《自然科学史研究》 第 33 卷 第 1 期 (2014 年): 83—93
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 33 No. 1(2014)

李群理论创立中切触变换的作用

阎晨光[1,2] 邓明立[3]

(1. 河北科技大学理学院,石家庄 050018;2. 中国科学院自然科学史研究所,北京 100190;
3. 河北师范大学数学与信息科学学院,石家庄 050024)

摘 要 在普吕克尔几何思想影响下,李开始研究切触变换,并将其从微分方程的一种工具提升为一个独立发展的理论。在李群理论创立过程中,李的切触变换研究及理论居于中心位置。其一,李的初衷是解微分方程,这促使他将几何学与微分方程联系起来,研究切触变换及其理论;其二,借助无穷小变换与切触变换的关系,李形成变换群的概念,并将其理论应用于解微分方程,将问题由对微分方程的分类导向对变换群的分类。李关于切触变换的研究不仅体现了李群起源的几何学特色,更体现了几何学在 19 世纪数学整体发展中所起到的作用。

关键词 李群 切触变换 微分方程
中图分类号 N091:O11
文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2014)01-0083-11

纵观 19、20 世纪的数学发展,对数学整体影响最广泛最深刻的就是群论。著名数学家外尔(H. Weyl,1885 ~ 1955)曾说:“没有群就不可能理解近代数学。”([1],534 页)李群(*Lie group*)是一种有着深刻意义、在数学及物理学上有着重要应用的群,尤其是李群的表示理论,在分析学、微分几何、拓扑学以及物理学的量子力学中都有广泛而重要的应用。关于李群思想演变的研究也一直是科学史相关领域的热点之一。

李群肇始于挪威数学家李(M. S. Lie,1842 ~ 1899),他的最初动机是把伽罗瓦(E. Galois,1811 ~ 1832)的代数方程可解性理论拓展到微分方程上来。受普吕克尔(J. Plücker,1801 ~ 1868)几何思想的影响,李逐渐产生了切触变换(*contact transformation*)的思想,在 1874 年创立了切触变换的不变量理论[2],并建立了一阶偏微分方程的积分理论[3,4]。随后,李陆续发表多篇文章[5—10],逐步建立起系统的变换群理论。在恩格尔(F. Engel,1861 ~ 1941)帮助下,1888 年到 1893 年李出版了三大卷《变换群理论》[11—13],开创

收稿日期: 2012-10-08; **修回日期**: 2014-03-06
作者简介: 阎晨光,1977 年生,河北邢台人,河北科技大学理学院讲师,中国科学院自然科学史研究所博士后,主要从事李群李代数及近现代数学史研究;邓明立,1962 年生,河北辛集人,教授,主要从事代数学及近现代数学史研究。
基金项目: 国家自然科学基金(项目编号:11271108);中国博士后科学基金(项目编号:2012M510608);河北省高等学校科学技术研究项目(项目编号:QN20131002)

了连续变换群的新领域，其给出的三大定理至今仍被视为李群理论的基础。可以看到，切触变换在李群理论早期起着重要作用。

切触变换源于几何及分析学，与微分几何及微分方程关系密切。现代数学将切触变换纳入更为抽象的流形理论产生了切触流形（*contact manifold*），与微分几何、微分拓扑、微分流形等若干现代数学领域都有密切关系。切触流形中最重要的拓扑学问题是考虑什么样的流形能够容许某切触结构，继而对该流形上的切触结构进行分类[14]。

一些研究文献探讨了切触变换与李群的关系，如美国数学史家霍金斯（T. Hawkins，1938～）主要论述了李的切触变换不变量研究[15]，布尔巴基在讨论李群历史时也述及切触变换[16]。一些研究仅指出切触变换肇始于李，并未涉及李创立切触变换的原因和过程[17]。

其实李的早期成果——切触变换和李球几何（*Lie sphere geometry*）体现了当时几何学研究的主要特色，并最终导向了变换群理论，这段历史是李群理论研究中不可缺失也不应该被忽视的环节，本文意在为李创立的切触变换给出清晰的思路，明确其在李群起源中的作用，更好地理解李的原创思想与现代李群理论的差别，这也是本文的最终目的。

1 李关于切触变换的研究

1.1 李研究切触变换的缘由

受到普吕克尔几何思想的影响，李接受了将直线看作空间基本元素的做法，并将线几何看作是对几何学，尤其是笛卡尔（R. Descartes，1596～1650）创立的解析几何学局限性的哲学思考。李在1872年的博士论文前言中写到：

> 本世纪几何学的快速发展与笛卡尔几何性质的哲学观点有着紧密联系，并严重依赖于此，也就是普吕克尔在早期的数学研究中所阐述的具有最一般形式的哲学观点。
>
> 那些深刻地理解了普吕克尔数学工作本质的人，对将任意的三参数曲线当作空间基本元素的想法，不会感到陌生。但据我所知，没有人将这种想法付诸实施，原因有可能是人们很难看到这样做能带来的直接好处。
>
> 在这方面我已经进行了广泛而一般的研究，从而发现通过一种比较奇妙的变换方式①，可以将通常的主切线理论转变成为相应的曲率理论。（［18］，156～157页）

深刻地理解了普吕克尔的几何思想，李构造出和普吕克尔的线几何类似的球几何，即李球几何。在这种情况下，新构造的几何系统与原有几何系统的关系就至关重要。李试图去证明这些几何系统都是相容的，甚至在某种意义下是等价的。这就需要在射影意义（乃至更广泛的意义）下空间元素之间的“等价”变换，其实就是广义的“对偶原理”。于是，李开始研究各种空间元素之间的变换，如点和直线的变换〔彭赛莱（J-V. Poncelet，1788～1867）等研究过的对偶变换〕、线球变换等，这方面的研究直接导致李创立了一般意义上的切触变换。

① 指线球变换。

另一方面，早在 1872 年李就将几何变换与微分方程紧密地联系在一起。数学中经常用坐标变换来化简微分方程，用来证明一类微分方程等价于某一标准形式或典范形式。在此过程中，切触变换是主要的实现方法。

在李群理论发展初期（1870 ~ 1880），李的研究主要集中在切触变换和一阶偏微分方程。他在 1874 年创立了切触变换的不变量理论，逐渐建立起了系统的变换群理论，并于 1888 年到 1893 年出版了三大卷两千余页的《变换群理论》。这三卷本《变换群理论》常被列为该领域主要原始文献和参考书目。但在这三卷巨著中，我们很难发现李创立李群理论的主要动机，也无法领略到李的几何思想。对此李的好友、德国数学家克莱因（C. F. Klein，1849 ~ 1925）在 1893 年的演讲中有着精辟论述，他说："要全面了解索福斯·李的数学天赋，我们不能去看他和恩格尔新近共同出版的著作，而是要去看他在科学研究生涯初期发表的文章，那些显示出李是一个纯粹的几何学家。"[19] 其中"新近出版的著作"指的便是李和恩格尔在 1888 年到 1893 年间出版的三大卷《变换群理论》。

李也曾在 *Math. Ann.* 杂志发表文章说：

> 我在偏微分方程和切触变换方面的数学研究，可参见发表在本杂志第九卷的文章，这是我最好的文章之一。其次可以参考我在本杂志第八卷上的文章，接下来是本篇文章①。（[4]，464 页）

对此笔者认为，要详细了解某一理论的诞生过程，就必须探寻能体现该领域最初思想和方法的早期论文，而不应仅局限于后期系统专著。因此，本文对李在切触变换方面的研究主要集中于他 19 世纪 70 年代发表的几篇文章，即参考文献[2]、[3]、[4]。

1.2　对切触变换的定义

文献[2]中，李对切触变换给出若干定义，有的用文字描述方式给出，不甚严谨。如其中一个定义为：

> 定义 1. 对于 n 个独立自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 z，z 关于自变量的偏导数为 $p_1, \cdots, p_n$，同样可以得到另一个系统 $z', x_1', \cdots, x_n', p_1', \cdots, p_n'$，则从 $z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$ 和 $z', x_1', \cdots, x_n', p_1', \cdots, p_n'$ 中的一个变为另一个的变换就称作切触变换。（[2]，220 页）

李认为这个定义"不太清楚"，随即给出了严谨而"能体现切触变换本质"的定义：

> 定义 2. 若 $Z, X_1, \cdots, X_n, P_1, \cdots, P_n$ 为 $z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$ 的函数，恒有
>
> $$dZ - \sum_{k=1}^{n} P_k dX_k = \rho\left(dz - \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k\right)$$
>
> 则方程 $z' = Z, x_i' = X_i, p_i' = P_i$ 所定义的变换就称作切触变换。（[2]，220 页）

相比较而言，定义 2 比定义 1 更明确，也更好地体现了"切触"二字的几何意义。

法国数学家古尔萨（E-J-B. Goursat，1858 ~ 1936）在著名的微积分教材中对切触变换也有过不同的描述，他给出的定义如下：

> 如果将变换 $X = f(x, y, y')$，$Y = \phi(x, y, y')$ 应用于在点 (x, y) 处相切的两条曲线 c 和 c'，则所得到曲线 C 和 C' 也有一个公共点 (X, Y)，但并不一定在此点处相切。曲

① 这里的三篇文章按顺序分别对应本文参考文献的[3]、[2]、[4]。

线 C 和 C' 在公共点(X,Y)处也相切的充要条件是变换 $X=f(x,y,y')$,$Y=\phi(x,y,y')$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y'}y'\right)=\frac{\partial \phi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)$。满足以上条件的变换就称作切触变换。[20]

对比李和古尔萨关于切触变换的定义,我们发现:

(1)很明显古尔萨的定义局限于曲线和二元函数范围,李的定义更为广泛和一般,并不仅限于二元函数。

(2)古尔萨根据"曲线相切"的先验条件定义了切触变换,并将其理解为保持曲线间的相切关系不变的变换。李则从微分方程出发,根据雅可比(C. G. J. Jacobi,1804~1851)的理论,在微分方程不变性限制下得出了充要条件,由李的条件可以推出古尔萨的条件。

(3)造成以上不同的原因是多方面的,与数学家的知识背景、研究方法都不无关系。古尔萨是法国分析学派的典型代表,他从纯粹分析角度来定义切触变换,其观点仍然是处理与变量密切相关的函数及其关系等问题,属典型的分析学派。而正如克莱因所言,李是几何学家,受到普吕克尔几何思想的影响,他不再拘泥于坐标间关系的限制,并将普吕克尔的线几何推广为李球几何。李定义的切触变换使一般的平面几何、普吕克尔的线几何和李球几何具有了切触变换意义下的等价性和相容性。

1.3 李对切触变换的研究

在文献[2]的第一部分中,李专门研究了切触变换([2],218~248页)。这一部分共八节,前六节分别为:

§1. 切触变换的定义

§2. 任意的切触变换的确定

§3. 将 $x_1,\cdots,x_n,p_1,\cdots,p_n$ 的函数变换成 $x_1',\cdots,x_n',p_1',\cdots,p_n'$ 的函数的切触变换

§4. 特征的某种关系的确定

§5. 齐次切触变换

§6. 无穷小的齐次切触变换

以上这些均以切触变换本身为研究对象,其中很大一部分都是特殊的切触变换,如齐次切触变换、无穷小齐次切触变换等。

将李关于切触变换的工作与前人比较,我们发现:

(1)李所创立的切触变换与前人的定义保持了某些统一性。

从历史上看,勒让德(A. M. Legendre,1752~1833)引入勒让德变换将欧拉—拉格朗日方程化为线性方程,普法夫(J. F. Pfaff,1765~1825)则将 n 变元的偏微分方程变换为 $2n$ 变元的方程。雅可比也得到了与普法夫类似的结果,并创立了雅可比第一方法。从勒让德、普法夫、雅可比给出的变换到李所给出的定义,变换形式越来越一般,而应用范围却越来越广。更重要的是李将前人关于切触变换的零星的特殊研究统一起来,使进一步的研究及统一结论成为可能。

(2)在研究目的、定义方式、研究方法等方面,李的切触变换与前人有着明显不同。

在李的研究出现之前,切触变换只是被当作一种应用工具,很少有数学家去关注其自

身性质，而只是在某种实际问题的特殊要求（为了使微分方程更好求解，或为了使微分方程具有某种一致的对称性等）下，寻找某种特殊变换；即使所得到的变换具有某种一般性，但既没有出现统一定义，也没有体现出统一性质。李对切触变换的研究则与前人迥然不同，体现在以下方面。

首先是研究目的不同。李最初研究切触变换的目的也是寻求偏微分方程的某种不变性，但在给出切触变换的定义后，李转而研究其自身性质，其目的是变换自身的某种不变性，而不仅是其他数学对象在切触变换之下的不变性。这种转变是最本质、最具决定性的。

其次是定义方式不同。李之前的各种切触变换定义带有明显的应用特征，李不仅真正给出切触变换严格的现代定义，还给出了切触变换的充要条件。其定义更基本、更一般，涵盖范围也更广泛。

第三是研究方法不同。李依据将特定偏微分方程化为全微分方程的条件，确定能够实现这种转化的切触变换，分析该切触变换满足的充要条件，并由此开创了一整套研究方法。

1.4　李群理论的诞生背景

一般认为，真正将李引导到连续变换群的是他 1869 ~ 1872 年的工作以及和克莱因的一些合作[21]。现有研究文献，或以人物及其工作为研究主线，如［15］，或从不同数学分支分述，如［16］，或两者并重，如［22］，但少有文献注意到切触变换基础上无穷小变换与微分方程的关系。其实切触变换和无穷小变换与微分方程都有密切联系，在李的变换群理论创立中起着举足轻重的作用。

早在 1871 年克莱因和李就开始研究无穷小变换及其形成的“封闭系统”（［23］，54 页），并首次将无穷小变换与微分方程联系起来。对于齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$，引入变换 $\frac{y}{x}=t$，则方程变为可分离变量方程，并可通过积分求解。克莱因和李对于方程的这种性质非常着迷，认为容许一个变换才是该方程化为可分离变量方程的真正原因。他们写到：

我们想要探寻方程具有这种性质的真正的内在原因。（［23］，81 页）

1876 年李连续发表了两篇文章“变换群理论”（I，II）[6,7]，给出了无穷小变换的具体表示，并得到了微分算子 $A_k(f)=\sum_{i=1}^{n}X_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 及微分算子的关系式：$[A_h,A_k]=\sum_l c_{lhk}A_l$。后来他直接将微分算子 $A_k(f)$ 称作无穷小变换 $dx_i=X_{ki}dt\,(1\leqslant i\leqslant n)$ 的“象征”。（［7］，165 页）不久便将微分算子 $A_k(f)$ 本身称作“无穷小变换”（［24］，588 ~ 589 页）。

另外，切触变换理论和无穷小变换通过微分方程发生了联系，进一步促使李产生了变换群的思想。1876 年李证明每一个 r-参数群包含了 r 个相互独立的无穷小变换，并用如下的记号来表示一个无穷小变换：

> 如果一个变换可以写为 $x'_i=x_i+\delta tX(x_1,\cdots,x_n)$，其中 δt 为一个无穷小量，则将该变换称为无穷小变换。我们经常将上方程写为 $\delta x_i=\delta tX_i(x_1,\cdots,x_n)$。（［7］，155 ~ 156 页）

如果有$\frac{\delta}{\delta t}(dy-pdx)=\varphi(x,y,p)(dy-pdx)$，则无穷小变换$\delta x=\zeta(x,y,p)\delta t$，$\delta y=\eta\delta t$，$\delta p=\pi\delta t$为平面内的切触变换。由此，在李的理论中无穷小变换与切触变换通过微分方程联系在了一起。

2 李创立的变换群理论

1872年10月克莱因发表了爱尔兰根纲领(*Erlanger Programm*)，主要讨论了几何图形在变换群之下的不变性质，不仅一举解决了当时若尔当(C. Jordan，1838～1922)考虑的问题，还将其结果纳入自己的研究纲领，开创了用群论研究几何的新时期。李的变换群理论也正肇始于此时期。本部分以切触变换为中心，从变换群概念的诞生方面进行论述。

2.1 “群”的观念

其实李早就有了群的观念，只是在早期研究中没有给出“变换群”的定义，也没有对“群(Gruppe)”加以定义和说明①，而仅是研究了满足某些带有“群”的特征的集合。

1870年李首次使用了“群”这个术语，但并没有事先定义“群”的概念。这里的“群”和现代意义上的“群”相去甚远，仅指对应某一线丛的几何图形的全体，大多数情况下仅具有“集合”的意义[25]。

在1871年的论文中[23]，李和克莱因用“封闭系统”来表示满足封闭性的某种变换的集合。这时他们已经有了变换群的观念，并研究了群的某些性质，只是由于概念和工具限制②，他们的理论缺乏一般性而难以推广。

在1872年的文章中[26]，“群”出现了10次，同样李也没有定义和解释“群”的概念，“群”的含义与1870年的情形大致相同。

在1874年的文章中李明确给出了“群”的概念，该文第二部分的标题就是“群论”(Theorie der Gruppen)([2]，248页)。但他定义的“群”只是满足一定条件的变换的集合，并没有特别强调该集合应该满足的封闭等性质。因此，从“群”的角度来说，将1874年文章第二部分出现的“变换群”称作特殊的“变换组”则更为合适一些。

1874年到1880年李发表了十几篇关于变换群的文章，这里的“群”充其量只是具有了封闭性的特殊函数或某些变换的集合，并不能真正称得上“群”。

在李看来，连续变换群概念必须要满足以下性质：(1)它是一类切触变换；(2)在此种切触变换下，偏微分方程具有某种不变性；(3)这种切触变换最好是由一个无穷小生成的变换或称作与一个无穷小增量所对应的变换；(4)所有切触变换的集合依赖于r个参数，就形成了一个连续变换群。正因为连续变换群承载了如此多的含义和作用，真正意义上的“连续变换群”概念的产生必然是一个缓慢而渐进的过程。

2.2 变换群概念的出现

众所周知，群中单位元素(在变换群里即为恒等变换)和逆元素(在变换群里即为逆

① 在他的工作中明确出现“群”的概念是在1874年的文章[2]中。

② 一方面缺乏群的表述方法，只能从具体的变换入手，从而未能得出一般性结果；另一方面随处可见的几何解释，也阻碍了他们结果的推广。

变换)的存在非常重要。由于要研究在合成作用下稳定的所有变换的集合,李逐渐意识到恒等变换与逆变换的重要性。

1876 年李认为能够证明在具有封闭性的变换的集合中必定先验地存在恒等变换及一个无穷小变换,并假设所研究的变换群总可以成对的表示为变换及其逆变换。[2]

1880 年李正式给出了“变换群”的定义,不过这里给出的定义也仅仅是满足了合成法则的特殊的变换组。他给出的变换群的定义如下:

> 定义. 满足如下条件的一组变换 $x'=f(x,a_1,\cdots,a_r)$ 就成为一个变换群,其中 x 为初始变量,x'为新的变量,a_i 为参数,如果这组变换中两个变换的相继作用和另一个变换作用等价,即由 $x'=f(x,a_1,\cdots,a_r)$ 和 $x''=f(x',b_1,\cdots,b_r)$ 可以推出 $x''=f(x,c_1,\cdots,c_r)$,其中 c_i 为 a_i 和 b_i 的函数。([28],442 页)

他首先研究了最简单的线性变换 $x'=\dfrac{x+a_1}{a_2x+a_3}$组成的群,给出了该变换群中的逆变换和恒等变换,并由此得出结论:变换群必须含有一个恒等变换,且每一个变换应该和其逆变换成对出现,也就是说变换群应该包含每一个变换的逆变换。他还将这种现象与置换理论相提并论,并写道:

> 众所周知,置换理论中已经证明:一个置换群的元素与其逆元素可以认为是成对出现的。而置换群和变换群理论的不同点仅在于,前者含有有限元,而后者则包含有无限个变换。不过很自然(将上述做法推广)认为变换群的一个变换与其逆变换也是成对出现的。([28],444~445 页)

1884 年恩格尔构造了一个有限连续群,不包含恒等变换,其元素也并不总能成对的表示为变换及逆变换([11],174~175 页)。由此李意识到之前假设是错误的,并证明引入新的参数以及解析延拓后,总可以达到他最早给出的论断。([16],414 页)

定义了变换群后,李进一步定义了两变换群相似的概念。随后,李和恩格尔于 1888~1893 年出版了三大卷的《变换群理论》,在第一卷总结得到了李代数的三条基本定理,给出了李群的局部特征的表示。此外,李也研究了连续变换群的分类和同构问题,最早尝试对李群进行分类,为基灵(W. Killing,1847~1923)和嘉当(É. Cartan,1869~1951)李代数结构的研究开启了大门。

3　切触变换在李群理论中的作用

本部分我们试图对以下问题进行初步探索:李创立连续变换群的主要目的是什么?或者说出于什么动机?李是沿着何种路线如何达到这些目的?切触变换在其中究竟起到什么作用?

3.1　以微分方程为中心的研究目的

李曾在克里斯蒂安尼亚大学(今奥斯陆大学)受教于希罗(P. L. Sylow,1832~1918)。希罗则是当时欧洲大陆能够读懂伽罗瓦理论的少数数学家之一。李意识到了伽罗瓦理论强大的力量,希望将代数方程的伽罗瓦理论推广用来解决微分方程,并考虑偏微分方程的解在切触变换下的不变性。他自豪地宣称要将连续群的概念应用到微分方程上

去。([27],60 页)

众所周知,伽罗瓦理论的一个基本结果为:代数方程可根式解的充要条件是该方程的伽罗瓦群是可解群。与此相类似,在皮卡-韦西奥理论中,引入了线性齐次常微分方程的伽罗瓦群,并将之称作微分伽罗瓦群,而线性齐次常微分方程可用积分解的充要条件就是其微分伽罗瓦群是可解群。

李则更多地从分析的角度来考虑问题,即:对于一个给定的微分方程组,考虑使该微分方程组保持稳定的底空间的微分同胚群,也就是考虑该微分方程组的解的置换。

布尔巴基曾比较贴切地评论道:

> 实际上,对李来说,变换群的理论就像是微分方程的积分工具一样,就像代数方程中的伽罗瓦理论一样重要。([16],416~417 页)

尽管李的目的和出发点受到伽罗瓦理论的强烈影响,但他对伽罗瓦理论的理解却值得我们思考。在李 1874 年写给迈耶(A. Mayer, 1839~1908)的信中说:

> 在伽罗瓦之前,代数方程理论的问题是:是否方程可以根式解,如何解?伽罗瓦之后的问题是,用根式解方程的最简单方法是什么?…我相信是时候应该在微分方程领域也进行类似的工作了。([24],586 页)

在李看来伽罗瓦理论对代数方程的最直接影响是给出了根式解方程的最简单方法,这与我们现在的看法多少有些不同。现在认为:对代数方程来说,伽罗瓦理论最要紧之处是给出代数方程可解性的判据。

另一方面,对“群结构”的不断探索深化了人们关于“抽象群”的认识,李在这方面也作出了尝试。1880 年他写道:

> 我们的问题可以表述为:确定一个流形的所有 r 参数群。([28],443 页)。

他将自己的目标描述为:

> 发展出一套关于变换的一般理论,并将其应用到微分方程上去。一方面要寻找能将一个给定的微分方程或者是解析表达式变成给定形式的变换的存在条件,另一方面则在其存在时求出该变换。([29],538 页)

事实上,用变换来研究给定微分方程的方法已出现在欧拉(L. Euler, 1707~1783)、拉格朗日(J-L. Lagrange, 1736~1813)和勒让德的著作中。但这些数学家从未想过研究这些变换的自身性质,也没有建立包含所使用的特殊变换的一般理论,更很少对这些变换分类。他们只是将变换当做解微分方程的一种工具,更不要说从群的角度来研究微分方程。

李的研究动机和目的显而易见,即:将连续变换群应用到微分方程上去,为微分方程发展出一套积分理论,其中包含了一种变换理论,它可以判断一个微分方程能否变成给定的形式,并求出该变换。正是通过这种变换理论,李发展出了解微分方程的理论,该理论通过寻求微分方程在变换下的不变性而简化求解过程。在这个过程中,切触变换和无穷小变换两个概念起重要作用,这也正是他研究的出发点。

3.2 以切触变换为基础的研究方案

在 1884 年的文章中,李详细的介绍了他的思路:

> 首先建立切触变换的理论基础,然后引入无穷小变换的重要概念。首要目标是

建立切触变换的不变量，也就是说研究微分方程在所有切触变换（或所有的点变换）之下的不变性。

> 第二步是建立带有有限参数的连续变换群理论，并建立将其应用到微分方程上去的一般理论。（[29]，538 页）

在此基础上，李研究了微分方程在切触变换下的不变性和该不变性与无穷小变换的关系。

1871 年他开始研究使得微分方程不变的无穷小变换，并考虑了可交换的变换及其形成的群，这就有可能“或者由此得到一些积分方法，或者可以将问题分成几个更简单的问题。”（[29]，547 页）

首先，李将对微分方程的研究转变为对使该方程不变的切触变换的研究；借助无穷小变换与切触变换的关系，形成变换群的概念。由此对于微分方程的分类就相当于对变换群的分类。对此，李认为：

> 给定任意阶的两变量的微分方程，它可能容许一个将自身变为自身的切触变换，而这些切触变换形成的群一定属于上面列出中的某一个。在此基础上，可以对这些方程进行分类，……也就给出了对其进行积分的一个正确理论。（[4]，541 页）

作为应用，李将一个平面切触变换的所有有限连续群化为典范形式，同时研究了属于这些群的一阶、二阶和三阶微分方程的不变量。以此为基础就可以原则上解决微分方程的分类问题，从而大大简化微分方程的积分理论。（[4]，529～542 页）

由此我们总结得到李的研究方案，并得出切触变换在李群创立过程中的中心作用：

（1）研究切触变换，建立切触变换的不变量理论，研究微分方程在切触变换下的不变性；

（2）将无穷小变换的概念与微分方程联系起来，探寻微分方程在切触变换下不变性的真正原因，并将结果应用于微分方程的积分理论的研究中；

（3）将微分方程所容许的变换与无穷小变换结合，产生有限参数的连续变换群的概念；研究将任意的变换群化为典范形式的方法，或研究能否将典范群变换成给定的变换群，在此基础上构造典范群的不变微分方程，对变换群进行分类；

（4）将有限参数的连续变换群的性质归结为无穷小变换的性质；通过相互独立的无穷小变换的个数对变换群分类，从而对微分方程分类；在此基础上建立微分方程的系统理论。

4　结　语

一段时期内（19 世纪 70 年代），李群理论几乎完全依赖于李个人的研究工作。一方面李开创了一般意义上的切触变换理论，将其由一种应用工具上升为数学研究对象及理论，另一方面将切触变换应用于微分方程，通过无穷小变换，在初步的“群”的观念下，研究使微分方程不变的某些切触变换所形成的“群”及无穷小变换的关系，从而创立了连续变换群理论。更重要的是，在应用于微分方程的指引下，李将问题导向了对变换群的分类。由此，该领域有了独立的研究对象——连续变换群，产生了相对独立的研究方法，出

现了推动该领域发展的主要问题——对连续变换群进行分类。由此,李群理论正式宣告诞生。

当然,任何数学领域的创建都不是一朝一夕之功,也很难仅凭一人之力维持发展,随着三大卷《变换群理论》的出版,李群理论的接力棒交到了基灵和嘉当手中。基灵和嘉当在 19 世纪末期使李代数形成了自己的研究方法,而嘉当在 20 世纪初的一系列研究则加强了上述方法,并形成了李代数最开始的中心问题:复和实的有限维李代数的结构及表示理论。由此形成了早期李群的中心问题:李群及其李代数的结构和分类问题(也涉及李群的线性表示问题),从 19 世纪 70 年代李创立连续变换群理论直到 1925 年,这个主题从未改变。

1925 年外尔创立整体李群理论,发展出真正融合了几何、代数和分析的李群表示理论。以此为标志李群理论进入了真正意义上的现代李群发展阶段,数学学科也进入了一个飞速发展时代。在与其他数学分支乃至其他学科不断的交叉渗透下,到 20 世纪 50 年代中期,李群李代数理论不仅成为了数学科学的中心,还对物理、化学等学科影响颇深,在理论和应用上也产生了多方面重要影响。这为数学史、科学史工作者提供了大量研究素材,同时也为我们提出了许多更加深刻和重要的研究课题。

参 考 文 献

1 Weyl H. A Half-Century of Mathematics [J]. *American Mathematical Monthly*, 1951, 58(8): 523 ~553.

2 Lie S. Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs Transformationen [J]. *Math. Ann.*, 1874, 8(2): 215 ~303.

3 Lie S. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung [J]. *Math. Ann.*, 1875, 9(2): 245 ~296.

4 Lie S. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Zweite Abhandlung) [J]. *Math. Ann.*, 1877, 11(4): 464 ~557.

5 Lie S. Über Gruppen von Transformationen [J]. *Gött. Nachr.*, 1874, (22): 529 ~542.

6 Lie S. Theorie der Transformationsgruppen(Erste Abhandlung) [J]. *Arch. for Math.*, 1876, 1: 19 ~57.

7 Lie S. Theorie der Transformationsgruppen(Abhandlung II) [J]. *Arch. for Math.*, 1876, 1: 152 ~193.

8 Lie S. Theorie der Transformationsgruppen(Abhandlung III) [J]. *Arch. for Math.*, 1878, 3: 93 ~165.

9 Lie S. Theorie der Transformationsgruppen(Abhandlung IV) [J]. *Arch. for Math.*, 1878, 3: 375 ~460.

10 Lie S. Theorie der Transformationsgruppen(Abhandlung V) [J]. *Arch. for Math.*, 1879, 4: 232 ~261.

11 Lie S, Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen* [M]. Vol. 1. Leipzig: B. G. Teubner, 1888.

12 Lie S, Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen* [M]. Vol. 2. Leipzig: B. G. Teubner, 1890.

13 Lie S, Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen* [M]. Vol. 3. Leipzig: B. G. Teubner, 1893.

14 Geiges H. A brief history of contact geometry and topology [J]. *Expo. Math.*, 2001, 19(1): 25 ~53.

15 Hawkins T. *Emergence of the Theory of Lie Groups: an essay in the history of mathematics*, 1869—1926 [M]. New York: Springer, 2000. 62 ~68.

16 Bourbaki N. *Elements of Mathematics: Lie Groups and Lie Algebras* [M]. Vol. 1. Berlin: Springer, 1989. 412 ~413.

17 Hazewinkel M. *Encyclopaedia of mathematics* [M]. Vol. 1. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987: 860.

18 Stubhaug A. *The Mathematician Sophus Lie* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

19 Klein F. *Lectures on mathematics* [M]. New York: Macmillan. 1894. 9.

20 Goursat E, Hedrick E R. *A course in mathematical analysis* [M]. Boston: Ginn and Co., 1904. 67 ~68.

21 胡作玄, 邓明立. 20 世纪数学思想 [M]. 济南:山东教育出版, 2001. 322.

22 Borel A. *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups* [M]. Providence, RI: American Mathematical Society,

London：London Mathematical Society，2001.

23 Klein F，Lie S. Uber diejenigen ebenen Curven，welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergeben [J]. Math. Ann.，1871，4(1)：50～84.

24 Engel F. *Sophus Lie：Gesammelte Abhandlungen* [M]. Vol. V. Leipzig：B. G. Teubner，1924.

25 Lie S. Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye´schen Complexes [J]. *Gött. Nachr.*，1870，(4)：53～66.

26 Lie S. Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung，insbesondere über eine Klassifikation derselben [J]. *Gött. Nachr.*，1872，(25)：473～489.

27 Lie S. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung [J]. *Leipz. Ber.*，1895. 47：53～128.

28 Lie S. Theorie der Transformationsgruppen I [J]. *Math. Ann.*，1880，16(4)：441～528.

29 Lie S. Ueber Differentialinvarianten [J]. *Math. Ann.*，1884，24(4)：537～578.

Contact Transformations and Their Effects in the Establishment of the Lie Group Theory

YAN Chenguang[1,2]，DENG Mingli[3]

(1. *College of Science*，*Hebei University of Science and Technology*，*Shijiazhuang* 050018，*China*；

2. *Institute for the History of Natural Sciences*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100190，*China*；

3. *College of Mathematics and Information Science*，*Hebei Normal University*，*Shijiazhuang* 050016，*China*)

Abstract　Under the impact of the idea of Plücker´s geometry，contact transformations were upgraded from tools belonging differential equation into an independent theory due to Lie´s research. Lie´s theory of contact transformations was in the centre of the process of establishment of Lie group theory. Firstly，Lie aimed to solve differential equations. This led him to study contact transformations by mixing up geometry and differential equations. Secondly，basing on the relationship between infinitesimal and contact transformations，Lie created the concept of transformation groups. He further applied theory of transformation group to solve differential equations，and made the switch from classification of differential equations to that of transformation groups. His research has showed the geometrical feature in the genesis of Lie group，as well as the effect of geometry to the overall development of mathematics in the 19th century.

Keywords　Lie group，contact transformation，differential equation