M_2} \int_{1/2}^{\ell_1 M_1} \sum_{h \leq \xi} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \\ &\quad \sum_{r \leq z} A_y^{(2)}(r) \sum_{k \equiv 0[2]} \tilde{\Phi}_2(k-1; y, z, \xi) \frac{i^k (k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N\ell_1 \ell_2)} \overline{\hat{f}_{j,k}(h)} \hat{f}_{j,k}(r) dz dy d\xi dt_1 dt_2 d\eta. \end{aligned}$$

Il s'ensuit, grâce au lemme 2.4.3 (relation (2.4.4b)) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \Sigma_{hol}(\ell_1, \ell_2, H, a) &\ll \frac{\ell_1 \ell_2}{4\Lambda} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{1/2}^{2H} \int_{1/2}^{M_2} \sum_{\pm} \sum_Z \int_{\mathcal{I}(Z, y)} \frac{\Xi_2}{1+Z} \\ &\quad \left( \sum_{\substack{k \equiv 0[2] \\ 2 \leq k \leq Z_2^\pm}} \frac{(k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N\ell_1 \ell_2)} \left| \sum_{h \leq \xi} \overline{\hat{f}_{j,k}(h)} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \right|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\substack{k \equiv 0[2] \\ 2 \leq k \leq Z_2^\pm}} \frac{(k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N\ell_1 \ell_2)} \left| \sum_{r \leq z} \hat{f}_{j,k}(r) A_y^{(2)}(r) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad dz dy d\xi dt_1 dt_2 d\eta. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de grand crible (2.4.7b) et le lemme 2.4.7, on obtient

$$\sum_{\substack{k \equiv 0[2] \\ 2 \leq k \leq Z_2^\pm}} \frac{(k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N\ell_1 \ell_2)} \left| \sum_{r \leq z} \hat{f}_{j,k}(r) A_y^{(2)}(r) \right|^2 \ll y Q^\varepsilon \left( Z_2^{\pm 2} + \frac{z}{\ell_1 \ell_2} \right) \frac{z + \ell_2 y}{\ell_1}.$$

Dans le cas des formes primitives, la conjecture de Ramanujan-Petersson étant prouvée, en appliquant l'inégalité de grand crible de la même manière que nous l'avons fait pour obtenir (2.4.10), il vient

$$\sum_{\substack{k \equiv 0[2] \\ 2 \leq k \leq Z_2^\pm}} \frac{(k-1)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{\theta_k(N\ell_1 \ell_2)} \left| \sum_{h \leq \xi} \overline{\hat{f}_{j,k}(h)} a_{\eta, t_1, t_2}(h) \right|^2 \ll Q^\varepsilon \left( Z_i^{\pm 2} + \frac{(h_1, \ell_1 \ell_2) H}{h_1 \ell_1 \ell_2} \right) \|a\|_2^2.$$

La fin de la preuve est ensuite strictement identique à celle de la preuve du lemme 2.4.8.  $\square$

La preuve de la proposition 2.4.1 est maintenant immédiate. Partant du résultat du lemme 2.4.4, la formule de trace de Kuznetsov décompose  $\Sigma_2^{ND}(\ell_1, \ell_2, H, a)$  en trois parties (confer relation (2.4.6)). Chacun de ces termes est alors estimé au moyen de l'inégalité de grand crible dans les propositions 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.4.





## Chapitre 3

# Moments intégraux de fonctions $L$ de formes modulaires

Ce chapitre contient les preuves des théorèmes B et C. Par ailleurs, ces résultats nous seront essentiels pour obtenir une proportion non nulle de zéros non triviaux se trouvant sur la droite critique pour les fonctions  $L$  de formes modulaires primitives lors du chapitre suivant.

### 3.1 Introduction

L'étude des moments intégraux des fonctions  $L$  le long de la droite critique revêt une grande place en théorie analytique des nombres et ce, en partie, grâce aux liens étroits que ceux-ci possèdent avec les grandes conjectures énoncées lors du chapitre 1. Pour une fonction  $L(f, s)$  quelconque, notons  $\mathcal{M}_{f,k}(T)$  le moment intégral d'ordre  $k$  le long de la droite critique. Autrement dit,

$$\mathcal{M}_{f,k}(T) = \int_0^T \left| L\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \right|^k dt.$$

L'hypothèse de Lindelöf (dans le  $t$ -aspect) pour  $L(f, s)$  donne immédiatement, pour tout  $k$  et tout  $\epsilon$  strictement positif,

$$\mathcal{M}_{f,k}(T) \ll_{f,k,\epsilon} T^{1+\epsilon}.$$

De plus, la preuve de cette majoration quel que soit  $k$  fournirait une preuve de l'hypothèse de Lindelöf dans le  $t$ -aspect (voir [Tit86]). Cependant, l'étude du comportement asymptotique des moments intégraux est un problème délicat pour lequel des résultats précis ne sont connus que pour de petites valeurs de  $k$  et pour certaines fonctions  $L$  seulement. Néanmoins, n'importe quel résultat individuel de ce type fournit une preuve de l'hypothèse de Lindelöf en moyenne.

Pour la fonction  $\zeta$  de Riemann, nous ne disposons d'un équivalent que pour les moments d'ordre 2 et 4 suite aux travaux de Hardy et Littlewood ([HL16],[HL]) et de Ingham ([Ing]). Ceux-ci prouvent

$$\mathcal{M}_{\zeta,2}(T) \sim T \ln T \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\zeta,4}(T) \sim \frac{T}{2\pi} \ln^4 T.$$

Pour les fonctions  $L$  de formes modulaires, Good [Goo82] a établi le comportement asymptotique du moment d'ordre 2 de manière précise. De ce développement, il déduit la borne de sous-convexité (1.3.1) dans le  $t$ -aspect énoncée lors du chapitre 1.

La conjecture 2.5.4 de [CFK<sup>+</sup>05] fournit une formule générale pour les moments d'ordre pairs pour n'importe quelle fonction  $L$ . À la fin de ce chapitre, nous mettons à l'épreuve cette conjecture dans le cas du moment d'ordre 2. Le résultat obtenu améliore le développement de Zhang ([Zha05]) et généralise la formule asymptotique de Good mentionnée ci-dessus.

La méthode de ramollissement est apparue dans les travaux de Bohr et Landau ([BL13]) concernant l'hypothèse de densité (voir [IK04], chapitre 10) puis réactualisée par Selberg ([Sel42]) d'une part, et Levinson d'autre part ([Lev74]) qui, dans leur travaux respectifs, montrent qu'il existe une proportion positive de zéros non-triviaux de la fonction  $\zeta$  de Riemann se trouvant sur la droite critique. Autrement dit, l'étude des moments ramollis nous permet d'obtenir des résultats relatifs à l'hypothèse de Riemann qui, nous le rappellerons pour conclure cette introduction, implique elle-même l'hypothèse de Lindelöf.

### 3.2 Moment ramolli d'ordre 2

Dans tout ce chapitre, la fonction  $f$  désigne toujours une forme modulaire primitive de poids  $k$  pair, de niveau  $N$  sans facteurs carrés et de caractère trivial et on note  $(\lambda_f(n))$  la suite de ses coefficients de Fourier normalisés. On désigne également par  $(\mu_f(n))$  l'inverse de convolution de la suite  $(\lambda_f(n))$ . Il s'agit d'une fonction multiplicative qui est donnée par sa valeur en les nombres premiers  $p$  par

$$\mu_f(1) = 1, \quad \mu_f(p) = -\lambda_f(p), \quad \mu_f(p^2) = \lambda_f(p)^2 - \lambda_f(p^2) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$\text{et si } j \geq 3 \quad \mu_f(p^j) = 0. \quad (3.2.2)$$

On définit également un ramollisseur  $\psi$  de la forme

$$\psi(s) = \sum_{n \leq M} \frac{\mu_f(n)}{n^{s+\frac{1}{2}-\sigma_0}} P\left(\frac{\ln M/n}{\ln M}\right) \quad (3.2.3)$$

avec  $M = T^\nu$ ,  $\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{R}{\ln T}$  où  $R$  est un réel strictement positif et  $P$  un polynôme à coefficients réels satisfaisant  $P(0) = 0$ ,  $P(1) = 1$ . De plus, on considère une fonction de localisation  $w$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles, qui vérifie

$$w \text{ est lisse,} \quad (3.2.4a)$$

$$w \text{ est à support compact avec } \text{supp } w \subset [T/4, 2T], \quad (3.2.4b)$$

$$\text{pour tout } j \geq 0, \text{ nous avons } w^{(j)}(t) \ll_j \Delta^{-j} \text{ avec } \Delta = T/L \text{ et } L = \ln T. \quad (3.2.4c)$$

Afin d'alléger quelque peu les notations, pour des nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $|\Re \alpha|, |\Re \beta| < 1/2$ , posons

$$I_f(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) |\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt.$$

En suivant la méthode mise en œuvre par Young ([You10]) dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann, on prouve le théorème suivant.

**Théorème 3.2.1** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids  $k$  pair, de niveau  $N$  sans facteurs carrés et de caractère trivial. Pour  $0 < \nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$  et des nombres complexes  $\alpha, \beta$  tels que  $\alpha, \beta \ll 1/\ln T$  avec  $|\alpha + \beta| \gg 1/\ln T$ , alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) |\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = \widehat{w}(0)c(\alpha, \beta) + O(T(\ln L)^4/L)$$

où

$$c(\alpha, \beta) = 1 + \frac{1}{\nu} \frac{1 - T^{-2(\alpha+\beta)}}{(\alpha + \beta) \ln T} \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{-\beta x - \alpha y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u) du \right] \Big|_{x=y=0} \quad (3.2.5)$$

et où  $\theta = 7/64$  désigne l'exposant apparaissant dans l'approximation de la conjecture de Ramanujan-Petersson (confer relation (1.2.7)).

La preuve de ce théorème fournit par la même occasion un développement asymptotique du second moment intégral lisse au voisinage de la droite critique.

**Théorème 3.2.2** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids  $k$  pair, de niveau  $N$  sans facteurs carrés et de caractère trivial. Pour tous nombres complexes  $\alpha, \beta$  vérifiant  $\alpha, \beta \ll 1/\ln T$ , on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) dt = \mathfrak{a}_f \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \ln t dt + \left[ \mathfrak{b}_f + \mathfrak{a}_f \ln \left( \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right) \right] \widehat{w}(0) + O\left(|\alpha + \beta| T (\ln T)^2 + T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right)$$

avec

$$\mathfrak{a}_f = \frac{12N}{\pi^2 \nu(N)} L(\text{Sym}^2 f, 1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}_f = \frac{12N}{\pi^2 \nu(N)} L(\text{Sym}^2 f, 1) \left( \frac{L'(\text{Sym}^2 f, 1)}{L(\text{Sym}^2 f, 1)} + \gamma + \sum_{p|N} \frac{\ln p}{p+1} - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right).$$

**Remarque 3.2.1** Ce résultat est non trivial uniquement dans le cas où  $|\alpha + \beta| = o(1/\ln T)$ , et par ailleurs, on a besoin de  $|\alpha + \beta| = o(1/\ln^2 T)$  afin de s'assurer de la pertinence du terme d'ordre  $T$ .

**Corollaire 3.2.1** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids  $k$  pair, de niveau  $N$  sans facteurs carrés et de caractère trivial. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left| L\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left[ \mathfrak{a}_f \ln \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right) + \mathfrak{b}_f \right] dt + O\left(T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right).$$

**Remarque 3.2.2** Ce corollaire est en accord avec la conjecture énoncée dans [CFK<sup>+</sup>05] à propos des moments intégraux des fonctions  $L$  (voir section 3.3.2).

### 3.2.1 Équation fonctionnelle approchée

Afin de déterminer le comportement asymptotique de  $I_f(\alpha, \beta)$ , nous avons besoin de disposer d'une expression de  $L(f, s)$  pour  $s$  dans la bande critique. Dans le lemme 3.2.1, nous obtenons une formule exacte, aussi appelée "équation fonctionnelle approchée", qui donne une expression de  $L(f, s + it)L(f, s - it)$  lorsque  $s$  appartient à la bande critique où nous ne pouvons utiliser la série de Dirichlet de la fonction  $L$ . Grâce à cette nouvelle relation, on scinde  $I_f(\alpha, \beta)$  en une partie diagonale (sans oscillation) et une partie non-diagonale (avec oscillations). La contribution de cette dernière est bornée dans la section 3.2.2 alors que la contribution diagonale est estimée dans la section 3.2.3.

**Lemme 3.2.1** *Soit  $G$  une fonction entière, à décroissance rapide dans les bandes verticales, paire et avec  $G(0) = 1$ . Alors pour tous nombres complexes  $\alpha, \beta$  tels que  $0 \leq |\Re(\alpha)|, |\Re(\beta)| \leq 1/2$ , on a*

$$L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right)L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) = \sum_{m,n \geq 1} \sum \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn, t) \\ + X_{\alpha,\beta,t} \sum_{m,n \geq 1} \sum \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-it} V_{-\beta,-\alpha}(mn, t)$$

où

$$g_{\alpha,\beta}(s, t) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + \alpha + s + it\right)\Gamma\left(\frac{k}{2} + \beta + s - it\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + \alpha + it\right)\Gamma\left(\frac{k}{2} + \beta - it\right)}, \quad V_{\alpha,\beta}(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(1)} \frac{G(s)}{s} g_{\alpha,\beta}(s, t) x^{-s} ds$$

et

$$X_{\alpha,\beta,t} = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{-2(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \alpha - it\right)\Gamma\left(\frac{k}{2} - \beta + it\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + \alpha + it\right)\Gamma\left(\frac{k}{2} + \beta + it\right)}.$$

Preuve : Grâce à la formule de duplication de la fonction  $\Gamma$  d'Euler, la fonction complétée de  $L(f, s)$  donnée en (1.2.3) peut se réécrire sous la forme

$$\Lambda(f, s) = \left(\frac{8\pi}{2^k}\right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L(f, s) = L_\infty(f, s)L(f, s).$$

Pour tout réel positif  $X$ , posons

$$I_{\alpha,\beta}(X, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(1)} \frac{G(s)}{s} \Lambda\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + s + it\right) \Lambda\left(f, \frac{1}{2} + \beta + s - it\right) X^{-s} ds.$$

On déplace alors la droite d'intégration en  $\Re(s) = -1$  tout en croisant un pôle simple en  $s = 0$ , puis on applique ensuite l'équation fonctionnelle de la fonction  $L(f, s)$ . On obtient

$$I_{\alpha,\beta}(X, t) = -\frac{\varepsilon(f)^2}{2i\pi} \int_{(1)} \frac{G(s)}{s} \Lambda\left(f, \frac{1}{2} - \alpha + s - it\right) \Lambda\left(f, \frac{1}{2} - \beta + s + it\right) X^s ds \\ + \Lambda\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) \Lambda\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) \\ = -I_{-\beta,-\alpha}(1/X, t) + \Lambda\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) \Lambda\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right)$$

En utilisant l'expression précédente de la fonction  $L$  complétée  $\Lambda(f, s)$ , on réécrit

$$L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) = \frac{I_{\alpha, \beta}(X, t) + I_{-\beta, -\alpha}(1/X, t)}{L_{\infty}\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L_{\infty}\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right)}.$$

On exprime ensuite  $L(f, 1/2 + \alpha + s + it)L(f, 1/2 + \beta + s - it)$  au moyen de la série de Dirichlet pour obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{I_{\alpha, \beta}(X, t)}{L_{\infty}\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L_{\infty}\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(1)} \frac{G(s)}{s} X^{-s} g_{\alpha, \beta}(s, t) L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + s + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta + s - it\right) ds \\ &= \sum_{m, n \geq 1} \sum \frac{\lambda_f(m) \lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2} + \alpha} n^{\frac{1}{2} + \beta}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-it} V_{\alpha, \beta}(Xmn, t). \end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$\frac{I_{-\beta, -\alpha}(1/X, t)}{L_{\infty}\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L_{\infty}\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right)} = X_{\alpha, \beta, t} \sum_{m, n \geq 1} \sum \frac{\lambda_f(m) \lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2} - \beta} n^{\frac{1}{2} - \alpha}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-it} V_{-\beta, -\alpha}\left(\frac{mn}{X}, t\right).$$

On conclut en prenant  $X = 1$  et en utilisant la définition de  $L_{\infty}(f, s)$ .

□

La preuve précédente est essentiellement la même que celle du théorème 5.3 de [IK04]. Il nous sera néanmoins très utile de disposer d'approximations précises de  $X_{\alpha, \beta, t}$ ,  $g_{\alpha, \beta}(s, t)$  et  $V_{\alpha, \beta}(x, t)$ .

**Lemme 3.2.2** *Pour de grandes valeurs de  $t$  et pour  $s \ll t^\varepsilon$  dans n'importe quelle bande verticale, on a*

$$X_{\alpha, \beta, t} = \left(\frac{t\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{-2(\alpha+\beta)} \left(1 + \frac{i(\alpha^2 - \beta^2)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \quad (3.2.6)$$

$$\text{et } g_{\alpha, \beta}(s, t) = \left(\frac{t\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{2s} \left(1 + O\left(\frac{|s^2|}{t}\right)\right). \quad (3.2.7)$$

De plus, pour tout entier  $j \geq 0$  et tout réel  $A > 0$ , on a

$$t^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} V_{\alpha, \beta}(x, t) \ll_{A, j} \left(1 + \frac{|x|}{t^2}\right)^{-A}. \quad (3.2.8)$$

Preuve : La première partie de ce lemme provient de la formule de Stirling, avec  $s = \sigma + i\tau$  variant dans les bandes verticales, et sous la forme

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} |\tau|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|} e^{i(\tau \ln |\tau| - \tau + \frac{\pi}{2}(\sigma - 1/2) \operatorname{sgn}(\tau))} \left(1 - i \frac{(\sigma - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12}}{2\tau} + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)\right).$$



On trouve cette relation dans ([Ten95], corollaire 0.13). Pour prouver (3.2.8), on déplace la droite d'intégration loin vers la droite sur  $\Re s = A$  et grâce à (3.2.7), on obtient la borne désirée lorsque  $t^2 \ll x$ . Dans le cas  $x \ll t^2$ , le résultat s'obtient par des majorations triviales.  $\square$

En utilisant l'équation fonctionnelle approchée précédente, on scinde  $I_f(\alpha, \beta)$  en une somme de termes diagonaux et non-diagonaux. Précisément, en ouvrant le ramollisseur  $\psi$ , on peut réécrire

$$I_f(\alpha, \beta) = \sum_{a,b \leq M} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)}{\sqrt{ab}} P\left(\frac{\ln M/a}{\ln M}\right) P\left(\frac{\ln M/b}{\ln M}\right) \left[ I_{a,b}^{D_1}(\alpha, \beta) + I_{a,b}^{D_2}(\alpha, \beta) \right. \\ \left. + I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) + I_{a,b}^{ND_2}(\alpha, \beta) \right] \quad (3.2.9)$$

avec

$$I_{a,b}^{D_1}(\alpha, \beta) = \sum_{am=bn} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) V_{\alpha,\beta}(mn, t) dt,$$

$$I_{a,b}^{D_2}(\alpha, \beta) = \sum_{am=bn} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) X_{\alpha,\beta,t} V_{-\beta,-\alpha}(mn, t) dt,$$

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) = \sum_{am \neq bn} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left(\frac{am}{bn}\right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn, t) dt,$$

$$I_{a,b}^{ND_2}(\alpha, \beta) = \sum_{am \neq bn} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) X_{\alpha,\beta,t} \left(\frac{am}{bn}\right)^{-it} V_{-\beta,-\alpha}(mn, t) dt.$$

### 3.2.2 Évaluation des termes non-diagonaux

Dans cette partie, nous évaluons la taille des termes non-diagonaux. Plus précisément, nous prouvons la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1** *Si  $0 < \nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$  et si  $\alpha, \beta$  sont des nombres complexes vérifiant  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$\sum_{a,b \leq M} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)}{\sqrt{ab}} P\left(\frac{\ln M/a}{\ln M}\right) P\left(\frac{\ln M/b}{\ln M}\right) \left[ I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) + I_{a,b}^{ND_2}(\alpha, \beta) \right] \ll T^{1-\varepsilon}.$$

L'outil essentiel pour prouver ce résultat est le théorème sur l'estimation en moyenne des sommes avec décalage additif obtenu lors du chapitre 2.

#### Lemmes préliminaires

Afin de prouver la proposition précédente, on commence par supprimer les termes trivialement négligeables apparaissant dans la définition de  $I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta)$ .

**Lemme 3.2.3** Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \gamma < 1$ , des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  et des entiers strictement positifs  $a, b \leq T^\nu$ . Pour tout réel  $A > 0$ , on a

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{am \neq bn \\ mn \ll T^{2+\varepsilon} \\ \left| \frac{am}{bn} - 1 \right| \ll T^{-\gamma}}} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left( \frac{am}{bn} \right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn, t) dt + O(T^{-A}). \quad (3.2.10)$$

Preuve : Tout d'abord, en utilisant la majoration (3.2.8) pour  $j = 0$ , on obtient pour tout réel  $A > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left( \frac{am}{bn} \right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn, t) dt \ll_A T \left( \frac{T^2}{mn} \right)^A.$$

Par conséquent, pour  $A > 1/2$ , étant donné  $|\lambda_f(n)| \leq \tau(n) \ll n^\varepsilon$  et  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{am \neq bn \\ mn > T^{2+\varepsilon}}} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left( \frac{am}{bn} \right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn, t) dt &\ll T^{1+2A} \sum_{mn > T^{2+\varepsilon}} \frac{\tau(m)\tau(n)}{m^{\frac{1}{2}+A+\Re\alpha}n^{\frac{1}{2}+A+\Re\beta}} \\ &\ll T^{1+2A} \sum_{h > T^{2+\varepsilon}} \frac{1}{h^{\frac{1}{2}+A-\varepsilon}} \\ &\ll T^{2-A\varepsilon} \\ &\ll T^{-A}. \end{aligned}$$

Ensuite, grâce à la relation (3.2.8) valable pour tout entier  $j$  et comme  $w^{(j)}(t) \ll \Delta^{-j}$ , pour tout réel  $A > 0$ , on a la majoration uniformément en  $x$  suivante

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} [w(t)V_{\alpha,\beta}(x, t)] \ll \Delta^{-j} \left( \frac{T^2}{|x|} \right)^A.$$

Ainsi, pour  $am \neq bn$ , après  $j$  intégrations par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left( \frac{am}{bn} \right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn, t) dt &= \frac{1}{(i \ln \frac{am}{bn})^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{am}{bn} \right)^{-it} \frac{\partial^j}{\partial t^j} [w(t)V_{\alpha,\beta}(x, t)] dt \\ &\ll \frac{T}{\Delta^j |\ln \frac{am}{bn}|^j} \left( \frac{T^2}{mn} \right)^A. \end{aligned}$$

De quoi l'on déduit, avec  $A = 1/2 + \max\{\Re\alpha, \Re\beta\} + \delta$  et  $\delta > 0$ , et en utilisant la minoration  $x/2 \leq \ln(1+x)$  valable pour  $0 < x < 1$ ,

$$\sum_{\substack{am \neq bn \\ \left| \frac{am}{bn} - 1 \right| > T^{-\gamma}}} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left( \frac{am}{bn} \right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn, t) dt \ll \frac{T^{1+2A+j\gamma}}{\Delta^j} \sum_{m,n \geq 1} \frac{\tau(m)\tau(n)}{m^{\frac{1}{2}+\Re\alpha+A}n^{\frac{1}{2}+\Re\beta+A}}.$$

Comme  $\gamma < 1$  et en choisissant  $j$  aussi grand que souhaité, on obtient la majoration annoncée.  $\square$

On introduit une partition dyadique de l'unité pour les sommes en  $m$  et  $n$ . On fixe une fonction lisse arbitraire  $\rho : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , à support compact inclus dans  $[1, 2]$  et vérifiant

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \rho\left(2^{-\ell/2}x\right) = 1.$$

On pourra se référer à [Har03] (section 5) pour trouver la construction de telles fonctions. Pour chaque entier  $\ell$ , on définit

$$\rho_\ell(x) = \rho\left(\frac{x}{A_\ell}\right) \text{ avec } A_\ell = 2^{\ell/2}T^\gamma.$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique de  $I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta)$ , on considère la fonction  $F_{h;\ell_1,\ell_2}$  définie par

$$F_{h;\ell_1,\ell_2}(x, y) = \frac{a^{\frac{1}{2}+\alpha}b^{\frac{1}{2}+\beta}}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}y^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left(1 + \frac{h}{y}\right)^{-it} V_{\alpha,\beta}\left(\frac{xy}{ab}, t\right) dt \times \rho_{\ell_1}(x)\rho_{\ell_2}(y). \quad (3.2.11)$$

**Lemme 3.2.4** Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \gamma < 1$ , des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  et des entiers strictement positifs  $a, b \leq T^\nu$ . Alors, pour tout réel  $A > 0$ , on a

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{A_{\ell_1}A_{\ell_2} \ll abT^{2+\varepsilon} \\ A_{\ell_1} \asymp A_{\ell_2} \\ A_{\ell_1}, A_{\ell_2} \gg T^\gamma}} \sum_{\substack{h \neq 0 \\ |h| \ll T^{-\gamma} \sqrt{A_{\ell_1}A_{\ell_2}}}} \sum_{am-bn=h} \lambda_f(m)\lambda_f(n)F_{h;\ell_1,\ell_2}(am, bn) + O(T^{-A}). \quad (3.2.12)$$

Preuve : Par souci de simplicité, on pose

$$H(x, y) = \frac{a^{\frac{1}{2}+\alpha}b^{\frac{1}{2}+\beta}}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}y^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left(\frac{x}{y}\right)^{-it} V_{\alpha,\beta}\left(\frac{xy}{ab}, t\right) dt.$$

Partant du lemme précédent et en utilisant la partition de l'unité, on peut réécrire

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) = \sum_{\ell_1, \ell_2} \sum_{h \neq 0} \sum_{\substack{am-bn=h \\ mn \ll T^{2+\varepsilon} \\ \left|\frac{am}{bn} - 1\right| \ll T^{-\gamma}}} \lambda_f(m)\lambda_f(n)H(am, bn)\rho_{\ell_1}(am)\rho_{\ell_2}(bn) + O(T^{-A}).$$

Premièrement, si  $|h| \geq \sqrt{A_{\ell_1}A_{\ell_2}}T^{-\gamma}$  alors

$$\max\left\{\left|\frac{am}{bn} - 1\right|, \left|\frac{bn}{am} - 1\right|\right\}^2 \geq \left|\frac{am}{bn} - 1\right| \left|\frac{bn}{am} - 1\right| = \frac{h^2}{ambn} \asymp \frac{h^2}{A_{\ell_1}A_{\ell_2}} \geq T^{-2\gamma}.$$

Deuxièmement, si  $|\ell_1 - \ell_2| \geq 3$ , par exemple si  $\ell_1 - \ell_2 \geq 3$  alors

$$\frac{am}{bn} - 1 \geq \frac{2^{\frac{\ell_1 - \ell_2}{2}}}{2} - 1 \geq \sqrt{2} - 1 \gg 1.$$

Nous pouvons ainsi supposer  $A_{\ell_1} \asymp A_{\ell_2}$ . Troisièmement, si  $A_{\ell_2} \leq T^\gamma$  alors

$$\left|\frac{am}{bn} - 1\right| = \frac{h}{bn} \geq \frac{h}{2A_{\ell_2}} \gg T^{-\gamma}.$$

On en déduit que l'on peut supposer  $A_{\ell_2} \geq T^\gamma$  et, de la même manière,  $A_{\ell_1} \geq T^\gamma$ . Pour terminer, étant donné que  $am - bn = h$ , on obtient  $H(am, bn)\rho_{\ell_1}(am)\rho_{\ell_2}(bn) = F_{h;\ell_1,\ell_2}(am, bn)$ . □

### Sommes avec décalage additif

Afin d'appliquer le théorème 2.1.1, on commence par déterminer des estimations sur les dérivées successives de la fonction  $F_{h;\ell_1,\ell_2}$ .

**Lemme 3.2.5** *Soient  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  des nombres complexes,  $\sigma$  un réel strictement positif quelconque. Pour tous entiers positifs  $i$  et  $j$ , on a*

$$x^i y^j \frac{\partial^{i+j} F_{h;\ell_1,\ell_2}}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \ll_{i,j} \left(\frac{a}{A_{\ell_1}}\right)^{\frac{1}{2} + \Re\alpha + \sigma} \left(\frac{b}{A_{\ell_2}}\right)^{\frac{1}{2} + \Re\beta + \sigma} T^{1+2\sigma} (\ln T)^j$$

où la constante implicite ne dépend pas de  $h$ .

Preuve : On pose  $P_0(Y) = 1$  et pour  $j \geq 1$ ,  $P_j(Y) = \prod_{\ell=0}^{j-1} (Y - \ell)$ . Soit  $\Re s = \sigma > 0$ , alors on a

$$\begin{aligned} y^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \int_{\mathbb{R}} w(t) \left(1 + \frac{h}{y}\right)^{-it} g_{\alpha,\beta}(s, t) dt \right) &= \int_{\mathbb{R}} w(t) g_{\alpha,\beta}(s, t) \left(1 + \frac{h}{y}\right)^{-it} Q_j(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(1 + \frac{h}{y}\right)^{-it}}{\left[i \ln \left(1 + \frac{h}{y}\right)\right]^j} \frac{\partial^j}{\partial t^j} [w(t) g_{\alpha,\beta}(s, t) Q_j(t)] dt \end{aligned}$$

où  $Q_j(t) = \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} P_r(it) P_{j-r}(-it) \left(1 + \frac{h}{y}\right)^{-(j-r)}$ . Comme  $Q_j^{(r)}(t) \ll \left|\frac{h/y}{1+h/y}\right|^j t^{j-r}$  pour  $r \leq j$  et  $\frac{\partial^r}{\partial t^r} [w(t) g_{\alpha,\beta}(s, t)] dt \ll T^{2\sigma} \Delta^{-r}$ , on déduit

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} [w(t) g_{\alpha,\beta}(s, t) Q_j(t)] \ll_{s,j} T^{2\sigma} \left|\frac{h/y}{1+h/y}\right|^j (\ln T)^j.$$

La constante implicite dépendant de manière polynomiale en  $s$ . Comme on a  $h/y \ll T^{-\gamma}$  dans les indices de sommations, il vient

$$y^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \int_{\mathbb{R}} w(t) \left(1 + \frac{h}{y}\right)^{-it} g_{\alpha,\beta}(s, t) dt \right) \ll_{s,j} T^{1+2\sigma} (\ln T)^j \quad (3.2.13)$$

et la constante implicite ne dépend pas de  $h$ . En écrivant

$$F_{h;\ell_1,\ell_2}(x, y) = \frac{\rho_{\ell_1}(x) \rho_{\ell_2}(y)}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{G(s)}{s} \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2} + \alpha + s} \left(\frac{b}{y}\right)^{\frac{1}{2} + \beta + s} \int_{\mathbb{R}} w(t) \left(1 + \frac{h}{y}\right)^{-it} g_{\alpha,\beta}(s, t) dt ds,$$

le résultat annoncé découle alors de la formule de Leibniz et de la majoration (3.2.13).  $\square$

**Remarque 3.2.3** La borne triviale des sommes avec décalage additif, ie celle obtenue en majorant par inégalité triangulaire puis en appliquant l'inégalité de Deligne, est donnée pour tout réel  $\varepsilon > 0$  strictement positif, par

$$\sum_{\ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = h} \lambda_f(m_1) \lambda_f(m_2) g_h(m_1, m_2) \ll_{\varepsilon} \min\{M_1, M_2\} (M_1 M_2)^{\varepsilon}. \quad (3.2.14)$$

La borne triviale (3.2.14) associée au lemme 3.2.5 implique le corollaire suivant.

**Corollaire 3.2.2** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) \ll_{\varepsilon} \min\{a, b\} T^{1+\varepsilon}.$$

**Remarque 3.2.4** Cette borne triviale de  $I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta)$  est insuffisante pour prouver la proposition 3.2.1. Autrement dit, il est nécessaire de tenir compte des oscillations des valeurs propres de Hecke pour obtenir le résultat annoncé. Dans un premier temps, on applique la majoration suivante, établie par Blomer [Blo04], sur les problèmes de convolution avec décalage additif.

**Théorème 3.2.3 (Blomer, [Blo04])** *Soit  $\varepsilon > 0$ . On considère des entiers strictement positifs  $\ell_1, \ell_2, h$  et des nombres réels  $M_1, M_2, P_1, P_2$  plus grands que 1. Soit  $g_h$  une fonction lisse, à support compact inclus dans  $[M_1, 2M_1] \times [M_2, 2M_2]$  telle que  $\|g_h^{(ij)}\|_{\infty} \ll_{i,j} (P_1/M_1)^i (P_2/M_2)^j$  pour tous entiers  $i, j \geq 0$ . Alors*

$$\sum_{\ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 = h} \lambda_f(m_1) \lambda_f(m_2) g_h(m_1, m_2) \ll_{\varepsilon, P_1, P_2, N, k} (\ell_1 M_1 + \ell_2 M_2)^{1/2+\theta+\varepsilon}.$$

La majoration est uniforme en  $\ell_1, \ell_2, h$  et la dépendance en  $P_1, P_2, N$  et  $k$  est polynomiale.

**Remarque 3.2.5** En comparant avec la majoration (3.2.14), ce théorème est en accord avec la “square-root cancellation philosophy”.

On déduit du théorème 3.2.3 et du lemme 3.2.5 la proposition suivante, qui fournit une première estimation satisfaisante et qui sera améliorée lors de la proposition 3.2.3.

**Proposition 3.2.2** *Soient des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  et des entiers strictement positifs  $a, b$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) \ll_{\varepsilon} (ab)^{\frac{3}{4}+\frac{\theta}{2}} T^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon}.$$

Preuve : Le théorème 3.2.3 et le lemme 3.2.5 donnent

$$\sum_{am-bn=h} \lambda_f(m) \lambda_f(n) F_{h; \ell_1, \ell_2}(am, bn) \ll \left(\frac{a}{A_{\ell_1}}\right)^{\frac{1}{2}+\Re\alpha+\sigma} \left(\frac{b}{A_{\ell_2}}\right)^{\frac{1}{2}+\Re\beta+\sigma} T^{1+2\sigma} (\ln T)^{\kappa} (A_{\ell_1} + A_{\ell_2})^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon}$$

où  $\kappa$  est une constante. Dès lors, grâce au lemme 3.2.4 et avec  $\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon - \Re\alpha - \Re\beta - 2\sigma > 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) &\ll T^{1-\gamma+2\sigma} (\ln T)^{\kappa} \sum_{\substack{A_{\ell_1} A_{\ell_2} \ll ab T^{2+\varepsilon} \\ A_{\ell_1} \asymp A_{\ell_2} \\ A_{\ell_1}, A_{\ell_2} \gg T^{\gamma}}} \left(\frac{a}{A_{\ell_1}}\right)^{\frac{1}{2}+\Re\alpha+\sigma} \left(\frac{b}{A_{\ell_2}}\right)^{\frac{1}{2}+\Re\beta+\sigma} \sqrt{A_{\ell_1} A_{\ell_2}} (A_{\ell_1} + A_{\ell_2})^{1/2+\theta+\varepsilon} \\ &\ll T^{1-\gamma+2\sigma} (ab)^{1/2+\sigma} (\ln T)^{\kappa} \sum_{T^{\gamma} \ll A_{\ell_1} \ll \sqrt{ab} T^{1+\varepsilon/2}} A_{\ell_1}^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon-\Re\alpha-\Re\beta-2\sigma} \\ &\ll T^{1-\gamma} T^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} (ab)^{\frac{3}{4}+\frac{\theta}{2}} \sum_{T^{\gamma} \ll A_{\ell_1} \ll \sqrt{ab} T^{1+\varepsilon/2}} 1. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a  $\sum_{T^{\gamma} \ll A_{\ell_1} \ll \sqrt{ab} T^{1+\varepsilon/2}} 1 = \sum_{1 \leq 2\ell_1/2 \ll \sqrt{ab} T^{1-\gamma+\varepsilon/2}} 1 \ll \ln T$  de quoi l'on déduit le résultat en prenant  $\gamma = 1 - \varepsilon$ .

□

**Remarque 3.2.6** Nous sommes tentés de résoudre ce problème de convolution avec décalage additif en moyenne (sur  $h$ ) et ainsi, prendre en considération davantage d'oscillations des valeurs propres de Hecke. Par exemple, en utilisant le théorème 6.3 de [Ric06], on vérifie que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) \ll_{\varepsilon} (ab)^{\frac{3}{4} + \frac{\theta}{2}} T^{\frac{3}{2} + \theta + \varepsilon}.$$

Il est immédiat que cette borne n'est pas admissible. Ceci s'explique par le fait que la longueur de la somme en  $h$  est très courte. Il en résulte que nous avons besoin d'un théorème s'appliquant pour les sommes courtes de sommes avec décalage additif, ce que donne le théorème 2.1.1.

**Proposition 3.2.3** Soient des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  et des entiers strictement positifs  $a, b$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) \ll_{\varepsilon} (ab)^{\frac{1+\theta}{2}} T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}.$$

Preuve : On applique le théorème 2.1.1 avec  $H = T^{-\gamma} \sqrt{A_{\ell_1} A_{\ell_2}}$ ,  $h_1 = 1$  et  $a(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h \leq H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors, en utilisant le lemme 3.2.4, on obtient

$$\begin{aligned} & I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) \\ & \ll \sum_{\substack{A_{\ell_1} A_{\ell_2} \ll ab T^{2+\varepsilon} \\ A_{\ell_1} \asymp A_{\ell_2} \\ A_{\ell_1}, A_{\ell_2} \gg T^{\gamma}}} \left( \frac{a}{A_{\ell_1}} \right)^{\frac{1}{2} + \Re \alpha + \sigma} \left( \frac{b}{A_{\ell_2}} \right)^{\frac{1}{2} + \Re \beta + \sigma} T^{1+2\sigma+\varepsilon} \sqrt{A_{\ell_1} H} \left[ \sqrt{\ln T} + \left( \frac{A_{\ell_1}}{\ln T} \right)^{\theta} \left( 1 + \sqrt{\frac{H}{ab}} \right) \right] \\ & \ll (ab)^{\frac{1}{2} + \theta} T^{1+2\sigma+\varepsilon - \frac{\gamma}{2}} \sum_{T^{\gamma} \ll A_{\ell} \ll \sqrt{ab} T^{1+\varepsilon}} A_{\ell}^{\theta - (\Re \alpha + \Re \beta + 2\sigma)} \ll (ab)^{\frac{1+\theta}{2}} T^{1 - \frac{\gamma}{2} + \theta + \varepsilon}. \end{aligned}$$

On conclut immédiatement en choisissant  $\gamma = 1 - \varepsilon$ . □

**Corollaire 3.2.3** Soient des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  et des entiers strictement positifs  $a, b$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$I_{a,b}^{ND_2}(\alpha, \beta) \ll_{\varepsilon} (ab)^{\frac{1+\theta}{2}} T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}.$$

Preuve : On pose

$$w_1(t) = w(t) \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{-2(\alpha+\beta)} \left( 1 + \frac{i(\alpha^2 - \beta^2)}{t} \right).$$

Grâce à la relation (3.2.6), on peut écrire

$$I_{a,b}^{ND_2}(\alpha, \beta) = \sum_{am \neq bn} \frac{\lambda_f(m) \lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2} - \beta} n^{\frac{1}{2} - \alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(t) \left( \frac{am}{bn} \right)^{-it} V_{-\beta, -\alpha}(mn, t) dt + O\left( \frac{1}{T} \sum_{mn \ll T^{2+\varepsilon}} \frac{|\lambda_f(m) \lambda_f(n)|}{m^{\frac{1}{2} - \Re \beta} n^{\frac{1}{2} - \Re \alpha}} \right).$$

Le terme d'erreur devient  $O(T^{\varepsilon})$  et comme  $w_1$  vérifie les conditions (3.2.4a), (3.2.4b) et (3.2.4c), quitte à changer  $w$  par  $w_1$  et  $(\alpha, \beta)$  par  $(-\beta, -\alpha)$ , on peut appliquer la proposition 3.2.3. □

### Preuve de la proposition 3.2.1

En utilisant la proposition 3.2.3 et le corollaire 3.2.3, on majore trivialement la contribution des termes non-diagonaux par

$$\sum_{a,b \leq M} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)}{\sqrt{ab}} P\left(\frac{\ln M/a}{\ln M}\right) P\left(\frac{\ln M/b}{\ln M}\right) \left[ I_{a,b}^{ND_1}(\alpha, \beta) + I_{a,b}^{ND_2}(\alpha, \beta) \right] \ll T^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} \sum_{a,b \leq M} (ab)^{\frac{\theta}{2}} \ll T^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} T^{\nu(2+\theta)}.$$

Ainsi, si  $\nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$ , la partie non-diagonale de  $I_f(\alpha, \beta)$  est majorée par  $T^{1-\varepsilon}$ .

### 3.2.3 Évaluation des termes diagonaux

Pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , posons

$$I_f^{D_i}(\alpha, \beta) = \sum_{a,b \leq M} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)}{\sqrt{ab}} P\left(\frac{\ln M/a}{\ln M}\right) P\left(\frac{\ln M/b}{\ln M}\right) I_{a,b}^{D_i}(\alpha, \beta). \quad (3.2.15)$$

On considère la partie diagonale  $I_f^D(\alpha, \beta)$  du second moment ramolli. Ainsi, nous avons

$$I_f^D(\alpha, \beta) = I_f^{D_1}(\alpha, \beta) + I_f^{D_2}(\alpha, \beta). \quad (3.2.16)$$

Dans cette section, on prouve la proposition suivante :

**Proposition 3.2.4** *Soient des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  tels que  $|\alpha + \beta| \gg L^{-1}$  et soit  $0 < \nu < 1$ . Alors*

$$I_f^D(\alpha, \beta) = \widehat{w}(0)c(\alpha, \beta) + O(T(\ln L)^4/L)$$

où  $c(\alpha, \beta)$  est défini dans la relation (3.2.5).

### Lemmes liminaires

**Lemme 3.2.6** *On désigne par  $\Omega_{\alpha, \beta}$  l'ensemble des vecteurs  $(u, v, s)$  de  $\mathbb{C}^3$  vérifiant*

$$\begin{cases} \Re u + \Re v > -1/2, \\ \Re s > -\frac{1}{4} - \frac{\Re \alpha}{2} - \frac{\Re \beta}{2}, \\ \Re u + \Re s > -\frac{1}{2} - \Re \alpha, \\ \Re v + \Re s > -\frac{1}{2} - \Re \beta. \end{cases}$$

On a

$$\sum_{\substack{a,b,m,n \geq 1 \\ am=bn}} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{a^{\frac{1}{2}+\nu}b^{\frac{1}{2}+u}m^{\frac{1}{2}+\alpha+s}n^{\frac{1}{2}+\beta+s}} = \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s)L(f \times f, 1 + u + v)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u + s)L(f \times f, 1 + \beta + v + s)} A_{\alpha, \beta}(u, v, s)$$

où  $A_{\alpha, \beta}(u, v, s)$  est donné par un produit eulérien absolument convergent dans  $\Omega_{\alpha, \beta}$ .

Preuve : Afin de simplifier quelque peu les notations, on pose

$$\mathcal{P} = \sum_{\substack{a,b,m,n \geq 1 \\ am=bn}} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{a^{\frac{1}{2}+v}b^{\frac{1}{2}+u}m^{\frac{1}{2}+\alpha+s}n^{\frac{1}{2}+\beta+s}}.$$

En utilisant la relation (1.2.2), pour tout nombre premier  $p$  tel que  $p \nmid N$ , on obtient

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)\lambda_f(p^{\ell+1})}{p^{\ell s}} = \lambda_f(p) \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)^2}{p^{\ell s}} - \frac{1}{p^s} \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^{\ell+1})\lambda_f(p^\ell)}{p^{\ell s}}$$

et

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)\lambda_f(p^{\ell+2})}{p^{\ell s}} = \lambda_f(p^2) \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)^2}{p^{\ell s}} - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^{\ell+1})\lambda_f(p^\ell)}{p^{\ell s}}.$$

On en déduit

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)\lambda_f(p^{\ell+1})}{p^{\ell s}} = \lambda_f(p) \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)^2}{p^{\ell s}} \quad (3.2.17)$$

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)\lambda_f(p^{\ell+2})}{p^{\ell s}} = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(\lambda_f(p^2) - \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)^2}{p^{\ell s}}. \quad (3.2.18)$$

De plus, étant donné que l'on peut écrire

$$\mathcal{P} = \prod_p \left( \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \geq 0 \\ \ell_1 + \ell_3 = \ell_2 + \ell_4}} \frac{\mu_f(p^{\ell_1})\mu_f(p^{\ell_2})\lambda_f(p^{\ell_3})\lambda_f(p^{\ell_4})}{p^{\ell_1(\frac{1}{2}+v)}p^{\ell_2(\frac{1}{2}+u)}p^{\ell_3(\frac{1}{2}+\alpha+s)}p^{\ell_4(\frac{1}{2}+\beta+s)}} \right)$$

en utilisant les relations (3.2.1) et (3.2.2), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \prod_{p \nmid N} & \left[ \left(1 + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+u+v}} + \frac{1}{p^{2(1+u+v)}}\right) \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)^2}{p^{\ell(1+\alpha+\beta+2s)}} \right. \\ & - \lambda_f(p) \left( \frac{1}{p^{1+v+\beta+s}} + \frac{1}{p^{1+u+\alpha+s}} \right) \left(1 + \frac{1}{p^{1+u+v}}\right) \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)\lambda_f(p^{\ell+1})}{p^{\ell(1+\alpha+\beta+2s)}} \\ & \left. + \left( \frac{1}{p^{2(1+v+\beta+s)}} + \frac{1}{p^{2(1+u+\alpha+s)}} \right) \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)\lambda_f(p^{\ell+2})}{p^{\ell(1+\alpha+\beta+2s)}} \right] \\ & \times \prod_{p \mid N} \left[ \left(1 + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+u+v}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\alpha+u+s}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\beta+v+s}}\right) \sum_{\ell \geq 0} \frac{\lambda_f(p^\ell)^2}{p^{\ell(1+\alpha+\beta+2s)}} \right]. \end{aligned}$$



Des relations (3.2.17) et (3.2.18), on tire

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s) \prod_{p|N} \left[ 1 + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+u+v}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\alpha+u+s}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\beta+v+s}} \right] \\
&\quad \times \prod_{p \nmid N} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+u+v}} + \frac{1}{p^{2(1+u+v)}} \right) \left( 1 - \frac{1}{p^{2(1+\alpha+\beta+2s)}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_f(p)^2 \left( 1 - \frac{1}{p^{1+\alpha+\beta+2s}} \right) \left( \frac{1}{p^{1+v+\beta+s}} + \frac{1}{p^{1+u+\alpha+s}} \right) \left( 1 + \frac{1}{p^{1+u+v}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 - \frac{1}{p^{1+\alpha+\beta+2s}} \right) \left( \lambda_f(p)^2 - \frac{1}{p^{1+\alpha+\beta+2s}} \right) \left( \frac{1}{p^{2(1+v+\beta+s)}} + \frac{1}{p^{2(1+u+\alpha+s)}} \right) \right] \\
&= L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s) \prod_p \left[ 1 + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+u+v}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\alpha+u+s}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\beta+v+s}} + \chi_0(p) E_p \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
E_p &= \\
\frac{1}{p^2} &\left[ \frac{1}{p^{2(u+v)}} - \frac{1}{p^{2(\alpha+\beta+2s)}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^s} \left( \frac{1}{p^{u+\alpha}} + \frac{1}{p^{v+\beta}} \right) \left( \frac{1}{p^{u+v}} - \frac{1}{p^{\alpha+\beta+2s}} \right) + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{2s}} \left( \frac{1}{p^{2(u+\alpha)}} + \frac{1}{p^{2(v+\beta)}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{3+\alpha+\beta+3s}} \left[ \frac{1}{p^{u+v}} \left( \frac{1}{p^{u+\alpha}} + \frac{1}{p^{v+\beta}} \right) - \frac{1}{p^s} \left( \frac{1}{p^{2(u+\alpha)}} + \frac{1}{p^{2(v+\beta)}} \right) - \frac{1}{p^{u+v+\alpha+\beta+s}} \right] \\
&\quad + \frac{1}{p^{4+2(\alpha+\beta+2s)}} \left[ \frac{1}{p^{2(u+\alpha+s)}} + \frac{1}{p^{2(v+\beta+s)}} - \frac{1}{p^{2(u+v)}} \right].
\end{aligned}$$

Étant donné que la fonction  $L$  de Rankin-Selberg  $L(f \times f, z)$  admet comme produit eulérien (voir (1.2.4)), pour  $\Re z > 1$ ,

$$L(f \times f, z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L_p(f \times f, z)$$

avec

$$\begin{aligned}
L_p(f \times f, z) &= \left( 1 - \frac{\alpha_f(p)^2}{p^z} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha_f(p)\beta_f(p)}{p^z} \right)^{-2} \left( 1 - \frac{\beta_f(p)^2}{p^z} \right)^{-1} \\
&= \left( 1 - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^z} + \chi_0(p) \left[ \frac{2 + \lambda_f(p)^2}{p^{2z}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{3z}} + \frac{1}{p^{4z}} \right] \right)^{-1},
\end{aligned}$$

on peut réécrire

$$\begin{aligned}
1 + \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+u+v}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\alpha+u+s}} - \frac{\lambda_f(p)^2}{p^{1+\beta+v+s}} + \chi_0(p) E_p &= \frac{L_p(f \times f, 1 + u + v)}{L_p(f \times f, 1 + u + \alpha + s) L_p(f \times f, 1 + v + \beta + s)} \\
&\quad \times \left[ 1 + L_p(f \times f, 1 + u + \alpha + s) L_p(f \times f, 1 + v + \beta + s) \sum_{r=2}^8 \sum_{\ell} \frac{a_{r,\ell}(p)}{p^{r+X_{r,\ell}(u,v,\alpha,\beta,s)}} \right]
\end{aligned}$$

où la somme sur  $\ell$  est finie,  $X_{r,\ell}$  sont des formes linéaires en  $u, v, \alpha, \beta, s$  et  $a_{r,\ell}(p)$  sont des nombres complexes  $|a_{r,\ell}(p)| \ll 1$ . Par conséquent, on trouve

$$\mathcal{P} = \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s) L(f \times f, 1 + u + v)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u + s) L(f \times f, 1 + \beta + v + s)} A_{\alpha,\beta}(u, v, s)$$

où

$$A_{\alpha,\beta}(u, v, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left[ 1 + \sum_{r,\ell} O \left( \frac{1}{p^{r+X_{r,\ell}(\Re u, \Re v, \Re \alpha, \Re \beta, \Re s)}} \right) \right].$$

Par ailleurs  $A_{\alpha,\beta}(u, v, s)$  est un produit eulérien absolument convergent dans la région délimitée par  $\{\Re(\alpha + u + s) > -1\} \cap \{\Re(\beta + v + s) > -1\} \cap_{r,\ell} \{X_{r,\ell}(\Re u, \Re v, \Re \alpha, \Re \beta, \Re s) > 1 - r\}$ . En explicitant ces formes linéaires  $X_{2,\ell}$ , on montre que  $\{X_{2,\ell}(\Re u, \Re v, \Re \alpha, \Re \beta, \Re s) > -1\} = \Omega_{\alpha,\beta}$ . De la même manière, en écrivant toutes les formes linéaires  $X_{r,\ell}$ , on prouve que si  $(u, v, s)$  appartient à  $\Omega_{\alpha,\beta}$  alors  $X_{r,\ell}(\Re u, \Re v, \Re \alpha, \Re \beta, s) > -r/2 \geq 1 - r$ . Par conséquent,  $A_{\alpha,\beta}(u, v, s)$  est un produit eulérien absolument convergent sur  $\Omega_{\alpha,\beta}$  et en tant que tel, définit une fonction holomorphe sur  $\Omega_{\alpha,\beta}$ . □

**Lemme 3.2.7** *On a*

$$A_{0,0}(0, 0, 0) = 1.$$

Preuve : Grâce au lemme 3.2.6, pour  $\Re s > 0$ , on peut écrire

$$A_{0,0}(s, s, s) = \sum_{\substack{a,b,m,n \geq 1 \\ am=bn}} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{(ambn)^{\frac{1}{2}+s}} = \sum_{a,m \geq 1} \frac{\mu_f(a)\lambda_f(m)}{(am)^{1+2s}} \sum_{n|am} \mu_f(am/n)\lambda_f(n).$$

Étant donné que  $(\mu_f(n))$  est l'inverse de convolution de  $(\lambda_f(n))$ , on a

$$\sum_{n|d} \mu_f(d/n)\lambda_f(n) = \delta(d).$$

De quoi l'on tire

$$A_{0,0}(s, s, s) = \mu_f(1)\lambda_f(1) = 1.$$

On prolonge cette relation en  $s = 0$  par continuité dans le demi-plan  $\Re s > 0$ . □

**Lemme 3.2.8** *Pour tout entier positif  $a$ , on a*

$$\sum_{n \leq M} \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \left( \ln \frac{M}{n} \right)^a = \frac{\text{Res}_{s=1} L(f \times f, s)}{\zeta^{(N)}(2)} \int_1^M \frac{1}{r} \left( \ln \frac{M}{r} \right)^a dr + O((\ln M)^a).$$

Preuve : On trouve dans [Ran39] le développement suivant

$$\sum_{n \leq x} \lambda_f(n)^2 = x \frac{\text{Res}_{s=1} L(f \times f, s)}{\zeta^{(N)}(2)} + O(x^{3/5}).$$

C'est pourquoi, après une intégration par parties, on obtient

$$\sum_{n \leq M} \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \left( \ln \frac{M}{n} \right)^a = \frac{\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)}{\zeta^{(N)}(2)} \sum_{n \leq M} \frac{1}{n} \left( \ln \frac{M}{n} \right)^a + O((\ln M)^a).$$

Enfin, la formule d'Euler Maclaurin nous donne

$$\sum_{n \leq M} \frac{1}{n} \left( \ln \frac{M}{n} \right)^a = \int_1^M \frac{1}{r} \left( \ln \frac{M}{r} \right)^a dr + O((\ln M)^a).$$

□

### Estimation de $I_f^{D_1}(\alpha, \beta)$

Pour des entiers strictement positifs  $i$  et  $j$ , et pour n'importe quel réel  $\delta$  strictement positif, on pose

$$J_{\alpha, \beta}(i, j) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{(\delta)} \int_{(\delta)} M^{u+v} \frac{L(f \times f, 1+u+v) A_{\alpha, \beta}(u, v, 0)}{L(f \times f, 1+\alpha+u) L(f \times f, 1+\beta+v)} \frac{du}{u^{i+1}} \frac{dv}{v^{j+1}}. \quad (3.2.19)$$

**Lemme 3.2.9** Soient des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll 1/L$ . Pour des entiers strictement positifs  $i$  et  $j$ , on a

$$J_{\alpha, \beta}(i, j) = \frac{(\ln M)^{i+j-1}}{i!j! \operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)} \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{\alpha x + \beta y} \int_0^1 (x+u)^i (y+u)^j du \right] \Big|_{x=y=0} + O \left( L^{i+j-2} \left( 1 + \frac{(\ln L)^2}{L^{i-1}} \right) \left( 1 + \frac{(\ln L)^2}{L^{j-1}} \right) \right).$$

Preuve : On utilise l'expression (1.2.5) de  $L(f \times f, s)$  et quitte à déplacer loin vers la droite l'une des deux droites d'intégration en  $u$  ou en  $v$ , on obtient

$$J_{\alpha, \beta}(i, j) = \sum_{n \leq M} \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{(\delta)} \int_{(\delta)} \left( \frac{M}{n} \right)^{u+v} \frac{\zeta^{(N)}(2(1+u+v)) A_{\alpha, \beta}(u, v, 0)}{L(f \times f, 1+\alpha+u) L(f \times f, 1+\beta+v)} \frac{du}{u^{i+1}} \frac{dv}{v^{j+1}}.$$

On pose

$$r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) = \left( \frac{M}{n} \right)^{u+v} \frac{\zeta^{(N)}(2(1+u+v)) A_{\alpha, \beta}(u, v, 0)}{L(f \times f, 1+\alpha+u) L(f \times f, 1+\beta+v)} \frac{1}{u^{i+1} v^{j+1}}.$$

On considère le contour  $\gamma$  défini par  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  avec  $c > 0$ ,  $Y \gg 1$  grand et

$$\gamma_1 = \{i\tau, |\tau| \geq Y\}, \quad \gamma_2 = \left\{ \sigma \pm iY, \frac{-c}{\ln Y} \leq \sigma \leq 0 \right\} \quad \text{et} \quad \gamma_3 = \left\{ \frac{-c}{\ln Y} + i\tau, |\tau| \leq Y \right\}.$$

En utilisant la région sans zéro standard de  $L(f \times f, s)$  rappelée dans le théorème 1.3.3, on déplace les droites d'intégration  $\Re u = \Re v = \delta$  jusqu'à  $u$  et  $v$  sur  $\gamma$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{(\delta)} \int_{(\delta)} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) du dv \\ &= \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re v = \delta} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) dv + \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{u \in \gamma} \int_{\Re v = \delta} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) dv du \\ &= \operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) + \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{v \in \gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) dv + \operatorname{Res}_{v=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{u \in \gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) du + \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) du dv. \end{aligned}$$

- On commence par estimer  $\operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{v \in \gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) dv$ . On exprime le résidu au moyen d'une intégrale sur un cercle de rayon  $1/L$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{v \in \gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) dv \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{v \in \gamma} \frac{\left(\frac{M}{n}\right)^v}{L(f \times f, 1 + \beta + v)} \oint_{D(0, L^{-1})} \left(\frac{M}{n}\right)^u \frac{\zeta^{(N)}(2(1+u+v)) A_{\alpha, \beta}(u, v, 0)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u)} \frac{du}{u^{i+1}} \frac{dv}{v^{j+1}}. \end{aligned}$$

De plus, comme  $|\zeta^{(N)}(2(1+u+v)) A_{\alpha, \beta}(u, v, 0)| \ll 1$  dans notre situation et comme

$$\frac{1}{L(f \times f, 1 + \alpha + u)} \ll \alpha + u \ll L^{-1} \text{ car } u \asymp 1/L,$$

on obtient

$$\operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{v \in \gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) dv \ll L^{i-1} \int_{v \in \gamma} \frac{\left(\frac{M}{n}\right)^{\Re v}}{|L(f \times f, 1 + \beta + v)| |v|^{j+1}} dv.$$

La proposition 1.3.1 nous donne

$$\frac{1}{L(f \times f, \sigma + i\tau)} \ll \ln |\tau|,$$

de quoi l'on déduit

$$\begin{aligned} & \int_{v \in \gamma} \frac{\left(\frac{M}{n}\right)^{\Re v}}{|L(f \times f, 1 + \beta + v)| |v|^{j+1}} dv \\ & \ll \int_{|\tau| \geq Y} \frac{\ln \tau}{|\tau|^{j+1}} d\tau + \ln Y \int_{-\frac{c}{\ln Y}}^0 \frac{d\sigma}{|\sigma + iY|^{j+1}} + \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}} \ln Y \int_{|\tau| \leq Y} \frac{d\tau}{|\tau - i\frac{c}{\ln Y}|^{j+1}} \\ & \ll \frac{\ln Y}{Y^j} + (\ln Y)^{j+1} \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

On a alors la majoration

$$\operatorname{Res}_{u=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{v \in \gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) dv \ll L^{i-1} \ln Y \left( \frac{1}{Y^j} + (\ln Y)^j \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}} \right). \quad (3.2.21)$$

- Comme  $r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) = r_{\beta, \alpha}^{(j, i)}(v, u)$ , la majoration précédente donne immédiatement

$$\operatorname{Res}_{v=0} \frac{1}{2i\pi} \int_{u \in \gamma} r_{\alpha, \beta}^{(i, j)}(u, v) du \ll L^{j-1} \ln Y \left( \frac{1}{Y^i} + (\ln Y)^i \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}} \right). \quad (3.2.22)$$

- Grâce à la relation (3.2.20), on majore  $\int_{\gamma} \int_{\gamma} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) du dv$ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) du dv &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma} \left(\frac{M}{n}\right)^{u+v} \frac{\zeta^{(N)}(2(1+u+v)) A_{\alpha,\beta}(u,v,0)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u) L(f \times f, 1 + \beta + v)} \frac{1}{u^{i+1} v^{j+1}} \\
&\ll \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{M}{n}\right)^{\Re v}}{|L(f \times f, 1 + \beta + v)| |v|^{j+1}} dv \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{M}{n}\right)^{\Re u}}{|L(f \times f, 1 + \alpha + u)| |u|^{i+1}} du \\
&\ll \left(\frac{\ln Y}{Y^j} + (\ln Y)^{j+1} \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}}\right) \left(\frac{\ln Y}{Y^i} + (\ln Y)^{i+1} \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}}\right) \\
&\ll (\ln Y)^2 \left(\frac{1}{Y^{i+j}} + (\ln Y)^{i+j} \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}}\right). \tag{3.2.23}
\end{aligned}$$

- De plus, pour tout entier strictement positif  $\ell$ , on pose

$$W_{\ell} = \sum_{n \leq M} \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \left(\frac{1}{Y^{\ell}} + (\ln Y)^{\ell} \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}}\right).$$

On peut majorer

$$\begin{aligned}
W_{\ell} &\ll \frac{1}{Y^{\ell}} \sum_{n \leq \frac{M}{(Y \ln Y)^{\ell(\ln Y)/c}}} \frac{\lambda_f(n)^2}{n} + (\ln Y)^{\ell} \sum_{\frac{M}{(Y \ln Y)^{\ell(\ln Y)/c}} \leq n \leq M} \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \left(\frac{M}{n}\right)^{-\frac{c}{\ln Y}} \\
&\ll \frac{L}{Y^{\ell}} + (\ln Y)^{\ell} \sum_{0 \leq d \leq \frac{\ln(Y \ln Y)}{\ln 2}} 2^{-d\ell} \sum_{\frac{M}{(2^{d+1})^{\ell(\ln Y)/c}} \leq n \leq \frac{M}{(2^d)^{\ell(\ln Y)/c}}} \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \\
&\ll \frac{L}{Y^{\ell}} + (\ln Y)^{\ell+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, à partir des majorations (3.2.21), (3.2.22) et (3.2.23), on obtient

$$\begin{aligned}
J_{\alpha,\beta}(i,j) &= \sum_{n \leq M} \left[ \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) \right] + O(L^{i-1} W_j \ln Y + L^{j-1} W_i \ln Y + W_{i+j} (\ln Y)^2) \\
&= \sum_{n \leq M} \left[ \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) \right] + O \left[ L^{i-1} \ln Y \left(\frac{L}{Y^j} + (\ln Y)^j\right) + L^{j-1} \ln Y \left(\frac{L}{Y^i} + (\ln Y)^i\right) \right. \\
&\quad \left. + (\ln Y)^2 \left(\frac{L}{Y^{i+j}} + (\ln Y)^{i+j}\right) \right].
\end{aligned}$$

En choisissant  $Y = L$ , le terme d'erreur devient  $O((L^{i-1} + (\ln L)^2)(L^{j-1} + (\ln L)^2))$ . Ainsi

$$J_{\alpha,\beta}(i,j) = \sum_{n \leq M} \left[ \frac{\lambda_f(n)^2}{n} \operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) \right] + O \left( L^{i+j-2} \left(1 + \frac{(\ln L)^2}{L^{i-1}}\right) \left(1 + \frac{(\ln L)^2}{L^{j-1}}\right) \right) \tag{3.2.24}$$

- On termine cette preuve par l'estimation de  $\operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v)$ . Une nouvelle fois, on exprime le résidu comme une intégrale sur un cercle de rayon  $1/L$ . Ainsi,

$$\operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{D(0,L^{-1})} \oint_{D(0,L^{-1})} \left(\frac{M}{n}\right)^{u+v} \frac{\zeta^{(N)}(2(1+u+v)) A_{\alpha,\beta}(u,v,0)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u) L(f \times f, 1 + \beta + v)} \frac{du}{u^{i+1}} \frac{dv}{v^{j+1}}$$

De plus, étant donné  $u \asymp v \asymp 1/L$ , on a

$$\begin{aligned}\zeta^{(N)}(2(1+u+v)) &= \zeta^{(N)}(2) + O(1/L), \\ A_{\alpha,\beta}(u,v,0) &= A_{0,0}(0,0,0) + O(1/L), \\ \frac{1}{L(f \times f, 1 + \alpha + u)} &= \frac{\alpha + u}{\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)} (1 + O(1/L)), \\ \frac{1}{L(f \times f, 1 + \beta + v)} &= \frac{\beta + v}{\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)} (1 + O(1/L)).\end{aligned}$$

Grâce au lemme 3.2.7, il vient

$$\frac{\zeta^{(N)}(2(1+u+v))A_{\alpha,\beta}(u,v,0)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u)L(f \times f, 1 + \beta + v)} = (\alpha + u)(\beta + v) \frac{\zeta^{(N)}(2)}{[\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)]^2} + O(1/L^3).$$

Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) &= \frac{\zeta^{(N)}(2)}{[\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)]^2} \left[ \frac{1}{2i\pi} \oint_{D(0,L^{-1})} \left(\frac{M}{n}\right)^u \frac{\alpha + u}{u^{i+1}} du \right] \left[ \frac{1}{2i\pi} \oint_{D(0,L^{-1})} \left(\frac{M}{n}\right)^v \frac{\beta + v}{v^{j+1}} dv \right] \\ &\quad + O(L^{i+j-3}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de Cauchy, on calcule pour tout entier strictement positif  $\ell$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \oint_{D(0,L^{-1})} \left(\frac{M}{n}\right)^u \frac{\alpha + u}{u^{\ell+1}} du &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{e^{\alpha x}}{2i\pi} \oint_{D(0,L^{-1})} \left(\frac{M}{n}e^x\right)^u \frac{du}{u^{\ell+1}} \right] \Big|_{x=0} \\ &= \frac{d}{dx} \left[ e^{\alpha x} \frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell}{du^\ell} \left[ \left(\frac{M}{n}e^x\right)^u \right] \Big|_{u=0} \right] \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\ell!} \frac{d}{dx} \left[ e^{\alpha x} \left( x + \ln \frac{M}{n} \right)^\ell \right] \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\ell!} \left[ \alpha \left( \ln \frac{M}{n} \right)^\ell + \ell \left( \ln \frac{M}{n} \right)^{\ell-1} \right].\end{aligned}$$

Dès lors, on peut écrire

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{u=v=0} r_{\alpha,\beta}^{(i,j)}(u,v) &= \frac{\zeta^{(N)}(2)}{i!j![\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)]^2} \left[ \alpha\beta \left( \ln \frac{M}{n} \right)^{i+j} + (\alpha i + \beta j) \left( \ln \frac{M}{n} \right)^{i+j-1} + ij \left( \ln \frac{M}{n} \right)^{i+j-2} \right] \\ &\quad + O(L^{i+j-3}).\end{aligned}$$

Partant de la relation (3.2.24) et du lemme 3.2.8, on a

$$\begin{aligned}J_{\alpha,\beta}(i,j) &= \frac{[\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)]^{-1}}{i!j!} \int_1^M \left( \alpha \left( \ln \frac{M}{r} \right)^i + i \left( \ln \frac{M}{r} \right)^{i-1} \right) \left( \beta \left( \ln \frac{M}{r} \right)^j + j \left( \ln \frac{M}{r} \right)^{j-1} \right) \frac{dr}{r} \\ &\quad + O\left( L^{i+j-2} \left( 1 + \frac{(\ln L)^2}{L^{i-1}} \right) \left( 1 + \frac{(\ln L)^2}{L^{j-1}} \right) \right).\end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en effectuant le changement de variable  $r = M^{1-u}$ .

□

**Lemme 3.2.10** Pour  $0 < \nu < 1$  et pour des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  tels que  $|\alpha + \beta| \gg L^{-1}$ , on a

$$I_f^{D_1}(\alpha, \beta) = \frac{\widehat{w}(0)}{(\alpha + \beta) \ln M} \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{\alpha x + \beta y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u)du \right] \Big|_{x=y=0} + O\left(\frac{T(\ln L)^4}{L}\right).$$

Preuve : On utilise une transformation de Mellin pour exprimer

$$\left(\frac{\ln M/a}{\ln M}\right)^i = \begin{cases} \frac{i!}{(\ln M)^i} \frac{1}{2i\pi} \int_{(1)} \left(\frac{M}{a}\right)^v \frac{dv}{v^{i+1}} & \text{si } 1 \leq a \leq M, \\ 0 & \text{si } a > M. \end{cases}$$

On pose  $P(X) = \sum_{i=1}^{\deg P} a_i X^i$ . À partir de la relation (3.2.15) définissant  $I_f^{D_1}(\alpha, \beta)$ , on obtient

$$I_f^{D_1}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \sum_{i,j \geq 1} \frac{a_i a_j i! j!}{(\ln M)^{i+j}} \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{(1)} \int_{(1)} \int_{(1)} \frac{M^{u+v} G(s)}{s} g_{\alpha, \beta}(s, t) \\ \sum_{\substack{a, b, m, n \geq 1 \\ am = bn}} \frac{\mu_f(a) \mu_f(b) \lambda_f(m) \lambda_f(n)}{a^{\frac{1}{2}+v} b^{\frac{1}{2}+u} m^{\frac{1}{2}+\alpha+s} n^{\frac{1}{2}+\beta+s}} ds \frac{du}{u^{j+1}} \frac{dv}{v^{i+1}} dt.$$

Grâce au lemme 3.2.6, on peut écrire

$$I_f^{D_1}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \sum_{i,j \geq 1} \frac{a_i a_j i! j!}{(\ln M)^{i+j}} \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{(1)} \int_{(1)} \int_{(1)} \frac{M^{u+v} G(s)}{s} g_{\alpha, \beta}(s, t) A_{\alpha, \beta}(u, v, s) \\ \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s) L(f \times f, 1 + u + v)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u + s) L(f \times f, 1 + \beta + v + s)} ds \frac{du}{u^{j+1}} \frac{dv}{v^{i+1}} dt.$$

On spécialise  $G$  en

$$G(s) = e^{s^2} \frac{(\alpha + \beta)^2 - (2s)^2}{(\alpha + \beta)^2}.$$

La fonction  $G(s)L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s)$  est alors une fonction entière. On commence par déplacer les droites d'intégration  $\Re u = \Re v = 1$  en  $\Re u = \Re v = \delta$ , avec  $\delta$  petit, afin de s'assurer d'être dans le domaine d'absolue convergence de  $A_{\alpha, \beta}(u, v, s)$ . Ensuite, on déplace la droite d'intégration  $\Re s = 1$  en  $\Re s = -\delta + \epsilon$ , avec  $0 < \epsilon < \delta$ , croisant un pôle en  $s = 0$ . Étant donné que  $t \asymp T$ ,  $\nu < 1$  et  $g_{\alpha, \beta}(s, t) \ll T^{2s}$ , on peut majorer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \sum_{i,j} \frac{a_i a_j i! j!}{(\ln M)^{i+j}} \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Re u = \delta} \int_{\Re v = \delta} \int_{\Re s = -\delta + \epsilon} \frac{M^{u+v} G(s)}{s} g_{\alpha, \beta}(s, t) A_{\alpha, \beta}(u, v, s) \\ \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s) L(f \times f, 1 + u + v)}{L(f \times f, 1 + \alpha + u + s) L(f \times f, 1 + \beta + v + s)} ds \frac{du}{u^{j+1}} \frac{dv}{v^{i+1}} dt \\ \ll \int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)| dt T^{2(-\delta + \epsilon)} M^{2\delta} \ll T^{1 - (2-2\nu)\delta + \epsilon} \ll T^{1-\epsilon}.$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Ainsi, en utilisant les notations précédemment introduites, cette estimation fournit

$$I_f^{D_1}(\alpha, \beta) = \widehat{w}(0)L(f \times f, 1 + \alpha + \beta) \sum_{i,j} \frac{a_i a_j i! j!}{(\ln M)^{i+j}} J_{\alpha, \beta}(i, j) + O(T^{1-\varepsilon}).$$

Grâce au lemme 3.2.9 et comme

$$L(f \times f, 1 + \alpha + \beta) = \frac{\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)}{\alpha + \beta} + O(1),$$

on en déduit

$$\begin{aligned} I_f^{D_1}(\alpha, \beta) &= \widehat{w}(0) \left[ \frac{\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s)}{\alpha + \beta} + O(1) \right] \\ &\times \left[ \frac{1}{\operatorname{Res}_{s=1} L(f \times f, s) \ln M} \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{\alpha x + \beta y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u)du \right] \Big|_{x=y=0} + O\left(\frac{(\ln L)^4}{L^2}\right) \right] + O(T^{1-\varepsilon}) \\ &= \frac{\widehat{w}(0)}{(\alpha + \beta) \ln M} \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{\alpha x + \beta y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u)du \right] \Big|_{x=y=0} + O\left(\frac{T(\ln L)^4}{(\alpha + \beta)L^2}\right) + O(T/L). \end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en utilisant l'hypothèse  $|\alpha + \beta| \gg L^{-1}$ .

□

**Remarque 3.2.7** Il sera parfois préférable d'utiliser la relation

$$\frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{\alpha x + \beta y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u)du \right] \Big|_{x=y=0} = \int_0^1 (P'(u) + \alpha \ln MP(u))(P'(u) + \beta \ln MP(u))du. \quad (3.2.25)$$

**Lemme 3.2.11** Pour  $0 < \nu < 1$  et pour des nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  tels que  $|\alpha + \beta| \gg L^{-1}$ , on a

$$I_f^{D_2}(\alpha, \beta) = T^{-2(\alpha+\beta)} I_f^{D_1}(-\beta, -\alpha) + O(T/L).$$

Preuve : On écrit

$$I_{a,b}^{D_2}(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{am=bn \\ mn \ll T^{2+\varepsilon}}} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{-2(\alpha+\beta)} V_{-\beta, -\alpha}(mn, t) dt + O\left( \sum_{\substack{am=bn \\ mn \ll T^{2+\varepsilon}}} \frac{|\lambda_f(m)\lambda_f(n)|}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \right).$$

On pose  $a' = a/(a, b)$  et  $b' = b/(a, b)$ . Alors, pour tout  $\delta > 0$ , le terme d'erreur dans la relation précédente devient

$$\sum_{\substack{am=bn \\ mn \ll T^{2+\varepsilon}}} \frac{|\lambda_f(m)\lambda_f(n)|}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \ll \frac{1}{(a'b')^{1/2-\delta}} \sum_{k \ll \frac{T^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{a'b'}}} \frac{1}{k^{1-\alpha-\beta-2\delta}} \ll \frac{T^\varepsilon}{\sqrt{a'b'}}$$



Ainsi, en posant  $w_2(t) = w(t) \left(\frac{t\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{-2(\alpha+\beta)}$ , on peut écrire

$$I_f^{D_2}(\alpha, \beta) = \sum_{a, b \leq M} \frac{\mu_f(a)\mu_f(b)}{\sqrt{ab}} P\left(\frac{\ln M/a}{\ln M}\right) P\left(\frac{\ln M/b}{\ln M}\right) \left[ \sum_{am=bn} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(t) V_{-\beta, -\alpha}(mn, t) dt \right] + O\left(T^\varepsilon \sum_{a, b \leq M} \frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{a'b'}}\right).$$

On a par ailleurs

$$\sum_{a, b \leq M} \frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{a'b'}} \ll \sum_{k \leq M} \frac{1}{k} \sum_{a, b \leq \frac{M}{k}} \frac{1}{ab} \ll \sum_{k \leq M} \frac{1}{k} \left(\ln \frac{M}{k}\right)^2 \ll (\ln M)^3$$

et comme  $w_2$  vérifie les conditions (3.2.4a), (3.2.4b) et (3.2.4c), quitte à changer  $w$  en  $w_2$  et  $(\alpha, \beta)$  en  $(-\beta, -\alpha)$ , le lemme 3.2.10 donne

$$I_f^{D_2}(\alpha, \beta) = \frac{\widehat{w_2}(0)}{(-\alpha - \beta) \ln M} \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{-\alpha x - \beta y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u) du \right] \Big|_{x=y=0} + O(T(\ln L)^4/L).$$

Pour conclure, étant donné le support de  $w$ , on obtient  $\left(\frac{t\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{-2(\alpha+\beta)} = T^{-2(\alpha+\beta)} + O(1/L)$  ce qui donne  $\widehat{w_2}(0) = T^{-2(\alpha+\beta)}\widehat{w}(0) + O(T/L)$ .

□

### Preuve de la proposition 3.2.4 et du théorème 3.2.1

On commence par prouver la proposition 3.2.4. Partant de la relation (3.2.16) et en utilisant le lemme 3.2.11, on écrit

$$\begin{aligned} I_f^D(\alpha, \beta) &= I_f^{D_1}(\alpha, \beta) + T^{-2(\alpha+\beta)} I_f^{D_1}(-\beta, -\alpha) + O(T(\ln L)^4/L) \\ &= I_f^{D_1}(\alpha, \beta) + I_f^{D_1}(-\beta, -\alpha) + I_f^{D_1}(-\beta, -\alpha) \left[ T^{-2(\alpha+\beta)} - 1 \right] + O(T(\ln L)^4/L). \end{aligned}$$

Enfin, grâce à la relation (3.2.25) et le lemme 3.2.10, on obtient

$$I_f^{D_1}(\alpha, \beta) + I_f^{D_1}(-\beta, -\alpha) = \widehat{w}(0) + O(T(\ln L)^4/L).$$

On obtient la proposition 3.2.4 en combinant ces résultats.

La preuve du théorème 3.2.1 est maintenant immédiate. L'équation fonctionnelle approchée nous a permis de scinder  $I_f(\alpha, \beta)$  en deux parties. La partie non-diagonale d'une part, qui est majorée grâce à la proposition 3.2.1, et la partie diagonale d'autre part, qui est estimée dans la proposition 3.2.4.

□

### 3.3 Moment non ramolli d'ordre 2

Cette section contient la preuve du théorème 3.2.2. Par souci de simplicité, on pose

$$M_{f,2}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) L\left(f, \frac{1}{2} + \alpha + it\right) L\left(f, \frac{1}{2} + \beta - it\right) dt$$

où la fonction  $w$  satisfait les conditions (3.2.4a), (3.2.4b) et (3.2.4c). En appliquant l'équation fonctionnelle approchée (lemme 3.2.1) et en utilisant les notations précédemment introduites, on peut reformuler

$$M_{f,2}(\alpha, \beta) = I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) + I_{1,1}^{D_2}(\alpha, \beta) + I_{1,1}^{ND_1}(\alpha, \beta) + I_{1,1}^{ND_2}(\alpha, \beta).$$

La proposition 3.2.2 et le corollaire 3.2.3 nous fournissent directement une majoration de la contribution non-diagonale, ce qui nous permet d'écrire

$$M_{f,2}(\alpha, \beta) = I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) + I_{1,1}^{D_2}(\alpha, \beta) + O\left(T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right). \quad (3.3.1)$$

#### 3.3.1 Contribution diagonale

On commence par quelques lemmes qui nous seront utiles par la suite.

**Lemme 3.3.1** *Le développement en série de Laurent de la fonction méromorphe  $s \mapsto \frac{L(f \times f, s)}{\zeta^{(N)}(2s)}$  au voisinage de  $s = 1$  peut s'écrire sous la forme*

$$\frac{L(f \times f, 1 + s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + s))} = \frac{\mathfrak{a}_f/2}{s} + \mathfrak{b}_f/2 + O(s).$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \frac{L(f \times f, 1 + s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + s))} &= \frac{1}{\prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}}\right)} \frac{\zeta(1 + s)}{\zeta(2(1 + s))} L(\text{Sym}^2 f, 1 + s) \\ &= \frac{N}{\nu(N)} \left(1 + s \sum_{p|N} \frac{\ln p}{p + 1} + O(s^2)\right) (L(\text{Sym}^2 f, 1) + sL'(\text{Sym}^2 f, 1) + O(s^2)) \frac{\left(1 - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + O(s^2)\right)}{\zeta(2)} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{s} + \gamma + O(s)\right). \end{aligned}$$

Un calcul immédiat fournit alors le résultat annoncé. □

**Lemme 3.3.2** *Pour tous nombres complexes  $\alpha, \beta \ll \ln T$ , on a*

$$I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}} w(t) \text{Res}_{s=0} \left[ \frac{G(s)}{s} g_{\alpha, \beta}(s, t) \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta + 2s))} \right] dt + O\left(T^{1/2}\right).$$

Preuve : Partant de la définition de  $I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta)$ , on peut réécrire

$$\begin{aligned} I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) &= \sum_{m=n} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{\mathbb{R}} w(t)V_{\alpha,\beta}(mn, t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} w(t) \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{G(s)}{s} g_{\alpha,\beta}(s, t) \sum_{m \geq 1} \frac{\lambda_f(m)^2}{m^{1+\alpha+\beta+2s}} ds dt. \end{aligned}$$

Comme  $L(f \times f, s) = \zeta^{(n)}(2s) \sum_{m \geq 1} \frac{\lambda_f(m)^2}{m^s}$ , on en déduit que pour tout réel strictement positif  $\sigma$ , on a

$$I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}} w(t) \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{G(s)}{s} g_{\alpha,\beta}(s, t) \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta + 2s))} ds dt.$$

Si  $\alpha + \beta \neq 0$ , on spécialise en

$$G(s) = e^{s^2} \frac{(\alpha + \beta)^2 - (2s)^2}{(\alpha + \beta)^2}.$$

afin de s'assurer que  $G\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$ . On déplace la droite d'intégration  $\Re s = \sigma$  en  $\Re s = -A$ , avec  $A = \frac{1}{4} + \frac{\alpha+\beta}{2}$ , en croisant un pôle  $s = 0$ . Ainsi,

$$I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}} w(t) \operatorname{Res}_{s=0} \left[ \frac{G(s)}{s} g_{\alpha,\beta}(s, t) \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta + 2s))} \right] dt + O(T^{1-2A}).$$

□

Afin de déterminer le résidu associé au pôle  $s = 0$  qui apparaît dans le lemme précédent, on distingue le restant de la preuve suivant la multiplicité de ce pôle.

**Cas d'un pôle double** Dans ce paragraphe, on suppose  $\alpha + \beta = 0$ . Dès lors, le pôle en  $s = 0$  du lemme précédent est un pôle d'ordre 2.

**Lemme 3.3.3** *On a*

$$\operatorname{Res}_{s=0} \left[ \frac{G(s)}{s} g_{\alpha,\beta}(s, t) \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta + 2s))} \right] = \frac{\mathfrak{a}_f}{2} \ln \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right) + \frac{\mathfrak{b}_f}{2}.$$

Preuve : On détermine le développement asymptotique en  $s = 0$ .

$$\begin{aligned} G(s) \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{2s} \frac{L(f \times f, 1 + 2s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + 2s))} &= [1 + O(s^2)] \left[ 1 + 2s \ln \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right) + O(s^2) \right] \left[ \frac{\mathfrak{a}_f/2}{2s} + \mathfrak{b}_f/2 + O(s) \right] \\ &= \frac{\mathfrak{a}_f/2}{s} + \frac{\mathfrak{a}_f}{2} \ln \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right) + \frac{\mathfrak{b}_f}{2} + O(s). \end{aligned}$$

□

Ces résultats prouvent le théorème 3.2.2 dans le cas  $\alpha + \beta = 0$ . Plus précisément, grâce à la relation (3.3.1) et étant donné que  $I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) = I_{1,1}^{D_2}(\alpha, \beta)$  pour le cas considéré, le corollaire suivant est une conséquence immédiate des lemmes 3.3.2 et 3.3.3.

**Corollaire 3.3.1** *Pour tout nombre complexe  $\alpha \ll L^{-1}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$M_{f,2}(\alpha, -\alpha) = a_f \int_{\mathbb{R}} w(t) \ln t dt + b_f \int_{\mathbb{R}} w(t) dt + O\left(T^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon}\right).$$

**Cas d'un pôle simple** Dans ce paragraphe, on suppose  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G(s) = e^{s^2 \frac{(\alpha+\beta)^2 - (2s)^2}{(\alpha+\beta)^2}}$ .

On pose également  $w_2(t) = w(t) \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{-2(\alpha+\beta)}$ .

**Lemme 3.3.4** *Pour tous nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$M_{f,2}(\alpha, \beta) = \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta))} \widehat{w}(0) + \frac{L(f \times f, 1 - \alpha - \beta)}{\zeta^{(N)}(2(1 - \alpha - \beta))} \widehat{w}_2(0) + O\left(T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right).$$

Preuve : Le pôle du lemme 3.3.2 étant simple, on a

$$\operatorname{Res}_{s=0} \left[ \frac{G(s)}{s} g_{\alpha,\beta}(s, t) \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta + 2s)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta + 2s))} \right] = \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta))}.$$

Dès lors, grâce au lemme 3.3.2, il vient

$$I_{1,1}^{D_1}(\alpha, \beta) = \frac{L(f \times f, 1 + \alpha + \beta)}{\zeta^{(N)}(2(1 + \alpha + \beta))} \widehat{w}(0) + O\left(T^{1/2}\right).$$

Quitte à changer  $w$  en  $w_2$ , on a  $I_{1,1}^{D_2}(\alpha, \beta) = I_{1,1}^{D_1}(-\beta, -\alpha)$ , donc

$$I_{1,1}^{D_2}(\alpha, \beta) = \frac{L(f \times f, 1 - \alpha - \beta)}{\zeta^{(N)}(2(1 - \alpha - \beta))} \widehat{w}_2(0) + O\left(T^{1/2}\right).$$

□

On obtient ainsi l'énoncé du théorème 3.2.2 pour  $\alpha + \beta \neq 0$ .

**Corollaire 3.3.2** *Pour tous nombres complexes  $\alpha, \beta \ll L^{-1}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$M_{f,2}(\alpha, \beta) = \mathfrak{a}_f \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \ln t dt + \left[ \mathfrak{b}_f + \mathfrak{a}_f \ln \left( \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right) \right] \widehat{w}(0) + O\left(|\alpha + \beta| T (\ln T)^2 + T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right).$$

Preuve : Grâce au lemme 3.3.1, le lemme précédent donne

$$M_{f,2}(\alpha, \beta) = \frac{\mathfrak{a}_f/2}{\alpha + \beta} (\widehat{w}(0) - \widehat{w}_2(0)) + \frac{\mathfrak{b}_f}{2} (\widehat{w}(0) + \widehat{w}_2(0)) + O\left(T|\alpha + \beta| + T^{\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon}\right).$$

De plus

$$\begin{aligned} \widehat{w}_2(0) &= \int_{\mathbb{R}} w(t) \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{-2(\alpha+\beta)} dt = \int_{\mathbb{R}} w(t) \left( 1 - 2(\alpha + \beta) \ln \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right) + O(|\alpha + \beta|^2 \ln^2 t) \right) \\ &= \widehat{w}(0) - 2(\alpha + \beta) \int_{\mathbb{R}} w(t) \ln \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right) dt + O(|\alpha + \beta|^2 T \ln^2 T). \end{aligned}$$

Un calcul immédiat fournit le résultat annoncé.

□

### 3.3.2 Conjecture de Conrey, Farmer, Keating, Rubinstein et Snaith

On trouve dans [CFK<sup>+</sup>05] de nombreuses conjectures liées aux moments intégraux des fonctions  $L$ . En particulier, la conjecture 2.5.4 prédit le comportement asymptotique de n'importe quel moment intégral d'ordre pair le long de la droite critique d'une fonction  $L$  primitive.

**Conjecture 1** *On désigne par  $\mathcal{L}(s)$  une fonction  $L$  primitive et  $k$  un entier strictement positif. Alors pour n'importe quelle fonction de localisation  $g$  "convenable", on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathcal{L} \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k \left( w \ln \left( \frac{Q^{2/w} t}{2} \right) \right) (1 + O(t^{-1/2+\varepsilon})) g(t) dt,$$

où  $w$  et  $Q$  désignent respectivement le degré et le conducteur arithmétique de  $\mathcal{L}$  et  $P_k$  est un polynôme explicite de degré  $k^2$ .

Dans ce chapitre, on considère des fonctions  $L$  de formes modulaires primitives de poids pair, de niveau sans facteurs carrés  $N$  et de caractère trivial. De telles fonctions  $L$  sont de degré 2 et de conducteur  $Q = \sqrt{N}/\pi$  (confer équation 1.2.3). La conjecture suivante n'est qu'une simple reformulation de la conjecture 1 dans le cas qui nous intéresse pour le moment d'ordre 2 et avec  $g(t) = r(t/T)$  où  $r$  est une fonction lisse à support compact inclus dans  $[1, 2]$ .

**Conjecture 2** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau  $N$  sans facteurs carrés et de caractère trivial. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| L \left( f, \frac{1}{2} + it \right) \right|^2 g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1 \left( 2 \ln \left( \frac{t\sqrt{N}}{2\pi} \right) \right) g(t) dt + O \left( T^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right)$$

avec

$$P_1(x) = \frac{-1}{(2i\pi)^2} \oint_{|z_1|=r_1} \oint_{|z_2|=r_2} \frac{L(f \times f, 1 + z_1 - z_2)}{\zeta^{(N)}(2(1 + z_1 - z_2))} \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2} e^{\frac{x}{2}(z_1 - z_2)} dz_1 dz_2,$$

pour n'importe quels réels strictement positifs  $r_1$  et  $r_2$  suffisamment petits (ie  $r_1 + r_2 < 1$ ).

Afin de comparer notre corollaire 3.2.1 avec cette conjecture, il nous faut calculer  $P_1$ . On choisit  $r_1 \neq r_2$ , et étant donné que  $\frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2} = \frac{1}{z_1^2} - \frac{2}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2^2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{2}{(2i\pi)^2} \oint_{|z_1|=r_1} \oint_{|z_2|=r_2} \frac{L(f \times f, 1 + z_1 - z_2)}{\zeta^{(N)}(2(1 + z_1 - z_2))} \frac{1}{z_1 z_2} e^{\frac{x}{2}(z_1 - z_2)} dz_1 dz_2 \\ &= \frac{2}{2i\pi} \oint_{|z_2|=r_2} \frac{L(f \times f, 1 - z_2)}{\zeta^{(N)}(2(1 - z_2))} e^{-\frac{x}{2}z_2} \frac{dz_2}{z_2} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\frac{L(f \times f, 1 - z_2)}{\zeta^{(N)}(2(1 - z_2))} e^{-\frac{x}{2}z_2} = \left( \frac{-\mathbf{a}_f/2}{z_2} + \mathbf{b}_f + O(z_2^2) \right) \left( 1 - \frac{x}{2}z_2 + O(z_2^2) \right) = \frac{-\mathbf{a}_f/2}{z_2} + \left( \frac{\mathbf{b}_f}{2} + \frac{x\mathbf{a}_f}{4} \right) + O(z_2^2),$$

on en déduit donc

$$P_1(x) = \frac{\mathbf{a}_f}{2} x + \mathbf{b}_f.$$

Pour conclure, on peut remarquer que les termes dominants sont exactement les mêmes que ce soit dans le corollaire 3.2.1 ou dans la conjecture 2, et qu'en admettant la conjecture de Ramanujan-Petersson, les termes d'erreurs sont également identiques.

### 3.3.3 Lien avec la sous-convexité

Le corollaire 3.2.1 est une version lisse du second moment intégral d'une fonction  $L$  de forme modulaire primitive le long de la droite critique et on souhaiterait disposer d'un résultat sans fonction de localisation  $w$  et obtenir ainsi le comportement asymptotique de  $\mathcal{M}_{f,2}(T)$ . La procédure pour passer de l'un à l'autre est classique et sera mise en place en détail dans le chapitre suivant. Cependant, le choix de  $\Delta = T/\ln T$  n'est pas approprié pour cette étude car le terme d'erreur après sommation sur des intervalles dyadiques serait en  $O(T)$  et annihilerait une partie du travail effectué. Néanmoins, il est évident qu'en prenant  $\Delta = T/\ln^2 T$  en lieu et place de  $\Delta = T/\ln T$ , le corollaire 3.2.1 reste toujours valable. On obtient ainsi le développement suivant pour  $\mathcal{M}_{f,2}(T)$ .

**Corollaire 3.3.3** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau  $N$  sans facteurs carrés et de caractère trivial. On a*

$$\int_0^T \left| L\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = \mathfrak{a}_f T \ln T + \left[ \mathfrak{b}_f + \mathfrak{a}_f \ln\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi e}\right) \right] T + O(T/\ln T).$$

Ce corollaire améliore sensiblement le développement obtenu dans [Zha05] mais est moins bon que celui de Good ([Goo82]) où le même résultat est prouvé, dans le cas où le niveau est égal à 1, avec pour terme d'erreur  $O((T \ln T)^{2/3})$ .

**Remarque 3.3.1** On pourrait chercher à optimiser le choix de  $\Delta$  afin d'obtenir un terme d'erreur le plus petit possible dans le corollaire précédent. Cependant, le résultat que l'on obtiendrait sera toujours moins bon que celui de Good.

Par ailleurs, c'est à partir du développement asymptotique précis qu'il obtient pour le second moment intégral et en utilisant simplement l'équation fonctionnelle approchée, que Good prouve l'inégalité de sous-convexité

$$L\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \ll t^{1/3} (\ln t)^{5/6}.$$



## Chapitre 4

# Proportion de zéros non-triviaux sur la droite critique

Ce chapitre contient la preuve du corollaire A. On maintient les notations introduites lors des chapitres précédents. Tout au long de cette partie, pour une fonction  $L$  quelconque, on notera  $N_f(T)$  et  $N_{f,0}(T)$  le nombre de zéros de  $L(f, s)$  respectivement dans la bande critique et sur la droite critique de partie imaginaire comprise entre 0 et  $T$ . Le théorème 1.1.1 page 4 fournissant déjà le comportement asymptotique de  $N_f(T)$ , on s'intéresse ici à  $N_{f,0}(T)$  et plus précisément au rapport  $N_{f,0}(T)$  sur  $N_f(T)$  représentant la proportion de zéros non-triviaux de  $L(f, s)$  se trouvant sur la droite critique.

### 4.1 État des lieux

Hardy prouva dès 1914 que la fonction zeta de Riemann possédait une infinité de zéros sur la droite critique (on trouvera différentes preuves de ce résultat dans la partie 10.2 de [Tit86]) et améliora ce résultat avec Littlewood en 1921 en établissant la minoration

$$N_{\zeta,0}(T) \gg T.$$

En réactualisant la méthode de ramollissement afin de compenser les irrégularités de  $|\zeta(1/2+it)|$ , Selberg ([Sel42]) reprend la méthode de Hardy et Littlewood et améliore leur minoration en prouvant

$$N_{\zeta,0}(T) \gg T \ln T.$$

Grâce à l'expression du comportement asymptotique de  $N_{\zeta}(T)$ , on déduit qu'il existe une proportion explicite de zéros non-triviaux de la fonction  $\zeta$  se situant sur la droite critique. La proportion obtenue par la méthode de Selberg est infime mais explicite. À en croire Titchmarsh (note page 226), des valeurs numériques ont été déterminées par Min au cours de sa thèse. À ce propos, on pourra également consulter l'introduction de [Ste07] (page 8) pour trouver des valeurs numériques.

En reprenant les travaux de Siegel, qui fournit en 1932 une nouvelle preuve de l'existence d'une infinité de zéros se trouvant sur la droite critique, Levinson ([Lev74]) prouve que plus d'un



tiers des zéros de la fonction  $\zeta$  sont de partie réelle égale à  $1/2$  en appliquant la méthode de ramollissement à une perturbation de la fonction  $\zeta$  de Riemann par une combinaison linéaire de ses dérivées.

Conrey augmente cette proportion à plus de 40% dans [Con89] en appliquant la méthode de Levinson. Pour ce faire, il améliore le résultat général de [BCHB85] concernant le second moment intégral ramolli de la fonction  $\zeta$  de Riemann lorsque le ramollisseur est essentiellement donné par la fonction de Möbius et obtient une longueur de ramollisseur admissible sensiblement plus longue que celle de Levinson.

En utilisant ce dernier résultat et en considérant un ramollisseur composé de deux parties distinctes, Bui, Conrey et Young ([BCY11]) réussissent à prouver que plus de 41% des zéros non-triviaux de la fonction  $\zeta$  de Riemann sont sur la droite critique.

Face au succès des méthodes développées, il est naturel d'essayer de les appliquer à d'autres fonctions  $L$ . Ainsi, dans [Hil76] et [Hil78], Hilano étend le résultat de Levinson aux fonctions  $L$  de Dirichlet.

En degré supérieur, Hafner a généralisé le résultat de Selberg aux fonctions  $L$  de degré 2. Plus précisément, lorsque  $f$  désigne une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau 1 et de caractère trivial ou bien une forme de Maaß de niveau 1, Hafner prouve dans [Haf83] et [Haf87] qu'il existe une constante  $A$  strictement positive telle que  $N_{f,0}(T) > AN_f(T)$  pour  $T$  suffisamment grand. Plus tard, Rezvyakova ([Rez10]) a adapté la preuve détaillée dans ([Haf83]) aux fonctions  $L$  de formes modulaires de n'importe quel groupe de congruence. La valeur de la proportion obtenue n'est pas explicitée dans ces travaux mais il est probable, étant données les valeurs trouvées dans le cas de  $\zeta$ , qu'elle soit très petite.

Dans [Far94], Farmer applique la méthode de Levinson aux fonctions  $L$  de formes modulaires  $f$  de poids pair, de niveau 1 et de caractère trivial, et il parvient à déterminer le comportement asymptotique du second moment intégral ramolli de  $L(f, s)$  lorsque le ramollisseur est un polynôme de Dirichlet de longueur inférieure à  $T^{1/6-\varepsilon}$ . De ce résultat, Farmer obtient des bornes inférieures des proportions de zéros simples se trouvant sur la droite critique pour les dérivées  $j$ -ème ( $j \geq 1$ ) de la fonction complétée de  $L(f, s)$ , qui eux aussi sont conjecturalement de partie réelle égale à  $1/2$ . Malheureusement, la longueur admissible du ramollisseur obtenue est trop petite pour détecter une proportion de zéros simples sur la droite critique pour  $L(f, s)$  elle-même. Cependant, bien que Farmer ne le remarque pas dans son article, son résultat prouve qu'au moins 1,65% des zéros non-triviaux de  $L(f, s)$  vérifient  $\Re s = 1/2$  (confer partie 4.2.2). Lors du chapitre précédent, nous avons augmenté la longueur maximale autorisée du ramollisseur, améliorant ainsi le résultat de Farmer de manière significative.

Dans [CIS11b], Conrey, Iwaniec et Soundararajan appliquent également la méthode de Levinson aux fonctions  $L$  de Dirichlet mais en moyenne sur tous les caractères primitifs de module  $q$  avec  $q \asymp Q$  et  $(\ln Q)^6 \leq T \leq (\ln Q)^A$ . Grâce aux oscillations supplémentaires provenant de la sommation sur le module et en appliquant l'inégalité de grand crible asymptotique ([CIS11a]), les auteurs augmentent considérablement la longueur du ramollisseur admissible et prouvent que plus de 56% des zéros non-triviaux de la famille des fonctions  $L$  de Dirichlet sont sur la droite critique et simples. Leur résultat s'applique également aux fonctions  $L$  de degrés 2 et 3 tordues

par la famille des caractères de Dirichlet primitifs. Ainsi, les proportions obtenues s'élèvent respectivement à 35% et 0,5% pour les familles issues d'une fonction  $L$  de degré 2, respectivement de degré 3, tordue par les caractères de Dirichlet primitifs.

## 4.2 Proportion effective

La méthode de Levinson est basée sur une estimation du second moment intégral ramolli au voisinage de la droite critique de la fonction  $L$  considérée et de ses dérivées. Avant d'obtenir une proportion numérique de zéros sur la droite critique, on commence par déterminer le moment qui nous intéresse en utilisant les résultats du chapitre précédent.

### 4.2.1 Moment et dérivées

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1** *Soit  $f$  une forme modulaire primitive de poids pair, de niveau sans facteurs carrés et de caractère trivial. Il est associé à  $f$  un ramollisseur  $\psi$  défini par la relation (3.2.3) page 52 et de longueur  $T^\nu$ . Soit  $Q$  un polynôme à coefficients complexes vérifiant  $Q(0) = 1$ . On pose*

$$V(s) = Q\left(-\frac{1}{2\ln T} \frac{d}{ds}\right)(L(f, s)).$$

Alors, si  $\nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$ , on a

$$\frac{1}{T} \int_1^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = c(P, Q, 2R, \nu/2) + o(1)$$

où

$$c(P, Q, r, \xi) = 1 + \frac{1}{\xi} \int_0^1 \int_0^1 e^{2rs} \left[ \frac{d}{dx} (e^{r\xi x} Q(s + \xi x) P(x + u)) \Big|_{x=0} \right]^2 duds.$$

### Une version lisse

**Proposition 4.2.1** *Soient  $\sigma_0 = 1/2 - R/L$  et  $\nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$ . Pour toute fonction  $w$  vérifiant les conditions (3.2.4a), (3.2.4b) et (3.2.4c), on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = c(P, Q, 2R, \nu/2) \widehat{w}(0) + O(T(\ln L)^4/L).$$

Preuve : On peut écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\alpha}\right) Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\beta}\right) I_f(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=-R/L}.$$

En décomposant  $Q$  sous la forme  $Q(X) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$  avec  $a_0 = 1$ , grâce à l'holomorphie de la fonction  $(\alpha, \beta) \mapsto I_f(\alpha, \beta)$  et à la formule de Cauchy, on peut réécrire

$$\begin{aligned} & Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\alpha}\right) Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\beta}\right) I_f(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=-R/L} \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N a_n a_m \left(-\frac{1}{2L}\right)^{m+n} \frac{m!n!}{(2i\pi)^2} \oint_{D(-R/L, a/L)} \oint_{D(-R/L, b/L)} \frac{I_f(u, v)}{(u+R/L)^{n+1}(v+R/L)^{m+1}} dudv \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

où les intégrales portent sur les cercles de centre  $-R/L$  et de rayon  $a/L$  et  $b/L$  avec  $a \neq b$ . En prenant  $a$  différent de  $b$ , on se retrouve sous les hypothèses du théorème 3.2.1 donnant le comportement asymptotique de  $I_f(\alpha, \beta)$ . En appliquant ce théorème dans la relation (4.2.1), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = \widehat{w}(0) Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\alpha}\right) Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\beta}\right) c(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=-R/L} + O(T(\ln L)^4/L).$$

On écrit alors  $c(\alpha, \beta)$  sous la forme

$$c(\alpha, \beta) = 1 + \frac{2}{\nu} \left[ \int_0^1 T^{-2(\alpha+\beta)s} ds \right] \frac{d^2}{dx dy} \left[ M^{-\beta x - \alpha y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u) du \right] \Big|_{x=y=0}.$$

En utilisant  $Q(0) = 1$  et la relation

$$Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\alpha}\right) X^{-\alpha} = Q\left(\frac{\ln X}{2L}\right) X^{-\alpha},$$

on obtient tout d'abord

$$\begin{aligned} Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\alpha}\right) Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\beta}\right) c(\alpha, \beta) &= 1 + \frac{2}{\nu} \frac{d^2}{dx dy} \left[ \int_0^1 T^{-2(\alpha+\beta)s} Q(s + \nu y/2) Q(s + \nu x/2) ds \right. \\ &\quad \left. M^{-\beta x - \alpha y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u) du \right] \Big|_{x=y=0}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} & Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\alpha}\right) Q\left(-\frac{1}{2L} \frac{d}{d\beta}\right) c(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=-R/L} \\ &= 1 + \frac{2}{\nu} \int_0^1 \int_0^1 e^{ARs} \left[ \frac{d}{dx} (e^{R\nu x} Q(s + \nu x/2) P(x+u)) \right] \Big|_{x=0} \Big]^2 duds. \end{aligned}$$

□

**Fonctions de lissage** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{t^2(t-1)^2}\right) & \text{si } t \in ]0, 1[, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

On pose alors

$$F_T^+(t) = \frac{1}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^2} \left( \int_{-\infty}^{\frac{t-T}{\Delta}+\Delta} g(x)dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\frac{T+\Delta-t}{\Delta}} g(x)dx \right)$$

et

$$F_T^-(t) = \frac{1}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^2} \left( \int_{-\infty}^{\frac{t-T}{\Delta}} g(x)dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\frac{T-t}{\Delta}} g(x)dx \right).$$

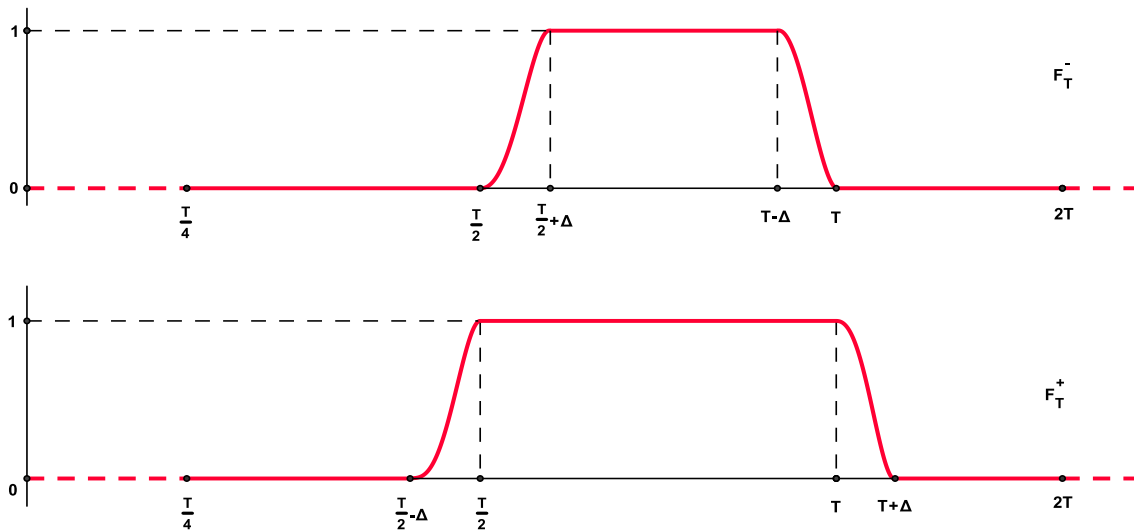
Ainsi construites, les fonctions  $F_T^\pm$  vérifient les conditions (3.2.4a), (3.2.4b) et (3.2.4c). Nous avons, par exemple, pour  $t$  dans  $[T, T + \Delta]$  et pour tout entier positif  $k$ ,

$$(F_T^+)^{(k)}(t) = \frac{(-1)^k}{\Delta^k} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \right)^{-1} g^{(k)}\left(\frac{T+\Delta-t}{\Delta}\right) \ll \Delta^{-k}.$$

**Lemme 4.2.1** *Ainsi construites, les fonctions  $F_T^\pm$  vérifient*

$$0 \leq F_T^- \leq \mathbb{1}_{[T/2, T]} \leq F_T^+ \leq 1$$

où  $\mathbb{1}_{[T/2, T]}$  désigne la fonction indicatrice de l'intervalle  $[T/2, T]$ .



Allure des courbes représentatives des fonctions  $F_T^+$  et  $F_T^-$ .

**Lemme 4.2.2** *On a*

$$0 \leq \widehat{F_T^+}(0) - \frac{T}{2} = \widehat{F_T^-}(0) - \frac{T}{2} + 2\Delta = O(T/L).$$

Preuve : On traite uniquement le cas  $F_T^+$ , l'autre cas se traitant de la même manière. On décompose l'expression intégrale de  $\widehat{F_T^+}(0)$  suivant les intervalles  $[T/2 - \Delta, T/2]$ ,  $[T/2, T]$  et  $[T + \Delta]$ . La fonction  $F_T^+$  étant constante égale à 1 sur  $[T/2, T]$ , on obtient le terme principal annoncé. On obtient le terme d'erreur en remarquant que  $0 \leq F_T^+ \leq 1$  sur les deux autres intervalles qui sont de longueur  $\Delta = T/L$ .

□

### Une version non lisse

**Proposition 4.2.2** Soient  $\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{R}{L}$  et  $0 < \nu < \frac{1-2\theta}{5+2\theta}$ . On a

$$\int_{T/2}^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = c(P, Q, 2R, \nu/2) \frac{T}{2} + O(T(\ln L)^4/L).$$

Preuve : Le lemme 4.2.1 nous donne l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_T^-(t) |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \leq \int_{T/2}^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} F_T^+(t) |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt.$$

Dès lors, en appliquant la proposition 4.2.1 aux fonctions  $F_T^\pm$ , il vient

$$c(P, Q, 2R, \nu/2) \widehat{F_T^-}(0) + O\left(\frac{T(\ln L)^4}{L}\right) \leq \int_{T/2}^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \leq c(P, Q, 2R, \nu/2) \widehat{F_T^+}(0) + O\left(\frac{T(\ln L)^4}{L}\right).$$

On conclut alors grâce au lemme 4.2.2. □

On obtient alors aisément le théorème 4.2.1 à partir de la proposition précédente en sommant sur des intervalles dyadiques.

### 4.2.2 Évaluation numérique

La proportion de zéros sur la droite critique de  $L(f, s)$  est minorée grâce à la proposition suivante qui, par souci de continuité du propos, sera prouvée séparément dans la section 4.3. Jusqu'à la fin de ce chapitre, on désigne par  $Q$  un polynôme à coefficients complexes de la forme

$$Q(x) = 1 + \sum_{n=1}^M i^{n+1} \lambda_n [(1 - 2x)^n - 1] \quad (4.2.2)$$

où  $M$  désigne un entier strictement positif et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  appartient à  $\mathbb{R}^M$ .

**Proposition 4.2.3** Pour une forme modulaire primitive  $f$  de poids pair, de niveau sans facteurs carrés et de caractère trivial, pour  $\nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$  ainsi que pour un polynôme  $Q$  de la forme (4.2.2), on a

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}(T)}{N_f(T)} \geq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{2R} \ln \left( \frac{1}{T} \int_1^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \right) \right].$$

Ainsi, en utilisant le théorème 4.2.1, il vient

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}(T)}{N_f(T)} \geq 1 - \inf_{P, Q, R} \frac{1}{R} \ln c(P, Q, R, \nu/2).$$

Les travaux de Kim et Sarnak ([Kim03]) nous autorisent à prendre  $\theta = 7/64$  ce qui nous fournit  $\nu = 5/27$  grâce au théorème 4.2.1. La conjecture de Ramanujan-Petersson ( $\theta = 0$ ), quant à elle, donne  $\nu = 1/4$ .

**Lemme 4.2.3** ([Con89], Partie 4) *On a*

$$\inf_P \frac{1}{R} \ln c(P, Q, R, \nu/2) = \frac{1}{R} \ln \left( \frac{1 + |w(1)|^2}{2} + \frac{A\alpha}{\tanh \frac{\nu\alpha}{2}} \right)$$

où  $w(x) = e^{Rx}Q(x)$ ,  $A = \int_0^1 |w(x)|^2 dx$ ,  $B = \int_0^1 w(x)\overline{w'(x)} dx$ ,  $C = \int_0^1 |w'(x)|^2 dx$  et  $\alpha = \frac{\sqrt{(B-\overline{B})^2 + 4AC}}{2A}$ .

Pour des raisons purement empiriques, on se restreint aux polynômes  $Q$  à coefficients réels de la forme

$$Q(x) = 1 + \sum_{n=1}^N h_n [(1-2x)^{2n-1} - 1] \quad (4.2.3)$$

où  $N$  est un entier strictement positif et  $(h_1, \dots, h_N)$  appartient à  $\mathbb{R}^N$ . Avec ces notations, il vient

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}(T)}{N_f(T)} \geq 1 - \inf_{Q \text{ réel}, R} \frac{1}{R} \ln \left( \frac{1 + w(1)^2}{2} + \frac{\sqrt{AC}}{\tanh \left( \frac{\nu}{2} \sqrt{\frac{C}{A}} \right)} \right). \quad (4.2.4)$$

À l'aide de la méthode de descente de gradient, on choisit les valeurs adéquates de  $Q$  et  $R$  afin d'obtenir les valeurs annoncées dans le corollaire A. On choisit  $N = 4$ . Le tableau suivant donne les valeurs de  $R$  et les coefficients  $h_1, h_2, h_3, h_4$  du polynôme  $Q$  de la forme (4.2.3).

	$\nu = \frac{1}{6}$	$\nu = \frac{5}{27}$	$\nu = \frac{1}{4}$
$R$	6,6838894702116801322	6,4278834168344993342	5,6503610091685135131
$h_1$	1,6017785744634898860	1,5898336242677838745	1,5369390514358411982
$h_2$	-3,0362512753510924917	-2,8999828229132398066	-2,7929104872905007806
$h_3$	3,0757757634512927939	3,0171733454035522056	2,7758193765120241770
$h_4$	-1,1407980564855935531	-1,1164150244992046552	-1,0187870607687957034

### 4.3 Moments et proportion

On prouve ici la proposition 4.2.3 sous une forme un peu plus générale que celle énoncée précédemment en considérant une fonction  $L(f, s)$  de degré  $d$  quelconque. Ce résultat est une généralisation de celui obtenu par Levinson ([Lev74]) dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann et la démonstration généralise celle de Conrey ([Con89], paragraphe 3).

Le polynôme  $Q$  désigne un polynôme de la forme (4.2.2) tel que

- $\Re Q(1/2) \neq 0$ ,
- l'application  $x \mapsto Q(1/2 - x)$  ne s'annule pas sur  $[0; 1/2]$ .

Ces hypothèses ont uniquement pour but de simplifier la preuve du théorème suivant et sont vérifiées par les polynômes donnés dans le tableau de la section 4.2.2.

**Théorème 4.3.1** *Pour toute suite complexe  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifiant  $b_1 = 1$  et  $b_n \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ , on définit un ramollisseur  $\psi$ , de longueur  $T^\nu$  ( $\nu > 0$ ), en considérant le polynôme de Dirichlet*

$$\psi(s) = \sum_{n \leq T^\nu} \frac{b_n}{n^s}.$$

Soit  $\sigma_0 = 1/2 - R/\ln T$  avec  $R > 0$ . Alors,

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}(T)}{N_f(T)} \geq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{dR} \ln \left( \frac{1}{T} \int_1^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \right) \right]$$

où  $V$  est définie par

$$V(s) = Q \left( -\frac{1}{d \ln T} \frac{d}{ds} \right) (L(f, s)).$$

### Notations

Posons  $Q_1(x) = Q\left(\frac{1}{2} - x\right)$ . On a alors  $Q_1(x) = g + \sum_{n=0}^M g_n x^n$  où l'on a posé

$$\begin{cases} g = 1 - \Re \left[ \sum_{n=1}^M i^{n+1} \lambda_n \right], \\ g_0 = -i \Im \left[ \sum_{n=1}^M i^{n+1} \lambda_n \right], \\ g_n = 2^n i^{n+1} \lambda_n \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Ainsi  $g$  est non nul et les coefficients  $(g_0, g_1, \dots, g_M)$  vérifient

$$\begin{cases} g_n \in i\mathbb{R} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ g_n \in \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On définit alors

$$\eta(s) = g\Lambda(f, s) + \sum_{n=0}^M \frac{g_n}{(dL)^n} \Lambda^{(n)}(f, s).$$

### Détection des zéros

Le signe  $\varepsilon(f)$  de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction  $L(f, s)$  étant un nombre complexe de module 1, on note  $\theta_f$  son argument pris dans  $[-\pi, \pi[$ . Par ailleurs, grâce aux conditions satisfaites par les coefficients  $g_n$  et par  $g$ , on a le lemme suivant qui nous sert à détecter des zéros non-triviaux de  $L(f, s)$ .

**Lemme 4.3.1** *On a*

$$\left| g\Lambda \left( f, \frac{1}{2} + it \right) \right| = \left| \Re \left( e^{-i\frac{\theta_f}{2}} \eta(1/2 + it) \right) \right|. \quad (4.3.1)$$

Preuve : En dérivant l'équation fonctionnelle de la fonction  $L(f, s)$ , on a

$$\Lambda^{(k)}\left(f, \frac{1}{2} + it\right) = (-1)^k \varepsilon(f) \Lambda^{(k)}\left(\bar{f}, \frac{1}{2} - it\right) = e^{i(k\pi + \theta_f)} \overline{\Lambda^{(k)}\left(f, \frac{1}{2} + it\right)}.$$

On en déduit que

$$\Lambda^{(k)}\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \in e^{i\theta_f/2} \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k \text{ pair,} \\ i\mathbb{R} & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

Étant données les propriétés des coefficients  $g_n$ , on obtient ainsi

$$\sum_{n=0}^N \frac{g_n}{(dL)^n} \Lambda^{(n)}\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \in ie^{i\frac{\theta_f}{2}} \mathbb{R} \text{ et } g\Lambda\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \in e^{i\frac{\theta_f}{2}} \mathbb{R}.$$

□

On estime alors le nombre de zéros critiques à l'aide de la constatation suivante : si  $\arg \eta(1/2 + it)$  varie de plus de  $\pi$ , alors  $\Re(e^{i\theta_f/2} \eta(1/2 + it))$  s'annule au moins une fois. Le coefficient  $g$  étant non-nul, on détecte ainsi des zéros de  $L(f, s)$  se trouvant sur la droite critique grâce à la relation (4.3.1). Nous allons donc chercher à estimer les variations de l'argument de  $t \mapsto \arg \eta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ . Précisément, nous allons obtenir une minoration de

$$\Delta \arg \eta\left(\frac{1}{2} + it\right) \Big|_{t_0}^T = \arg \eta\left(\frac{1}{2} + iT\right) - \arg \eta\left(\frac{1}{2} + it_0\right)$$

où  $t_0$  est un réel strictement positif choisi de telle sorte que  $L(f, s)$  ne s'annule pas sur la droite  $\Im s = t_0$ .

### Principe de l'argument

Notons

$$L_\infty(f, s) = q(f)^{s/2} \gamma(f, s) \quad \text{et} \quad F(s) = \frac{L'_\infty}{L_\infty}(f, s).$$

**Lemme 4.3.2** *En prenant une définition continue de l'argument, lorsque  $t$  ou  $\Im s$  tend vers l'infini et pour  $\Re s \ll \ln T$ , on a*

$$\arg L_\infty\left(f, \frac{1}{2} + it\right) = \frac{dt}{2} \ln \frac{|t|}{2\pi e} + \frac{t}{2} \ln q(f) + O(1), \quad (4.3.2)$$

$$F(s) = \frac{1}{2} \ln q(f) + \frac{d}{2} \log \frac{s}{2\pi} + O(1/|t|) \quad \text{et pour } k \geq 1, \quad F^{(k)}(s) \ll |t|^{-k}, \quad (4.3.3)$$

$$L_\infty^{(k)}(f, s) = L_\infty(f, s) \left( F(s)^k + O\left(t^{-1} \ln^{k-1} t\right) \right). \quad (4.3.4)$$

Preuve : On prouve ces formules à l'aide de la formule de Stirling complexe, que l'on pourra trouver par exemple dans [Ten95] (théorème 0.12), et en utilisant le fait que les paramètres locaux en l'infini de la fonction  $L(f, s)$  sont soit réels, soit conjugués.

□



**Lemme 4.3.3** *On a*

$$\Delta \arg \eta \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T = \frac{dT}{2} \ln T + \Delta \arg V_1 \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T + O(T)$$

où l'on a posé

$$V_1(s) = gL(f, s) + \sum_{n=0}^M \frac{g_n}{(dL)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{L_\infty^{(n-k)}(f, s)}{L_\infty(f, s)} L^{(k)}(f, s).$$

Preuve : En reprenant les notations précédemment introduites, on a  $\eta(s) = L_\infty(f, s)V_1(s)$ . Dès lors, grâce à la relation (4.3.2), on a

$$\begin{aligned} \Delta \arg \eta \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T &= \Delta \arg L_\infty \left( f, \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T + \Delta \arg V_1 \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T \\ &= \frac{dT}{2} \ln T + \Delta \arg V_1 \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T + O(T). \end{aligned}$$

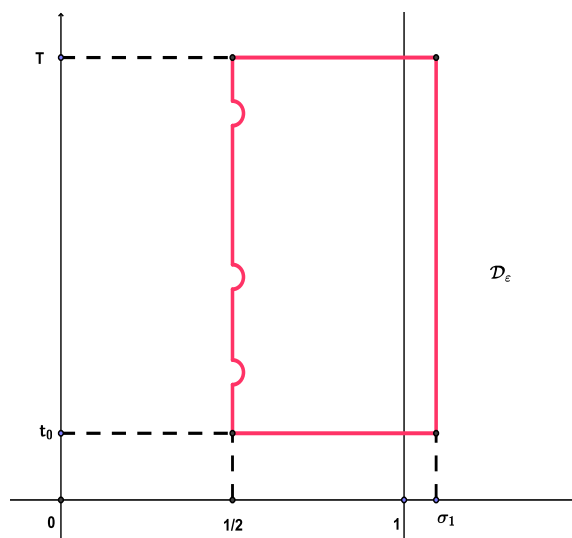
□

**Lemme 4.3.4** *On a*

$$\Delta \arg V_1 \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T = -2\pi N_{V_1}^*(T) + O(L)$$

où  $N_{V_1}^*(T)$  désigne le nombre de zéros  $\sigma + it$  de  $V_1$  vérifiant  $1/2 \leq \sigma$  et  $t_0 \leq t \leq T$  comptés avec multiplicité et pondérés par  $1/2$  si  $\sigma = 1/2$ .

Preuve : Quitte à rajouter un terme d'erreur en  $O(L)$ , on peut supposer que  $\Lambda(f, s)$  ne s'annule pas sur la droite  $\Im s = T$  (confer proposition 5.7 de [IK04]). Remarquons également que les zéros de  $V_1$  sont des zéros de  $\Lambda(f, s)$ . En effet,  $V_1(s) = 0$  implique  $\eta(s) = 0$ , ce qui enfin implique  $\Lambda(f, s) = 0$  (car  $g \neq 0$ ). Soit  $\sigma_1 > 1$ . On considère alors le contour  $\mathcal{D}_\varepsilon$  parcouru dans le sens direct, représenté ci-dessous, qui est constitué d'un rectangle de sommets  $\sigma_1 + it_0$ ,  $\sigma_1 + iT$ ,  $1/2 + iT$ ,  $1/2 + it_0$  sur lequel on contourne les éventuels zéros de  $V_1$  par des demi-cercles de rayon  $\varepsilon$ . Par ailleurs, on prend  $\varepsilon$  suffisamment petit pour qu'aucun zéro de  $V_1$  ne se trouve à l'intérieur des demi-cercles. La remarque liminaire justifie que ces éventuels zéros ne se situent que sur le segment  $[1/2 + it_0, 1/2 + iT]$ .



En appliquant le principe de l'argument à  $V_1$  sur le contour  $\mathcal{D}_\varepsilon$ , on montre que

$$N_{V_1}(\mathcal{D}_\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \frac{V_1'(s)}{V_1(s)} ds = \Delta \arg V_1(s)|_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} \quad (4.3.5)$$

où  $N_{V_1}(\mathcal{D}_\varepsilon)$  désigne le nombre de zéros de  $V_1$  dans  $\mathcal{D}_\varepsilon$  et  $\partial \mathcal{D}_\varepsilon$  désigne le bord de  $\mathcal{D}_\varepsilon$ .

• Grâce aux relations (4.3.3) et (4.3.4), pour  $k \geq 1$ , on obtient

$$\frac{L_\infty^{(k)}(f, s)}{L_\infty(f, s)} = \left( \frac{d}{2} \ln t \right)^k + O((\ln t)^{k-1}).$$

En utilisant la définition de  $V_1$ , pour  $\Re s = \sigma_1 > 1$  et  $t_0 \leq \Im s = t \leq T$ , on déduit

$$V_1(s) = gL(f, s) + \sum_{n=0}^M \frac{g_n}{(dL)^n} \frac{L_\infty^{(n)}(f, s)}{L_\infty(f, s)} L(f, s) + O(1/L) = \left[ Q_1 \left( \frac{\ln t}{2L} \right) + O(1/L) \right] L(f, s). \quad (4.3.6)$$

D'une part,  $Q_1$  ne s'annulant pas sur  $[0, 1/2]$ , il existe  $B > 0$  tel que  $|Q_1(\frac{\ln t}{2L}) + O(1/L)| \geq B$ , d'où  $\left| \Delta \arg Q_1 \left( \frac{\ln t}{2L} \right) + O(1/L) \right|_{2A}^T \leq \pi$ . D'autre part, on a

$$|L(f, \sigma_1 + it) - 1| \leq \sum_{n \geq 2} \frac{|\lambda_f(n)|}{n^{\sigma_1}}.$$

Ainsi, en prenant  $\sigma_1$  suffisamment grand pour que  $\sum_{n \geq 2} \frac{|\lambda_f(n)|}{n^{\sigma_1}} \leq 1/2$ , on s'assure que la variation de l'argument de  $L(f, \sigma_1 + it)$  reste bornée pour  $t_0 \leq t \leq T$ . Dès lors

$$\Delta \arg V_1(\sigma_1 + it)|_{t_0}^T = \Delta \arg \left[ Q_1 \left( \frac{\ln t}{2L} \right) + O(1/L) \right] \Big|_{t_0}^T + \Delta \arg L(f, \sigma_1 + it)|_{t_0}^T \ll 1. \quad (4.3.7)$$

• En suivant [Tit86] (paragraphe 9.4), on évalue maintenant la variation de l'argument de  $V_1$  sur le bord supérieur de  $\mathcal{D}_\varepsilon$ . À cet effet, dans un premier temps, notons  $q$  le nombre de zéros de  $\sigma \mapsto \Re V_1(\sigma + iT)$  pour  $1/2 \leq \sigma \leq \sigma_1$ . On découpe alors  $[1/2, \sigma_1]$  en  $q + 1$  intervalles sur chacun desquels on a soit  $\Re V_1(\sigma + iT) \geq 0$ , soit  $\Re V_1(\sigma + iT) \leq 0$ . Ainsi, sur chacun de ces intervalles, la variation de l'argument de  $V_1(\sigma + iT)$  est inférieure à  $\pi$ . Par conséquent, si  $1/2 \leq \sigma \leq \sigma_1$ ,

$$|\arg V_1(\sigma + iT)| \leq (q + 1)\pi + \arg V_1(\sigma_1 + iT) = (q + 1)\pi + O(1).$$

Dans un second temps, soit  $\rho > \sigma_1 - 1/2$ . On introduit également la fonction  $V_2$  définie par

$$V_2(s) = gL(\bar{f}, s) + \sum_{n=0}^M \frac{\bar{g}_n}{(dL)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{L_\infty^{(n-k)}(f, s)}{L_\infty(f, s)} L^{(k)}(\bar{f}, s)$$

de telle sorte que  $\overline{V_1(s)} = V_2(\bar{s})$ . On considère alors la fonction  $g(z) = V_1(z + iT) + V_2(z - iT)$ , holomorphe sur le disque de centre  $\sigma_1$  et de rayon  $\rho$ , noté  $D(\sigma_1, \rho)$ , et dont les zéros sur le segment  $[1/2, \sigma_1]$  sont ceux de  $\Re V_1(\sigma + iT)$ . Enfin, on note  $n(r) = \text{card} \{ |z - \sigma_1| \leq r, g(z) = 0 \}$ . Étant donné que la fonction  $s \mapsto V_1(s)$  est bornée de manière polynomiale en  $\Im s$  dans les bandes verticales, en appliquant la formule de Jensen à  $g$  sur  $D(\sigma_1, \rho)$ , on obtient

$$\int_0^\rho \frac{n(r)}{r} dr = \sum_{z \in D(\sigma_1, \rho), g(z)=0} \ln \frac{\rho}{|z - \sigma_1|} = \frac{1}{2i\pi} \int_{D(\sigma_1, \rho)} \ln |g(s)| ds - \ln |g(\sigma_1)| \ll \ln T.$$

Par ailleurs, des inégalités

$$q \ln \frac{\rho}{\sigma_1 - 1/2} \leq n \left( \sigma_1 - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{\rho}{\sigma_1 - 1/2} = n \left( \sigma_1 - \frac{1}{2} \right) \int_{\sigma_1 - 1/2}^\rho \frac{1}{r} dr \leq \int_{\sigma_1 - 1/2}^\rho \frac{n(r)}{r} dr \leq \int_0^\rho \frac{n(r)}{r} dr,$$

on obtient  $q \ll L$ , puis

$$\Delta \arg V_1(\sigma + iT) \Big|_{\sigma_1}^{1/2} \ll L. \quad (4.3.8)$$

• On montre de la même manière

$$\Delta \arg V_1(\sigma + it_0) \Big|_{1/2}^{\sigma_1} \ll L. \quad (4.3.9)$$

• En notant  $\gamma$  le bord gauche de  $\mathcal{D}_\varepsilon$ , le théorème des résidus montre que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{V_1'(s)}{V_1(s)} ds = \Delta \arg V_1(s) \Big|_\gamma = \Delta \arg V_1 \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_T^{t_0} - \frac{1}{2} N_{1/2}(T) \quad (4.3.10)$$

où  $N_{1/2}(T)$  désigne le nombre de zéros de  $V_1$  se trouvant sur la droite  $\Re s = 1/2$  et dont la partie imaginaire est comprise entre  $t_0$  et  $T$ .

• On obtient alors immédiatement le résultat annoncé en insérant les relations (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9) et (4.3.10) dans l'équation (4.3.5).

□

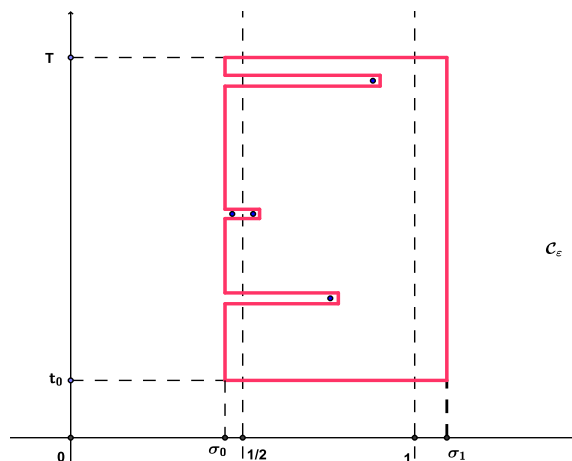
## Zéros et moment logarithmique

**Lemme 4.3.5** *On a*

$$2\pi N_{V_1\psi}(T) \leq \frac{TL}{R} \frac{1}{T} \int_{t_0}^T \ln(|V_1\psi(\sigma_0 + it)|) dt + O(T)$$

où  $N_{V_1\psi}(T)$  désigne le nombre de zéros  $\sigma + it$  de  $V_1\psi$  vérifiant  $1/2 \leq \sigma \leq \sigma_1$  et  $t_0 \leq t \leq T$  comptés avec multiplicité.

Preuve : Comme dans la preuve du lemme précédent, on peut supposer que  $V_1\psi$  n'a pas de zéros sur la droite  $\Re s = T$ . On suppose que  $\psi$  ne s'annule pas sur la droite  $\Re s = \sigma_1$ . On note  $\mathcal{C}_\varepsilon$  le contour représenté ci-dessous et constitué du rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $\sigma_0 + it_0$ ,  $\sigma_0 + iT$ ,  $\sigma_1 + iT$ ,  $\sigma_1 + it_0$  et sur lequel on a fait des coupures horizontales de hauteur  $\varepsilon$  partant du segment vertical gauche du rectangle de manière à contourner les zéros de  $V_1\psi$ . Ainsi construit, la fonction  $V_1\psi$  ne s'annule pas dans et sur le bord du contour  $\mathcal{C}_\varepsilon$ .



Littlewood a montré (relation 9.9.1 de [Tit86]) que lorsque que l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0 dans la relation  $\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \log(V_1\psi(s)) ds = 0$ , on obtient

$$\int_{\mathcal{R}} \log(\psi V_1(s)) ds = -2i\pi \sum_{\beta+i\gamma} (\beta - \sigma_0)$$

où la somme porte sur les zéros  $\beta + i\gamma$  de  $V_1\psi$  situés dans le rectangle  $\mathcal{R}$ . En ne considérant que la partie imaginaire dans la relation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{\beta+i\gamma} (\beta - \sigma_0) &= \int_{t_0}^T \ln |\psi V_1(\sigma_0 + it)| dt - \int_{t_0}^T \ln |\psi V_1(\sigma_1 + it)| dt \\ &\quad + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \arg \psi V_1(\sigma + iT) d\sigma - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \arg \psi V_1(\sigma + it_0) d\sigma. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

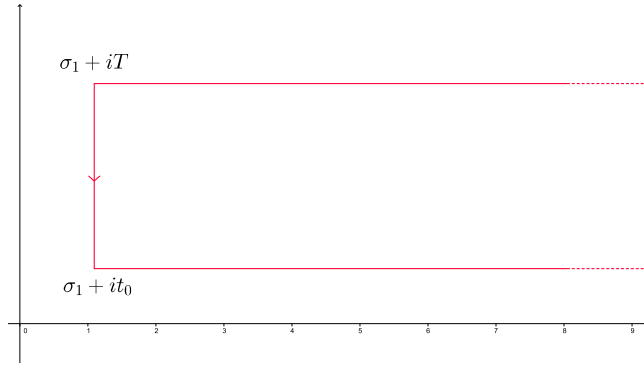
• Grâce au théorème de Jensen, comme dans la démonstration précédente, on a

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \arg \psi V_1(\sigma + iT) d\sigma - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \arg \psi V_1(\sigma + it_0) d\sigma \ll L. \quad (4.3.12)$$

- On décompose  $\psi$  sous la forme  $\psi(s) = 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{b_n}{n^s}$ . En utilisant  $b_n \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ , on obtient immédiatement pour  $\Re s = \sigma > 1 + \varepsilon$ ,

$$\left| \sum_{n \geq 2} \frac{b_n}{n^s} \right| \ll_\varepsilon \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}} \ll_\varepsilon \left( 1 + \frac{2}{\sigma - \varepsilon - 1} \right) \frac{1}{2^{\sigma-\varepsilon-1}}.$$

Cette majoration montre que, pour  $\sigma$  suffisamment grand, la fonction  $s \mapsto \log \psi(s)$  est analytique. On intègre alors cette dernière sur le contour représenté ci-dessous.



On a alors l'égalité

$$i \int_{t_0}^T \log \psi(\sigma_1 + it) dt = \int_{\sigma_1}^{+\infty} \log \psi(\sigma + it_0) d\sigma - \int_{\sigma_1}^{+\infty} \log \psi(\sigma + iT) d\sigma,$$

de laquelle on déduit

$$\left| \int_{t_0}^T \log \psi(\sigma_1 + it) dt \right| \ll_{\varepsilon, \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sigma-\varepsilon}} d\sigma \ll_{\varepsilon, \sigma_1} 1.$$

En ne regardant que la partie réelle dans cette majoration, on obtient

$$\int_{t_0}^T \ln |\psi(\sigma_1 + it)| dt \ll 1. \quad (4.3.13)$$

- En utilisant la relation (4.3.6) et le fait que  $Q_1$  ne s'annule pas sur  $[0, 1/2]$ , il vient

$$\int_{t_0}^T \ln |V_1(\sigma_1 + it)| dt = \int_{t_0}^T \ln |L(f, \sigma_1 + it)| dt + \int_{t_0}^T \ln \left| Q_1 \left( \frac{\ln t}{2L} \right) \right| dt + \int_{t_0}^T \ln |1 + O(1/L)| dt.$$

En procédant de la même manière que pour le point précédent, on obtient

$$\int_{t_0}^T \ln |V_1(\sigma_1 + it)| dt = \int_{t_0}^T \ln \left| Q_1 \left( \frac{\ln t}{2L} \right) \right| dt + O(T/L).$$

Étant donné que  $Q_1(1/2) = Q(0) = 1$ , il vient  $\int_{t_0}^T \ln \left| Q_1 \left( \frac{\ln t}{2L} \right) \right| dt \ll T/L$  par intégration par parties. On en déduit

$$\int_{t_0}^T \ln |V_1(\sigma_1 + it)| dt \ll T/L.$$

- Nous en déduisons le résultat annoncé grâce aux inégalités

$$\frac{2\pi R}{L} N_{V_1\psi}(T) \leq 2\pi \sum_{\substack{\beta+i\gamma \\ 1/2 \leq \beta \leq \sigma_1 \\ t_0 \leq \gamma \leq T}} (\beta - \sigma_0) \leq 2\pi \sum_{\substack{\beta+i\gamma \\ \sigma_0 \leq \beta \leq \sigma_1 \\ t_0 \leq \gamma \leq T}} (\beta - \sigma_0) \leq \int_{t_0}^T \ln |\psi V_1(\sigma_0 + it)| dt + O(T/L).$$

□

### Preuve du théorème 4.3.1

En utilisant les lemmes 4.3.3 et 4.3.4, il vient

$$\begin{aligned} N_{f,0}(T) &\geq \frac{1}{\pi} \Delta \arg \eta \left( \frac{1}{2} + it \right) \Big|_{t_0}^T \\ &= \frac{dT}{2\pi} \ln T - 2N_{V_1}^*(T) + O(T), \\ &\geq \frac{dT}{2\pi} \ln T - 2N_{V_1\psi}(T) + O(T) \text{ quitte à considérer davantage de zéros,} \\ &\geq \frac{dT}{2\pi} \ln T - \frac{TL}{\pi R T} \int_1^T \ln |V_1\psi(\sigma_0 + it)| dt + O(T) \text{ grâce au lemme 4.3.5,} \\ &\geq \frac{dT}{2\pi} \ln T - \frac{TL}{2\pi R} \ln \left[ \frac{1}{T} \int_1^T |V_1\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \right] + O(T) \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de convexité de Jensen. Le théorème 1.1.1 nous donnant l'équivalent

$$N_f(T) \sim \frac{dT}{2\pi} \ln T,$$

on en déduit immédiatement

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}(T)}{N_f(T)} \geq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{dR} \ln \left[ \frac{1}{T} \int_1^T |V_1\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \right] \right).$$

Enfin, de l'équivalent

$$\int_1^T |V_1\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \sim \int_1^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt,$$

découle la preuve complète du résultat annoncé.

## 4.4 Limites de la méthode

La méthode appliquée pour exhiber une proportion positive de zéros sur la droite critique d'une fonction  $L(f, s)$  de forme modulaire primitive utilise de manière cruciale les propriétés analytiques de la fonction de Rankin-Selberg  $L(f \times f, s)$ . Il semble que l'on peut appliquer la méthode de Levinson à n'importe quelle fonction  $L$  pourvu que la fonction de Rankin-Selberg

associée possède un pôle simple en  $s = 1$ , ce qui conjecturalement, revient à dire que la fonction  $L$  est primitive. Il faut alors déterminer le comportement asymptotique du second moment ramolli au voisinage de la droite critique en considérant un ramollisseur construit selon la structure donnée en (3.2.3) avec l'inverse de convolution de la suite des coefficients de la série de Dirichlet de la fonction  $L$ .

En reprenant les notations de la section 4.2.2, on a minoré la proportion de zéros se trouvant sur la droite critique pour une fonction  $L$  de forme modulaire primitive et pour  $\nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$  par une fonction ne dépendant que de la longueur du ramollisseur et du degré de la fonction  $L$ . En notant,

$$\Upsilon(\xi) = 1 - \inf_{Q,R} \frac{1}{R} \ln \left( \frac{1 + w(1)^2}{2} + \frac{\sqrt{AC}}{\tanh\left(\xi\sqrt{\frac{C}{A}}\right)} \right),$$

nous avons établi, pour  $\nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$ ,

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}(T)}{N_f(T)} \geq \Upsilon\left(\frac{\nu}{2}\right).$$

Dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann, qui est une fonction  $L$  de degré 1, Conrey [Con89] a établi la minoration valable pour  $\nu < \frac{4}{7}$ ,

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{\zeta,0}(T)}{N_{\zeta}(T)} \geq \Upsilon(\nu).$$

Par ailleurs, cette inégalité est conjecturée comme étant vraie quelle que soit la longueur du ramollisseur (voir [Far93]). Les propriétés de la fonction  $\Upsilon$  résument à elles seules les limites de la méthode utilisée avec ce choix précis de ramollisseur. La fonction  $\Upsilon$  est croissante, à valeurs négatives au voisinage de 0 et Farmer a montré dans [Far94] que  $\Upsilon(\xi)$  tend vers 1 lorsque  $\xi$  tend vers l'infini. Autrement dit, si la longueur du ramollisseur est trop petite alors la méthode échoue à donner une proportion explicite, et d'autre part, si l'on parvient à déterminer le comportement du second moment ramolli alors on obtient la preuve d'une version affaiblie de l'hypothèse de Riemann au sens où presque tous les zéros seraient sur la droite critique. Le tableau de variation ci-après résume ces propriétés.

	0	$\nu_c$	$+\infty$
$\Upsilon$	↗		1

**Remarque 4.4.1** On se contente de donner une estimation de la valeur critique  $\nu_c$  pour laquelle la méthode est effective. On a  $\nu_c < 0,0729$  puisque  $\Upsilon(0,0729) \geq 0,00016$ . Ceci vient des choix  $R$  et  $Q$  de la forme (4.2.3) dont les coefficients sont donnés par le tableau ci-après.

$R$	6.9938217254782421526
$h_1$	1.6133209105653354555
$h_2$	-3.0821458769051778151
$h_3$	3.1353563918630206597
$h_4$	-1.1661338496848108417

Pour une fonction  $L$  primitive de degré  $d$ , on voit que la longueur du ramollisseur nécessaire  $\nu$  devra vérifier  $\nu > d\nu_c$  et donc  $\nu$  devra être de plus en plus grand à mesure que le degré augmentera. Dans la pratique, plus le degré est élevé, plus l'arithmétique associée à la fonction  $L$  est difficile. On comprend donc que la méthode va échouer rapidement en considérant des fonctions  $L$  de degré supérieur.

L'hypothèse de Riemann prédit que tous les zéros non-triviaux d'une fonction  $L$  se situent sur la droite critique. Il est également conjecturé que tous ces zéros sont simples. En réalité, la méthode employée permet également de détecter une proportion de zéros simples sur la droite critique parmi les zéros non-triviaux en ne considérant que des polynômes  $Q$  de la forme (4.2.3) de degré 1. Cette remarque est due à Heath-Brown ([HB79]) et Selberg. En notant  $N_{f,0}^s(T)$  le nombre de zéros non-triviaux simples et sur la droite critique de  $L(f, s)$  et en posant

$$\Upsilon_s(\xi) = 1 - \inf_{\deg Q=1,R} \frac{1}{R} \ln \left( \frac{1 + w(1)^2}{2} + \frac{\sqrt{AC}}{\tanh \left( \xi \sqrt{\frac{C}{A}} \right)} \right),$$

on a, pour  $\nu < \frac{1-2\theta}{4+2\theta}$ ,

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{f,0}^s(T)}{N_f(T)} \geq \Upsilon_s \left( \frac{\nu}{2} \right).$$

Dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann, le résultat de Conrey fournit pour  $\nu < 4/7$ ,

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_{\zeta,0}^s(T)}{N_\zeta(T)} \geq \Upsilon_s(\nu) \geq 0,401.$$

Les variations de la fonction  $\Upsilon_s$  ont été étudiées par Farmer dans [Far94]. Elles sont semblables à celles de  $\Upsilon$  et nous les résumons dans le tableau ci-après.

	0	$\nu_c^s$	$+\infty$
$\Upsilon_s$			

**Remarque 4.4.2** Farmer estime la longueur critique  $\nu_c^s$  du ramollisseur à  $\nu_c^s \approx 0.1635$ . Ainsi, avec au mieux  $\nu < 1/4$ , la longueur que nous obtenons dans le cas des fonctions  $L$  de formes modulaires primitives reste insuffisante pour obtenir une proportion de zéros simples sur la droite critique.



Pour améliorer notre résultat, une piste serait de mieux tenir compte de la forme du ramollisseur. En effet, lors du chapitre 3, la limitation principale de la longueur du ramollisseur provient de l'estimation de la partie non-diagonale, qui est établie quelle que soit la forme de ce dernier, alors que sa structure précise n'est utilisée que pour estimer la partie diagonale.

On conclut ce chapitre en donnant quelques résultats prouvés quant aux zéros simples de fonctions  $L$  de degré 2. Pour une fonction  $L$  quelconque, nous désignerons par  $N_f^s(T)$  le nombre de zéros non-triviaux simples de  $L(f, s)$  dans la bande critique.

Nous avons déjà vu, en application des bornes de sous-convexité, la minoration

$$N_{\Delta}^s \gg T^{1/6-\varepsilon}$$

établie par Conrey et Gosh dans [CG88] pour la fonction  $\Delta$  de Ramanujan. Récemment, Booker ([Boo12]) a annoncé avoir montré que n'importe quelle fonction de forme modulaire primitive possédait une infinité de zéros simples dans la bande critique sans pouvoir les quantifier.

Pour ces mêmes fonctions  $L$  et en admettant les hypothèses de Riemann associées satisfaites, Milinovich et Ng ([MN13]) ont complété le résultat de Booker en prouvant la minoration

$$N_{f,0}^s(T) = N_f^s(T) \gg T(\ln T)^{-\varepsilon}.$$





## Chapitre 5

# Plus petit zéro d'une famille de fonctions $L$

Ce chapitre contient les preuves des théorèmes D et E et s'inscrit dans la continuité de la section 1.4.2 dont nous reprenons les notations.

### 5.1 Correspondance entre $Sp$ et $SO^-$

Avant de commencer les preuves des résultats annoncés, nous précisons ce à quoi fait référence la dénomination de plus petit zéro. En effet, nous avons vu lors de la proposition 1.1.1 qu'une fonction  $L$  auto-duale s'annulait forcément au point critique dès lors que le signe de son équation fonctionnelle valait  $-1$ . Partant de cette constatation, si  $\mathcal{F}$  est une famille naturelle pour laquelle chaque fonction  $L(f, s)$  est auto-duale et satisfait  $\varepsilon(f) = -1$ , on peut indexer les zéros non-triviaux de chaque  $L(f, s)$  par

$$\{\rho_{f,0}\} \cup \{\rho_{f,i}, i \in \mathbb{Z}^*\}$$

où  $\rho_{f,0} = 1/2$  et  $\rho_{f,i} = 1 - \rho_{f,-i}$  si  $i \neq 0$ . De plus, on a

$$\dots \leq \text{Im}(\rho_{f,-1}) \leq \text{Im}(\rho_{f,0}) = 0 \leq \text{Im}(\rho_{f,1}) \leq \text{Im}(\rho_{f,2}) \leq \dots$$

Pour toutes les autres familles de fonctions  $L$ , on utilise les mêmes notations en omettant  $\rho_{f,0}$ .

On expose maintenant les conséquences de cette normalisation sur la répartition des zéros non-triviaux de la famille  $\mathcal{F}$  de fonctions  $L$ . On considère la variable aléatoire

$$D^*[\Phi](f) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^*} \Phi(\tilde{\gamma}_{f,i})$$

qui nous permet de définir la fonction de densité  $W^*[\mathcal{F}]$  grâce à la relation

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\mathcal{F}(Q)}(D^*[\Phi]) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F}](t) dt. \quad (5.1.1)$$

Si toutes les fonctions  $L(f, s)$  de  $\mathcal{F}$  sont auto-duales avec  $\varepsilon(f) = -1$ , on a

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}(Q)}(D[\Phi]) = \Phi(0) + \mathbb{E}_{\mathcal{F}(Q)}(D^*[\Phi]) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}_{\mathcal{F}(Q)}(D[\Phi]) = \mathbb{V}_{\mathcal{F}(Q)}(D^*[\Phi]). \quad (5.1.2)$$

Ce phénomène se produit lorsque l'on considère la famille  $\mathcal{H}^-$ . Il est prouvé dans [ILS00] (équation (1.18)) que le groupe de symétries associé à  $\mathcal{H}^-$  est  $SO^-$ . Autrement dit, lorsque le niveau parcourt les entiers sans facteurs carrés, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\mathcal{H}^-(N)}(D[\Phi]) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W[SO^-](t) dt \quad \text{ie} \quad W[\mathcal{H}^-] = W[SO^-].$$

Par conséquent, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\mathcal{H}^-(N)}(D^*[\Phi]) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W[Sp](t) dt \quad \text{ie} \quad W^*[\mathcal{H}^-] = W[Sp]. \quad (5.1.3)$$

De la même manière, les familles  $\mathcal{H}_r^-$  ( $r$  impair) ont aussi  $SO^-$  comme groupe de symétries ([RR11], théorème A). Cependant, pour la mesure harmonique, la relation (5.1.2) s'écrit

$$\mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D[\Phi]) = 2\Phi(0)\mu_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(\mathcal{H}_r^-(q)) + \mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D^*[\Phi])$$

et

$$\mathbb{V}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D[\Phi]) = \mathbb{V}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D^*[\Phi]) + 2\Phi(0) \left[ \Phi(0)\mu_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(\mathcal{H}_r^-(q)) + \mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D^*[\Phi]) \right] \left[ 1 - 2\mu_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(\mathcal{H}_r^-(q)) \right]^2.$$

En utilisant la relation (1.4.1), il vient

$$\lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D[\Phi]) = \Phi(0) + \lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D^*[\Phi]) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{V}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D[\Phi]) = \lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{V}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D^*[\Phi]).$$

Par conséquent, grâce aux théorèmes A et D de [RR11], on obtient

$$\lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{E}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D^*[\Phi]) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W[Sp](t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{V}_{\mathcal{H}_r^-(q)}^h(D^*[\Phi]) = 2 \int_{\mathbb{R}} |u| \widehat{\Phi}(u)^2 du. \quad (5.1.4)$$

Les densités  $W^*[\mathcal{F}]$  des familles que nous considérons sont résumées dans le tableau 1.2 page 20.

## 5.2 Proportion de fonctions $L$ ayant un petit premier zéro

Le point de départ de la preuve du théorème E est la proposition suivante qui est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire  $D^*[\Phi]$ .

**Proposition 5.2.1** *Soient  $g$  dans  $\mathcal{S}_R(\mathbb{R})$  et  $\Phi(x) = (x^2 - \beta^2)g^2(x)$ . On pose*

$$B(g) = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 g^2(x) W^*[\mathcal{F}](x) dx}{\int_{\mathbb{R}} g^2(x) W^*[\mathcal{F}](x) dx}}.$$

*Supposons*

$$\lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{E}_{\mathcal{F}(q)}^h(D^*[\Phi]) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F}](t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{V}_{\mathcal{F}(q)}^h(D^*[\Phi]) = \mathbb{V}_{\mathcal{F}}(\Phi).$$

Alors, pour  $\beta > B(g)$ , on a

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mu_{\mathcal{F}(q)}^h(\{L(f, s) \in \mathcal{F}; \tilde{\gamma}_{f,1} < \beta\}) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{F}}(\Phi)}{\left[\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt\right]^2} =: \text{Borne}_{\mathcal{F}}(\beta^2). \quad (5.2.1)$$

La preuve présentée est une généralisation de la preuve du théorème 8.3 de [HR03a] que nous choisissons de formuler dans le cadre de la mesure harmonique. Le même énoncé et la même preuve sont toujours valables dans le cadre de la mesure de dénombrement.

Preuve : En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire  $D^*[\Phi]$ , on obtient, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\mu_{\mathcal{F}(q)}^h\left(\left\{\left|D^*[\Phi] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}(q)}^h(D^*[\Phi])\right| > \epsilon\right\}\right) \leq \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{F}(q)}^h(D^*[\Phi])}{\epsilon^2}.$$

En utilisant l'hypothèse sur le comportement de la variance, il vient d'abord

$$\limsup_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mu_{\mathcal{F}(q)}^h\left(\left\{\left|D^*[\Phi] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}(q)}^h(D^*[\Phi])\right| > \epsilon\right\}\right) \leq \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{F}}(\Phi)}{\epsilon^2}$$

puis, étant donné que les mesures harmoniques sont asymptotiquement des mesures de probabilité (relations (1.4.1)), on trouve

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mu_{\mathcal{F}(q)}^h\left(\left\{\left|D^*[\Phi] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}(q)}^h(D^*[\Phi])\right| \leq \epsilon\right\}\right) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{F}}(\Phi)}{\epsilon^2}.$$

Grâce au théorème de densité, cette relation donne

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mu_{\mathcal{F}(q)}^h\left(\left\{\left|D^*[\Phi] - \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt\right| \leq \epsilon\right\}\right) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{F}}(\Phi)}{\epsilon^2}.$$

On spécialise alors en  $\epsilon = \left|\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt\right|$ . Comme  $\beta > B(g)$ , on a  $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt < 0$ . Puis

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mu_{\mathcal{F}(q)}^h\left(\left\{-2 \left|\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt\right| \leq D^*[\Phi] \leq 0\right\}\right) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{F}}(\Phi)}{\left[\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt\right]^2}.$$

Étant donné que  $D^*[\Phi](f) < 0$ , il existe un zéro tel que  $\Phi(\tilde{\gamma}_{f,i}) < 0$  et donc  $|\tilde{\gamma}_{f,i}| < \beta$ , puis  $|\tilde{\gamma}_{f,1}| < \beta$ . Enfin, des inclusions

$$\left\{L(f, s); -2 \left|\int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt\right| \leq D^*[\Phi] \leq 0\right\} \subset \{L(f, s) \in \mathcal{F}; D^*[\Phi] \leq 0\} \subset \{L(f, s) \in \mathcal{F}; \tilde{\gamma}_{f,1} < \beta\}$$

on conclut en utilisant la croissance de la mesure  $\mu_{\mathcal{F}(q)}^h$ .

□

Cette proposition ne donne un résultat probant que lorsque le membre de droite est positif. On note  $\beta_{\min}(g)$  la plus petite valeur de  $\beta > B(g)$  telle que cette propriété soit vérifiée. Grâce à l'inégalité  $\beta_{\min}(g) > B(g)$ , on peut détecter un zéro et on obtient

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \min_{L(f,s) \in \mathcal{F}(q)} \tilde{\gamma}_{f,1} \leq \beta_{\min}(g).$$

Cependant, nous prouvons une meilleure majoration avec le théorème D.

Ricotta et Royer prouvent dans [RR11] (théorèmes A, B et D), que pour  $\Phi$  dans  $\mathcal{S}_{\rho_{\max}(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$ , on a

$$\lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{E}_{\mathcal{F}(q)}^h(D[\Phi]) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t)W[\mathcal{F}](t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mathbb{V}_{\mathcal{F}(q)}^h(D[\Phi]) = 2 \int_{\mathbb{R}} |u|\widehat{\Phi}(u)^2 du$$

où  $\rho_{\max}(\mathcal{F})$  et  $W[\mathcal{F}]$  sont donnés dans le tableau 1.2. Comme  $\rho_{\max}(\mathcal{F}) < 1$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)W^*[\mathcal{F}](t)dt = \widehat{\Phi}(0) + \frac{\sigma_{\mathcal{F}}}{2}\Phi(0)$$

avec :

$\mathcal{F}$	$\mathcal{H}_r$ ( $r$ even)	$\mathcal{H}_r$ ( $r$ odd)	$\mathcal{H}_r^+$ ( $r$ odd)	$\mathcal{H}_r^-$ ( $r$ odd)
$\sigma_{\mathcal{F}}$	$(-1)^{r+1} = -1$	$(-1)^{r+1} = 1$	1	-1

Tableau 5.1 – Valeur de  $\sigma_{\mathcal{F}}$

Afin d'obtenir une borne explicite dans la proposition précédente, on spécialise la relation (5.2.1) en une fonction test fixée.

**Lemme 5.2.1** *Si  $0 < R < 1/2$ ,  $\widehat{g}_0(u) = \cos\left(\frac{\pi u}{2R}\right) \mathbb{1}_{[-R,R]}(u)$  et  $\Phi(x) = (x^2 - \beta^2)g_0^2(x)$ , alors*

$$\text{Borne}_{\mathcal{F}}(\beta^2) = 1 - \frac{2\pi^2 R^2}{3} \frac{256(3 + \pi^2)R^4 \beta^4 + 32(9 - \pi^2)R^2 \beta^2 + \pi^2 + 3}{(128\sigma_{\mathcal{F}}R^3 \beta^2 + 16\pi^2 R^2 \beta^2 - \pi^2)^2} \quad \text{et} \quad B(g_0) = \frac{1}{4R\sqrt{1 + \sigma_{\mathcal{F}}\frac{8R}{\pi^2}}}.$$

Preuve : On a

$$\widehat{\Phi}(u) = \left[ \frac{2R-|u|}{2} \left( \frac{1}{16R^2} - \beta^2 \right) \cos\left(\frac{\pi u}{2R}\right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{16R} + \beta^2 R \right) \sin\left(\frac{\pi|u|}{2R}\right) \right] \cdot \mathbb{1}_{[-2R,2R]}(u)$$

$$\widehat{\Phi}(0) = \frac{1}{16R} - \beta^2 R \quad \text{et} \quad \Phi(0) = -\frac{16\beta^2 R^2}{\pi^2}.$$

À l'aide de plusieurs intégrations par parties, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |u|\widehat{\Phi}(u)^2 du = \frac{768R^4 \beta^4 + 3 + 288\beta^2 R^2 + \pi^2 - 32\beta^2 R^2 \pi^2 + 256R^4 \beta^4 \pi^2}{768\pi^2}.$$

□

**Lemme 5.2.2** On pose  $Borne_{\mathcal{F}}^+(\beta^2) = \max\{0; Borne_{\mathcal{F}}(\beta^2)\}$ . Le tableau suivant résume les variations de la fonction  $\beta \mapsto Borne_{\mathcal{F}}^+(\beta^2)$  avec

$$\beta_{\min}(g_0) = \frac{1}{4R} \sqrt{\frac{\pi^2(3\pi^2 + 24\sigma_{\mathcal{F}}R - 2(\pi^2 - 9)R^2) + 4\pi R\sqrt{9\pi^4 + 72\sigma_{\mathcal{F}}R\pi^2 - 6(\pi^4 - 7\pi^2 - 12)R^2}}{3\pi^4 + 48\sigma_{\mathcal{F}}R\pi^2 + (192 - 6\pi^2 - 2\pi^4)R^2}}.$$

$\beta$	$B(g_0)$	$\beta_{\min}(g_0)$	$+\infty$
$Borne_{\mathcal{F}}^+(\beta^2)$	0	$\rightarrow$ 0	$1 - \frac{2\pi^2 R^2}{3} \frac{\pi^2 + 3}{(\pi^2 + 8R\sigma_{\mathcal{F}})^2}$

Preuve : On étudie le signe de  $Borne_{\mathcal{F}}(X)$ . C'est le même que celui du polynôme du second degré

$$Y(X) = 3\pi^4 - 6\pi^2 R^2 - 2\pi^4 R^2 + X(-96R^2\pi^4 - 768\sigma_{\mathcal{F}}\pi^2 R^3 - 576R^4\pi^2 + 64R^4\pi^4) \\ + X^2(768R^4\pi^4 + 12288\sigma_{\mathcal{F}}R^5\pi^2 + 49152R^6 - 1536R^6\pi^2 - 512R^6\pi^4).$$

Soit  $L(R)$  son coefficient dominant et  $\Delta(R)$  son discriminant. On a

$$\Delta(R) = \underbrace{-98304(\pi^4 - 7\pi^2 - 12)\pi^2 R^6 (R - R_1)(R - R_2)}_{<0}$$

avec

$$R_1 = \min \left\{ \pi^2 \frac{12\sigma_{\mathcal{F}} + \sqrt{6(\pi^2 - 3)(\pi^2 - 4)}}{2(\pi^4 - 7\pi^2 - 12)}; \pi^2 \frac{12\sigma_{\mathcal{F}} - \sqrt{6(\pi^2 - 3)(\pi^2 - 4)}}{2(\pi^4 - 7\pi^2 - 12)} \right\} \\ R_2 = \max \left\{ \pi^2 \frac{12\sigma_{\mathcal{F}} + \sqrt{6(\pi^2 - 3)(\pi^2 - 4)}}{2(\pi^4 - 7\pi^2 - 12)}; \pi^2 \frac{12\sigma_{\mathcal{F}} - \sqrt{6(\pi^2 - 3)(\pi^2 - 4)}}{2(\pi^4 - 7\pi^2 - 12)} \right\}.$$

**Évaluations numériques** Si  $\sigma_{\mathcal{F}} = -1$ , alors  $R_1 \approx -8,330$  et  $R_2 \approx 1,074$ .  
Si  $\sigma_{\mathcal{F}} = 1$ , alors  $R_1 \approx -1,074$  et  $R_2 \approx 8,330$ .

De plus,

$$L(R) = \underbrace{256(192 - 6\pi^2 - 2\pi^4)}_{<0} R^4 (R - R_3)(R - R_4)$$

avec

$$R_3 = \min \left\{ \pi^2 \frac{-24\sigma_{\mathcal{F}} + \sqrt{6\pi^2(\pi^2 + 3)}}{192 - 6\pi^2 - 2\pi^4}; \pi^2 \frac{-24\sigma_{\mathcal{F}} - \sqrt{6\pi^2(\pi^2 + 3)}}{192 - 6\pi^2 - 2\pi^4} \right\} \\ R_4 = \max \left\{ \pi^2 \frac{-24\sigma_{\mathcal{F}} + \sqrt{6\pi^2(\pi^2 + 3)}}{192 - 6\pi^2 - 2\pi^4}; \pi^2 \frac{-24\sigma_{\mathcal{F}} - \sqrt{6\pi^2(\pi^2 + 3)}}{192 - 6\pi^2 - 2\pi^4} \right\}.$$

**Évaluations numériques** Si  $\sigma_{\mathcal{F}} = -1$ , alors  $R_3 \approx -8,210$  et  $R_4 \approx 0,573$ .  
Si  $\sigma_{\mathcal{F}} = 1$ , alors  $R_3 \approx -0,573$  et  $R_4 \approx 8,210$ .



Ainsi, nous avons toujours

$$R_1 < R_3 < 0 < \frac{1}{2} < R_4 < R_2.$$

On note  $W(R)$  le coefficient associé au monôme de degré 1 dans  $Y$ . Alors

$$W(R) = 32\pi^2 R^2(-3\pi^2 - 24\sigma_{\mathcal{F}}R + 2(\pi^2 - 9)R^2).$$

Comme  $0 < R < 1/2$ , on a  $\Delta(R) \geq 0$  et  $L(R) \geq 0$ . Le polynôme  $Y$  a deux racines réelles,

$$X_1(R) = \frac{-W(R) - \sqrt{\Delta(R)}}{2L(R)} \text{ et } X_2(R) = \frac{-W(R) + \sqrt{\Delta(R)}}{2L(R)}.$$

On compare maintenant  $X_1(R)$ ,  $X_2(R)$  et  $B(g_0)^2$ . Comme  $L(R)$  est positif,  $X_1(R) \leq X_2(R)$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & [B(g_0)^2 - X_1(R)][B(g_0)^2 - X_2(R)] \\ = & \frac{\pi^2(\pi^4 + 3\pi^2 - 96)(8\pi^2 R^2 + 24R^2 + 24\sigma_{\mathcal{F}}\pi^2 R + 3\pi^4)}{\underbrace{8R^2[\pi^2 + 8R\sigma_{\mathcal{F}}]^2[-3\pi^4 - 48\sigma_{\mathcal{F}}R\pi^2 + 2(\pi^4 + 3\pi^2 - 96)R^2]^2}_{>0}} (R - R_3)(R - R_4). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a  $X_1(R) \leq B(g_0)^2 \leq X_2(R)$  et  $\beta_{\min}(g_0)^2 = X_2(R)$ .

Enfin, on prouve que  $Borne_{\mathcal{F}}(X)$  est croissante sur  $[X_2(R); +\infty[$ . On calcule

$$\frac{dBorne_{\mathcal{F}}}{dX}(X) = -\frac{256R^4 B(g_0)^6}{3\pi^4 (X - B(g_0)^2)^3} [16R^2(2R\sigma_{\mathcal{F}}(\pi^2 - 9) - 3\pi^2)X - 2R\sigma_{\mathcal{F}}(\pi^2 + 3) - 3\pi^2].$$

Si  $0 < R < 1/2$ , alors  $2R\sigma_{\mathcal{F}}(\pi^2 - 9) - 3\pi^2 < 0$ . Par conséquent

$$\frac{dBorne_{\mathcal{F}}}{dX}(X) \geq 0 \iff X \geq \frac{1}{16R^2} \frac{2R\sigma_{\mathcal{F}}(\pi^2 + 3) + 3\pi^2}{2R\sigma_{\mathcal{F}}(\pi^2 - 9) - 3\pi^2}.$$

Étant donné que le membre de droite de cette inégalité est toujours négatif (pour  $0 < R < 1/2$ ), on en déduit que  $Borne_{\mathcal{F}}^{\pm}$  est une fonction croissante. □

**Preuve du théorème E** On spécialise l'inégalité de la proposition 5.2.1 en choisissant  $g_0$  comme fonction test avec  $0 < R < \rho_{\max}(\mathcal{F})/2$ . Grâce au lemme 5.2.1, pour  $\beta > B(g_0)$ , on a

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mu_{\mathcal{F}(q)}^h(\{L(f, s) \in \mathcal{F}; \tilde{\gamma}_{f,1} < \beta\}) \geq Borne_{\mathcal{F}}^{\pm}(\beta^2).$$

Puis grâce au lemme 5.2.2, si  $\beta > \beta_{\min}(g_0)$ , on a

$$\liminf_{\substack{q \rightarrow +\infty \\ q \text{ premier}}} \mu_{\mathcal{F}(q)}^h(\{L(f, s) \in \mathcal{F}; \tilde{\gamma}_{f,1} < \beta\}) \geq Borne_{\mathcal{F}}(\beta^2).$$

On obtient le théorème E en évaluant chacun des membres de droite en  $R = \rho_{\max}(\mathcal{F})/2$ . □

### 5.3 Taille du plus petit zéro d'une famille de fonctions $L$

Toute cette section est consacrée à la preuve du théorème D.

#### 5.3.1 Application du théorème de densité

Le point de départ de la preuve du théorème D est la proposition suivante qui est une généralisation du théorème 8.1 de [HR03a]. Celui-ci découle du théorème de densité appliqué à une fonction test bien choisie.

**Proposition 5.3.1** *La borne inférieure étant considérée sur l'ensemble des fonctions  $g$  dans  $\mathcal{S}_{\nu_{\max}(\mathcal{F})/2}(\mathbb{R})$ , on a*

$$\limsup_{Q \rightarrow +\infty} \min_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} \tilde{\gamma}_{f,1} \leq \inf \left\{ \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 g^2(x) W^*[\mathcal{F]}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} g^2(x) W^*[\mathcal{F]}(x) dx}} \right\}. \quad (5.3.1)$$

Preuve : On considère  $g$  appartenant à  $\mathcal{S}_{\nu_{\max}(\mathcal{F})/2}(\mathbb{R})$  et  $B(g) = \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 g^2(x) W^*[\mathcal{F]}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} g^2(x) W^*[\mathcal{F]}(x) dx}}$ .

Pour  $\beta > B(g)$ , on pose  $\Phi(x) = (x^2 - \beta^2)g^2(x)$  de telle sorte que

$$\begin{cases} \Phi(x) \leq 0 & \text{si } |x| \leq \beta, \\ \Phi(x) \geq 0 & \text{si } |x| \geq \beta. \end{cases}$$

De plus, on a

$$\hat{\Phi}(u) = \frac{-1}{4\pi^2} \frac{d^2}{du^2} (\hat{g} \star \hat{g})(u) - \beta^2 (\hat{g} \star \hat{g})(u) = \frac{-1}{4\pi^2} (\hat{g}' \star \hat{g}')(u) - \beta^2 (\hat{g} \star \hat{g})(u).$$

Ainsi  $\Phi$  appartient à  $\mathcal{S}_{\nu_{\max}(\mathcal{F})}(\mathbb{R})$  et nous pouvons appliquer le théorème de densité. On obtient

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} D^*[\Phi](f) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) W^*[\mathcal{F]}(t) dt = (B^2 - \beta^2) \int_{\mathbb{R}} g^2(x) W^*[\mathcal{F]}(x) dx < 0.$$

Par conséquent, il existe un entier  $Q_0$  tel que, pour tout  $Q \geq Q_0$ , on a

$$\frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} D^*[\Phi](f) < 0.$$

Étant donné que toutes les fonctions  $L(f, s)$  dans  $\mathcal{F}$  vérifient l'hypothèse de Riemann, tous les  $\tilde{\gamma}_{f,i}$  sont des nombres réels et on en déduit, grâce à la définition de  $\Phi$ , que l'on a

$$\sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} \sum_{|\tilde{\gamma}_{f,i}| \leq \beta} \Phi(\tilde{\gamma}_{f,i}) \leq \sum_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} \sum_{i \in \mathbb{Z}^*} \Phi(\tilde{\gamma}_{f,i}) < 0.$$

Ainsi, pour tout  $Q \geq Q_0$ , il existe une fonction  $L$  de  $\mathcal{F}(Q)$  satisfaisant  $\tilde{\gamma}_{f,1} \leq \beta$ . Autrement dit,

$$\limsup_{Q \rightarrow +\infty} \min_{f \in \mathcal{F}(Q)} \tilde{\gamma}_{f,1} \leq \beta.$$

En faisant tendre  $\beta$  vers  $B(g)$ , il vient que pour toute fonction test  $g$  dans  $\mathcal{S}_{\nu_{\max}(\mathcal{F})/2}(\mathbb{R})$ ,

$$\limsup_{Q \rightarrow +\infty} \min_{f \in \mathcal{F}(Q)} \tilde{\gamma}_{f,1} \leq B(g).$$

□

Le théorème D s'obtient alors en déterminant la valeur exacte de la borne inférieure apparaissant dans la proposition précédente. Soit

$$\mathbf{m} := \inf_{g \in \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 g^2(x) W[G](x) dx}{\int_{\mathbb{R}} g^2(x) W[G](x) dx}$$

avec  $\nu = \nu_{\max}(\mathcal{F})/2$  et  $W[G] = W^*[\mathcal{F}]$ . Le plan de résolution de ce problème d'optimisation est le suivant.

- Dans la sous-section 5.3.2 (lemme 5.3.2), on prouve qu'il existe une fonction  $\tilde{B}$  et un ensemble  $H_\nu^\infty$  tels que  $\mathbf{m} = \inf_{\hat{g} \in H_\nu^\infty \setminus \{0\}} \tilde{B}(\hat{g})$ . Plus précisément, on définit  $\tilde{B}$  par

$$\tilde{B}(h) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\int_{\mathbb{R}} h'(u)^2 du - \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 h' * h'(u) du}{\int_{\mathbb{R}} h(u)^2 du + \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 h * h(u) du + \varepsilon \left( \int_{\mathbb{R}} h(u) du \right)^2} \quad (5.3.2)$$

où  $(\delta, \varepsilon)$  sont donnés par le tableau 1.1.

- Dans la sous-section 5.3.2 (lemme 5.3.3), en utilisant un argument de densité, si

$$H_R = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ paire, continue, } \mathcal{C}^1 \text{ sur } ]-R, R[, \text{ avec } \text{supp } h \subset [-R, R]\}$$

et

$$\tilde{\mathbf{m}}_R = \inf_{h \in H_R \setminus \{0\}} \tilde{B}(h),$$

on prouve  $\mathbf{m} = \lim_{R \rightarrow \nu^-} \tilde{\mathbf{m}}_R$ .

- Dans la sous-section 5.3.2 (lemme 5.3.4), par des arguments topologiques, on montre qu'il existe  $\mathfrak{h}_R$  appartenant à l'espace de Sobolev  $H_0^1$  telle que  $\tilde{B}(\mathfrak{h}_R) = \tilde{\mathbf{m}}_R$ .
- Dans la sous-section 5.3.4 (lemme 5.3.7), en utilisant la théorie de Fourier, on montre que  $\mathfrak{h}_R$  vérifie une équation de Volterra avec décalages temporels

$$\mathfrak{h}_R(u) = \varphi(u) + \frac{\delta}{2} \int_u^R \mathfrak{h}_R(t+1) - \mathfrak{h}_R(t-1) dt \quad (5.3.3)$$

où  $\varphi$  est une fonction explicite définie à partir du paramètre inconnu  $\tilde{\mathbf{m}}_R$ . On en déduit également que  $\mathfrak{h}_R$  appartient à  $H_R$ .

- On résout ensuite cette équation de Volterra dans la sous-section 5.3.5. Il en résulte que l'on dispose alors d'une expression explicite de la fonction  $\mathfrak{h}_R$  dépendant du paramètre inconnu  $\tilde{\mathbf{m}}_R$ .
- On détermine  $\sqrt{\tilde{\mathbf{m}}_R}$  dans la sous-section 5.3.6 en résolvant l'équation  $\tilde{\mathbf{m}}_R = \tilde{B}(\mathfrak{h}_R)$ .
- On conclut en utilisant la relation  $\sqrt{\mathbf{m}} = \lim_{R \rightarrow \nu^-} \sqrt{\tilde{\mathbf{m}}_R}$ .

### 5.3.2 Arguments de densité et topologiques

Cette section est consacrée à la preuve du lemme suivant qui résume à lui seul les trois premiers points du plan énoncé précédemment. On note  $H_0^1$  l'espace de Sobolev défini par

$$H_0^1 = \{u \in L^2(]-R, R[) \text{ nulle aux bords de } ]-R, R[,$$

$$\left. \exists v \in L^2(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-R, R[), \int_{\mathbb{R}} u \phi' = - \int_{\mathbb{R}} v \phi \right\}.$$

Si  $u$  appartient à  $H_0^1$ , la fonction  $v$  est appelée dérivée faible de  $u$  et notée  $u'$ . L'espace  $H_0^1$  est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_{-R}^R u' v'.$$

L'ensemble  $H_0^1$  est un espace de Hilbert réflexif ([Bre83], paragraphe VIII.3).

**Lemme 5.3.1** *On a*

$$\mathfrak{m} = \lim_{R \rightarrow \nu^-} \tilde{\mathfrak{m}}_R.$$

*De plus, pour tout  $R > 0$ , il existe  $\mathfrak{h}_R$  dans  $H_0^1$  tel que  $\tilde{\mathfrak{m}}_R = \tilde{B}(\mathfrak{h}_R)$ .*

Afin de prouver ce résultat, nous aurons besoin de quelques lemmes techniques.

### Une nouvelle expression

**Lemme 5.3.2** *Soit  $H_\nu^\infty = \{h \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \text{ paire et avec } \text{supp } h \subset [-R, R] \text{ telle que } 0 < R < \nu\}$ . Alors*

$$\mathfrak{m} = \inf_{h \in H_\nu^\infty \setminus \{0\}} \tilde{B}(h).$$

*Preuve :* Grâce au théorème de Plancherel, à la formule d'inversion, au théorème de Parseval et à la relation (1.4.2), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g^2(x) W[G](x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{g^2}(y) \widehat{W[G]}(y) dy = \widehat{g^2}(0) + \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \widehat{g^2}(y) dy + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \widehat{g^2}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g^2(x) dx + \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \widehat{g}(y) * \widehat{g}(y) dy + \varepsilon g^2(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{g^2}(y) dy + \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \widehat{g}(y) * \widehat{g}(y) dy + \varepsilon \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y) dy \right)^2. \end{aligned}$$

De la même manière, comme  $\widehat{xg(x)} = \frac{-1}{2i\pi} \widehat{g}'$ , on prouve

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 g^2(x) W[G](x) dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}'(u)^2 du - \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \widehat{g}' * \widehat{g}'(u) du.$$

Par ailleurs, la classe de Schwartz étant invariante par transformation de Fourier, on a

$$g \in \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \widehat{g} \in H_\nu^\infty.$$

Ainsi,

$$\mathfrak{m} = \inf_{\widehat{g} \in H_\nu^\infty \setminus \{0\}} \tilde{B}(\widehat{g}).$$

□

## Un argument de densité

**Lemme 5.3.3** *On a*

$$\inf_{h \in H_\nu^\infty \setminus \{0\}} \tilde{B}(h) = \lim_{R \rightarrow \nu^-} \tilde{m}_R.$$

Preuve : On définit une suite régularisante  $(\rho_n)$  en posant

$$\rho_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{n}{\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt} \rho(nx) \end{cases} \quad \text{où} \quad \rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}.$$

La fonction  $\rho_n$  est positive, lisse avec  $\text{supp } \rho_n \subset [-1/n; 1/n]$  et vérifie  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(u) du = 1$ . On aura besoin des deux propriétés suivantes (confer [Bre83], théorème 4.22 et théorème 4.15).

**P1** Soit  $1 \leq p < \infty$ , si  $g \in L^p(\mathbb{R})$  alors  $\rho_n * g$  converge vers  $g$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ .

**P2** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^p(\mathbb{R})$  alors  $f * g \in L^p(\mathbb{R})$  et  $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$ .

Soit  $0 < R < \nu$  et  $\eta > 0$ .

Il existe  $h$  dans  $H_R$  telle que  $\tilde{m}_R \leq \tilde{B}(h) \leq \tilde{m}_R + \eta$ . On pose  $h_n = \rho_n * h$ . Pour  $n$  suffisamment grand,  $h_n$  appartient à  $H_\nu^\infty$ . On a également  $h'_n = \rho_n * h'$ . Grâce à la propriété **P1**, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n\|_{L^2}^2 = \|h\|_{L^2}^2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|h'_n\|_{L^2}^2 = \|h'\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(u) du = \int_{\mathbb{R}} h(u) du.$$

En utilisant la propriété **P2**, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^1 h_n * h_n(u) - h * h(u) du \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |h_n * h_n(u) - h * h(u)| du \\ & \leq \| (h_n - h) * h_n \|_{L^1} + \| h * (h_n - h) \|_{L^1} \leq (\|h_n\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}) \|h - h_n\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 h_n * h_n(u) du = \int_{-1}^1 h * h(u) du \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 h'_n * h'_n(u) du = \int_{-1}^1 h' * h'(u) du.$$

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{B}(h_n) = \tilde{B}(h)$ . Donc il existe  $h_n$  dans  $H_\nu^\infty$  telle que  $|\tilde{B}(h) - \tilde{B}(h_n)| \leq \eta$ . Par conséquent, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $h_n$  dans  $H_\nu^\infty$  telle que  $|\tilde{m}_R - \tilde{B}(h_n)| \leq 2\eta$ . De plus, pour tout  $R < \nu$ , on a  $\inf_{h \in H_\nu^\infty \setminus \{0\}} \tilde{B}(h) \leq \tilde{m}_R$ , d'où

$$\inf_{h \in H_\nu^\infty \setminus \{0\}} \tilde{B}(h) \leq \lim_{R \rightarrow \nu^-} \tilde{m}_R.$$

Pour l'inégalité opposée, soit  $h$  dans  $H_\nu^\infty$ . Il existe  $R_0 < \nu$  tel que  $\text{supp } h \subset [-R_0; R_0]$ . Comme  $h$  appartient à  $H_{R_0}$  et comme la fonction  $R \mapsto \tilde{m}_R$  est décroissante, on obtient

$$\lim_{R \rightarrow \nu^-} \tilde{m}_R \leq \tilde{m}_{R_0} \leq \tilde{B}(h).$$

On en déduit

$$\lim_{R \rightarrow \nu^-} \tilde{m}_R \leq \inf_{h \in H_\nu^\infty \setminus \{0\}} \tilde{B}(h).$$

□

**Des opérateurs compacts** L'expression (5.3.2) permet de prolonger la fonction  $\tilde{B}$  à  $H_0^1 \setminus \{0\}$ .

**Lemme 5.3.4** Si  $R > 0$ , il existe  $\mathfrak{h}_R$  dans  $H_0^1 \setminus \{0\}$  tel que  $\tilde{m}_R = \tilde{B}(\mathfrak{h}_R)$ .

Preuve : En notant  $K$  l'endomorphisme de  $L^2(] - R, R[)$  défini par

$$K[h](u) = \frac{\delta}{2} \int_{u-1}^{u+1} h(t) dt + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} h(t) dt,$$

on peut réécrire la fonction  $\tilde{B}$  sous la forme

$$\tilde{B}(h) = \frac{\langle h', h' \rangle_{L^2} + \langle Kh', h' \rangle_{L^2}}{\langle h, h \rangle_{L^2} + \langle Kh, h \rangle_{L^2}}.$$

La fonction  $K$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt et, à ce titre, est un opérateur compact de  $L^2(] - R, R[)$ . En notant  $I$  l'identité de  $L^2(] - R, R[)$ , les transformations effectuées au cours du lemme 5.3.2 montrent que pour toute fonction  $h$  de  $L^2([-R, R])$ , on a  $\langle (I + K)[h], h \rangle_{L^2} \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $h = 0$ .

Les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support inclus dans  $] - R, R[$  étant denses dans  $H_0^1$ , la borne inférieure de  $\tilde{B}$  sur  $H_0^1$  est égale à  $\tilde{m}_R$ .

On considère alors une suite  $(g_n)$  de fonctions de  $H_R$  non nulles telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{B}(g_n) = \tilde{m}_R$ . On pose alors  $h_n = g_n / \langle g'_n, g'_n \rangle_{L^2}$ . La fonction  $\tilde{B}$  étant invariante par multiplication par un scalaire, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{B}(h_n) = \tilde{m}_R \quad \text{et} \quad \|h'_n\|_{L^2} = \|h_n\|_{H_0^1} = 1.$$

Les suites  $(h_n)$  et  $(h'_n)$  sont bornées dans l'espace de Hilbert  $L^2(] - R, R[)$ . Sa boule unité étant faiblement compacte, quitte à considérer des sous-suites, on en déduit qu'il existe des fonctions  $h$  et  $k$  dans  $L^2(] - R, R[)$  telles que  $(h_n)$  (respectivement  $(h'_n)$ ) converge faiblement vers  $h$  (respectivement  $k$ ). De plus, pour toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(] - R, R[)$ , on a

$$\int g\phi' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n\phi' = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g'_n\phi = - \int k\phi.$$

Donc  $g$  appartient à  $H^1$ ,  $g' = k$  et  $g_n$  converge faiblement vers  $g$  dans  $H^1$ . Par ailleurs, l'injection de  $H^1$  dans l'ensemble des fonctions continues (muni de la norme de la convergence uniforme) étant compacte ([Bre83], théorème 8.2 et 8.8), on en déduit ([Bre83], 6.1 remarque 2) que  $h_n$  converge uniformément vers  $h$  (ou plutôt son représentant continu que l'on identifiera à  $h$ ). En particulier, on en déduit que  $h$  est paire,  $h$  appartient à  $H_0^1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n\|_{L^2} = \|h\|_{L^2}$ .

Des convergences faibles dans  $L^2(] - R, R[)$  des suites  $(h_n)$  et  $(h'_n)$  et de la compacité de l'opérateur  $K$ , on déduit que les suites  $(Kh_n)$  et  $(Kh'_n)$  convergent respectivement vers  $Kh$  et  $Kh'$  pour la convergence forte de  $L^2(] - R, R[)$ . Il s'ensuit immédiatement les relations ([Bre83], proposition 3.5 (iv))

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Kh_n, h_n \rangle_{L^2} = \langle Kh, h \rangle_{L^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Kh'_n, h'_n \rangle_{L^2} = \langle Kh', h' \rangle_{L^2}.$$

En résumé, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle (I + K)h'_n, h'_n \rangle_{L^2} = 1 + \langle Kh', h' \rangle_{L^2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle (I + K)h_n, h_n \rangle_{L^2} = \langle (I + K)h, h \rangle_{L^2},$$

et, comme  $(h'_n)$  converge faiblement dans  $L^2$  vers  $h'$ , on en déduit  $\|h'\|_{L^2} \leq \liminf \|h'_n\|_{L^2} = 1$ .

Par ailleurs,  $1 + \langle Kh', h' \rangle_{L^2}$  est non-nul. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$0 = 1 + \langle Kh', h' \rangle_{L^2} \geq \|h'\|_{L^2} + \langle Kh', h' \rangle_{L^2} = \langle (I + K)h', h' \rangle_{L^2} \geq 0.$$

On en déduirait à la fois  $\|h'\|_{L^2} = 1$  et  $\langle (I + K)h', h' \rangle_{L^2} = 0$ , puis  $\|h'\|_{L^2} = 1$  et  $h'$  nulle !

On en déduit ensuite  $\langle (I + K)h, h \rangle_{L^2} \neq 0$ . En effet,  $\tilde{m}_R$  est un nombre fini, la limite du numérateur de  $\tilde{B}(h_n)$  est  $1 + \langle Kh', h' \rangle_{L^2}$  donc non-nulle, et la limite de son dénominateur est précisément  $\langle (I + K)h, h \rangle_{L^2} \neq 0$ .

On a alors

$$\frac{\|h'\|_{L^2} + \langle Kh', h' \rangle_{L^2}}{\langle (I + K)h, h \rangle_{L^2}} = \tilde{B}(h) \geq \tilde{m}_R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{B}(h_n) = \frac{1 + \langle Kh', h' \rangle_{L^2}}{\langle (I + K)h, h \rangle_{L^2}},$$

de quoi l'on déduit  $\|h'\|_{L^2} \geq 1$ . Étant donné que l'on a déjà montré l'inégalité opposée, il vient  $\|h'\|_{L^2} = 1$ . Par conséquent, la fonction  $h$  est non-nulle et vérifie  $\tilde{B}(h) = \tilde{m}_R$ .

□

**Remarque 5.3.1** La fonction  $\tilde{B}$  n'est pas continue lorsque  $B_{\|\cdot\|_{H_0^1}}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  est muni de la topologie faible. En effet, la boule unité de  $H_0^1$  étant faiblement compacte,  $\tilde{B}$  devrait être bornée. Il suffit de considérer les fonctions  $h_n(u) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2R}\right) \mathbf{1}_{[-R, R]}(u)$  pour se convaincre que cela est impossible.

La preuve du lemme 5.3.1 découle des lemmes 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4.

### 5.3.3 Analyse de Fourier

Par souci de simplification, on considère  $B(h) = 16R^2 \tilde{B}(h)$  et  $\mathfrak{m}_R = \inf_{h \in H_R} B(h)$ . Ainsi

$$\mathfrak{m}_R = B(\mathfrak{h}_R) = 16R^2 \tilde{\mathfrak{m}}_R.$$

Soit

$$\Omega_R = \left\{ (c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ telle que } c_{2n} = 0 \text{ et } x \mapsto \sum_{n \geq 0} c_n \cos\left(\frac{\pi n x}{2R}\right) \text{ est continue et dans } H_0^1 \right\}.$$

Cette sous-section contient les preuves de quelques lemmes techniques essentiels.

**Lemme 5.3.5** *Soit*

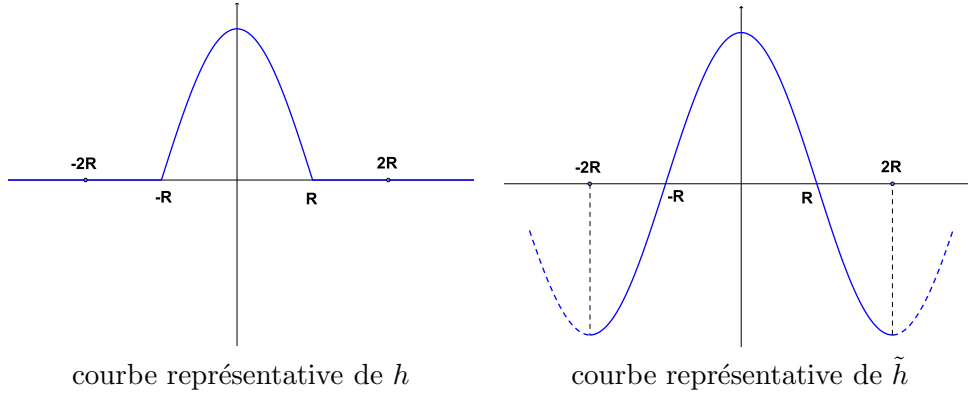
$$\Psi : \begin{cases} H_0^1 \cap \{h : ]-R, R[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue, paire} \} & \longrightarrow \Omega_R \\ h & \longmapsto \left( \frac{1 - (-1)^n}{2R} \int_0^R h(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{2R}\right) dt \right)_{n \geq 0} \end{cases}.$$

Alors, la fonction  $\Psi$  est bijective.

Preuve : À chaque fonction continue et paire  $h$  de  $H_0^1$ , on associe une fonction  $\tilde{h}$  paire  $4R$ -périodique définie par,

$$\text{pour tout } x \in [0, R], \tilde{h}(x) = h(x) \text{ et } \tilde{h}(R+x) = -h(R-x).$$

Réciproquement, on a  $h = \tilde{h} \cdot \mathbf{1}_{[-R, R]}$ .



Ainsi construite, la valeur moyenne de  $\tilde{h}$  est nulle. Qui plus est, si  $c_n$  désigne le  $n$ -ème coefficient de Fourier de  $\tilde{h}$ , on a

$$c_n = \frac{1}{4R} \int_{-2R}^{2R} \tilde{h}(t) e^{-\frac{i\pi n t}{2R}} dt = \frac{1 - (-1)^n}{2R} \int_0^R h(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{2R}\right) dt.$$

La série de Fourier d'une fonction continue de  $H_0^1$  convergeant normalement, on a

$$h(u) = \tilde{h}(u) \cdot \mathbf{1}_{[-R, R]}(u) = 2 \left[ \sum_{n \geq 0} c_n \cos\left(\frac{\pi n x}{2R}\right) \right] \mathbf{1}_{[-R, R]}(u).$$

Ainsi la fonction  $\Psi$  est bien définie et la dernière relation fournit une expression de l'application réciproque  $\Psi^{-1}$ .

□

Par conséquent, la fonction  $B$  étant définie sur l'ensemble des fonctions continues et paires de  $H_0^1$ , on peut définir  $B$  sur  $\Omega_R$  grâce à la relation  $B(c) := B(\Psi^{-1}(c))$ .

**Lemme 5.3.6** Soit  $c = (c_n)$  appartenant à  $\Omega_R$ . Si  $R \leq 1/2$  alors

$$B(c) = \frac{\sum_{n \geq 0}^* n^2 c_n^2}{\sum_{n \geq 0}^* c_n^2 + (\delta + 2\varepsilon) \frac{8R}{\pi^2} \left( \sum_{n \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} c_n \right)^2}$$

et, si  $R > 1/2$ , on a

$$B(c) = \frac{\sum_{n \geq 0}^* n^2 c_n^2 - \frac{\delta}{2R} \sum \sum_{m, n \geq 0} m n \mu_{m, n} c_m c_n}{\sum_{n \geq 0}^* c_n^2 + \frac{\delta}{2R} \sum \sum_{m, n \geq 0} \lambda_{m, n} c_m c_n + \frac{16R\varepsilon}{\pi^2} \left( \sum_{n \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} c_n \right)^2}$$



où, pour tous nombres impairs  $n$  et  $m$

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{8R^2 mn(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{\pi^2(m^2-n^2)} \left[ \frac{1}{n^2} \cos \frac{\pi n}{2R} - \frac{1}{m^2} \cos \frac{\pi m}{2R} \right] - \frac{8R^2(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{mn\pi^2} & \text{si } m \neq n, \\ \frac{2R(2R-1)}{n\pi} \sin \frac{\pi n}{2R} - \frac{8R^2}{\pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi}{2R} + \frac{8R^2}{\pi^2 n^2} & \text{si } m = n, \end{cases}$$

et

$$\mu_{m,n} = \begin{cases} \frac{8R^2(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{\pi^2(m^2-n^2)} \left[ \cos \frac{\pi m}{2R} - \cos \frac{\pi n}{2R} \right] & \text{si } m \neq n, \\ -\frac{2R(2R-1)}{n\pi} \sin \frac{\pi n}{2R} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Preuve : Nous allons donner une expression explicite de  $B$  en tant que fonction définie sur  $\Omega_R$ . Soit  $h$  une fonction continue et paire telle que  $c = (c_n) = \Psi(h)$ . Grâce à la formule de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R} \int_{\mathbb{R}} h(u)^2 du &= \frac{1}{4R} \int_{-2R}^{2R} \tilde{h}(u)^2 du = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = 2 \sum_{n \geq 0} c_n^2, \\ \frac{1}{2R} \int_{\mathbb{R}} h'(u)^2 du &= \frac{1}{4R} \int_{-2R}^{2R} \tilde{h}'(u)^2 du = \frac{\pi^2}{4R^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 = \frac{\pi^2}{2R^2} \sum_{n \geq 0} n^2 c_n^2. \end{aligned}$$

De plus, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} h(u) du = \int_{-R}^R \tilde{h}(u) du = \frac{4R}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} c_{2n+1} = \frac{8R}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} c_{2n+1}.$$

Comme  $B(h) = 16R^2 \tilde{B}(h)$  avec  $\tilde{B}(h)$  donné par la relation (5.3.2), on obtient une expression explicite de  $B(c)$  en utilisant

$$\int_{-1}^1 h * h(x) dx = \begin{cases} \left( \int_{\mathbb{R}} h(x) dx \right)^2 & \text{si } R \leq \frac{1}{2}, \\ 4 \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} c_m c_n \lambda_{m,n} & \text{si } R > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

et

$$\int_{-1}^1 h' * h'(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } R \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi^2}{R^2} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} mn c_m c_n \mu_{m,n} & \text{si } R > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

Hughes et Rudnick ont prouvé  $\mathfrak{m} = \frac{1}{16^{1/2}}$  lorsque  $G = U$ . On étend leur résultat.

**Corollaire 5.3.1** *Si  $G = O$  ou si  $G = SO^{\pm}$  et  $0 < R \leq 1/2$  alors*

$$\frac{1}{1+R} < \mathfrak{m}_R \leq \frac{1}{1 + \frac{8}{\pi^2} R} < 1.$$

*Si  $G = SO^{\pm}$  avec  $R > 1/2$ , alors  $\mathfrak{m}_R < 1$ . Si  $G = Sp$  et  $0 < R < 1/2$ , alors*

$$1 < \mathfrak{m}_R < \frac{1}{1 - \frac{8}{\pi^2} R} < 2.$$

Preuve : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si  $G = O$  ou si  $G = SO^\pm$  et  $0 < R \leq 1/2$ , il vient

$$B(c) = \frac{\sum_{n \geq 0}^* n^2 c_n^2}{\sum_{n \geq 0}^* c_n^2 + (\delta + 2\varepsilon) \frac{8R}{\pi^2} \left( \sum_{n \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} c_n \right)^2} \geq \frac{\sum_{n \geq 0}^* n^2 c_n^2}{(1+R) \sum_{n \geq 0}^* c_n^2} \geq \frac{1}{1+R}$$

et l'une de ces inégalités est stricte. Afin d'obtenir une borne supérieure de  $\mathfrak{m}_R$ , on évalue  $B$  en  $e = (e_n)$  définie par  $e_n = 0$  pour tout entier  $n$  excepté  $e_1 = 1$ . La majoration est immédiate pour  $G = O$ , pour  $G = SO^\pm$  ou pour  $G = Sp$  et  $0 < R \leq 1/2$ . Dans le cas  $G = SO^\pm$  et  $R > 1/2$ , on a

$$B(e) = \frac{1 - \frac{\delta}{2R} \mu_{1,1}}{1 + \frac{\delta}{2R} \lambda_{1,1} + \frac{16R\varepsilon}{\pi^2}} = \frac{1 + \frac{\delta(2R-1)}{\pi} \sin \frac{\pi}{2R}}{1 + \frac{\delta(2R-1)}{\pi} \sin \frac{\pi}{2R} + \frac{4R\delta}{\pi^2} (1 - \cos \frac{\pi}{2R}) + \frac{16R\varepsilon}{\pi^2}} < 1.$$

Enfin, si  $G = Sp$  et  $R < 1/2$ , pour tout  $c$  appartenant à  $\Omega_R$ , on a

$$B(c) = \frac{\sum_{n \geq 0}^* n^2 c_n^2}{\sum_{n \geq 0}^* c_n^2 - \frac{8R}{\pi^2} \left( \sum_{n \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} c_n \right)^2} \geq \frac{\sum_{n \geq 0}^* n^2 c_n^2}{\sum_{n \geq 0}^* c_n^2} \geq 1$$

et l'une de ces inégalités est stricte. Ainsi, grâce au lemme 5.3.4, on obtient  $\mathfrak{m}_R > 1$ . □

Le corollaire 5.3.1 implique, sauf dans le cas  $G = Sp$  et  $R > 1/2$ , que  $\mathfrak{m}_R$  n'est pas le carré d'un entier. Afin de compléter ce résultat, on fait l'hypothèse suivante qui sera justifiée page 134.

**“Hypothèse  $Sp$ ”** : Si  $G = Sp$  et  $R > 1/2$  alors  $\mathfrak{m}_R$  n'est pas le carré d'un entier.

**Remarque 5.3.2** Dans le cas symplectique avec  $R > 1/2$ , en évaluant  $B$  en  $e$ , il vient

$$\mathfrak{m}_R \leq B(e) = \frac{1 - \frac{2R-1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2R}}{1 - \frac{2R-1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2R} - \frac{4R}{\pi^2} (1 - \cos \frac{\pi}{2R})} = \frac{12R}{\pi^2} + O(1).$$

Ainsi, comme  $\mathfrak{m}_R = 16R^2 \tilde{\mathfrak{m}}_R$ , le corollaire 5.3.1 et la proposition 5.3.1 montrent

$$\limsup_{Q \rightarrow +\infty} \min_{L(f,s) \in \mathcal{F}(Q)} \tilde{\gamma}_{f,1} \leq \lim_{R \rightarrow \nu_{\max}(\mathcal{F})/2} \sqrt{\tilde{\mathfrak{m}}_R} \ll \begin{cases} \frac{1}{\nu_{\max}(\mathcal{F})^{1/2}} & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[Sp], \\ \frac{1}{\nu_{\max}(\mathcal{F})} & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[SO^+], \\ \frac{1}{\nu_{\max}(\mathcal{F})^{3/2}} & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[O], \\ \frac{1}{\nu_{\max}(\mathcal{F})^2} & \text{si } W^*[\mathcal{F}] = W[SO^-]. \end{cases}$$

Par conséquent, la conjecture de densité est en accord avec les prédictions du modèle des matrices aléatoires établies lors de la section 1.4.3.

### 5.3.4 Une équation de Volterra avec décalages temporels

Étant donné que le cas unitaire a déjà été résolu, on suppose que  $G$  est l'un des groupes compacts  $O$ ,  $SO^-$ ,  $SO^+$  ou  $Sp$ . Dans cette sous-section, on prouve le lemme suivant.

**Lemme 5.3.7** La fonction test optimale  $\mathfrak{h}_R$  satisfait, pour tout  $0 \leq u \leq R$ ,

$$\mathfrak{h}_R(u) = \varphi(u) + \frac{\delta}{2} \int_u^R \mathfrak{h}_R(t+1) - \mathfrak{h}_R(t-1) dt \quad (5.3.4)$$

où  $(\delta, \varepsilon)$  est donné par le tableau 1.1 et où

$$\varphi(u) = \frac{\pi k_{\delta, \varepsilon}}{2\mathfrak{m}_R \cos \frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R \pi}}{2}} \left[ \cos \frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R \pi} u}{2R} - \cos \frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R \pi}}{2} \right] \cdot \mathbb{1}_{[-R, R]}(u)$$

avec

$$k_{\delta, \varepsilon} = \frac{2\mathfrak{m}_R}{\pi} \left[ \frac{\delta}{2} \int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(x) dx + \varepsilon \int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(x) dx \right]. \quad (5.3.5)$$

**Remarque 5.3.3** La fonction  $\mathfrak{h}_R$  étant continue sur  $[-R, R]$ , l'équation du lemme annoncé prouve que  $\mathfrak{h}_R$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[$ . Autrement dit, la fonction  $\mathfrak{h}_R$  appartient à l'ensemble  $H_R$ .

Avant de prouver ce résultat, nous aurons besoin de prouver quelques lemmes. Cependant, nous pouvons d'ores et déjà en déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 5.3.2** Si  $G = O$  ou si  $G = SO^\pm$  ou  $Sp$  avec  $R \leq 1/2$ , alors

$$\sqrt{\mathfrak{m}} = \frac{1}{\nu} V^{-1} \left( 1 + (\delta + 2\varepsilon) \frac{1}{\nu} \right)$$

où  $V$  a été défini lors de l'introduction de ce mémoire (page xvi).

Preuve : Si  $G = O$ , alors  $\delta = 0$  et le lemme 5.3.7 donne immédiatement  $\mathfrak{h}_R = \varphi$ . De la même manière, si  $G = SO^+$ ,  $SO^-$  ou  $Sp$ ,  $R \leq 1/2$  et si  $0 < t < R$  alors  $t+1 \notin [-R, R]$  et  $t-1 \notin [-R, R]$ . Ainsi, dans cette situation, nous avons également  $\mathfrak{h}_R = \varphi$ . On peut résumer ces remarques sous la forme

$$\mathfrak{h}_R(u) = \varphi(u) = \frac{(\delta + 2\varepsilon) \int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(x) dx}{2 \cos \left( \frac{\pi \sqrt{\mathfrak{m}_R}}{2} \right)} \left[ \cos \frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R \pi} u}{2R} - \cos \frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R \pi}}{2} \right] \cdot \mathbb{1}_{[-R, R]}(u).$$

Par conséquent, nous avons

$$\int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(u) du \cdot \left[ 1 - (\delta + 2\varepsilon) R \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mathfrak{m}_R}} \tan \left( \frac{\pi \sqrt{\mathfrak{m}_R}}{2} \right) - 1 \right) \right] = 0.$$

Comme  $\int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(u) du \neq 0$  (autrement  $\mathfrak{h}_R = 0$ ), on en déduit

$$\frac{2}{\pi \sqrt{\mathfrak{m}_R}} \tan \left( \frac{\pi \sqrt{\mathfrak{m}_R}}{2} \right) = 1 + \frac{\delta + 2\varepsilon}{R}.$$

Le résultat découle alors immédiatement des lemmes 5.3.2 et 5.3.3. □

**Remarque 5.3.4** Nous utiliserons ce phénomène dans la section suivante afin de déterminer  $\mathfrak{h}_R$  en toute généralité.

Soient

$$S_n(t) = \sin\left(\frac{\pi nt}{2R}\right) \mathbb{1}_{[-R,R]}(t) \quad \text{et} \quad C_n(t) = \cos\left(\frac{\pi nt}{2R}\right) \mathbb{1}_{[-R,R]}(t).$$

**Lemme 5.3.8** On désigne par  $n$  un entier impair positif. Soit  $h$  une fonction continue paire de  $H_0^1$  avec  $c = (c_m) = \Psi(h)$ , alors

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} [mn\mu_{m,n} + \mathbf{m}_R \lambda_{m,n}] c_m \\ &= -\frac{2R}{n\pi} (n^2 - \mathbf{m}_R) (S_n * h)(1) + \frac{8R^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi^2} \mathbf{m}_R \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \left[1 - \cos \frac{m\pi}{2R}\right] c_m. \end{aligned}$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} [mn\mu_{m,n} + \mathbf{m}_R \lambda_{m,n}] c_m \\ &= -(n^2 - \mathbf{m}_R) \left( \frac{2R(2R-1)}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi n}{2R}\right) c_n + \frac{8R^2}{n\pi^2} \sum_{m \neq n} \frac{m(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{m^2 - n^2} \cos\left(\frac{\pi n}{2R}\right) c_m \right) \\ & - \frac{8R^2 \mathbf{m}_R}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{\pi n}{2R}\right) c_n - \mathbf{m}_R \sum_{m \geq 0} \frac{8R^2 (-1)^{\frac{m+n}{2}}}{nm\pi^2} c_m + \frac{8R^2}{\pi^2} \sum_{m \neq n} \frac{n(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{m(m^2 - n^2)} (m^2 - \mathbf{m}_R) \cos\left(\frac{\pi m}{2R}\right) c_m. \end{aligned}$$

On déduit de

$$\frac{n}{m(m^2 - n^2)} = \frac{1}{n} \left( \frac{m}{m^2 - n^2} - \frac{1}{m} \right),$$

que

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} [mn\mu_{m,n} + \mathbf{m}_R \lambda_{m,n}] c_m \\ &= -(n^2 - \mathbf{m}_R) \left( \frac{2R(2R-1)}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi n}{2R}\right) c_n + \frac{8R^2}{n\pi^2} \sum_{m \neq n}^* \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} m}{m^2 - n^2} \left[ \cos\left(\frac{\pi n}{2R}\right) - \cos\left(\frac{\pi m}{2R}\right) \right] c_m \right) \\ & \quad + \frac{8R^2 \mathbf{m}_R (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi^2} \sum_{m \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi m}{2R}\right)\right] c_m. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} (S_n * h)(1) &= \int_{1-R}^R h(u) \sin\left(\frac{\pi n}{2R}(1-u)\right) du \\ &= \sum_{m \geq 0}^* c_m \int_{1-R}^R \sin\left(\frac{\pi(m-n)u}{2R} + \frac{\pi n}{2R}\right) - \sin\left(\frac{\pi(m+n)u}{2R} - \frac{\pi n}{2R}\right) du \\ &= (2R-1) \sin\left(\frac{\pi n}{2R}\right) c_n + \frac{4R}{\pi} \sum_{m \neq n}^* \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} m}{m^2 - n^2} \left[ \cos\left(\frac{\pi n}{2R}\right) - \cos\left(\frac{\pi m}{2R}\right) \right] c_m. \end{aligned}$$

□

**Lemme 5.3.9** Soit  $\mathbf{c} = (c_n) = \Psi(\mathfrak{h}_R)$ . Alors, pour tout entier positif impair  $n$ , on a

$$c_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} k_{\delta,\varepsilon}}{n[n^2 - \mathfrak{m}_R]} - \frac{\delta}{n\pi} (S_n * \mathfrak{h}_R)(1) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} k_{\delta,\varepsilon}}{n[n^2 - \mathfrak{m}_R]} + \frac{2R\delta}{n^2\pi^2} (C_n * \mathfrak{h}'_R)(1).$$

Preuve : On munit  $\Omega_R$  de la norme

$$\|c\| = \sum_{n=0}^{+\infty} n|c_n| + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 c_n^2 \right)^{1/2}$$

et on considère les cinq fonctions différentiables  $H, T, S, A$  et  $G$  sur  $(\Omega_R, \|\cdot\|)$  définies par

$$\begin{aligned} H(c) &= \sum_{n \geq 0} n^2 c_n^2, & T(c) &= \sum_{n \geq 0} c_n^2, & S(c) &= \sum_{n \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} c_n, \\ A(c) &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} mn \mu_{m,n} c_m c_n \quad \text{et} & G(c) &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \lambda_{m,n} c_m c_n. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 5.3.6, on peut écrire

$$B = \frac{H - \frac{\delta}{2R} A}{T + \frac{\delta}{2R} G + \frac{16R\varepsilon}{\pi^2} S^2} \quad \text{si } R > \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad B = \frac{H}{T + (\delta + 2\varepsilon) \frac{8R}{\pi^2} S^2} \quad \text{si } R \leq \frac{1}{2}.$$

Comme  $B(\mathbf{c}) = \mathfrak{m}_R$ ,  $\mathbf{c}$  est un point critique. C'est pourquoi, si  $R > 1/2$ , on a  $dB|_{\mathbf{c}} = 0$  puis

$$\forall n \text{ impair}, \quad (n^2 - \mathfrak{m}_R)c_n = \frac{\delta}{2R} \sum_{m \geq 0} [mn \mu_{m,n} + \mathfrak{m}_R \lambda_{m,n}] c_m + \varepsilon \frac{16RS(\mathbf{c})\mathfrak{m}_R}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}.$$

Grâce au lemme 5.3.8, à "l'hypothèse  $Sp$ " et au corollaire 5.3.1, on déduit

$$c_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} k_{\delta,\varepsilon}}{n[n^2 - \mathfrak{m}_R]} - \frac{\delta}{n\pi} (S_n * \mathfrak{h}_R)(1) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} k_{\delta,\varepsilon}}{n[n^2 - \mathfrak{m}_R]} + \frac{2R\delta}{n^2\pi^2} (C_n * \mathfrak{h}'_R)(1) \quad (5.3.6)$$

où

$$\begin{aligned} k_{\delta,\varepsilon} &= \frac{4R\mathfrak{m}_R}{\pi^2} \left[ \delta \sum_{m \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2R}\right) c_m + 4\varepsilon \sum_{m \geq 1}^* \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} c_m \right] \\ &= \frac{2\mathfrak{m}_R}{\pi} \left[ \frac{\delta}{2} \int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(x) dx + \varepsilon \int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

De la même manière, la suite  $\mathbf{c}$  vérifie les relations (5.3.6) et (5.3.7) dans le cas  $R \leq 1/2$  étant donné que, si  $R \leq 1/2$ , on a  $(S_n * \mathfrak{h}_R)(1) = 0$  et  $\int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(x) dx = \int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(x) dx$ .

□

**Preuve du lemme 5.3.7** On suppose  $0 \leq u \leq R$ . Comme  $\mathfrak{h}_R(u) = 2 \sum_{n \geq 0} \mathfrak{c}_n \cos\left(\frac{\pi n u}{2R}\right)$ , le lemme 5.3.9 donne

$$\mathfrak{h}_R(u) = 2k_{\delta,\varepsilon} \sum_{n \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{\pi n u}{2R}\right)}{n(n^2 - \mathfrak{m}_R)} + \frac{4R\delta}{\pi^2} \sum_{n \geq 0}^* \frac{(C_n * \mathfrak{h}'_R)(1)}{n^2} \cos\left(\frac{\pi n u}{2R}\right).$$

Tout d'abord, en utilisant la relation (B.2), il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0}^* \frac{(C_n * \mathfrak{h}'_R)(1)}{n^2} \cos\left(\frac{\pi n u}{2R}\right) &= \frac{1}{2} \int_{-R}^R \left( \sum_{n \geq 0}^* \frac{\cos\left(\frac{\pi n(u+t)}{2R}\right)}{n^2} + \sum_{n \geq 0}^* \frac{\cos\left(\frac{\pi n(u-t)}{2R}\right)}{n^2} \right) \mathfrak{h}'_R(1-t) dt \\ &= \frac{\pi}{8} \int_{-R}^R \left( \pi - \frac{\pi|u+t|}{2R} - \frac{\pi|u-t|}{2R} \right) \mathfrak{h}'_R(1-t) dt \\ &= \frac{\pi^2}{8R} \int_u^R \mathfrak{h}_R(t+1) - \mathfrak{h}_R(t-1) dt. \end{aligned}$$

Puis, grâce à la relation (B.1), on calcule

$$2k_{\delta,\varepsilon} \sum_{n \geq 0}^* \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{\pi n u}{2R}\right)}{n(n^2 - \mathfrak{m}_R)} = \frac{\pi k_{\delta,\varepsilon}}{2\mathfrak{m}_R \cos\frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R}\pi}{2}} \left[ \cos\frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R}\pi u}{2R} - \cos\frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R}\pi}{2} \right] = \varphi(u).$$

### 5.3.5 Fonction test optimale

Dans cette section, on résout l'équation de Volterra avec décalages temporels apparaissant dans le lemme 5.3.7. Précisément, on prouve que, excepté pour un nombre au plus dénombrable de valeurs de  $R$ , cette équation de Volterra admet une et une seule solution appartenant à  $H_R$ . On donne une expression explicite de cette solution.

#### Une partition appropriée

Par souci de simplicité, étant donné que  $R$  est amené à tendre vers  $\nu$  (grâce au lemme 5.3.3), on peut supposer que  $2R$  n'est pas entier. De la même manière, comme  $n \geq 1$  est l'unique entier tel que  $n-1 < 2\nu \leq n$ , on peut supposer  $\frac{n-1}{2} < R < \frac{n}{2}$  et, en particulier,  $n = \lfloor 2R \rfloor + 1$ . On note  $D$  l'opérateur de dérivation et  $T, T^{-1}$  les opérateurs de décalage définis par

$$D[f] = f', \quad T[f](u) = f(u+1) \quad \text{et} \quad T^{-1}[f](u) = f(u-1).$$

On construit une partition de  $[-R, R]$  invariante par  $T[id], T^{-1}[id]$  et par symétrie. On définit

$$\begin{cases} a_{n-2i} = R - i & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-1}{2} \\ a_{n-2i-1} = \lfloor 2R \rfloor - R - i & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

et  $I_0 = ]-a_1, a_1[, I_k = ]a_k, a_{k+1}[$ ,  $I_{-k} = ]-a_{k+1}, -a_k[$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ . On a

$$[-R, R] = \bigcup_{k=-\lfloor 2R \rfloor}^{\lfloor 2R \rfloor} \bar{I}_k.$$

De plus, si  $|k| < n-2$  alors  $T^{\pm 1}(I_k) = I_{k \pm 2}$  et, si  $k \in \{n-2, n-1\}$  alors  $T(I_k) \cap \text{supp } \mathfrak{h}_R = \emptyset$ .

### Une équation différentielle avec décalages temporels

Par dérivation et intégration, on remarque que le fait que  $\mathfrak{h}_R$  vérifie l'équation de Volterra précédente est équivalent au fait que  $\mathfrak{h}_R$  vérifie l'équation différentielle avec décalages temporels suivante.

Pour tout  $u$  dans  $] -R, R[$ ,

$$\mathfrak{h}'_R(u) = \varphi'(u) - \frac{\delta}{2} [\mathfrak{h}_R(u+1) - \mathfrak{h}_R(u-1)]. \quad (5.3.8)$$

On pose

$$\lambda = \frac{\sqrt{\mathfrak{m}_R}\pi}{2R} \quad \text{et} \quad w = \frac{-\pi^2 k_{\delta, \varepsilon}}{4R\sqrt{\mathfrak{m}_R} \cos \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{m}_R}}{2}}.$$

On considère les suites de polynômes  $(T_n)$  et  $(U_n)$  définies par récurrence par

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 2X \\ U_{n+1} = 2XU_n - U_{n-1}. \end{cases}$$

Les polynômes  $T_n$  (respectivement  $U_n$ ) sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce (respectivement de deuxième espèce). Ils vérifient, pour tout réel  $\theta$  et tout entier  $n$  positif,

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad \text{et} \quad U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

Par conséquent, ils se factorisent sous la forme

$$T_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[ X - \cos \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right], \quad U_n(X) = \prod_{k=1}^n [X - \theta_n(k)] \quad \text{avec} \quad \theta_n(k) = \cos \left( \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

Lors de cette sous-section, on prouve la proposition suivante.

**Proposition 5.3.2** *Les fonctions paires  $h$  à support compact dans  $[-R, R]$ ,  $\mathcal{C}^1$  sur chaque  $I_k$  et vérifiant l'équation différentielle (5.3.8) sur  $\cup I_k$  sont celles qui s'écrivent sous la forme*

- Pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$h|_{I_{n-(2k+1)}}(u) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r_j(I_{n-1}) U_k(\theta_n(j)) \sin \left( \left[ u - \frac{n-2k-1}{2} \right] \theta_n(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-1}{2} \right] \right) + r_n^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ u - \frac{n-2k-1}{2} \right] + \theta_n^\lambda(k) \right).$$

- Pour  $0 \leq k \leq n-2$ ,

$$h|_{I_{n-2(k+1)}}(u) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r_j(I_{n-2}) U_k(\theta_{n-1}(j)) \sin \left( \left[ u - \frac{n-2(k+1)}{2} \right] \theta_{n-1}(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2(k+1)}{2} \right] \right) + r_{n-1}^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ u - \frac{n-2k-2}{2} \right] + \theta_{n-1}^\lambda(k) \right)$$

où  $r_j(I_{n-1})$  avec  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  et  $r_j(I_{n-2})$  avec  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  sont des réels arbitraires et où  $r_n^\lambda(k)$  et  $\theta_n^\lambda(k)$  désignent respectivement le module et l'argument du nombre complexe

$$\frac{iw}{\lambda + \delta \sin \lambda} \left[ \frac{U_k(\lambda)}{U_n(\lambda)} e^{-i(\lambda + \frac{\pi\delta}{2}) \frac{n+1}{2}} - e^{i(\lambda + \frac{\pi\delta}{2}) \frac{n-2k-1}{2}} + \frac{U_{n-k-1}(\lambda)}{U_n(\lambda)} e^{i(\lambda + \frac{\pi\delta}{2}) \frac{n+1}{2}} \right] e^{-i \frac{\pi\delta}{2} \frac{n-2k-1}{2}}.$$

Avant d'arriver à ce résultat, nous aurons besoin de quelques résultats intermédiaires.

**Transformation en équations différentielles linéaires** En utilisant le corollaire 5.3.2, on peut supposer  $\delta \neq 0$  (d'où  $\delta^2 = 1$ ) et  $n \geq 2$ . De plus, tout au long de cette partie, la fonction  $h$  désignera une fonction paire à support compact dans  $[-R, R]$ ,  $\mathcal{C}^1$  sur chaque  $I_k$  et vérifiant l'équation différentielle (5.3.8) sur  $\cup I_k$ .

On définit également par récurrence l'opérateur  $Q_k$  en posant

$$\begin{cases} Q_1 = I \\ Q_2 = D + \frac{\delta}{2}(T^{-1} - T) \\ Q_{k+1} = DQ_k + \frac{1}{4}Q_{k-1} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k (T^{-k} + (-1)^k T^k). \end{cases}$$

**Lemme 5.3.10** La fonction  $h$  vérifie les équations différentielles linéaires suivantes.

- Sur  $I_{n-1}$ , pour tout  $1 \leq k \leq n$ , la fonction  $h$  satisfait

$$\left(\frac{i}{2}\right)^k U_k \left(\frac{1}{i}D\right) [h] = Q_k[\varphi'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k T^{-k}[h].$$

- Sur  $I_{n-2}$ , pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ , la fonction  $h$  satisfait

$$\left(\frac{i}{2}\right)^k U_k \left(\frac{1}{i}D\right) [h] = Q_k[\varphi'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k T^{-k}[h].$$

- Sur  $I_0$ , pour tout  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , la fonction  $h$  satisfait

$$2 \left(\frac{i}{2}\right)^k T_k \left(\frac{1}{i}D\right) [h] = Q_k[\varphi'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \left(T^{-k}[h] + (-1)^k T^k[h]\right).$$

Preuve : On prouve la première relation par récurrence sur  $k = 1, \dots, n$ . Pour  $k = 1$ , l'équation différentielle (5.3.8) donne

$$\text{si } u \in I_{n-1}, \quad h'(u) = \varphi'(u) + \frac{\delta}{2}h(u-1). \quad (5.3.9)$$

Le résultat découle alors immédiatement des définitions de  $Q_1$  et  $U_1$ . Pour  $k = 2$ , on dérive la relation (5.3.9) et on applique l'équation différentielle (5.3.8).

Supposons le résultat valable pour  $k$  et  $k-1$  avec  $2 \leq k \leq n-1$ . En utilisant la relation de



réurrence définissant  $U_k$ , il vient

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} U_{k+1} \left(\frac{1}{i}D\right) [h] = \frac{2}{i} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} DU_k \left(\frac{1}{i}D\right) [h] - \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} U_{k-1} \left(\frac{1}{i}D\right) [h] \\
& = D \left( \left(\frac{i}{2}\right)^k U_k \left(\frac{1}{i}D\right) [h] \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} U_{k-1} \left(\frac{1}{i}D\right) [h] \\
& = DQ_k[\varphi'] + \frac{1}{4}Q_{k-1}[\varphi'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k T^{-k}[h'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1} T^{-(k-1)}[h] \\
& \quad \text{comme } k \leq n-1 \text{ on peut appliquer l'équation (5.3.8).} \\
& = DQ_k[\varphi'] + \frac{1}{4}Q_{k-1}[\varphi'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k T^{-k}[\varphi'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1} T^{-(k+1)}[h].
\end{aligned}$$

Comme  $u$  appartient à  $I_{n-1}$ , on a  $T^{k+1}[h](u) = 0$ . C'est pourquoi on peut écrire

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} U_{k+1} \left(\frac{1}{i}D\right) [h] = Q_{k+1}[\varphi'] + \left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1} T^{-(k+1)}[h] \quad \text{on } I_{n-1}.$$

On prouve les autres relations de la même manière. □

**Lemme 5.3.11** *Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[$  avec  $\text{supp } f \subset [-R, R]$ . Alors, pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a*

$$Q_k[f|_{I_{n-1}}] = \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\delta}{i}\right)^j U_{k-j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) T^{-j}[f|_{I_{n-1}}].$$

De la même manière, pour tout  $1 \leq k \leq n-1$  on a

$$Q_k[f|_{I_{n-2}}] = \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\delta}{i}\right)^j U_{k-j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) T^{-j}[f|_{I_{n-2}}].$$

Preuve : Par récurrence sur  $k = 1, \dots, n$ . Le résultat est une simple conséquence de la définition de  $Q_k$  si  $k = 1$  ou  $k = 2$ . On suppose le résultat établi pour  $k$  et  $k-1$  avec  $2 \leq k \leq n-1$ . Comme  $T^k[f|_{I_{n-1}}] = 0$ , on a

$$\begin{aligned}
Q_{k+1} &= DQ_k + \frac{1}{4}Q_{k-1} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k T^{-k} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^k \left( \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\delta}{i}\right)^j \frac{2D}{i} U_{k-j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) T^{-j} - \sum_{j=0}^{k-2} \left(\frac{\delta}{i}\right)^j U_{k-j-2} \left(\frac{1}{i}D\right) T^{-j} \right) + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k T^{-k} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{k-2} \left(\frac{\delta}{i}\right)^j \left[ \frac{2D}{i} U_{k-j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) - U_{k-j-2} \left(\frac{1}{i}D\right) \right] T^{-j} + \left(\frac{i}{2}\right)^k \left(\frac{\delta}{i}\right)^{k-1} U_1 \left(\frac{1}{i}D\right) T^{-(k-1)} \\
& \quad + \left(\frac{\delta}{2}\right)^k T^{-k} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k \left(\frac{\delta}{i}\right)^j U_{k-j} \left(\frac{1}{i}D\right) T^{-j}.
\end{aligned}$$

On prouve les autres relations de ce lemme en suivant le même principe.

□

En utilisant les lemmes 5.3.10 et 5.3.11, on prouve que  $h|_{I_{n-1}}$  et  $h|_{I_{n-2}}$  vérifient les équations différentielles linéaires à coefficients constants et avec second membre suivantes.

**Corollaire 5.3.3** *On a*

$$i^n U_n \left( \frac{1}{i} D \right) [h|_{I_{n-1}}] = \text{Im} \left[ i w \delta^n e^{i\lambda(u-n)} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^n U_n(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^{n+1} U_{n-1}(\lambda)}{\lambda + \delta \sin \lambda} \right]$$

et

$$i^{n-1} U_{n-1} \left( \frac{1}{i} D \right) [h|_{I_{n-2}}] = \text{Im} \left[ i w \delta^{n-1} e^{i\lambda(u-n+1)} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^{n-1} U_{n-1}(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^n U_{n-2}(\lambda)}{\lambda + \delta \sin \lambda} \right].$$

Preuve : On a  $T^{-n}[h|_{I_{n-1}}] = 0$  et  $T^{-(n-1)}[h|_{I_{n-2}}] = 0$ . Ainsi, grâce au lemme 5.3.10, on obtient

$$i^n U_n \left( \frac{1}{i} D \right) [h|_{I_{n-1}}] = 2^n Q_n[\varphi'|_{I_{n-1}}] \quad \text{et} \quad i^{n-1} U_{n-1} \left( \frac{1}{i} D \right) [h|_{I_{n-2}}] = 2^{n-1} Q_{n-1}[\varphi'|_{I_{n-2}}].$$

On pose  $e_\lambda(u) = w e^{i\lambda u}$ . On a  $\varphi'(u) = \text{Im} [e_\lambda(u)]$ . Comme  $D^2(e_\lambda) = (i\lambda)^2 e_\lambda$ , en utilisant le lemme 5.3.11, on écrit

$$Q_n(e_\lambda|_{I_{n-1}}) = \left( \frac{i}{2} \right)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\delta}{i} \right)^j U_{n-j-1}(\lambda) T^{-j}(e_\lambda|_{I_{n-1}})$$

et

$$Q_{n-1}(e_\lambda|_{I_{n-2}}) = \left( \frac{i}{2} \right)^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2} \left( \frac{\delta}{i} \right)^j U_{n-j-2}(\lambda) T^{-j}(e_\lambda|_{I_{n-2}}).$$

Étant donné que

$$\sum_{j=0}^{n-1} U_j(X) z^j = \frac{1 - z^n U_n(X) + z^{n+1} U_{n-1}(X)}{1 - 2zX + z^2}, \quad (5.3.10)$$

il vient

$$Q_n(e_\lambda|_{I_{n-1}}) = \frac{\delta^{n-1} i e^{-i\lambda}}{2^n} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^n U_n(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^{n+1} U_{n-1}(\lambda)}{\lambda \delta + \sin \lambda} e_\lambda(u - n + 1)$$

et

$$Q_{n-1}(e_\lambda|_{I_{n-2}}) = \frac{\delta^{n-2} i e^{-i\lambda}}{2^{n-1}} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^{n-1} U_{n-1}(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^n U_{n-2}(\lambda)}{\lambda \delta + \sin \lambda} e_\lambda(u - n + 2).$$

On conclut grâce à la relation  $Q_n(\varphi') = \text{Im}(Q_n(e_\lambda))$ .

□

**Lemme 5.3.12** *L'application  $R \mapsto \tilde{\mathfrak{m}}_R$  est strictement décroissante.*

Preuve : Supposons qu'il existe  $R_1 < R_2$  tels que  $\tilde{\mathbf{m}}_{R_1} = \tilde{\mathbf{m}}_{R_2}$ . Comme  $R \mapsto \tilde{\mathbf{m}}_R$  est une fonction décroissante, on peut supposer qu'il existe un entier  $n_0$  tel que

$$\frac{n_0 - 1}{2} < R_1 < R_2 < \frac{n_0}{2}.$$

On pose  $\lambda = \lambda_{R_1} = \lambda_{R_2} = 2\pi\sqrt{\tilde{\mathbf{m}}_{R_1}}$ . Il existe  $\mathfrak{h}_{R_1}$  dans  $H_{R_1}$  tel que  $\tilde{B}(\mathfrak{h}_{R_1}) = \tilde{m}_{R_1} = \tilde{m}_{R_2}$ . Grâce à l'équation de Volterra (5.3.4),  $\mathfrak{h}_{R_1}|_{I_{n_0-1}(R_2)}$  est lisse. En utilisant le corollaire 5.3.3, on obtient

$$i^{n_0} U_{n_0} \left( \frac{1}{i} D \right) [\mathfrak{h}_{R_1}|_{I_{n_0-1}(R_2)}](u) = \text{Im} \left[ iw_{R_2} \delta^{n_0} e^{i\lambda(u-n_0)} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^{n_0} U_{n_0}(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^{n_0+1} U_{n_0-1}(\lambda)}{\lambda + \delta \sin \lambda} \right].$$

Comme  $\text{supp } \mathfrak{h}_{R_1} \subset [-R_1, R_1]$ , on a  $\mathfrak{h}_{R_1}|_{I_{n_0-1}(R_2) \setminus I_{n_0-1}(R_1)} = 0$ . Ainsi, pour tout  $u$  dans  $I_{n_0-1}(R_2)$ , on a

$$\text{Im} \left[ iw_{R_2} \delta^n e^{i\lambda(u-n_0)} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^{n_0} U_{n_0}(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^{n_0+1} U_{n_0-1}(\lambda)}{\lambda + \delta \sin \lambda} \right] = 0.$$

Puis, sur  $I_{n_0-1}(R_2)$ ,  $\mathfrak{h}_{R_1}|_{I_{n_0-1}(R_2)}$  vérifie  $U_{n_0} \left( \frac{1}{i} D \right) [\mathfrak{h}_{R_1}|_{I_{n_0-1}(R_2)}](u) = 0$  et  $\mathfrak{h}_{R_1}(u) = 0$  sur  $I_{n_0-1}(R_2) \setminus I_{n_0-1}(R_1) \neq \emptyset$ . En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut en déduire  $\mathfrak{h}_{R_1}|_{I_{n_0-1}(R_2)} = 0$ . Ainsi,  $\text{supp } \mathfrak{h}_{R_1} \subset [-a_{n_0-1}(R_2), a_{n_0-1}(R_2)]$  et  $\tilde{\mathbf{m}}_{a_{n_0-1}(R_2)} = \tilde{\mathbf{m}}_{R_2}$  où l'on a posé  $a_{n_0-1}(R_2) = [2R_2] - R_2$ . Par conséquent, pour tout  $R$  tel que  $a_{n_0-1}(R_2) < R < R_2$ , on obtient  $\tilde{m}_R = \tilde{m}_{R_2}$ . Par récurrence, il existe  $r_k$  (avec  $r_1 = a_{n-1}(R_2)$ ) dans  $] \frac{n_0-k-1}{2}, \frac{n_0-k}{2} [$  tel que pour tout  $R$  appartenant à  $[r_k, R_2[$ , on ait  $\tilde{m}_R = \tilde{m}_{R_2}$ . Il vient que la fonction  $R \mapsto \tilde{m}_R$  est constante sur  $]r_{n_0-1}, 1/2[$ , ce qui contredit le corollaire 5.3.2. □

**Corollaire 5.3.4** *Excepté pour au plus  $n-1$  valeurs de  $R$  dans  $] \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2} [$ , on a  $U_n(\lambda)U_{n-1}(\lambda) \neq 0$ .*

Preuve : On a  $U_n(\lambda)U_{n-1}(\lambda) = 0$  seulement si  $\lambda$  est l'une des  $n-1$  racines positives de  $U_n U_{n-1}$ . Comme  $R \mapsto \lambda = 2\pi\sqrt{\tilde{m}_R}$  est strictement décroissante,  $U_n(\lambda)U_{n-1}(\lambda) \neq 0$  excepté pour au plus  $n-1$  valeurs de  $R$  dans  $] \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2} [$ . □

Étant donné que  $R$  va tendre vers  $\nu$ , on peut supposer  $U_n(\lambda)U_{n-1}(\lambda) \neq 0$ .

**Lemme 5.3.13** *Il existe  $2n-1$  nombres complexes  $z_1(I_{n-1}), \dots, z_n(I_{n-1})$  et  $z_1(I_{n-2}), \dots, z_{n-1}(I_{n-2})$  tels que*

$$h|_{I_{n-1}}(u) = \text{Im} \left[ \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) e^{iu\theta_n(j)} + z_n^\lambda(0) e^{i\lambda(u-\frac{n-1}{2})} \right]$$

$$\text{et } h|_{I_{n-2}}(u) = \text{Im} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} z_j(I_{n-2}) e^{iu\theta_{n-1}(j)} + z_{n-1}^\lambda(0) e^{i\lambda(u-\frac{n-2}{2})} \right]$$

où

$$z_n^\lambda(0) = r_n^\lambda(0) e^{i\theta_n^\lambda(0)} = \frac{iw}{(i\delta)^n U_n(\lambda)} e^{-i\lambda \frac{n+1}{2}} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^n U_n(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^{n+1} U_{n-1}(\lambda)}{\lambda + \delta \sin \lambda}.$$

Preuve : On résout les équations différentielles du corollaire 5.3.3. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$u \mapsto \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) e^{iu\theta_n(j)} \right].$$

Enfin, grâce au corollaire 5.3.4, il est facile de vérifier que  $u \mapsto \operatorname{Im} \left[ z_n^\lambda(0) e^{i\lambda(u - \frac{n-1}{2})} \right]$  est une solution particulière. On détermine de la même manière  $h|_{I_{n-2}}$ .

□

**Prolongement de la fonction test optimal** Le lemme 5.3.13 fournit une expression explicite de  $h$  seulement sur  $I_{n-2} \cup I_{n-1}$ . En utilisant l'équation différentielle avec décalages (5.3.8), on étend cette expression sur  $[-R, R]$ .

**Lemme 5.3.14** *En posant  $U_{-1} = 0$ , pour  $k = 0, \dots, n-1$ , on a*

$$h|_{I_{n-(2k+1)}} = \left(\frac{i}{\delta}\right)^k T^k U_k \left(\frac{1}{i}D\right) [h|_{I_{n-1}}] - \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^k \left(\frac{i}{\delta}\right)^{j-1} U_{j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) T^j [\varphi'].$$

De même, pour  $k = 0, \dots, n-2$ , on a

$$h|_{I_{n-2(k+1)}} = \left(\frac{i}{\delta}\right)^k T^k U_k \left(\frac{1}{i}D\right) [h|_{I_{n-2}}] - \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^k \left(\frac{i}{\delta}\right)^{j-1} U_{j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) T^j [\varphi'].$$

Preuve : On prouve la première relation par récurrence pour  $k = 0, \dots, n-1$ . Pour  $k = 0$ , il n'y a rien à prouver. Pour  $k = 1$ , le résultat découle de la relation (5.3.8). On suppose le résultat établi pour  $k-1$  et  $k$  avec  $1 \leq k \leq n-2$ . Grâce à la relation (5.3.8), il vient

$$h'|_{I_{n-(2k+1)}}(u+1) = \varphi'(u+1) + \frac{\delta}{2} (h|_{I_{n-(2k+3)}}(u) - h|_{I_{n-(2k-1)}}(u+2)).$$

Ainsi, on obtient

$$h|_{I_{n-(2k+3)}} = T^2 [h|_{I_{n-(2k-1)}}] + \frac{2}{\delta} (TD[h|_{I_{n-(2k+1)}}] - T[\varphi']).$$

Le résultat découle facilement de l'hypothèse de récurrence.

□

**Lemme 5.3.15** *Pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on a*

$$h|_{I_{n-(2k+1)}}(u) = \operatorname{Im} \left[ (i\delta)^k \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) U_k(\theta_n(j)) e^{i(u+k)\theta_n(j)} + z_n^\lambda(k) e^{i\lambda(u - \frac{n-2k-1}{2})} \right]$$

et pour  $0 \leq k \leq n-2$ ,

$$h|_{I_{n-2(k+1)}}(u) = \text{Im} \left[ (i\delta)^k \sum_{j=1}^{n-1} z_j(I_{n-2}) U_k(\theta_{n-1}(j)) e^{i(u+k)\theta_{n-1}(j)} + z_{n-1}^\lambda(k) e^{i\lambda(u-\frac{n-2k-2}{2})} \right]$$

où

$$\begin{aligned} z_n^\lambda(k) &= r_n^\lambda(k) e^{i\theta_n^\lambda(k)} \\ &= \frac{iw}{\lambda + \delta \sin \lambda} \left[ (i\delta)^{k-n} e^{-i\lambda\frac{n+1}{2}} \frac{U_k(\lambda)}{U_n(\lambda)} - e^{i\lambda\frac{n-2k-1}{2}} + (i\delta)^{k+1} e^{i\lambda\frac{n+1}{2}} \frac{U_{n-k-1}(\lambda)}{U_n(\lambda)} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Preuve : Grâce aux lemmes 5.3.13 et 5.3.14, on peut écrire

$$\begin{aligned} h|_{I_{n-(2k+1)}}(u) = \text{Im} \left[ \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) \left(\frac{i}{\delta}\right)^k U_k(\theta_n(j)) e^{i(u+k)\theta_n(j)} + z_n^\lambda(0) \left(\frac{i}{\delta}\right)^k U_k(\lambda) e^{i\lambda(u-\frac{n-2k-1}{2})} \right. \\ \left. - \frac{2w}{\delta} \sum_{j=0}^k \left(\frac{i}{\delta}\right)^{j-1} U_{j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) e^{i\lambda(u+j)} \right]. \end{aligned}$$

Avec la relation (5.3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2w}{\delta} \sum_{j=0}^k \left(\frac{i}{\delta}\right)^{j-1} U_{j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) e^{i\lambda(u+j)} &= 2w\delta e^{i\lambda(u+1)} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{i}{\delta}\right)^j U_j(\lambda) e^{i\lambda j} \\ &= iw e^{i\lambda u} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^k U_k(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^{k+1} U_{k-1}(\lambda)}{\lambda + \delta \sin \lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} z_n^\lambda(0) \left(\frac{i}{\delta}\right)^k U_k(\lambda) e^{i\lambda(u-\frac{n-2k-1}{2})} - \frac{2w}{\delta} \sum_{j=0}^k \left(\frac{i}{\delta}\right)^{j-1} U_{j-1} \left(\frac{1}{i}D\right) e^{i\lambda(u+j)} \\ = \frac{iw}{\lambda + \delta \sin \lambda} e^{i\lambda(u-\frac{n-2k-1}{2})} \left( (i\delta)^{k-n} e^{-i\lambda\frac{n+1}{2}} \frac{U_k(\lambda)}{U_n(\lambda)} + (i\delta)^{k+1} e^{i\lambda\frac{n+1}{2}} \frac{U_k(\lambda)U_{n-1}(\lambda)}{U_n(\lambda)} - e^{i\lambda\frac{n-2k-1}{2}} \right. \\ \left. - (i\delta)^{k+1} e^{i\lambda\frac{n+1}{2}} U_{k-1}(\lambda) \right). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la relation valable pour  $n \geq 2$  et  $1 \leq j \leq n-1$ ,

$$U_{n-1}U_j - U_nU_{j-1} = U_{n-1-j}. \quad (5.3.12)$$

□

**Conditions de parité** La fonction  $h$  étant supposée paire, on exploite cette condition afin de déterminer des restrictions sur les coefficients complexes  $z_j$ .

**Lemme 5.3.16** Soit  $h$  donnée par le lemme 5.3.15. Alors  $h$  est paire si et seulement si pour  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ,

$$\overline{z_j(I_{n-1})} - z_{n+1-j}(I_{n-1}) + (i\delta)^{n-1} U_{n-1}(\theta_n(j)) e^{i(n-1)\theta_n(j)} \left( z_j(I_{n-1}) - \overline{z_{n+1-j}(I_{n-1})} \right) = 0,$$

et pour  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,

$$\overline{z_j(I_{n-2})} - z_{n-j}(I_{n-2}) + (i\delta)^{n-2} U_{n-2}(\theta_{n-1}(j)) e^{i(n-2)\theta_{n-1}(j)} \left( z_j(I_{n-2}) - \overline{z_{n-j}(I_{n-2})} \right) = 0.$$

Preuve : Tout d'abord, en utilisant la relation (5.3.8), on prouve que  $h$  est paire si et seulement si  $h(u) = h(-u)$  pour tout  $u \in I_{n-2} \cup I_{n-1}$ . Ainsi, étant donné que  $\overline{z_n^\lambda(n-1)} = -z_n^\lambda(0)$ , si  $u \in I_{n-1}$ , on a

$$\begin{aligned} h|_{I_{n-1}}(u) &= h_{I_{-(n-1)}}(-u) \\ \iff \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) e^{iu\theta_n(j)} \right] &= \operatorname{Im} \left[ (i\delta)^{n-1} \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) U_{n-1}(\theta_n(j)) e^{i(n-1)\theta_n(j)} e^{-iu\theta_n(j)} \right] \end{aligned}$$

Comme  $\theta_n(n+1-k) = -\theta_n(k)$ , on obtient

$$\operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) e^{iu\theta_n(j)} \right] = \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left( z_j(I_{n-1}) - \overline{z_{n+1-j}(I_{n-1})} \right) e^{iu\theta_n(j)} \right]$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ (i\delta)^{n-1} \sum_{j=1}^n z_j(I_{n-1}) U_{n-1}(\theta_n(j)) e^{i(n-1)\theta_n(j)} e^{-iu\theta_n(j)} \right] \\ = -\operatorname{Im} \left[ (-i\delta)^{n-1} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left( \overline{z_j(I_{n-1})} - z_{n+1-j}(I_{n-1}) \right) U_{n-1}(\theta_n(j)) e^{-i(n-1)\theta_n(j)} e^{iu\theta_n(j)} \right]. \end{aligned}$$

C'est pourquoi, pour tout  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , il vient

$$\overline{z_j(I_{n-1})} - z_{n+1-j}(I_{n-1}) + (i\delta)^{n-1} U_{n-1}(\theta_n(j)) e^{i(n-1)\theta_n(j)} \left( z_j(I_{n-1}) - \overline{z_{n+1-j}(I_{n-1})} \right) = 0.$$

□

**Corollaire 5.3.5** Pour tout  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , il existe un nombre réel  $r_j(I_{n-1})$  (éventuellement négatif) tel que

$$\overline{z_j(I_{n-1})} - z_{n+1-j}(I_{n-1}) = r_j(I_{n-1}) e^{i \left[ \frac{n-1}{2} (\theta_n(j) + \frac{\pi\delta}{2}) + \frac{j\pi}{2} \right]}.$$

Pour tout  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , il existe un nombre réel  $r_j(I_{n-2})$  (éventuellement négatif) tel que

$$\overline{z_j(I_{n-2})} - z_{n-j}(I_{n-2}) = r_j(I_{n-2}) e^{i \left[ \frac{n-2}{2} (\theta_{n-1}(j) + \frac{\pi\delta}{2}) + \frac{j\pi}{2} \right]}.$$

Preuve : On a

$$U_{n-1}(\theta_n(j)) = U_{n-1}\left(\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right) = (-1)^{j+1}.$$

Ainsi, si  $\overline{z_j(I_{n-1})} - z_{n+1-j}(I_{n-1}) = r_j e^{i\theta_j}$ , le lemme précédent donne

$$r_j \left( e^{i\theta_j} + (i\delta)^{n-1} (-1)^{j-1} e^{i(n-1)\theta_j} e^{-i\theta_j} \right) = 0.$$

Puis  $r_j = 0$  ou  $e^{i\theta_j} = \pm e^{i\left[\frac{n-1}{2}(\theta_n(j) + \frac{\pi\delta}{2}) + \frac{j\pi}{2}\right]}$ .

□

**Preuve de la proposition 5.3.2** À partir du lemme 5.3.15, on a pour  $0 \leq k \leq n-1$

$$h|_{I_{n-(2k+1)}}(u) = \text{Im} \left[ (i\delta)^k \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left( z_j(I_{n-1}) - \overline{z_{n+1-j}(I_{n-1})} \right) U_k(\theta_n(j)) e^{i(u+k)\theta_n(j)} + z_n^\lambda(k) e^{i\lambda\left(u - \frac{n-2k-1}{2}\right)} \right].$$

Dès lors, le corollaire 5.3.5 fournit

$$h|_{I_{n-(2k+1)}}(u) = \text{Im} \left[ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r_j(I_{n-1}) U_k(\theta_n(j)) e^{i\left[\left(u - \frac{n-2k-1}{2}\right)\theta_n(j) - \frac{\pi}{2}\left(j + \delta \frac{n-2k-1}{2}\right)\right]} + r_n^\lambda(k) e^{i\left[\lambda\left(u - \frac{n-2k-1}{2}\right) + \theta_n^\lambda(k)\right]} \right].$$

On obtient  $h|_{I_{n-(2k+2)}}$  suivant le même raisonnement. Pour conclure, on vérifie qu'une telle fonction satisfait l'équation différentielle avec décalages temporels (5.3.8).

□

### Conditions de continuité

Comme  $\mathfrak{h}_R$  vérifie l'équation (5.3.8), nous disposons d'une expression explicite de  $\mathfrak{h}_R$  grâce à la proposition 5.3.2. Cependant, étant donné que  $\mathfrak{h}_R$  est une fonction continue, il apparaît des restrictions supplémentaires sur les coefficients  $r_j$  associés à l'expression explicite de  $\mathfrak{h}_R$ . Dans cette sous-section, nous prouvons que, excepté pour un nombre fini de valeurs de  $R$  dans  $\left] \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2} \right]$ , il existe une unique fonction continue vérifiant l'équation différentielle (5.3.8) et nous donnons les valeurs exactes des coefficients  $r_j$  correspondants.

**Lemme 5.3.17** *La fonction  $\mathfrak{h}_R$  est continue si et seulement si les coefficients  $r_j(I_{n-1})$  et  $r_j(I_{n-2})$  vérifient le système linéaire suivant. Pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,*

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r_j(I_{n-2}) U_k(\theta_{n-1}(j)) \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-2}{2} \right] \theta_{n-1}(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-2}{2} \right] \right) \\ & - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r_j(I_{n-1}) U_k(\theta_n(j)) \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-1}{2} \right] \theta_n(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-1}{2} \right] \right) \\ & = r_n^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ a_{n-1} - \frac{n-1}{2} \right] + \theta_n^\lambda(k) \right) - r_{n-1}^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ a_{n-1} - \frac{n-2}{2} \right] + \theta_{n-1}^\lambda(k) \right) \\ & = r_\lambda U_k(\lambda) \sin \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

où  $r_\lambda$  et  $\theta_\lambda$  désignent respectivement le module et l'argument du complexe

$$z_\lambda = \frac{-2iwe^{-i\lambda a_{n-1}}}{U_n(\lambda)U_{n-1}(\lambda)} \frac{1 - (i\delta e^{i\lambda})^n U_n(\lambda) + (i\delta e^{i\lambda})^{n+1} U_{n-1}(\lambda)}{-2i\delta e^{i\lambda}(\lambda + \delta \sin \lambda)} = \frac{-2iwe^{-i\lambda a_{n-1}}}{U_n(\lambda)U_{n-1}(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} (i\delta e^{i\lambda})^k U_k(\lambda).$$

Preuve : On utilise la continuité de  $\mathfrak{h}_R$  en chaque  $\inf I_j$  pour  $j = -(n-1) \dots n-1$ . Précisément,  $h_R$  est continue en  $a_{n-(2k+1)} > 0$  (ie  $a_{n-1}, a_{n-3} \dots$ ) donc

$$\text{pour } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \quad \lim_{u \rightarrow a_{n-(2k+1)}^-} \mathfrak{h}_R|_{I_{n-2(k+1)}}(u) = \lim_{u \rightarrow a_{n-(2k+1)}^+} \mathfrak{h}_R|_{I_{n-(2k+1)}}(u).$$

De plus,  $h_R$  est continue en  $a_{n-2(k+1)} < 0$  (ie  $a_{-n}, a_{-(n-2)}, \dots$ ) donc

$$\text{pour } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq k \leq n-1, \quad \lim_{u \rightarrow a_{n-2(k+1)}^-} \mathfrak{h}_R|_{I_{n-2(k+1)}}(u) = \lim_{u \rightarrow a_{n-2(k+1)}^+} \mathfrak{h}_R|_{I_{n-(2k+1)}}(u).$$

Ainsi, pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r_j(I_{n-2}) U_k(\theta_{n-1}(j)) \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-2}{2} \right] \theta_{n-1}(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-2}{2} \right] \right) \\ & - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r_j(I_{n-1}) U_k(\theta_n(j)) \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-1}{2} \right] \theta_n(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-1}{2} \right] \right) \\ & = r_n^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ a_{n-1} - \frac{n-1}{2} \right] + \theta_n^\lambda(k) \right) - r_{n-1}^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ a_{n-1} - \frac{n-2}{2} \right] + \theta_{n-1}^\lambda(k) \right). \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $\mathfrak{h}_R$  est continue en chaque  $\inf I_j$ , comme  $\mathfrak{h}_R$  est paire et  $-\inf I_j = \sup I_{-j}$ , on en déduit que  $\mathfrak{h}_R$  est continue. □

On considère la matrice à coefficients réels  $M_R$  associée à ce système linéaire et on note  $\det M_R$  le déterminant de  $M_R$ . Plus précisément, on a  $M_R = (m_{k,j})_{\substack{k=0, \dots, n-1 \\ j=1, \dots, n}}$  avec

$$\begin{cases} m_{k,j} = U_k(\theta_{n-1}(j)) \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-2}{2} \right] \theta_{n-1}(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-2}{2} \right] \right) & \text{si } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ m_{k,j+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = U_k(\theta_n(j)) \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-1}{2} \right] \theta_n(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-1}{2} \right] \right) & \text{si } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor. \end{cases}$$

Le système linéaire du lemme 5.3.17 se réécrit

$$M_R \cdot \begin{pmatrix} r_1(I_{n-2}) \\ \vdots \\ r_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(I_{n-2}) \\ -r_1(I_{n-1}) \\ \vdots \\ -r_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(I_{n-1}) \end{pmatrix} = r_\lambda \begin{pmatrix} U_0(\lambda) \sin(\theta_\lambda) \\ \vdots \\ U_k(\lambda) \sin(\theta_\lambda - k\delta\frac{\pi}{2}) \\ \vdots \\ U_{n-1}(\lambda) \sin(\theta_\lambda - (n-1)\delta\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$



**Lemme 5.3.18** *Excepté pour au plus un nombre fini de valeurs de  $R$  dans  $] \frac{n-1}{2}; \frac{n}{2} [$ , la matrice  $M_R$  est inversible.*

Preuve : On peut décomposer les polynômes de Tchebychev sous la forme

$$U_{2k}(X) = \sum_{j=0}^k a_{2k,j} X^{2j}, \quad U_{2k+1}(X) = \sum_{j=0}^k a_{2k+1,j} X^{2j+1} \quad \text{avec } a_{2k,k} = 2^{2k} \text{ et } a_{2k+1,k} = 2^{2k+1}. \quad (5.3.13)$$

On considère la matrice réelle  $N_R$  définie par  $N_R = (n_{k,j})$  où pour  $0 \leq k \leq n-1$

$$\begin{cases} n_{k,j} = \theta_{n-1}(j)^k \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-2}{2} \right] \theta_{n-1}(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-2}{2} \right] \right) & \text{si } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n_{k, j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \theta_n(j)^k \sin \left( \left[ a_{n-1} - \frac{n-1}{2} \right] \theta_n(j) - \frac{\pi}{2} \left[ j + \delta \frac{n-2k-1}{2} \right] \right) & \text{si } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor. \end{cases}$$

On considère les lignes de  $M_R$  et  $N_R$ . On pose

$$M_R = \begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_R = \begin{pmatrix} \tilde{L}_0 \\ \vdots \\ \tilde{L}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Grâce à la relation (5.3.13), pour  $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , on a

$$L_{2k} = \sum_{j=0}^k a_{2k,j} (-1)^{k-i} \tilde{L}_{2j}, \quad \text{et pour } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor, \quad L_{2k+1} = \sum_{j=0}^k a_{2k+1,j} (-1)^{k-i} \tilde{L}_{2j+1}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\det M_R = \left( \prod_{j=0}^{n-1} 2^k \right) \det N_R = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \det N_R.$$

De plus, on peut écrire  $N_R = (n_{k,j})$  avec

$$\begin{cases} n_{k,j} = \frac{1}{2i} \left( [i\delta\theta_{n-1}(j)]^k e^{i(R\theta_{n-1}(j)+\Phi_j)} - [-i\delta\theta_{n-1}(j)]^k e^{-i(R\theta_{n-1}(j)+\Phi_j)} \right) & \text{si } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n_{k, j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \frac{1}{2i} \left( [i\delta\theta_n(j)]^k e^{i(R\theta_n(j)+\tilde{\Phi}_j)} - [-i\delta\theta_n(j)]^k e^{-i(R\theta_n(j)+\tilde{\Phi}_j)} \right) & \text{si } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor. \end{cases}$$

En raison de la multilinéarité du déterminant, on a

$$\det N_R = \frac{(i\delta)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i)^n} \sum_{\epsilon = (\epsilon', \epsilon'')} V[\epsilon', \epsilon''] (-1)^{\sigma(\epsilon)} e^{i \left[ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \epsilon'(j)(R\theta_{n-1}(j)+\Phi_j) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \epsilon''(j)(R\theta_n(j)-\tilde{\Phi}) \right]}$$

où la somme porte sur les fonctions  $\epsilon : \{1, \dots, n\} \mapsto \{-1, +1\}$  pouvant se scinder en  $\epsilon = (\epsilon', \epsilon'')$  avec  $\epsilon(j) = \epsilon'(j)$  si  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  et  $\epsilon(j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \epsilon''(j)$  si  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ . Par ailleurs,  $\sigma(\epsilon) = |\{1 \leq j \leq n; \epsilon(j) = -1\}|$ . Enfin,  $V[\epsilon', \epsilon'']$  désigne le déterminant de la matrice de Vandermonde associée aux nombres réels  $(\epsilon'(1)\theta_{n-1}(1), \dots, \epsilon'(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)\theta_{n-1}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \epsilon''(1)\theta_n(1), \dots, \epsilon''(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)\theta_n(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor))$ . Comme  $V[\epsilon', \epsilon''] \neq 0$  pour tout  $\epsilon$ , on en déduit que  $R \mapsto \det N_R$  s'annule au plus un nombre fini de fois sur  $] \frac{n-1}{2}; \frac{n}{2} [$ . Le même résultat est valable pour  $R \mapsto \det M_R$  car  $\det M_R = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \det N_R$ .

□

**Corollaire 5.3.6** *Pour tout  $R$  dans  $]\frac{n-1}{2}; \frac{n}{2}[$  avec  $\det M_R \neq 0$ , il existe une unique fonction continue vérifiant l'équation différentielle avec décalages temporels (5.3.8). De plus*

– Pour  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,

$$r_j(I_{n-2}) = r_\lambda \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \sin\left(\theta_\lambda - k\delta\frac{\pi}{2}\right) \Delta_{k+1,j}. \quad (5.3.14)$$

– Pour  $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ,

$$r_j(I_{n-1}) = -r_\lambda \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \sin\left(\theta_\lambda - k\delta\frac{\pi}{2}\right) \Delta_{k+1,j+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}. \quad (5.3.15)$$

avec  $\Delta_{k,j} = \frac{(-1)^{k+j}}{\det M_R} M_{k,j}$  et où  $M_{k,j}$  désigne le mineur de  $M_R$  obtenu en retirant à  $M_R$  sa  $k$ -ième ligne et sa  $j$ -ième colonne.

### 5.3.6 Valeur exacte du minimum

Cette section contient la fin de la preuve du théorème D. On se souviendra que quelques cas ont déjà été résolus dans le corollaire 5.3.2.

Grâce à la section précédente, on dispose d'une expression totalement explicite de la fonction test  $\mathfrak{h}_R$  réalisant le minimum. Cependant, cette expression dépend du paramètre inconnu  $\lambda$  relié à  $\tilde{\mathfrak{m}}_R$  par la relation

$$\lambda^2 = 4\pi^2 \tilde{\mathfrak{m}}_R.$$

Afin de conclure, on résout l'équation  $\tilde{\mathfrak{m}}_R = \tilde{B}(\mathfrak{h}_R)$  où l'unique inconnue est  $\tilde{\mathfrak{m}}_R$ .

**Deux équations, une inconnue** Il sera plus pratique de déterminer  $\lambda$  au lieu de  $\tilde{\mathfrak{m}}_R$ . Grâce à (5.3.2), la relation  $\tilde{\mathfrak{m}}_R = \tilde{B}(\mathfrak{h}_R)$  peut être réécrite sous la forme

$$\lambda^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}'_R(u)^2 du - \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \mathfrak{h}'_R * \mathfrak{h}'_R(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u)^2 du + \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \mathfrak{h}_R * \mathfrak{h}_R(u) du + \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u) du\right)^2}. \quad (5.3.16)$$

De plus, la relation (5.3.5) se réécrit

$$\frac{w}{\lambda} \cos \lambda R + \frac{\delta}{2} \int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(x) dx + \varepsilon \int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(x) dx = 0. \quad (5.3.17)$$

Par conséquent, le paramètre  $\lambda$  satisfait deux équations.

**Lemme 5.3.19** *La relation (5.3.17) implique la relation (5.3.16).*

Preuve : L'équation différentielle avec décalage temporel donne

$$\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}'_R(u)^2 du - \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \mathfrak{h}'_R * \mathfrak{h}'_R(u) du = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}'_R(u) \left[ \mathfrak{h}'_R(u) + \frac{\delta}{2} \int_{u-1}^{u+1} \mathfrak{h}'_R(t) dt \right] du = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}'_R(u) \varphi'(u) du.$$

De son côté, l'équation de Volterra fournit

$$\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u)^2 du + \frac{\delta}{2} \int_{-1}^1 \mathfrak{h}_R * \mathfrak{h}_R(u) du = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u) \varphi(u) du + \frac{\delta}{2} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u) du \right) \left( \int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(u) du \right).$$

Enfin, à l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}'_R(u) \varphi'(u) du - \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u) \varphi(u) du = -w \lambda \cos \lambda R \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u).$$

Ainsi, l'équation (5.3.16) peut se mettre sous la forme

$$-\lambda^2 \left( \frac{w}{\lambda} \cos \lambda R + \frac{\delta}{2} \int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(x) dx + \varepsilon \int_{-R}^R \mathfrak{h}_R(x) dx \right) \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_R(u) = 0.$$

□

Ceci étant dit, on utilise la relation (5.3.17) pour déterminer  $\lambda$ .

**Fin de la preuve du théorème D** Dans cette sous-section, on finit de prouver le théorème D. Précisément, on montre la proposition suivante.

**Proposition 5.3.3** *Si  $G = SO^+$ ,  $SO^-$  ou  $Sp$  avec  $n \geq 2$ , alors  $\lambda_R := \lambda$  est la plus petite solution strictement positive de*

$$\frac{\delta}{\lambda} \cos \theta_\lambda - \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \sin \left( \theta_\lambda - k \delta \frac{\pi}{2} \right) \left[ \frac{\delta \alpha_R(k)}{2} - 1 + \varepsilon \beta_R(k) \right] + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \cos \left( \theta_\lambda - k \delta \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (5.3.18)$$

qui n'est pas une racine de  $U_n U_{n-1}$  et où  $\alpha_R(k)$  et  $\beta_R(k)$  sont définis par

$$\begin{aligned} \alpha_R(k) = & 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\sin \left[ \left( R - \frac{n}{2} \right) \theta_{n-1}(j) \right] \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( j + \delta \frac{n-2}{2} \right) \right]}{\theta_{n-1}(j)} \Delta_{k+1,j} \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{\sin \left[ \left( R - \frac{n-1}{2} \right) \theta_n(j) \right] \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( j + \delta \frac{n-1}{2} \right) \right]}{\theta_n(j)} \Delta_{k+1, j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_R(k) = & 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\sin \left[ \left( R - \frac{n}{2} \right) \theta_{n-1}(j) \right]}{\theta_{n-1}(j)} \Delta_{k+1,j} \sum_{l=0}^{n-2} U_l(\theta_{n-1}(j)) \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( j + \delta \frac{n-2l-2}{2} \right) \right] \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{\sin \left[ \left( R - \frac{n-1}{2} \right) \theta_n(j) \right]}{\theta_n(j)} \Delta_{k+1, j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{n-1} U_l(\theta_n(j)) \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( j + \delta \frac{n-2l-1}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Afin de prouver ce résultat, on aura besoin de quelques résultats intermédiaires. On peut écrire  $\mathfrak{h}_R$  en tant que somme de deux fonctions non-continues et paires. Soient  $\varphi_\lambda$  et  $\psi$  définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{a_{-n}, \dots, a_n\}$  par :

– Pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$\varphi_\lambda|_{I_{n-(2k+1)}}(u) = r_n^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ u - \frac{n-2k-1}{2} \right] + \theta_n^\lambda(k) \right).$$

– Pour  $0 \leq k \leq n-2$ ,

$$\varphi_\lambda|_{I_{n-2(k+1)}}(u) = r_{n-1}^\lambda(k) \sin \left( \lambda \left[ u - \frac{n-2k-2}{2} \right] + \theta_{n-1}^\lambda(k) \right).$$

–  $\text{supp } \varphi_\lambda \subset [-R, R]$ .

– Pour  $u \in \mathbb{R} \setminus \{a_{-n}, \dots, a_n\}$ , on pose

$$\psi(u) = \mathfrak{h}_R(u) - \varphi_\lambda(u).$$

Bien que  $\varphi_\lambda$  et  $\psi$  ne soient pas continues, elles sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur chacun des  $I_k$ . De plus, elles vérifient

$$\mathfrak{h}_R(u) = \psi(u) + \varphi_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \varphi_\lambda'' = -\lambda^2 \varphi_\lambda.$$

**Lemme 5.3.20** *On a*

$$\int_{R-1}^R \psi(u) du = r_\lambda \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \sin \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) \alpha_R(k)$$

et

$$\int_{-R}^R \psi(u) du = r_\lambda \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \sin \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) \beta_R(k).$$

Preuve : On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{R-1}^R \psi(u) du &= \int_{I_{n-1}} \psi|_{I_{n-1}}(u) du + \int_{I_{n-2}} \psi|_{I_{n-2}}(u) du \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r_j(I_{n-2}) \frac{\sin \left[ \left( R - \frac{n}{2} \right) \theta_{n-1}(j) \right]}{\theta_{n-1}(j)} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( j + \delta \frac{n-2}{2} \right) \right] \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} r_j(I_{n-1}) \frac{\sin \left[ \left( R - \frac{n-1}{2} \right) \theta_n(j) \right]}{\theta_n(j)} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( j + \delta \frac{n-1}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Le résultat découle immédiatement des relations (5.3.14) et (5.3.15) du corollaire 5.3.6. De même, comme

$$\int_{-R}^R \psi(u) du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{I_{n-2k-1}} \psi|_{I_{n-2k-1}}(u-k) du + \sum_{k=0}^{n-2} \int_{I_{n-2k-2}} \psi|_{I_{n-2k-2}}(u-k) du,$$

on obtient la seconde partie de ce lemme. □

**Lemme 5.3.21** Pour  $0 \leq k \leq n-2$ , on a

$$\lim_{u \rightarrow \sup I_{n-2k-2}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k-2}}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{n-2k-1}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k-1}}(u) = \lambda U_k(\lambda) \operatorname{Re} \left( (i\delta)^{-k} z_\lambda \right)$$

et pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \sup I_{n-2k-1}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k-1}}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{n-2k}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k}}(u) = \lambda U_{n-k-1}(\lambda) \operatorname{Re} \left( (i\delta)^{-(n-k-1)} z_\lambda \right)$$

où le nombre complexe  $z_\lambda$  est défini lors du lemme 5.3.17.

Preuve : Comme  $\mathfrak{h}_R$  vérifie l'équation différentielle (5.3.8), on déduit que  $\mathfrak{h}'_R$  est continue sur  $] -R, R[$ . Ainsi, pour  $0 \leq k \leq n-2$ , il vient

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \sup I_{n-2k-2}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k-2}}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{n-2k-1}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k-1}}(u) \\ &= \lambda \operatorname{Re} \left[ e^{i\lambda(a_{n-1} - \frac{n-2}{2})} z_{n-1}^\lambda(k) - e^{i\lambda(a_{n-1} - \frac{n-1}{2})} z_n^\lambda(k) \right] \end{aligned}$$

et, pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \sup I_{n-2k-1}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k-1}}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{n-2k}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-2k}}(u) = \lambda \operatorname{Re} \left[ e^{i\lambda(a_n - \frac{n-1}{2})} z_n^\lambda(k) - e^{i\lambda(a_n - \frac{n}{2})} z_{n-1}^\lambda(k-1) \right].$$

Le résultat annoncé provient alors aisément des relations (5.3.11) et (5.3.12). □

**Lemme 5.3.22** On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\lambda(u) du &= -\frac{2r_\lambda}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \cos \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) \\ \text{et } \int_{R-1}^R \varphi_\lambda(u) du &= -\frac{2w}{\delta\lambda} \cos \lambda R - \frac{2}{\lambda} r_\lambda \cos \theta_\lambda + 2\delta \operatorname{Re} \left[ iz_\lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-i\delta)^k U_k(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Preuve : On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\lambda(u) du &= -\frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi''_\lambda(u) du = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} [\varphi'_\lambda|_{I_k}]_{\inf I_k}^{\sup I_k} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left[ 2 \lim_{u \rightarrow \sup I_{n-1}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-1}}(u) + \sum_{k=-(n-1)}^{n-2} \lim_{u \rightarrow \sup I_k} \varphi'_\lambda|_{I_k}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{k+1}} \varphi'_\lambda|_{I_{k+1}}(u) \right] \end{aligned}$$

De  $z_n^\lambda(0) = (i\delta)^{-(n-1)} e^{-i\lambda(a_n - \frac{n-1}{2})} U_{n-1}(\lambda) z_\lambda$ , il vient

$$\lim_{u \rightarrow \sup I_{n-1}} \varphi'_\lambda|_{I_{n-1}}(u) = -\lambda \operatorname{Re} \left( z_\lambda (i\delta)^{-(n-1)} U_{n-1}(\lambda) \right)$$

et le lemme précédent donne

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\lambda}(u) du = \frac{-2}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \operatorname{Re} ((i\delta)^{-k} z_{\lambda}).$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} & \int_{R-1}^R \varphi_{\lambda}(u) du \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \left[ \lim_{u \rightarrow \sup I_{n-1}} \varphi' |_{I_{n-1}}(u) + \lim_{u \rightarrow \sup I_{n-2}} \varphi' |_{I_{n-2}}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{n-1}} \varphi' |_{I_{n-1}}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{n-2}} \varphi' |_{I_{n-2}}(u) \right]. \end{aligned}$$

Le lemme précédent donne

$$\lim_{u \rightarrow \sup I_{n-2}} \varphi' |_{I_{n-2}}(u) - \lim_{u \rightarrow \inf I_{n-1}} \varphi' |_{I_{n-1}}(u) = \lambda \operatorname{Re} (z_{\lambda}).$$

De plus, comme  $z_{n-1}^{\lambda}(0) = i\delta \frac{U_n(\lambda)}{U_{n-1}(\lambda)} e^{i\lambda/2} z_n^{\lambda}(0) - 2w\delta\lambda \operatorname{Re} (e^{i\lambda R})$ , on obtient

$$\lim_{u \rightarrow \inf I_{n-2}} \varphi' |_{I_{n-2}}(u) = -2w\delta\lambda \cos(\lambda R) - \lambda \operatorname{Re} [U_n(\lambda) z_{\lambda} (i\delta)^{-n}].$$

Ainsi, on peut écrire

$$\int_{R-1}^R \varphi_{\lambda}(u) du = -\frac{2w}{\delta\lambda} \cos \lambda R - \frac{2}{\lambda} r_{\lambda} \cos \theta_{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re} [z_{\lambda} (1 - (i\delta)^{-n} U_n(\lambda) + (i\delta)^{-(n+1)} U_{n-1}(\lambda))].$$

Le résultat se déduit de la relation (5.3.10). □

Pour conclure, comme  $\mathfrak{h}_R = \psi + \varphi_{\lambda}$ , on transforme facilement l'équation (5.3.17) au moyen des lemmes 5.3.20 et 5.3.22. La proposition 5.3.3 s'ensuit immédiatement étant donné que  $r_{\lambda} \neq 0$  (autrement  $\mathfrak{h}_R = 0$ ).

**Cas particulier** Dans cette sous-section, on suppose  $n = 2$  et on donne une version simplifiée de l'équation (5.3.18) par rapport à celle présentée dans la proposition 5.3.3.

**Corollaire 5.3.7** *Si  $G = SO^+$ ,  $SO^-$  ou  $Sp$  et  $\frac{1}{2} < R < 1$  alors  $\lambda_R$  est la plus petite racine strictement positive de*

$$\begin{aligned} & (\delta + 2\varepsilon) \frac{1 - 4\lambda^2}{\lambda} (\sin \lambda(1 - R) - 2\delta\lambda \cos \lambda R) \\ & - [(\delta + 2\varepsilon)(1 - R) - 1 + 4\varepsilon] [\cos \lambda(1 - R) - 2\delta\lambda \sin \lambda R - 2\lambda \tan \Theta_R (\sin \lambda(1 - R) - 2\delta\lambda \cos \lambda R)] = 0 \end{aligned}$$

qui n'est pas une racine de  $U_1 U_2$  et où

$$\Theta_R = \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right).$$

Preuve : La matrice  $M_R$  apparaissant dans le corollaire 5.3.6 se simplifie en

$$M_R = \begin{pmatrix} -1 & \sin \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - R \right) - \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) \right] \\ 0 & \sin \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - R \right) - \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \right] \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\det M_R = -\delta \cos \Theta_R \neq 0.$$

On obtient  $\Delta_{1,1} = -1$ ,  $\Delta_{1,2} = 0$ ,  $\Delta_{2,1} = -\delta \tan \Theta_R$  et  $\Delta_{2,2} = \frac{\delta}{\cos \Theta_R}$ . De plus, pour  $k \in \{1, 2\}$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_R(k) &= 2(R-1)\Delta_{k+1,1} - 2(\cos \Theta_R + \delta \sin \Theta_R) \Delta_{k+1,2}, \\ \beta_R(k) &= \alpha_R(k) + 2(\cos \Theta_R + \delta \sin \Theta_R) \Delta_{k+1,2}. \end{aligned}$$

C'est pourquoi

$$\begin{cases} \alpha_R(0) = \beta_R(0) = 2(1-R) \\ \alpha_R(1) = 2\delta(1-R) - 2(\delta + \tan \Theta_R) \\ \beta_R(1) = 2\delta(1-R) - 4(\delta + \tan \Theta_R) \end{cases}$$

Par conséquent, comme  $\delta\varepsilon = -\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\lambda} \cos \theta_\lambda - \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \sin \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) \left[ \frac{\delta \alpha_R(k)}{2} - 1 + \varepsilon \beta_R(k) \right] + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} U_k(\lambda) \cos \left( \theta_\lambda - k\delta \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\delta + 2\varepsilon}{\lambda} \cos \theta_\lambda - \left( \frac{\delta \alpha_R(0)}{2} + \varepsilon \beta_R(0) - 1 + 4\varepsilon \right) \sin \theta_\lambda + 2\lambda\delta \left( \frac{\delta \alpha_R(1)}{2} + \varepsilon \beta_R(1) - 1 \right) \cos \theta_\lambda \\ &= (\delta + 2\varepsilon) \frac{1 - 4\lambda^2}{\lambda} \cos \theta_\lambda - [(\delta + 2\varepsilon)(1-R) - 1 + 4\varepsilon] [\sin \theta_\lambda - 2\lambda \tan(\Theta_R) \cos \theta_\lambda]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} z_\lambda &= \frac{-2iwe^{-i\lambda(1-R)}}{U_1(\lambda)U_2(\lambda)} (1 + i\delta U_1(\lambda)e^{i\lambda}) \\ &= \frac{-2w}{U_1(\lambda)U_2(\lambda)} (\sin \lambda(1-R) - 2\delta \cos \lambda R + i[\cos \lambda(1-R) - 2\delta \sin \lambda R]). \end{aligned}$$

Le résultat annoncé découle facilement de ces relations. □

**Commentaires sur l'“hypothèse  $Sp$ ”** Dans le cas symplectique avec  $R > 1/2$ , notre preuve du théorème D est soumise à la validité de l'“hypothèse  $Sp$ ”. Néanmoins, on prouve que ce théorème est toujours vrai même si  $\mathfrak{m}_R^2$  est un entier positif impair. Ainsi, tout au long de ce paragraphe, on va supposer  $G = Sp$ ,  $R > 1/2$  et  $m_R = N^2$  où  $N$  désigne un entier impair.

**Lemme 5.3.23** La fonction  $\mathfrak{h}_R$  vérifie  $\int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(u)du = 0$  et, pour tout  $0 \leq u \leq R$ ,

$$\mathfrak{h}_R(u) = \varphi(u) + \frac{\delta}{2} \int_u^R \mathfrak{h}_R(t+1) - \mathfrak{h}_R(t-1)dt$$

avec

$$\varphi(u) = \left( \frac{-4}{N\pi} \int_0^R \left[ \mathfrak{h}'_R(t) - \frac{\delta}{2} (\mathfrak{h}_R(t+1) - \mathfrak{h}_R(t-1)) \right] \sin \left( \frac{\pi Nt}{2R} \right) dt \right) (\cos(\lambda u) - \cos(\lambda R)) \cdot \mathbb{1}_{[-R,R]}(u).$$

Preuve : Au cours du lemme 5.3.9, on a prouvé que pour tout entier positif impair  $n$ ,

$$(n^2 - \mathfrak{m}_R) \mathfrak{c}_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} k_{\delta,\varepsilon}}{n} - (n^2 - \mathfrak{m}_R) \frac{\delta}{n\pi} (S_n * \mathfrak{h}_R)(1).$$

Tout d'abord, lorsque  $n = N$ , on déduit  $k_{\delta,\varepsilon} = \int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(u) du = 0$ . Puis, pour tout  $n \neq N$ , on obtient

$$\mathfrak{c}_n = -\frac{\delta}{n\pi} (S_n * \mathfrak{h}_R)(1).$$

Comme  $\mathfrak{h}_R(u) = 2 \sum_{n \geq 0} \mathfrak{c}_n \cos \left( \frac{\pi n u}{2R} \right) \cdot \mathbb{1}_{[-R,R]}(u)$ , pour tout  $u$  dans  $[0, R]$ , on écrit

$$\mathfrak{h}_R(u) = 2 \left[ \mathfrak{c}_N + \frac{\delta}{N\pi} S_N * \mathfrak{h}_R(1) \right] \cos \left( \frac{\pi N u}{2R} \right) - \frac{2\delta}{\pi} \sum_{n \geq 0}^* \frac{S_n * \mathfrak{h}_R(1)}{n} \cos \left( \frac{\pi n u}{2R} \right).$$

La somme apparaissant dans le membre de droite de cette égalité a déjà été calculée dans la preuve du lemme 5.3.7 et on a

$$\mathfrak{c}_N + \frac{\delta}{N\pi} S_N * \mathfrak{h}_R(1) = \frac{-2}{N\pi} \int_0^R \left[ \mathfrak{h}'_R(t) - \frac{\delta}{2} (\mathfrak{h}_R(t+1) - \mathfrak{h}_R(t-1)) \right] \sin \left( \frac{\pi Nt}{2R} \right) dt.$$

□

Dès lors, en changeant  $w$  avec

$$w = \frac{4\lambda}{N\pi} \int_0^R \left[ \mathfrak{h}'_R(t) - \frac{\delta}{2} (\mathfrak{h}_R(t+1) - \mathfrak{h}_R(t-1)) \right] \sin \left( \frac{\pi Nt}{2R} \right) dt,$$

cette équation de Volterra avec décalages temporels a été résolue dans la section 5.3.5. On dispose alors d'une expression explicite de  $\mathfrak{h}_R$ . Plusieurs cas peuvent alors se produire maintenant. Premièrement, cette expression explicite de  $\mathfrak{h}_R$  ne satisfait pas l'équation de compatibilité  $\int_{R-1}^R \mathfrak{h}_R(u) du = 0$  et donc "l'hypothèse  $Sp$ " est vraie. Deuxièmement, la fonction  $\mathfrak{h}_R$  vérifie l'équation de comptabilité, alors étant donné que l'argument du complexe  $z_\lambda$  est indépendant de  $w$ ,  $\lambda$  est une solution de l'équation (5.3.18). Comme  $\mathfrak{m}_R$  est la plus petite valeur critique de  $B$ ,  $\lambda$  est toujours la plus petite racine de l'équation (5.3.18).





## Annexe A

# Fonctions et transformations de Bessel

On trouvera dans [Wat95] l'ensemble des preuves des propriétés énoncées ci-après.

**Fonctions de Bessel** Pour tout entier naturel  $\nu$ , la fonction de Bessel de première espèce  $J_\nu$  est définie sur  $\mathbb{C}$  par

$$J_\nu(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(\nu + n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}.$$

Celle-ci admet une représentation intégrale de la forme

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta \quad (\text{A.1})$$

et vérifie la relation différentielle suivante. Pour tout réel  $z$  strictement positif, on a

$$(z^\nu J_\nu(z))' = z^\nu J_{\nu-1}(z). \quad (\text{A.2})$$

Pour tout complexe  $\nu$ , la fonction de Bessel de seconde espèce  $K_\nu$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^\nu \exp\left(-\frac{y}{2}(t + t^{-1})\right) \frac{dt}{t}.$$

**Transformations de Bessel** Pour une fonction  $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ , on définit les transformations de Bessel par

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k) &= \int_0^{+\infty} J_k(x) \psi(x) \frac{dx}{x}, \\ \hat{\psi}(r) &= \frac{\pi}{\sinh(\pi r)} \int_0^{+\infty} \frac{J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x)}{2i} \psi(x) \frac{dx}{x}, \\ \check{\psi}(r) &= \frac{4}{\pi} \cosh(\pi r) \int_0^{+\infty} K_{2ir}(x) \psi(x) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

**Lemme A.1** ([Blo05], lemme 3.2) *Soit  $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  à support dans  $[X, 2X]$  et telle que les dérivées successives vérifient, pour tout entier  $j$  positif,  $\|\psi^{(j)}\|_\infty \ll_j X^{-j}$ , alors pour  $\Im r \leq 1$ , on a*

$$\hat{\psi}(r), \check{\psi}(r), \tilde{\psi}(r) \ll ((1 + |r|)(1 + X^{-1}))^{2\Im r + \varepsilon}. \quad (\text{A.3})$$

*De plus, pour  $0 \leq X \leq 1$  et si  $\psi$  est de la forme  $\psi(x) = e^{\pm iax} C(x)$  où  $a$  est une constante positive et où  $C$  est une fonction lisse à support dans  $[X, 2X]$  telle que  $\|C^{(j)}\|_\infty \ll_j X^{-j}$ , alors pour tous réels strictement positifs  $A$  et  $\varepsilon$ , on a*

$$\hat{\psi}(r), \check{\psi}(r) \ll_{A,\varepsilon} \min \left\{ \left( \frac{1}{aX} \right)^{1-\varepsilon}, \left( \frac{1+aX}{r} \right)^A \right\}, \text{ pour } r \geq 0, \quad (\text{A.4a})$$

$$\tilde{\psi}(r) \ll_{A,\varepsilon} \min \left\{ \left( \frac{1}{aX} \right)^{1-\varepsilon}, \left( \frac{1+aX}{r} \right)^A \right\}, \text{ pour } r \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.4b})$$

$$\text{et } \hat{\psi}(r), \check{\psi}(r), \tilde{\psi}(r) \ll_A \left( \frac{1+|r|}{X} \right)^{2\Im(r)+\varepsilon} \left( \frac{1+|r|}{aX} \right)^A, \text{ pour } \Im(r) \leq 1. \quad (\text{A.4c})$$





## Annexe B

# Formulaire

La relation suivante correspond à la relation 1.445.6 de [GR]. Si  $2m\pi \leq x \leq (2m+2)\pi$  et  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cos[\alpha((2m+1)\pi - x)]}{2\alpha \sin \alpha\pi}.$$

On en déduit les trois relations suivantes. Si  $0 \leq x \leq \pi$  et  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi \sin \alpha \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{4\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}.$$

Si  $-1 \leq x \leq 1$  et  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi \sin \frac{\alpha\pi x}{2}}{4\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}.$$

Si  $-1 \leq x \leq 1$  et  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)[(2n+1)^2 - \alpha^2]} = \frac{\pi}{4\alpha^2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}} \left[ \cos \frac{\alpha\pi x}{2} - \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Cette dernière égalité correspond à la relation 1.444.6 de [GR]. Pour  $-\pi \leq x \leq \pi$ , on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} - |x| \right). \quad (\text{B.2})$$



# Bibliographie

- [AL70] A. O. L. Atkin and J. Lehner. Hecke operators on  $\Gamma_0(m)$ . *Math. Ann.*, 185 :134–160, 1970.
- [And83] R. J. Anderson. Simple zeros of the Riemann zeta function. *J. Number Theory*, 17(2) :176–182, 1983.
- [Ban97] W. D. Banks. Twisted symmetric-square  $L$ -functions and the nonexistence of Siegel zeros on  $GL(3)$ . *Duke Math. J.*, 87(2) :343–353, 1997.
- [BCDT01] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, and R. Taylor. On the modularity of elliptic curves over  $\mathbf{Q}$  : wild 3-adic exercises. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4) :843–939 (electronic), 2001.
- [BCHB85] R. Balasubramanian, J. B. Conrey, and D. R. Heath-Brown. Asymptotic mean square of the product of the Riemann zeta-function and a Dirichlet polynomial. *J. Reine Angew. Math.*, 357 :161–181, 1985.
- [BCY11] H. M. Bui, B. Conrey, and M. P. Young. More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line. *Acta Arith.*, 150(1) :35–64, 2011.
- [BH08] V. Blomer and G. Harcos. Hybrid bounds for twisted  $L$ -functions. *J. Reine Angew. Math.*, 621 :53–79, 2008.
- [BH12] V. Blomer and G. Harcos. A hybrid asymptotic formula for the second moment of Rankin-Selberg  $L$ -functions. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 105(3) :473–505, 2012.
- [BHM07a] V. Blomer, G. Harcos, and P. Michel. Bounds for modular  $L$ -functions in the level aspect. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(5) :697–740, 2007.
- [BHM07b] V. Blomer, G. Harcos, and P. Michel. A Burgess-like subconvex bound for twisted  $L$ -functions. *Forum Math.*, 19(1) :61–105, 2007. Appendix 2 by Z. Mao.
- [BK08] B. C. Berndt and M. I. Knopp. *Hecke’s theory of modular forms and Dirichlet series*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.
- [BL13] H. Bohr and E. Landau. Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion. *Math. Ann.*, 74(1) :3–30, 1913.
- [Blo04] V. Blomer. Shifted convolution sums and subconvexity bounds for automorphic  $L$ -functions. *Int. Math. Res. Not.*, (73) :3905–3926, 2004.
- [Blo05] V. Blomer. Rankin-Selberg  $L$ -functions on the critical line. *Manuscripta Math.*, 117(2) :111–133, 2005.
- [Boo12] A. R. Booker. Simple zeros of degree 2  $L$ -functions. *ArXiv e-prints*, November 2012.



- [Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.
- [Bur63] D. A. Burgess. On character sums and  $L$ -series. II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 13 :524–536, 1963.
- [CF00] J. B. Conrey and D. W. Farmer. Mean values of  $L$ -functions and symmetry. *Internat. Math. Res. Notices*, (17) :883–908, 2000.
- [CFK<sup>+</sup>05] J. B. Conrey, D. W. Farmer, J. P. Keating, M. O. Rubinstein, and N. C. Snaith. Integral moments of  $L$ -functions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 91(1) :33–104, 2005.
- [CG85] J. B. Conrey and A. Ghosh. A simpler proof of Levinson’s theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 97(3) :385–395, 1985.
- [CG88] J. B. Conrey and A. Ghosh. Simple zeros of the Ramanujan  $\tau$ -Dirichlet series. *Invent. Math.*, 94(2) :403–419, 1988.
- [CG92] J. B. Conrey and A. Ghosh. Mean values of the Riemann zeta-function. III. In *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989)*, pages 35–59, Salerno, 1992. Univ. Salerno.
- [CIS11a] B. Conrey, H. Iwaniec, and K. Soundararajan. Asymptotic Large Sieve. *ArXiv e-prints*, May 2011.
- [CIS11b] B. Conrey, H. Iwaniec, and K. Soundararajan. Critical zeros of Dirichlet  $L$ -functions. *ArXiv e-prints*, May 2011.
- [CIS12] J. B. Conrey, H. Iwaniec, and K. Soundararajan. The sixth power moment of Dirichlet  $L$ -functions. *Geom. Funct. Anal.*, 22(5) :1257–1288, 2012.
- [CM04] J. Cogdell and P. Michel. On the complex moments of symmetric power  $L$ -functions at  $s = 1$ . *Int. Math. Res. Not.*, (31) :1561–1617, 2004.
- [Con83] B. Conrey. Zeros of derivatives of Riemann’s  $\xi$ -function on the critical line. *J. Number Theory*, 16(1) :49–74, 1983.
- [Con89] B. Conrey. More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line. *J. Reine Angew. Math.*, 399 :1–26, 1989.
- [CS07] J. B. Conrey and N. C. Snaith. Applications of the  $L$ -functions ratios conjectures. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 94(3) :594–646, 2007.
- [Del74] P. Deligne. La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43) :273–307, 1974.
- [DFI93] W. Duke, J. Friedlander, and H. Iwaniec. Bounds for automorphic  $L$ -functions. *Invent. Math.*, 112(1) :1–8, 1993.
- [DFI94] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec. Bounds for automorphic  $L$ -functions. II. *Invent. Math.*, 115(2) :219–239, 1994.
- [DFI01] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec. Bounds for automorphic  $L$ -functions. III. *Invent. Math.*, 143(2) :221–248, 2001.
- [DFI02] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec. The subconvexity problem for Artin  $L$ -functions. *Invent. Math.*, 149(3) :489–577, 2002.

- 
- [DI83] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec. Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. *Invent. Math.*, 70(2) :219–288, 1982/83.
- [Far93] D. W. Farmer. Long mollifiers of the Riemann zeta-function. *Mathematika*, 40(1) :71–87, 1993.
- [Far94] D. W. Farmer. Mean value of Dirichlet series associated with holomorphic cusp forms. *J. Number Theory*, 49(2) :209–245, 1994.
- [Fen12] S. Feng. Zeros of the Riemann zeta function on the critical line. *J. Number Theory*, 132(4) :511–542, 2012.
- [FI03] E. Fouvry and H. Iwaniec. Low-lying zeros of dihedral  $L$ -functions. *Duke Math. J.*, 116(2) :189–217, 2003.
- [Goo82] A. Good. The square mean of Dirichlet series associated with cusp forms. *Mathematika*, 29(2) :278–295 (1983), 1982.
- [GR] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Seventh edition. Translated from the Russian,.
- [Haf83] J. L. Hafner. Zeros on the critical line for Dirichlet series attached to certain cusp forms. *Math. Ann.*, 264(1) :21–37, 1983.
- [Haf87] J. L. Hafner. Zeros on the critical line for Maass wave form  $L$ -functions. *J. Reine Angew. Math.*, 377 :127–158, 1987.
- [Har03] G. Harcos. An additive problem in the Fourier coefficients of cusp forms. *Math. Ann.*, 326(2) :347–365, 2003.
- [HB79] D. R. Heath-Brown. Simple zeros of the Riemann zeta function on the critical line. *Bull. London Math. Soc.*, 11(1) :17–18, 1979.
- [HB80] D. R. Heath-Brown. Hybrid bounds for Dirichlet  $L$ -functions. II. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 31(122) :157–167, 1980.
- [Hil76] T. Hilano. On the distribution of zeros of Dirichlet’s  $L$ -function on the line  $\sigma = 1/2$ . *Proc. Japan Acad.*, 52(10) :537–540, 1976.
- [Hil78] T. Hilano. On the distribution of zeros of Dirichlet’s  $L$ -function on the line  $\sigma = 1/2$ . II. *Tokyo J. Math.*, 1(2) :285–304, 1978.
- [HL] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. The Approximate Functional Equation in the Theory of the Zeta-Function, with Applications to the Divisor-Problems of Dirichlet and Piltz. *Proc. London Math. Soc.*, S2-21(1) :39.
- [HL16] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. *Acta Math.*, 41(1) :119–196, 1916.
- [HL21] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. The zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line. *Math. Z.*, 10(3-4) :283–317, 1921.
- [HM06a] G. Harcos and P. Michel. The subconvexity problem for Rankin-Selberg  $L$ -functions and equidistribution of Heegner points. II. *Invent. Math.*, 163(3) :581–655, 2006.
- [HM06b] G. Harcos and P. Michel. The subconvexity problem for Rankin-Selberg  $L$ -functions and equidistribution of Heegner points. II. *Invent. Math.*, 163(3) :581–655, 2006.

- 
- [HR03a] C. P. Hughes and Z. Rudnick. Linear statistics of low-lying zeros of  $L$ -functions. *Q. J. Math.*, 54(3) :309–333, 2003.
- [HR03b] C. P. Hughes and Z. Rudnick. Mock-Gaussian behaviour for linear statistics of classical compact groups. *J. Phys. A*, 36(12) :2919–2932, 2003. Random matrix theory.
- [Hux05] M. N. Huxley. Exponential sums and the Riemann zeta function. V. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 90(1) :1–41, 2005.
- [HY10] C. P. Hughes and M. P. Young. The twisted fourth moment of the Riemann zeta function. *J. Reine Angew. Math.*, 641 :203–236, 2010.
- [IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [ILS00] H. Iwaniec, W. Luo, and P. Sarnak. Low lying zeros of families of  $L$ -functions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (91) :55–131 (2001), 2000.
- [Ing] A. E. Ingham. Mean-Value Theorems in the Theory of the Riemann Zeta-Function. *Proc. London Math. Soc.*, S2-27(1) :273.
- [IS00] H. Iwaniec and P. Sarnak. Perspectives on the analytic theory of  $L$ -functions. *Geom. Funct. Anal.*, (Special Volume, Part II) :705–741, 2000. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- [Ivi95] A. Ivić. On the fourth moment of the Riemann zeta-function. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 57(71) :101–110, 1995. Duro Kurepa memorial volume.
- [Iwa97] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [JM05] M. Jutila and Y. Motohashi. Uniform bound for Hecke  $L$ -functions. *Acta Math.*, 195 :61–115, 2005.
- [Jut97] M. Jutila. A variant of the circle method. In *Sieve methods, exponential sums, and their applications in number theory (Cardiff, 1995)*, volume 237 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 245–254. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [Kim03] H. H. Kim. Functoriality for the exterior square of  $GL_4$  and the symmetric fourth of  $GL_2$ . *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1) :139–183, 2003. With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak.
- [KMV00] E. Kowalski, P. Michel, and J. VanderKam. Mollification of the fourth moment of automorphic  $L$ -functions and arithmetic applications. *Invent. Math.*, 142(1) :95–151, 2000.
- [KMV02] E. Kowalski, P. Michel, and J. VanderKam. Rankin-Selberg  $L$ -functions in the level aspect. *Duke Math. J.*, 114(1) :123–191, 2002.
- [KO08] J. P. Keating and B. E. Odgers. Symmetry transitions in random matrix theory &  $L$ -functions. *Comm. Math. Phys.*, 281(2) :499–528, 2008.
- [KS99] N. M. Katz and P. Sarnak. *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, volume 45 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

- 
- [KS02a] H. H. Kim and F. Shahidi. Cuspidality of symmetric powers with applications. *Duke Math. J.*, 112(1) :177–197, 2002.
- [KS02b] H. H. Kim and F. Shahidi. Functorial products for  $GL_2 \times GL_3$  and the symmetric cube for  $GL_2$ . *Ann. of Math. (2)*, 155(3) :837–893, 2002. With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart.
- [Lev74] N. Levinson. More than one third of zeros of Riemann’s zeta-function are on  $\sigma = 1/2$ . *Advances in Math.*, 13 :383–436, 1974.
- [Mic02] P. Michel. Répartition des zéros des fonctions  $L$  et matrices aléatoires. *Astérisque*, (282) :Exp. No. 887, viii, 211–248, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.
- [Mic03] P. Michel. Familles de fonctions  $L$  de formes automorphes et applications. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 15(1) :275–307, 2003. Les XXIIèmes Journées Arithmétiques (Lille, 2001).
- [Mic04] P. Michel. The subconvexity problem for Rankin-Selberg  $L$ -functions and equidistribution of Heegner points. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :185–236, 2004.
- [Mic07] P. Michel. Analytic number theory and families of automorphic  $L$ -functions. In *Automorphic forms and applications*, volume 12 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 181–295. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Mil02] S. D. Miller. The highest lowest zero and other applications of positivity. *Duke Math. J.*, 112(1) :83–116, 2002.
- [Mil04] S. J. Miller. One- and two-level densities for rational families of elliptic curves : evidence for the underlying group symmetries. *Compos. Math.*, 140(4) :952–992, 2004.
- [MN13] M. B. Milinovich and N. Ng. Simple zeros of modular  $L$ -functions. *ArXiv e-prints*, June 2013.
- [Mon73] H. L. Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. In *Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972)*, pages 181–193. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.
- [Mor05] C. J. Moreno. *Advanced analytic number theory : L-functions*, volume 115 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [MV10] P. Michel and A. Venkatesh. The subconvexity problem for  $GL_2$ . *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (111) :171–271, 2010.
- [Oma00] S. Omar. Majoration du premier zéro de la fonction zêta de Dedekind. *Acta Arith.*, 95(1) :61–65, 2000.
- [Ran39] R. A. Rankin. Contributions to the theory of Ramanujan’s function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 35 :351–372, 1939.
- [Rez10] I. S. Rezvyakova. On the zeros of Hecke  $L$ -functions and of their linear combinations on the critical line. *Dokl. Akad. Nauk*, 431(6) :741–746, 2010.

- [Ric06] G. Ricotta. Real zeros and size of Rankin-Selberg  $L$ -functions in the level aspect. *Duke Math. J.*, 131(2) :291–350, 2006.
- [Roy01] E. Royer. Petits zéros de fonctions  $L$  de formes modulaires. *Acta Arith.*, 99(2) :147–172, 2001.
- [Roy06] E. Royer. Fonction  $\zeta$  et matrices aléatoires. In *Physics and number theory*, volume 10 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 165–224. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [RR10] G. Ricotta and E. Royer. Lower order terms for the one-level densities of symmetric power  $L$ -functions in the level aspect. *Acta Arith.*, 141(2) :153–170, 2010.
- [RR11] G. Ricotta and E. Royer. Statistics for low-lying zeros of symmetric power  $L$ -functions in the level aspect. *Forum Math.*, 23(5) :969–1028, 2011.
- [Sar01] P. Sarnak. Estimates for Rankin-Selberg  $L$ -functions and quantum unique ergodicity. *J. Funct. Anal.*, 184(2) :419–453, 2001.
- [Sel42] A. Selberg. On the zeros of Riemann’s zeta-function. *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I.*, 1942(10) :59, 1942.
- [Sel56] A. Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20 :47–87, 1956.
- [Ser77] J-P. Serre. *Cours d’arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.
- [Shi75] G. Shimura. On the holomorphy of certain Dirichlet series. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 31(1) :79–98, 1975.
- [Ste07] J. Steuding. *Value-distribution of  $L$ -functions*, volume 1877 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007.
- [Ten95] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, volume 1 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, second edition, 1995.
- [Tit86] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [Wat95] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.
- [Wil80] A. Wiles. Modular curves and the class group of  $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ . *Invent. Math.*, 58(1) :1–35, 1980.
- [You05] M. P. Young. Lower-order terms of the 1-level density of families of elliptic curves. *Int. Math. Res. Not.*, (10) :587–633, 2005.
- [You06] M. P. Young. Low-lying zeros of families of elliptic curves. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(1) :205–250, 2006.
- [You10] M. P. Young. A short proof of Levinson’s theorem. *Arch. Math. (Basel)*, 95(6) :539–548, 2010.

- [Zha05] Q. Zhang. Integral mean values of modular  $L$ -functions. *J. Number Theory*, 115(1) :100–122, 2005.
- [Zui02] C. Zui. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*. Cours et problèmes résolus. Dunod, 2002.