



# Analyse modale pour les coques minces en révolution

Marie Beaudouin

► **To cite this version:**

Marie Beaudouin. Analyse modale pour les coques minces en révolution. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2010. Français. <tel-00541467>

**HAL Id: tel-00541467**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00541467>**

Submitted on 2 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et Applications*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par

**Marie Beaudouin**

préparée à l'UMR 6625 CNRS-IRMAR  
Institut de Recherche Mathématique de Rennes  
U.F.R de Mathématiques

---

**Analyse modale**  
**pour les coques minces**  
**en révolution**

**Thèse soutenue à Rennes**  
**le 29 Novembre 2010**

devant le jury composé de :

**Marc DAMBRINE**  
Professeur IPRA Pau / rapporteur

**Carlo LOVADINA**  
Associate Professor Pavie / rapporteur

**Adel BLOUZA**  
Maître de conférences Rouen / examinateur

**Marc BRIANE**  
Professeur INSA Rennes / examinateur

**Monique DAUGE**  
DR CNRS / directeur de thèse

**Erwan FAOU**  
DR INRIA / co-directeur de thèse



# Remerciements

« LA RECONNAISSANCE EST LA MÉMOIRE DU COEUR. »

Hans Christian Andersen

En écrivant ces remerciements j'ai refait mon parcours universitaire et je remercie Michel Crouzeix qui m'a fait aimer l'analyse numérique avec son cours de licence d'anep durant lequel il a su transmettre sa passion. Cette branche des mathématiques m'a plu grâce à son aspect proche de la réalité et la possibilité de la simuler. Les nombreux travaux pratiques sous matlab avec Grégory Vial ont confirmé mon envie d'approfondir mes connaissances dans ce domaine.

Je remercie ensuite Florian Méhats qui lors de mon master 2 m'a mis relation avec Monique et Erwan pour faire une thèse ensemble et aussi Virginie Bonnaillie-Noël qui m'a encouragée dans cette voie.

Je souhaite adresser un grand merci à mes directeurs Monique et Erwan pour leur disponibilité et leur confiance qui m'ont permis d'avancer. Leur complémentarité a été très bénéfique lors des échanges à trois ou en binôme. Leur enthousiasme toujours présent était contagieux et moteur. Je leur suis aussi très reconnaissante de leur investissement dans la dernière ligne droite. Je remercie Monique pour l'organisation des repas d'équipe et Erwan pour son radiateur qui m'a permis de travailler dans de meilleures conditions lors des journées d'hiver.

J'adresse mes sincères remerciements à mes rapporteurs Marc Dambrine et Carlo Lovadina qui ont pris soin de relire mon manuscrit malgré les nombreux calculs et la barrière de la langue et d'y avoir apporté des corrections utiles. Je remercie aussi vivement Marc Briane et Adel Blouza d'avoir accepté de participer à mon jury de soutenance.

Je tiens également à remercier toute l'équipe d'analyse numérique dans laquelle je me suis sentie bien intégrée avec plus particulièrement Martin Costabel qui fut mon tuteur de monitorat et Eric Darrigrand, Ludovic Goudenège, Daniel Martin et Grégory Vial que j'ai souvent sollicités pour des questions sur Melina et qui étaient toujours disponibles. Je remercie aussi les professeurs de l'ENSAI où j'ai fait la majorité de mon monitorat : Guillaume Chauvet, François Coquet, Marine Guillerm et Jocelyn

Julienne.

Mes remerciements vont aussi à tout le personnel administratif, informatique, de la bibliothèque et de l'entretien de l'IRMAR qui sont toujours accueillants.

Je salue les autres doctorants du laboratoire avec lesquels j'ai pu échanger sur la vie de thésard. Je pense notamment à mes collègues de bureau : Sten avec qui les échanges où l'on s'extasiait sur nos problèmes étaient interminables sans pour autant aboutir et Grégory qui commence juste l'aventure de la thèse et avec qui les discussions sont toujours plaisantes. Ensuite je remercie mes amis Clément, Damian, Emilie, Gweltaz, Mathilde ainsi que Aurélien et Sébastien qui ont su institutionnaliser le goûter sans oublier les aînés Fanny, Richard, Victor et tous ceux que j'ai pu oublier.

Et puis comment devrais-je remercier internet qui à la fois m'a permis de trouver des ressources bibliographiques utiles et m'a aussi détournée plus d'une fois du travail.

Je remercie mon frère et mes soeurs, mes parents et mes grands-parents ainsi que toute ma famille pour leurs encouragements même si je sais que ma thèse a pu leur paraître incompréhensible. Ils m'ont donné le goût de l'apprentissage et m'ont aidé à me surpasser. Leur amour et leur soutien me sont très précieux.

Enfin Lionel, cette thèse te doit beaucoup. Tu fus mon plus grand supporter et tes encouragements me sont très chers. Je te remercie pour la beauté de la vie à tes côtés et pour ton amour et ta confiance.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels d'éléments de théorie des coques</b>	<b>13</b>
1.1	Introduction . . . . .	13
1.2	Eléments de géométrie . . . . .	14
1.2.1	Les coordonnées normales . . . . .	14
1.2.2	Dérivée covariante . . . . .	18
1.3	Eléments de théorie des coques . . . . .	20
1.4	Le modèle de Koiter . . . . .	27
1.4.1	Définitions . . . . .	27
1.4.2	Ecriture sous forme matricielle . . . . .	28
1.5	Spectre de l'opérateur de Koiter . . . . .	35
<b>2</b>	<b>La membrane dans le cas d'une coque axisymétrique</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction . . . . .	37
2.2	L'axisymétrie . . . . .	37
2.2.1	Les coordonnées cylindriques . . . . .	37
2.2.2	Coque axisymétrique . . . . .	38
2.3	L'opérateur de membrane en axisymétrie . . . . .	40
2.3.1	Tenseurs métriques et de courbure . . . . .	40
2.3.2	La membrane . . . . .	42
2.4	Spectre essentiel de la membrane . . . . .	42
2.4.1	Théorie spectrale . . . . .	42
2.4.2	Rappels théoriques . . . . .	43
2.4.3	Spectre essentiel de la membrane . . . . .	45
2.4.4	Spectre essentiel de la membrane d'une coque axisymétrique . . . . .	49
2.5	Transformation de Fourier angulaire . . . . .	51
2.6	La membrane à fréquence $k$ . . . . .	52
2.7	Spectre essentiel de la membrane à fréquence $k$ . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Développement à haute fréquence de la membrane</b>	<b>57</b>
3.1	Réduction formelle sans conditions aux limites . . . . .	59
3.2	Calcul des opérateurs . . . . .	63

<b>4</b>	<b>La membrane du cylindre</b>	<b>69</b>
4.1	Développement pour $k$ grand de la membrane pour le cylindre . . . . .	70
4.1.1	Réduction formelle sans conditions aux limites . . . . .	70
4.1.2	Résolution du problème scalaire . . . . .	73
4.2	Valeurs propres du bilaplacien . . . . .	78
4.3	Quasimodes . . . . .	80
4.3.1	Définition . . . . .	80
4.3.2	Résultat . . . . .	80
4.4	Estimation d'énergie . . . . .	81
4.5	Résultats numériques . . . . .	84
<b>5</b>	<b>L'opérateur de Koiter pour le cylindre</b>	<b>95</b>
5.1	Introduction . . . . .	95
5.2	L'opérateur de flexion . . . . .	95
5.3	Ansatz . . . . .	96
5.4	Réduction formelle sans conditions aux limites . . . . .	99
5.5	Résolution du problème scalaire . . . . .	105
5.6	Couches limites . . . . .	110
5.6.1	Mise en place . . . . .	110
5.6.2	L'opérateur $\mathfrak{K}_0^\pm$ . . . . .	114
5.6.3	Théorème . . . . .	116
5.7	Quasimodes . . . . .	118
5.8	Estimation d'énergie . . . . .	124
5.9	Fenêtre spectrale . . . . .	125
5.9.1	Comparaison avec la plus petite valeur propre de la membrane .	125
5.9.2	Détermination de $C$ . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Le problème de Lamé aux valeurs propres</b>	<b>127</b>
6.1	Le problème de Lamé . . . . .	127
6.1.1	Les coordonnées cylindriques . . . . .	128
6.1.2	La réduction de la dimension du problème . . . . .	130
6.2	Coques axisymétriques . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Résultats numériques pour le système de Lamé</b>	<b>133</b>
7.1	Spectre de Lamé . . . . .	133
7.2	Valeurs propres . . . . .	134
7.3	Vecteurs propres . . . . .	139

# Introduction

Pour des raisons économiques dans plusieurs domaines (coût de matériau, stockage, production), on recherche à utiliser des structures tridimensionnelles dont l'une des grandeurs est plus petite par rapport aux autres. Cette économie ne devant pas se faire au détriment de la résistance de la structure, il apparaît alors nécessaire de mener une étude approfondie de ces coques minces. Elles peuvent se représenter géométriquement comme une surface moyenne qui est épaissie le long de sa normale.

Le sujet de cette thèse est l'étude du spectre de coques minces axisymétriques dans le cadre de l'élasticité linéaire tridimensionnelle de Lamé introduit par Ciarlet [13]. On suppose que le matériau constituant la coque est isotrope et homogène et que son épaisseur est le petit paramètre  $\varepsilon$ . L'opérateur associé au système de Lamé agit entre espaces de Sobolev sur la coque et dépend de  $\varepsilon$ . Dans le cas où la coque possède une courbure non identiquement nulle, des phénomènes appelés sensitifs ont été mis en évidence par Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia [39] et dans les expériences numériques de Chapelle et Bathe [12] et de Dauge, Faou et Yosibash [19].

Il existe peu de résultats concernant le spectre de l'opérateur de Lamé en fonction de  $\varepsilon$  et le comportement de la plus petite valeur propre. Le cas des plaques où la surface moyenne est plane a été étudié par Dauge, Djurdjevic, Faou et Rössle [17].

Le problème tridimensionnel de Lamé étant délicat à étudier, on s'intéresse au modèle bidimensionnel de Koiter [32] obtenu par homogénéisations formelles dans la variable transverse à la coque. Celui-ci est un modèle de perturbation singulière et s'écrit pour une coque  $S$  de demi-épaisseur  $\varepsilon$  sous forme matricielle comme somme de deux opérateurs :

$$\mathbf{K}(\varepsilon) = \mathbf{M} + \frac{\varepsilon^2}{3}\mathbf{B}.$$

où  $\mathbf{M}$  est l'opérateur de membrane d'ordre 2 et  $\mathbf{K}$  l'opérateur de flexion d'ordre 4. On décompose le déplacement selon les coordonnées normales en deux composantes tangentes à la surface moyenne et l'autre normale à celle-ci. Nous ne considérerons ici que le cas de coques entièrement encastrées le long de leurs bords.

La justification et la convergence du modèle de Koiter vers la solution du problème de Lamé ont été étudiées par Ciarlet et Lods [16] et Dauge et Faou [18]. Dans le cas



des plaques, le spectre de  $\mathbf{K}(\varepsilon)$  se décompose en le spectre de  $\mathbf{M}$  indépendant de  $\varepsilon$  et le spectre de  $\mathbf{B}$ . Dans le cas général, le spectre de  $\mathbf{K}(\varepsilon)$  est discret comme opérateur elliptique alors que le spectre de  $\mathbf{M}$  contient du spectre essentiel [39]. Si la coque est elliptique c'est-à-dire que sa courbure est strictement positive, le spectre essentiel de  $\mathbf{M}$  est de la forme  $[a, b]$  avec  $a > 0$  et il est de la forme  $[0, b]$  avec  $b \geq 0$  dans les autres cas.

Dans cette thèse nous nous restreignons au cas d'une coque axisymétrique obtenue à partir de la rotation d'une courbe autour d'un axe et épaissie de chaque côté de  $\varepsilon$  selon la normale en chaque point. Cette symétrie nous permet de réduire la dimension du problème. En notant  $k \in \mathbb{Z}$  la variable de Fourier angulaire, l'opérateur  $\mathbf{K}(\varepsilon)$  se décompose après transformation de Fourier en la famille d'opérateurs :

$$\mathbf{K}(\varepsilon)[k] = \mathbf{M}[k] + \frac{\varepsilon^2}{3}\mathbf{B}[k], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}[k]$  et  $\mathbf{B}[k]$  sont les opérateurs  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  après cette transformation de Fourier. Pour  $k$  fixé, on s'intéresse d'abord à l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$  qui est un opérateur unidimensionnel agissant sur un déplacement à trois composantes. On calcule son spectre essentiel qui est en général plus haut que le bas du spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbf{M}$ . On retrouve donc le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbf{M}$  uniquement par passage à la limite du spectre discret des opérateurs  $\mathbf{M}[k]$  lorsque  $|k| \rightarrow +\infty$ . Les opérateurs mis en jeu étant des polynômes en  $ik$  à coefficients réels, les valeurs propres pour  $k$  et  $-k$  sont identiques et les vecteurs propres associés sont conjugués. On se limite alors à l'étude du cas  $k \geq 0$ .

L'opérateur  $\mathbf{M}[k]$  est assez complexe en présence de courbure dans la direction de l'axe de la coque. En particulier l'étude de son spectre à  $k$  fixé est très différente dans le cas où la coque est elliptique (un tonneau), hyperbolique (une tour de refroidissement) ou bien cylindrique. Le spectre discret de l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$  est constitué des couples  $(\Lambda, \mathbf{u})$  satisfaisant l'équation

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u} = \Lambda\mathbf{A}\mathbf{u}, \quad (2)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice diagonale dont les termes dépendent de la métrique de la coque. Dans une démarche constructive suivant celle de Faou [22, 24, 23, 25], on cherche le couple  $(\mathbf{u}, \Lambda)$  sous forme de séries formelles :

$$\Lambda[k] = \sum_{n \geq 0} k^{-n} \Lambda_n, \quad \Lambda_n \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathbf{u}[k] = \sum_{n \geq 0} k^{-n} \mathbf{u}_n,$$

où  $\mathbf{u}_n$  sont des déplacements tridimensionnels. On veut que  $(\Lambda[k], \mathbf{u}[k])$  soit solution du problème :

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u}[k] = \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{u}[k]. \quad (3)$$

On peut construire des solutions au problème (3) par la résolution d'un problème aux valeurs propres (en séries formelles) *scalaire* grâce au théorème de réduction suivant : il existe

- une série formelle

$$\mathbf{L}[k] = \mathbf{L}_0 + \frac{1}{k}\mathbf{L}_1 + \frac{1}{k^2}\mathbf{L}_2 + \cdots, \quad (4)$$

où les opérateurs scalaires  $\mathbf{L}_n(z, \partial_z)$ ,  $n \geq 0$  agissent sur la composante transverse à la coque et dépendent de la variable axiale  $z$ , et

- une série formelle  $\mathbf{V}[k] = \sum_{n \geq 0} k^{-n} \mathbf{V}_n$  d'opérateurs de reconstruction qui envoie

une fonction scalaire dans l'espace des déplacements tridimensionnels. Plus particulièrement  $\mathbf{V}_0$  est l'injection canonique  $\zeta \mapsto (0, \zeta)$  envoyant une fonction sur la composante transverse à la coque en coordonnées normales,

vérifiant l'équation

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{V}[k] - \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{V}[k] = \mathbf{V}_0 \circ (\mathbf{L}[k] - \Lambda[k]). \quad (5)$$

Ainsi la résolution du problème en séries formelles scalaire

$$\mathbf{L}[k]\zeta[k] = \Lambda[k]\zeta[k] \quad (6)$$

où  $\zeta[k] = \sum_{n \geq 0} k^{-n} \zeta_n$  est une série formelle dont les coefficients  $\zeta_n$  sont des fonctions

scalaires nous donne des solutions au problème (3) : Si  $(\zeta[k], \Lambda[k])$  satisfait (6) alors  $\mathbf{u}[k] = \mathbf{V}[k]\zeta[k]$  satisfait (3) en vertu de (5), et pour la même série formelle  $\Lambda[k]$ .

On effectue alors le calcul des opérateurs mis en jeu et on montre que l'opérateur  $\mathbf{L}_0$  est une simple multiplication par une fonction dépendant de  $z$ .

On applique ensuite ce théorème de réduction formelle valable pour une géométrie arbitraire de la coque axisymétrique au cas dégénéré d'une coque cylindrique pour laquelle la courbure est identiquement nulle dans la direction axiale. Ceci implique l'annulation des opérateurs  $\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  et  $\mathbf{L}_3$  construits dans le théorème précédent. L'opérateur  $\mathbf{L}_4$  est lui un bilaplacien dont on calcule le spectre de manière explicite. On obtient alors que pour toute valeur propre de l'opérateur  $\mathbf{L}_4$  muni des conditions au bord de Dirichlet associée au vecteur propre  $v$

$$\mathbf{L}_4 v = \lambda v$$

il existe un couple de séries formelles  $(\Lambda[k], \zeta[k])$  solution de (6) de la forme

$$\zeta[k] = v + \frac{1}{k}\zeta_1 + \cdots \quad \text{et} \quad \Lambda[k] = \frac{1}{k^4}\lambda + \frac{1}{k^5}\Lambda_5 + \cdots$$

Tronquant alors le couple de séries formelles  $(\Lambda[k], \mathbf{u}[k])$  avec  $\mathbf{u}[k] = \mathbf{V}[k]\zeta[k]$ , on construit des quasimodes à tout ordre en puissances de  $k^{-1}$ . D'autre part une estimation

d'énergie montre que le bas du spectre de  $\mathbf{M}[k]$  admet une borne inférieure de l'ordre de  $\mathcal{O}(k^{-4})$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Ceci nous montre alors le comportement en  $k^{-4}$  des plus petites valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$ . Des simulations numériques effectuées à l'aide de la librairie d'éléments finis MÉLINA développée par Martin [33] ont confirmé nos résultats théoriques.

La stratégie générale pour étudier ensuite le bas du spectre de l'opérateur  $\mathbf{K}(\varepsilon)$  consiste donc à étudier le spectre de l'opérateur à deux paramètres (1) dans un régime  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $k \rightarrow \infty$ . Certaines justifications formelles du comportement spectral de  $\mathbf{K}(\varepsilon)$  ont été obtenues récemment par Artioli, Beirão da Veiga, Hakula et Lovadina [3, 2] dans les trois cas typiques : elliptique, hyperbolique et cylindrique. Pour chaque épaisseur  $\varepsilon$ , la base du spectre de  $\mathbf{K}(\varepsilon)$  est le minimum sur  $k$  des premières valeurs propres des opérateurs  $\mathbf{K}(\varepsilon)[k]$  (1). On cherche alors à caractériser pour chaque  $\varepsilon$  la fréquence  $k$  qui réalise le minimum afin d'obtenir une asymptotique en  $\varepsilon$  de la valeur propre correspondante.

Compte-tenu du résultat obtenu sur le spectre de la membrane, on peut s'attendre à ce que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathbf{K}(\varepsilon)[k]$  se situe dans la zone équilibrant le bas du spectre de  $\mathbf{M}[k]$  en  $k^{-4}$  avec celui de  $\varepsilon^2\mathbf{B}[k]$  qui se comporte en  $\varepsilon^2k^4$  dans la composante normale à la coque. Pour une épaisseur  $\varepsilon$  fixée, ce régime correspondrait alors à une fréquence  $k \simeq \varepsilon^{-1/4}$  en variable de Fourier angulaire.

Partant de cette idée – corroborée par les résultats de Artioli, Beirão da Veiga, Hakula et Lovadina [3, 2] – on introduit un paramètre de couplage  $C$  et on étudie l'opérateur  $\mathbf{K}(\varepsilon)[k]$  dans le régime  $k = C\varepsilon^{-1/4}$ , c'est-à-dire l'opérateur

$$\mathbf{K}(\varepsilon)[C\varepsilon^{-1/4}]$$

qui se développe en puissances de  $\varepsilon^{1/4}$ , et dépend du paramètre  $C$ . De la même manière que pour la membrane, on construit des quasi-modes en puissances de  $\varepsilon^{1/4}$ , et dont la plus basse valeur propre se comporte en

$$\Lambda(C)[\varepsilon] = \varepsilon\Lambda_4(C) + \varepsilon^{5/4}\Lambda_5(C) + \dots$$

où  $\Lambda_n(C)$  dépend du paramètre  $C$ . Pour construire ceux-ci, il est nécessaire d'introduire des termes de couches limites qui n'étaient pas présents dans le cas de l'étude de l'opérateur de membrane  $\mathbf{M}[k]$ , ce qui introduit un niveau de complexité supplémentaire. Le résultat de cette construction est l'existence de spectre pour  $\mathbf{K}(\varepsilon)[C\varepsilon^{-1/4}]$  dans un voisinage de  $\varepsilon\Lambda_4(C)$  modulo  $\varepsilon^{5/4}$ , et ceci pour toute valeur du paramètre de couplage  $C$ .

On calcule ensuite la valeur  $C_{\min}$  de la constante  $C$  telle que la valeur propre  $\Lambda_4(C)$  soit minimale. Alors finalement

$$\Lambda(C_{\min})[\varepsilon] = \varepsilon\Lambda_4(C_{\min}) + \varepsilon^{5/4}\Lambda_5(C_{\min}) + \dots \quad (7)$$

est un bon candidat pour le bas du spectre de l'opérateur  $\mathbf{K}(\varepsilon)$ . De plus  $k = C_{\min}\varepsilon^{-1/4}$  serait la fréquence à laquelle ce minimum est atteint. La dépendance non triviale par

rapport à  $\varepsilon$  de cette fréquence fait apparaître clairement le phénomène de sensibilité dans le cas des coques cylindriques encastrées.

Pour compléter l'étude précédente, il reste à prouver que  $\Lambda(C_{\min})[\varepsilon]$  correspond bien à la première valeur propre de  $\mathbf{K}(\varepsilon)$ . Ceci n'ayant pu être démontré théoriquement, on a complété notre investigation dans le cas du cylindre par des simulations numériques effectuées à l'aide de la librairie d'éléments finis MÉLINA développée par Martin [33].

On a alors pu constater que l'asymptotique (7) obtenue pour le modèle de Koiter a été validée non pas par le calcul du spectre de  $\mathbf{K}(\varepsilon)$  – rendu difficile par la présence d'un terme d'ordre 4 – mais directement sur le modèle tridimensionnel de Lamé décomposé en variable de Fourier. Il s'agit donc de calculs bidimensionnels sur une "tranche" de coque. En particulier, la constante  $C_{\min}$  obtenue théoriquement a été retrouvée numériquement et elle décrit bien la première valeur propre. Ceci justifie l'approche précédente utilisant le régime  $k = C\varepsilon^{-1/4}$ , et apporte une preuve supplémentaire de la bonne approximation du modèle tridimensionnel par le modèle de Koiter.



# Chapitre 1

## Rappels d'éléments de théorie des coques

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous revisitons la théorie des coques du point de vue de la géométrie des surfaces.

Le modèle tridimensionnel de Lamé peut être approché par un modèle bidimensionnel posé sur la surface moyenne. Plusieurs modèles existent dont ceux de Koiter (1959-1970) [32], John [30], Naghdi (1963) [34], Budianski et Sanders (1967) [10] et Novozhilov [37] et s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{K}(\varepsilon) = \mathbf{M} + \varepsilon^2 \mathbf{B}.$$

Les auteurs cités sont unanimes pour l'expression de la membrane ; mais celle de l'opérateur de flexion porte à controverse. Dans [12], différents modèles hiérarchiques de coques et leur traitement numérique par les éléments finis sont détaillés. D'un point de vue géométrique et mécanique c'est le modèle de Koiter [32] qui paraît le plus naturel. Nous ne considérerons que ce modèle par la suite.

La limite du déplacement pour le problème de chargement quand  $\varepsilon$  tend vers 0 a été étudié par Sanchez-Palencia en 1990 [40] et Ciarlet, Lods et Miara en 1996 [16], Ciarlet [14].

D'autre part Faou a effectué des développements asymptotiques multi-échelles pour le modèle de Koiter dans [24], [23], [25].

Concernant le problème aux valeurs propres, le plus ancien travail est celui de Ciarlet et Kesavan [15] dans le cas des plaques isotropes encastées où ils mettent en évidence le comportement dominant de la flexion pour les plus petites fréquences. Nazarov et Zorin [36], Nazarov [35], Dauge, Djurdjevic, Faou, Rössle [17] étudient aussi des développements asymptotiques des éléments propres dans le cas des plaques.

Dans le cas des coques, l'école de Goldenveizer a étudié leurs propriétés spectrales dans Aslanian et Lidskii [4], Goldenveizer, Lidskii et Tovstik [28], Vassiliev [41]. Plus tard Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia en 1997 [39] ont montré que les valeurs propres de l'opérateur de Koiter sont attirées par celles de la membrane. Dans [19], Dauge, Faou et Yosibash ont fait des expériences numériques pour calculer les plus petites valeurs propres de l'élasticité dans le cas de trois types de coques différents.

L'article [2] rassemble les résultats de Artioli, Beirão da Veiga, Hakula et Lovadina obtenus en utilisant la théorie de l'interpolation. Ils donnent le comportement de la plus petite valeur propre de l'opérateur de Koiter en fonction de  $\varepsilon$  pour les 3 types de coques : parabolique, hyperbolique, elliptique. Les articles [2] et [3] font des expériences numériques qui valident les résultats théoriques de [8] et [7]. L'article [6] démontre théoriquement les résultats dans le cas du modèle shallow shell du cylindre.

On va explorer la question des valeurs propres dans le cas des coques axisymétriques et y répondre partiellement en utilisant les quasimodes et en s'appuyant sur des résultats numériques qui corroboreront la théorie.

Dans ce chapitre nous rappelons et redémontrons les propriétés de base des coordonnées normales et dérivées covariantes pour une surface  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  munie de son paramétrage. On démontre les équations de Codazzi-Minardi qui servent au calcul pratique par la suite. Ensuite nous rappelons les tenseurs qui interviennent dans la formulation variationnelle de Koiter et nous recalculons après intégration par parties les matrices d'opérateurs correspondantes.

## 1.2 Éléments de géométrie

### 1.2.1 Les coordonnées normales

On introduit les éléments de la géométrie Riemannienne et le système de coordonnées normales non pas dans le cas le plus général mais pour une surface  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  munie de son paramétrage.

La présentation suit celle du livre de Do Carmo [21] pour les démonstrations et notations.

On considère une surface  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  et son paramétrage local  $C^\infty \vec{X}$  défini sur un atlas de cartes  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \vec{X}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

On note les dérivées partielles :

$$\vec{X}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_1} = \partial_1 \vec{X}, \quad \vec{X}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_2} = \partial_2 \vec{X}$$

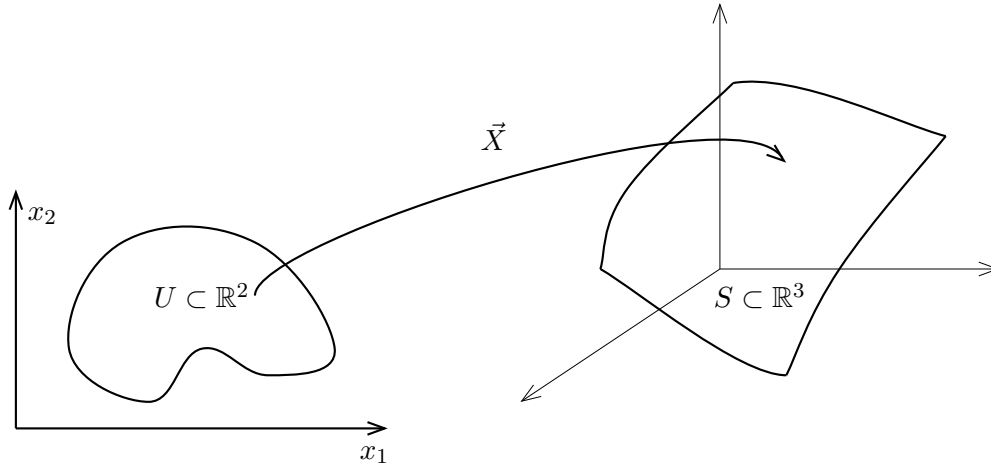


FIGURE 1.1 – Paramétrisation d’une surface.

et dans la suite, les lettres grecques  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  représenteront alors 1 ou 2. La notation suivante sera alors utilisée :

$$\vec{X}_\alpha = \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_\alpha}, \quad \vec{X}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

On définit la normale unitaire à la surface  $\vec{N}$  et sa dérivée partielle par :

$$\vec{N} = \frac{\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2}{\|\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2\|}, \quad \vec{N}_\alpha = \frac{\partial \vec{N}}{\partial x_\alpha}.$$

On fait l’hypothèse que les vecteurs  $\vec{X}_1$  et  $\vec{X}_2$  ne sont pas liés ; alors le triplet  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{N})$  constitue une base locale. Les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  pourront alors être décomposés dans cette base.

**Définition 1.1.** Soit  $\vec{V}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , ses composantes dans la base locale  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{N})$  notées  $(V^1, V^2, V^3)$  sont appelées composantes contravariantes :

$$\vec{V} = V^1 \vec{X}_1 + V^2 \vec{X}_2 + V^3 \vec{N}.$$

Pour simplifier les écritures, on introduit la notation suivante :

**Notation 1.2.** On écrit :

$$V^1 \vec{X}_1 + V^2 \vec{X}_2 = V^\gamma \vec{X}_\gamma$$

où l’indice  $\gamma$  répété en haut et en bas signifie que l’on effectue la somme sur  $\gamma = 1, 2$ .



**Définition 1.3.** On définit le tenseur métrique par :

$$a_{\alpha\beta} = \langle \vec{X}_\alpha, \vec{X}_\beta \rangle$$

et on note  $a^{\alpha\beta}$  son inverse, c'est-à-dire que :

$$a_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$$

où  $\delta_\alpha^\gamma$  désigne le symbole de Kronecker.

Le déterminant du tenseur métrique est  $|a| = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

On a les formules suivantes :

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{|a|}, a^{12} = -\frac{a_{12}}{|a|}, a^{21} = -\frac{a_{21}}{|a|}, a^{22} = \frac{a_{11}}{|a|}.$$

Les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  et le tenseur de courbure  $b_{\alpha\beta}$  sont les composantes contravariantes de  $\vec{X}_{\alpha\beta}$  :

$$\vec{X}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{X}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{N}.$$

**Notation 1.4.** On note les composantes contravariantes du tenseur de courbure :

$$b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma}a^{\gamma\beta}$$

où l'indice  $\gamma$  répété indique que l'on effectue la somme sur  $\gamma=1, 2$ .

**Notation 1.5.** On note  $(\vec{X}^1, \vec{X}^2, \vec{N})$  la base duale de la base  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{N})$ .

**Définition 1.6.** Les composantes covariantes d'un vecteur  $\vec{V}$  notées  $(V_1, V_2, V_3)$  sont ses composantes dans la base  $(\vec{X}^1, \vec{X}^2, \vec{N})$  et les composantes covariantes et contravariantes sont reliées par les égalités :

$$V^3 = V_3, \quad V^\alpha = a^{\alpha\beta}V_\beta.$$

**Propriété 1.7.** Les composantes  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  et  $b_{\alpha\beta}$  et le tenseur métrique sont symétriques en  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma, \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}, \quad \text{et} \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}.$$

**Preuve.** D'après le théorème de Schwarz, on a :  $\vec{X}_{12} = \vec{X}_{21}$ , les égalités en découlent puisque  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{N})$  constitue une base locale.

Pour le tenseur métrique cela provient de la symétrie du produit scalaire. ■

On peut exprimer les symboles de Christoffel uniquement à partir du tenseur métrique :

**Proposition 1.8.** On a la formule :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}a^{\gamma\delta}(\partial_\alpha a_{\beta\delta} + \partial_\beta a_{\alpha\delta} - \partial_\delta a_{\alpha\beta})$$

où l'indice  $\delta$  indique que l'on fait la somme sur  $\delta = 1, 2$ .

**Preuve.** Comme :

$$\partial_\alpha a_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \langle \vec{X}_\beta, \vec{X}_\gamma \rangle = \langle \partial_\alpha \vec{X}_\beta, \vec{X}_\gamma \rangle + \langle \vec{X}_\beta, \partial_\alpha \vec{X}_\gamma \rangle = \langle \vec{X}_{\alpha\beta}, \vec{X}_\gamma \rangle + \langle \vec{X}_\beta, \vec{X}_{\alpha\gamma} \rangle \quad (1.1)$$

on peut exprimer  $\langle \vec{X}_{\alpha\beta}, \vec{X}_\gamma \rangle$  en fonction uniquement du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}_{11}, \vec{X}_1 \rangle &= \frac{1}{2} \partial_1 a_{11} & \langle \vec{X}_{11}, \vec{X}_2 \rangle &= \partial_1 a_{12} - \frac{1}{2} \partial_2 a_{11} \\ \langle \vec{X}_{12}, \vec{X}_1 \rangle &= \frac{1}{2} \partial_2 a_{11} & \langle \vec{X}_{12}, \vec{X}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \partial_1 a_{22} \\ \langle \vec{X}_{22}, \vec{X}_1 \rangle &= \partial_2 a_{12} - \frac{1}{2} \partial_1 a_{22} & \langle \vec{X}_{22}, \vec{X}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \partial_2 a_{22}. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque

$$\vec{X}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{X}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{N} \quad \text{et} \quad \vec{X}_\alpha \perp \vec{N},$$

il s'en suit :

$$\langle \vec{X}_{\alpha\beta}, \vec{X}_\gamma \rangle = \langle \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \vec{X}_\delta + b_{\alpha\beta} \vec{N}, \vec{X}_\gamma \rangle = \Gamma_{\alpha\beta}^\delta a_{\delta\gamma}.$$

En inversant le système d'équations obtenu, on obtient les coefficients  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  en fonction du tenseur métrique. Par exemple pour  $\Gamma_{11}^1$ , on obtient :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{|a|} \left( \frac{1}{2} a_{22} \partial_1 a_{11} - a_{12} \partial_1 a_{12} + \frac{1}{2} a_{12} \partial_2 a_{11} \right).$$

On ne démontre la proposition que pour  $\Gamma_{11}^1$  mais le principe est le même pour les autres quantités. Posons :

$$d_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} a^{\gamma\delta} (\partial_\alpha a_{\beta\delta} + \partial_\beta a_{\alpha\delta} - \partial_\delta a_{\alpha\beta}),$$

et développons  $d_{11}^1$  :

$$\begin{aligned} d_{11}^1 &= \frac{1}{2} a^{1\delta} (\partial_1 a_{1\delta} + \partial_1 a_{1\delta} - \partial_\delta a_{11}) \\ &= \frac{1}{2} a^{11} (\partial_1 a_{11} + \partial_1 a_{11} - \partial_1 a_{11}) + \frac{1}{2} a^{12} (\partial_1 a_{12} + \partial_1 a_{12} - \partial_2 a_{11}). \end{aligned}$$

Par définition de l'inverse du tenseur métrique, on obtient :

$$d_{11}^1 = \frac{1}{|a|} \left( \frac{1}{2} a_{22} \partial_1 a_{11} - a_{12} \partial_1 a_{12} + \frac{1}{2} a_{12} \partial_2 a_{11} \right) = \Gamma_{11}^1.$$

On montre alors :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = d_{\alpha\beta}^\gamma. \quad \blacksquare$$

**Proposition 1.9.** La décomposition de  $\vec{N}_\alpha$  selon la base locale  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{N})$  est donnée par :

$$\vec{N}_\alpha = -b_\alpha^\beta \vec{X}_\beta$$

**Preuve.** Par définition du tenseur de courbure, on a :

$$b_{\alpha\beta} = \langle \vec{N}, \vec{X}_{\alpha\beta} \rangle.$$

Mais puisque  $\vec{N}$  et  $\vec{X}_\alpha$  sont orthogonaux, on peut écrire :

$$0 = \partial_\beta \langle \vec{N}, \vec{X}_\alpha \rangle = \langle \vec{N}_\beta, \vec{X}_\alpha \rangle + \langle \vec{N}, \vec{X}_{\alpha\beta} \rangle = \langle \vec{N}_\beta, \vec{X}_\alpha \rangle + b_{\alpha\beta}.$$

Donc :

$$\langle \vec{N}_\beta, \vec{X}_\alpha \rangle = -b_{\alpha\beta}.$$

Notons  $(h_\alpha^\gamma, h^3)$  les composantes contravariantes de  $\vec{N}_\alpha$  :

$$\vec{N}_\alpha = h_\alpha^\gamma \vec{X}_\gamma + h^3 \vec{N},$$

on a :

$$\langle \vec{N}_\alpha, \vec{X}_\beta \rangle = h_\alpha^\gamma \langle \vec{X}_\gamma, \vec{X}_\beta \rangle.$$

Or par définition des composantes contravariantes et de l'inverse du tenseur métrique, on a :

$$\langle \vec{N}_\alpha, \vec{X}_\beta \rangle = h_\alpha^\gamma a_{\gamma\beta} = h_{\alpha\delta} a^{\delta\gamma} a_{\gamma\beta} = h_{\alpha\beta}.$$

D'où :

$$h_{\alpha\beta} = -b_{\alpha\beta} \quad \text{et donc} \quad h_\alpha^\beta = -b_\alpha^\beta.$$

Puisque  $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$ , on peut écrire que :

$$0 = \partial_\beta \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{N}_\beta, \vec{N} \rangle + \langle \vec{N}, \vec{N}_\beta \rangle = 2 \langle \vec{N}_\beta, \vec{N} \rangle = 2h^3.$$

Les composantes contravariantes de  $\vec{N}_\alpha$  sont alors  $(-b_\alpha^1, -b_\alpha^2, 0)$ . ■

## 1.2.2 Dérivée covariante

On rappelle et démontre les propriétés de base de la dérivée covariante.

**Définition 1.10.** *Pour*

$$w \in C^\infty(U, \mathbb{R}), \quad \mathbf{v} = (v_\beta)_{\beta \in \{1,2\}} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad c = (c_{\beta\gamma})_{(\beta,\gamma) \in \{1,2\}} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^4),$$

*on définit les dérivées covariantes suivantes :*

$$D_\alpha w = \partial_\alpha w, \quad D_\alpha v_\beta = \partial_\alpha v_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta v_\delta$$

$$\text{et} \quad D_\alpha c_{\beta\gamma} = \partial_\alpha c_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta c_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta c_{\beta\delta},$$

*ainsi que pour les composantes contravariantes :*

$$D_\alpha v^\beta = \partial_\alpha v^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta v^\delta$$

$$\text{et} \quad D_\alpha c_\beta^\gamma = \partial_\alpha c_\beta^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta c_\delta^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta c_\beta^\delta.$$

**Notation 1.11.** Comme précédemment on note :  $D^\alpha v_\beta = a^{\alpha\gamma} D_\gamma v_\beta$ .

**Propriété 1.12.** On a les relations suivantes : pour tout  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$  :

- i)  $D_\alpha(v_\beta v'_\gamma) = v_\beta D_\alpha v'_\gamma + v'_\gamma D_\alpha v_\beta$ .
- ii)  $D_\alpha a_{\beta\gamma} = 0$ .
- iii)  $D_\alpha a_{\beta\eta} v_\gamma = a_{\beta\eta} D_\alpha v_\gamma$ .

**Preuve.**

i) Ceci découle de la définition 1.10.

ii) On a  $a_{\alpha\beta} a^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$  et en utilisant la proposition 2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} D_\alpha a_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha a_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta a_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta a_{\beta\delta} \\ &= \partial_\alpha a_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} (\partial_\alpha a_{\beta\tau} + \partial_\beta a_{\alpha\tau} - \partial_\tau a_{\alpha\beta}) a_{\delta\gamma} - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} (\partial_\alpha a_{\gamma\tau} + \partial_\gamma a_{\alpha\tau} - \partial_\tau a_{\alpha\gamma}) a_{\beta\delta} \\ &= \partial_\alpha a_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\delta\gamma} (\partial_\alpha a_{\beta\tau} + \partial_\beta a_{\alpha\tau} - \partial_\tau a_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\beta\delta} (\partial_\alpha a_{\gamma\tau} + \partial_\gamma a_{\alpha\tau} - \partial_\tau a_{\alpha\gamma}) \\ &= \partial_\alpha a_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\delta\gamma} \partial_\alpha a_{\beta\tau} - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\delta\gamma} \partial_\beta a_{\alpha\tau} + \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\delta\gamma} \partial_\tau a_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\beta\delta} \partial_\alpha a_{\gamma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\beta\delta} \partial_\gamma a_{\alpha\tau} + \frac{1}{2} a^{\delta\tau} a_{\beta\delta} \partial_\tau a_{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

Par symétrie du tenseur métrique et de son inverse, on a :

$$\begin{aligned} D_\alpha a_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha a_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \delta_\gamma^\tau \partial_\alpha a_{\beta\tau} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\tau \partial_\alpha a_{\tau\gamma} + \frac{1}{2} \delta_\gamma^\tau \partial_\tau a_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\tau \partial_\alpha a_{\gamma\tau} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\tau \partial_\gamma a_{\alpha\tau} + \frac{1}{2} \delta_\beta^\tau \partial_\tau a_{\alpha\gamma} \\ &= \partial_\alpha a_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \partial_\alpha a_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \partial_\beta a_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \partial_\gamma a_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\alpha a_{\gamma\beta} - \frac{1}{2} \partial_\gamma a_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\beta a_{\alpha\gamma} = 0. \end{aligned}$$

iii) D'après la définition 1.10, on a :

$$D_\alpha(c_{\beta\gamma} v_\tau) = v_\tau D_\alpha c_{\beta\gamma} + c_{\beta\gamma} D_\alpha v_\tau$$

En utilisant ii), on obtient :

$$D_\alpha a_{\beta\eta} v_\gamma = v_\gamma D_\alpha a_{\beta\eta} + a_{\beta\eta} D_\alpha v_\gamma = a_{\beta\eta} D_\alpha v_\gamma. \quad \blacksquare$$

Ces propriétés nous seront utiles par la suite pour faire des intégrations par parties dans la formulation variationnelle de Koiter.

**Propriété 1.13.** La dérivée covariante et le tenseur de courbure vérifient les équations de Codazzi-Mainardi :

$$D_\alpha b_{\beta\gamma} = D_\beta b_{\alpha\gamma}.$$

**Preuve.** Par définition, on a :

$$D_\alpha b_{\beta\gamma} = \partial_\alpha b_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta b_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta b_{\beta\delta} \quad \text{et} \quad D_\beta b_{\alpha\gamma} = \partial_\beta b_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^\delta b_{\delta\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta b_{\alpha\delta}.$$

Par symétrie du symbole de Christoffel, on a :  $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta b_{\delta\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^\delta b_{\delta\gamma}$ .

Il s'agit alors de montrer que :

$$\partial_\alpha b_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta b_{\beta\delta} = \partial_\beta b_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta b_{\alpha\delta}. \quad (1.2)$$

- Les cas  $\alpha = \beta = 1$  et  $\alpha = \beta = 2$  sont triviaux.
- Dans le cas où  $\alpha = \gamma = 1$  et  $\beta = 2$ , il s'agit de montrer l'égalité :

$$\partial_1 b_{21} - \Gamma_{11}^\delta b_{2\delta} = \partial_2 b_{11} - \Gamma_{\beta 1}^\delta b_{1\delta}. \quad (1.3)$$

D'après le théorème de Schwarz, on a la relation suivante :

$$\partial_2 \vec{X}_{11} - \partial_1 \vec{X}_{12} = 0.$$

Développons alors le membre de gauche avec les composantes contravariantes de  $\vec{X}_{\alpha\beta}$  :

$$\begin{aligned} \partial_2 \vec{X}_{11} - \partial_1 \vec{X}_{12} &= \partial_2(\Gamma_{11}^1 \vec{X}_1) + \partial_2(\Gamma_{11}^2 \vec{X}_2 + \partial_2(b_{11} \vec{N})) - \partial_1(\Gamma_{12}^1 \vec{X}_1) - \partial_1(\Gamma_{12}^2 \vec{X}_2) - \partial_1(b_{12} \vec{N}) \\ &= \partial_2 \Gamma_{11}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{11}^1 \partial_2 \vec{X}_1 + \partial_2 \Gamma_{11}^2 \vec{X}_2 + \Gamma_{11}^2 \partial_2 \vec{X}_2 + \partial_2 b_{11} \vec{N} + b_{11} \partial_2 \vec{N} \\ &\quad - \partial_1 \Gamma_{12}^1 \vec{X}_1 - \Gamma_{12}^1 \partial_1 \vec{X}_1 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 \vec{X}_2 - \Gamma_{12}^2 \partial_1 \vec{X}_2 - \partial_1 b_{12} \vec{N} - b_{12} \partial_1 \vec{N}. \end{aligned}$$

Puis recommençons à nouveau :

$$\begin{aligned} \partial_2 \vec{X}_{11} - \partial_1 \vec{X}_{12} &= \partial_2 \Gamma_{11}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{12}^2 \vec{X}_2 + b_{12} \vec{N}) + \partial_2 \Gamma_{11}^2 \vec{X}_2 \\ &\quad + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{22}^2 \vec{X}_2 + b_{22} \vec{N}) + \partial_2 b_{11} \vec{N} + b_{11} (-b_2^1 \vec{X}_1 - b_2^2 \vec{X}_2) \\ &\quad - \partial_1 \Gamma_{12}^1 \vec{X}_1 - \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{11}^2 \vec{X}_2 + b_{11} \vec{N}) - \partial_1 \Gamma_{12}^2 \vec{X}_2 \\ &\quad - \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{21}^2 \vec{X}_2 + b_{21} \vec{N}) - \partial_1 b_{12} \vec{N} - b_{12} (-b_1^1 \vec{X}_1 - b_1^2 \vec{X}_2). \end{aligned}$$

Puisque  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{N})$  forme une base, la composante selon  $\vec{N}$  est nulle :

$$\Gamma_{11}^1 b_{12} + \Gamma_{11}^2 b_{22} + \partial_2 b_{11} - \Gamma_{12}^1 b_{11} - \Gamma_{12}^2 b_{21} - \partial_1 b_{12} = 0,$$

ce qui montre (1.3).

- Dans le cas où  $\alpha = 1$  et  $\beta = \gamma = 2$ , il s'agit de montrer l'égalité :

$$\partial_1 b_{22} - \Gamma_{12}^\delta b_{2\delta} = \partial_2 b_{12} - \Gamma_{22}^\delta b_{1\delta}.$$

D'après le théorème de Schwarz, on a la relation suivante :

$$\partial_1 \vec{X}_{22} - \partial_2 \vec{X}_{21} = 0.$$

En procédant alors comme précédemment on montre l'égalité voulue.

- Les cas  $\alpha = 2, \beta = \gamma = 1$  et  $\alpha = \gamma = 2, \beta = 1$  sont aussi vrais par symétrie en  $\alpha, \beta$ . ■

**Remarque 1.14.** Les propriétés 1.12 et 1.13 sont aussi vraies lorsque l'on monte les indices en multipliant par la métrique.

### 1.3 Éléments de théorie des coques

On étudie la déformation de la surface comme dans le livre de Sanchez-Hubert, Sanchez-Palencia [39] page 115 et le cours de Garrigues [26] .

On considère un point  $P$  de la surface  $S$  indexé par sa position  $\vec{X}(x_1, x_2)$  et qui subit

un déplacement  $\mathbf{u}$ . On note sa nouvelle position  $\vec{X}^{\mathbf{u}}$  :

$$\vec{X}^{\mathbf{u}} = \vec{X} + \mathbf{u}.$$

Le tenseur métrique subit alors aussi une modification et devient  $a_{\alpha\beta}^{\mathbf{u}}$ . On peut faire un développement limité du tenseur métrique pour un déplacement  $\mathbf{u}$  infinitésimal :

**Définition 1.15.** *Le tenseur de changement de métrique ou tenseur du taux de déformation de la surface  $\gamma_{\alpha\beta}$  est défini par l'équation :*

$$a_{\alpha\beta}^{\mathbf{u}} = a_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + O(\|\mathbf{u}\|^2).$$

Nous allons essayer de trouver une autre expression pour ce tenseur. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant.

**Lemme 1.16.** *On a la relation suivante :*

$$a_{\beta\delta}\partial_{\alpha}(a^{\beta\tau}) = -a^{\beta\tau}\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}a_{\gamma\delta} - \Gamma_{\delta\alpha}^{\tau}.$$

**Preuve.** En utilisant la définition de l'inverse du tenseur métrique, on peut écrire :

$$a_{\beta\delta}\partial_{\alpha}(a^{\beta\tau}) = \partial_{\alpha}(a_{\beta\delta}a^{\beta\tau}) - a^{\beta\tau}\partial_{\alpha}a_{\beta\delta} = -a^{\beta\tau}\partial_{\alpha}a_{\beta\delta}.$$

or par définition du tenseur métrique et des symboles de Christoffel :

$$\partial_{\alpha}a_{\beta\delta} = \partial_{\alpha}\langle\vec{X}_{\beta}, \vec{X}_{\delta}\rangle = \langle\vec{X}_{\beta\alpha}, \vec{X}_{\delta}\rangle + \langle\vec{X}_{\beta}, \vec{X}_{\delta\alpha}\rangle = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}a_{\gamma\delta} + \Gamma_{\delta\alpha}^{\gamma}a_{\gamma\beta}.$$

Donc :

$$a_{\beta\delta}\partial_{\alpha}(a^{\beta\tau}) = -a^{\beta\tau}(\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}a_{\gamma\delta} + \Gamma_{\delta\alpha}^{\gamma}a_{\gamma\beta}) = -a^{\beta\tau}\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}a_{\gamma\delta} - \Gamma_{\delta\alpha}^{\tau}.$$

■

**Proposition 1.17.** *Le tenseur du taux de déformation de la surface a pour expression :*

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(D_{\alpha}u_{\beta} + D_{\beta}u_{\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3.$$

**Preuve.** Par définition, on a :

$$a_{\alpha\beta}^{\mathbf{u}} = \langle\partial_{\alpha}\vec{X}^{\mathbf{u}}, \partial_{\beta}\vec{X}^{\mathbf{u}}\rangle.$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}^{\mathbf{u}} &= \langle\vec{X}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\mathbf{u}, \vec{X}_{\beta} + \partial_{\beta}\mathbf{u}\rangle \\ &= \langle\vec{X}_{\alpha}, \vec{X}_{\beta}\rangle + \langle\vec{X}_{\alpha}, \partial_{\beta}\mathbf{u}\rangle + \langle\partial_{\alpha}\mathbf{u}, \vec{X}_{\beta}\rangle + O(\|\mathbf{u}\|^2) \\ &= a_{\alpha\beta} + \langle\vec{X}_{\alpha}, \partial_{\beta}\mathbf{u}\rangle + \langle\partial_{\alpha}\mathbf{u}, \vec{X}_{\beta}\rangle + O(\|\mathbf{u}\|^2). \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\langle\vec{X}_{\alpha}, \partial_{\beta}\mathbf{u}\rangle + \langle\partial_{\alpha}\mathbf{u}, \vec{X}_{\beta}\rangle).$$

En utilisant les composantes contravariantes de  $u$ , on obtient :

$$\partial_\alpha \mathbf{u} = \partial_\alpha (u^\gamma \vec{X}_\gamma + u^3 \vec{N}) = \partial_\alpha u^\gamma \vec{X}_\gamma + u^\gamma \vec{X}_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha u^3 \vec{N} + u^3 \vec{N}_\alpha.$$

Or on a :

$$\vec{X}_{\gamma\alpha} = \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \vec{X}_\beta + b_{\gamma\alpha} \vec{N} \quad \text{et} \quad \vec{N}_\alpha = -b_\alpha^\beta \vec{X}_\beta.$$

Donc :

$$\partial_\alpha \mathbf{u} = \partial_\alpha u^\gamma \vec{X}_\gamma + u^\gamma (\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \vec{X}_\beta + b_{\gamma\alpha} \vec{N}) + \partial_\alpha u^3 \vec{N} - u^3 b_\alpha^\beta \vec{X}_\beta.$$

Au final :

$$\partial_\alpha \mathbf{u} = (\partial_\alpha u^\beta + u^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta - b_\alpha^\beta u_3) \vec{X}_\beta + (u^\gamma b_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha u_3) \vec{N}. \quad (1.4)$$

Puisque  $\vec{X}_\delta$  et  $\vec{N}$  sont orthogonaux et en revenant aux composantes covariantes, on a :

$$\begin{aligned} \langle \partial_\alpha \mathbf{u}, \vec{X}_\delta \rangle &= (\partial_\alpha u^\beta + u^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta - b_\alpha^\beta u_3) a_{\beta\delta} = (\partial_\alpha (a^{\beta\tau} u_\tau) + a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta - b_\alpha^\beta u_3) a_{\beta\delta} \\ &= a_{\beta\delta} \partial_\alpha (a^{\beta\tau} u_\tau) + a_{\beta\delta} a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta - a_{\beta\delta} b_\alpha^\gamma a^{\beta\tau} u_3 \\ &= a_{\beta\delta} u_\tau \partial_\alpha a^{\beta\tau} + a_{\beta\delta} a^{\beta\tau} \partial_\alpha u_\tau + a_{\beta\delta} a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta - b_\alpha^\delta u_3. \end{aligned}$$

Mais comme :

$$a_{\beta\delta} a^{\gamma\beta} = \delta_\delta^\gamma,$$

ceci nous donne :

$$\langle \partial_\alpha \mathbf{u}, \vec{X}_\delta \rangle = a_{\beta\delta} u_\tau \partial_\alpha a^{\beta\tau} + \partial_\alpha u_\delta + a_{\beta\delta} a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta - b_\alpha^\delta u_3.$$

D'après le lemme 1.16 :

$$\begin{aligned} \langle \partial_\alpha \mathbf{u}, \vec{X}_\delta \rangle &= (-a^{\beta\tau} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma a_{\gamma\delta} - \Gamma_{\delta\alpha}^\tau) u_\tau + \partial_\alpha u_\delta + a_{\beta\delta} a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta - b_\alpha^\delta u_3 \\ &= -\Gamma_{\delta\alpha}^\tau u_\tau + \partial_\alpha u_\delta - b_\alpha^\delta u_3 \\ &= D_\alpha u_\delta - b_\alpha^\delta u_3. \end{aligned}$$

Le tenseur du taux de déformation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (\langle \vec{X}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle + \langle \partial_\alpha \mathbf{u}, \vec{X}_\beta \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (D_\beta u_\alpha - b_{\beta\alpha} u_3 + D_\alpha u_\beta - b_{\alpha\beta} u_3) \\ &= \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha - 2b_{\alpha\beta} u_3). \end{aligned}$$

On obtient bien la proposition. ■

Le tenseur de courbure devient  $b_{\alpha\beta}^u$  suite au déplacement du point  $P$ . On peut faire un développement limité du tenseur métrique pour un déplacement  $\mathbf{u}$  infinitésimal :

**Définition 1.18.** *Le tenseur des variations de courbure  $\rho_{\alpha\beta}$  est défini par :*

$$b_{\alpha\beta}^u = b_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + O(\|\mathbf{u}\|^2).$$

De même on peut obtenir une expression plus explicite.

**Proposition 1.19.** *Le tenseur des variations de courbure a pour expression :*

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = D_\alpha D_\beta u_3 + D_\alpha (b_\beta^\eta u_\eta) + b_\alpha^\eta D_\beta u_\eta - b_\alpha^\eta b_{\beta\eta} u_3.$$

**Preuve.** En utilisant les formules du produit mixte et du double produit vectoriel, on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2\|^2 &= \langle \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2, \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 \rangle = [\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2] \\ &= \langle \vec{X}_1, \vec{X}_2 \wedge (\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2) \rangle \\ &= \langle \vec{X}_1, \langle \vec{X}_2, \vec{X}_2 \rangle \vec{X}_1 - \langle \vec{X}_2, \vec{X}_1 \rangle \vec{X}_2 \rangle \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |a|. \end{aligned}$$

On a de même :

$$\|\vec{X}_1^{\mathbf{u}} \wedge \vec{X}_2^{\mathbf{u}}\|^2 = |a^{\mathbf{u}}|.$$

Mais d'après ce qui précède,

$$a_{\alpha\beta}^{\mathbf{u}} = a_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + O(\|\mathbf{u}\|^2),$$

donc on montre facilement que :

$$|a^{\mathbf{u}}| = |a| + 2a_{11}\gamma_{22}(\mathbf{u}) + 2a_{22}\gamma_{11}(\mathbf{u}) - 4a_{12}\gamma_{12}(\mathbf{u}) + O(\|\mathbf{u}\|^2).$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a^{\mathbf{u}}|^{1/2}} &= \frac{1}{|a|^{1/2}} \left( 1 - \frac{1}{|a|} (a_{11}\gamma_{22}(\mathbf{u}) + a_{22}\gamma_{11}(\mathbf{u}) - 2a_{12}\gamma_{12}(\mathbf{u}) + O(\|\mathbf{u}\|^2)) \right), \\ \frac{1}{|a^{\mathbf{u}}|^{1/2}} &= \frac{1}{|a|^{1/2}} \left( 1 - (a^{22}\gamma_{22}(\mathbf{u}) + a^{11}\gamma_{11}(\mathbf{u}) + 2a^{12}\gamma_{12}(\mathbf{u})) + O(\|\mathbf{u}\|^2) \right). \end{aligned}$$

Par définition,

$$\vec{N}^{\mathbf{u}} = \frac{\vec{X}_1^{\mathbf{u}} \wedge \vec{X}_2^{\mathbf{u}}}{\|\vec{X}_1^{\mathbf{u}} \wedge \vec{X}_2^{\mathbf{u}}\|} = \frac{\vec{X}_1^{\mathbf{u}} \wedge \vec{X}_2^{\mathbf{u}}}{|a^{\mathbf{u}}|^{1/2}},$$

et

$$\vec{X}_1^{\mathbf{u}} \wedge \vec{X}_2^{\mathbf{u}} = (\vec{X}_1 + \partial_1 \mathbf{u}) \wedge (\vec{X}_2 + \partial_2 \mathbf{u}) = \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 + \partial_1 \mathbf{u} \wedge \vec{X}_2 + \vec{X}_1 \wedge \partial_2 \mathbf{u} + O(\|\mathbf{u}\|^2).$$

Il s'en suit alors que :

$$\begin{aligned} \vec{N}^{\mathbf{u}} &= \frac{1}{|a|^{1/2}} [1 - (a^{22}\gamma_{22}(\mathbf{u}) + a^{11}\gamma_{11}(\mathbf{u}) + 2a^{12}\gamma_{12}(\mathbf{u}))][\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 + \partial_1 \mathbf{u} \wedge \vec{X}_2 + \vec{X}_1 \wedge \partial_2 \mathbf{u}] \\ &\quad + O(\|\mathbf{u}\|^2) \\ &= \frac{1}{|a|^{1/2}} [\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 + \partial_1 \mathbf{u} \wedge \vec{X}_2 + \vec{X}_1 \wedge \partial_2 \mathbf{u} - (a^{22}\gamma_{22}(\mathbf{u}) + a^{11}\gamma_{11}(\mathbf{u}) + 2a^{12}\gamma_{12}(\mathbf{u}))\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2] \\ &\quad + O(\|\mathbf{u}\|^2) \\ &= \vec{N} + \frac{1}{|a|^{1/2}} (\partial_1 \mathbf{u} \wedge \vec{X}_2 + \vec{X}_1 \wedge \partial_2 \mathbf{u}) - (a^{22}\gamma_{22}(\mathbf{u}) + a^{11}\gamma_{11}(\mathbf{u}) + 2a^{12}\gamma_{12}(\mathbf{u}))\vec{N} + O(\|\mathbf{u}\|^2). \end{aligned}$$



Les composantes contravariantes de  $\partial_\beta \mathbf{u}$  sont :

$$\partial_\beta \mathbf{u} = \langle \partial_\beta \mathbf{u}, \vec{X}^\gamma \rangle \vec{X}_\gamma + \langle \partial_\beta \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N},$$

donc

$$\partial_\beta \mathbf{u} \wedge \vec{X}_\alpha = \langle \partial_\beta \mathbf{u}, \vec{X}^\gamma \rangle \vec{X}_\gamma \wedge \vec{X}_\alpha + \langle \partial_\beta \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_\alpha.$$

En remplaçant les  $\alpha, \beta$  on a :

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{u} \wedge \vec{X}_2 + \vec{X}_1 \wedge \partial_2 \mathbf{u} &= \langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{X}^\gamma \rangle \vec{X}_\gamma \wedge \vec{X}_2 + \langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_2 - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{X}^\gamma \rangle \vec{X}_\gamma \wedge \vec{X}_1 \\ &\quad - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_1 \\ &= \langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{X}^1 \rangle |a|^{1/2} \vec{N} + \langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_2 + \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{X}^2 \rangle |a|^{1/2} \vec{N} \\ &\quad - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_1, \end{aligned}$$

d'où :

$$\partial_1 \mathbf{u} \wedge \vec{X}_2 + \vec{X}_1 \wedge \partial_2 \mathbf{u} = \langle \partial_\alpha \mathbf{u}, \vec{X}^\alpha \rangle |a|^{1/2} \vec{N} + \langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_2 - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_1.$$

Mais

$$\begin{aligned} \langle \partial_\alpha \mathbf{u}, \vec{X}^\alpha \rangle &= \langle \partial_\alpha \mathbf{u}, a^{\alpha\beta} \vec{X}_\beta \rangle = \langle \partial_1 \mathbf{u}, a^{11} \vec{X}_1 \rangle + \langle \partial_1 \mathbf{u}, a^{12} \vec{X}_2 \rangle + \langle \partial_2 \mathbf{u}, a^{21} \vec{X}_1 \rangle + \langle \partial_2 \mathbf{u}, a^{22} \vec{X}_2 \rangle \\ &= a^{11} \gamma_{11}(\mathbf{u}) + 2a^{12} \gamma_{12}(\mathbf{u}) + a^{22} \gamma_{22}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

d'où au final :

$$\vec{N}^u = \vec{N} + \frac{1}{|a|^{1/2}} (\langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_2 - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_1) + O(\|u\|^2).$$

D'autre part, les composantes covariantes de  $\vec{N} \wedge \vec{X}_\alpha$  sont en utilisant le produit mixte :

$$\begin{aligned} \vec{N} \wedge \vec{X}_\alpha &= \langle \vec{N} \wedge \vec{X}_\alpha, \vec{X}_\gamma \rangle \vec{X}^\gamma + \langle \vec{N} \wedge \vec{X}_\alpha, \vec{N} \rangle \vec{N} \\ &= [\vec{N}, \vec{X}_\alpha, \vec{X}_\gamma] \vec{X}^\gamma + [\vec{N}, \vec{X}_\alpha, \vec{N}] \vec{N} \\ &= [\vec{X}_\alpha, \vec{X}_\gamma, \vec{N}] \vec{X}^\gamma + [\vec{N}, \vec{N}, \vec{X}_\alpha] \vec{N} \\ &= \langle \vec{X}_\alpha \wedge \vec{X}_\gamma, \vec{N} \rangle \vec{X}^\gamma, \end{aligned}$$

donc

$$\langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_2 - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{N} \wedge \vec{X}_1 = -\langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle |a|^{1/2} \vec{X}^1 - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle |a|^{1/2} \vec{X}^2.$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{N}^u &= \vec{N} + \frac{1}{|a|^{1/2}} (-\langle \partial_1 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle |a|^{1/2} \vec{X}^1 - \langle \partial_2 \mathbf{u}, \vec{N} \rangle |a|^{1/2} \vec{X}^2) + O(\|u\|^2) \\ &= \vec{N} - \langle \partial_\alpha \mathbf{u}, \vec{N} \rangle \vec{X}^\alpha + O(\|u\|^2). \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'équation (1.4)

$$\partial_\beta \mathbf{u} = (\partial_\beta u^\delta + u^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\delta - b_\beta^\delta u_3) \vec{X}_\delta + (u^\gamma b_{\gamma\beta} + \partial_\beta u_3) \vec{N},$$

donc

$$\langle \partial_\beta \mathbf{u}, \vec{N} \rangle = (u^\gamma b_{\gamma\beta} + \partial_\beta u_3),$$

et au final :

$$\vec{N}^u = \vec{N} - (\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta.$$

Par définition du tenseur de courbure, on a :

$$b_{\alpha\beta} = \langle \vec{N}, \vec{X}_{\alpha\beta} \rangle = -\langle \vec{N}_\alpha, \vec{X}_\beta \rangle \quad \text{car} \quad \partial_\alpha \langle \vec{N}, \vec{X}_\beta \rangle = 0,$$

et de même :

$$b_{\alpha\beta}^u = -\langle \vec{N}_\alpha^u, \vec{X}_\beta^u \rangle,$$

d'autre part,

$$\vec{X}_\beta^u = \vec{X}_\beta + \partial_\beta \mathbf{u}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_\alpha^u, \vec{X}_\beta^u \rangle &= \langle \vec{N}_\alpha - \partial_\alpha ((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta), \vec{X}_\beta + \partial_\beta \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \vec{N}_\alpha, \vec{X}_\beta \rangle + \langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle - \langle \partial_\alpha ((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta), \vec{X}_\beta + \partial_\beta \mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$b_{\alpha\beta}^u = b_{\alpha\beta} - \langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle + \langle \partial_\alpha ((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta), \vec{X}_\beta + \partial_\beta \mathbf{u} \rangle,$$

et que

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = -\langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle + \langle \partial_\alpha ((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta), \vec{X}_\beta \rangle.$$

D'une part, d'après l'équation (1.4)

$$\partial_\beta \mathbf{u} = (\partial_\beta u^\delta + u^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\delta - b_\beta^\delta u_3) \vec{X}_\delta + (u^\gamma b_{\gamma\beta} + \partial_\beta u_3) \vec{N},$$

et d'après la proposition 1.9

$$\vec{N}_\alpha = -b_\alpha^\theta \vec{X}_\theta,$$

d'où :

$$\langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle = -b_\alpha^\theta (\partial_\beta u^\delta + u^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\delta - b_\beta^\delta u_3) a_{\delta\theta}.$$

Revenons aux composantes covariantes :

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle &= -b_\alpha^\theta (\partial_\beta (a^{\delta\tau} u_\tau) + a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\beta}^\delta - b_\beta^\delta u_3) \\ &= -b_\alpha^\theta (a_{\delta\theta} \partial_\beta (a^{\delta\tau}) u_\tau + a_{\delta\theta} a^{\delta\tau} \partial_\beta u_\tau + a_{\delta\theta} a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\beta}^\delta - a_{\delta\theta} b_\beta^\delta u_3). \end{aligned}$$

Puis on utilise le lemme 1.16 :

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle &= -b_\alpha^\theta (-a^{\tau\delta} \Gamma_{\delta\beta}^\gamma a_{\gamma\theta} u_\tau - \Gamma_{\theta\beta}^\tau u_\tau + \partial_\beta u_\theta + a_{\delta\theta} a^{\gamma\tau} u_\tau \Gamma_{\gamma\beta}^\delta - a_{\delta\theta} b_\beta^\delta u_3) \\ &= -b_\alpha^\theta (-\Gamma_{\theta\beta}^\tau u_\tau + \partial_\beta u_\theta - a_{\delta\theta} b_\beta^\delta u_3) \\ &= b_\alpha^\theta \Gamma_{\theta\beta}^\tau u_\tau - b_\alpha^\theta \partial_\beta u_\theta + b_\alpha^\theta a_{\delta\theta} b_\beta^\delta u_3, \end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle = b_\alpha^\theta \Gamma_{\theta\beta}^\tau u_\tau - b_\alpha^\theta \partial_\beta u_\theta + b_\alpha^\theta b_{\beta\theta} u_3. \quad (1.5)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha ((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta) &= \partial_\alpha (\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta + (\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \partial_\alpha \vec{X}^\delta \\ &= (\partial_{\alpha\delta} u_3 + \partial_\alpha (b_{\delta\gamma} u^\gamma)) \vec{X}^\delta + (\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \partial_\alpha \vec{X}^\delta, \end{aligned}$$

et en revenant aux composantes covariantes :

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta) &= (\partial_{\alpha\delta} u_3 + \partial_\alpha(b_{\delta\gamma} a^{\gamma\eta} u_\eta)) a^{\delta\theta} \vec{X}_\theta + (\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} a^{\gamma\eta} u_\eta) \partial_\alpha(a^{\delta\theta} \vec{X}_\theta) \\
&= (\partial_{\alpha\delta} u_3 + \partial_\alpha(b_\delta^\eta u_\eta)) a^{\delta\theta} \vec{X}_\theta + (\partial_\delta u_3 + b_\delta^\eta u_\eta) [\partial_\alpha(a^{\delta\theta}) \vec{X}_\theta + a^{\delta\theta} \partial_\alpha \vec{X}_\theta] \\
&= (\partial_{\alpha\delta} u_3 + \partial_\alpha(b_\delta^\eta u_\eta)) a^{\delta\theta} \vec{X}_\theta + (\partial_\delta u_3 + b_\delta^\eta u_\eta) [\partial_\alpha(a^{\delta\theta}) \vec{X}_\theta + a^{\delta\theta} \vec{X}_{\theta\alpha}] \\
&= (\partial_{\alpha\delta} u_3 + \partial_\alpha(b_\delta^\eta u_\eta)) a^{\delta\theta} \vec{X}_\theta + (\partial_\delta u_3 + b_\delta^\eta u_\eta) [\partial_\alpha(a^{\delta\theta}) \vec{X}_\theta + a^{\delta\theta} (\Gamma_{\theta\alpha}^\gamma \vec{X}_\gamma + b_{\theta\alpha} \vec{N})].
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \partial_\alpha((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta), \vec{X}_\beta \rangle &= (\partial_{\alpha\delta} u_3 + \partial_\alpha(b_\delta^\eta u_\eta)) a^{\delta\theta} a_{\theta\beta} + (\partial_\delta u_3 + b_\delta^\eta u_\eta) [\partial_\alpha(a^{\delta\theta}) a_{\theta\beta} + a^{\delta\theta} \Gamma_{\theta\alpha}^\gamma a_{\gamma\beta}] \\
&= \partial_{\alpha\beta} u_3 + \partial_\alpha(b_\beta^\eta u_\eta) + (\partial_\delta u_3 + b_\delta^\eta u_\eta) [\partial_\alpha(a^{\delta\theta}) a_{\theta\beta} + a^{\delta\theta} \Gamma_{\theta\alpha}^\gamma a_{\gamma\beta}].
\end{aligned}$$

Or  $\partial_\alpha(a^{\delta\theta}) a_{\theta\beta} = -a^{\delta\theta} \Gamma_{\theta\alpha}^\gamma a_{\gamma\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\delta$  d'après le lemme 1.16, d'où :

$$\langle \partial_\alpha((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta), \vec{X}_\beta \rangle = \partial_{\alpha\beta} u_3 + \partial_\alpha(b_\beta^\eta u_\eta) - (\partial_\beta u_3 + b_\beta^\eta u_\eta) \Gamma_{\beta\alpha}^\delta. \quad (1.6)$$

Au final en rassemblant les égalités (1.5) et (1.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) &= -\langle \vec{N}_\alpha, \partial_\beta \mathbf{u} \rangle + \langle \partial_\alpha((\partial_\delta u_3 + b_{\delta\gamma} u^\gamma) \vec{X}^\delta), \vec{X}_\beta \rangle \\
&= -b_\alpha^\theta \Gamma_{\theta\beta}^\tau u_\tau + b_\alpha^\theta \partial_\beta u_\theta - b_\alpha^\theta b_{\beta\theta} u_3 + \partial_{\alpha\beta} u_3 + \partial_\alpha(b_\beta^\eta u_\eta) - (\partial_\delta u_3 + b_\delta^\eta u_\eta) \Gamma_{\beta\alpha}^\delta \\
&= -b_\alpha^\theta \Gamma_{\theta\beta}^\tau u_\tau + b_\alpha^\theta \partial_\beta u_\theta - b_\alpha^\theta b_{\beta\theta} u_3 + \partial_{\alpha\beta} u_3 + \partial_\alpha(b_\beta^\eta u_\eta) - \partial_\delta u_3 \Gamma_{\beta\alpha}^\delta - b_\delta^\eta u_\eta \Gamma_{\beta\alpha}^\delta \\
\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) &= \partial_{\alpha\beta} u_3 - \Gamma_{\beta\alpha}^\delta \partial_\delta u_3 + \partial_\alpha(b_\beta^\eta u_\eta) - b_\delta^\eta u_\eta \Gamma_{\beta\alpha}^\delta + b_\alpha^\theta \partial_\beta u_\theta - b_\alpha^\theta \Gamma_{\theta\beta}^\tau u_\tau - b_\alpha^\theta b_{\beta\theta} u_3.
\end{aligned}$$

Puisque

$$D_\alpha D_\beta u_3 = \partial_\alpha D_\beta u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma D_\gamma u_3 = \partial_\alpha \partial_\beta u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma u_3,$$

il vient au final :

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = D_\alpha D_\beta u_3 + D_\alpha(b_\beta^\eta u_\eta) + b_\alpha^\theta D_\beta u_\theta - b_\alpha^\theta b_{\beta\theta} u_3.$$

■

**Propriété 1.20.** Les tenseurs  $\gamma_{\alpha\beta}$  et  $\rho_{\alpha\beta}$  sont symétriques :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \rho_{\beta\alpha}(\mathbf{u}).$$

**Preuve.**

- La première relation provient de la symétrie de  $b_{\alpha\beta}$ .

- Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) &= D_\alpha D_\beta u_3 - b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta} u_3 + b_\alpha^\gamma D_\beta u_\gamma + D_\alpha b_\beta^\gamma u_\gamma \\
\text{et} \quad \rho_{\beta\alpha}(\mathbf{u}) &= D_\beta D_\alpha u_3 - b_\beta^\gamma b_{\gamma\alpha} u_3 + b_\beta^\gamma D_\alpha u_\gamma + D_\beta b_\alpha^\gamma u_\gamma.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Schwarz, on a :  $D_\alpha D_\beta u_3 = D_\beta D_\alpha u_3$ .

Par la symétrie du tenseur de courbure et du tenseur métrique, on a :

$$b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta} = b_{\alpha\delta} a^{\delta\gamma} b_{\gamma\beta} = b_{\alpha\delta} a^{\delta\gamma} b_{\beta\gamma} = b_{\alpha\delta} a^{\gamma\delta} b_{\beta\gamma} = b_{\alpha\delta} b_\beta^\delta = b_\beta^\delta b_{\delta\alpha} = b_\beta^\gamma b_{\gamma\alpha}.$$

De plus :

$$b_\alpha^\gamma D_\beta u_\gamma + D_\alpha b_\beta^\gamma u_\gamma = b_\alpha^\gamma D_\beta u_\gamma + b_\beta^\gamma D_\alpha u_\gamma + u_\gamma D_\alpha b_\beta^\gamma,$$

et grâce aux propriétés 1.12 iii) et 1.13, on a :

$$D_\alpha b_\beta^\gamma = D_\alpha b_{\beta\delta} a^{\delta\gamma} = a^{\delta\gamma} D_\alpha b_{\beta\delta} = a^{\delta\gamma} D_\beta b_{\alpha\delta} = D_\beta b_{\alpha\delta} a^{\delta\gamma} = D_\beta b_\alpha^\gamma.$$

D'où :

$$\begin{aligned} b_\alpha^\gamma D_\beta u_\gamma + D_\alpha b_\beta^\gamma u_\gamma &= b_\alpha^\gamma D_\beta u_\gamma + b_\beta^\gamma D_\alpha u_\gamma + u_\gamma D_\beta b_\alpha^\gamma = b_\beta^\gamma D_\alpha u_\gamma + b_\alpha^\gamma D_\beta u_\gamma + u_\gamma D_\beta b_\alpha^\gamma \\ &= b_\beta^\gamma D_\alpha u_\gamma + D_\beta b_\alpha^\gamma u_\gamma. \end{aligned}$$

Ceci nous donne :  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \rho_{\beta\alpha}(\mathbf{u})$ . ■

**Notation 1.21.** On notera sur le même principe que précédemment :

$$\gamma_\alpha^\beta(\mathbf{u}) = \gamma_{\alpha\delta}(\mathbf{u}) a^{\delta\beta} \quad \text{et} \quad \rho_\alpha^\beta(\mathbf{u}) = \rho_{\alpha\delta}(\mathbf{u}) a^{\delta\beta}.$$

**Remarque 1.22.**  $\gamma_\alpha^\beta(\mathbf{u})$  et  $\rho_\alpha^\beta(\mathbf{u})$  ne sont pas symétriques en  $\alpha, \beta$ .

## 1.4 Le modèle de Koiter

### 1.4.1 Définitions

D'après la loi de Hooke et par réduction sur la surface, on peut exprimer le comportement de la coque soumise à une déformation élastique de faible amplitude en utilisant la définition suivante.

**Définition 1.23.** On définit le tenseur de rigidité surfacique du matériau isotrope :

$$M^{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (a^{\alpha\gamma} a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta} a^{\beta\gamma})$$

où  $E$  et  $\nu$  sont le module de Young et le coefficient de Poisson.

Les espaces variationnels et les formes bilinéaires suivants sont introduits dans Koiter [32].

**Définition 1.24.** On définit les espaces variationnels suivants :

$$H^1(S) = \{u \in L^2(S) \text{ tel que } \partial_\alpha u \in L^2(S) \text{ pour } \alpha = 1, 2\}$$

$$H^2(S) = \{u \in L^2(S) \text{ tel que } \partial_\alpha u \in L^2(S), \partial_{\alpha\beta}^2 u \in L^2(S) \text{ pour } \alpha, \beta = 1, 2\}.$$

$$W(S) = \{\mathbf{u} \in H^1 \times H^1 \times H^2(S), \text{ tel que } \mathbf{u}|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } \partial_\alpha u_3|_{\Gamma_0} = 0 \text{ pour } \alpha = 1, 2\}$$

$$W_m(S) = \{\mathbf{u} \in H^1 \times H^1 \times L^2(S), \text{ tel que } u_\alpha|_{\Gamma_0} = 0 \text{ pour } \alpha = 1, 2\}.$$

On désigne par  $dS$  la 2-forme riemannienne de volume et son expression est :

$$dS = \sqrt{|a|} dx_1 dx_2 \quad \text{avec} \quad |a| = \det(a_{\alpha\beta}).$$

**Définition 1.25.** On appelle forme bilinéaire de membrane l'application de  $W_m(S) \times W_m(S)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$a_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\sigma\delta}(\mathbf{v}) dS.$$

La forme bilinéaire de flexion (ou bending) est l'application de  $W(S) \times W(S)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$a_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_S M^{\alpha\beta\sigma\delta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\sigma\delta}(\mathbf{v}) dS.$$

La forme bilinéaire de Koiter est l'application de  $W(S) \times W(S)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$a_{K(\varepsilon)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{\varepsilon^2}{3} a_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Bernadou et Ciarlet [9] ont montré que les formes bilinéaires  $a_m$  et  $a_b$  sont continues symétriques positives respectivement sur  $W_m(S)$  et  $W(S)$  et que  $a_{K(\varepsilon)}$  est coercive.

**Remarque 1.26.** Lorsqu'on étudie la forme bilinéaire de membrane seule, on ne se place pas sur le même espace fonctionnel que lorsqu'on étudie la forme bilinéaire de Koiter.

La formulation variationnelle du problème aux valeurs propres de Koiter s'écrit :

On cherche  $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u}^\varepsilon \in W(S) \setminus \{0\}$  tels que :

$$\forall \mathbf{v} \in W(S), \int_S a_{K(\varepsilon)}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) dS = \lambda^\varepsilon \int_S a^{\alpha\beta} u_\alpha^\varepsilon v_\beta + u_3^\varepsilon v_3 dS. \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_\alpha^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ ,  $\mathbf{v} = (v_\alpha, v_3)$  sont des déplacements bidimensionnels dans le système de coordonnées normales sur  $S$ .

## 1.4.2 Ecriture sous forme matricielle

On va écrire le problème sous forme matricielle en intégrant par parties grâce à la proposition suivante :

**Proposition 1.27.** Pour  $\mathbf{v}$  nul au bord, on a :

$$\int_S D_\alpha T^{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta dS = - \int_S T^{\alpha\beta} D_\alpha \mathbf{v}_\beta dS.$$

**Preuve.** Ceci revient à montrer que :

$$\int_S D_\alpha(T^{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta) \, dS = 0$$

et donc que :

$$\int_S D_\alpha(T^\alpha) \, dS = 0$$

pour  $T^\alpha$  nul au bord.

Par définition de la dérivée covariante :

$$D_\alpha(T^\alpha) = \partial_\alpha T^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^\beta$$

donc

$$\int_S D_\alpha(T^\alpha) \, dS = \int_S [\partial_\alpha T^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^\beta] \sqrt{|a|} \, dx_1 dx_2.$$

Puisque  $T^\alpha$  est nul au bord, on a par intégration par parties,

$$\int_S D_\alpha(T^\alpha) \, dS = \int_S [-\partial_\alpha \sqrt{|a|} T^\alpha + \sqrt{|a|} \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^\beta] \, dx_1 dx_2.$$

Il nous suffit alors de montrer l'égalité :

$$\partial_\alpha \sqrt{|a|} = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \partial_\alpha |a| = \Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma \sqrt{|a|},$$

ou encore

$$\frac{1}{2|a|} \partial_\alpha |a| = \Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma.$$

Or d'après la proposition 2.1,

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma = \frac{1}{2} a^{\gamma\delta} (\partial_\gamma a_{\alpha\delta} + \partial_\alpha a_{\gamma\delta} - \partial_\delta a_{\gamma\alpha}) = \frac{1}{2} (a^{\gamma\delta} \partial_\gamma a_{\alpha\delta} + a^{\gamma\delta} \partial_\alpha a_{\gamma\delta} - a^{\gamma\delta} \partial_\delta a_{\gamma\alpha}),$$

par somme, en échangeant les indices  $\delta$  et  $\gamma$  dans le dernier terme, on a :

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma = \frac{1}{2} (a^{\gamma\delta} \partial_\gamma a_{\alpha\delta} + a^{\gamma\delta} \partial_\alpha a_{\gamma\delta} - a^{\delta\gamma} \partial_\gamma a_{\delta\alpha}) = \frac{1}{2} a^{\gamma\delta} \partial_\alpha a_{\gamma\delta}.$$

D'où :

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma = \frac{1}{2} (a^{11} \partial_\alpha a_{11} + a^{22} \partial_\alpha a_{22} + a^{12} \partial_\alpha a_{12} + a^{21} \partial_\alpha a_{21}).$$

Par définition de l'inverse du tenseur métrique, on peut écrire :

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma = \frac{1}{2|a|} (a_{22} \partial_\alpha a_{11} + a_{11} \partial_\alpha a_{22} - a_{12} \partial_\alpha a_{12} - a_{21} \partial_\alpha a_{21}).$$

D'autre part,

$$|a| = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

donc

$$\frac{1}{2|a|} \partial_\alpha |a| = \Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma.$$

■

On applique la proposition précédente au membre de gauche de l'équation (1.7), ce qui nous donne les matrices opérateurs suivantes :

**Définition 1.28.** On définit l'opérateur matriciel de membrane par la relation :

$$a_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_S \mathbf{M}\mathbf{u} \mathbf{v} \, dS = \int_S M^\alpha \mathbf{u} v_\alpha + M^3 \mathbf{u} v_3 \, dS$$

l'opérateur matriciel de flexion par la relation :

$$a_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_S \mathbf{B}\mathbf{u} \mathbf{v} \, dS = \int_S B^\alpha \mathbf{u} v_\alpha + B^3 \mathbf{u} v_3 \, dS$$

et l'opérateur matriciel de Koiter par la relation :

$$a_{K(\varepsilon)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_S \mathbf{K}(\varepsilon)\mathbf{u} \mathbf{v} \, dS = \int_S K^\alpha(\varepsilon)\mathbf{u} v_\alpha + K^3(\varepsilon)\mathbf{u} v_3 \, dS.$$

**Définition 1.29.** On définit la matrice de masse :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^{zz} & 0 & 0 \\ 0 & a^{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le problème (1.7) s'écrit alors :

On cherche  $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u}^\varepsilon \in W(S) \setminus \{0\}$  tels que :

$$\mathbf{M}\mathbf{u}^\varepsilon + \varepsilon^2 \mathbf{B}\mathbf{u}^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \mathbf{A}\mathbf{u}^\varepsilon. \quad (1.8)$$

Le problème aux valeurs propres membranaire associé s'écrit :

On cherche  $\lambda^m \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u}^m \in W_m(S) \setminus \{0\}$  tels que :

$$\mathbf{M}\mathbf{u}^m = \lambda^m \mathbf{A}\mathbf{u}^m. \quad (1.9)$$

**Proposition 1.30.** L'opérateur de membrane a pour composantes :

$$\begin{cases} M^\eta(\mathbf{u}) = -D_\gamma(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) \\ M^3(\mathbf{u}) = -M^{\alpha\beta\gamma\eta}\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_{\gamma\eta} \end{cases} \quad (1.10)$$

et l'opérateur de flexion a pour composantes :

$$\begin{cases} B^\delta(\mathbf{u}) = -D_\eta(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\delta) - D_\gamma(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}))b_\eta^\delta \\ B^3(\mathbf{u}) = D_\gamma D_\eta(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) - M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} \end{cases} \quad (1.11)$$

**Preuve.**

- Par définition du tenseur de changement de métrique, on a :

$$\int_S M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\gamma\eta}(\mathbf{v}) dS = \int_S M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \left( \frac{1}{2} (D_\gamma v_\eta + D_\eta v_\gamma) - b_{\gamma\eta} v_3 \right) dS.$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_S M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\gamma\eta}(\mathbf{v}) dS &= \int_S -\frac{1}{2} D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\eta - \frac{1}{2} D_\eta (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\gamma \\ &\quad - M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_{\gamma\eta} v_3 dS. \end{aligned}$$

Or  $M^{\alpha\beta\gamma\eta} = M^{\alpha\beta\eta\gamma}$  par symétrie du tenseur métrique, donc :

$$\begin{aligned} D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\eta + D_\eta (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\gamma &= D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\eta + D_\eta (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\gamma \\ &= 2D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\eta. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_S M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\gamma\eta}(\mathbf{v}) dS = \int_S -D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_\eta - M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_{\gamma\eta} v_3 dS.$$

Ceci nous donne les expressions de  $M^\eta(\mathbf{u})$  et  $M^3(\mathbf{u})$  :

$$\begin{aligned} M^\eta(\mathbf{u}) &= -D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) \\ M^3(\mathbf{u}) &= -M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_{\gamma\eta}. \end{aligned}$$

- Par définition du tenseur de changement de courbure, on a :

$$\int_S M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\gamma\eta}(\mathbf{v}) dS = \int_S M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) (D_\gamma D_\eta v_3 - b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} v_3 + b_\gamma^\delta D_\eta v_\delta + D_\gamma b_\eta^\delta v_\delta) dS.$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_S M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\gamma\eta}(\mathbf{v}) dS &= \int_S D_\gamma D_\eta (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) v_3 - M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} v_3 \\ &\quad - D_\eta (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_\gamma^\delta) v_\delta - D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) b_\eta^\delta v_\delta dS. \end{aligned}$$

Ceci nous donne les expressions de  $B^\delta(\mathbf{u})$  et  $B^3(\mathbf{u})$  :

$$B^\delta(\mathbf{u}) = -D_\eta (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_\gamma^\delta) - D_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) b_\eta^\delta$$

et

$$B^3(\mathbf{u}) = D_\gamma D_\eta (M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) - M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_\gamma^\tau b_{\tau\eta}.$$

■

**Proposition 1.31.** *L'opérateur de membrane a pour composantes :*

$$\begin{aligned} M^\eta &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} D^\eta \gamma_\alpha^\alpha - \frac{E}{1+\nu} D^\tau \gamma_\tau^\eta \\ M^3 &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} b_\gamma^\gamma \gamma_\alpha^\alpha - \frac{E}{1+\nu} b_\gamma^\beta \gamma_\beta^\gamma \end{aligned}$$



et l'opérateur de flexion :

$$\begin{aligned} B^\delta &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} a^{\tau\delta} D_\eta(b_\tau^\eta \rho_\alpha^\alpha) - \frac{E}{1+\nu} a^{\tau\delta} D_\eta(b_\tau^\beta \rho_\beta^\eta) - \frac{\nu E}{1-\nu^2} a^{\tau\delta} b_\tau^\gamma D_\gamma \rho_\alpha^\alpha - \frac{E}{1+\nu} a^{\tau\delta} b_\tau^\beta D_\gamma \rho_\beta^\gamma \\ B^3 &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} D^\eta D_\eta \rho_\alpha^\alpha + \frac{E}{1+\nu} D^\tau D_\eta \rho_\tau^\eta - \frac{\nu E}{1-\nu^2} \rho_\alpha^\alpha b_\tau^\gamma b_\tau^\gamma - \frac{E}{1+\nu} \rho_\beta^\gamma b_\tau^\gamma b_\tau^\beta. \end{aligned}$$

**Preuve.**

- D'après le système (1.10), on a :

$$\begin{aligned} M^\eta(\mathbf{u}) &= -D_\gamma(M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) \\ M^3(\mathbf{u}) &= -M^{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_{\gamma\eta}. \end{aligned}$$

Par définition du tenseur de rigidité, on a :

$$\begin{aligned} M^\eta(\mathbf{u}) &= -D_\gamma \left( \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\gamma} a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta} a^{\beta\gamma}) \right) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \right) \\ &= -D_\gamma \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_\beta^\gamma(\mathbf{u}) a^{\beta\eta} + \mu \gamma_\beta^\eta(\mathbf{u}) a^{\beta\gamma} \right) \\ &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} a^{\gamma\eta} D_\gamma \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} D_\gamma a^{\beta\eta} \gamma_\beta^\gamma(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\beta\gamma} D_\gamma \gamma_\beta^\eta(\mathbf{u}) \\ &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} D^\eta \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} D_\gamma a^{\beta\eta} \gamma_{\beta\tau}(\mathbf{u}) a^{\tau\gamma} - \frac{E}{2(1+\nu)} D^\beta \gamma_\beta^\eta(\mathbf{u}) \\ &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} D^\eta \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} D_\gamma \gamma_\tau^\eta(\mathbf{u}) a^{\tau\gamma} - \frac{E}{2(1+\nu)} D^\beta \gamma_\beta^\eta(\mathbf{u}) \\ &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} D^\eta \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\tau\gamma} D_\gamma \gamma_\tau^\eta(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} D^\beta \gamma_\beta^\eta(\mathbf{u}) \\ &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} D^\eta \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} D^\tau \gamma_\tau^\eta(\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} D^\beta \gamma_\beta^\eta(\mathbf{u}) \\ M^\eta(\mathbf{u}) &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} D^\eta \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) - \frac{E}{1+\nu} D^\tau \gamma_\tau^\eta(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M^3(\mathbf{u}) &= -\left[ \frac{\nu E}{1-\nu^2} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\gamma} a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta} a^{\beta\gamma}) \right] \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_{\gamma\eta} \\ &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) b_\tau^\gamma - \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_\beta^\gamma(\mathbf{u}) b_\tau^\beta - \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_\beta^\eta(\mathbf{u}) b_\tau^\beta \\ M^3(\mathbf{u}) &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2} \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) b_\tau^\gamma - 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_\beta^\gamma(\mathbf{u}) b_\tau^\beta. \end{aligned}$$

- D'après le système (1.11), on a :

$$B^\delta(\mathbf{u}) = -D_\eta(M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_\gamma^\delta) - D_\gamma(M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) b_\eta^\delta$$

et

$$B^3(\mathbf{u}) = D_\gamma D_\eta(M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) - M^{\alpha\beta\gamma\eta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) b_\tau^\gamma b_{\tau\eta}.$$

Par définition du tenseur de rigidité, on a :

$$\begin{aligned}
D_\eta(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\delta) &= D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma})\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\delta\right) \\
&= D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})a^{\gamma\eta}b_\gamma^\delta + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})a^{\beta\eta}b_\gamma^\delta + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})a^{\beta\gamma}b_\gamma^\delta\right) \\
&= D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})a^{\gamma\eta}b_{\gamma\tau}a^{\tau\delta} + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})a^{\beta\eta}b_\gamma^\delta\right. \\
&\quad \left.+ \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})a^{\beta\gamma}b_{\gamma\tau}a^{\tau\delta}\right) \\
&= D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})b_\tau^\eta a^{\tau\delta} + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_{\beta\tau}(\mathbf{u})a^{\tau\gamma}a^{\beta\eta}b_{\gamma\eta}a^{\eta\delta}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})b_\tau^\beta a^{\tau\delta}\right) \\
&= D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})b_\tau^\eta a^{\tau\delta} + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\tau^\eta(\mathbf{u})b_\eta^\tau a^{\eta\delta} + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})b_\tau^\beta a^{\tau\delta}\right) \\
&= D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})b_\tau^\eta a^{\tau\delta} + 2\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})b_\tau^\beta a^{\tau\delta}\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_\gamma(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}))b_\eta^\delta &= D_\gamma\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma})\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\right)b_\eta^\delta \\
&= D_\gamma\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})a^{\beta\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})a^{\beta\gamma}\right)b_{\eta\tau}a^{\tau\delta} \\
&= D_\gamma\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})a^{\gamma\eta}a^{\tau\delta}\right)b_{\eta\tau} + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})a^{\beta\eta}a^{\tau\delta}\right)b_{\eta\tau} \\
&\quad + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})a^{\beta\gamma}a^{\tau\delta}\right)b_{\eta\tau} \\
&= D_\gamma\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})\right)b_\tau^\gamma a^{\tau\delta} + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})\right)b_\tau^\beta a^{\tau\delta} \\
&\quad + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})a^{\beta\gamma}\right)b_{\eta\tau}a^{\tau\delta} \\
&= D_\gamma\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})\right)b_\tau^\gamma a^{\tau\delta} + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})\right)b_\tau^\beta a^{\tau\delta} \\
&\quad + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_{\beta\alpha}(\mathbf{u})a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma}\right)b_{\eta\tau}a^{\tau\delta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\gamma(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}))b_\eta^\delta &= D_\gamma\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})\right)b_\tau^\gamma a^{\tau\delta} + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})\right)b_\tau^\beta a^{\tau\delta} \\
&\quad + D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\eta^\gamma(\mathbf{u})\right)b_\tau^\eta a^{\tau\delta} \\
&= D_\gamma\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})\right)b_\tau^\gamma a^{\tau\delta} + 2D_\gamma\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})\right)b_\tau^\beta a^{\tau\delta}.
\end{aligned}$$

D'où au final :

$$\begin{aligned}
B^\delta(\mathbf{u}) &= \left[-\frac{\nu E}{1-\nu^2}D_\eta(\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})b_\tau^\eta) - 2\frac{E}{2(1+\nu)}D_\eta(\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})b_\tau^\beta) - \frac{\nu E}{1-\nu^2}D_\gamma(\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u}))b_\tau^\gamma\right. \\
&\quad \left.- 2\frac{E}{2(1+\nu)}D_\gamma(\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u}))b_\tau^\beta\right]a^{\tau\delta}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
D_\gamma D_\eta(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) &= D_\gamma D_\eta\left(\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma})\right)\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\right)\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \\
&= D_\gamma D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\alpha\gamma}a^{\beta\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\right. \\
&\quad \left.+ \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\right) \\
&= D_\gamma D_\eta\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\gamma\eta}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\eta}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\gamma}\rho_\beta^\eta(\mathbf{u})\right) \\
&= \frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\gamma\eta}D_\gamma D_\eta\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\eta}D_\gamma D_\eta\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u}) \\
&\quad + \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\gamma}D_\gamma D_\eta\rho_\beta^\eta(\mathbf{u}) \\
&= \frac{\nu E}{1-\nu^2}D^\eta D_\eta\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) + 2\frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\eta}D_\gamma D_\eta\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u}) \\
&= \frac{\nu E}{1-\nu^2}D^\eta D_\eta\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) + 2\frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\eta}D_\gamma D_\eta\rho_{\beta\tau}(\mathbf{u})a^{\tau\gamma} \\
&= \frac{\nu E}{1-\nu^2}D^\eta D_\eta\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) + 2\frac{E}{2(1+\nu)}D^\tau D_\eta\rho_\tau^\eta(\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M^{\alpha\beta\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} &= \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma})\right)\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} \\
&= \frac{\nu E}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} + \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\alpha\gamma}a^{\beta\eta}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} \\
&\quad + \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\alpha\eta}a^{\beta\gamma}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_{\tau\eta} \\
&= \frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_\tau^\gamma + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_\tau^\beta + \frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\alpha^\gamma(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_\tau^\alpha \\
&= \frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(u)b_\gamma^\tau b_\tau^\gamma + 2\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_\tau^\beta.
\end{aligned}$$

D'où au final :

$$B^3(u) = \frac{\nu E}{1-\nu^2}D^\eta D_\eta \rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u}) + 2\frac{E}{2(1+\nu)}D^\tau D_\tau \rho_\tau^\eta(\mathbf{u}) - \frac{\nu E}{1-\nu^2}\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_\tau^\gamma - 2\frac{E}{2(1+\nu)}\rho_\beta^\gamma(\mathbf{u})b_\gamma^\tau b_\tau^\beta.$$

■

## 1.5 Spectre de l'opérateur de Koiter

L'immersion de l'espace variationnel  $W(S)$  sur lequel l'opérateur de Koiter est défini est compacte dans  $(L^2(S))^3$  d'après le théorème de Rellich. L'opérateur de Koiter est alors à résolvante compacte et a une infinité de valeurs propres réelles positives admettant  $+\infty$  comme point d'accumulation.

**Théorème 1.32.** *Le spectre essentiel de l'opérateur de Koiter est vide :*

$$\sigma_{ess}(\mathbf{K}(\varepsilon)) = \emptyset.$$

Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia [39, Chap. X] ont montré que les valeurs propres de l'opérateur de Koiter sont attirées vers celles de l'opérateur de membrane lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

**Remarque 1.33.** *Le spectre essentiel de la membrane est non vide par défaut de compacité de l'espace fonctionnel sur lequel il est défini. Il sera explicité dans le chapitre suivant.*



# Chapitre 2

## La membrane dans le cas d'une coque axisymétrique

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit la classe des surfaces moyennes axisymétriques qui admettent une paramétrisation en fonction de la variable axiale et on calcule explicitement les coordonnées normales associées. Nous donnons les formules des tenseurs métrique et de courbure ainsi que les composantes de la membrane du chapitre précédent dans le cas de cette coque axisymétrique. On étudie ensuite le spectre essentiel de la membrane en utilisant la théorie de Agmon, Douglis et Nirenberg [1]. Après une partie explicative sur la transformée de Fourier angulaire, on réduit la dimension de notre problème en utilisant son axisymétrie. On donne l'expression de l'opérateur unidimensionnel de membrane à la fréquence angulaire  $k$  et on calcule également son spectre essentiel en s'appuyant sur l'article de Atkinson [5].

### 2.2 L'axisymétrie

#### 2.2.1 Les coordonnées cylindriques

On utilise le système de coordonnées cylindriques suivant :

$$(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}.$$

représenté graphiquement par le dessin ci-dessous :

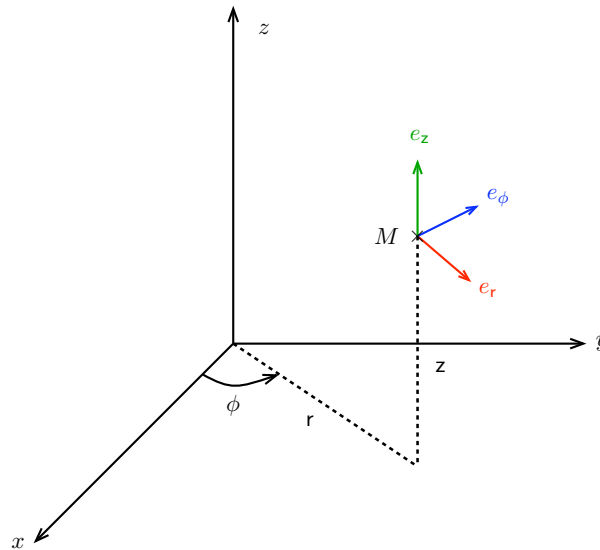


FIGURE 2.1 – Coordonnées cylindriques

Le lien entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques est rappelé dans le tableau suivant :

coordonnées cartésiennes	coordonnées cylindriques
$(x, y, z)$	$(r, \phi, z)$
$\begin{cases} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(\frac{y}{x}) \\ z = z \end{cases}$

Les coordonnées cylindriques sont :

- $r$  la distance à l'axe des  $z$
- $\phi$  l'angle de rotation autour de l'axe des  $z$
- $z$  la coordonnée le long de l'axe des  $z$ .

### 2.2.2 Coque axisymétrique

On considère le segment  $I = [-1, 1]$  de  $\mathbb{R}$  et une fonction

$$z \mapsto f(z) \in C^\infty(\bar{I}, \mathbb{R}_+^*).$$

Donc

$$\exists r_0, r_1 > 0, \forall z \in I, \quad f(z) \in [r_0, r_1].$$

On étudie alors la surface axisymétrique  $S$  obtenue à partir de la rotation de la courbe  $z \mapsto f(z)$  autour de l'axe des  $z$ . On note  $\Gamma_0$  le bord de  $S$  correspondant à  $z \in \partial I$ . On

pose :

$$x_1 = \varphi \in [0, 2\pi], \quad x_2 = z \in I.$$

Le lien avec les coordonnées cylindriques est le suivant :

$$\mathbf{r} = f(z), \quad \mathbf{z} = z, \quad \phi = \varphi.$$

La surface axisymétrique a alors pour paramétrage :

$$\vec{X}(\varphi, z) = (f(z) \cos(\varphi), f(z) \sin(\varphi), z), \quad z \in I, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Le domaine méridien de la surface est obtenu pour  $\varphi = 0$  et a pour paramétrage :

$$z \mapsto (f(z), z), \quad z \in I.$$

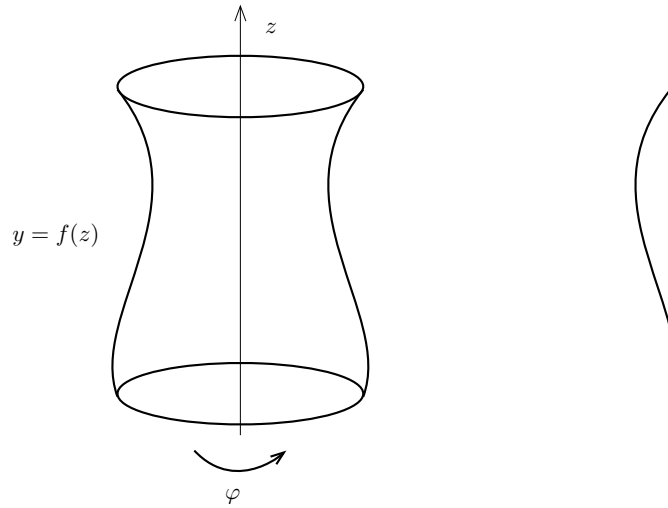


FIGURE 2.2 – Surface axisymétrique et son domaine méridien

**Notation 2.1.** *Pour des raisons de commodité d'écriture, nous allons adopter la notation suivante :*

$$s : z \in I \mapsto \sqrt{1 + f'(z)^2}.$$

Les coordonnées normales associées à ce paramétrage et définies dans la partie précédente ont pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{X}_z(\varphi, z) &= (f'(z) \cos(\varphi), f'(z) \sin(\varphi), 1), \\ \vec{X}_\varphi(\varphi, z) &= (-f(z) \sin(\varphi), f(z) \cos(\varphi), 0), \end{aligned}$$



et la normale sortante à la surface s'écrit :

$$\vec{N}(\varphi, z) = \frac{\vec{X}_\varphi \wedge \vec{X}_z}{\|\vec{X}_\varphi \wedge \vec{X}_z\|} = \frac{1}{s(z)}(\cos(\varphi), \sin(\varphi), -f'(z)).$$

On définit alors la coque axisymétrique  $S^\varepsilon$  construite à partir de la surface axisymétrique  $S$  et épaissie de  $\varepsilon$  de chaque coté de la ligne génératrice selon la normale en chaque point :

$$(\varphi, z, x_3) \in I \times [0, 2\pi] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \vec{X}(\varphi, z) + x_3 \vec{N}(z, \varphi).$$

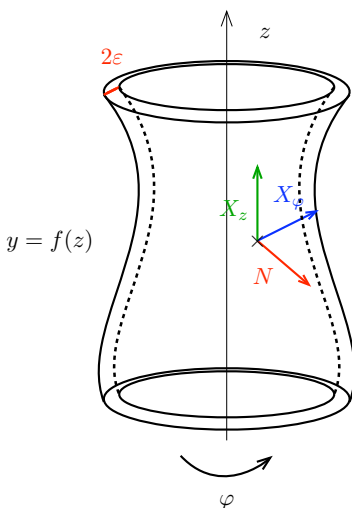


FIGURE 2.3 – Coque axisymétrique

## 2.3 L'opérateur de membrane en axisymétrie

Nous allons d'abord nous intéresser à l'opérateur de membrane  $\mathbf{M}$  qui approche le problème de Koiter lorsque la demi-épaisseur de la coque  $\varepsilon$  est petite.

### 2.3.1 Tenseurs métriques et de courbure

On applique les formules du chapitre 1 dans le cas de notre coque axisymétrique. Les dérivées partielles secondes du paramétrage  $\vec{X}$  ont pour formules :

$$\begin{aligned} \vec{X}_{zz}(\varphi, z) &= (f''(z) \cos(\varphi), f''(z) \sin(\varphi), 0), \\ \vec{X}_{z\varphi}(\varphi, z) &= (-f'(z) \sin(\varphi), f'(z) \cos(\varphi), 0), \\ \vec{X}_{\varphi\varphi}(\varphi, z) &= (-f(z) \cos(\varphi), -f(z) \sin(\varphi), 0). \end{aligned}$$

Par définition cf 1.3, le tenseur métrique et son inverse ont pour formules :

$$\begin{aligned} a_{zz} &= s(z)^2, & a_{z\varphi} &= 0, & a_{\varphi\varphi} &= f(z)^2, \\ a^{zz} &= \frac{1}{s(z)^2}, & a^{z\varphi} &= 0, & a^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{f(z)^2}, \end{aligned}$$

et le tenseur de courbure s'écrit :

$$b_{zz} = \frac{f''(z)}{s(z)}, \quad b_{z\varphi} = 0, \quad b_{\varphi\varphi} = -\frac{f(z)}{s(z)}.$$

Les symboles de Christoffel calculés grâce à la proposition 1.8 valent :

$$\Gamma_{zz}^z = \frac{f'(z)f''(z)}{s(z)^2}, \quad \Gamma_{z\varphi}^\varphi = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^z = -\frac{f(z)f'(z)}{s(z)^2}, \quad \Gamma_{zz}^\varphi = \Gamma_{z\varphi}^z = \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0.$$

Les dérivées covariantes ont par définition 1.10 pour formules :

$$\begin{aligned} D_z u_z &= \partial_z u_z - \frac{f'(z)f''(z)}{s(z)^2} u_z, & D_z u_\varphi &= \partial_z u_\varphi - \frac{f'(z)}{f(z)} u_\varphi, \\ D_\varphi u_z &= \partial_\varphi u_z - \frac{f'(z)}{f(z)} u_\varphi, & D_\varphi u_\varphi &= \partial_\varphi u_\varphi + \frac{f(z)f'(z)}{s(z)^2} u_z. \end{aligned}$$

D'après 1.17, le tenseur du taux de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} \gamma_{zz}(\mathbf{u}) &= \partial_z u_z - \frac{f'(z)f''(z)}{s(z)^2} u_z - \frac{f''(z)}{s(z)} u_3 \\ \gamma_{z\varphi}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\partial_z u_\varphi + \partial_\varphi u_z) - \frac{f'(z)}{f(z)} u_\varphi \\ \gamma_{\varphi\varphi}(\mathbf{u}) &= \partial_\varphi u_\varphi + \frac{f(z)f'(z)}{s(z)^2} u_z + \frac{f(z)}{s(z)} u_3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

D'après 1.19, le tenseur de changement de courbure s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_{zz}(\mathbf{u}) &= \partial_z^2 u_3 - \frac{f''(z)^2}{s(z)^4} u_3 + 2\frac{f''(z)}{s(z)^3} \partial_z u_z + \frac{f^{(3)}(z)s(z)^2 - 5f'(z)f''(z)^2}{s(z)^5} u_z \\ \rho_{\varphi\varphi}(\mathbf{u}) &= \partial_\varphi^2 u_3 - \frac{1}{s(z)^2} u_3 - 2\frac{1}{f(z)s(z)} \partial_\varphi u_\varphi - 2\frac{f'(z)}{s(z)^3} u_z \\ \rho_{z\varphi}(\mathbf{u}) &= \partial_{z\varphi} u_3 + \frac{f''(z)}{s(z)^3} \partial_\varphi u_z - \frac{1}{f(z)s(z)} \partial_z u_\varphi + 2\frac{f'(z)}{f(z)^2 s(z)} u_\varphi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Par la définition 1.23, le tenseur de rigidité du matériau isotrope a pour formule :

$$\begin{aligned} M^{zzzz} &= \frac{E}{(1-\nu^2)s(z)^4}, & M^{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= \frac{E}{(1-\nu^2)f(z)^4}, & M^{zz\varphi\varphi} &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)s(z)^2 f(z)^2}, \\ M^{zzz\varphi} &= M^{zz\varphi z} = M^{z\varphi z z} = M^{\varphi z z z} = M^{\varphi\varphi\varphi z} = M^{\varphi z\varphi\varphi} = M^{\varphi\varphi z\varphi} = M^{z\varphi\varphi\varphi} = 0, \\ M^{z\varphi\varphi z} &= M^{z\varphi\varphi\varphi} = M^{\varphi z z\varphi} = M^{\varphi z\varphi z} = \frac{E}{2(1+\nu)s(z)^2 f(z)^2}. \end{aligned}$$

### 2.3.2 La membrane

On applique les formules de la membrane de la proposition 1.31 et on obtient les formules suivantes :

**Proposition 2.2.** *La membrane d'une coque axisymétrique de génératrice  $z \mapsto f(z)$  a pour composantes :*

$$\begin{aligned} M^z(u) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ -\frac{1}{s(z)^4} \partial_z^2 u_z - \frac{1-\nu}{2f(z)^2 s(z)^2} \partial_\varphi^2 u_z - \frac{\nu+1}{2s(z)^2 f(z)^2} \partial_\varphi \partial_z u_\varphi + \frac{2}{s(z)^2} \frac{f'(z)}{f(z)^3} \partial_\varphi u_\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu}{f(z)s(z)^3} \partial_z u_3 + \frac{f'(z)^2}{f(z)^2 s(z)^4} u_z - \frac{f'(z)}{f(z)s(z)^4} \partial_z u_z + \frac{f'}{f(z)^2 s(z)^3} u_3 \right] \\ M^\varphi(u) &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ -\frac{1}{f(z)^4} \partial_\varphi^2 u_\varphi - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{f(z)^2 s(z)^2} \partial_z^2 u_\varphi - \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{f(z)^2 s(z)^2} \partial_\varphi \partial_z u_z \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{f'(z)}{f(z)^3 s(z)^2} \partial_z u_\varphi - \frac{3-\nu}{2} \frac{f'(z)}{f(z)^3} \frac{1}{s(z)^2} \partial_\varphi u_z - \frac{1}{f(z)^3 s(z)} \partial_\varphi u_3 \right] \\ M^3(u) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{f(z)^3 s(z)} \partial_\varphi u_\varphi + \frac{\nu}{f(z)s(z)^3} \partial_z u_z + \frac{f'(z)}{f(z)^2 s(z)^3} u_z + \frac{1}{f(z)^2 s(z)^2} u_3 \right]. \end{aligned}$$

## 2.4 Spectre essentiel de la membrane

On rappelle des éléments de théorie spectrale pour calculer le spectre essentiel de l'opérateur de membrane.

### 2.4.1 Théorie spectrale

On redéfinit le spectre d'un opérateur ainsi que la notion de spectre essentiel. On considère  $A$  un opérateur linéaire auto-adjoint sur un espace de Hilbert  $H$ .

**Définition 2.3.** *L'ensemble résolvant de  $A$  est :*

$$\rho(A) := \{\Lambda \in \mathbb{C}, A - \Lambda I \text{ est inversible}\}$$

et le spectre de  $A$  est :

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Dans le cas des opérateurs autoadjoints on a la propriété suivante :

**Proposition 2.4.** *Soit  $A$  un opérateur autoadjoint, on a alors :*

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}.$$

Le spectre contient des éléments particuliers appelés valeurs propres :

**Définition 2.5.**  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  s'il existe  $\mathbf{u} \neq 0$  tel que :

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

On appelle sous-espace propre associé à  $\lambda$  le sous-espace :

$$E_\lambda := \{\mathbf{u} \in H, A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}.$$

La multiplicité de  $\lambda$  est la dimension de  $E_\lambda$ .

On note  $\sigma_{disc}(A)$  l'ensemble des valeurs propres isolées de  $A$  de multiplicité finie.

Une autre partie du spectre est le spectre essentiel défini généralement avec la notion d'opérateur de Fredholm.

**Définition 2.6.** L'opérateur  $A$  est un opérateur de Fredholm si :

- $\text{Ker}(A)$  est de dimension finie
- $\text{Im}(A)$  est fermée de codimension finie.

**Définition 2.7.** Le spectre essentiel de  $A$  est :

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm}\}.$$

On a une définition équivalente utilisant la notion de suite singulière dans le livre de Kato [31].

**Définition 2.8.** La suite  $(u_n)$  est une suite singulière pour  $(A, \Lambda)$  si :

- $\|u_n\|_H = 1$
- $\|(A - \lambda I)u_n\| \rightarrow 0$
- $u_n \rightarrow 0$  faiblement.

**Proposition 2.9.**

$$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ il existe une suite singulière pour } (A, \lambda)\}.$$

**Proposition 2.10.**

$$\sigma_{ess}(A) \sqcup \sigma_{disc}(A) = \sigma(A).$$

Autrement dit, le spectre essentiel de  $A$  contient tous les éléments du spectre qui ne sont pas valeurs propres isolées de multiplicité finie.

## 2.4.2 Rappels théoriques

On rappelle les définitions et notations sur les systèmes d'équations elliptiques introduites par Agmon, Douglis et Nirenberg dans [1].

On considère un système  $L(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})$  de  $n$  équations à  $n$  inconnues sur un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$  ainsi que ses conditions au bord  $B(\mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})$  de  $m$  équations avec :

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \partial_{\mathbf{x}} = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$$

Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , on note  $l_{ij}$  l'opérateur de la  $i$ -ème composante agissant sur la  $j$ -ème inconnue et on associe à chaque équation un entier  $s_i$  et à chaque inconnue un entier  $t_j$  tels que l'on ait :

$$\forall i, j \quad \deg l_{ij} \leq s_i + t_j.$$

La partie principale  $L'$  du système correspond au système où l'on ne garde que les termes  $l'_{ij}$  d'ordre  $s_i + t_j$  dans les opérateurs  $l_{ij}$ . Le symbole principal du système noté  $\underline{L}$  est la matrice obtenue à partir de la partie principale en remplaçant les termes  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  par  $i\xi_{x_k}$  avec  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.11.** *Le système  $L$  est dit elliptique au sens de Douglis et Nirenberg si on a :*

$$\det \underline{L}(\mathbf{x}, i\boldsymbol{\xi}) \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

De même que pour le système d'équations sur  $U$ , on note  $b_{ij}$  l'opérateur de la  $i$ -ème composante agissant sur la  $j$ -ème inconnue apparaissant dans le système  $B$  sur  $\partial U$  et on associe à chaque équation sur le bord un entier  $r_i$  tels que l'on ait :

$$\forall i, j \quad \deg b_{ij} \leq r_i + t_j.$$

La partie principale  $B'$  du système  $B$  correspond au système où l'on ne garde que les termes  $b'_{ij}$  d'ordre  $r_i + t_j$  dans les opérateurs  $b_{ij}$ .

La condition de Shapiro-Lopatinskii que doivent satisfaire les conditions limites sont introduites par Agmon, Douglis et Nirenberg [1] et Goldenveizer, Lidskii et Tovstik [27]. Elles sont ré-explicées dans la thèse de Anne-Lorraine Pellerin [38].

On prend  $\mathbf{y}$  un point du bord  $\partial U$  et on remplace le bord par son plan tangent à  $U$  en  $\mathbf{y}$  et  $U$  par le demi-espace correspondant. On regarde la partie principale  $L'$  de  $L$  ainsi que la partie principale  $B'$  de  $B$  au point  $\mathbf{y}$ .

On translate l'origine en ce point et on effectue le changement de coordonnées de manière à avoir  $y_1$  comme normale intérieure au domaine  $I$  et les autres coordonnées  $y_2, \dots, y_n$  tangentielles. On appelle  $U'$  le demi-espace délimité par le plan tangent à  $\mathbf{y}$  et contenant  $U$  et on note  $\tilde{L}' = (\tilde{l}'_{ij})$  et  $\tilde{B}' = (\tilde{b}'_{ij})$  les opérateurs  $L'$  et  $B'$  après le changement de variables.

On effectue ensuite formellement la transformée de Fourier tangentielle en remplaçant :

$$\partial_{y_i} \quad \text{par} \quad i\xi_i \quad \text{pour} \quad 2 \leq i \leq n.$$

Le système devient alors un système d'équations ordinaires en  $y_1$  avec une condition au bord en  $y_1 = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{l}'_{ij} u_j(y_1) = 0 \quad \text{sur} \quad [0, +\infty[ \quad , i = 1..n \\ \tilde{b}'_{ij} u_j(0) = 0 \quad i = 1..m \end{array} \right. \quad (2.3)$$

On note  $\mathbf{t}$  les solutions du système (2.3) exponentiellement décroissantes pour  $y_1 \rightarrow +\infty$  de la forme :

$$\mathbf{t}(y_1, \boldsymbol{\xi}') = \mathbf{v}e^{i\zeta y_1} \quad \text{avec } \mathbf{v} \text{ constant, } \boldsymbol{\xi}' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$$

et où les  $\zeta$  sont des racines de l'équation :

$$\det(\tilde{B}'(\mathbf{y}, i\zeta, i\xi_2, \dots, i\xi_n)) = 0 \quad \text{vérifiant } \text{Im}(\zeta) > 0.$$

**Définition 2.12.** *La condition de Shapiro-Lopatinskii est satisfaite en  $\mathbf{y}$  si pour tout  $\boldsymbol{\xi}' \neq 0$ , le système (2.3) admet  $\mathbf{u} = 0$  comme unique solution combinaison linéaire des fonctions de la forme  $\mathbf{t}$ .*

La condition de Shapiro-Lopatinskii est une propriété locale traduisant l'absence de solution oscillante en les variables tangentielles et exponentiellement décroissante en la variable normale intérieure (ondes de Rayleigh).

On utilise alors la théorie de Grubb et Geymonat [29] qui décrit le spectre essentiel pour ces opérateurs :

**Théorème 2.13.** *Le spectre essentiel d'un opérateur  $L$  elliptique au sens de Douglis et Nirenberg sur un ouvert  $U$  muni de conditions au bord  $B$  se décompose de la façon suivante :*

$$\sigma_{ess}(L) = \sigma_{ess}^U(L) \cup \sigma_{ess}^{\partial U}(L)$$

où

$$\sigma_{ess}^U(L) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - L \text{ n'est pas elliptique au sens de Douglis et Nirenberg en au moins un point de } U.\}$$

et

$$\sigma_{ess}^{\partial U}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C}, B \text{ ne satisfait pas la condition de Shapiro-Lopatinskii en au moins un point de } \partial U.\}$$

### 2.4.3 Spectre essentiel de la membrane

On applique alors la théorie précédente au problème aux valeurs propres bidimensionnel de la membrane  $\mathbf{M}$  d'une coque axisymétrique. On rappelle d'après la formule (1.10) qu'il peut s'écrire ainsi :

$$\begin{cases} -D_\gamma(M^{\alpha\beta\gamma\eta}\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) &= \lambda a^{\eta\tau} u_\tau \\ -M^{\alpha\beta\gamma\eta}\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})b_{\gamma\eta} &= \lambda u_3 \end{cases} \quad (2.4)$$

Au vu des différents ordres de dérivation, on prend les indices associés aux inconnues :

$$t_1 = t_2 = 1, \quad t_3 = 0$$

et ceux associés aux équations :

$$s_1 = s_2 = 1, \quad s_3 = 0.$$

Le symbole principal du système (2.4) vaut :

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} M^{\alpha\beta z} \xi_\alpha \xi_\beta & M^{\alpha\beta\varphi} \xi_\alpha \xi_\beta & iM^{\alpha z \zeta \eta} b_{\zeta \eta} \xi_\alpha \\ M^{\alpha z \beta \varphi} \xi_\alpha \xi_\beta & M^{\alpha\varphi\beta\varphi} \xi_\alpha \xi_\beta & iM^{\alpha\varphi\zeta\eta} b_{\zeta\eta} \xi_\alpha \\ iM^{\alpha z \zeta \eta} b_{\zeta\eta} \xi_\alpha & iM^{\alpha\varphi\zeta\eta} b_{\zeta\eta} \xi_\alpha & \lambda - M^{\alpha\beta\zeta\eta} b_{\alpha\beta} b_{\zeta\eta} \end{pmatrix}$$

On redémontre alors le résultat suivant obtenu dans l'article de Campbell [11] dans le cas des coques axisymétriques où les calculs sont plus simples.

**Théorème 2.14.** *Dans le cas de la membrane d'une coque axisymétrique paramétrée par la coordonnée axiale, on a :*

$$\sigma_{ess}^S(\mathbf{M}) = \left\{ E \frac{a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2}{a_1(\xi_z, \xi_\varphi)^2}, (\xi_z, \xi_\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, z \in I \right\}$$

où  $a_1$  et  $a_2$  désignent les première et deuxième formes fondamentales :

$$a_1(\xi_z, \xi_\varphi) = a_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta, \quad a_2(\xi_z, \xi_\varphi) = b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta.$$

**Preuve.** Pour développer le déterminant du symbole principal et calculer les éléments du spectre essentiel, on s'appuie sur l'article de Campbell [11].

Puisque l'on se place dans le cas des coques axisymétriques, on a :

$$M^{zzz\varphi} = M^{\varphi\varphi zz} = 0, \quad a^{z\varphi} = 0, \quad b_{z\varphi} = 0.$$

Grâce au logiciel de calcul formel Maple on montre que :

$$\det \underline{\mathbf{M}} = -\det \mathcal{M} [b_{\varphi\varphi}^2 \xi_z^4 + (2b_{zz} b_{\varphi\varphi}) \xi_z^2 \xi_\varphi^2 + b_{zz}^2 \xi_\varphi^4] + \lambda [c_{22} \xi_z^4 + (c_{33} + 2c_{12}) \xi_z^2 \xi_\varphi^2 + c_{11} \xi_\varphi^4]$$

où les  $c_{ij}$  sont les cofacteurs de la matrice  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M^{zzzz} & M^{zz\varphi\varphi} & M^{zzz\varphi} \\ M^{zz\varphi\varphi} & M^{\varphi\varphi\varphi\varphi} & M^{z\varphi\varphi\varphi} \\ M^{zzz\varphi} & M^{z\varphi\varphi\varphi} & M^{z\varphi z\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{zzzz} & M^{zz\varphi\varphi} & 0 \\ M^{zz\varphi\varphi} & M^{\varphi\varphi\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & M^{z\varphi z\varphi} \end{pmatrix}$$

D'autre part, on a par la règle de Sarrus la formule suivante :

$$\det \mathcal{M} = M^{zzzz} M^{\varphi\varphi\varphi\varphi} M^{z\varphi z\varphi} - (M^{zz\varphi\varphi})^2 M^{z\varphi z\varphi}$$

et les cofacteurs de la matrice  $\mathcal{M}$  valent :

$$\begin{array}{ll} c_{11} = M^{z\varphi z\varphi} M^{\varphi\varphi\varphi\varphi} - (M^{z\varphi\varphi\varphi})^2 & c_{12} = -M^{zz\varphi\varphi} M^{z\varphi z\varphi} + M^{zzz\varphi} M^{z\varphi\varphi\varphi} \\ c_{13} = 0 & c_{22} = M^{zzzz} M^{z\varphi z\varphi} - (M^{zzz\varphi})^2 \\ c_{23} = 0 & c_{33} = M^{zzzz} M^{\varphi\varphi\varphi\varphi} - (M^{zz\varphi\varphi})^2 \end{array} .$$

La seconde forme fondamentale de la surface  $a_2$  est définie par :

$$a_2(\xi_z, \xi_\varphi) = b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta = b_{zz} \xi_z^2 + b_{\varphi\varphi} \xi_\varphi^2.$$

On peut alors écrire :

$$\det \underline{\mathbf{M}} = -\det \mathcal{M} a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2 + \lambda [c_{22}\xi_z^4 + (c_{33} + 2c_{12})\xi_z^2\xi_\varphi^2 + c_{11}\xi_\varphi^4].$$

D'après la définition 1.23 on a la formule :

$$M^{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu a^{\alpha\beta} a^{\gamma\eta} + \frac{1-\nu}{2} (a^{\alpha\gamma} a^{\beta\eta} + a^{\alpha\eta} a^{\beta\gamma})).$$

Ceci nous permet alors de calculer la matrice  $\mathcal{M}$  en fonction du tenseur métrique :

$$\mathcal{M} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} (a^{zz})^2 & \nu a^{zz} a^{\varphi\varphi} & 0 \\ \nu a^{zz} a^{\varphi\varphi} & (a^{\varphi\varphi})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} a^{zz} a^{\varphi\varphi} \end{pmatrix}.$$

On peut alors donner une autre expression du déterminant et des cofacteurs de  $\mathcal{M}$  :

$$\det \mathcal{M} = \frac{E^3}{(1-\nu^2)^2} \frac{1-\nu}{2} (a^{zz} a^{\varphi\varphi})^3, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} \frac{1-\nu}{2} (a^{\varphi\varphi})^2 (a^{zz} a^{\varphi\varphi}) & c_{12} &= -\frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} \frac{1-\nu}{2} \nu (a^{zz} a^{\varphi\varphi})^2 \\ c_{13} &= 0 & c_{22} &= \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} \frac{1-\nu}{2} (a^{zz})^2 (a^{zz} a^{\varphi\varphi}) \\ c_{23} &= 0 & c_{33} &= \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} (1-\nu^2) (a^{zz} a^{\varphi\varphi})^2 \end{aligned}$$

On peut ensuite simplifier le déterminant de  $\underline{\mathbf{M}}$  :

$$\det \underline{\mathbf{M}} = -\det \mathcal{M} a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2 + \lambda \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} (1-\nu) \frac{a^{zz} a^{\varphi\varphi}}{2} [(a^{zz})^2 \xi_z^4 + 2(a^{zz} a^{\varphi\varphi}) \xi_z^2 \xi_\varphi^2 + (a^{\varphi\varphi})^2 \xi_\varphi^4].$$

Par définition des coefficients  $a^{\alpha\beta}$  et grâce à la formule (2.5) précédente, on a :

$$\begin{aligned} \det \underline{\mathbf{M}} &= -\det \mathcal{M} a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2 + \lambda \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} \frac{1-\nu}{2(a_{zz} a_{\varphi\varphi})^3} [(a_{\varphi\varphi})^2 \xi_z^4 + 2a_{zz} a_{\varphi\varphi} \xi_z^2 \xi_\varphi^2 + (a_{zz})^2 \xi_\varphi^4] \\ &= -\det \mathcal{M} a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2 + \lambda \frac{\det \mathcal{M}}{E} [(a_{\varphi\varphi})^2 \xi_z^4 + 2a_{zz} a_{\varphi\varphi} \xi_z^2 \xi_\varphi^2 + (a_{zz})^2 \xi_\varphi^4]. \end{aligned}$$

La première forme fondamentale de la surface est donnée par :

$$a_1(\xi_z, \xi_\varphi) = a_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta = a_{zz} \xi_z^2 + a_{\varphi\varphi} \xi_\varphi^2.$$

On peut alors écrire :

$$\det \underline{\mathbf{M}} = -\det \mathcal{M} a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2 + \lambda \frac{\det \mathcal{M}}{E} a_1(\xi_z, \xi_\varphi)^2.$$

Puisque  $\det \mathcal{M} \neq 0$ , on a alors l'équivalence suivante :

$$\det \underline{\mathbf{M}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = E \frac{a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2}{a_1(\xi_z, \xi_\varphi)^2}.$$



On peut donc en conclure d'après le théorème 2.13 que :

$$\sigma_{ess}^S(\mathbf{M}) = \left\{ E \frac{a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2}{a_1(\xi_z, \xi_\varphi)^2}, (\xi_z, \xi_\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, z \in I \right\}$$

Le spectre essentiel de la membrane est alors l'image de cette fonction et dépend donc uniquement de la géométrie de la coque et du module de Young  $E$  mais est indépendant du coefficient de Poisson  $\nu$ . ■

Toute notre étude se fait avec les conditions au bord de Dirichlet homogène :

$$u_\alpha|_{\partial S} = 0.$$

**Proposition 2.15.** *Dans le cas de la membrane d'une coque encastrée axisymétrique paramétrée par la coordonnée axiale, on a :*

$$\sigma_{ess}^{\partial S}(\mathbf{M}) = \emptyset.$$

Dans le cas des conditions au bord de Dirichlet homogène, le spectre essentiel de la membrane d'une coque axisymétrique est alors constitué uniquement des éléments  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels qu'il existe  $(\xi_z, \xi_\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  annulant le déterminant du symbole principal  $\underline{\mathbf{M}}$ .

**Preuve.** On s'inspire des travaux de Pellerin [38].

Soit  $\mathbf{y}$  un point du bord  $\partial S$ . On translate l'origine en ce point et on effectue le changement de coordonnées de manière à avoir  $y_1$  normale intérieure au domaine  $S$  et  $y_2$  tangentielle. On appelle  $S'$  le demi-espace délimité par le plan tangent à  $\mathbf{y}$  et contenant  $S$ .

La condition de Shapiro-Lopatinskii est satisfaite en  $\mathbf{y}$  s'il n'existe pas de solution oscillante en  $y_2$  et exponentiellement décroissante en  $y_1$  au système principal  $\underline{\mathbf{M}}$  sur  $S'$  muni des conditions au bord Dirichlet homogène.

Par l'absurde posons pour  $\xi \in \mathbb{R}^*$  et  $\zeta \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im } \zeta > 0$  :

$$\mathbf{u}(y_1, y_2) = \mathbf{v} e^{i(\xi y_1 + \zeta y_2)} \quad \mathbf{v} \text{ constant}$$

une solution de  $\underline{\mathbf{M}}$  et telle que  $u_\alpha|_{y_1=0} = 0$ .

La condition de Dirichlet homogène au bord implique que :

$$u_\alpha(0, y_2) = 0 \quad \text{donc} \quad v_\alpha e^{i\zeta y_2} = 0.$$

Puisque  $\text{Im } \zeta > 0$ , ceci implique :

$$u_\alpha = v_\alpha = 0 \quad \text{sur} \quad S'.$$

D'après (2.4), la composante  $u_3$  vérifie alors les équations :

$$\begin{cases} \partial_\gamma (M^{\alpha\beta\gamma\eta} b_{\alpha\beta} u_3) = 0 \\ M^{\alpha\beta\gamma\eta} b_{\alpha\beta} u_3 b_{\gamma\eta} = \lambda u_3 \end{cases}$$

On suppose que  $\mathbf{u}$  n'est pas nulle donc ceci nécessite d'avoir  $u_3 \neq 0$ . Puisque  $\mathbf{u}$  est d'une forme particulière, la première équation entraîne :

$$\begin{cases} M^{\alpha\beta zz} b_{\alpha\beta} \xi + M^{\alpha\beta\varphi z} b_{\alpha\beta} \zeta = 0 \\ M^{\alpha\beta z\varphi} b_{\alpha\beta} \xi + M^{\alpha\beta\varphi\varphi} b_{\alpha\beta} \zeta = 0 \end{cases}$$

On a :

$$M^{\alpha\beta\gamma\eta} b_{\alpha\beta} \xi \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \zeta \notin \mathbb{R}$$

ceci implique alors :

$$M^{\alpha\beta\gamma\eta} b_{\alpha\beta} = 0$$

Mais dans le cas d'une coque axisymétrique, le tenseur de courbure n'est pas identiquement nul car

$$b_{\varphi\varphi} = -\frac{f(z)}{s(z)}.$$

Donc  $\mathbf{u} = 0$  est la seule solution oscillante en les variables tangentielles et exponentiellement décroissante en la variable normale intérieure. Le spectre essentiel qui provient des conditions au bord est donc vide.  $\blacksquare$

**Remarque 2.16.** *Les résultats précédents ne s'appliquent pas dans le cas des plaques axisymétriques.*

#### 2.4.4 Spectre essentiel de la membrane d'une coque axisymétrique

On considère toujours une coque axisymétrique de surface moyenne ayant pour paramétrage :

$$\vec{X}(z, \varphi) = (f(z) \cos(\varphi), f(z) \sin(\varphi), z).$$

On rappelle les tenseurs métrique et de courbure :

$$\begin{aligned} a_{zz} &= s(z)^2, & a_{z\varphi} &= 0, & a_{\varphi\varphi} &= f(z)^2 \\ b_{zz} &= \frac{f''(z)}{s(z)}, & b_{z\varphi} &= 0, & b_{\varphi\varphi} &= -\frac{f(z)}{s(z)}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.14 et la proposition 2.15, le spectre essentiel de la membrane d'une coque axisymétrique est donné par :

$$\sigma_{ess}(\mathbf{M}) = \left\{ E \frac{a_2(\xi_z, \xi_\varphi)^2}{a_1(\xi_z, \xi_\varphi)^2}, (\xi_z, \xi_\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, z \in I \right\}.$$

**Proposition 2.17.** *Le spectre essentiel de la membrane d'une coque encastrée axisymétrique paramétrée par la coordonnée axiale est composé de :*

$$\sigma_{ess}(\mathbf{M}) = \left\{ \frac{E}{s(z)^2} \frac{(f''(z)\xi_z^2 - f(z)\xi_\varphi^2)^2}{(s(z)^2\xi_z^2 + f(z)^2\xi_\varphi^2)^2}, (\xi_z, \xi_\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, z \in I \right\}.$$

On s'intéresse à la base du spectre essentiel qui est positif ou nul et qui est le plus facile à voir numériquement. Celle-ci dépend de la nature de la coque étudiée ; on introduit alors la définition suivante :

**Définition 2.18.** *La coque est dite :*

- *parabolique* si  $f'' = 0$
- *elliptique* si  $f'' < 0$
- *hyperbolique* si  $f'' > 0$

On retrouve le résultat énoncé dans [19] :

**Proposition 2.19.** *Dans le cas d'une coque encastrée axisymétrique paramétrée par la coordonnée axiale, le spectre essentiel de la membrane est :*

- $[0, b]$ ,  $b \geq 0$  si la coque est hyperbolique ou parabolique.
- $[a, b]$ ,  $a > 0$  si la coque est elliptique.

**Preuve.** D'après la proposition précédente, on a :

$$\sigma_{ess}(\mathbf{M}) = \left\{ \frac{E}{(1 + f'(z)^2)f(z)^2} \frac{\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\xi_z^2 - \xi_\varphi^2\right)^2}{\left(\frac{1+f'(z)^2}{f(z)^2}\xi_z^2 + \xi_\varphi^2\right)^2}, z \in [-1, 1], (\xi_z, \xi_\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, z \in I \right\}$$

On introduit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  par :

$$g(x, y) = \frac{(\alpha x^2 - y^2)^2}{(\beta x^2 + y^2)^2}$$

avec

$$\alpha = \frac{f''(z)}{f(z)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 + f'(z)^2}{f(z)^2} > 0.$$

On cherche le minimum de la fonction  $g$ . Pour cela, on calcule ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{4x(\alpha x^2 - y^2)(\beta x^2 + y^2)(\alpha + \beta)y^2}{(\beta x^2 + y^2)^4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-4y(\alpha x^2 - y^2)(\beta x^2 + y^2)(\alpha + \beta)x^2}{(\beta x^2 + y^2)^4}$$

Si  $\alpha + \beta = 0$ , c'est-à-dire dans le cas où  $g = 1$ , alors le minimum de  $g$  est 1.

Si  $\alpha + \beta \neq 0$ , les points critiques sont alors  $(x, 0)$ ,  $(0, y)$ , et les couples  $(x, y)$  tels que  $y^2 = \alpha x^2$  ou  $y^2 = -\beta x^2$ .

Puisque  $\beta > 0$ , les points critiques vérifiant  $y^2 = -\beta x^2$  sont alors exclus.

Le signe de  $\alpha$  dépend de celui de  $f''(z)$ .

- Si  $\alpha < 0$ , alors les seuls points critiques sont les  $(x, 0)$ ,  $(0, y)$  avec :

$$g(x, 0) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad \text{et} \quad g(0, y) = 1.$$

Le minimum de  $g$  est alors strictement positif et vaut :

$$\min_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(g) = \min\left(\min_{z \in I} \frac{f''(z)^2 f(z)^2}{(1 + f'(z)^2)^2}, 1\right)$$

Dans le cas d'une coque axisymétrique elliptique, la base du spectre essentiel de la membrane est un nombre strictement positif.

• Si  $\alpha \geq 0$ , alors il existe des couples  $(x, y) \neq (0, 0)$  tels que  $y^2 = \alpha x^2$  et le minimum de  $g$  est donc 0 puisque  $\alpha + \beta \neq 0$ .

Dans le cas d'une coque axisymétrique hyperbolique ou parabolique, la base du spectre essentiel de la membrane est alors 0. ■

## 2.5 Transformation de Fourier angulaire

On utilise la symétrie du domaine axisymétrique pour diminuer la dimension du problème. Pour cela on applique la théorie des séries de Fourier.

Soit  $\mathbf{u} \in L^2(I \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^3$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$  appelée fréquence angulaire, on définit le coefficient de Fourier de  $\mathbf{u}$  par :

$$c_k(\mathbf{u}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

On a la propriété suivante :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad c_k(\partial_\varphi^j \mathbf{u}) = (ik)^j c_k(\mathbf{u}).$$

On peut écrire l'opérateur de membrane sous la forme :

$$\mathbf{M} = \sum_{l=0}^2 m_l(z, \partial_z) \partial_\varphi^l$$

où les  $m_l(z, \partial_z)$  sont des matrices de taille  $3 \times 3$  d'opérateurs différentiels en  $z$ .

Puisque les  $m_l(z, \partial_z)$  sont indépendants de  $\varphi$ , on peut calculer le symbole de Fourier de  $\mathbf{M}$  :

$$c_k(\mathbf{M}\mathbf{u}) = \sum_{l=0}^2 m_l(z, \partial_z) c_k(\partial_\varphi^l \mathbf{u}) = \sum_{l=0}^2 m_l(z, \partial_z) (ik)^l c_k(\mathbf{u}) = \mathbf{M}[k] c_k(\mathbf{u})$$

où on a posé

$$\mathbf{M}[k] = \sum_{l=0}^2 m_l(z, \partial_z) (ik)^l.$$

Pour résoudre le problème aux valeurs propres (1.9) :

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{A}\mathbf{u}. \quad (2.6)$$

on calcule les coefficients de Fourier de chacun des deux membres de l'équation, alors puisque  $\mathbf{A}$  est indépendante de  $\varphi$ , on obtient que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$c_k(\mathbf{M}\mathbf{u}) = \mathbf{M}[k]c_k(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{A}c_k(\mathbf{u}). \quad (2.7)$$

On utilise la notation simplifiée  $\mathbf{u}_k = c_k(\mathbf{u})$ .

Si  $(\lambda, \mathbf{u}_k)$  est une solution du problème (2.7), alors le couple

$$\left( \lambda, (z, \varphi) \mapsto c_k(\mathbf{u}_k(z))e^{ik\varphi} \right)$$

est solution de (2.6).

Ceci démontre l'inclusion suivante :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{disc}(\mathbf{M}[k]) \subset \sigma(\mathbf{M}).$$

Réciproquement, si  $(\lambda, \mathbf{u})$  est solution de (2.6), alors  $(\lambda, c_k(\mathbf{u}))$  est solution de (2.7) pour tout  $k$ .

**Remarque 2.20.** *Par la suite, nous ne considérerons que le cas  $k \in \mathbb{N}$ , car puisque l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$  peut s'écrire comme un polynôme en  $ik$  à coefficients réels, les valeurs propres en  $k$  sont égales aux valeurs propres en  $-k$  et leurs vecteurs propres sont conjugués.*

On va étudier le comportement de la plus petite valeur propre de l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$  en fonction de  $k$ . Dans notre cas précis, nous allons voir que la plus petite valeur propre de  $\mathbf{M}$  est atteinte pour un mode angulaire  $k$  arbitraire. Ceci est assez contraire à l'intuition et différent de ce qui se passe dans le cas par exemple du laplacien où la plus petite valeur propre est atteinte pour  $k = 0$ .

## 2.6 La membrane à fréquence $k$

La formulation variationnelle du problème aux valeurs propres de la membrane à la fréquence  $k$  s'écrit :

On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u} \in W_m(I) \setminus \{0\}$  tels que :

$$\forall \mathbf{v} \in W_m(I), \int_I M^{\alpha\beta\sigma\delta} \gamma_{\alpha\beta}[k](\mathbf{u}) \gamma_{\sigma\delta}[k](\mathbf{v}) s(z) f(z) dz = \lambda \int_I [a^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta + u_3 v_3] s(z) f(z) dz. \quad (2.8)$$

Les tenseurs métrique et de courbure à la fréquence  $k$  sont les mêmes que ceux de la membrane 2D et le tenseur de changement de métrique à la fréquence  $k$  obtenu à partir des formules (2.1) en remplaçant  $\partial_\varphi$  par  $ik$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\gamma_{zz}[k](\mathbf{u}) &= \partial_z u_z - \frac{f'(z)f''(z)}{s(z)^2} u_z - \frac{f''(z)}{s(z)} u_3 \\ \gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\partial_z u_\varphi + ik u_z) - \frac{f'(z)}{f(z)} u_\varphi \\ \gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u}) &= ik u_\varphi + \frac{f(z)f'(z)}{s(z)^2} u_z + \frac{f'(z)}{s(z)} u_3.\end{aligned}\tag{2.9}$$

L'écriture matricielle du problème (2.8) est :

On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u} \in W_m(I) \setminus \{0\}$  tels que :

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u} = \lambda \mathbf{A}\mathbf{u}.\tag{2.10}$$

On calcule alors la matrice de la membrane à la fréquence  $k$  grâce à la proposition 2.2 en remplaçant  $\partial_\varphi$  par  $ik$ .

**Proposition 2.21.** *Dans le cas d'une surface axisymétrique de paramétrage*

$$\vec{X}(z, \varphi) = (f(z) \cos(\varphi), f(z) \sin(\varphi), z),$$

la matrice de membrane à la fréquence  $k$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M}[k] = k^2 \mathbf{M}_0 + k \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

avec

$$\mathbf{M}_0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{2s(z)^2 f(z)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(z)^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 0 & i \frac{2f'(z)}{s(z)^2 f(z)^3} & 0 \\ i \left( \frac{(-3+\nu)f'(z)}{2f(z)^3 s(z)^2} + \frac{(1+\nu)f'(z)f''(z)}{2f(z)^2 s(z)^4} \right) & 0 & -i \frac{1}{f(z)^3 (1+f'(z)^2)^{1/2}} \\ -\frac{1+\nu}{2f(z)^2 s(z)^2} i \partial_z & & + i \nu \frac{f''(z)}{f(z)^2 s(z)^3} \\ 0 & i \frac{1}{f(z)^3 s(z)} & 0 \\ & -i \nu \frac{f''(z)}{f(z)^2 s(z)^3} & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{s(z)^4} \partial_z^2 & & & \frac{f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)}{f(z)s(z)^5} \\ +\left(\frac{3f'(z)f''(z)}{s(z)^6} - \frac{f'(z)}{f(z)s(z)^4}\right) \partial_z & & & -\frac{3f'(z)f''(z)^2}{s(z)^7} \\ +\frac{f''(z)^2+f'(z)f'''(z)}{s(z)^6} - \frac{4f'(z)^2f''(z)^2}{s(z)^8} & 0 & & +\frac{f'(z)}{f(z)^2s(z)^3} \\ -\frac{\nu f''(z)}{f(z)s(z)^4} + \frac{(1+\nu)f'^2f''(z)}{f(z)^2s(z)^6} & & & +\frac{f''(z)}{s(z)^5} \partial_z \\ +\frac{f'(z)}{f(z)^2s(z)^4} & & & -\frac{\nu}{f(z)s(z)^3} \partial_z \\ & & -\frac{1-\nu}{2f(z)^2s(z)^2} \partial_z^2 & \\ & & +\frac{(1-\nu)f'(z)f''(z)}{2f(z)^2s(z)^4} \partial_z & \\ & 0 & +\frac{(1-\nu)f'(z)}{2f(z)^3s(z)^2} \partial_z & 0 \\ & & +\frac{(1-\nu)f''(z)}{f(z)^3s(z)^2} & \\ & & -\frac{(1-\nu)f'(z)^2f''(z)}{f(z)^3s(z)^4} & \\ & & & \\ & & & \frac{f''(z)^2}{s(z)^6} \\ \left(-\frac{f''(z)}{s(z)^5} + \frac{\nu}{f(z)s(z)^3}\right) \partial_z & & & +\frac{1}{f(z)^2s(z)^2} \\ +\frac{f'(z)f''(z)^2}{s(z)^7} + \frac{f'(z)}{f(z)^2s(z)^3} & 0 & & -\frac{2\nu f''(z)}{f(z)s(z)^4} \\ -\frac{2\nu f'(z)f''(z)}{f(z)s(z)^5} & & & \end{pmatrix}.$$

## 2.7 Spectre essentiel de la membrane à fréquence $k$

Dans le cas où l'on réduit la dimension du problème en prenant la transformée de Fourier angulaire, on obtient un système en dimension 1. On utilise les résultats de l'article de Atkinson [5] pour déterminer le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$ .

**Théorème 2.22.** *Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$  est :*

$$\sigma_{ess}(\mathbf{M}[k]) = \left\{ E \frac{1}{(1+f'(z)^2)f(z)^2}, z \in [-1, 1] \right\}.$$

**Preuve.** La matrice  $\mathbf{M}[k]$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où

$$A : v \in \{H^1 \times H^1(I), v(\pm 1) = 0\} \mapsto \sum_{j=0}^2 a_j \partial_z^{2-j} v, \quad a_j \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})),$$

$$B : w \in L^2(I) \mapsto \sum_{j=0}^1 b_j \partial_z^{1-k} w, \quad b_j \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})),$$

$$C : v \in \{H^1 \times H^1(I), v(\pm 1) = 0\} \mapsto \sum_{j=0}^2 c_j \partial_z^{2-j} v, \quad c_j \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

et  $D$  est un opérateur de multiplication :

$$D : w \in L^2(I) \mapsto dw.$$

On applique le théorème 4.5 de l'article [5] avec :

$$a_0(z) = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+f'(z)^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\nu}{2f(z)^2(1+f'(z)^2)} \end{pmatrix},$$

$$b_0(z) = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \frac{f''(z)}{(1+f'(z)^2)^{5/2}} & \frac{\nu}{f(z)(1+f'(z)^2)^{3/2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_0(z) = -b_0^T(z),$$

$$d(z) = \frac{f''(z)^2}{(1+f'(z)^2)^3} + \frac{1}{(1+f'(z)^2)^2} - \frac{2\nu}{f(z)(1+f'(z)^2)^2}.$$

On a :

$$d(z) - c_0(z)a_0^{-1}(z)b_0(z) - \lambda I = \frac{E}{f(z)^2(1+f'(z)^2)} - \lambda$$

Le spectre essentiel de  $\mathbf{M}[k]$  est alors :

$$\sigma_{ess}(\mathbf{M}[k]) = \left\{ \frac{E}{f(z)^2(1+f'(z)^2)}, z \in I \right\}.$$

■

**Remarque 2.23.** *La base du spectre essentiel de  $\mathbf{M}[k]$  n'est pas 0 alors que la base du spectre essentiel de  $\mathbf{M}$  est 0 pour certains types de coques d'après la proposition 2.19.*

On décide alors de regarder le comportement des valeurs propres de  $\mathbf{M}[k]$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  dans le cas du cylindre.

Dans le cas d'une coque elliptique, on peut se demander s'il peut y avoir du spectre sous le spectre essentiel et si l'on peut justifier l'asymptotique pour  $k$  grand.





# Chapitre 3

## Développement à haute fréquence de la membrane

Au vu des différences entre les spectres essentiels de la membrane et de la membrane à la fréquence  $k$ , on s'intéresse au comportement des plus petites valeurs propres de  $\mathbf{M}[k]$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .

On effectue alors un développement de  $\mathbf{M}[k]$  en  $k$  :

$$\mathbf{M}[k] = k^2 \mathbf{M}_0 + k \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.$$

On rappelle que le problème aux valeurs propres de la membrane à la fréquence  $k$  (2.10)

$$\mathbf{M}[k] \mathbf{u} = \lambda \mathbf{A} \mathbf{u},$$

dans le cas d'une coque axisymétrique avec domaine méridien de paramétrage :

$$\vec{X}(z, \varphi) = (f(z) \cos(\varphi), f(z) \sin(\varphi), z), \quad z \in I = [-1, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

peut s'écrire d'après la proposition 2.21 sous forme matricielle avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s(z)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(z)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{2s(z)^2 f(z)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(z)^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 0 & i \frac{2f'(z)}{s(z)^2 f(z)^3} & 0 \\ i \left( \frac{(-3+\nu)f'(z)}{2f(z)^3 s(z)^2} + \frac{(1+\nu)f'(z)f''(z)}{2f(z)^2 s(z)^4} \right) & 0 & -i \frac{1}{f(z)^3 (1+f'(z)^2)^{1/2}} \\ -\frac{1+\nu}{2f(z)^2 s(z)^2} i \partial_z & & +i \nu \frac{f''(z)}{f(z)^2 s(z)^3} \\ 0 & i \frac{1}{f(z)^3 s(z)} & 0 \\ & -i \nu \frac{f''(z)}{f(z)^2 s(z)^3} & \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{s(z)^4} \partial_z^2 & & & & \frac{f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)}{f(z)s(z)^5} \\ +\left(\frac{3f'(z)f''(z)}{s(z)^6} - \frac{f'(z)}{f(z)s(z)^4}\right) \partial_z & & & & -\frac{3f'(z)f''(z)^2}{s(z)^7} \\ +\frac{f''(z)^2+f'(z)f'''(z)}{s(z)^6} - \frac{4f'(z)^2f''(z)^2}{s(z)^8} & 0 & & & +\frac{f'(z)}{f(z)^2s(z)^3} \\ -\frac{\nu f''(z)}{f(z)s(z)^4} + \frac{(1+\nu)f'^2f''(z)}{f(z)s(z)^6} & & & & +\frac{f''(z)}{s(z)^5} \partial_z \\ +\frac{f'(z)}{f(z)^2s(z)^4} & & & & -\frac{\nu}{f(z)s(z)^3} \partial_z \\ \\ & & -\frac{1-\nu}{2f(z)^2s(z)^2} \partial_z^2 & & \\ & & +\frac{(1-\nu)f'(z)f''(z)}{2f(z)^2s(z)^4} \partial_z & & \\ & 0 & +\frac{(1-\nu)f'(z)}{2f(z)^3s(z)^2} \partial_z & & 0 \\ & & +\frac{(1-\nu)f''(z)}{f(z)^3s(z)^2} & & \\ & & -\frac{(1-\nu)f'(z)^2f''(z)}{f(z)^3s(z)^4} & & \\ \\ & & & & \frac{f''(z)^2}{s(z)^6} \\ \left(-\frac{f''(z)}{s(z)^5} + \frac{\nu}{f(z)s(z)^3}\right) \partial_z & & & & +\frac{1}{f(z)^2s(z)^2} \\ +\frac{f'(z)f''(z)^2}{s(z)^7} + \frac{f'(z)}{f(z)^2s(z)^3} & 0 & & & -\frac{2\nu f''(z)}{f(z)s(z)^4} \\ -\frac{2\nu f'(z)f''(z)}{f(z)s(z)^5} & & & & \end{pmatrix}.$$

**Notation 3.1.** On notera par la suite  $\mathbf{M}(i, j)$  l'opérateur du coefficient de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne de la matrice opérateur  $\mathbf{M}$ .

On rappelle l'espace variationnel sur lequel la membrane est définie :

$$W_m(I) = \{\mathbf{u} \in H^1 \times H^1 \times L^2(I), \text{ et } u_{\alpha}|_{\partial I} = 0\}.$$

On va chercher un développement en série formelle associé à l'équation aux valeurs propres (2.10) sous la forme :

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u}[k] = \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{u}[k] \tag{3.1}$$

avec

$$\mathbf{u}[k] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{u}_n k^{-n} \quad \text{et} \quad \Lambda[k] = \sum_{n \geq 0} \Lambda_n k^{-n}.$$

On rappelle que pour des séries formelles :

$$a[k] = \sum_{n \geq 0} a_n k^{-n}, \quad b[k] = \sum_{n \geq 0} b_n k^{-n}, \quad \text{et} \quad d[k] = \sum_{n \geq 0} d_n k^{-n}$$

on a l'équivalence suivante :

$$a[k]b[k] = d[k] \Leftrightarrow \forall n \geq 0, \quad d_n = \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l}.$$

On verra que le système  $3 \times 3$  (3.1) peut se réduire à un problème scalaire grâce à des opérateurs de reconstruction

$$\mathbf{V}[k] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{V}_n k^{-n}$$

avec

$$\mathbf{V}_n = (V_{n,z}, V_{n,\varphi}, V_{n,3})^T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^3$$

comme dans Dauge, Gruais et Rössle [20].

Et  $\mathbf{u}$  sera trouvé sous la forme :

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{V}[k]\zeta[k]$$

où  $\zeta[k]$  est une série formelle scalaire :

$$\zeta[k] = \sum_{n \geq 0} \zeta_n k^{-n}, \quad \zeta_n \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Alors (3.1) se réduit au problème :

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{V}[k]\zeta[k] - \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{V}[k]\zeta[k] = 0. \quad (3.2)$$

Comme on va le voir, un choix judicieux de  $\mathbf{V}[k]$  permet une réduction du problème (3.2) à un problème scalaire en  $\zeta[k]$  du type :

$$L[k]\zeta[k] - \Lambda[k]\zeta[k] = 0.$$

### 3.1 Réduction formelle sans conditions aux limites

Notre démarche est constructive et suit celle utilisée par Faou dans sa thèse [22] et dans [24],[23],[25].

Puisque l'opérateur  $\mathbf{M}_0$  contient du noyau dans la troisième composante, on définit l'opérateur suivant qui sera le moteur de notre résolution :

**Définition 3.2.** *On définit l'opérateur  $\mathbf{V}_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^3$  tel que :*

$$\mathbf{V}_0 = (0, 0, \text{Id})^T. \quad (3.3)$$

**Proposition 3.3.** *On a la relation suivante :*

$$\mathbf{M}_0\mathbf{V}_0 = 0.$$

Par la résolution formelle du problème matriciel précédent, on le réduit à un problème scalaire que l'on cherchera à résoudre par la suite.

**Théorème 3.4.** *Soit une série formelle à coefficients réels :*

$$\Lambda[k] = \sum_{n \geq 0} k^{-n} \Lambda_n.$$

*Il existe pour  $n \geq 1$  des opérateurs  $V_{n,z}, V_{n,\varphi} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  d'ordre  $n - 1$ , polynômiaux en  $\Lambda_j$ , pour  $j \leq n - 3$ , et pour  $n \geq 0$  des opérateurs  $L_n : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  d'ordre  $n$ , polynômiaux en  $\Lambda_j$ , pour  $j \leq n - 2$  tels que en posant :*

$$\mathbf{V}[k] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{V}_n k^{-n}, \quad \mathbf{V}_n = (V_{n,z}, V_{n,\varphi}, 0)^T,$$

et

$$\mathbf{L}[k] = \sum_{n \geq 0} L_n k^{-n}$$

on ait :

$$\mathbf{M}[k] \mathbf{V}[k] - \Lambda[k] \mathbf{A} \mathbf{V}[k] = \mathbf{V}_0 \circ (\mathbf{L}[k] - \Lambda[k]).$$

**Preuve.** On identifie les puissances de  $k$  dans l'équation aux séries formelles :

$$\mathbf{M}[k] \mathbf{V}[k] - \Lambda[k] \mathbf{A} \mathbf{V}[k] = \mathbf{V}_0 \circ (\mathbf{L}[k] - \Lambda[k])$$

avec

$$\mathbf{L}[k] = \sum_{k \geq 0} L_n k^{-n}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & (k^2 \mathbf{M}_0 + k \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \sum_{n \geq 0} \mathbf{V}_n k^{-n} - \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \Lambda_j \mathbf{A} \mathbf{V}_{n-j} k^{-n} \\ &= \mathbf{V}_0 \circ \left( \sum_{n \geq 0} L_n k^{-n} - \sum_{n \geq 0} \Lambda_n k^{-n} \right). \end{aligned}$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \mathbf{M}_0 \mathbf{V}_n k^{-n+2} + \sum_{n \geq 0} \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_n k^{-n+1} + \sum_{n \geq 0} \mathbf{M}_2 \mathbf{V}_n k^{-n} - \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \Lambda_j \mathbf{A} \mathbf{V}_{n-j} k^{-n} \\ &= \mathbf{V}_0 \circ \left( \sum_{n \geq 0} L_n k^{-n} - \sum_{n \geq 0} \Lambda_n k^{-n} \right). \end{aligned}$$

On change l'indexation des indices dans les sommes :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \mathbf{M}_0 \mathbf{V}_n k^{-n+2} + \sum_{n \geq 1} \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_{n-1} k^{-n+2} + \sum_{n \geq 2} \mathbf{M}_2 \mathbf{V}_{n-2} k^{-n+2} - \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{n-2} \Lambda_j \mathbf{A} \mathbf{V}_{n-2-j} k^{-n+2} \\ &= \mathbf{V}_0 \circ \left( \sum_{n \geq 0} L_{n-2} k^{-n+2} - \sum_{n \geq 0} \Lambda_{n-2} k^{-n+2} \right). \end{aligned}$$

- Le terme en  $k^2$  dans l'équation précédente est nul puisque d'après la proposition 3.3, on a :

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{V}_0 = 0.$$

- Le terme en  $k$  s'écrit :

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{V}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_0 = 0.$$

Ceci s'écrit encore :

$$\mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} V_{1,z} \\ V_{1,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

D'où les opérateurs  $V_{1,z}$  et  $V_{1,\varphi}$  valent :

$$V_{1,z} = 0, \quad V_{1,\varphi} = -\frac{1-\nu^2}{E} f(z)^4 \mathbf{M}_1(2,3).$$

- Le terme en  $k^0$  s'écrit :

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{V}_2 + \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{V}_0 - \Lambda_0 \mathbf{A} \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0 \circ (\mathbf{L}_0 - \Lambda_0).$$

Puisque  $\mathbf{A}(3,3) = 1$ , le terme en  $\Lambda_0$  disparaît et on a :

$$\mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} V_{2,z} \\ V_{2,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} V_{1,z} \\ V_{1,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \mathbf{L}_0.$$

D'où  $V_{2,z}$  et  $V_{2,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2s(z)^2 f(z)^2} V_{2,z} = -\mathbf{M}_1(1,2) V_{1,\varphi} - \mathbf{M}_2(1,3)$$

et

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{f(z)^4} V_{2,\varphi} = -\mathbf{M}_1(2,1) V_{1,z}.$$

Et l'opérateur  $\mathbf{L}_0$  vaut :

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{M}_1(3,2) V_{1,\varphi} + \mathbf{M}_2(3,3).$$

- Pour tout  $n > 2$ , le terme en  $k^{-n+2}$  s'écrit :

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{V}_n + \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_{n-1} + \mathbf{M}_2 \mathbf{V}_{n-2} - \sum_{j=0}^{n-2} \Lambda_j \mathbf{A} \mathbf{V}_{n-2-j} = \mathbf{V}_0 \circ (\mathbf{L}_{n-2} - \mathbf{A} \Lambda_{n-2}).$$

Puisque  $\mathbf{A}(3,3) = 1$ , le terme en  $\Lambda_{n-2}$  disparaît et on a :

$$\mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} V_{n,z} \\ V_{n,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} V_{n-1,z} \\ V_{n-1,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} V_{n-2,z} \\ V_{n-2,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \mathbf{A} \begin{pmatrix} V_{n-2-j,z} \\ V_{n-2-j,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \mathbf{L}_{n-2}.$$

D'où  $V_{n,z}$  et  $V_{n,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2s(z)^2 f(z)^2} V_{n,z} = -\mathbf{M}_1(1,2)V_{n-1,\varphi} - \mathbf{M}_2(1,1)V_{n-2,z} + \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \frac{1}{s(z)^2} V_{n-2-j,z} \quad (3.4)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{f(z)^4} V_{n,\varphi} = -\mathbf{M}_1(2,1)V_{n-1,z} - \mathbf{M}_2(2,2)V_{n-2,\varphi} + \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \frac{1}{f(z)^2} V_{n-2-j,\varphi}. \quad (3.5)$$

Et l'opérateur  $L_{n-2}$  est déterminé par l'équation :

$$L_{n-2} = \mathbf{M}_1(3,2)V_{n-1,\varphi} + \mathbf{M}_2(3,1)V_{n-2,z}. \quad (3.6)$$

Montrons alors par récurrence que pour  $n \geq 2$ , les opérateurs  $V_{n,\alpha}$  sont d'ordre  $n-1$  polynômiaux en  $\Lambda_j$ ,  $j < n-2$  et que l'opérateur  $L_{n-2}$  est d'ordre  $n-2$  et polynômial en  $\Lambda_j$ ,  $j < n-3$ .

- pour  $n = 2$  ceci est vrai d'après les formules ci-dessus.

- soit  $n \geq 2$  tel que la propriété soit vraie pour tous les rangs plus petits que  $n$ . D'après les formules de récurrence trouvées précédemment, on a :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2s(z)^2 f(z)^2} V_{n,z} = -\mathbf{M}_1(1,2)V_{n-1,\varphi} - \mathbf{M}_2(1,1)V_{n-2,z} + \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \frac{1}{s(z)^2} V_{n-2-j,z}.$$

Puisque  $\mathbf{M}_1(1,2)$  est un opérateur d'ordre 1,  $\mathbf{M}_2(1,1)$  est un opérateur d'ordre 2 et que  $V_{n-1,\varphi}$  est d'ordre  $n-2$  et  $V_{n-2,z}$  d'ordre  $n-3$  par hypothèse de récurrence, alors  $V_{n,z}$  est bien d'ordre  $n-1$ . De plus les  $V_{n-2-j,z}$  sont polynômiaux en  $\Lambda_j$  pour  $j < n-2-j-2$  par hypothèse de récurrence donc  $V_{n,z}$  est bien polynômial en  $\Lambda_j$  pour  $j < n-2$ .

En ce qui concerne  $V_{n,\varphi}$ , il est donné par la formule :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{f(z)^4} V_{n,\varphi} = -\mathbf{M}_1(2,1)V_{n-1,z} - \mathbf{M}_2(2,2)V_{n-2,\varphi} + \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \frac{1}{f(z)^2} V_{n-2-j,\varphi}.$$

Donc les mêmes arguments s'appliquent.

D'autre part, on a :

$$L_{n-2} = \mathbf{M}_1(3,2)V_{n-1,\varphi} + \mathbf{M}_2(3,1)V_{n-2,z}.$$

Puisque  $\mathbf{M}_1(3,2)$  est un opérateur d'ordre 0,  $\mathbf{M}_2(3,1)$  est un opérateur d'ordre 1 et que  $V_{n-1,\varphi}$  est d'ordre  $n-2$  et  $V_{n-2,z}$  d'ordre  $n-3$  par hypothèse de récurrence, alors  $L_{n-2}$  est bien un opérateur d'ordre  $n-2$ . De plus  $V_{n-1,\varphi}$  est polynômial en  $\Lambda_j$  pour  $j < n-1-2$  et  $V_{n-2,z}$  est polynômial en  $\Lambda_j$  pour  $j < n-2-2$  par hypothèse de récurrence donc  $L_{n-2}$  est bien polynômial en  $\Lambda_j$  pour  $j < n-3$ .

■

## 3.2 Calcul des opérateurs

On calcule les premiers opérateurs et leur coefficient de plus grand ordre en tant que dérivée de  $z$  qui apparaissent dans le théorème précédent. Pour cela, on décompose les opérateurs  $V_{n,\alpha}$  et  $L_n$  en polynômes en  $\partial_z$  :

$$L_n = \sum_{j=0}^n L_n^j(z) \partial_z^j, \quad V_{n,\alpha} = \sum_{j=0}^{n-1} V_{n,\alpha}^j(z) \partial_z^j$$

où  $L_n^j$  est polynômial en  $\Lambda_l$  pour  $l \leq n-2$  et  $V_{n,\alpha}^j$  est polynômial en  $\Lambda_l$  pour  $l \leq n-3$ .

Nous donnons ci-après les expressions complètes des opérateurs  $L_0, L_1, L_2, L_3$  et  $V_{1,\alpha}, V_{2,\alpha}, V_{3,\alpha}$  et les expressions partielles (leur terme dominant) des opérateurs  $L_4, V_{4,\alpha}$  et  $V_{5,\varphi}$ .

**Théorème 3.5.** *Dans le cas d'une coque axisymétrique paramétrée par la courbe  $z \mapsto f(z)$ , les opérateurs  $L_n$  pour  $n \leq 4$  et  $V_{n,\alpha}$  pour  $n \leq 5$  s'écrivent :*

$$L[k] = L_0(z) + \frac{1}{k} L_1(z, \partial_z) + \frac{1}{k^2} L_2(z, \partial_z) + \frac{1}{k^3} L_3(z, \partial_z) + \frac{1}{k^4} L_4(z, \partial_z) + \dots \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(z) &= E \frac{f''(z)^2}{s(z)^6} \\ L_1(z, \partial_z) &= 0 \\ L_2(z, \partial_z) &= E \left( \frac{2f(z)f''(z)}{s(z)^6} + \frac{2f''(z)^2 f(z)^2}{s(z)^8} \right) \partial_z^2 + E \left( \frac{4f'(z)f''(z)}{s(z)^6} + \frac{2f'''(z)f(z)}{s(z)^6} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4f(z)f'(z)f''(z)^2}{s(z)^8} + \frac{4f(z)^2 f''(z)f'''(z)}{s(z)^8} - \frac{14f(z)^2 f'(z)f''(z)^3}{s(z)^{10}} \right) \partial_z \\ &\quad + E \left( \frac{10f'(z)^2 f''(z)^2}{s(z)^8} + \frac{4f'(z)f'''(z)}{s(z)^6} + \frac{2f'(z)^2 f''(z)}{f(z)s(z)^6} - \frac{(\nu-2)f(z)f'(z)^2 f''(z)^3}{s(z)^{10}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5f(z)f'(z)f''(z)f'''(z)}{s(z)^8} + \frac{3f(z)f^{(4)}(z)}{s(z)^6} + \frac{36f(z)^2 f'(z)^2 f''(z)^4}{s(z)^{12}} + \frac{(\nu-2)f(z)f''(z)^3}{s(z)^8} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6f(z)^2 f''(z)^4}{s(z)^{10}} - \frac{20f(z)^2 f'(z)f''(z)^2 f'''(z)}{s(z)^{10}} \right) - \Lambda_0 \left( \frac{\nu^2 f''(z)^2 f(z)^2}{s(z)^6} - \frac{1}{s(z)^2} \right) \\ L_3(z, \partial_z) &= \left( -\frac{1}{s(z)^2} + \frac{2\nu f(z)f''(z)}{s(z)^4} - \frac{\nu^2 f(z)^2 f''(z)^2}{s(z)^6} \right) \Lambda_1 \\ L_4(z, \partial_z) &= E \left( \frac{4f(z)^3 f''(z)}{s(z)^8} + \frac{3f(z)^4 f''(z)^2}{s(z)^{10}} + \frac{f(z)^2}{s(z)^6} \right) \partial_z^4 + \sum_{j=0}^3 L_4^j(z) \partial_z^j, \end{aligned}$$



et :

$$\begin{aligned}
 V_{1,z} &= 0 \\
 V_{1,\varphi} &= \frac{if(z)}{s(z)} - \frac{i\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \\
 V_{2,z} &= -\frac{f(z)}{s(z)}\partial_z - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f''(z)}{s(z)^3}\partial_z + \frac{f'(z)}{s(z)} + \frac{3(\nu+2)f(z)^2 f''(z)^2 f'(z)}{s(z)^5} \\
 &\quad - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f'''(z)}{s(z)^3} - \frac{(2\nu+1)f(z)f'(z)f''(z)}{s(z)^3} \\
 V_{2,\varphi} &= 0 \\
 V_{3,z} &= 0 \\
 V_{3,\varphi} &= \frac{if'(z)^2 f(z)}{s(z)^3} + \frac{(\nu^2+19\nu+19)if''(z)^2 f'(z)^2 f(z)^3}{s(z)^7} - \frac{(6\nu+6)if'(z)f'''(z)f(z)^3}{s(z)^5} - \frac{(5\nu+3)if'(z)^2 f''(z)f(z)^2}{s(z)^5} \\
 &\quad - \frac{(36\nu+18)if''(z)^3 f'(z)^2 f(z)^4}{s(z)^9} + \frac{(20\nu+10)if'(z)f''(z)f'''(z)f(z)^4}{s(z)^7} + \frac{i\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \\
 &\quad + \frac{(6\nu+3)if''(z)^3 f(z)^4}{s(z)^7} - \frac{(2\nu+1)if^{(4)}(z)f(z)^4}{s(z)^5} - \frac{(\nu^2+\nu+1)if''(z)^2 f(z)^3}{s^5} \\
 &\quad + \left( -\frac{(4\nu+6)if'(z)f''(z)f(z)^3}{2s(z)^5} - i\frac{(4\nu+2)f'''(z)f(z)^4}{s(z)^5} + \frac{7i(2\nu+1)f'(z)f''(z)^2 f(z)^4}{s(z)^7} - i\frac{f'(z)f(z)^2}{s(z)^3} \right) \partial_z \\
 &\quad + \left( -\frac{i\nu f(z)^3}{s(z)^3} - \frac{(1+2\nu)if''(z)f(z)^4}{s(z)^5} \right) \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \left( \frac{if(z)^3}{s(z)} - \frac{i\nu f''(z)f(z)^4}{s(z)^3} \right). \\
 V_{4,z}^3 &= -\frac{(\nu+2)f(z)^3}{s(z)^3} - \frac{(2\nu+3)f(z)^4 f''(z)}{s(z)^5} \\
 V_{4,\varphi} &= \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 \left[ \frac{if(z)^3}{s(z)} - \frac{i\nu f''(z)f(z)^4}{s(z)^3} \right] \\
 V_{5,\varphi}^4 &= -i\frac{(2\nu+1)f(z)^5}{s(z)^5} - i\frac{(3\nu+2)f(z)^6 f''(z)}{s(z)^7}.
 \end{aligned}$$

**Preuve.** On applique les formules de la preuve du théorème précédent avec les matrices du début du chapitre.

- Les termes en  $k^2$  et  $k$  nous donnent les équations :

$$V_{1,z} = 0, \quad V_{1,\varphi} = \frac{if(z)}{s(z)} - \frac{i\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3}.$$

- $V_{2,z}$  et  $V_{2,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\begin{aligned}
V_{2,z} &= -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{2s(z)^2 f(z)^2}{1-\nu} [\mathbf{M}_1(1, 2)V_{1,\varphi} + \mathbf{M}_2(1, 3)] \\
&= -\frac{2s(z)^2 f(z)^2}{1-\nu} \left[ \left( \frac{2if'(z)}{s(z)^2 f(z)^3} - \frac{1+\nu}{2s(z)^2 f(z)^2} i\partial_z \right) \left( \frac{if(z)}{s(z)} - \frac{\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)}{f(z)s(z)^5} - \frac{3f'(z)f''(z)^2}{s(z)^7} + \frac{f'(z)}{f(z)^2 s(z)^3} + \frac{f''(z)}{s(z)^5} \partial_z - \frac{\nu}{f(z)s(z)^3} \partial_z \right] \\
&= -\frac{2s(z)^2 f(z)^2}{1-\nu} \left[ -\frac{2f'(z)}{f(z)^2 s(z)^3} + \frac{2\nu f'(z)f''(z)}{f(z)s(z)^5} + \frac{1+\nu}{2s(z)^2 f(z)^2} \frac{f'(z)s(z)-f(z)s'(z)}{s(z)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1+\nu}{2f(z)s(z)^3} \partial_z - \frac{(1+\nu)\nu}{2} \frac{(f'''(z)f(z)+f''(z)f'(z))^2 - 3s(z)^2 s'(z)f''(z)f(z)^2}{f(z)^2 s(z)^8} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\nu f''(z)}{s(z)^5} \partial_z \right. \\
&\quad \left. + \frac{f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)}{f(z)s(z)^5} - \frac{3f'(z)f''(z)^2}{s(z)^7} + \frac{f'(z)}{f(z)^2 s(z)^3} + \frac{f''(z)}{s(z)^5} \partial_z - \frac{\nu}{f(z)s(z)^3} \partial_z \right] \\
V_{2,z} &= \frac{f'(z)}{s(z)} + \frac{3(\nu+2)f(z)^2 f''(z)^2 f'(z)}{s(z)^5} - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f'''(z)}{s(z)^3} - \frac{(2\nu+1)f(z)f'(z)f''(z)}{s(z)^3} \\
&\quad - \frac{f(z)}{s(z)} \partial_z - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f''(z)}{s(z)^3} \partial_z
\end{aligned}$$

et

$$V_{2,\varphi} = \frac{1-\nu^2}{E} f(z)^4 [-\mathbf{M}_1(2, 1)V_{1,z}] = 0.$$

Et l'opérateur  $L_0$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned}
L_0 &= \mathbf{M}_1(3, 2)V_{1,\varphi} + \mathbf{M}_2(3, 3) \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{i}{f(z)^3 s(z)} - \frac{\nu f''(z)}{f(z)^2 s(z)^3} \right) \left[ \frac{if(z)}{s(z)} - \frac{\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{f''(z)^2}{s(z)^6} + \frac{1}{f(z)^2 s(z)^2} - \frac{2\nu f''(z)}{f(z)s(z)^4} \right) \\
&= \frac{E f''(z)^2}{s(z)^6}.
\end{aligned}$$

- $V_{3,z}$  et  $V_{3,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$V_{3,z} = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2s(z)^2 f(z)^2}{1-\nu} [-\mathbf{M}_1(1, 2)V_{2,\varphi} - \mathbf{M}_2(1, 1)V_{1,z} + \sum_{j=0}^0 \Lambda_j \frac{1}{s(z)^2} V_{3-2-j,z}] = 0$$

et

$$\begin{aligned}
V_{3,\varphi} &= \frac{1-\nu^2}{E} f(z)^4 [-\mathbf{M}_1(2, 1)V_{2,z} - \mathbf{M}_2(2, 2)V_{1,\varphi} + \sum_{j=0}^0 \Lambda_j \frac{1}{f(z)^2} V_{3-2-j,\varphi}] \\
&= f(z)^4 \left[ -\left( i \left( \frac{(-3+\nu)f'(z)}{2f(z)^3 s(z)^2} + \frac{(1+\nu)f'(z)f''(z)}{2f(z)^2 s(z)^4} \right) - \frac{1+\nu}{2f(z)^2 s(z)^2} i\partial_z \right) \left( \frac{f'(z)}{s(z)} + \frac{3(\nu+2)f(z)^2 f''(z)^2 f'(z)}{s(z)^5} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f'''(z)}{s(z)^3} - \frac{(2\nu+1)f(z)f'(z)f''(z)}{s(z)^3} - \frac{f(z)}{s(z)} \partial_z - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f''(z)}{s(z)^3} \partial_z \right) - \left( -\frac{1-\nu}{2f(z)^2 s(z)^2} \partial_z^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-\nu)f'(z)f''(z)}{2f(z)^2 s(z)^4} \partial_z + \frac{(1-\nu)f'(z)}{2f(z)^3 s(z)^2} \partial_z + \frac{(1-\nu)f''(z)}{f(z)^3 s(z)^2} - \frac{(1-\nu)f'(z)^2 f''(z)}{f(z)^3 s(z)^4} \right) \left( \frac{if(z)}{s(z)} - \frac{\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \right) \\
&\quad \left. + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \frac{1}{f(z)^2} \left( \frac{if(z)}{s(z)} - \frac{\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \right) \right].
\end{aligned}$$

Le calcul nous donne :

$$\begin{aligned}
 V_{3,\varphi} &= \frac{if'(z)^2f(z)}{s(z)^3} + \frac{(\nu^2+19\nu+19)if''(z)^2f'(z)^2f(z)^3}{s(z)^7} - \frac{(6\nu+6)if'(z)f'''(z)f(z)^3}{s(z)^5} - \frac{(5\nu+3)if'(z)^2f''(z)f(z)^2}{s(z)^5} \\
 &\quad - \frac{(36\nu+18)if''(z)^3f'(z)^2f(z)^4}{s(z)^9} + \frac{(20\nu+10)if'(z)f''(z)f'''(z)f(z)^4}{s(z)^7} + \frac{i\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \\
 &\quad + \frac{(6\nu+3)if''(z)^3f(z)^4}{s(z)^7} - \frac{(2\nu+1)if^{(4)}(z)f(z)^4}{s(z)^5} - \frac{(\nu^2+\nu+1)if''(z)^2f(z)^3}{s^5} \\
 &\quad + \left( -\frac{(4\nu+6)if'(z)f''(z)f(z)^3}{2s(z)^5} - i\frac{(4\nu+2)f'''(z)f(z)^4}{s(z)^5} + \frac{7i(2\nu+1)f'(z)f''(z)^2f(z)^4}{s(z)^7} - i\frac{f'(z)f(z)^2}{s(z)^3} \right) \partial_z \\
 &\quad + \left( -\frac{i\nu f(z)^3}{s(z)^3} - \frac{(1+2\nu)if''(z)f(z)^4}{s(z)^5} \right) \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \left( \frac{if(z)^3}{s(z)} - \frac{i\nu f''(z)f(z)^4}{s(z)^3} \right).
 \end{aligned}$$

Et l'opérateur  $L_1$  est déterminé par l'équation :

$$L_1 = \mathbf{M}_1(3, 2)V_{2,\varphi} + \mathbf{M}_2(3, 1)V_{1,z} = 0.$$

•  $V_{4,z}$  est déterminé par l'équation :

$$V_{4,z} = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2s(z)^2f(z)^2}{1-\nu} [-\mathbf{M}_1(1, 2)V_{3,\varphi} - \mathbf{M}_2(1, 1)V_{2,z} + \sum_{j=0}^1 \Lambda_j \frac{1}{s(z)^2} V_{4-2-j,z}].$$

On ne calcule que  $V_{4,z}^3$ .

$$\begin{aligned}
 V_{4,z}^3 &= \frac{2s(z)^2f(z)^2}{1-\nu} \left[ \frac{1+\nu}{2f(z)^2s(z)^2} i \left[ -i\frac{\nu f(z)^3}{s(z)^3} + \frac{(-1-2\nu)if(z)^4f''(z)}{s(z)^5} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{s(z)^4} \left[ -\frac{f(z)}{s(z)} - \frac{(\nu+2)f(z)^2f''(z)}{s(z)^3} \right] \right] \\
 &= \frac{2(1+f'(z)^2)f(z)^2}{1-\nu} \left[ \frac{1+\nu}{2} \frac{\nu f(z)}{s(z)^5} - \frac{1+\nu}{2} \frac{(-1-2\nu)f(z)^2f''(z)}{s(z)^7} - \frac{f(z)}{s(z)^5} - \frac{(\nu+2)f(z)^2f''(z)}{s(z)^7} \right] \\
 V_{4,z}^3 &= -\frac{(\nu+2)f(z)^3}{s(z)^3} - \frac{(2\nu+3)f(z)^4f''(z)}{s(z)^5}.
 \end{aligned}$$

D'autre part,  $V_{4,\varphi}$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned}
 V_{4,\varphi} &= \frac{1-\nu^2}{E} f(z)^4 [-\mathbf{M}_1(2, 1)V_{3,z} - \mathbf{M}_2(2, 2)V_{2,\varphi} + \sum_{j=0}^1 \Lambda_j \frac{1}{f(z)^2} V_{4-2-j,\varphi}] \\
 V_{4,\varphi} &= \frac{1-\nu^2}{E} f(z)^4 \Lambda_1 \frac{1}{f(z)^2} V_{1,\varphi} = \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 \left[ \frac{if(z)^3}{s(z)} - \frac{i\nu f''(z)f(z)^4}{s(z)^3} \right].
 \end{aligned}$$

Et l'opérateur  $L_2$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned}
L_2 &= \mathbf{M}_1(3, 2)V_{3,\varphi} + \mathbf{M}_2(3, 1)V_{2,z} \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{i}{f(z)^3 s(z)} - \frac{i\nu f''(z)}{f(z)^2 s(z)^3} \right) \left[ \frac{if'(z)^2 f(z)}{s(z)^3} + \frac{(\nu^2+19\nu+19)if''(z)^2 f'(z)^2 f(z)^3}{s(z)^7} - \frac{(6\nu+6)if'(z)f'''(z)f(z)^3}{s(z)^5} \right. \\
&\quad - \frac{(5\nu+3)if'(z)^2 f''(z)f(z)^2}{s(z)^5} - \frac{(36\nu+18)if''(z)^3 f'(z)^2 f(z)^4}{s(z)^9} + \frac{(20\nu+10)if'(z)f''(z)f'''(z)f(z)^4}{s(z)^7} + \frac{i\nu f''(z)f(z)^2}{s(z)^3} \\
&\quad + \frac{(6\nu+3)if''(z)^3 f(z)^4}{s(z)^7} - \frac{(2\nu+1)if^{(4)}(z)f(z)^4}{s(z)^5} - \frac{(\nu^2+\nu+1)if''(z)^2 f(z)^3}{s^5} \\
&\quad + \left( -\frac{(4\nu+6)if''(z)f'(z)f(z)^3}{2s(z)^5} - i\frac{(4\nu+2)f'''(z)f(z)^4}{s(z)^5} + \frac{7i(2\nu+1)f'(z)f''(z)^2 f(z)^4}{s(z)^7} - i\frac{f'(z)f(z)^2}{s(z)^3} \right) \partial_z \\
&\quad + \left( -\frac{i\nu f(z)^3}{s(z)^3} - \frac{(1+2\nu)if''(z)f(z)^4}{s(z)^5} \right) \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \left( \frac{if(z)^3}{s(z)} - \frac{i\nu f''(z)f(z)^4}{s(z)^3} \right) \\
&\quad + \frac{E}{1-\nu^2} \left( \left( -\frac{f''(z)}{s(z)^5} + \frac{\nu}{f(z)s(z)^3} \right) \partial_z + \frac{f'(z)f''(z)^2}{s(z)^7} + \frac{f'(z)}{f(z)^2 s(z)^3} - \frac{2\nu f'(z)f''(z)}{f(z)s(z)^5} \right) \left[ \frac{f'(z)}{s(z)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(\nu+2)f(z)^2 f''(z)^2 f'(z)}{s(z)^5} - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f'''(z)}{s(z)^3} - \frac{(2\nu+1)f(z)f'(z)f''(z)}{s(z)^3} - \frac{f(z)}{s(z)} \partial_z - \frac{(\nu+2)f(z)^2 f''(z)}{s(z)^3} \partial_z \right].
\end{aligned}$$

Le calcul nous donne :

$$\begin{aligned}
L_2 &= E \left( \frac{2f(z)f''(z)}{s(z)^6} + \frac{2f''(z)^2 f(z)^2}{s(z)^8} \right) \partial_z^2 + E \left( \frac{4f'(z)f''(z)}{s(z)^6} + \frac{2f'''(z)f(z)}{s(z)^6} - \frac{4f(z)f'(z)f''(z)^2}{s(z)^8} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4f(z)^2 f''(z)f'''(z)}{s(z)^8} - \frac{14f(z)^2 f'(z)f''(z)^3}{s(z)^{10}} \right) \partial_z \\
&\quad + E \left( \frac{10f'(z)^2 f''(z)^2}{s(z)^8} + \frac{4f'(z)f'''(z)}{s(z)^6} + \frac{2f'(z)^2 f''(z)}{f(z)s(z)^6} - \frac{(\nu-2)f(z)f'(z)^2 f''(z)^3}{s(z)^{10}} \right. \\
&\quad - \frac{5f(z)f'(z)f''(z)f'''(z)}{s(z)^8} + \frac{3f(z)f^{(4)}(z)}{s(z)^6} + \frac{36f(z)^2 f'(z)^2 f''(z)^4}{s(z)^{12}} + \frac{(\nu-2)f(z)f''(z)^3}{s(z)^8} \\
&\quad \left. - \frac{6f(z)^2 f''(z)^4}{s(z)^{10}} - \frac{20f(z)^2 f'(z)f''(z)^2 f'''(z)}{s(z)^{10}} \right) - \Lambda_0 \left( \frac{\nu^2 f''(z)^2 f(z)^2}{s(z)^6} - \frac{1}{s(z)^2} \right)
\end{aligned}$$

•  $V_{5,z}$  et  $V_{5,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\begin{aligned}
V_{5,z} &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2s(z)^2 f(z)^2}{1-\nu} [-\mathbf{M}_1(1, 2)V_{4,\varphi} - \mathbf{M}_2(1, 1)V_{3,z} + \sum_{j=0}^2 \Lambda_j \frac{1}{s(z)^2} V_{5-2-j,z}] \\
&= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{2s(z)^2 f(z)^2}{1-\nu} [-\mathbf{M}_1(1, 2)\Lambda_1 \left[ \frac{i}{f(z)s(z)} - \frac{i\nu f''(z)}{s(z)^3} \right] + \Lambda_1 \frac{1}{s(z)^2} V_{2,z}]
\end{aligned}$$

et

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{f(z)^4} V_{5,\varphi} = -\mathbf{M}_1(2, 1)V_{4,z} - \mathbf{M}_2(2, 2)V_{3,\varphi} + \sum_{j=0}^2 \Lambda_j \frac{1}{f(z)^2} V_{5-2-j,\varphi}.$$

On ne calcule que  $V_{5,\varphi}^4$ .

$$\begin{aligned}
V_{5,\varphi}^4 &= f(z)^4 \left[ -i\frac{(3\nu+2+\nu^2)f(z)}{2s(z)^5} - i\frac{(5\nu+3+2\nu^2)f(z)^2 f''(z)}{2s(z)^7} - \frac{1-\nu}{2} i\frac{\nu f(z)}{s(z)^5} - \frac{(1+\nu-2\nu^2)if(z)^2 f''(z)}{2s(z)^7} \right] \\
V_{5,\varphi}^4 &= -i\frac{(2\nu+1)f(z)^5}{s(z)^5} - i\frac{(3\nu+2)f(z)^6 f''(z)}{s(z)^7}.
\end{aligned}$$

Et l'opérateur  $L_3$  est déterminé par l'équation :

$$L_3 = \mathbf{M}_1(3, 2)V_{4,\varphi} + \mathbf{M}_2(3, 1)V_{3,z} = \left[ -\frac{1}{s(z)^2} + \frac{2\nu f(z)f''(z)}{s(z)^4} - \frac{\nu^2 f(z)^2 f''(z)^2}{s(z)^6} \right] \Lambda_1.$$

- L'opérateur  $L_4$  est déterminé par l'équation :

$$L_4 = \mathbf{M}_1(3, 2)V_{5,\varphi} + \mathbf{M}_2(3, 1)V_{4,z}.$$

On ne calcule que  $L_4^4$ .

$$\begin{aligned} L_4^4 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{i}{f(z)^3 s(z)} - \frac{i\nu f''(z)}{f(z)^2 s(z)^3} \right) \left[ -i \frac{(2\nu+1)f(z)^5}{s(z)^5} - i \frac{(3\nu+2)f(z)^6 f''(z)}{s(z)^7} \right] \\ &\quad + \frac{E}{1-\nu^2} \left( -\frac{f''(z)}{s(z)^5} + \nu \frac{1}{f(z)s(z)^3} \right) \left[ -\frac{(\nu+2)f(z)^3}{s(z)^3} - \frac{(2\nu+3)f(z)^4 f''(z)}{s(z)^5} \right] \\ L_4^4 &= \frac{4Ef(z)^3 f''(z)}{s(z)^8} + \frac{3Ef(z)^4 f''(z)^2}{s(z)^{10}} + \frac{Ef(z)^2}{s(z)^6}. \end{aligned}$$

■

# Chapitre 4

## La membrane du cylindre

On étudie plus précisément le cas du cylindre de paramétrisation :

$$\vec{X}(z, \varphi) = (R \cos(\varphi), R \sin(\varphi), z), \quad z \in [-1, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Ceci correspond à  $f(z) = R$ .

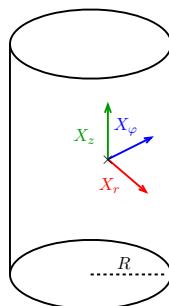


FIGURE 4.1 – Surface cylindrique

Dans ce chapitre on applique les résultats du chapitre précédent dans le cas du cylindre. On va voir que l'opérateur principal est le bilaplacien et on va calculer les valeurs propres de cet opérateur sur  $I$ . Ensuite nous allons introduire les quasimodes et en exhiber pour la membrane du cylindre. Puis nous corroborerons nos résultats théoriques grâce à une estimation d'énergie et à des résultats numériques.

## 4.1 Développement pour $k$ grand de la membrane pour le cylindre

### 4.1.1 Réduction formelle sans conditions aux limites

Dans le cas du cylindre où  $f(z) = R$ , la matrice de la membrane à la fréquence  $k$  se décompose selon les puissances de  $k$  :

$$\mathbf{M}[k] = k^2 \mathbf{M}_0 + k \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (4.1)$$

avec

$$\mathbf{M}_0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{2R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+\nu}{2R^2} i \partial_z & 0 \\ -\frac{1+\nu}{2R^2} i \partial_z & 0 & -\frac{i}{R^3} \\ 0 & \frac{i}{R^3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} -\partial_z^2 & 0 & -\frac{\nu}{R} \partial_z \\ 0 & -\frac{1-\nu}{2R^2} \partial_z^2 & 0 \\ \frac{\nu}{R} \partial_z & 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on utilise le théorème 3.4 qui nous amène à étudier le problème aux séries formelles :

$$\mathbf{M}[k] \mathbf{V}[k] - \Lambda[k] \mathbf{A} \mathbf{V}[k] = \mathbf{V}_0 \circ (\mathbf{L}[k] - \Lambda[k]).$$

Pour le cylindre, on a :

$$f(z) = R, \quad f''(z) = f'(z) = 0, \quad s(z) = 1,$$

donc en particulier on a :

$$b_{zz} = 0.$$

Dans le cas du cylindre le théorème 3.5 s'écrit :

**Théorème 4.1.** *Dans le cas d'une coque axisymétrique cylindrique de courbe  $z \rightarrow f(z) = R$ , les opérateurs  $L_n$  pour  $n \leq 4$  et  $V_{n,\alpha}$  pour  $n \leq 5$  s'écrivent :*

$$\mathbf{L}[k] = L_0(z) + \frac{1}{k} L_1(z, \partial_z) + \frac{1}{k^2} L_2(z, \partial_z) + \frac{1}{k^3} L_3(z, \partial_z) + \frac{1}{k^4} L_4(z, \partial_z) + \dots$$

avec

$$\begin{aligned}
 L_0(z) &= 0 \\
 L_1(z, \partial_z) &= 0 \\
 L_2(z, \partial_z) &= -\Lambda_0 \\
 L_3(z, \partial_z) &= -\Lambda_1 \\
 L_4(z, \partial_z) &= ER^2\partial_z^4 + (1+2\nu)\Lambda_0R^2\partial_z^2 - \Lambda_0^2\frac{1-\nu^2}{E}R^2 - \Lambda_2 \\
 L_5(z, \partial_z) &= \frac{-1-2\nu+\nu^2+3\nu^3}{1-\nu^2}R^2\Lambda_1\partial_z^2 - \frac{2(1-\nu^2)}{E}\Lambda_0\Lambda_1R^2 - \Lambda_3.
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 V_{1,z} &= 0 & V_{1,\varphi} &= iR \\
 V_{2,z} &= -R\partial_z & V_{2,\varphi} &= 0 \\
 V_{3,z} &= 0 & V_{3,\varphi} &= -i\nu R^3\partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E}\Lambda_0iR^3. \\
 V_{4,z} &= -(\nu+2)R^3\partial_z^3 - \frac{(1+\nu)(3+\nu)}{E}R^3\Lambda_0\partial_z & V_{4,\varphi} &= \frac{1-\nu^2}{E}\Lambda_1iR^3 \\
 V_{5,z} &= -\frac{(3+\nu)(1+\nu)}{E}R^3\Lambda_1\partial_z & V_{5,\varphi} &= -(2\nu+1)iR^5\partial_z^4 + \frac{\nu^3-6\nu^2-9\nu-2}{2E}\Lambda_0R^5i\partial_z^2 \\
 & & & + \frac{(1-\nu^2)^2}{E^2}\Lambda_0^2iR^5 + \frac{1-\nu^2}{E}\Lambda_2R^3i
 \end{aligned}$$

**Preuve.** Pour calculer  $V_{1,\alpha}, V_{2,\alpha}, V_{3,\alpha}, L_0, L_1, L_2$  et  $L_3$ , on applique les formules du théorème 3.5 avec :

$$f(z) = R, \quad f'(z) = f''(z) = f'''(z) = f^{(4)}(z) = 0.$$

Ensuite pour calculer  $V_{4,\alpha}, V_{5,\alpha}, V_{6,\varphi}, L_4$  et  $L_5$ , on utilise les formules de récurrence (3.4), (3.5) et (3.6) de la preuve du théorème 3.4 qui s'écrivent dans le cas du cylindre comme suit :

$$\begin{aligned}
 V_{n,z} &= \frac{2R^2}{1-\nu} \left[ \frac{1+\nu}{2R^2} i\partial_z V_{n-1,\varphi} + \partial_z^2 V_{n-2,z} + \frac{1-\nu^2}{E} \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j V_{n-2-j,z} \right], \\
 V_{n,\varphi} &= R^4 \left[ \frac{1+\nu}{2R^2} i\partial_z V_{n-1,z} + \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_z^2 V_{n-2,\varphi} + \frac{1-\nu^2}{E} \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \frac{1}{R^2} V_{n-2-j,\varphi} \right]
 \end{aligned}$$

et

$$L_{n-2} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{i}{R^3} V_{n-1,\varphi} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z V_{n-2,z}.$$



- $V_{4,z}$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} V_{4,z} &= \frac{2R^2}{1-\nu} \left[ \frac{1+\nu}{2R^2} i \partial_z (-i\nu R^3 \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 i R^3) + \partial_z^2 (-R \partial_z) + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 (-R \partial_z) \right] \\ &= \frac{2R^2}{1-\nu} \left[ \frac{(1+\nu)R}{2} \nu \partial_z^3 - \frac{1+\nu}{2} R \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \partial_z - R \partial_z^3 - \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 R \partial_z \right] \\ V_{4,z} &= -(\nu+2)R^3 \partial_z^3 - \frac{(1+\nu)(3+\nu)}{E} R^3 \Lambda_0 \partial_z. \end{aligned}$$

- $V_{4,\varphi}$  est déterminé par l'équation :

$$V_{4,\varphi} V_4^\varphi = \frac{1-\nu^2}{E} R^4 \Lambda_1 \frac{1}{R^2} V_{1,\varphi} = \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 i R^3.$$

- $V_{5,z}$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} V_{5,z} &= \frac{2R^2}{1-\nu} \left[ \frac{1+\nu}{2R^2} i \partial_z \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 i R^3 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 (-R \partial_z) \right] \\ V_{5,z} &= -\frac{(3+\nu)(1+\nu)}{E} R^3 \Lambda_1 \partial_z. \end{aligned}$$

- $V_{5,\varphi}$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} V_{5,\varphi} &= R^4 \left[ \frac{1+\nu}{2R^2} i \partial_z (-(\nu+2)R^3 \partial_z^3 - \frac{(1+\nu)(3+\nu)}{E} R^3 \Lambda_0 \partial_z) + \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_z^2 (-i\nu R^3 \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 i R^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \frac{1}{R^2} (-i\nu R^3 \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 i R^3) + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_2 \frac{1}{R^2} i R \right] \\ &= R^4 \left[ -\frac{(1+\nu)(\nu+2)}{2} i R \partial_z^4 - i \frac{(1+\nu)^2(3+\nu)}{2E} R \Lambda_0 \partial_z^2 - i\nu \frac{1-\nu}{2R^2} R^3 \partial_z^4 + \frac{1-\nu}{2} \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 i R \partial_z^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 R i \nu \partial_z^2 + \frac{(1-\nu^2)^2}{E^2} \Lambda_0^2 i R + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_2 \frac{1}{R} i \right] \\ &= -(2\nu+1) i R^5 \partial_z^4 + \frac{\nu^3-3\nu^2-5\nu-2}{E} \Lambda_0 R^5 i \partial_z^2 + \frac{(1-\nu^2)^2}{E^2} \Lambda_0^2 i R^5 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_2 R^3 i \end{aligned}$$

- Et l'opérateur  $L_4$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} L_4 &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{i}{R^3} \left( -(2\nu+1) i R^5 \partial_z^4 + \frac{\nu^3-3\nu^2-5\nu-2}{E} \Lambda_0 R^5 i \partial_z^2 + \frac{(1-\nu^2)^2}{E^2} \Lambda_0^2 i R^5 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_2 R^3 i \right) \\ &\quad + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \left( -(\nu+2)R^3 \partial_z^3 - \frac{(3+\nu)(1+\nu)}{E} R^3 \Lambda_0 \partial_z \right) \\ &= (2\nu+1) \frac{E}{1-\nu^2} R^2 \partial_z^4 - \frac{\nu^3-3\nu^2-5\nu-2}{(1-\nu^2)} \Lambda_0 R^2 \partial_z^2 - \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0^2 i R^2 - \Lambda_2 - \frac{E\nu(\nu+2)}{1-\nu^2} R^2 \partial_z^4 \\ &\quad - \frac{\nu(3+\nu)(1+\nu)}{1-\nu^2} R^2 \Lambda_0 \partial_z^2 \\ L_4 &= ER^2 \partial_z^4 + (1+2\nu) \Lambda_0 R^2 \partial_z^2 - \Lambda_0^2 \frac{1-\nu^2}{E} R^2 - \Lambda_2. \end{aligned}$$

- $V_{6,\varphi}$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} V_{6,\varphi} &= R^4 \left[ \frac{1+\nu}{2R^2} i \partial_z \left( -\frac{(3+\nu)(1+\nu)}{E} R^3 \Lambda_1 \partial_z \right) + \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_z^2 \left( \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 i R^3 \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \frac{1}{R^2} \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 i R^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 \frac{1}{R^2} \left( -i\nu R^3 \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 i R^3 \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_3 \frac{1}{R^2} i R \right] \\ &= -\frac{1+5\nu+3\nu^2-2\nu^3}{E} R^5 \Lambda_1 i \partial_z^2 + \frac{2(1-\nu^2)^2}{E^2} \Lambda_0 \Lambda_1 i R^5 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_3 i R^3 \end{aligned}$$

Et l'opérateur  $L_5$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} L_5 &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{i}{R^3} \left( -\frac{1+5\nu+3\nu^2-2\nu^3}{E} R^5 \Lambda_1 i \partial_z^2 + \frac{2(1-\nu^2)^2}{E^2} \Lambda_0 \Lambda_1 i R^5 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_3 i R^3 \right) \\ &\quad + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \left( -\frac{(3+\nu)(1+\nu)}{E} R^3 \Lambda_1 \partial_z \right) \\ L_5 &= \frac{-1-2\nu+\nu^2+3\nu^3}{1-\nu^2} R^2 \Lambda_1 \partial_z^2 - \frac{2(1-\nu^2)}{E} \Lambda_0 \Lambda_1 R^2 - \Lambda_3. \end{aligned}$$

■

Dans la résolution du problème scalaire par la suite, nous verrons que nous obtenons :

$$\Lambda_j = 0 \quad \forall j < 4.$$

Dans la formule :

$$L[k] = L_0(z) + \frac{1}{k} L_1(z, \partial_z) + \frac{1}{k^2} L_2(z, \partial_z) + \frac{1}{k^3} L_3(z, \partial_z) + \frac{1}{k^4} L_4(z, \partial_z) + \dots$$

nous verrons que les quatre premiers termes sont alors nuls. Le cas du cylindre est en effet un cas très dégénéré.

D'après le théorème 3.4, si  $(\Lambda[k], \zeta[k])$  vérifie l'équation :

$$L[k]\zeta[k] = \Lambda[k]\zeta[k]$$

alors

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{V}[k]\zeta[k]$$

est solution du problème aux valeurs propres en séries formelles :

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u}[k] = \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{u}[k].$$

### 4.1.2 Résolution du problème scalaire

On cherche à résoudre le problème scalaire obtenu dans le théorème précédent auquel on ajoute les conditions aux limites de Dirichlet pour les deux premières composantes en  $z = \pm 1$  pour obtenir une solution dans l'espace variationnel  $W_m(I)$  sur lequel est définie la membrane  $\mathbf{M}[k]$ .

**Théorème 4.2.** *Pour tout couple  $(\lambda, w)$  solution du problème*

$$ER^2 \partial_z^4 w = \lambda w \quad w(\pm 1) = \partial_z w(\pm 1) = 0, \quad (4.2)$$

*il existe des séries formelles*

$$\Lambda[k] = \lambda k^{-4} + \sum_{n \geq 6} k^{-n} \Lambda_n \quad \text{et} \quad \zeta[k] = w + \sum_{n \geq 2} k^{-n} \zeta_n \quad (4.3)$$

*telles que*

$$\begin{cases} L[k]\zeta[k] - \Lambda[k]\zeta[k] = 0 \\ V_\alpha[k]\zeta[k] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \alpha = z, \varphi \end{cases}. \quad (4.4)$$

**Remarque 4.3.** Les séries formelles de (4.3) vérifient :

$$\Lambda_5 = 0, \quad \text{et} \quad \zeta_1 = 0. \quad (4.5)$$

**Preuve.** Le système :

$$\begin{cases} L[k]\zeta[k] - \Lambda[k]\zeta[k] = 0 \\ V_\alpha[k]\zeta[k] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}.$$

est équivalent au système :

$$\forall n \geq 0 \begin{cases} \sum_{j=0}^n L_j \zeta_{n-j} k^{-n} - \sum_{j=0}^n \Lambda_j \zeta_{n-j} k^{-n} = 0 \\ \sum_{j=0}^n V_{j,\alpha} \zeta_{n-j} k^{-n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}.$$

On regarde chacune des puissances de  $k$  dans la formule précédente.

On a d'après l'hypothèse (4.3) :

$$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0, \quad \Lambda_4 = \lambda, \quad \text{et} \quad \zeta_0 = w. \quad (4.6)$$

•  $n = 0$  :

$$\begin{cases} L_0 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_0 = 0 \\ V_{0,\alpha} \zeta_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

D'après le théorème 4.1, on a  $L_0 = 0$ , et d'après (4.6),  $\Lambda_0 = 0$ , de plus par la définition (3.3), on a  $V_{0,\alpha} = 0$ , le système est alors vérifié.

•  $n = 1$  :

$$\begin{cases} L_0 \zeta_1 + L_1 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_1 - \Lambda_1 \zeta_0 = 0 \\ V_{1,\alpha} \zeta_0 + V_{0,\alpha} \zeta_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

Puisque d'après le théorème 4.1, on a  $L_0 = L_1 = 0$ ,  $V_{1,z} = 0$ ,  $V_{1,\varphi} = iR$  et d'après (4.6)  $\Lambda_0 = \Lambda_1 = 0$  et par définition (3.3)  $V_{0,\alpha} = 0$ , ce système donne alors seulement la condition au bord  $\zeta_0(\pm 1) = 0$ .

•  $n = 2$  :

$$\begin{cases} L_0 \zeta_2 + L_1 \zeta_1 + L_2 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_2 - \Lambda_1 \zeta_1 - \Lambda_2 \zeta_0 = 0 \\ V_{2,\alpha} \zeta_0 + V_{1,\alpha} \zeta_1 + V_{0,\alpha} \zeta_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

D'après le théorème 4.1 et (4.6), on a  $L_0 = L_1 = 0$ ,  $L_2 = -\Lambda_0 = 0$ ,  $V_{2,z} = -R\partial_z$ ,  $V_{2,\varphi} = 0$  et  $\Lambda_2 = 0$ , ceci implique  $\partial_z \zeta_0(\pm 1) = \zeta_1(\pm 1) = 0$ .

•  $n = 3$  :

$$\begin{cases} L_0 \zeta_3 + L_1 \zeta_2 + L_2 \zeta_1 + L_3 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_3 - \Lambda_1 \zeta_2 - \Lambda_2 \zeta_1 - \Lambda_3 \zeta_0 = 0 \\ V_{3,\alpha} \zeta_0 + V_{2,\alpha} \zeta_1 + V_{1,\alpha} \zeta_2 + V_{0,\alpha} \zeta_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

D'après le théorème 4.1, on a  $L_0 = L_1 = L_2 = 0$ ,  $L_3 = -\Lambda_1 = 0$ ,  $V_{3,z} = 0$ ,  $V_{3,\varphi} = -i\nu R^3 \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 i R^3$  et d'après (4.6) on a  $\Lambda_3 = 0$ , ceci implique alors  $-\nu R^2 \partial_z^2 \zeta_0(\pm 1) + \zeta_2(\pm 1) = \partial_z \zeta_1(\pm 1) = 0$ .

•  $n = 4$  :

$$\begin{cases} L_0 \zeta_4 + L_1 \zeta_3 + L_2 \zeta_2 + L_3 \zeta_1 + L_4 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_4 - \Lambda_1 \zeta_3 - \Lambda_2 \zeta_2 - \Lambda_3 \zeta_1 - \Lambda_4 \zeta_0 = 0 \\ V_{4,\alpha} \zeta_0 + V_{3,\alpha} \zeta_1 + V_{2,\alpha} \zeta_2 + V_{1,\alpha} \zeta_3 + V_{0,\alpha} \zeta_4 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Puisque  $\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$  d'après (4.6) il vient d'après le théorème 4.1  $L_0 = L_1 = L_2 = L_3 = 0$  et

$$L_4 = ER^2 \partial_z^4,$$

alors  $(\lambda, w) = (\Lambda_4, \zeta_0)$  vérifie l'équation :

$$L_4 \zeta_0 - \Lambda_4 \zeta_0 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$ER^2 \partial_z^4 \zeta_0 - \Lambda_4 \zeta_0 = 0.$$

De plus les conditions au bord sont données dans la résolution pour  $n = 1$  :  $\zeta_0(\pm 1) = 0$  et pour  $n = 2$  :  $\partial_z \zeta_0(\pm 1) = 0$  et sont bien vérifiées par  $\zeta_0 = w$  d'après (4.2).

D'après le théorème 4.1, on a  $V_{4,z} = -(\nu+2)R^3 \partial_z^3$ ,  $V_{4,\varphi} = 0$ , donc la deuxième équation du système s'écrit :

$$(\nu+2)R^2 \partial_z^3 \zeta_0(\pm 1) + \partial_z \zeta_2(\pm 1) = -\nu R^2 \partial_z^2 \zeta_1(\pm 1) + \zeta_3(\pm 1) = 0.$$

•  $n = 5$  :

$$\begin{cases} L_0 \zeta_5 + L_1 \zeta_4 + L_2 \zeta_3 + L_3 \zeta_2 + L_4 \zeta_1 + L_5 \zeta_0 - \Lambda_2 \zeta_3 - \Lambda_3 \zeta_2 - \Lambda_4 \zeta_1 - \Lambda_5 \zeta_0 = 0 \\ V_{5,\alpha} \zeta_0 + V_{4,\alpha} \zeta_1 + V_{3,\alpha} \zeta_2 + V_{2,\alpha} \zeta_3 + V_{1,\alpha} \zeta_4 + V_{0,\alpha} \zeta_5 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Puisque  $\Lambda_5 = 0$  d'après (4.5) et d'après le théorème 4.1,  $L_5 = 0$ , ceci implique que  $\zeta_1$  vérifie l'équation :

$$ER^2 \partial_z^4 \zeta_1 - \Lambda_4 \zeta_1 = 0$$

avec les conditions au bord données par les résolutions précédentes :

$$\zeta_1(\pm 1) = \partial_z \zeta_1(\pm 1) = 0.$$

On choisit de prendre  $\zeta_1 = 0$ .

D'après le théorème 4.1,  $V_{5,z} = 0$ ,  $V_{5,\varphi} = -(2\nu+1)iR^5 \partial_z^4$ , la deuxième équation du système nous donne donc :

$$(1+2\nu)R^4 \partial_z^4 \zeta_0(\pm 1) + \nu R^2 \partial_z^2 \zeta_2(\pm 1) - \zeta_4(\pm 1) = (\nu+2)R^2 \partial_z^3 \zeta_1(\pm 1) + \partial_z \zeta_3(\pm 1) = 0.$$

•  $n > 5$  quelconque : on suppose construits tous les  $\Lambda_j$  et  $\zeta_j$  pour  $j < n-4$  et on

cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n L_j \zeta_{n-j} - \sum_{j=0}^n \Lambda_j \zeta_{n-j} = 0 \\ \sum_{j=0}^n V_{j,\alpha} \zeta_{n-j} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}.$$

Puisque d'après (4.6) et le théorème 4.1, on a  $\Lambda_j = 0$  et  $L_j = 0$  pour  $j < 4$ , on résout :

$$(L_4 - \Lambda_4) \zeta_{n-4} = - \sum_{j=5}^n L_j \zeta_{n-j} + \sum_{j=5}^{n-1} \Lambda_j \zeta_{n-j} + \Lambda_n \zeta_0.$$

avec les conditions aux bords sur  $\zeta_{n-4}$  déterminées précédemment aux rangs  $n - 2$  et  $n - 3$  :

$$\sum_{j=0}^{n-2} V_{j,z} \zeta_{n-2-j} = \sum_{j=0}^{n-3} V_{j,\varphi} \zeta_{n-3-j} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

On rappelle que par définition (3.3)  $V_{0,\alpha} = 0$  et que d'après le théorème 4.1, on a :

$$V_{1,z} = 0, \quad V_{1,\varphi} = iR, \quad V_{2,z} = -R\partial_z, \quad V_{2,\varphi} = 0.$$

Ecrivons alors le système sous la forme :

$$\begin{cases} (L_4 - \Lambda_4) \zeta_{n-4} = \Lambda_n \zeta_0 + \mathbf{R}(\zeta_{j < n-4}) \\ -R\partial_z \zeta_{n-4}(\pm 1) = - \sum_{j=3}^{n-2} V_{j,z} \zeta_{n-2-j}(\pm 1), \quad \text{et} \quad iR \zeta_{n-4}(\pm 1) = - \sum_{j=2}^{n-3} V_{j,\varphi} \zeta_{n-3-j}(\pm 1) \end{cases} \quad (4.7)$$

D'après la première équation, on a :

$$\langle (L_4 - \Lambda_4) \zeta_{n-4}, \zeta_0 \rangle_{L^2} = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathbf{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}.$$

Par intégration par parties, il vient :

$$[ER^4 \partial_z^3 \zeta_{n-4} \zeta_0]_{-1}^1 - \langle ER^4 \partial_z^3 \zeta_{n-4}, \partial_z \zeta_0 \rangle_{L^2} - \langle \Lambda_4 \zeta_{n-4}, \zeta_0 \rangle_{L^2} = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathbf{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}.$$

Mais puisque d'après (4.2),

$$\zeta_0(\pm 1) = \partial_z \zeta_0(\pm 1) = 0,$$

en intégrant à nouveau par parties, on obtient :

$$\langle ER^4 \partial_z^2 \zeta_{n-4}, \partial_z^2 \zeta_0 \rangle_{L^2} - \langle \Lambda_4 \zeta_{n-4}, \zeta_0 \rangle_{L^2} = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathbf{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}.$$

En recommençant deux fois, il vient :

$$\begin{aligned} [ER^4 \partial_z \zeta_{n-4} \partial_z^2 \zeta_0]_{-1}^1 - [ER^4 \zeta_{n-4} \partial_z^3 \zeta_0]_{-1}^1 + \langle ER^4 \zeta_{n-4}, \partial_z^4 \zeta_0 \rangle_{L^2} - \langle \Lambda_4 \zeta_{n-4}, \zeta_0 \rangle_{L^2} \\ = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathbf{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Puisque d'après (4.2),  $\zeta_0$  vérifie l'équation :

$$(ER^4\partial_z^4 - \Lambda_4)\zeta_0 = 0,$$

on en déduit que :

$$[ER^4\partial_z\zeta_{n-4}\partial_z^2\zeta_0]_{-1}^1 - [ER^4\zeta_{n-4}\partial_z^3\zeta_0]_{-1}^1 = \langle \Lambda_n\zeta_0 + \mathbf{R}(\zeta_{j<n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & ER^4\partial_z\zeta_{n-4}(1)\partial_z^2\zeta_0(1) - ER^4\partial_z\zeta_{n-4}(-1)\partial_z^2\zeta_0(-1) - ER^4\zeta_{n-4}(1)\partial_z^3\zeta_0(1) \\ & + ER^4\zeta_{n-4}(-1)\partial_z^3\zeta_0(-1) = \Lambda_n\|\zeta_0\|_{L^2}^2 + \langle \mathbf{R}(\zeta_{j<n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Par les conditions au bord sur  $\zeta_{n-4}$  données dans (4.7),  $\Lambda_n$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} \Lambda_n = \frac{1}{\|\zeta_0\|_{L^2}^2} & \left( ER^3 \sum_{j=3}^{n-2} V_{j,z} \zeta_{n-2-j}(1) \partial_z^2 \zeta_0(1) - ER^3 \sum_{j=3}^{n-2} V_{j,z} \zeta_{n-2-j}(-1) \partial_z^2 \zeta_0(-1) \right. \\ & - \langle \mathbf{R}(\zeta_{j<n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2} - ER^3 i \sum_{j=2}^{n-3} V_{j,\varphi} \zeta_{n-3-j}(1) \partial_z^3 \zeta_0(1) \\ & \left. + ER^3 i \sum_{j=2}^{n-3} V_{j,\varphi} \zeta_{n-3-j}(-1) \partial_z^3 \zeta_0(-1) \right). \end{aligned}$$

Cette condition étant remplie, le second membre  $\Lambda_n\zeta_0 + \mathbf{R}(\zeta_{j<n-4})$  est orthogonal au noyau de  $L_4 - \Lambda_4$  muni des conditions aux bords dans le système (4.7) et d'après l'alternative de Fredholm,  $\zeta_{n-4}$  existe et est unique. ■

**Corollaire 4.4.** *Soit  $(\Lambda[k], \zeta[k])$  une série formelle solution du système (4.4) sous la condition (4.3), alors en posant :*

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{V}[k]\zeta[k]$$

on a :

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u}[k] = \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{u}[k], \quad u_\alpha[k](\pm 1) = 0.$$

De plus on a l'expression de  $\mathbf{u}[k]$  :

$$\mathbf{u}[k] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ iR\zeta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -R\partial_z\zeta_0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{k^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -i\nu R^3\partial_z^2\zeta_0 + iR\zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \dots \quad (4.8)$$

On voit dans la preuve du théorème 4.2 que les  $\zeta_l$  sont construits à partir de  $\zeta_0$ .

**Corollaire 4.5.** *Soit  $(\Lambda[k], \zeta[k])$  une série formelle solution du système (4.4) sous la condition (4.3), alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $c_n$  telle que :*

$$\|\zeta_n\|_{L^2} \leq c_n \|\zeta_0\|_{L^2}. \quad (4.9)$$

**Preuve.** D'après le système (4.7), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un exposant fini  $s_n \in \mathbb{N}$  et une constante  $\gamma$  tels que :

$$\|\zeta_n\|_{L^2} \leq \gamma \|\zeta_0\|_{H^{s_n}}.$$

Mais puisque  $\zeta_0$  est un vecteur propre, il est analytique et il existe alors une constante  $c_n$  telle que :

$$\|\zeta_n\|_{L^2} \leq c_n \|\zeta_0\|_{L^2}.$$

■

## 4.2 Valeurs propres du bilaplacien

Dans le théorème 4.2, la paire propre  $(\lambda, w)$  vérifie l'équation (4.2) qui fait apparaître le bilaplacien homogène sur  $[-1, 1]$ . On cherche alors à résoudre le problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \partial_z^4 w(z) = \mu w(z) \text{ sur } [-1, 1] \\ w(\pm 1) = 0 \\ \partial_z w(\pm 1) = 0 \end{cases}.$$

- On suppose  $\mu = 0$ . Alors  $w$  s'écrit :

$$w(z) = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta.$$

Les conditions aux bords impliquent que le quadruplet  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  est dans le noyau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci étant inversible, ceci implique  $f = 0$  donc  $\mu = 0$  n'est pas une valeur propre.

- On suppose  $\mu < 0$ . L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :

$$r^4 = \mu.$$

Posons :

$$\sigma = |\mu|^{1/4}.$$

Ses racines sont :

$$\sigma e^{i\pi/4}, \sigma e^{3i\pi/4}, \sigma e^{5i\pi/4}, \sigma e^{7i\pi/4}.$$

Donc  $w$  s'écrit sous la forme :

$$w(z) = \alpha \exp(\sigma e^{i\pi/4} z) + \beta \exp(\sigma e^{3i\pi/4} z) + \gamma \exp(\sigma e^{5i\pi/4} z) + \delta \exp(\sigma e^{7i\pi/4} z).$$

Les conditions aux bords impliquent que le quadruplet  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  est dans le noyau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \exp(\sigma e^{i\pi/4}) & \exp(\sigma e^{3i\pi/4}) & \exp(\sigma e^{5i\pi/4}) & \exp(\sigma e^{7i\pi/4}) \\ \exp(-\sigma e^{i\pi/4}) & \exp(-\sigma e^{3i\pi/4}) & \exp(-\sigma e^{5i\pi/4}) & \exp(-\sigma e^{7i\pi/4}) \\ \sigma e^{i\pi/4} \exp(\sigma e^{i\pi/4}) & \sigma e^{3i\pi/4} \exp(\sigma e^{3i\pi/4}) & \sigma e^{5i\pi/4} \exp(\sigma e^{5i\pi/4}) & \sigma e^{7i\pi/4} \exp(\sigma e^{7i\pi/4}) \\ \sigma e^{i\pi/4} \exp(-\sigma e^{i\pi/4}) & \sigma e^{3i\pi/4} \exp(-\sigma e^{3i\pi/4}) & \sigma e^{5i\pi/4} \exp(-\sigma e^{5i\pi/4}) & \sigma e^{7i\pi/4} \exp(-\sigma e^{7i\pi/4}) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut :

$$4\sigma^2[-2 + \cosh(2\sqrt{2}\sigma) + 2\cos(2\sqrt{2}\sigma)].$$

Il ne s'annule qu'en 0. Donc le bilaplacien homogène n'a pas de valeur propre négative.

• On suppose  $\mu > 0$ . L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :

$$r^4 = \mu.$$

Ses racines sont :

$$\mu^{1/4}, -\mu^{1/4}, i\mu^{1/4}, -i\mu^{1/4}.$$

Donc  $w$  s'écrit sous la forme :

$$w(z) = \alpha e^{\mu^{1/4}z} + \beta e^{-\mu^{1/4}z} + \gamma e^{i\mu^{1/4}z} + \delta e^{-i\mu^{1/4}z}.$$

Les conditions aux bords impliquent que le quadruplet  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  est dans le noyau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} e^{\mu^{1/4}} & e^{-\mu^{1/4}} & e^{i\mu^{1/4}} & e^{-i\mu^{1/4}} \\ e^{\mu^{-1/4}} & e^{\mu^{1/4}} & e^{-i\mu^{1/4}} & e^{i\mu^{1/4}} \\ \mu^{1/4} e^{\mu^{1/4}} & -\mu^{1/4} e^{-\mu^{1/4}} & i\mu^{1/4} e^{i\mu^{1/4}} & -i\mu^{1/4} e^{-i\mu^{1/4}} \\ \mu^{1/4} e^{-\mu^{1/4}} & -\mu^{1/4} e^{\mu^{1/4}} & i\mu^{1/4} e^{-i\mu^{1/4}} & -i\mu^{1/4} e^{i\mu^{1/4}} \end{pmatrix}.$$

Pour que  $\mu$  soit une valeur propre, il faut que 0 ne soit pas le seul élément du noyau de cette matrice, donc que son déterminant soit nul. Celui-ci vaut :

$$8i\mu^{1/2}[1 - \cosh(2\mu^{1/4}) \cos(2\mu^{1/4})].$$

Les valeurs propres du bilaplacien homogène sur  $[-1, 1]$  sont donc les zéros non nuls de la fonction :

$$\mu \mapsto 1 - \cosh(2\mu^{1/4}) \cos(2\mu^{1/4}).$$

**Notation 4.6.** On note  $\mu_1, \mu_2, \dots$  les valeurs propres du problème de Dirichlet pour le bilaplacien sur  $[-1, 1]$  rangées dans l'ordre croissant. Numériquement on trouve :

$$\mu_1 \simeq 31.285, \quad \mu_2 \simeq 237.721, \quad \mu_3 \simeq 913.602, \quad \mu_4 \simeq 2496.487.$$

**Corollaire 4.7.** Dans le théorème 4.2, on peut prendre :

$$\Lambda_j[k] = \Lambda_{j,4}k^{-4} + \Lambda_{j,6}k^{-6} + \sum_{n \geq 7} \Lambda_{j,n}k^{-n}$$

avec

$$\Lambda_{j,4} = ER^2\mu_j.$$



## 4.3 Quasimodes

### 4.3.1 Définition

On introduit alors la notion de quasimode comme dans [17]. Elle permet d'estimer la distance entre la valeur propre obtenue par l'algorithme précédent et le spectre de  $\mathbf{M}[k]$ .

**Définition 4.8.** *Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint non borné de domaine  $D(A)$  sur un espace de Hilbert  $H$ . Pour  $h > 0$  fixé, une paire  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times D(A) \setminus \{0\}$  est appelée  $h$ -quasimode si elle vérifie :*

$$\|(A - \lambda)u\|_H \leq h\|u\|_H.$$

Si  $(\lambda, u)$  est un  $h$ -quasimode, alors  $\lambda$  est proche du spectre de  $A$  d'une distance plus petite que  $h$ . On a également un lemme sur la distance entre  $u$  et des sous-espaces propres de  $A$  :

**Lemme 4.9.** *Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint non borné sur un espace de Hilbert  $H$  de domaine  $D(A)$  inclus de manière compacte dans  $H$ . Soient  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  les valeurs propres distinctes de  $A$  et  $E_j$  les sous-espaces propres associés. Si  $(\lambda, u)$  est un  $h$ -quasimode de  $A$ , alors on a :*

$$d(\lambda, (\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}) \leq h.$$

Soit  $K = \{j \in \mathbb{N}, |\lambda - \lambda_j| \leq h\}$  et  $M = \min_{j \notin K} |\lambda - \lambda_j|$  alors :

$$\min_{w \in \oplus E_j} \frac{\|u - w\|_H}{\|u\|_H} \leq \frac{h}{M}.$$

### 4.3.2 Résultat

**Théorème 4.10.** *Soit  $(\Lambda[k], \zeta[k]) \in \mathbb{R} \times C^\infty(I)$  solution du système (4.4) sous les hypothèses (4.2) et (4.3).*

*Alors pour tout  $N \geq 0$ , si l'on pose :*

$$\Lambda^{[N]}[k] = \sum_{j=0}^N k^{-j} \Lambda_j$$

et

$$\mathbf{u}^{[N]}[k] = \sum_{j=0}^N k^{-j} \mathbf{u}_j = \sum_{j=0}^N k^{-j} \sum_{l=0}^j \mathbf{V}_l \zeta_{j-l}$$

*la paire  $(\Lambda^{[N]}[k], \mathbf{u}^{[N]}[k])$  est un quasimode d'ordre  $\mathcal{O}(k^{-N+1})$  de  $\mathbf{M}[k]$  :*

*Il existe une constante  $C = C(N) \in \mathbb{R}^+$  indépendante de  $k$  telle que pour tout  $k$  :*

$$\|(\mathbf{M}[k] - \Lambda^{[N]}[k]\mathbf{A})\mathbf{u}^{[N]}[k]\|_{(L^2)^3} \leq Ck^{-N+1}\|\mathbf{u}^{[N]}[k]\|_{(L^2)^3}$$

**Preuve.** Par construction,  $\mathbf{u}^{[N]}[k]$  appartient à l'espace variationnel  $W_m(I) = H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(I)$ .

Puisque

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u}[k] = \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{u}[k]$$

et

$$\mathbf{u}^{[N]}[k] = \sum_{j=0}^N k^{-j} \sum_{l=0}^j \mathbf{V}_l \zeta_{j-l}$$

et d'après l'inégalité (4.9), les  $\zeta_l$  étant analytiques, on a :

$$\|(\mathbf{M}[k] - \Lambda^{[N]}[k]\mathbf{A})\mathbf{u}^{[N]}[k]\|_{(L^2)^3} \leq \frac{C}{k^{N-1}} \|\zeta_0\|_{L^2}.$$

Pour  $k$  assez grand, grâce à (4.8), il existe  $c_N$  est indépendant de  $k$  telle que :

$$\|\zeta_0\|_{L^2} \leq c_N \|\mathbf{u}^{[N]}\|_{(L^2)^3}.$$

Donc au final, il vient :

$$\|(\mathbf{M}[k] - \Lambda^{[N]}[k]\mathbf{A})\mathbf{u}^{[N]}[k]\|_{(L^2)^3} \leq \frac{C}{k^{N-1}} \|\mathbf{u}^{[N]}\|_{(L^2)^3}.$$

La paire  $(\Lambda^{[N]}(k), \mathbf{u}^{[N]}(k))$  est bien un quasimode d'ordre  $\mathcal{O}(k^{-N+1})$  de  $\mathbf{M}[k]$ . ■

**Remarque 4.11.** Les valeurs propres de l'opérateur de membrane  $\mathbf{M}[k]$  ont comme point d'accumulation 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ ; ce qui est cohérent avec la proposition 2.17 qui nous donne le spectre essentiel de la membrane du cylindre  $\mathbf{M}$  :

$$\sigma_{ess}(\mathbf{M}) = [0, \frac{E}{R^2}].$$

On note  $\mu_1, \dots, \mu_l, \dots$  les valeurs propres de l'opérateur  $L_4$  muni des conditions de Dirichlet sur  $I$  et on pose :

$$\Lambda_l^{[N]}[k] = k^{-4} \mu_l + k^{-5} \Lambda_{5,l} + \dots + k^{-N} \Lambda_{N,l}.$$

**Théorème 4.12.** Il existe  $C_{l,N} \in \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $k$  :

$$dist(\Lambda_l^{[N]}[k], \sigma(\mathbf{M}[k])) \leq C_{l,N} k^{-N+1}$$

Il y a alors du vrai spectre autour du quasimode que l'on a exhibé.

Pour  $k$  assez grand,  $\Lambda_l^{[N]}$  se trouve sous le spectre essentiel de  $\mathbf{M}[k]$ .

## 4.4 Estimation d'énergie

Pour vérifier que la famille de quasimodes construite précédemment approche bien la plus petite valeur propre de l'opérateur de membrane, on cherche une estimation d'énergie pour déterminer le quotient de Rayleigh.

On a l'estimation d'énergie suivante :

**Proposition 4.13.** *Pour  $\mathbf{u} \in H_0^1 \times H_0^1 \times L^2([-1, 1])$ , il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $k \leq 1$  :*

$$a_m[k](\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{C}{k^4} \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2}^2.$$

**Preuve.** Puisque  $a_m$  est une forme bilinéaire coercive, on a l'inégalité suivante :

$$a_m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C(E, \nu) \|\gamma(\mathbf{u})\|^2$$

avec  $\|\gamma(\mathbf{u})\|_{L^2}^2 = \|\gamma_{zz}(\mathbf{u})\|_{L^2}^2 + \|\gamma_{z\varphi}(\mathbf{u})\|_{L^2}^2 + \|\gamma_{\varphi\varphi}(\mathbf{u})\|_{L^2}^2$ .

On applique la formule à  $\mathbf{u}e^{ik\varphi}$  et on obtient :

$$a_m[k](\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C(E, \nu) \|\gamma(\mathbf{u})[k]\|^2.$$

Pour le cylindre de rayon  $R$ , on a d'après les équations (2.9) :

$$\gamma_{zz}[k](\mathbf{u}) = \partial_z u_z, \quad \gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_z u_\varphi + ik u_z), \quad \gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u}) = ik u_\varphi + R u_3.$$

• En utilisant l'inégalité de Poincaré, il s'en suit :

$$\|\partial_z u_z\|_{L^2}^2 \geq C \|u_z\|_{L^2}^2 \quad \text{donc} \quad \|\partial_z u_z\|_{L^2}^2 \geq C_1 \|u_z\|_{H^1}^2$$

de plus  $\partial_z u_z = \gamma_{zz}[k](\mathbf{u})$  d'où  $\|\gamma_{zz}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \geq C_1 \|u_z\|_{H^1}^2$ .

• On a  $\partial_z u_\varphi = 2\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u}) - ik u_z$ , ceci implique que :

$$\|\partial_z u_\varphi\|_{L^2} \leq 2\|\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2} + k \|u_z\|_{L^2} \leq 2\|\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2} + k \|u_z\|_{H^1}$$

et en utilisant l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|\partial_z u_\varphi\|_{L^2} \leq 2\|\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2} + \frac{k}{\sqrt{C_1}} \|\gamma_{zz}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}$$

Comme  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  puisque  $(a - b)^2 \geq 0$ , alors :

$$\|\partial_z u_\varphi\|_{L^2}^2 \leq 2(4\|\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 + \frac{k^2}{C_1} \|\gamma_{zz}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2)$$

Finalement on a :

$$\|u_\varphi\|_{H^1}^2 \leq C_2 \|\partial_z u_\varphi\|_{L^2}^2 \leq 8C_2 \|\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 + \frac{2k^2 C_2}{C_1} \|\gamma_{zz}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2$$

• On a :  $u_3 = \frac{1}{R}(\gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u}) - ik u_\varphi)$  donc :

$$\|u_3\|_{L^2} \leq \frac{k}{R} \|u_\varphi\|_{L^2} + \frac{1}{R} \|\gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment on montre que :

$$\|u_3\|_{L^2}^2 \leq 2 \frac{k^2}{R^2} \|u_\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{2}{R^2} \|\gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \leq 2 \frac{k^2}{R^2} \|u_\varphi\|_{H^1}^2 + \frac{2}{R^2} \|\gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2$$

Par les inégalités prouvées au-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_3\|_{L^2}^2 &\leq 2\frac{k^2}{R^2}(8C_2\|\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 + \frac{2k^2C_2}{C_1}\|\gamma_{zz}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2) + \frac{2}{R^2}\|\gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \\ \|u_3\|_{L^2}^2 &\leq \frac{16k^2}{R^2}C_2\|\gamma_{z\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 + \frac{4k^4C_2}{R^2C_1}\|\gamma_{zz}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 + \frac{2}{R^2}\|\gamma_{\varphi\varphi}[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

En additionnant :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2}^2 \leq \max\left(\frac{1}{C_1} + \frac{2k^2C_2}{C_1} + \frac{4k^4C_2}{R^2C_1}, \frac{2}{R^2}, 8C_2 + \frac{16k^2}{R^2}C_2\right)\|\gamma(\mathbf{u})\|_{L^2}^2$$

Pour  $k \geq 1$ , on a alors :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2}^2 \leq C(R)k^4\|\gamma[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2$$

Donc au final :

$$a_m[k](\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C(E, \nu)\|\gamma[k](\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \geq \frac{C(E, \nu)}{C(R)k^4}\|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2}^2$$

D'après le quotient de Rayleigh, on a :

$$\Lambda_{\min} = \min \frac{a_m[k](\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2}^2}$$

La plus petite valeur propre n'est donc pas plus grande que l'ordre  $k^{-4}$ . ■

## 4.5 Résultats numériques

On implémente la formulation variationnelle de l'opérateur  $\mathbf{M}[k]$  pour le cylindre donnée par les formules (2.9) qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{E}{1-\nu^2} \int_S \partial_z u_z \partial_z v_z + \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_z u_\varphi \partial_z v_\varphi - \frac{\nu}{R} (\partial_z u_z v_r + u_r \partial_z v_z) + \frac{1}{R^2} u_r v_r \\ & \quad + k^2 \left( \frac{1-\nu}{2R^2} u_z v_z + \frac{1}{R^4} u_\varphi v_\varphi \right) \\ & \quad + ik \left[ \frac{\nu}{R^2} (u_\varphi \partial_z v_z - \partial_z u_z v_\varphi) + \frac{1-\nu}{2R^2} (u_z \partial_z v_\varphi - \partial_z u_\varphi v_z) + \frac{1}{R^3} (u_r v_\varphi - u_\varphi v_r) \right] R dz \\ & = \lambda \int_S (u_r v_r + \frac{1}{R^2} u_\varphi v_\varphi + u_z v_z) R dz \end{aligned}$$

avec les conditions au bord

$$u_z(\pm 1) = u_\varphi(\pm 1) = 0.$$

On choisit  $I = [-1, 1]$  que l'on découpe en 2 éléments réguliers :



FIGURE 4.2 – Maillage du segment  $I$

On prend les données suivantes :

$$R = 2, \quad E = 1, \quad \nu = 0.3.$$

Les calculs numériques ont été faits avec la librairie d'éléments finis MÉLINA développée par Martin [33]. On fait de l'interpolation de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto avec les éléments Q6 pour calculer les 4 plus petites valeurs propres ainsi que les vecteurs propres associés.

**Notation 4.14.** *On note les valeurs propres numériques  $\Lambda_{1,\text{num}}(k), \Lambda_{2,\text{num}}(k), \dots$  rangées par ordre croissant.*

On regarde le comportement des 4 plus petites valeurs propres lorsque  $k$  augmente de 0 à 100 et on obtient le graphique suivant :

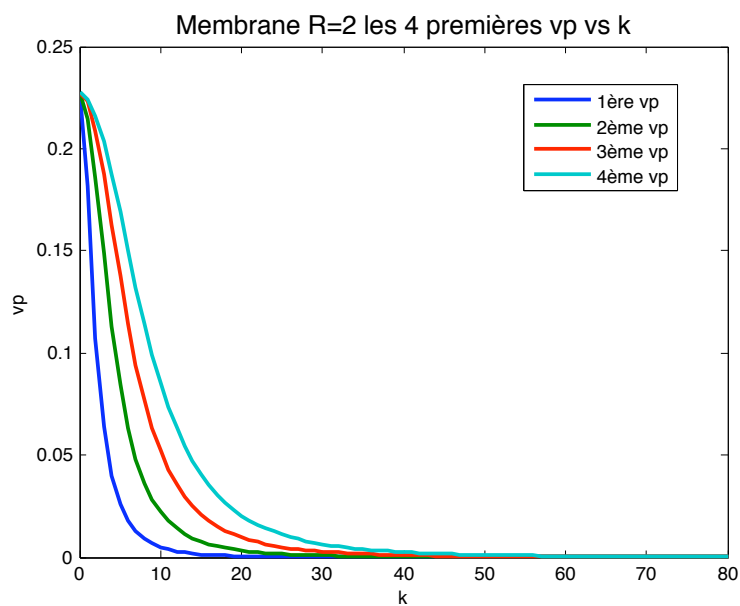


FIGURE 4.3 – Comportement des 4 premières valeurs propres en fonction de  $k$

Pour mieux observer le comportement des valeurs propres pour  $k$  grand, on trace le graphique  $\log - \log$  des 4 plus petites valeurs propres lorsque  $k$  augmente de 0 à 100 et on observe des droites parallèles dont on va chercher la pente.

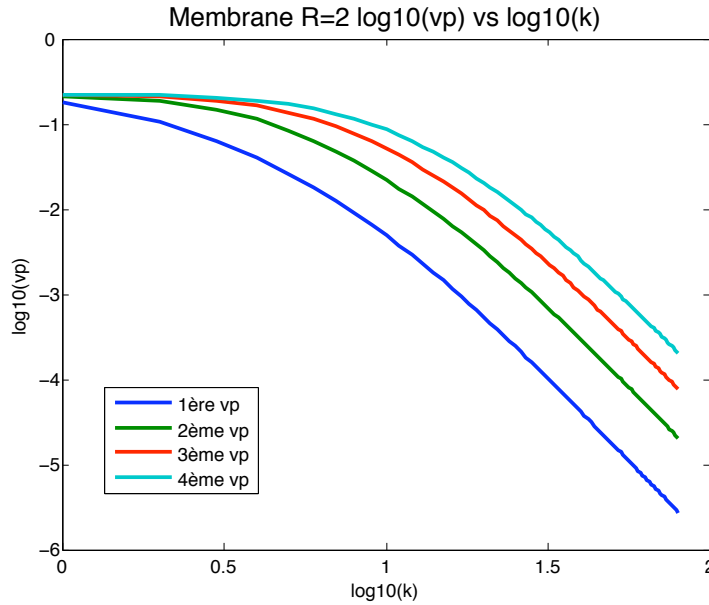


FIGURE 4.4 – Graphique  $\log - \log$  du comportement des 4 premières valeurs propres en fonction de  $k$

On trace le graphe  $\log - \log$  des quatre premières valeurs propres pour  $k$  allant de 100 à 1000 sur la figure 4.5. On obtient des droites, on effectue alors une régression linéaire de degré 1 et on retrouve le comportement de la plus petite valeur propre en  $k^{-4}$  au premier ordre comme dans le théorème 4.2 :

$$\Lambda_{j,\text{num}} = a_j k^{-\rho_j} + b_j k^{-\sigma_j} + o(k^{-\sigma_j}),$$

avec

$$\rho_j \simeq 4, \quad \sigma_j \simeq 6.$$

En appliquant la formule du théorème 4.7 et la valeur numérique des premières valeurs propres du bilaplacien homogène sur  $[-1, 1]$  donnée dans la proposition 4.6, on obtient les valeurs théoriques de  $\Lambda_{j,4}$  pour les quatre premières valeurs propres de la membrane :

$$\Lambda_{j,4} = ER^2 \mu_j.$$

On a rassemblé dans un tableau les données théoriques et numériques obtenues.

	1ère vp	2ème vp	3ème vp	4ème vp
$\Lambda_{j,4}$	125.14	950.88	3654.40	9985.94
$a_j$	121.607	895.28	3310.99	8628.96
$\rho_j$	3.996	3.991	3.985	3.978

Voici ce qu'on obtient numériquement lors de la régression linéaire d'ordre 1 pour chacun des segments de la figure 4.5 :

										$\Lambda_{j,4}$
1ère vp	116.36	122.02	123.50	124.12	124.44	124.63	124.75	124.83	124.88	125.14
2ème vp	817.11	901.98	925.06	934.77	939.81	942.78	944.68	945.97	946.89	950.88
3ème vp	2844.2	3347.4	3490.7	3551.9	3583.8	3602.7	3614.8	3623.0	3628.9	3654.40
4ème vp	6891.8	8762.7	9326.5	9571.0	9699.6	9775.8	9824.8	9858.3	9882.2	9985.94

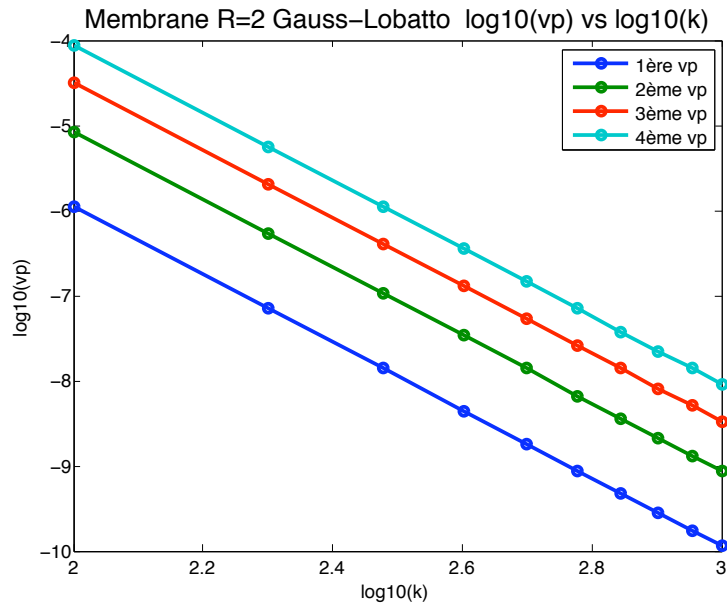


FIGURE 4.5 – Graphique log – log du comportement des quatre premières valeurs propres en fonction de  $k$

On retrouve alors bien la convergence des plus petites valeurs propres vers les valeurs théoriques calculées avec les mêmes ordres de grandeur. Ceci nous permet de valider notre étude théorique.

On étudie aussi le comportement au second ordre des valeurs propres. Pour cela on trace en diagramme log – log :

$$\Lambda_{j,\text{num}} - \Lambda_{j,4}k^{-4}$$



en fonction de  $k$ . On obtient des droites de pente  $-6$  et on retrouve le comportement des plus petites valeurs propres en  $k^{-6}$  au second ordre comme dans la preuve du théorème 4.2 :

$$\lambda_{\text{num}} = \frac{1}{k^4} \lambda_{4,\text{num}} + \frac{1}{k^6} \lambda_{6,\text{num}} + o\left(\frac{1}{k^6}\right).$$

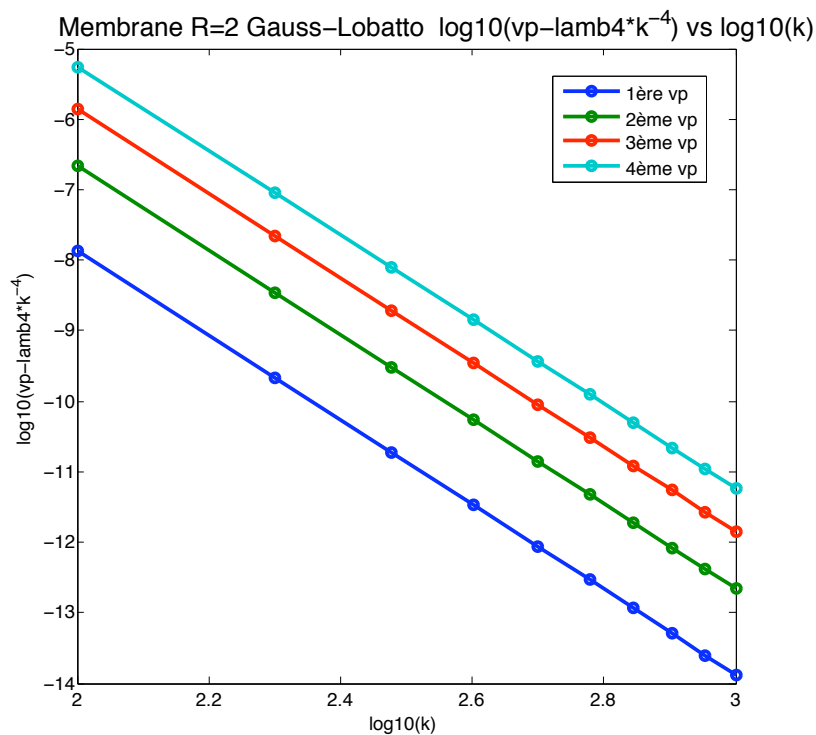


FIGURE 4.6 – Graphique  $\log - \log$  du comportement des quatres premières valeurs propres en fonction de  $k$  au second ordre

On regarde également le comportement des vecteurs propres lorsque le mode angulaire  $k$  devient grand. On observe que la norme des vecteurs propres diminue lorsque  $k$  augmente.

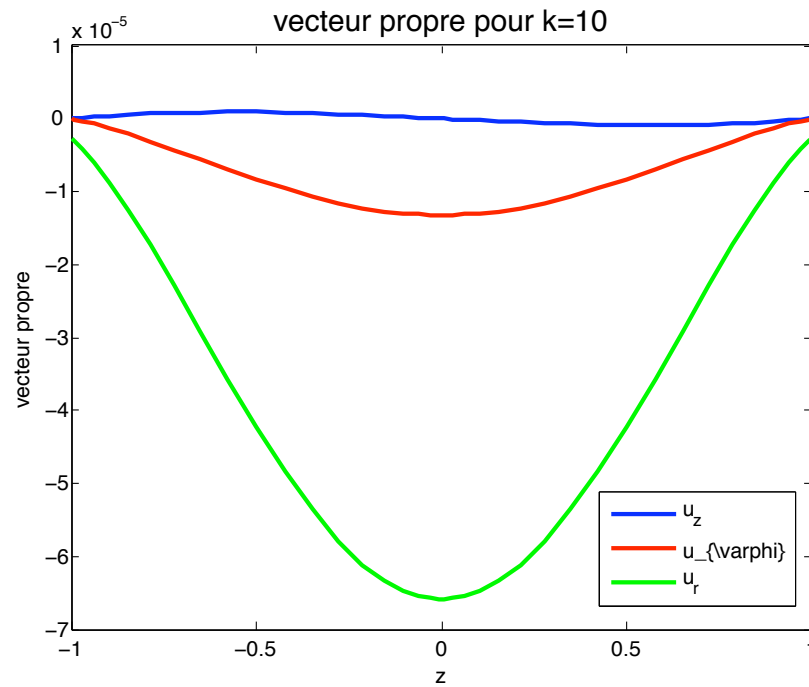
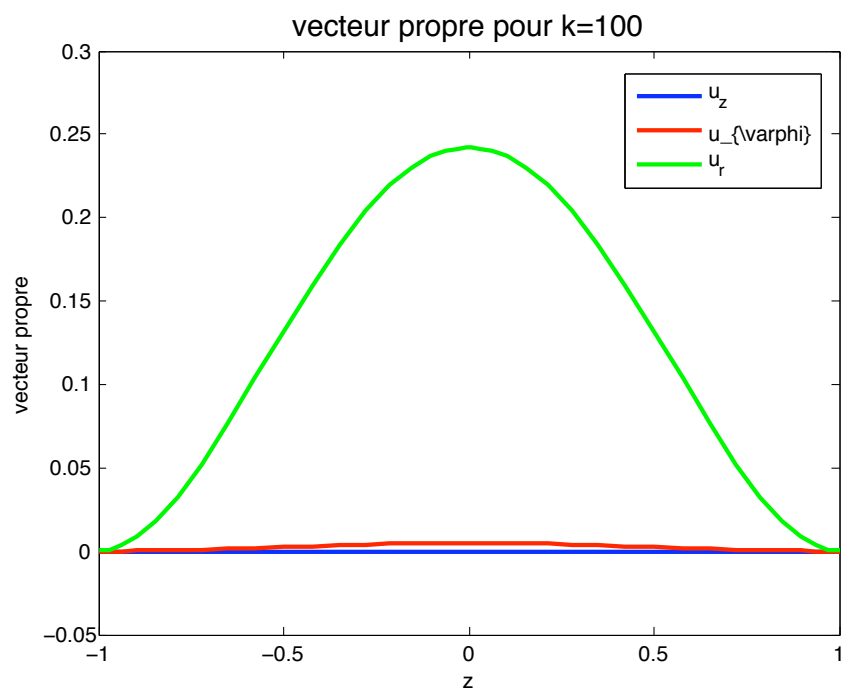
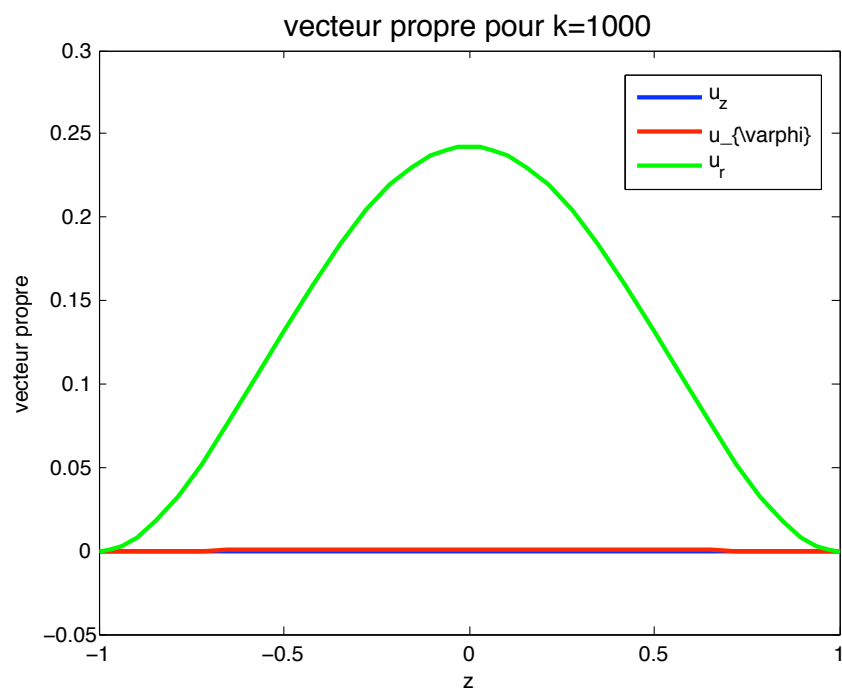


FIGURE 4.7 – Composantes du premier vecteur propre pour  $k = 10$

FIGURE 4.8 – Composantes du premier vecteur propre pour  $k = 100$

FIGURE 4.9 – Composantes du premier vecteur propre pour  $k = 1000$

Pour pouvoir comparer les différentes composantes des vecteurs propres, on calcule la valeur du quotient

$$\frac{\max(u_\alpha)}{\max(u_r)}, \quad \alpha = z, \varphi.$$

On regarde le comportement de ce quotient lorsque  $k$  augmente puis on trace le graphe dans une échelle log – log 4.11 et on retrouve le comportement de la composante  $u_z$  en  $k^{-2}$  et de la composante  $u_\varphi$  en  $k^{-1}$  qui sont en accord avec la formule (4.8) du corollaire 4.4 :

$$\mathbf{u}[k] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ iR\zeta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -R\partial_z\zeta_0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{k^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -i\nu R^3\partial_z^2\zeta_0 + iR\zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \dots$$

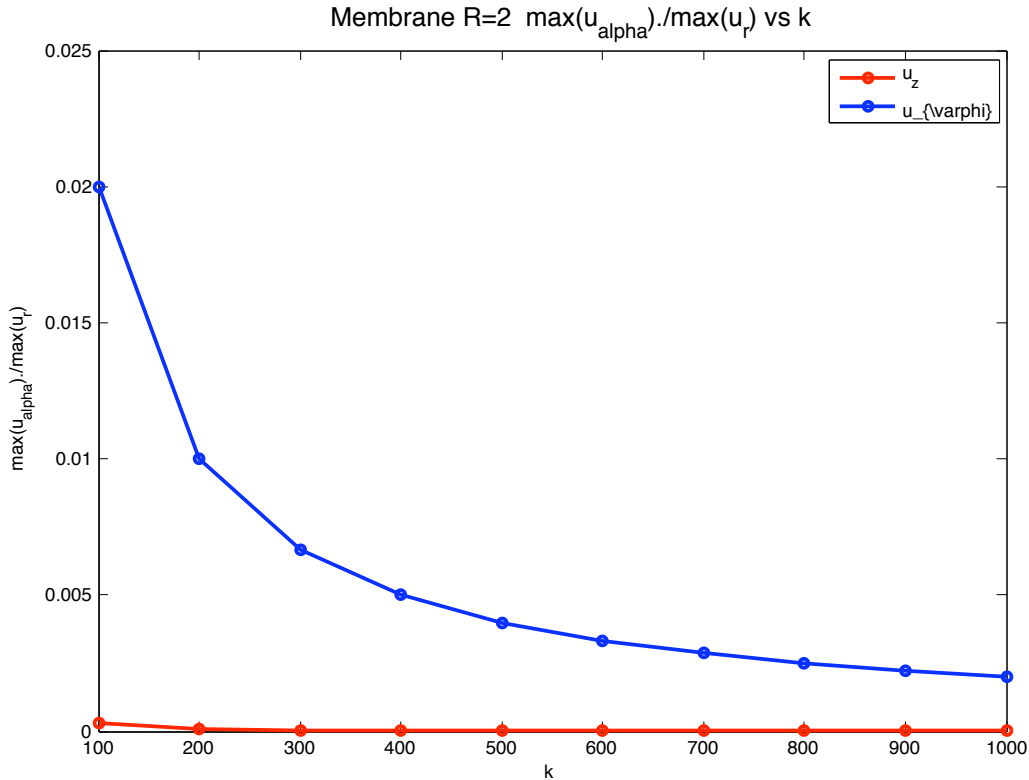


FIGURE 4.10 – Graphique des rapports des maxima des vecteurs propres en fonction de  $k$

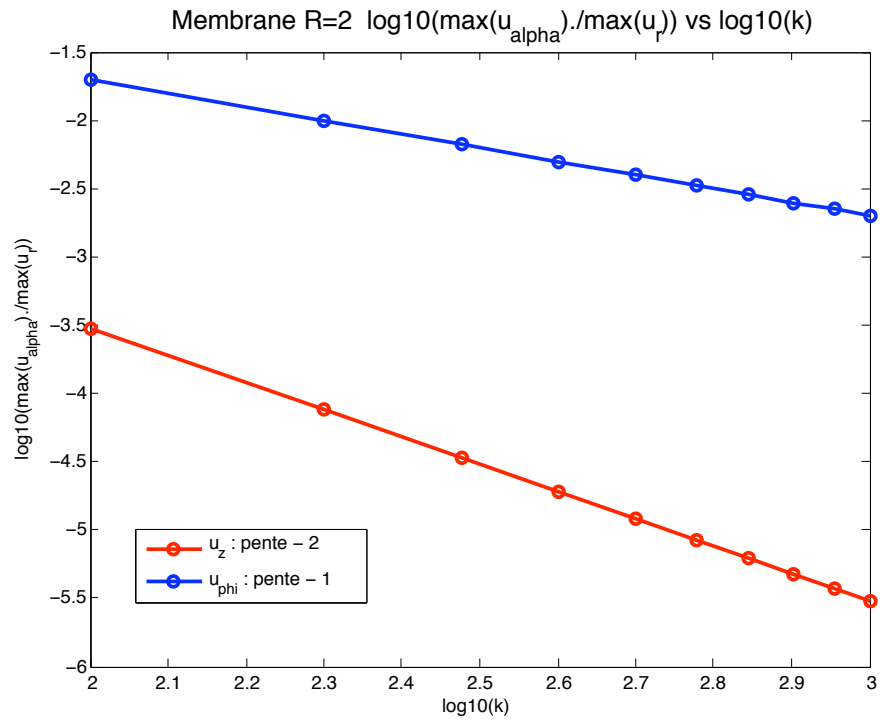


FIGURE 4.11 – Graphique log – log des rapports des maxima des vecteurs propres en fonction de  $k$  au premier ordre

Notre étude numérique a bien validé notre étude théorique dans le cas de la membrane d'une coque cylindrique.



# Chapitre 5

## L'opérateur de Koiter pour le cylindre

### 5.1 Introduction

La membrane est le modèle limite de l'opérateur de Koiter lorsque l'épaisseur de la coque est nulle. Nous nous intéressons ici à l'opérateur de Koiter complet avec  $\varepsilon \neq 0$ . Le spectre de l'opérateur est alors discret et ne contient pas de spectre essentiel. Nous allons essayer de comprendre le lien entre la plus petite valeur propre de la membrane et la plus petite valeur propre de l'opérateur de Koiter.

On attire l'attention du lecteur sur le fait que l'espace variationnel sur lequel est défini l'opérateur de Koiter est différent de celui sur lequel est défini l'opérateur de membrane :

$$W(S) = \{\mathbf{u} \in H^1 \times H^1 \times H^2(S), \text{ et } \mathbf{u}|_{\Gamma_0} = \partial_z u_3|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

### 5.2 L'opérateur de flexion

On applique les formules de la flexion de la proposition 1.31 en utilisant (2.2) dans le cas du cylindre de rayon  $R$  et on obtient la matrice de la flexion :

$$\mathbf{B} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4k^2}{R^6} \partial_\varphi^2 - \frac{2(1-\nu)}{R^4} \partial_z^2 & -\frac{2}{R^3} \partial_\varphi \partial_z^2 - \frac{2}{R^5} \partial_\varphi^3 + \frac{2}{R^5} \partial_\varphi \\ 0 & \frac{2}{R^3} \partial_\varphi \partial_z^2 + \frac{2}{R^5} \partial_\varphi^3 - \frac{2}{R^5} \partial_\varphi & \partial_z^4 + \frac{2}{R^2} \partial_\varphi^2 \partial_z^2 + \frac{1}{R^4} \partial_\varphi^4 - \frac{2}{R^4} \partial_\varphi^2 + \frac{1}{R^4} - \frac{2\nu}{R^2} \partial_z^2 \end{pmatrix}$$



ainsi que la matrice de la flexion à fréquence  $k$  en remplaçant  $\partial_\varphi$  par  $ik$  :

$$\mathbf{B}[k] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4k^2}{R^6} - \frac{2(1-\nu)}{R^4} \partial_z^2 & -\frac{2ik}{R^3} \partial_z^2 + \frac{2ik^3}{R^5} + \frac{2ik}{R^5} \\ 0 & \frac{2ik}{R^3} \partial_z^2 - \frac{2ik^3}{R^5} - \frac{2ik}{R^5} & \partial_z^4 - \frac{2k^2}{R^2} \partial_z^2 + \frac{k^4}{R^4} + \frac{2k^2}{R^4} + \frac{1}{R^4} - \frac{2\nu}{R^2} \partial_z^2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

### 5.3 Ansatz

On regarde le système complet de Koiter (membrane + flexion) 2D du cylindre sur  $[-1, 1]$  à la fréquence  $k$ . D'après les formules (4.1) et (5.1), il s'écrit matriciellement ainsi :

$$\mathbf{K}(\varepsilon)[k] = \mathbf{M}[k] + \frac{\varepsilon^2}{3} \mathbf{B}[k] = \frac{E}{1-\nu^2} \times \begin{pmatrix} -\partial_z^2 + \frac{1-\nu}{2R^2} k^2 & -\frac{1+\nu}{2R^2} ik \partial_z & -\frac{\nu}{R} \partial_z \\ -\frac{1+\nu}{2R^2} ik \partial_z & \frac{1}{R^4} k^2 - \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_z^2 + \frac{4\varepsilon^2}{3} \left( \frac{k^2}{R^6} - \frac{1-\nu}{2R^4} \partial_z^2 \right) & -\frac{ik}{R^3} - \frac{\varepsilon^2}{3} \left( \frac{2ik}{R^3} \partial_z^2 - \frac{2ik^3}{R^5} - \frac{2ik}{R^5} \right) \\ \frac{\nu}{R} \partial_z & \frac{ik}{R^3} + \frac{\varepsilon^2}{3} \left( \frac{2ik}{R^3} \partial_z^2 - \frac{2ik^3}{R^5} - \frac{2ik}{R^5} \right) & \frac{1}{R^2} + \frac{\varepsilon^2}{3} \left( \partial_z^4 - \frac{2k^2}{R^2} \partial_z^2 + \frac{k^4}{R^4} + \frac{2k^2}{R^4} + \frac{1}{R^4} - \frac{2\nu}{R^2} \partial_z^2 \right) \end{pmatrix}$$

En particulier, on a :

$$\mathbf{K}(\varepsilon)[k] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{R} \partial_z \zeta_0 \\ \left( -\frac{ik}{R^3} - \frac{\varepsilon^2}{3} \left( \frac{2ik}{R^3} \partial_z^2 - \frac{2ik^3}{R^5} - \frac{2ik}{R^5} \right) \right) \zeta_0 \\ \left( \frac{1}{R^2} + \frac{\varepsilon^2}{3} \left( \partial_z^4 - \frac{2k^2}{R^2} \partial_z^2 + \frac{k^4}{R^4} + \frac{2k^2}{R^4} + \frac{1}{R^4} - \frac{2\nu}{R^2} \partial_z^2 \right) \right) \zeta_0 \end{pmatrix}$$

Pour  $k$  grand, le terme prépondérant de la matrice de flexion est le terme en  $\varepsilon^2 k^4$  dans la composante  $\mathbf{B}(3,3)$ . On peut s'attendre à ce que la plus petite valeur propre de l'opérateur de Koiter soit alors de la forme :

$$\frac{\Lambda_4}{k^4} + c\varepsilon^2 k^4.$$

Le minimum de cette fonction en  $k$  est obtenu lorsque les deux termes sont du même ordre ce qui correspond à  $k^4$  de l'ordre de  $\varepsilon$ . On effectue alors l'Ansatz suivant :

$$k = C\varepsilon^{-1/4} \quad (5.2)$$

avec  $C$  un coefficient de proportionnalité (que l'on déterminera plus tard) et on s'intéresse au comportement des valeurs propres lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Cet Ansatz est aussi corroboré par les résultats de Artioli, Beirão da Veiga, Hakula et Lovadina [3, 2] et de Beirão da Veiga, Hakula et Pitkäranta [6].

On verra par la suite que les expériences numériques permettront de valider cet Ansatz. En remplaçant  $k$  par cette valeur, on obtient la matrice de flexion modifiée suivante :

$$\mathcal{K}[\varepsilon] := \mathbf{K}(\varepsilon)[C\varepsilon^{-1/4}] = \frac{E}{1-\nu^2} \times \begin{pmatrix} -\partial_z^2 + \frac{1-\nu}{2R^2}C^2\varepsilon^{-1/2} & -\frac{1+\nu}{2R^2}iC\varepsilon^{-1/4}\partial_z & -\frac{\nu}{R}\partial_z & \\ -\frac{1+\nu}{2R^2}iC\varepsilon^{-1/4}\partial_z & \frac{1}{R^4}\varepsilon^{-1/2} - \frac{1-\nu}{2R^2}\partial_z^2 & -\frac{iC\varepsilon^{-1/4}}{R^3} - \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^3}\partial_z^2 & \\ +\frac{4}{3}\frac{\varepsilon^{3/2}}{R^6} - \frac{2(1-\nu)\varepsilon^2}{3R^4}\partial_z^2 & & +\frac{2iC^3\varepsilon^{5/4}}{3R^5} + \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^5} & \\ \frac{\nu}{R}\partial_z & \frac{iC\varepsilon^{-1/4}}{R^3} + \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^3}\partial_z^2 & \frac{1}{R^2} + \frac{\varepsilon^2}{3}\partial_z^4 - \frac{2C^2\varepsilon^{3/2}}{3R^2}\partial_z^2 + \frac{C^4\varepsilon}{3R^4} & \\ & -\frac{2iC^3\varepsilon^{5/4}}{3R^5} - \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^5} & +\frac{2C^2\varepsilon^{3/2}}{3R^4} + \frac{\varepsilon^2}{3R^4} - \frac{2\nu\varepsilon^2}{3R^2}\partial_z^2 & \end{pmatrix}.$$

On décompose alors  $\mathcal{K}[\varepsilon]$  selon les puissances de  $\varepsilon$  :

$$\mathcal{K}[\varepsilon] = \varepsilon^{-1/2}\mathcal{K}_0 + \varepsilon^{-1/4}\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \varepsilon^{1/4}\mathcal{K}_3 + \varepsilon^{1/2}\mathcal{K}_4 + \varepsilon^{3/4}\mathcal{K}_5 + \varepsilon\mathcal{K}_6 + \varepsilon^{5/4}\mathcal{K}_7 + \varepsilon^{3/2}\mathcal{K}_8 + \varepsilon^{7/4}\mathcal{K}_9 + \varepsilon^2\mathcal{K}_{10}$$

avec :

$$\mathcal{K}_0 = C^2\mathbf{M}_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{2R^2}C^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^4}C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}_1 = C\mathbf{M}_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+\nu}{2R^2}iC\partial_z & 0 \\ -\frac{1+\nu}{2R^2}iC\partial_z & 0 & -\frac{iC}{R^3} \\ 0 & \frac{iC}{R^3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} -\partial_z^2 & 0 & -\frac{\nu}{R}\partial_z \\ 0 & -\frac{1-\nu}{2R^2}\partial_z^2 & 0 \\ \frac{\nu}{R}\partial_z & 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_6 &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C^4}{3R^4} \end{pmatrix}, & \mathcal{K}_7 &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2iC^3}{3R^5} \\ 0 & -\frac{2iC^3}{3R^5} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K}_8 &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3R^6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2C^2}{3R^2}\partial_z^2 + \frac{2C^2}{3R^4} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K}_9 &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2iC}{3R^3}\partial_z^2 + \frac{2iC}{3R^5} \\ 0 & \frac{2iC}{3R^3}\partial_z^2 - \frac{2iC}{3R^5} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K}_{10} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(1-\nu)}{3R^4}\partial_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\partial_z^4 + \frac{1}{3R^4} - \frac{2\nu}{3R^2}\partial_z^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans une première étape, on va chercher un développement en série formelle sous la forme :

$$\mathcal{K}[\varepsilon]\mathbf{u}[\varepsilon] = \Lambda[\varepsilon]\mathbf{A}\mathbf{u}[\varepsilon]. \quad (5.3)$$

avec

$$\mathbf{u}[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{u}_n \varepsilon^{n/4} \quad \text{et} \quad \Lambda[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \Lambda_n \varepsilon^{n/4}.$$

On verra que comme dans le cas de la membrane, le système  $3 \times 3$  (5.3) peut se réduire à un problème scalaire grâce à des opérateurs de reconstruction

$$\mathcal{V}[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \mathcal{V}_n \varepsilon^{n/4}$$

avec

$$\mathcal{V}_n = (\mathcal{V}_{n,z}, \mathcal{V}_{n,\varphi}, \mathcal{V}_{n,3})^T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^3$$

comme dans Dauge, Gruais et Rössle [20].

Et  $\mathbf{u}$  sera trouvé sous la forme :

$$\mathbf{u}[\varepsilon] = \mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]$$

où  $\zeta[\varepsilon]$  est une série formelle scalaire :

$$\zeta[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \zeta_n \varepsilon^{n/4}, \quad \zeta_n \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Alors (5.3) se réduit au problème :

$$\mathcal{K}[\varepsilon]\mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\mathbf{A}\mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0. \quad (5.4)$$

Comme on va le voir, un choix judicieux de  $\mathcal{V}[\varepsilon]$  permet une réduction du problème (5.4) à un problème scalaire en  $\zeta[\varepsilon]$  du type :

$$\mathcal{L}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0.$$

## 5.4 Réduction formelle sans conditions aux limites

Comme dans le cas de la membrane dans la section 3.1, puisque l'opérateur  $\mathcal{K}_0$  contient du noyau dans la troisième composante, on définit l'opérateur suivant qui sera le moteur de notre résolution :

**Définition 5.1.** *On définit l'opérateur  $\mathcal{V}_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^3$  tel que :*

$$\mathcal{V}_0 = (0, 0, \text{Id})^T. \quad (5.5)$$

**Proposition 5.2.** *On a la relation suivante :*

$$\mathcal{K}_0\mathcal{V}_0 = 0.$$

On obtient alors un théorème semblable au théorème 3.4 dans le cas de la membrane :

**Théorème 5.3.** *Soit une série formelle à coefficients réels :*

$$\Lambda[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n/4} \Lambda_n.$$

*Il existe pour  $n \geq 1$  des opérateurs  $\mathcal{V}_{n,z}, \mathcal{V}_{n,\varphi} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  d'ordre  $n - 1$ , polynômiaux en  $\Lambda_j$ , pour  $j \leq n - 3$ , et pour  $n \geq 0$  des opérateurs  $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  d'ordre  $n$ , polynômiaux en  $\Lambda_j$ , pour  $j \leq n - 2$  tels que :*

$$\mathcal{V}[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \mathcal{V}_n \varepsilon^{n/4}, \quad \mathcal{V}_n = (\mathcal{V}_{n,z}, \mathcal{V}_{n,\varphi}, 0)^T,$$

et

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \mathcal{L}_n \varepsilon^{n/4},$$

on ait

$$\mathcal{K}[\varepsilon]\mathcal{V}[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\mathcal{V}[\varepsilon] = \mathcal{V}_0 \circ (\mathcal{L}[\varepsilon] - \mathbf{A}\Lambda[\varepsilon]).$$

On a :

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \mathcal{L}_0(z) + \varepsilon^{1/4} \mathcal{L}_1(z, \partial_z) + \varepsilon^{1/2} \mathcal{L}_2(z, \partial_z) + \varepsilon^{3/4} \mathcal{L}_3(z, \partial_z) + \varepsilon \mathcal{L}_4(z, \partial_z) + \dots \quad (5.6)$$

et les opérateurs  $\mathcal{L}_n$  pour  $n \leq 4$  et  $\mathcal{V}_{n,\alpha}$  pour  $n \leq 5$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(z) &= 0 \\ \mathcal{L}_1(z, \partial_z) &= 0 \\ \mathcal{L}_2(z, \partial_z) &= -\frac{\Lambda_0}{C^2} \\ \mathcal{L}_3(z, \partial_z) &= -\frac{\Lambda_1}{C^2} \\ \mathcal{L}_4(z, \partial_z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \\ \mathcal{L}_5(z, \partial_z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{R}_{6,\varphi}(\Lambda_{j<4}) + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{R}_{5,z}(\Lambda_{j<2}) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1,z} &= 0 & \mathcal{V}_{1,\varphi} &= \frac{iR}{C} \\ \mathcal{V}_{2,z} &= -\frac{R}{C^2} \partial_z & \mathcal{V}_{2,\varphi} &= 0 \\ \mathcal{V}_{3,z} &= 0 & \mathcal{V}_{3,\varphi} &= -\frac{i\nu R^3}{C^3} \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \frac{iR^3}{C^3} \\ \mathcal{V}_{4,z} &= -\frac{(\nu+2)R^3}{C^4} \partial_z^3 + \mathcal{R}_{4,z}(\Lambda_{j<1}) & \mathcal{V}_{4,\varphi} &= \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 \frac{iR^3}{C^3} \\ \mathcal{V}_{5,z} &= \mathcal{R}_{5,z}(\Lambda_{j<2}) & \mathcal{V}_{5,\varphi} &= -\frac{(2\nu+1)R^5}{C^5} i \partial_z^4 + \mathcal{R}_{5,\varphi}(\Lambda_{j<3}) \\ \mathcal{V}_{6,z} &= -(2\nu+3) \frac{R^5}{C^6} \partial_z^5 + \mathcal{R}_{6,z}(\Lambda_{j<3}) & \mathcal{V}_{6,\varphi} &= \mathcal{R}_{6,\varphi}(\Lambda_{j<4}) \end{aligned}$$

**Preuve.** Elle fonctionne sur le même principe que la preuve du théorème 3.4.

On identifie les puissances de  $\varepsilon$  dans l'équation aux séries formelles :

$$\mathcal{K}[\varepsilon] \mathcal{V}[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathcal{V}[\varepsilon] = \mathcal{V}_0 \circ (\mathcal{L}[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon])$$

avec

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \sum_{k \geq 0} \mathcal{L}_k \varepsilon^{k/4}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\varepsilon^{-1/2} \sum_{j=0}^{10} \mathcal{K}_j \varepsilon^{j/4} \sum_{n \geq 0} \mathcal{V}_n \varepsilon^{n/4} - \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \Lambda_j \mathbf{A} \mathcal{V}_{n-j} \varepsilon^{n/4} = \mathcal{V}_0 \circ \left( \sum_{n \geq 0} \mathcal{L}_n \varepsilon^{n/4} - \sum_{n \geq 0} \Lambda_n \varepsilon^{n/4} \right).$$

En développant, on obtient :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{10} \mathcal{K}_j \mathcal{V}_n \varepsilon^{n/4+j/4-1/2} - \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \Lambda_j \mathbf{A} \mathcal{V}_{n-j} \varepsilon^{n/4} = \mathcal{V}_0 \circ \left( \sum_{n \geq 0} \mathcal{L}_n \varepsilon^{n/4} - \sum_{n \geq 0} \Lambda_n \varepsilon^{n/4} \right).$$

On change l'indexation des indices dans les sommes :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{\min(n,10)} \mathcal{K}_j \mathcal{V}_{n-j} \varepsilon^{n/4-1/2} - \sum_{n \geq 2} \sum_{j=0}^{n-2} \Lambda_j \mathbf{A} \mathcal{V}_{n-2-j} \varepsilon^{n/4-1/2} \\ &= \mathcal{V}_0 \circ \left( \sum_{n \geq 2} \mathcal{L}_{n-2} \varepsilon^{n/4-1/2} - \sum_{n \geq 2} \Lambda_{n-2} \varepsilon^{n/4-1/2} \right). \end{aligned}$$

Pour  $n$  fixé plus grand que 2, on a alors :

$$\sum_{j=0}^{\min(n,10)} \mathcal{K}_j \mathcal{V}_{n-j} - \sum_{j=0}^{n-2} \Lambda_j \mathbf{A} \mathcal{V}_{n-2-j} = \mathcal{V}_0 \circ (\mathcal{L}_{n-2} - \Lambda_{n-2}).$$

- Le terme en  $\varepsilon^{-1/2}$  dans l'équation précédente est nul puisque d'après la proposition 5.2, on a :

$$\mathcal{K}_0 \mathcal{V}_0 = 0.$$

- Le terme en  $\varepsilon^{-1/4}$  s'écrit :

$$\mathcal{K}_0 \mathcal{V}_1 + \mathcal{K}_1 \mathcal{V}_0 = 0.$$

Ceci s'écrit encore :

$$\mathcal{K}_0 \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{1,z} \\ \mathcal{V}_{1,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{K}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

D'où  $\mathcal{V}_{1,z}$  et  $\mathcal{V}_{1,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 \mathcal{V}_{1,z} = 0, \quad \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{1,\varphi} = -\mathcal{K}_1(2,3).$$

$$\mathcal{V}_{1,z} = 0, \quad \mathcal{V}_{1,\varphi} = \frac{iR}{C}.$$

- Le terme en  $\varepsilon^0$  s'écrit :

$$\mathcal{K}_0 \mathcal{V}_2 + \mathcal{K}_1 \mathcal{V}_1 + \mathcal{K}_2 \mathcal{V}_0 - \Lambda_0 \mathbf{A} \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0 \circ (\mathcal{L}_0 - \Lambda_0).$$

Puisque  $\mathbf{A}(3, 3) = 1$ , le terme en  $\Lambda_0$  disparaît et on a :

$$\mathcal{K}_0 \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{2,z} \\ \mathcal{V}_{2,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{K}_1 \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{1,z} \\ \mathcal{V}_{1,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{K}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \mathcal{L}_0.$$

D'où  $\mathcal{V}_{2,z}$  et  $\mathcal{V}_{2,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 \mathcal{V}_{2,z} &= -\mathcal{K}_1(1, 2) \mathcal{V}_{1,\varphi} - \mathcal{K}_2(1, 3) \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{2,\varphi} &= -\mathcal{K}_1(2, 1) \mathcal{V}_{1,z}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathcal{V}_{2,z} = -\frac{R}{C^2} \partial_z, \quad \mathcal{V}_{2,\varphi} = 0.$$

Et l'opérateur  $\mathcal{L}_0$  est déterminé par l'équation :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}_1(3, 2) \mathcal{V}_{1,\varphi} + \mathcal{K}_2(3, 3) = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^2} = 0.$$

- Le terme en  $\varepsilon^{-1/4}$  s'écrit puisque  $\mathcal{K}_3 = 0$  :

$$\mathcal{K}_0 \mathcal{V}_3 + \mathcal{K}_1 \mathcal{V}_2 + \mathcal{K}_2 \mathcal{V}_1 - \Lambda_0 \mathbf{A} \mathcal{V}_1 - \Lambda_1 \mathbf{A} \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0 \circ (\mathcal{L}_1 - \Lambda_1).$$

Puisque  $\mathbf{A}(3, 3) = 1$ , le terme en  $\Lambda_1$  disparaît et on a :

$$\mathcal{K}_0 \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{3,z} \\ \mathcal{V}_{3,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{K}_1 \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{2,z} \\ \mathcal{V}_{2,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{K}_2 \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{1,z} \\ \mathcal{V}_{1,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda_0 \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{1,z} \\ \mathcal{V}_{1,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \mathcal{L}_1.$$

D'où  $\mathcal{V}_{3,z}$  et  $\mathcal{V}_{3,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 \mathcal{V}_{3,z} &= -\mathcal{K}_1(1, 2) \mathcal{V}_{2,\varphi} - \mathcal{K}_2(1, 1) \mathcal{V}_{1,z} + \Lambda_0 \mathcal{V}_{1,z} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{3,\varphi} &= -\mathcal{K}_1(2, 1) \mathcal{V}_{2,z} - \mathcal{K}_2(2, 2) \mathcal{V}_{1,\varphi} + \Lambda_0 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{1,\varphi}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_{3,z} = 0, \quad \mathcal{V}_{3,\varphi} = -\frac{\nu R^3}{C^3} i \partial_z^2 + \Lambda_0 \frac{1-\nu^2}{E} \frac{i R^3}{C^3}.$$

Et l'opérateur  $\mathcal{L}_1$  est déterminé par l'équation :

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{K}_1(3, 2) \mathcal{V}_{2,\varphi} + \mathcal{K}_2(3, 1) \mathcal{V}_{1,z} = 0.$$

- Le terme en  $\varepsilon^{-1/2}$  puisque  $\mathcal{K}_4 = 0$  donne les équations :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 \mathcal{V}_{4,z} = -\mathcal{K}_1(1, 2) \mathcal{V}_{3,\varphi} - \mathcal{K}_2(1, 1) \mathcal{V}_{2,z} + \Lambda_0 \mathcal{V}_{2,z} + \Lambda_1 \mathcal{V}_{1,z}.$$

Ecrivons cela sous la forme :

$$\mathcal{V}_{4,z} = -\frac{(\nu+2)R^3}{C^4} \partial_z^3 + \mathcal{R}_{4,z}(\Lambda_{j<1}),$$

et

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{4,\varphi} = -\mathcal{K}_1(2,1) \mathcal{V}_{3,z} - \mathcal{K}_2(2,2) \mathcal{V}_{2,\varphi} + \Lambda_0 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{2,\varphi} + \frac{1}{R^2} \Lambda_1 \mathcal{V}_{1,\varphi}$$

$$\mathcal{V}_{4,\varphi} = \Lambda_1 \frac{iR^3}{C^3}.$$

Et l'opérateur  $\mathcal{L}_2$  est déterminé par l'équation :

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_1(3,2) \mathcal{V}_{3,\varphi} + \mathcal{K}_2(3,1) \mathcal{V}_{2,z}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{V}_{3,\varphi} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{V}_{2,z} = -\frac{\Lambda_0}{C^2}.$$

• Le terme en  $\varepsilon^{-3/4}$  puisque  $\mathcal{K}_5 = 0$  donne les équations :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 \mathcal{V}_{5,z} = -\mathcal{K}_1(2,1) \mathcal{V}_{4,z} - \mathcal{K}_2(2,2) \mathcal{V}_{3,\varphi} + \Lambda_0 \mathcal{V}_{3,z} + \Lambda_1 \mathcal{V}_{2,z} + \Lambda_2 \mathcal{V}_{1,z}$$

$$\mathcal{V}_{5,z} = \mathcal{R}_{5,z}(\Lambda_{j<2}),$$

et

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{5,\varphi} = -\mathcal{K}_1(2,1) \mathcal{V}_{4,z} - \mathcal{K}_2(2,2) \mathcal{V}_{3,\varphi} + \Lambda_0 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{3,\varphi} + \Lambda_1 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{2,\varphi} + \Lambda_2 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{1,\varphi}.$$

$$\mathcal{V}_{5,\varphi} = -\frac{(2\nu+1)R^5}{C^5} i\partial_z^4 + \mathcal{R}_{5,\varphi}(\Lambda_{j<3}).$$

Et l'opérateur  $\mathcal{L}_3$  est déterminé par l'équation :

$$\mathcal{L}_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{V}_{4,\varphi} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{V}_{3,z} = -\frac{\Lambda_1}{C^2}.$$

• Le terme en  $\varepsilon^{-1}$  donne les équations :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 \mathcal{V}_{6,z} = -\mathcal{K}_1(2,1) \mathcal{V}_{5,z} - \mathcal{K}_2(2,2) \mathcal{V}_{4,\varphi} + \Lambda_0 \mathcal{V}_{4,z} + \Lambda_1 \mathcal{V}_{3,z} + \Lambda_2 \mathcal{V}_{2,z} + \Lambda_3 \mathcal{V}_{1,z}$$

$$\mathcal{V}_{6,z} = -(2\nu+3) \frac{R^5}{C^6} \partial_z^5 + \mathcal{R}_{6,z}(\Lambda_{j<3})$$

et

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{6,\varphi} = -\mathcal{K}_1(2,1) \mathcal{V}_{5,z} - \mathcal{K}_2(2,2) \mathcal{V}_{4,\varphi} + \Lambda_0 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{4,\varphi} + \Lambda_1 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{3,\varphi} + \Lambda_2 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{2,\varphi} + \Lambda_3 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{1,\varphi}.$$

$$\mathcal{V}_{6,\varphi} = \mathcal{R}_{6,\varphi}(\Lambda_{j<4}).$$

Et l'opérateur  $\mathcal{L}_4$  est déterminé par l'équation :

$$\mathcal{L}_4 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{V}_{5,\varphi} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{V}_{4,z} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4}$$

donc

$$\mathcal{L}_4 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4.$$



- Le terme en  $\varepsilon^{-5/4}$  donne les équations :

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{7,\varphi} &= -\mathcal{K}_1(2,1) \mathcal{V}_{6,z} - \mathcal{K}_2(2,2) \mathcal{V}_{5,\varphi} - \mathcal{K}_7(2,3) \mathcal{V}_0^3 + \Lambda_0 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{5,\varphi} + \Lambda_1 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{4,\varphi} \\ &\quad + \Lambda_2 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{3,\varphi} + \Lambda_3 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{2,\varphi} + \Lambda_4 \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{1,\varphi}. \\ \mathcal{V}_{7,\varphi} &= -i \frac{(3\nu+2)R^7}{C^7} \partial_z^6 + \frac{2iC}{3R} + \Lambda_4 \frac{iR^3}{C^3} \frac{1-\nu^2}{E} + \mathcal{R}_{7,\varphi}(\Lambda_{j<3}). \end{aligned}$$

Et l'opérateur  $\mathcal{L}_5$  est déterminé par l'équation :

$$\mathcal{L}_5 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{V}_{6,\varphi} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{V}_{5,z} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{R}_{6,\varphi}(\Lambda_{j<4}) + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{R}_{5,z}(\Lambda_{j<2}).$$

- Le terme en  $\varepsilon^{-3/2}$  donne l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{V}_{7,\varphi} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{V}_{6,z} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{2iC^3}{3R^5} \frac{iR}{C} - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{2C^2}{3R^2} \partial_z^2 + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{2C^2}{3R^4}. \\ \mathcal{L}_6 &= \frac{2ER^4}{C^6} \partial_z^6 - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{2C^2}{3R^2} \partial_z^2 - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{2C^2}{3R^4} - \Lambda_4 \frac{1}{C^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{R}_{7,\varphi}(\Lambda_{j<3}) \\ &\quad + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{R}_{6,z}(\Lambda_{j<3}). \end{aligned}$$

- Pour tout  $n > 2$ , le terme en  $\varepsilon^{-n/4-1/2}$  s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{\min(n,10)} \mathcal{K}_j \mathcal{V}_{n-j} - \sum_{j=0}^{n-2} \Lambda_j \mathbf{A} \mathcal{V}_{n-2-j} = \mathcal{V}_0 \circ (\mathcal{L}_{n-2} - \mathbf{A} \Lambda_{n-2}).$$

Puisque  $\mathbf{A}(3,3) = 1$ , le terme en  $\Lambda_{n-2}$  disparaît et on a :

$$\mathcal{K}_0 \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{n,z} \\ \mathcal{V}_{n,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\min(n,10)} \mathcal{K}_j \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{n-j,z} \\ \mathcal{V}_{n-j,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{n-2-j,z} \\ \mathcal{V}_{n-2-j,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \mathcal{L}_{n-2}.$$

D'où  $\mathcal{V}_{n,z}$  et  $\mathcal{V}_{n,\varphi}$  sont déterminés par les équations :

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 \mathcal{V}_{n,z} &= - \sum_{j=1}^{\min(n,10)} \mathcal{K}_j(1,1) \mathcal{V}_{n-j,z} + \mathcal{K}_j(1,2) \mathcal{V}_{n-j,\varphi} - \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \mathcal{V}_{n-2-j,z} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{R^4} C^2 \mathcal{V}_{n,\varphi} &= - \sum_{j=1}^{\min(n,10)} \mathcal{K}_j(2,1) \mathcal{V}_{n-j,z} + \mathcal{K}_j(2,2) \mathcal{V}_{n-j,\varphi} - \sum_{j=0}^{n-3} \Lambda_j \frac{1}{R^2} \mathcal{V}_{n-2-j,\varphi} \end{aligned}$$

Et l'opérateur  $\mathcal{L}_{n-2}$  est déterminé par l'équation :

$$\mathcal{L}_{n-2} = \sum_{j=1}^{\min(n,10)} \mathcal{K}_j(3,1) \mathcal{V}_{n-j,z} + \mathcal{K}_j(3,2) \mathcal{V}_{n-j,\varphi}.$$

De la même manière que dans la preuve du théorème pour la membrane 3.4, on montre

que pour  $n \geq 2$ , les opérateurs  $\mathcal{V}_{n,\alpha}$  sont d'ordre  $n - 1$  polynômiaux en  $\Lambda_j$ ,  $j < n - 2$  et que l'opérateur  $\mathcal{L}_{n-2}$  est d'ordre  $n - 2$  et polynômial en  $\Lambda_j$ ,  $j < n - 3$ . ■

## 5.5 Résolution du problème scalaire

Dans une deuxième étape, on résout le problème scalaire obtenu dans le théorème précédent en ajoutant les conditions au bord. Cependant il y a trop de conditions au bord donc on commence par le résoudre avec les conditions au bord de la membrane :  $u_{\alpha|\Gamma_0} = 0$ . Les conditions aux limites restantes  $u_{3|\Gamma_0} = 0$  et  $\partial_z u_{3|\Gamma_0} = 0$  seront traitées dans la section suivante en ajoutant des couches limites à l'opérateur de l'Ansatz.

**Théorème 5.4.** *Pour tout couple  $(\lambda, w)$  solution du problème*

$$\left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \right) w = \lambda w, \quad w(\pm 1) = \partial_z(\pm 1) = 0, \quad (5.7)$$

*il existe des séries formelles*

$$\Lambda[\varepsilon] = \lambda\varepsilon + \sum_{n \geq 6} \varepsilon^{n/4} \Lambda_n \quad \text{et} \quad \zeta[\varepsilon] = w + \sum_{n \geq 2} \varepsilon^{n/4} \zeta_n \in C^\infty([-1, 1]) \quad (5.8)$$

*telles que*

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0 \\ \mathcal{V}_\alpha[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \alpha = z, \varphi \end{cases} \quad (5.9)$$

**Remarque 5.5.** *Les séries formelles de (5.8) vérifient :*

$$\Lambda_5 = 0, \quad \text{et} \quad \zeta_1 = 0. \quad (5.10)$$

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du théorème 4.2.

Le système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0 \\ \mathcal{V}_\alpha[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

est équivalent à :

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} \sum_{j=0}^n \mathcal{L}_j \zeta_{n-j} - \sum_{j=0}^n \Lambda_j \zeta_{n-j} = 0 \\ \sum_{j=0}^n \mathcal{V}_j^\alpha \zeta_{n-j} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases} \quad .$$

On a d'après l'hypothèse (5.8) :

$$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0, \quad \Lambda_4 = \lambda, \quad \text{et} \quad \zeta_0 = w. \quad (5.11)$$

On résout alors le système pour chaque  $n$ .

•  $n = 0$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_0 = 0 \\ \mathcal{V}_{0,\alpha} \zeta_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}.$$

Puisque  $\mathcal{L}_0 = 0$  d'après les formules du théorème 5.3 et  $\Lambda_0 = 0$  d'après (5.11) et  $\mathcal{V}_{0,\alpha} = 0$  par la définition (5.5), le système est vérifié.

•  $n = 1$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \zeta_1 + \mathcal{L}_1 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_1 - \Lambda_1 \zeta_0 = 0 \\ \mathcal{V}_{1,\alpha} \zeta_0 + \mathcal{V}_{0,\alpha} \zeta_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}.$$

On a  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 = 0$ ,  $\mathcal{V}_{1,z} = 0$ ,  $\mathcal{V}_{1,\varphi} = \frac{iR}{C}$  d'après les formules du théorème 5.3 et  $\Lambda_1 = 0$  d'après (5.11). Ceci implique alors seulement la condition au bord  $\zeta_0(\pm 1) = 0$ .

•  $n = 2$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \zeta_2 + \mathcal{L}_1 \zeta_1 + \mathcal{L}_2 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_2 - \Lambda_1 \zeta_1 - \Lambda_2 \zeta_0 = 0 \\ \mathcal{V}_{2,\alpha} \zeta_0 + \mathcal{V}_{1,\alpha} \zeta_1 + \mathcal{V}_{0,\alpha} \zeta_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}.$$

On a  $\mathcal{L}_2 = -\frac{\Lambda_0}{C^2} = 0$ ,  $\mathcal{V}_{2,z} = -\frac{R}{C^2} \partial_z$ ,  $\mathcal{V}_{2,\varphi} = 0$  d'après les formules du théorème 5.3 et  $\Lambda_2 = 0$  d'après (5.11). Ceci implique alors les conditions au bord :  $\zeta_1(\pm 1) = \partial_z \zeta_0(\pm 1) = 0$ .

•  $n = 3$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \zeta_3 + \mathcal{L}_1 \zeta_2 + \mathcal{L}_2 \zeta_1 + \mathcal{L}_3 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_3 - \Lambda_1 \zeta_2 - \Lambda_2 \zeta_1 - \Lambda_3 \zeta_0 = 0 \\ \mathcal{V}_{3,\alpha} \zeta_0 + \mathcal{V}_{2,\alpha} \zeta_1 + \mathcal{V}_{1,\alpha} \zeta_2 + \mathcal{V}_{0,\alpha} \zeta_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

On a d'après les formules du théorème 5.3 :

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{\Lambda_1}{C^2}, \quad \mathcal{V}_{3,z} = 0, \quad \mathcal{V}_{3,\varphi} = -\frac{i\nu R^3}{C^3} \partial_z^2 + \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_0 \frac{iR^3}{C^3}$$

et  $\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_3 = 0$  d'après (5.11). Ceci implique alors les conditions au bord :  $-\nu R^2 \partial_z^2 \zeta_0(\pm 1) + C^2 \zeta_2(\pm 1) = \partial_z \zeta_1(\pm 1) = 0$ .

•  $n = 4$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \zeta_4 + \mathcal{L}_1 \zeta_3 + \mathcal{L}_2 \zeta_2 + \mathcal{L}_3 \zeta_1 + \mathcal{L}_4 \zeta_0 - \Lambda_0 \zeta_4 - \Lambda_1 \zeta_3 - \Lambda_2 \zeta_2 - \Lambda_3 \zeta_1 - \Lambda_4 \zeta_0 = 0 \\ \mathcal{V}_{4,\alpha} \zeta_0 + \mathcal{V}_{3,\alpha} \zeta_1 + \mathcal{V}_{2,\alpha} \zeta_2 + \mathcal{V}_{1,\alpha} \zeta_3 + \mathcal{V}_{0,\alpha} \zeta_4 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

Puisque d'après les formules du théorème 5.3,

$$\mathcal{L}_4 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4,$$

ceci implique que  $(\Lambda_4, \zeta_0)$  vérifie l'équation :

$$\left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \right) \zeta_0 - \Lambda_4 \zeta_0 = 0.$$

De plus les conditions au bord sont données dans la résolution pour  $n = 1$  :  $\zeta_0(\pm 1) = 0$  et pour  $n = 2$  :  $\partial_z \zeta_0(\pm 1) = 0$ .

D'après les formules du théorème 5.3, on a :

$$\mathcal{V}_{4,z} = -\frac{(\nu+2)R^3}{C^4} \partial_z^3 + \mathcal{R}_{4,z}(\Lambda_{j<1}), \quad \mathcal{V}_{4,\varphi} = \frac{1-\nu^2}{E} \Lambda_1 \frac{iR^3}{C^3}.$$

Les conditions au bord s'écrivent donc :

$$(\nu+2)R^2 \partial_z^3 \zeta_0(\pm 1) + C^2 \partial_z \zeta_2(\pm 1) = -\nu R^2 \partial_z^2 \zeta_1(\pm 1) + C^2 \zeta_3(\pm 1) = 0.$$

•  $n = 5$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \zeta_5 + \mathcal{L}_1 \zeta_4 + \mathcal{L}_2 \zeta_3 + \mathcal{L}_3 \zeta_2 + \mathcal{L}_4 \zeta_1 + \mathcal{L}_5 \zeta_0 - \Lambda_2 \zeta_3 - \Lambda_3 \zeta_2 - \Lambda_4 \zeta_1 - \Lambda_5 \zeta_0 = 0 \\ \mathcal{V}_{5,\alpha} \zeta_0 + \mathcal{V}_{4,\alpha} \zeta_1 + \mathcal{V}_{3,\alpha} \zeta_2 + \mathcal{V}_{2,\alpha} \zeta_3 + \mathcal{V}_{1,\alpha} \zeta_4 + \mathcal{V}_{0,\alpha} \zeta_5 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}.$$

D'après les formules du théorème 5.3, on a :

$$\mathcal{L}_5 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{iC}{R^3} \mathcal{R}_{6,\varphi}(\Lambda_{j<4}) + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\nu}{R} \partial_z \mathcal{R}_{5,z}(\Lambda_{j<2})$$

donc  $\mathcal{L}_5 = 0$  et  $\Lambda_5 = 0$  d'après (5.10). Ceci implique que  $\zeta_1$  est solution de l'équation :

$$\left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \right) \zeta_0 - \Lambda_4 \zeta_1 = 0$$

avec les conditions au bord données par les résolutions précédentes :

$$\zeta_1(\pm 1) = \partial_z \zeta_1(\pm 1) = 0.$$

On choisit de prendre  $\zeta_1=0$ .

D'après les formules du théorème 5.3, on a :

$$\mathcal{V}_{5,z} = \mathcal{R}_{5,z}(\Lambda_{j<2}), \quad \mathcal{V}_{5,\varphi} = -\frac{(2\nu+1)R^5}{C^5} i \partial_z^4 + \mathcal{R}_{5,\varphi}(\Lambda_{j<3}).$$

La deuxième équation du système nous donne donc :

$$(1+2\nu)R^4 \partial_z^4 \zeta_0(\pm 1) + \nu C^2 R^2 \partial_z^2 \zeta_2(\pm 1) - C^4 \zeta_4(\pm 1) = (\nu+2)R^2 \partial_z^3 \zeta_1(\pm 1) + C^2 \partial_z \zeta_3(\pm 1) = 0.$$

•  $n > 5$  quelconque : on suppose construits tous les  $\Lambda_j$  et  $\zeta_j$  pour  $j < n - 4$  et on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \mathcal{L}_j \zeta_{n-j} - \sum_{j=0}^n \Lambda_j \zeta_{n-j} = 0 \\ \sum_{j=0}^n \mathcal{V}_{j,\alpha} \zeta_{n-j} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}.$$

Puisque d'après (5.11) et le théorème 5.3, on a  $\Lambda_j = 0$  et  $\mathcal{L}_j = 0$  pour  $j < 4$ , on résout :

$$(\mathcal{L}_4 - \Lambda_4)\zeta_{n-4} = -\sum_{j=5}^n \mathcal{L}_j \zeta_{n-j} + \sum_{j=5}^{n-1} \Lambda_j \zeta_{n-j} + \Lambda_n \zeta_0.$$

avec les conditions aux bords sur  $\zeta_{n-4}$  ont été déterminées précédemment aux rangs  $n-2$  et  $n-3$  :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \mathcal{V}_{j,\alpha} \zeta_{n-2-j} = \sum_{j=0}^{n-3} \mathcal{V}_{j,\alpha} \zeta_{n-3-j} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

On rappelle que par définition (5.5),  $\mathcal{V}_{0,\alpha} = 0$  et que d'après le théorème 5.3 on a :

$$\mathcal{V}_{1,z} = 0, \quad \mathcal{V}_{1,\varphi} = \frac{iR}{C}, \quad \mathcal{V}_{2,z} = -\frac{R}{C^2} \partial_z, \quad \mathcal{V}_{2,\varphi} = 0.$$

Ecrivons alors le système sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{L}_4 - \Lambda_4)\zeta_{n-4} = \Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}) \\ \frac{R}{C^2} \partial_z \zeta_{n-4}(\pm 1) = \sum_{j=3}^{n-2} \mathcal{V}_{j,z} \zeta_{n-2-j}(\pm 1), \quad \text{et} \quad \frac{iR}{C} \zeta_{n-4}(\pm 1) = -\sum_{j=2}^{n-3} \mathcal{V}_{j,\varphi} \zeta_{n-3-j}(\pm 1) \end{array} \right. \quad (5.12)$$

D'après la première équation de (5.12), on a :

$$\langle (\mathcal{L}_4 - \Lambda_4)\zeta_{n-4}, \zeta_0 \rangle_{L^2} = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left\langle \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 - \Lambda_4 \right) \zeta_{n-4}, \zeta_0 \right\rangle_{L^2} = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}.$$

Par intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} \left[ E \frac{R^2}{C^4} \partial_z^3 \zeta_{n-4} \zeta_0 \right]_{-1}^1 - \left\langle E \frac{R^2}{C^4} \partial_z^3 \zeta_{n-4}, \partial_z \zeta_0 \right\rangle_{L^2} + \left\langle \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} - \Lambda_4 \right) \zeta_{n-4}, \zeta_0 \right\rangle_{L^2} \\ = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Mais puisque d'après (5.7),

$$\zeta_0(\pm 1) = \partial_z \zeta_0(\pm 1) = 0,$$

et en intégrant à nouveau par parties, on obtient :

$$\left\langle E \frac{R^2}{C^4} \partial_z^2 \zeta_{n-4}, \partial_z^2 \zeta_0 \right\rangle_{L^2} + \left\langle \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} - \Lambda_4 \right) \zeta_{n-4}, \zeta_0 \right\rangle_{L^2} = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}.$$

En recommençant deux fois, il vient :

$$\begin{aligned} \left[ E \frac{R^2}{C^4} \partial_z \zeta_{n-4} \partial_z^2 \zeta_0 \right]_{-1}^1 - \left[ E \frac{R^2}{C^4} \zeta_{n-4} \partial_z^3 \zeta_0 \right]_{-1}^1 + \left\langle E \frac{R^2}{C^4} \zeta_{n-4}, \partial_z^4 \zeta_0 \right\rangle_{L^2} + \left\langle \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} - \Lambda_4 \right) \zeta_{n-4}, \zeta_0 \right\rangle_{L^2} \\ = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Puisque d'après (5.7),  $\zeta_0$  vérifie l'équation :

$$(\mathcal{L}_4 - \Lambda_4)\zeta_0 = \left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 - \Lambda_4 \right) \zeta_0 = 0,$$

on en déduit que :

$$\left[ E \frac{R^2}{C^4} \partial_z \zeta_{n-4} \partial_z^2 \zeta_0 \right]_{-1}^1 - \left[ E \frac{R^2}{C^4} \zeta_{n-4} \partial_z^3 \zeta_0 \right]_{-1}^1 = \langle \Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & E \frac{R^2}{C^4} \partial_z \zeta_{n-4}(1) \partial_z^2 \zeta_0(1) - E \frac{R^2}{C^4} \partial_z \zeta_{n-4}(-1) \partial_z^2 \zeta_0(-1) - E \frac{R^2}{C^4} \zeta_{n-4}(1) \partial_z^3 \zeta_0(1) \\ & - E \frac{R^2}{C^4} \zeta_{n-4}(-1) \partial_z^3 \zeta_0(-1) = \Lambda_n \|\zeta_0\|_{L^2}^2 + \langle \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Puisque  $\|\zeta_0\|_{L^2} = 1$  et par les conditions au bord sur  $\zeta_{n-4}$  données dans (5.12),  $\Lambda_n$  est déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} \Lambda_n = & E \frac{R}{C^2} \sum_{j=3}^{n-2} \mathcal{V}_{j,z} \zeta_{n-2-j}(1) \partial_z^2 \zeta_0(1) - E \frac{R}{C^2} \sum_{j=3}^{n-2} \mathcal{V}_{j,z} \zeta_{n-2-j}(-1) \partial_z^2 \zeta_0(-1) - \langle \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4}), \zeta_0 \rangle_{L^2} \\ & - E \frac{R}{C^3} i \sum_{j=2}^{n-3} \mathcal{V}_{j,\varphi} \zeta_{n-3-j}(1) \partial_z^3 \zeta_0(1) + E \frac{R}{C^3} i \sum_{j=2}^{n-3} \mathcal{V}_{j,\varphi} \zeta_{n-3-j}(-1) \partial_z^3 \zeta_0(-1). \end{aligned}$$

Cette condition étant remplie, le second membre  $\Lambda_n \zeta_0 + \mathcal{R}(\zeta_{j < n-4})$  est orthogonal au noyau de  $\mathcal{L}_4 - \Lambda_4$  muni des conditions aux bords (5.12) et d'après l'alternative de Fredholm,  $\zeta_{n-4}$  existe et est unique.  $\blacksquare$

**Remarque 5.6.** *La plus petite valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{K}[\varepsilon]$  se comporte en  $\varepsilon$  comme dans Beirão da Veiga, Hakula et Pitkäranta [6].*

**Corollaire 5.7.** *Soit  $(\Lambda[\varepsilon], \zeta[\varepsilon])$  une série formelle solution du système (5.9) sous la condition (5.8), alors en posant :*

$$\mathbf{u}[\varepsilon] = \mathcal{V}[\varepsilon] \zeta[\varepsilon]$$

on a :

$$\mathcal{K}[\varepsilon] \mathbf{u}[\varepsilon] = \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{u}[\varepsilon], \quad u_\alpha[\varepsilon](\pm 1) = 0.$$

De plus on a l'expression de  $\mathbf{u}[\varepsilon]$  :

$$\mathbf{u}[\varepsilon] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{iR}{C} \zeta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{R}{C^2} \partial_z \zeta_0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^{3/4} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i\nu R^3}{C^3} \partial_z^2 \zeta_0 + \frac{iR}{C} \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \dots \quad (5.13)$$

On voit dans la preuve du théorème 5.4 que les  $\zeta_l$  sont construits à partir de  $\zeta_0$ .

**Corollaire 5.8.** *Soit  $(\Lambda[\varepsilon], \zeta[\varepsilon])$  une série formelle solution du système (5.9) sous la condition (5.8), alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $c_n$  telle que :*

$$\|\zeta_n\|_{L^2} \leq c_n \|\zeta_0\|_{L^2}. \quad (5.14)$$

**Preuve.** D'après le système (5.12), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un exposant fini  $s_n \in \mathbb{N}$  et une constante  $\gamma$  tels que :

$$\|\zeta_n\|_{L^2} \leq \gamma \|\zeta_0\|_{H^{s_n}}.$$

Mais puisque  $\zeta_0$  est un vecteur propre, il est analytique et il existe alors une constante  $c_n$  telle que :

$$\|\zeta_n\|_{L^2} \leq c_n \|\zeta_0\|_{L^2}. \quad \blacksquare$$

## 5.6 Couches limites

### 5.6.1 Mise en place

L'espace variationnel correspondant à l'opérateur  $\mathcal{K}[\varepsilon]$  étant  $H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^2(I)$ , et puisque d'après (5.13)

$$\mathbf{u}[\varepsilon] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{iR}{C} \zeta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{R}{C^2} \partial_z \zeta_0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^{3/4} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i\nu R^3}{C^3} \partial_z^2 \zeta_0 + \frac{iR}{C} \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \dots$$

il faudrait que l'on ait  $u_{n,3} = \zeta_n \in H_0^2(I)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or ces conditions au bord ne sont pas satisfaites en général dans l'algorithme précédent. En effet les composantes  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont bien dans l'espace  $H_0^2(I)$  alors que  $\zeta_2$  vérifie les conditions au bord :

$$\zeta_2(\pm 1) = \nu \frac{R^2}{C^2} \partial_z^2 \zeta_0(\pm 1), \quad \text{et} \quad \partial_z \zeta_2(\pm 1) = -(\nu + 2) \frac{R^2}{C^2} \partial_z^3 \zeta_0(\pm 1). \quad (5.15)$$

Or on a  $\partial_z^2 \zeta_0(\pm 1) \neq 0$  donc  $\zeta_2 \notin H_0^2(I)$  en général.

Notre but est alors de compenser les termes construits dans la section précédente par des couches limites de manière à obtenir une solution dans le bon espace variationnel. Pour travailler sur chacun des deux bords, on pose :

$$z^+ = 1 - z, \quad z^- = 1 + z.$$

**Définition 5.9.** *On définit une fonction de troncature  $\chi(z) \in C^\infty$  telle qu'il existe deux nombres  $0 < a < b < 1$  vérifiant :*

$$\chi(z) = 1 \quad \text{pour} \quad z \in [0, a] \quad \text{et} \quad \chi(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \in [b, 1].$$

En s'inspirant de l'article de Faou [25], pour construire les couches limites, on regarde les plus grands ordres de dérivation en  $z$  dans les composantes (3,3) du bending et de la membrane car c'est dans cette composante qu'est le moteur de notre algorithme de la partie précédente. On cherche alors à harmoniser le terme en  $\frac{1}{R^2}$  de la membrane et le terme en  $\varepsilon^2 \partial_z^4$  de la flexion.

On fait donc un changement d'échelle pour ramener les deux termes au même ordre et pour chacun des deux bords (en  $-1$  et  $+1$ ), on pose :

$$Z^+ = \varepsilon^{-1/2} z^+, \quad \partial_z = -\varepsilon^{-1/2} \partial_{Z^+}.$$

$$Z^- = \varepsilon^{-1/2} z^-, \quad \partial_z = \varepsilon^{-1/2} \partial_{Z^-}.$$

Ce changement de variables correspond à une sorte de zoom en  $-1$  et  $+1$ .

**Remarque 5.10.** *On a :*

$$Z^\pm \in [0, 2\varepsilon^{-1/2}]. \quad (5.16)$$

On pose :

$$\mathbf{u}(z^+) = \mathbf{U}^+(Z^+), \quad \mathbf{u}(z^-) = \mathbf{U}^-(Z^-).$$

On cherche à construire  $\mathbf{x}[\varepsilon]$  de la forme

$$\mathbf{x}[\varepsilon](z) = \mathbf{u}[\varepsilon](z) + \chi(z^+) \mathbf{U}^+[\varepsilon](Z^+) + \chi(z^-) \mathbf{U}^-[\varepsilon](Z^-)$$

avec

$$\mathbf{U}^\pm[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{U}_n^\pm[\varepsilon], \quad \mathbf{U}_n^\pm \text{ exponentiellement décroissant}$$

et  $\mathbf{u}[\varepsilon]$  est généré à partir d'un certain  $\zeta[\varepsilon]$  qui est modifié par rapport à celui obtenu dans la section précédente.

On veut que  $\mathbf{x}[\varepsilon]$  appartienne à l'espace  $H^1 \times H^1 \times H^2(S)$  et soit solution du problème :

$$\mathcal{K}[\varepsilon] \mathbf{x}[\varepsilon] = \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{x}[\varepsilon], \quad \mathbf{x}(\pm 1) = 0, \quad \partial_z x_3(\pm 1) = 0.$$

On pose également :

$$\mathbf{K}^\pm[\varepsilon](Z^\pm, \partial_{Z^\pm}) = \mathcal{K}[\varepsilon](z, \partial_z).$$

Ce changement d'échelle nous donne alors les matrices suivantes :

$$\mathbf{K}^\pm[\varepsilon] = \frac{E}{1 - \nu^2} \times$$



$$\left( \begin{array}{ccc} -\varepsilon^{-1}\partial_{Z^\pm}^2 + \frac{1-\nu}{2R^2}C^2\varepsilon^{-1/2} & \pm\frac{1+\nu}{2R^2}iC\varepsilon^{-3/4}\partial_{Z^\pm} & \pm\frac{\nu}{R}\varepsilon^{-1/2}\partial_{Z^\pm} \\ \pm\frac{1+\nu}{2R^2}iC\varepsilon^{-3/4}\partial_{Z^\pm} & \frac{C^2}{R^4}\varepsilon^{-1/2} - \frac{1-\nu}{2R^2}\varepsilon^{-1}\partial_{Z^\pm}^2 & -\frac{iC\varepsilon^{-1/4}}{R^3} + \frac{2iC\varepsilon^{3/4}}{3R^3}\partial_{Z^\pm}^2 \\ & +\frac{4C^2}{3}\frac{\varepsilon^{3/2}}{R^6} - \frac{2(1-\nu)\varepsilon}{3R^4}\partial_{Z^\pm}^2 & -\frac{2iC^3\varepsilon^{5/4}}{3R^5} - \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^5} \\ \mp\frac{\nu}{R}\varepsilon^{-1/2}\partial_{Z^\pm} & \frac{iC\varepsilon^{-1/4}}{R^3} - \frac{2iC\varepsilon^{3/4}}{3R^3}\partial_{Z^\pm}^2 & \frac{1}{R^2} + \frac{1}{3}\partial_{Z^\pm}^4 - \frac{2C^2\varepsilon^{1/2}}{3R^2}\partial_{Z^\pm}^2 + \frac{C^4\varepsilon}{3R^4} \\ & +\frac{2iC^3\varepsilon^{5/4}}{3R^5} + \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^5} & +\frac{2C^2\varepsilon^{3/2}}{3R^4} + \frac{\varepsilon^2}{3R^4} - \frac{2\nu\varepsilon}{3R^2}\partial_{Z^\pm}^2 \end{array} \right).$$

L'influence du terme  $\mathbf{M}(3,3)$  après l'homogénéisation n'intervient qu'au terme en  $\varepsilon^0$ . Comme dans [25], on décide donc de faire un changement d'échelle et ramener ce terme au même ordre en  $\varepsilon$  que le terme  $-\varepsilon^{-1}\partial_{Z^\pm}^2$  dans le coefficient  $\mathbf{M}(1,1)$ .

On pose alors  $\mathbf{u}^\pm$  défini par :

$$\mathbf{u}_\alpha^\pm = \varepsilon^{-1/4}\mathbf{U}_\alpha^\pm, \quad \mathbf{u}_3^\pm = \varepsilon^{1/4}\mathbf{U}_3^\pm$$

ie

$$\mathbf{u}^\pm = \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{U}^\pm \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1/4} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/4} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{1/4} \end{pmatrix}$$

et on résout le système :

$$\mathfrak{K}^\pm[\varepsilon]\mathbf{u}^\pm = \Lambda[\varepsilon]\mathbf{D}_\varepsilon^{-2}\mathbf{A}\mathbf{u}^\pm, \quad \mathfrak{K}^\pm[\varepsilon] = \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}\mathbf{K}^\pm[\varepsilon]\mathbf{D}_\varepsilon^{-1}.$$

$$\mathfrak{K}^\pm[\varepsilon] = \frac{E}{1-\nu^2} \times$$

$$\left( \begin{array}{ccc} -\varepsilon^{-1/2}\partial_{Z^\pm}^2 + \frac{1-\nu}{2R^2}C^2 & \pm\frac{1+\nu}{2R^2}iC\varepsilon^{-1/4}\partial_{Z^\pm} & \pm\frac{\nu}{R}\varepsilon^{-1/2}\partial_{Z^\pm} \\ \pm\frac{1+\nu}{2R^2}iC\varepsilon^{-1/4}\partial_{Z^\pm} & \frac{C^2}{R^4} - \frac{1-\nu}{2R^2}\varepsilon^{-1/2}\partial_{Z^\pm}^2 & -\frac{iC\varepsilon^{-1/4}}{R^3} + \frac{2iC\varepsilon^{3/4}}{3R^3}\partial_{Z^\pm}^2 \\ & +\frac{4C^2}{3}\frac{\varepsilon^2}{R^6} - \frac{2(1-\nu)\varepsilon^{3/2}}{3R^4}\partial_{Z^\pm}^2 & -\frac{2iC^3\varepsilon^{5/4}}{3R^5} - \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^5} \\ \mp\frac{\nu}{R}\varepsilon^{-1/2}\partial_{Z^\pm} & \frac{iC\varepsilon^{-1/4}}{R^3} - \frac{2iC\varepsilon^{3/4}}{3R^3}\partial_{Z^\pm}^2 & \frac{1}{R^2}\varepsilon^{-1/2} + \frac{1}{3}\varepsilon^{-1/2}\partial_{Z^\pm}^4 - \frac{2C^2\varepsilon^0}{3R^2}\partial_{Z^\pm}^2 + \frac{C^4\varepsilon^{1/2}}{3R^4} \\ & +\frac{2iC^3\varepsilon^{5/4}}{3R^5} + \frac{2iC\varepsilon^{7/4}}{3R^5} & +\frac{2C^2\varepsilon}{3R^4} + \frac{\varepsilon^{3/2}}{3R^4} - \frac{2\nu\varepsilon^{1/2}}{3R^2}\partial_{Z^\pm}^2 \end{array} \right).$$

On décompose  $\mathfrak{K}^\pm$  selon les puissances de  $\varepsilon$  :

$$\mathfrak{K}^\pm = \varepsilon^{-1/2}\mathfrak{K}_0^\pm + \varepsilon^{-1/4}\mathfrak{K}_1^\pm + \mathfrak{K}_2^\pm + \varepsilon^{1/4}\mathfrak{K}_3^\pm + \varepsilon^{1/2}\mathfrak{K}_4^\pm + \varepsilon^{3/4}\mathfrak{K}_5^\pm + \varepsilon\mathfrak{K}_6^\pm + \varepsilon^{5/4}\mathfrak{K}_7^\pm + \varepsilon^{3/2}\mathfrak{K}_8^\pm + \varepsilon^{7/4}\mathfrak{K}_9^\pm + \varepsilon^2\mathfrak{K}_{10}^\pm$$

avec :

$$\mathfrak{K}_0^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} -\partial_{Z^\pm}^2 & 0 & \pm \frac{\nu}{R} \partial_{Z^\pm} \\ 0 & -\frac{1-\nu}{2R^2} \partial_{Z^\pm}^2 & 0 \\ \mp \frac{\nu}{R} \partial_{Z^\pm} & 0 & \frac{1}{R^2} + \frac{1}{3} \partial_{Z^\pm}^4 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_1^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & \pm \frac{1+\nu}{2R^2} iC \partial_{Z^\pm} & 0 \\ \pm \frac{1+\nu}{2R^2} iC \partial_{Z^\pm} & 0 & -\frac{iC}{R^3} \\ \frac{iC}{R^3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_2^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{2R^2} C^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C^2}{R^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2C^2}{3R^2} \partial_{Z^\pm}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_4^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C^4}{3R^4} - \frac{2\nu}{3R^2} \partial_{Z^\pm}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_5^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2iC}{3R^3} \partial_{Z^\pm}^2 \\ 0 & -\frac{2iC}{3R^3} \partial_{Z^\pm}^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_6^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2C^2}{3R^4} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{K}_7^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2iC^3}{3R^5} \\ 0 & \frac{2iC^3}{3R^5} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_8^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(1-\nu)}{3R^4} \partial_{Z^\pm}^2 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3R^4} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_9^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2iC}{3R^5} \\ 0 & \frac{2iC}{3R^5} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{K}_{10}^\pm = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4C^2}{3R^6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 5.11.** La matrice  $\mathfrak{K}_0^\pm$  est la même que celle de l'article de Faou [25].

D'après (5.15), le premier terme de couche limite doit corriger la valeur de  $\zeta_2$  donc on va prendre :

$$\mathbf{U}^\pm[\varepsilon] = \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{U}_{2,3}^\pm \end{pmatrix} + \sum_{n \geq 3} \mathbf{U}_n^\pm \varepsilon^{n/4}$$

et ceci induit alors :

$$\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] = \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_{3,3}^\pm \end{pmatrix} + \sum_{n \geq 3} \varepsilon^{n/4} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1,z}^\pm \\ \mathbf{u}_{n-1,\varphi}^\pm \\ \mathbf{u}_{n+1,3}^\pm \end{pmatrix}.$$

On va rajouter les termes de couches limites  $\mathbf{U}^\pm$  à  $\mathbf{u}$  pour corriger les valeurs au bord et pour ne pas détruire ce qu'on aura construit, on prendra  $\mathbf{U}^\pm$  solution du système :

$$\mathbf{K}^\pm[\varepsilon] \mathbf{U}^\pm[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{U}^\pm[\varepsilon] = 0,$$

c'est à dire que l'on va construire  $\mathbf{u}^\pm$  solution de :

$$\mathfrak{K}^\pm[\varepsilon] \mathbf{u}^\pm[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{D}_\varepsilon^{-2} \mathbf{u}^\pm[\varepsilon] = 0. \quad (5.17)$$

### 5.6.2 L'opérateur $\mathfrak{K}_0^\pm$

Pour résoudre le système (5.17), il nous faut étudier l'opérateur  $\mathfrak{K}_0^\pm$ . Puisque l'on étudie le régime  $\varepsilon$  petit, d'après (5.16), on peut supposer  $Z^\pm \in \mathbb{R}^+$ . Cette méthode est standard lors de développements asymptotiques. On a les propositions suivantes valables aussi pour l'opérateur  $\mathfrak{K}_0^-$ .

**Proposition 5.12.** Pour  $c_3, c_n \in \mathbb{R}$ , il existe une unique fonction  $\mathbf{u}^+ \in C^\infty([0, +\infty[)^3$  exponentiellement décroissante solution du système :

$$\begin{cases} \mathfrak{K}_0^+ \mathbf{u}^+ = 0 \text{ sur } [0, +\infty[ \\ \mathbf{u}_3^+(0) = c_3, \quad \partial_{Z^+} \mathbf{u}_3^+(0) = c_n \end{cases}$$

**Preuve.** On transforme le système  $\mathfrak{K}_0^+$  en système triangulaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_{Z^+}^2 \mathbf{u}_z^+ + \frac{\nu}{R} \partial_{Z^+} \mathbf{u}_3^+ = 0 \\ \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_{Z^+}^2 \mathbf{u}_\varphi^+ = 0 \\ -\frac{\nu}{R} \partial_{Z^+}^2 \mathbf{u}_z^+ + \left( \frac{1}{R^2} \partial_{Z^+} + \frac{1}{3} \partial_{Z^+}^5 \right) \mathbf{u}_3^+ = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\partial_{Z^+}^2 \mathbf{u}_z^+ + \frac{\nu}{R} \partial_{Z^+} \mathbf{u}_3^+ = 0 \\ \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_{Z^+}^2 \mathbf{u}_\varphi^+ = 0 \\ \left( \frac{1-\nu^2}{R^2} \partial_{Z^+} + \frac{1}{3} \partial_{Z^+}^5 \right) \mathbf{u}_3^+ = 0 \end{array} \right.$$

L'équation caractéristique associée à la dernière équation est :

$$\frac{1-\nu^2}{R^2} \tau + \frac{1}{3} \tau^5 = 0$$

dont les racines sont :

$$0, \quad e^{i\pi/4} a^{1/4}, \quad e^{-i\pi/4} a^{1/4}, \quad e^{3i\pi/4} a^{1/4}, \quad e^{-3i\pi/4} a^{1/4} \quad \text{où } a = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2}$$

$\mathbf{u}_3^+$  s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{u}_3^+ = A_1 e^{0Z^+} + A_2 e^{e^{i\pi/4} a^{1/4} Z^+} + A_3 e^{e^{-i\pi/4} a^{1/4} Z^+} + A_4 e^{e^{3i\pi/4} a^{1/4} Z^+} + A_5 e^{e^{-3i\pi/4} a^{1/4} Z^+}$$

On recherche une solution  $\mathbf{u}_3^+$  exponentiellement décroissante donc on va choisir

$$A_1 = A_2 = A_4 = 0.$$

De plus, les conditions au bord nous donnent :

$$\mathbf{u}_3^+ = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} a^{1/4} Z^+} \left[ c_3 \left( \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a^{1/4} Z^+\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a^{1/4} Z^+\right) \right) + \sqrt{2} c_n \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a^{1/4} Z^+\right) \right]$$

La deuxième équation impose  $\mathbf{u}_\varphi^+ = 0$  pour que  $\mathbf{u}^+$  soit exponentiellement décroissante.

Enfin de la première équation du système, on déduit :

$$\mathbf{u}_z^+(Z^+) = -\frac{\nu}{R} \int_{Z^+}^{+\infty} \mathbf{u}_3^+(t) dt$$

On a bien trouvé une unique solution exponentiellement décroissante du système cherché.  $\blacksquare$

**Proposition 5.13.** *Pour  $c_3, c_n \in \mathbb{R}$  et  $\mathfrak{G}^+ = (\mathfrak{G}_{Z^+}^+, \mathfrak{G}_\varphi^+, \mathfrak{G}_3^+) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)^3$  exponentiellement décroissant, il existe une unique fonction  $\mathbf{u}^+ \in C^\infty([0, +\infty[)^3$  exponentiellement décroissante solution du système :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K}_0^+ \mathbf{u}^+ = \mathfrak{G}^+ \text{ sur } [0, +\infty[ \\ \mathbf{u}_3^+(0) = c_3 \quad \partial_{Z^+} \mathbf{u}_3^+(0) = c_n \end{array} \right.$$

**Preuve.**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_{Z^+}^2 \mathbf{u}_z^+ - \frac{\nu}{R} \partial_{Z^+} \mathbf{u}_3^+ = \mathfrak{G}_{Z^+}^+ \\ -\frac{1-\nu}{2R^2} \partial_{Z^+}^2 \mathbf{u}_\varphi^+ = \mathfrak{G}_\varphi^+ \\ \frac{\nu}{R} \partial_{Z^+} \mathbf{u}_z^+ + \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{3} \partial_{Z^+}^4 \right) \mathbf{u}_3^+ = \mathfrak{G}_3^+ \end{array} \right.$$

On applique la méthode de la variation de la constante. ■

### 5.6.3 Théorème

On cherche alors à raccorder les couches limites donc le problème aux séries formelles s'écrit : Trouver  $(\zeta[\varepsilon], \mathbf{u}^\pm[\varepsilon])$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0 \quad \text{pour } z \in [-1, 1] \\ \mathfrak{K}^+[\varepsilon]\mathbf{u}^+[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\mathbf{A}\mathbf{D}_\varepsilon^{-2}\mathbf{u}^+[\varepsilon] = 0 \quad \text{pour } Z^+ \in \mathbb{R}^+ \\ \mathfrak{K}^+[\varepsilon]\mathbf{u}^-[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\mathbf{A}\mathbf{D}_\varepsilon^{-2}\mathbf{u}^-[\varepsilon] = 0 \quad \text{pour } Z^- \in \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]|_{z=\pm 1} + \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}\mathbf{u}^\pm[\varepsilon]|_{Z^\pm=0} = 0 \\ \partial_z \mathcal{V}_3[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]|_{z=\pm 1} - \pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}\mathbf{u}_3^\pm[\varepsilon]|_{Z^\pm=0} = 0 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

**Théorème 5.14.** *Pour tout couple  $(\lambda, w)$  solution du problème*

$$\left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \right) w = \lambda w, \quad w(\pm 1) = \partial_z w(\pm 1) = 0, \quad (5.19)$$

*il existe des séries formelles*

$$\Lambda[\varepsilon] = \lambda\varepsilon + \sum_{n \geq 6} \varepsilon^{n/4} \Lambda_n \quad \text{et} \quad \zeta[\varepsilon] = w + \sum_{n \geq 2} \varepsilon^{n/4} \zeta_n \in C^\infty([-1, 1]) \quad (5.20)$$

*et  $\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] \in C^\infty(\mathbb{R}^+)^3$  exponentiellement décroissante*

$$\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] = \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_{3,3}^\pm \end{pmatrix} + \sum_{n \geq 3} \varepsilon^{n/4} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1,z}^\pm \\ \mathbf{u}_{n-1,\varphi}^\pm \\ \mathbf{u}_{n+1,3}^\pm \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

*telles que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0 \quad \text{pour } z \in [-1, 1] \\ \mathfrak{K}^\pm[\varepsilon]\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\mathbf{A}\mathbf{D}_\varepsilon^{-2}\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] = 0 \quad \text{pour } Z^\pm \in \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]|_{z=\pm 1} + \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}\mathbf{u}^\pm[\varepsilon]|_{Z^\pm=0} = 0 \\ \partial_z \mathcal{V}_3[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]|_{z=\pm 1} - \pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}\mathbf{u}_3^\pm[\varepsilon]|_{Z^\pm=0} = 0 \end{array} \right. \quad (5.22)$$

**Remarque 5.15.** *Les séries formelles de (5.20) vérifient :*

$$\Lambda_5 = 0, \quad \text{et} \quad \zeta_1 = 0. \quad (5.23)$$

**Preuve.** On montre le résultat par induction.

Par définition (5.5),

$$\mathcal{V}_{0,\alpha} = 0$$

et d'après le théorème 5.3,

$$\mathcal{V}_{1,z} = 0, \quad \mathcal{V}_{1,\varphi} = \frac{iR}{C}, \quad \mathcal{V}_{2,z} = -\frac{R}{C^2} \partial_z$$

il faut donc aller chercher les termes  $\mathcal{V}_{1,\varphi}$  et  $\mathcal{V}_{2,z}$  pour obtenir que le système (5.18) est équivalent aux deux systèmes suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_4 \zeta_n - \Lambda_4 \zeta_n = - \sum_{l=5}^{n+4} \mathcal{L}_l \zeta_{n+4-l} + \sum_{l=5}^{n+4} \Lambda_l \zeta_{n+4-l} \quad \text{pour } z \in [-1, 1] \\ \mathcal{V}_{1,\varphi} \zeta_n|_{z=\pm 1} = - \sum_{l=2}^{n+1} \mathcal{V}_{l,\varphi} \zeta_{n+1-l}|_{z=\pm 1} - \mathbf{u}_{n,\varphi}^\pm|_{Z^\pm=0} \\ \mathcal{V}_{2,z} \zeta_n|_{z=\pm 1} = - \sum_{l=3}^{n+2} \mathcal{V}_{l,z} \zeta_{n+2-l}|_{z=\pm 1} - \mathbf{u}_{n+1,z}^\pm|_{Z^\pm=0} \end{array} \right. \quad (5.24)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K}_0^\pm \mathbf{u}_n^\pm = - \sum_{l=1}^n \mathfrak{K}_l^\pm \mathbf{u}_{n-l}^\pm + \left( \begin{array}{c} \mathbf{A}(\alpha, \alpha) \sum_{j=0}^{n-4} \Lambda_j \mathbf{u}_{n-4-j,\alpha}^\pm \\ \mathbf{A}(3, 3) \sum_{j=0}^n \Lambda_j \mathbf{u}_{n-j,\alpha}^\pm \end{array} \right) \quad \text{pour } Z^\pm \in \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{u}_{n,3}^\pm|_{Z^\pm=0} = -\zeta_{n-1}|_{z=\pm 1} \\ \pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{u}_{n,3}^\pm|_{Z^\pm=0} = \partial_z \zeta_{n-3}|_{z=\pm 1} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

On rappelle que l'on a d'après (5.21) et (5.20) :

$$\mathbf{u}_0^\pm = \mathbf{u}_1^\pm = 0, \quad \mathbf{u}_{2,3}^\pm = \mathbf{u}_{3,\alpha}^\pm = 0, \quad \text{et} \quad \zeta_0 = w$$

et

$$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0, \quad \Lambda_4 = \lambda$$

On commence par résoudre (5.25) puis ensuite (5.24). Pour  $n \leq 1$ , (5.25) est trivial.

•  $n = 0$

(5.24) nous donne :

$$\mathcal{L}_4 \zeta_0 - \Lambda_4 \zeta_0 = 0 \quad \text{sur } [-1, 1]$$

avec

$$\mathcal{V}_{1,\varphi}\zeta_0|_{z=\pm 1} = 0, \quad \mathcal{V}_{2,z}\zeta_0|_{z=\pm 1} = 0$$

ce qui est vérifié par  $\zeta_0$  d'après (5.19).

•  $n = 1$

(5.24) nous donne :

$$\mathcal{L}_4\zeta_1 - \Lambda_4\zeta_1 = -\mathcal{L}_5\zeta_0 + \Lambda_5\zeta_0 \quad \text{sur } [-1, 1]$$

avec

$$\mathcal{V}_{1,\varphi}\zeta_1|_{z=\pm 1} = -\mathcal{V}_{2,\varphi}\zeta_0|_{z=\pm 1}, \quad \mathcal{V}_{2,z}\zeta_1|_{z=\pm 1} = -\mathcal{V}_{3,z}\zeta_0|_{z=\pm 1}$$

c'est-à-dire d'après les formules du théorème 5.3 :

$$\mathcal{V}_{1,\varphi}\zeta_1|_{z=\pm 1} = 0, \quad \mathcal{V}_{2,z}\zeta_1|_{z=\pm 1} = 0.$$

Puisque  $\mathcal{L}_5 = 0$  d'après le théorème 5.3 et  $\Lambda_5 = 0$  d'après (5.23), on peut choisir de prendre  $\zeta_1 = 0$ .

•  $n = 2$

(5.25) nous donne :

$$\mathfrak{K}_0^\pm \mathbf{u}_2^\pm = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+$$

avec

$$\mathbf{u}_{2,3}^\pm|_{Z^\pm=0} = -\zeta_1|_{z=\pm 1}, \quad \pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{u}_{2,3}^\pm|_{Z^\pm=0} = 0.$$

Comme  $\zeta_1 = 0$  d'après (5.23), il vient  $\mathbf{u}_2^\pm = 0$ .

Ensuite (5.24) nous donne :

$$\mathcal{L}_4\zeta_2 - \Lambda_4\zeta_2 = -\mathcal{L}_6\zeta_0 + \Lambda_6\zeta_0 \quad \text{sur } [-1, 1]$$

avec

$$\mathcal{V}_{1,\varphi}\zeta_2|_{z=\pm 1} = -\mathcal{V}_{3,\varphi}\zeta_0|_{z=\pm 1} - \mathbf{u}_{2,\varphi}^\pm|_{Z^\pm=0}, \quad \mathcal{V}_{2,z}\zeta_2|_{z=\pm 1} = -\mathcal{V}_{3,z}\zeta_1|_{z=\pm 1} - \mathbf{u}_{2,z}^\pm|_{Z^\pm=0}.$$

• Pour chaque  $n \geq 3$ , on résout (5.25) sur  $\mathbb{R}^+$  en utilisant la proposition 5.13 puis le système (5.24) sur  $[-1, 1]$ . ■

## 5.7 Quasimodes

Soient  $\Lambda[\varepsilon]$ ,  $\zeta[\varepsilon]$  et  $\mathbf{u}[\varepsilon]$  vérifiant les hypothèses (5.19), (5.8) et (5.21) du théorème 5.14.

On pose :

$$\mathbf{u}[\varepsilon] = \mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]$$

d'après le théorème 5.3 cette série formelle vérifie l'équation :

$$\mathcal{K}[\varepsilon]\mathbf{u}[\varepsilon] = \Lambda[\varepsilon]\mathbf{A}\mathbf{u}[\varepsilon].$$

**Définition 5.16.** *On pose :*

$$\mathbf{x}[\varepsilon](z) = \sum_{n \geq 0} [\mathbf{u}_n(z) + \chi(z^+) \mathbf{U}_n^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) + \chi(z^-) \mathbf{U}_n^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4}.$$

Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on définit la somme partielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{[N]}[\varepsilon] &= \sum_{n=0}^N [\mathbf{u}_n(z) + \chi(z^+) \mathbf{U}_n^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) + \chi(z^-) \mathbf{U}_n^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4} \\ &= \mathbf{u}^{[N]}[\varepsilon] + \chi(z^+) \mathbf{U}^{+, [N]}[\varepsilon] + \chi(z^-) \mathbf{U}^{-, [N]}[\varepsilon]. \end{aligned}$$

**Proposition 5.17.** *La série  $\mathbf{x}^{[N]}[\varepsilon]$  vérifie les conditions au bord :*

$$x_\alpha^{[N]}[\varepsilon](\pm 1) = \mathbf{u}_{N,\alpha}^{\pm 1}(0) \varepsilon^{(N+1)/4}, \quad x_3^{[N]}[\varepsilon](\pm 1) = u_{N,3}(\pm 1) \varepsilon^{N/4}$$

et

$$\partial_z x_3^{[N]}[\varepsilon]|_{\pm 1} = \partial_z u_{N-1,3}|_{\pm 1} \varepsilon^{(N-1)/4} + \partial_z u_{N,3}|_{\pm 1} \varepsilon^{N/4}.$$

**Preuve.** On a :

$$\mathbf{x}^{[N]}[\varepsilon](z) = \sum_{n=0}^N [\mathbf{u}_n(z) + \chi(z^+) \mathbf{U}_n^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) + \chi(z^-) \mathbf{U}_n^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4}$$

Or

$$\mathbf{U}_\alpha^\pm = \varepsilon^{1/4} \mathbf{u}_\alpha^\pm \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_3^\pm = \varepsilon^{-1/4} \mathbf{u}_3^\pm$$

donc

$$\mathbf{x}_\alpha^{[N]}[\varepsilon](z) = \sum_{n=0}^N u_{n,\alpha}(z) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=1}^{N+1} [\chi(z^+) \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) + \chi(z^-) \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4}$$

et

$$\mathbf{x}_3^{[N]}[\varepsilon](z) = \sum_{n=0}^N u_{n,3}(z) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-1}^{N-1} [\chi(z^+) \mathbf{u}_{n+1,3}^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) + \chi(z^-) \mathbf{u}_{n+1,3}^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4}.$$

Il s'en suit qu'au bord on a :

$$\mathbf{x}_\alpha^{[N]}[\varepsilon](1) = \sum_{n=0}^N u_{n,\alpha}(1) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=1}^{N+1} [\chi(0) \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^+(0) + \chi(2) \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^-(\varepsilon^{-1/2} 2)] \varepsilon^{n/4}$$

$$\mathbf{x}_\alpha^{[N]}[\varepsilon](-1) = \sum_{n=0}^N u_{n,\alpha}(-1) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=1}^{N+1} [\chi(2) \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^+(\varepsilon^{-1/4} 2) + \chi(0) \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^-(0)] \varepsilon^{n/4}$$

et

$$\mathbf{x}_3^{[N]}[\varepsilon](1) = \sum_{n=0}^N u_{n,3}(1) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-1}^{N-1} [\chi(0) \mathbf{u}_{n+1,3}^+(0) + \chi(2) \mathbf{u}_{n+1,3}^-(2)] \varepsilon^{n/4}$$



$$\mathbf{x}_3^{[N]}[\varepsilon](-1) = \sum_{n=0}^N u_{n,3}(-1)\varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-1}^{N-1} [\chi(2)\mathbf{u}_{n+1,3}^+(\varepsilon^{-1/4}2) + \chi(0)\mathbf{u}_{n+1,3}^-(0)]\varepsilon^{n/4}.$$

Mais par définition de  $\chi$  cf 5.9,  $\chi(0) = 1$  et  $\chi(2) = 0$  donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\alpha^{[N]}[\varepsilon](1) &= \sum_{n=0}^N u_{n,\alpha}(1)\varepsilon^{n/4} + \sum_{n=1}^{N+1} \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^+(0)\varepsilon^{n/4} \\ \mathbf{x}_\alpha^{[N]}[\varepsilon](-1) &= \sum_{n=0}^N u_{n,\alpha}(-1)\varepsilon^{n/4} + \sum_{n=1}^{N+1} \mathbf{u}_{n-1,\alpha}^-(0)\varepsilon^{n/4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3^{[N]}[\varepsilon](1) &= \sum_{n=0}^N u_{n,3}(1)\varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-1}^{N-1} \mathbf{u}_{n+1,3}^+(0)\varepsilon^{n/4} \\ \mathbf{x}_3^{[N]}[\varepsilon](-1) &= \sum_{n=0}^N u_{n,3}(-1)\varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-1}^{N-1} \mathbf{u}_{n+1,3}^-(0)\varepsilon^{n/4}. \end{aligned}$$

Or d'après (5.24) et (5.25) et puisque  $\mathbf{u}[\varepsilon] = \mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]$ , on a :

$$u_{n,\alpha}|_{z=\pm 1} = -\mathbf{u}_{n-1,\alpha}^\pm|_{Z^\pm=0}, \quad u_{n,3}|_{z=\pm 1} = -\mathbf{u}_{n+1,3}^\pm|_{Z^\pm=0}$$

et de plus

$$u_{0,\alpha}|_{z=\pm 1} = 0, \quad \mathbf{u}_{0,3}^\pm|_{Z^\pm=0} = 0$$

donc il vient :

$$\mathbf{x}_\alpha^{[N]}[\varepsilon](\pm 1) = \mathbf{u}_{N,\alpha}^{\pm 1}(0)\varepsilon^{(N+1)/4}$$

et

$$\mathbf{x}_3^{[N]}[\varepsilon](\pm 1) = u_{N,3}(\pm 1)\varepsilon^{N/4}.$$

D'autre part on a par définition :

$$\begin{aligned} \partial_z \mathbf{x}_3^{[N]}[\varepsilon](z) &= \sum_{n=0}^N [\partial_z u_{n,3}(z) + \partial_z \chi(z^+) \mathbf{U}_{n,3}^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) + \partial_z \chi(z^-) \mathbf{U}_{3,n}^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4} \\ &= \sum_{n=0}^N [\partial_z u_{n,3}(z) - \varepsilon^{-1/2} \partial_{Z^+} \chi(z^+) \mathbf{U}_{n,3}^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) \\ &\quad + \varepsilon^{-1/2} \partial_{Z^-} \chi(z^-) \mathbf{U}_{n,3}^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4} \\ &= \sum_{n=0}^N \partial_z u_{n,3}(z) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-2}^{N-2} [-\partial_{Z^+} \chi(z^+) \mathbf{U}_{n+2,3}^+(\varepsilon^{-1/2} z^+) \\ &\quad + \partial_{Z^-} \chi(z^-) \mathbf{U}_{n+2,3}^-(\varepsilon^{-1/2} z^-)] \varepsilon^{n/4} \end{aligned}$$

Or

$$\mathbf{U}_3^\pm = \varepsilon^{-1/4} \mathbf{u}_3^\pm \quad \text{donc} \quad \mathbf{U}_{j,3}^\pm = \mathbf{u}_{j+1,3}^\pm \quad \text{pour} \quad j \geq 0,$$

il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \partial_z x_3^{[N]}[\varepsilon](z) &= \sum_{n=0}^N \partial_z u_{n,3}(z) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-2}^{N-2} [-\partial_{Z^+} \chi(z^+) \mathbf{u}_{n+3,3}^+(\varepsilon^{-1/2}(z^+)) \\ &\quad + \partial_{Z^-} \chi(z^-) \mathbf{u}_{n+3,3}^-(\varepsilon^{-1/2}(z^-))] \varepsilon^{n/4} \end{aligned}$$

et au bord on a :

$$\begin{aligned} \partial_z x_3^{[N]}[\varepsilon](1) &= \sum_{n=0}^N \partial_z u_{n,3}(1) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-2}^{N-2} [-\partial_{Z^+} \chi(0) \mathbf{u}_{n+3,3}^+(0) \\ &\quad + \partial_{Z^-} \chi(2) \mathbf{u}_{n+3,3}^-(\varepsilon^{-1/2}2)] \varepsilon^{n/4} \\ \partial_z x_3^{[N]}[\varepsilon](-1) &= \sum_{n=0}^N \partial_z u_{n,3}(-1) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-2}^{N-2} [-\partial_{Z^+} \chi(2) \mathbf{u}_{n+3,3}^+(\varepsilon^{-1/2}2) \\ &\quad + \partial_{Z^-} \chi(0) \mathbf{u}_{n+3,3}^-(0)] \varepsilon^{n/4} \end{aligned}$$

Par définition de  $\chi$  on a :

$$\begin{aligned} \partial_z x_3^{[N]}[\varepsilon](1) &= \sum_{n=0}^N \partial_z u_{n,3}(1) \varepsilon^{n/4} - \sum_{n=-2}^{N-2} \partial_{Z^+} \mathbf{u}_{n+3,3}^+(0) \varepsilon^{n/4} \\ \partial_z x_3^{[N]}[\varepsilon](-1) &= \sum_{n=0}^N \partial_z u_{n,3}(-1) \varepsilon^{n/4} + \sum_{n=-2}^{N-2} \partial_{Z^-} \mathbf{u}_{n+3,3}^-(0) \varepsilon^{n/4} \end{aligned}$$

et d'après (5.25) :

$$\pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{u}_{n+3,3}^\pm |_{Z^\pm=0} = \partial_z \zeta_n |_{z=\pm 1} = \partial_z u_{n,3} |_{Z=\pm 1},$$

et

$$\mathbf{u}_{1,3}^\pm |_{Z^\pm=0} = \mathbf{u}_{2,3}^\pm |_{Z^\pm=0} = 0$$

il vient

$$\partial_z x_3^{[N]}[\varepsilon](\pm 1) = \partial_z u_{N-1,3}(\pm 1) \varepsilon^{(N-1)/4} + \partial_z u_{N,3}(\pm 1) \varepsilon^{N/4}.$$

■

On pose alors pour  $j = N - 1, N$  :

$$\mathbf{t}_j^\pm := \begin{pmatrix} 0 \\ -(\partial_z u_{3,j} |_{\pm 1}) z^\pm \chi(z^\pm) \end{pmatrix}$$

et pour  $j = N, N + 1$  :

$$\mathbf{c}_j^\pm := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{j-1,\alpha}^{\pm 1}(0) \chi(z^\pm) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_j^\pm := \begin{pmatrix} 0 \\ u_{j,3}(\pm 1) \chi(z^\pm) \end{pmatrix}.$$

Le champ de tenseurs

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon] := & \mathbf{x}^{[N]}[\varepsilon] + \varepsilon^{(N-1)/4} \mathbf{t}_{N-1}^+ + \varepsilon^{(N-1)/4} \mathbf{t}_{N-1}^- + \varepsilon^{N/4} \mathbf{t}_N^+ + \varepsilon^{N/4} \mathbf{t}_N^- + \varepsilon^{(N+1)/4} \mathbf{c}_{N+1}^+ \\ & + \varepsilon^{(N+1)/4} \mathbf{c}_{N+1}^- + \varepsilon^{N/4} \mathbf{r}_N^+ + \varepsilon^{N/4} \mathbf{r}_N^- \end{aligned}$$

vérifie alors les conditions au bord de Dirichlet :

$$\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon]|_{\pm 1} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_z \bar{\mathbf{x}}_3^{[N]}[\varepsilon]|_{\pm 1} = 0.$$

On obtient alors un théorème similaire à celui dans le cas de la membrane 4.10.

**Théorème 5.18.** *Soit  $(\Lambda[\varepsilon], \zeta[\varepsilon]) \in \mathbb{R} \times C^\infty(I)$  solution du système (5.9) sous les hypothèses (5.7) et (5.8).*

*Alors pour tout  $N \geq 0$ , si l'on pose :*

$$\Lambda^{[N]}[\varepsilon] = \sum_{n=0}^N \Lambda_n \varepsilon^{n/4}$$

*la paire  $(\Lambda^{[N]}[\varepsilon], \bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon])$  est un quasimode de  $\mathcal{K}[\varepsilon]$ .*

*Il existe une constante  $\gamma = \gamma(N) \in \mathbb{R}^+$  indépendante de  $k$  telle que pour tout  $k$  :*

$$\|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \leq \gamma \varepsilon^{(N-1)/4} \|\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3}.$$

**Preuve.** Par construction,  $\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[k]$  appartient à l'espace variationnel  $W(I)$ .

Puisque

$$\mathcal{K}[\varepsilon] \mathbf{u}[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{u}[\varepsilon] = 0$$

et

$$\mathbf{u}^{[N]}[\varepsilon] = \sum_{j=0}^N \varepsilon^{j/4} \sum_{l=0}^j \mathcal{V}_l \zeta_{j-l}$$

et d'après l'inégalité (5.14), les  $\zeta_l$  étant analytiques, on a :

$$\|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \mathbf{u}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \leq \gamma \varepsilon^{(N-1)/4} \|\zeta_0\|_{L^2}.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, grâce à (5.13), il existe  $\gamma_N$  indépendant de  $\varepsilon$  telle que :

$$\|\zeta_0\|_{L^2} \leq \gamma_N \|\mathbf{u}^{[N]}\|_{(L^2)^3}.$$

Donc au final, il vient :

$$\|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \mathbf{u}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \leq \gamma \varepsilon^{(N-1)/4} \|\mathbf{u}^{[N]}\|_{(L^2)^3}.$$

D'autre part puisque

$$\mathcal{K}[\varepsilon](z, \partial_z) = \mathbf{K}^\pm[\varepsilon](Z^\pm, \partial_{Z^\pm})$$

on a :

$$\|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \mathbf{U}^{+, [N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \leq \varepsilon^{-1/2} \|(\mathbf{K}^+[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \mathbf{U}^{+, [N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3}$$

puis comme

$$\mathbf{K}^+[\varepsilon] = \mathbf{D}_\varepsilon \mathfrak{K}^+[\varepsilon] \mathbf{D}_\varepsilon, \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^+ = \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{U}^+,$$

on a :

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \chi \mathbf{U}^{+, [N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} &\leq \varepsilon^{-1/2} \|(\mathbf{D}_\varepsilon \mathfrak{K}^+[\varepsilon] \mathbf{D}_\varepsilon - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \chi \mathbf{u}^{+, [N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \\ &\leq \varepsilon^{-1/2} \|\mathbf{D}_\varepsilon \mathfrak{K}^+[\varepsilon] \chi \mathbf{u}^{+, [N]} - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \chi \mathbf{u}^{+, [N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \\ &\leq \varepsilon^{-1/2} \|\mathfrak{K}^+[\varepsilon] \chi \mathbf{u}^{+, [N]} - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{D}_\varepsilon^{-2} \chi \mathbf{u}^{+, [N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \end{aligned}$$

D'autre part,  $\mathbf{u}^\pm$  vérifie l'équation :

$$\mathfrak{K}^\pm[\varepsilon] \mathbf{u}^\pm[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{D}_\varepsilon^{-2} \mathbf{u}^\pm[\varepsilon] = 0$$

donc on a :

$$\|\mathfrak{K}^\pm[\varepsilon] \mathbf{u}^{\pm, [N]}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{D}_\varepsilon^{-2} \mathbf{A} \mathbf{u}^{\pm, [N]}[\varepsilon]\| \leq \varepsilon^{(N+1)/4} \sum_{l=0}^{N+1} \|\mathbf{u}_l^\pm\|_{H^2(\mathbb{R}^+)}$$

et comme

$$\mathcal{V}[\varepsilon] \zeta[\varepsilon]|_{\pm 1} + \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \mathbf{u}^\pm[\varepsilon]|_0 = 0$$

et

$$\partial_z \mathcal{V}_3[\varepsilon] \zeta[\varepsilon]|_{\pm 1} - \pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \mathbf{u}_3^\pm[\varepsilon]|_0 = 0$$

on a d'après (5.14) et puisque les  $\zeta_l$  sont analytiques :

$$\|\mathbf{u}_l^\pm\|_{H^2} \leq \|\zeta_0\|_{L^2}.$$

De plus pour  $\mathbf{y}$  satisfaisant les conditions au bord homogènes, il existe  $C_1$  et  $\beta > 0$  tels que :

$$|\langle \mathfrak{K}^+[\varepsilon] (\chi \mathbf{u}^{+, [N]}[\varepsilon]), \mathbf{y} \rangle_{(L^2)^3} - \langle \mathfrak{K}^+[\varepsilon] (\mathbf{u}^{+, [N]}[\varepsilon]), \chi \mathbf{y} \rangle_{(L^2)^3}| \leq C_1 e^{-\beta \varepsilon^{-1/2}} \|\mathbf{y}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2}$$

puisque  $\chi$  est  $C^\infty$  à support dans  $[a, b]$  et que  $\mathbf{u}^+$  est exponentiellement décroissant en  $-Z^+ = \varepsilon^{-1/2} z^+$  d'après 5.13.

D'après (5.25),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K}_0^\pm \mathbf{u}_n^\pm = - \sum_{l=1}^n \mathfrak{K}_l^\pm \mathbf{u}_{n-l} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\alpha, \alpha) \sum_{j=0}^{n-4} \Lambda_j \mathbf{u}_{n-4-j, \alpha}^\pm \\ \mathbf{A}(3, 3) \sum_{j=0}^n \Lambda_j \mathbf{u}_{n-j, \alpha}^\pm \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_{n,3}^\pm|_{Z^\pm=0} = -\zeta_{n-1}|_{z=\pm 1} \\ \pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{u}_{n,3}^\pm|_{Z^\pm=0} = \partial_z \zeta_{n-3}|_{z=\pm 1} \end{array} \right.$$

$\mathbf{u}_n^+$  est exponentiellement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc :

$$\|\mathbf{u}_n^+\|_{L^2} \leq \gamma |\mathbf{u}_n^+(0)|$$

De plus avec les conditions au bord et par (5.14) on a :

$$|\mathbf{u}_n^+(0)| \leq \gamma |\zeta_0(1)|$$

et puisque  $\zeta_0$  est analytique, il vient :

$$\|\mathbf{u}_n^+\|_{L^2} \leq \gamma \|\zeta_0\|_{L^2}.$$

On a donc

$$\|\mathbf{u}^{+, [N]}\|_{L^2} \leq \|\zeta_0\|_{L^2}.$$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon]\mathbf{A})(\varepsilon^{(N-1)/4}\mathbf{t}_{N-1}^+ + \varepsilon^{(N-1)/4}\mathbf{t}_{N-1}^- + \varepsilon^{N/4}\mathbf{t}_N^+ + \varepsilon^{N/4}\mathbf{t}_N^- + \varepsilon^{(N+1)/4}\mathbf{c}_{N+1}^+ \\ & + \varepsilon^{(N+1)/4}\mathbf{c}_{N+1}^- + \varepsilon^{N/4}\mathbf{r}_N^+ + \varepsilon^{N/4}\mathbf{r}_N^-)\|_{(L^2)^3} \leq \gamma \varepsilon^{(N-1)/4} \|\zeta_0\|_{L^2} \end{aligned}$$

Au final on obtient

$$\|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon]\mathbf{A})\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \leq \gamma \varepsilon^{(N-1)/4} \|\zeta_0\|_{L^2}.$$

Et pour  $\varepsilon$  assez petit, on a :

$$\|\zeta_0\|_{L^2} \leq \|\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3}$$

puisque

$$\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \chi(z^+)\mathbf{U}_0^+ + \chi(z^-)\mathbf{U}_0^- + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$$

d'où

$$\|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon]\mathbf{A})\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \leq \gamma \varepsilon^{(N-1)/4} \|\bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3}.$$

■

## 5.8 Estimation d'énergie

Comme dans le cas de la membrane, on effectue une estimation d'énergie pour montrer qu'il n'existe pas de valeur propre plus petite que en  $\varepsilon$ .

**Théorème 5.19.** *Pour  $\mathbf{u}$  vecteur propre de l'opérateur  $\mathcal{K}[\varepsilon]$ , on a :*

$$a_{\mathcal{K}[\varepsilon]}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C_2 \varepsilon \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times H^2}^2$$

**Preuve.** Par définition, on a :

$$a_{\mathcal{K}[\varepsilon]}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a_m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \varepsilon^2 a_b(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Puisque  $a_b$  est une forme bilinéaire positive, il s'en suit :

$$a_{\mathcal{K}[\varepsilon]}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq a_m(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

et d'après la proposition 4.13,

$$a_{\mathcal{K}[\varepsilon]}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq a_m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{C_1}{k^4} \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2}.$$

Puisque l'on s'est placé dans le mode

$$k = C\varepsilon^{-1/4}$$

et  $\mathbf{u}$  étant un vecteur propre, il est  $C^\infty$  donc :

$$a_{\mathcal{K}[\varepsilon]}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq a_m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C_2\varepsilon \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times H^2}.$$

■

## 5.9 Fenêtre spectrale

### 5.9.1 Comparaison avec la plus petite valeur propre de la membrane

On a vu d'après le théorème 4.2 que pour la membrane, on a :

$$\Lambda_m[k] = \frac{1}{k^4} \Lambda_{m,4} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

avec

$$\Lambda_{m,4} = ER^2\mu_1.$$

Dans le chapitre 5, on a fait l'ansatz (5.2) :

$$k = C\varepsilon^{-1/4}$$

donc on peut écrire que :

$$\Lambda_m[\varepsilon] = C^{-4}ER^2\mu_1\varepsilon + o(\varepsilon).$$

D'après le théorème 5.19,

$$\Lambda_{\tilde{\mathcal{K}}}[\varepsilon] = \Lambda_{\tilde{\mathcal{K}},4}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

avec

$$\Lambda_{\tilde{\mathcal{K}},4} = \frac{ER^2}{C^4}\mu_1 + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4}.$$

donc dans la formule :

$$\Lambda_m[\varepsilon] = \Lambda_{m,4}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

$\Lambda_{m,4}$  est une fonction affine de  $\Lambda_{\tilde{\mathcal{K}},4}$ .

### 5.9.2 Détermination de $C$

On cherche la fenêtre spectrale la plus basse et on détermine le  $C$  correspondant. D'après le théorème 5.19,  $(\Lambda_4, \zeta_0)$  est solution de :

$$\left( \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \right) \zeta_0 = \Lambda_4 \zeta_0$$

avec les conditions au bord trouvées précédemment :

$$\zeta_0(\pm 1) = \partial_z \zeta_0(\pm 1) = 0.$$

Notons  $(\mu_i)_{i \geq 1}$  les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant du bilaplacien  $\partial_z^4$  sur  $[-1, 1]$  muni des conditions au bord  $\zeta(\pm 1) = \partial_z \zeta(\pm 1) = 0$  (Cf section 4.2). On a alors la relation :

$$\frac{C^4}{ER^2} \left( \Lambda_4 - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} \right) = \mu_i,$$

c'est-à-dire :

$$\Lambda_4 = \frac{ER^2}{C^4} \mu_i + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4}.$$

Puisque que l'on recherche la plus petite valeur propre  $\Lambda_4$ , on a :

$$\Lambda_4 = \frac{ER^2}{C^4} \mu_1 + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4}.$$

On regarde le minimum de cette fonction comme fonction de  $C$  :

$$g(C) = \frac{ER^2}{C^4} \mu_1 + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4}, \quad g'(C) = -\frac{4ER^2}{C^5} \mu_1 + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{4C^3}{3R^4}.$$

Le minimum de la fonction  $g$  est atteint pour :

$$\arg \min(g) = (3(1-\nu^2)R^6 \mu_1)^{1/8}.$$

Or au début du chapitre, on a fait l'ansatz (5.2) :

$$k = C\varepsilon^{-1/4}.$$

Donc puisque le mode angulaire  $k$  doit être un entier, on choisira  $C$  tel que  $C\varepsilon^{-1/4}$  soit un entier et qui minimise la fonction  $g$ .

# Chapitre 6

## Le problème de Lamé aux valeurs propres

### 6.1 Le problème de Lamé

On considère un domaine  $\check{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$  et une partie de son bord  $\check{\Gamma}_0$  sur laquelle il est encastré. On suppose que le domaine  $\check{\Omega}$  est constitué d'un matériau élastique, homogène et isotrope (voir [13]) de caractéristiques physiques le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .<sup>1</sup> On se place dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z) = (t^1, t^2, t^3)$  de  $\mathbb{R}^3$  et on désigne par  $\check{\mathbf{u}} = \check{u}_i dt^i$  la 1-forme correspondant au déplacement.

On définit l'espace des déplacements admissibles lié aux conditions d'encastrement par :

$$V := \{\check{\mathbf{u}} \in (H^1(\check{\Omega}))^3, \check{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \check{\Gamma}_0\}.$$

Dans la suite on utilise la sommation des indices répétés.

La formulation variationnelle du problème d'élasticité linéaire de Lamé aux valeurs propres s'écrit dans les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :

Trouver  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\check{\mathbf{u}} \in V \setminus \{0\}$  tel que :

$$\forall \check{\mathbf{v}} \in V, \int_{\check{\Omega}} A^{ijkl} e_{ij}(\check{\mathbf{u}}) e_{kl}(\check{\mathbf{v}}) dx dy dz = \lambda \int_{\check{\Omega}} \check{u}_i \check{v}^i dx dy dz$$

avec le tenseur de rigidité qui d'après la loi de Hooke a pour composantes contravariantes :

$$A^{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta^{ij} \delta^{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{kj}),$$

---

1.  $E$  et  $\nu$  sont reliés avec les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  par les relations :  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .



$\delta^{ij}$  désigne le symbole de Kronecker :  $\delta^{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon.  
Le tenseur linéarisé des déformations est défini par :

$$e_{ij}(\check{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\partial_i \check{u}_j + \partial_j \check{u}_i) \quad \text{dans les coordonnées cartésiennes.}$$

**Théorème 6.1.** *Le problème de Lamé est à résolvante compacte donc les valeurs propres sont discrètes avec un point d'accumulation en  $+\infty$ .*

### 6.1.1 Les coordonnées cylindriques

On utilise le système de coordonnées cylindriques :

$$(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$$

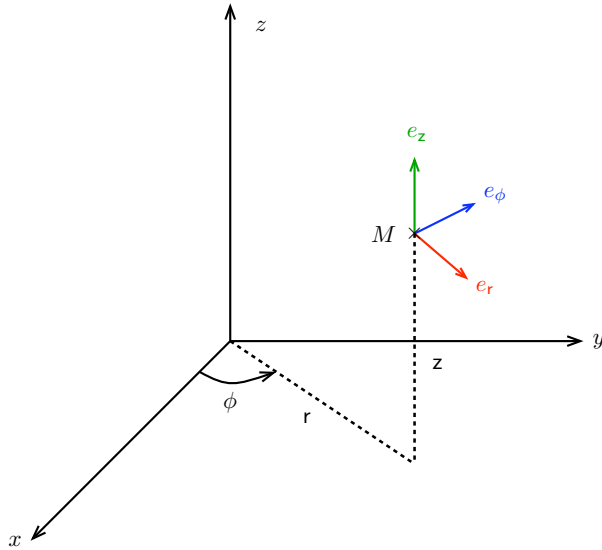


FIGURE 6.1 – Coordonnées cylindriques

et l'application associée :

$$\Phi : (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

On choisit comme vecteurs de base associés aux coordonnées cylindriques les vecteurs :

$$E_r := \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_\varphi := \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_z := \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La relation avec le système de coordonnées cylindriques normées  $(e_r, e_\varphi, e_z)$  du dessin précédent est :

$$E_r = e_r, \quad E_\varphi = r^2 e_\varphi, \quad E_z = e_z.$$

Le tenseur métrique  $a_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle, i, j = r, z, \varphi$  vaut :

$$a_{rr} = 1, \quad a_{r\varphi} = 0, \quad a_{\varphi\varphi} = r^2, \quad a_{rz} = 0, \quad a_{zz} = 1, \quad a_{z\varphi} = 0.$$

On note  $(\check{u}_r, \check{u}_\varphi, \check{u}_z)$  les composantes de  $\check{\mathbf{u}}$  dans la base  $(E_r, E_\varphi, E_z)$ , on a donc :

$$\begin{cases} \check{u}_r &= \cos(\varphi)\check{u}_1 + \sin(\varphi)\check{u}_2 \\ \check{u}_\varphi &= -\frac{1}{r}\sin(\varphi)\check{u}_1 + \sin(\varphi)\check{u}_2 \\ \check{u}_z &= \check{u}_3 \end{cases}.$$

Le tenseur de déformation s'écrit :

$$e_{ij}(\check{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla_i \check{u}_j + \nabla_j \check{u}_i)$$

avec la dérivée covariante :

$$\nabla_i \check{u}_j = \partial_i \check{u}_j - \Gamma_{ij}^k \check{u}_k$$

à partir des symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}a^{kl}(\partial_i a_{jl} + \partial_j a_{il} - \partial_l a_{ij}).$$

Ceux-ci valent :

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r$$

et les autres sont tous nuls.

La matrice gradient  $(\nabla_i \check{u}_j)$  s'écrit alors en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} \partial_r \check{u}_r & \partial_\varphi \check{u}_r - \frac{1}{r}\check{u}_\varphi & \partial_z \check{u}_r \\ \partial_r \check{u}_\varphi - \frac{1}{r}\check{u}_\varphi & \partial_\varphi \check{u}_\varphi + r\check{u}_r & \partial_z \check{u}_\varphi \\ \partial_r \check{u}_z & \partial_\varphi \check{u}_z & \partial_z \check{u}_z \end{pmatrix}.$$

La formulation variationnelle du problème d'élasticité de Lamé aux valeurs propres dans les coordonnées cylindriques s'écrit :

Trouver  $\lambda \in \mathbb{R}, \check{\mathbf{u}} \in V \setminus \{0\}$  tel que :

$$\forall \check{\mathbf{v}} \in V, \int_{\Omega} A^{ijkl} e_{ij}(\check{\mathbf{u}}) e_{kl}(\check{\mathbf{v}}) r dr d\varphi dz = \lambda \int \check{u}_i \check{v}^i r dr d\varphi dz$$

avec le tenseur de rigidité qui a pour formule dans les coordonnées cylindriques :

$$A^{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} a^{ij} a^{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{ik} a^{jl} + a^{il} a^{kj})$$

où  $(a^{ij})$  est l'inverse du tenseur métrique  $(a_{ij})$ .

L'élasticité isotrope respecte l'axisymétrie donc on peut utiliser les coordonnées  $(E_r, E_\varphi, E_z)$  pour exprimer le système de Lamé.

La formulation variationnelle du problème de Lamé aux valeurs propres dans les coordonnées cylindriques s'écrit :

Trouver  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\check{\mathbf{u}} \in V \setminus \{0\}$  tel que :

$\forall \check{\mathbf{v}} \in V$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{\check{\Omega}} \left[ \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (\partial_r \check{u}_r \partial_r \check{v}_r + \partial_z \check{u}_z \partial_z \check{v}_z + \frac{1}{r^4} (\partial_\varphi \check{u}_\varphi + r \check{u}_r) (\partial_\varphi \check{v}_\varphi + r \check{v}_r)) \right. \\
& + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} \partial_r \check{u}_r (\partial_\varphi \check{v}_\varphi + r \check{v}_r) + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \partial_r \check{u}_r \partial_z \check{v}_z + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} (\partial_\varphi \check{u}_\varphi + r \check{u}_r) \partial_r \check{v}_r \\
& + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} (\partial_\varphi \check{u}_\varphi + r \check{u}_r) \partial_z \check{v}_z + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \partial_z \check{u}_z \partial_r \check{v}_r + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} \partial_z \check{u}_z (\partial_\varphi \check{v}_\varphi + r \check{v}_r) \\
& + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} (\partial_r \check{u}_\varphi - \frac{1}{r} \check{u}_\varphi) (\partial_r \check{v}_\varphi - \frac{1}{r} \check{v}_\varphi) + \frac{1-\nu}{2} \partial_r \check{u}_z \partial_r \check{v}_z + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} (\partial_\varphi \check{u}_r - \frac{1}{r} \check{u}_\varphi) (\partial_\varphi \check{v}_r - \frac{1}{r} \check{v}_\varphi) \\
& + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \partial_\varphi \check{u}_z \partial_\varphi \check{v}_z + \frac{1-\nu}{2} \partial_z \check{u}_r \partial_z \check{v}_r + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \partial_z \check{u}_\varphi \partial_z \check{v}_\varphi \\
& + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} (\partial_r \check{u}_\varphi - \frac{1}{r} \check{u}_\varphi) (\partial_\varphi \check{v}_r - \frac{1}{r} \check{v}_\varphi) + \frac{1-\nu}{2} \partial_r \check{u}_z \partial_z \check{v}_r + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} (\partial_\varphi \check{u}_r - \frac{1}{r} \check{u}_\varphi) (\partial_r \check{v}_\varphi - \frac{1}{r} \check{v}_\varphi) \\
& + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \partial_\varphi \check{u}_z \partial_z \check{v}_\varphi + \frac{1-\nu}{2} \partial_z \check{u}_r \partial_r \check{v}_z + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \partial_z \check{u}_\varphi \partial_\varphi \check{v}_z \Big] r dr d\varphi dz \\
& = \lambda \int_{\check{\Omega}} [\check{u}_r \check{v}_r + \frac{1}{r^2} \check{u}_\varphi \check{v}_\varphi + \check{u}_z \check{v}_z] r dr d\varphi dz.
\end{aligned}$$

### 6.1.2 La réduction de la dimension du problème

On utilise la symétrie du domaine axisymétrique pour diminuer sa dimension. Pour cela on applique la théorie des séries de Fourier comme dans le chapitre 2.

## 6.2 Coques axisymétriques

On considère une surface axisymétrique  $\check{S}^\varepsilon$  obtenue à partir de la rotation d'une courbe :

$$z \mapsto f(z), \quad f \in C^\infty(I, \mathbb{R}_+^*)$$

autour de l'axe des  $z$  et épaissie de  $\varepsilon$  de chaque coté de la ligne génératrice selon la normale en chaque point. On pose  $\check{\Gamma}_0$  le bord de  $\check{S}^\varepsilon$  correspondant à  $z \in \partial I$ .

Le domaine méridien  $S$  a pour paramétrage :

$$X : (\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times I \rightarrow (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z).$$

La coque axisymétrique  $\check{S}^\varepsilon$  est définie par :

$$(\varphi, z, x_3) \in I \times [0, 2\pi] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow X(\varphi, z) + x_3 N(z, \varphi).$$

On note  $S^\varepsilon$  le domaine méridien obtenu à partir de  $\check{S}^\varepsilon$  en prenant  $\varphi = 0$ .  
On utilise les coordonnées cylindriques et on décompose le déplacement  $\check{\mathbf{u}}^k = (\check{u}_r^k, \check{u}_\varphi^k, \check{u}_z^k)$  selon la base duale des vecteurs  $E_r, E_\varphi, E_z$  de la partie précédente.

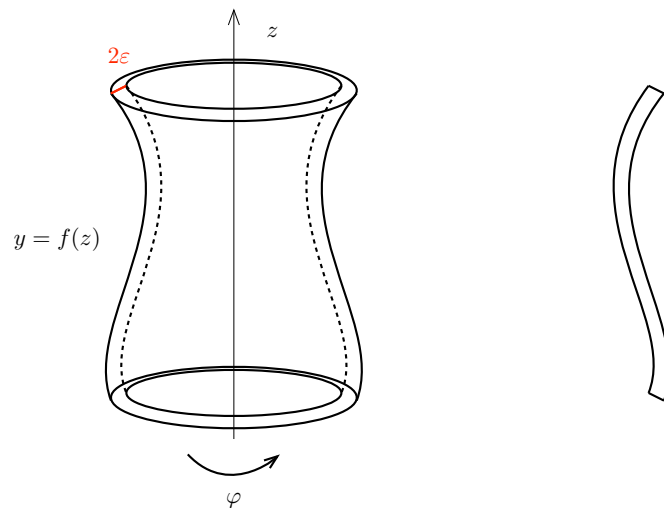


FIGURE 6.2 – Coque axisymétrique et son domaine méridien

La formulation variationnelle du problème de Lamé de mode de Fourier  $k$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-\nu^2} \int_{S^\varepsilon} \left( \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (r \partial_r \check{u}_r^k \partial_r \check{v}_r^k + r \partial_z \check{u}_z^k \partial_z \check{v}_z^k + \frac{k^2}{r^3} \check{u}_\varphi^k \check{v}_\varphi^k + \frac{1}{r} \check{u}_r^k \check{v}_r^k) \right. \\
& \quad + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} r (\partial_r \check{u}_r^k \partial_z \check{v}_z^k + \partial_z \check{u}_z^k \partial_r \check{v}_r^k) \\
& \quad + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} (\partial_r \check{u}_r^k \check{v}_r^k + \check{u}_r^k \partial_r \check{v}_r^k + \check{u}_r^k \partial_z \check{v}_z^k + \partial_z \check{u}_z^k \check{v}_r^k) + \frac{1-\nu}{2} \frac{k^2}{r} (\check{u}_r^k \check{v}_r^k + \check{u}_z^k \check{v}_z^k) \\
& \quad + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r} (\partial_r \check{u}_\varphi^k \partial_r \check{v}_\varphi^k - \frac{2}{r} \partial_r \check{u}_\varphi^k \check{v}_\varphi^k - \frac{2}{r} \check{u}_\varphi^k \partial_r \check{v}_\varphi^k + \frac{4}{r^2} \check{u}_\varphi^k \check{v}_\varphi^k + \partial_z \check{u}_\varphi^k \partial_z \check{v}_\varphi^k) \\
& \quad + \frac{1-\nu}{2} r (\partial_r \check{u}_z^k \partial_z \check{v}_r^k + \partial_z \check{u}_r^k \partial_r \check{v}_z^k + \partial_r \check{u}_z^k \partial_r \check{v}_z^k + \partial_z \check{u}_r^k \partial_z \check{v}_r^k) \\
& \quad + ik \left[ \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} \frac{1}{r^2} (\check{u}_\varphi^k \check{v}_r^k - \check{u}_r^k \check{v}_\varphi^k) + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r} (\check{u}_\varphi^k \partial_r \check{v}_r^k - \partial_r \check{u}_r^k \check{v}_\varphi^k + \check{u}_\varphi^k \partial_z \check{v}_z^k - \partial_z \check{u}_z^k \check{v}_\varphi^k) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1-\nu}{r^2} (\check{u}_\varphi^k \check{v}_r^k - \check{u}_r^k \check{v}_\varphi^k) + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r} (\check{u}_z^k \partial_z \check{v}_\varphi^k - \partial_z \check{u}_\varphi^k \check{v}_z^k + \check{u}_r^k \partial_r \check{v}_\varphi^k - \partial_r \check{u}_\varphi^k \check{v}_r^k) \right] r dr dz \\
& = \lambda \int_{S^\varepsilon} [\check{u}_r^k \check{v}_r^k + \frac{1}{r^2} \check{u}_\varphi^k \check{v}_\varphi^k + \check{u}_z^k \check{v}_z^k] r dr dz.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

**Remarque 6.2.** Dans cette formulation, la fonction  $f$  qui définit la ligne génératrice n'apparaît que dans le domaine  $S^\varepsilon$  et non dans les intégrands.

# Chapitre 7

## Résultats numériques pour le système de Lamé

### 7.1 Spectre de Lamé

L'opérateur unidimensionnel de Koiter comporte des dérivées d'ordre 2 qui impliquent l'utilisation d'éléments finis  $H^2$  conformes, ce qui n'était pas prévu dans MÉLINA. On a alors décidé d'implémenter numériquement le système bidimensionnel de Lamé.

Les calculs numériques sont implémentés à l'aide de la librairie d'éléments finis MÉLINA développée par Martin [33]. Le domaine géométrique est le rectangle  $2\varepsilon \times [-1, 1]$  que l'on découpe en quadrangles réguliers. On implémente la formulation variationnelle de Lamé (6.1) avec les conditions au bord  $u_z = u_\varphi = u_3 = 0$  en effectuant une interpolation de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto avec des éléments Q6.



FIGURE 7.1 – Maillage 2D

On prend les mêmes données que dans le cas de la membrane :

$$R = 2, \quad E = 1, \quad \nu = 0.3.$$

On observe tout d'abord la convergence des valeurs propres du système de Lamé à la fréquence  $k$  vers les valeurs propres de l'opérateur de membrane  $\mathbf{M}[k]$  lorsque la demi-épaisseur de la coque  $\varepsilon$  tend vers zéro et ce pour tout mode angulaire  $k$ . Ici nous représentons les quatre premières valeurs propres pour le mode  $k = 10$ .

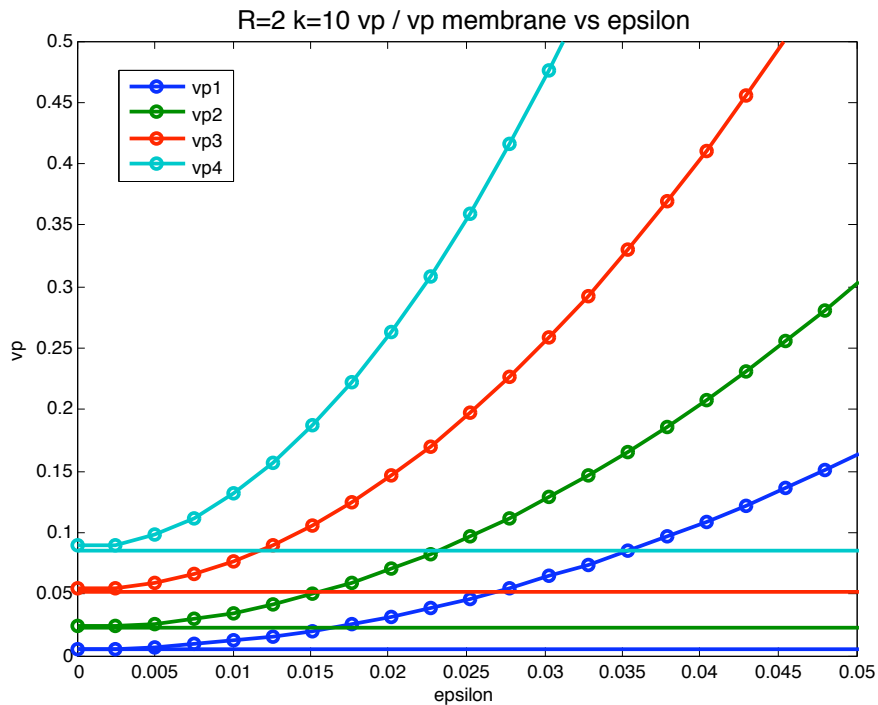


FIGURE 7.2 – Comportement des valeurs propres quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

## 7.2 Valeurs propres

Si on regarde à présent le comportement de la plus petite valeur propre du système de Lamé bidimensionnel en fonction de  $k$  et  $\varepsilon$ , on obtient une nappe tridimensionnelle. Et lorsque l'on fait une coupe, on a alors le graphique suivant : Les couleurs vont du bleu au rouge et correspondent aux valeurs extrêmes (de la plus petite à la plus grande) de la première valeur propre.

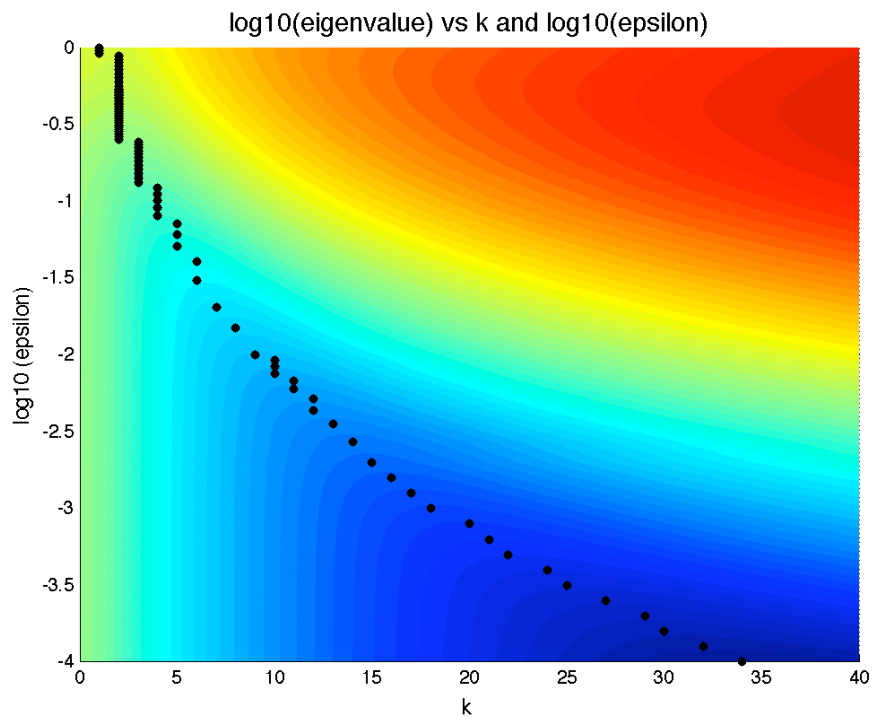


FIGURE 7.3 – Valeurs propres de Lamé



Les points noirs correspondent aux modes  $k$  atteignant la plus petite valeur propre pour un  $\varepsilon$  fixé.

Lorsque la demi-épaisseur  $\varepsilon$  est fixée, le mode angulaire  $k$  atteignant la plus petite valeur propre se comporte en  $\varepsilon^{-1/4}$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Ceci est en accord avec notre Ansatz théorique consistant à remplacer  $\varepsilon$  par  $Ck^{-4}$  dans le modèle de Koiter (5.2). On trace  $\arg \min_k(\lambda)$  en fonction de  $\varepsilon$  en diagramme  $\log - \log$  et on trouve une pente numérique de  $-0.26$ .

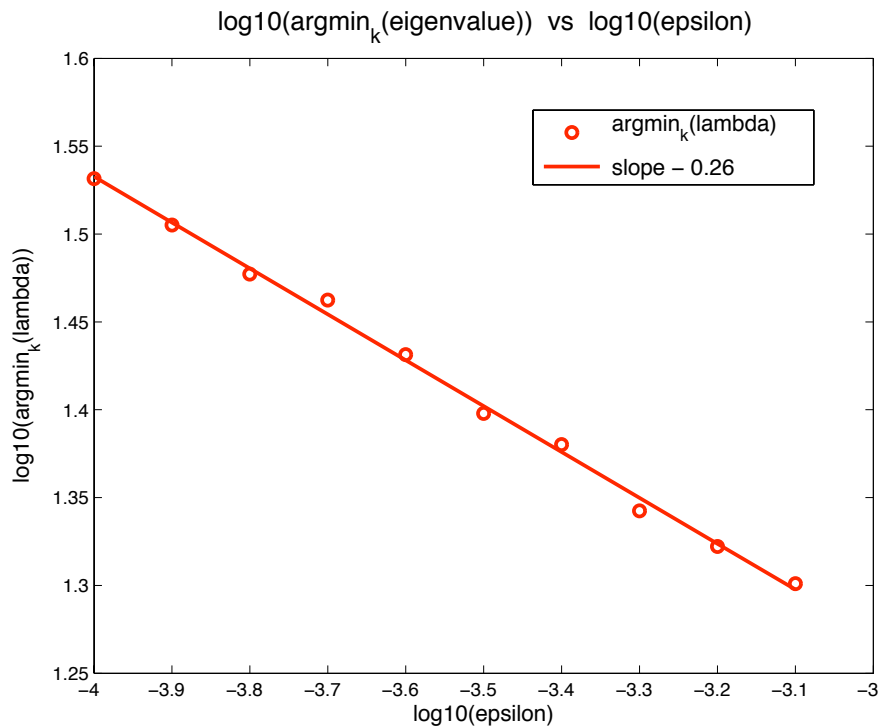


FIGURE 7.4 –  $k$  atteignant le minimum en fonction de  $\varepsilon$

Dans la formule :

$$k = C\varepsilon^\alpha,$$

on obtient numériquement les valeurs suivantes sur chacun des segments de la figure :

$\log(\varepsilon)$	-3.1, -3.2	-3.2, -3.3	-3.3, -3.4	-3.4, -3.5	-3.5, -3.6
$\alpha_{\text{num}}$	-0.21	-0.20	-0.37	-0.17	-0.33
$C_{\text{num}}$	4.40	4.73	1.24	5.99	1.69

$\log(\varepsilon)$	-3.6, -3.7	-3.7, -3.8	-3.8, -3.9	-3.9, -4
$\alpha_{\text{num}}$	-0.31	-0.14	-0.28	-0.26
$C_{\text{num}}$	2.06	8.27	2.58	3.00

Une régression linéaire donne les nombres suivants :

$$\alpha = -0.26, \quad C \simeq 3.07.$$

Les résultats théoriques étaient :

$$k = C\varepsilon^{-1/4} \quad \text{avec} \quad C = (3(1 - \nu^2)R^6\mu_1)^{1/8},$$

donc

$$\alpha = -0.25, \quad C \simeq 2.932.$$

Ceci confirme que l'Ansatz choisi permettait d'approcher la plus petite valeur propre de l'opérateur de Lamé dont l'opérateur de Koiter est un modèle simplifié.

Si l'on regarde à présent le comportement de la première valeur propre du système de Lamé à  $k$  fixé en fonction de la demi-épaisseur  $\varepsilon$ , on obtient la figure suivante : On

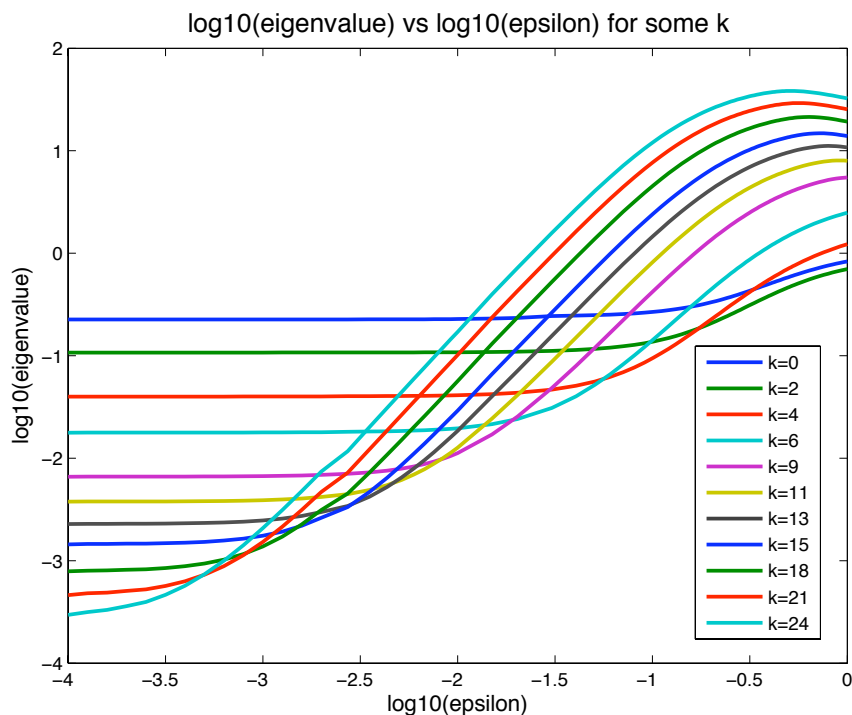
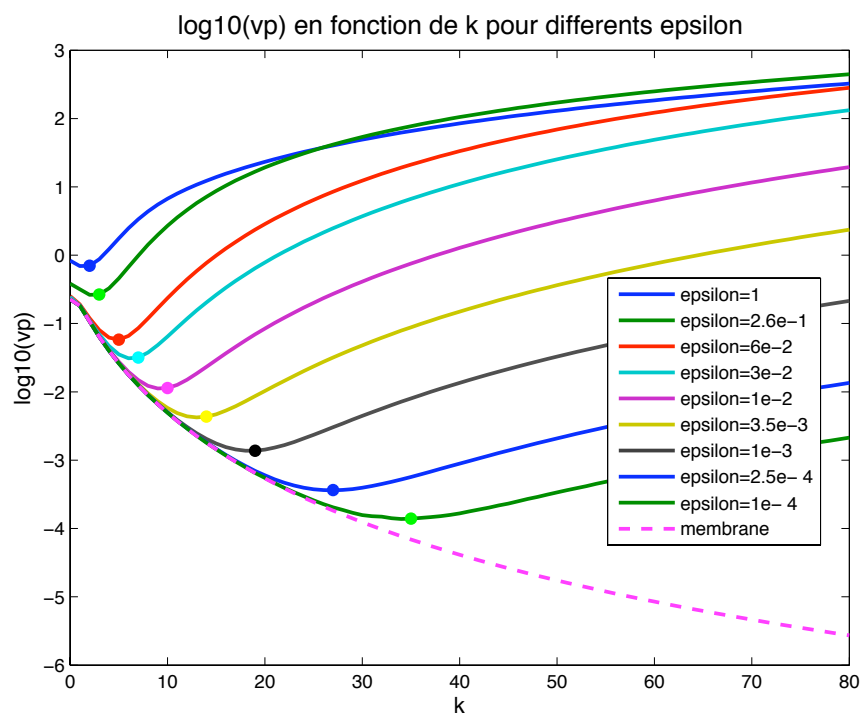


FIGURE 7.5 – Valeur propre de Lamé en fonction de  $\varepsilon$

remarque que la plus petite valeur propre est obtenue pour un mode angulaire  $k$  grand lorsque  $\varepsilon$  est de plus en plus petit.

FIGURE 7.6 – Valeur propre de Lamé en fonction de  $k$

Si l'on fait le contraire et que l'on étudie le comportement de la première valeur propre du système de Lamé en fonction de  $k$  pour différentes valeurs de demi-épaisseur  $\varepsilon$ , on a le graphe suivant : Les points correspondent aux modes angulaires atteignant la plus petite valeur propre.

Les résultats théoriques obtenus étaient :

$$k = C\varepsilon^{-1/4}$$

où  $C$  est tel que  $C\varepsilon^{-1/4} \in \mathbb{N}$  et qui soit le plus proche de la valeur

$$(3(1 - \nu^2)R^6\mu_1)^{1/8} \simeq 2.932.$$

On obtient alors le tableau suivant :

$\varepsilon$	1	$2.6e - 1$	$6e - 2$	$3e - 2$	$1e - 2$	$3.5e - 3$	$1e - 3$	$2.5e - 4$	$1e - 4$
$k_{th}$	3	4	6	7	9	12	16	23	29
$k_{num}$	2	3	5	6	9	13	18	27	34

La précision pour  $k$  est en  $\mathcal{O}(1)$  et pour  $C$  en  $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$ . On a dessiné la courbe pour la membrane qui se situe en dessous des autres courbes.

### 7.3 Vecteurs propres

On représente les vecteurs  $u_r(z) \cos(k\varphi)$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  et le mode angulaire  $k$  correspondant (c'est-à-dire atteignant la plus petite valeur propre). Le vecteur  $u_r(z)$  est le vecteur propre de la membrane qui approche le vecteur propre  $u_r(r, z)$  de Lamé sur  $[R - \varepsilon, R + \varepsilon]$ .

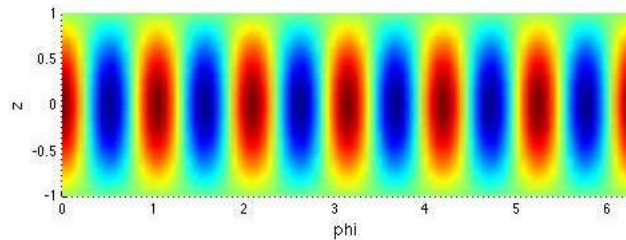


FIGURE 7.7 –  $\varepsilon = 10^{-1.5}$   $k = 6$

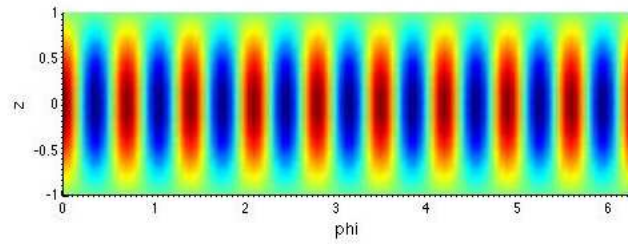


FIGURE 7.8 –  $\varepsilon = 10^{-2}$   $k = 9$

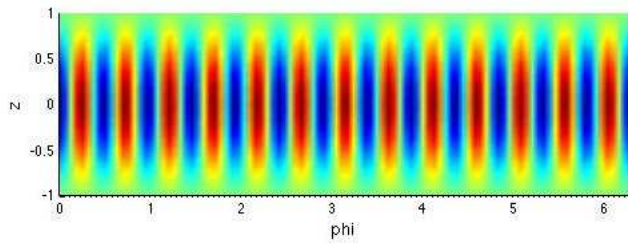


FIGURE 7.9 –  $\varepsilon = 10^{-2.5}$   $k = 13$

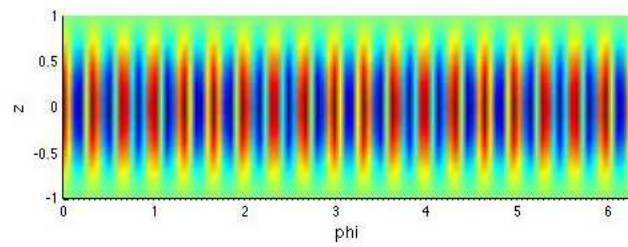


FIGURE 7.10 –  $\varepsilon = 10^{-3}$   $k = 19$

# Conclusions et Perspectives

Grâce aux théorèmes de réduction formelle et à leurs résolutions dans le cas d'une coque cylindrique encastrée, nous avons pu construire des quasimodes pour l'opérateur de membrane ainsi que pour l'opérateur de Koiter dans le régime  $k = C\varepsilon^{-1/4}$ . La dépendance en  $\varepsilon$  de la fréquence angulaire atteignant la plus petite valeur propre a mis en évidence une nouvelle occurrence de la sensibilité des valeurs propres. De plus les expériences numériques nous ont permis de justifier cet Ansatz et ont apporté une preuve supplémentaire de la bonne approximation du modèle tridimensionnel de Lamé par le modèle de Koiter.

Le théorème de réduction formelle 3.4 ainsi que les formules du théorème 3.5 étant valables dans le cas d'une coque axisymétrique quelconque, nous pouvons l'appliquer dans le cas d'une coque elliptique comme un tonneau et chercher à résoudre le problème scalaire correspondant.

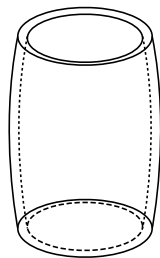


FIGURE 7.11 – Coque elliptique : un tonneau

Nous avons commencé ce travail et avons été amenés à effectuer un développement limité autour du point atteignant le minimum de la fonction  $L_2$  puis à distinguer le cas où il est atteint au bord et celui où il est atteint à l'intérieur du domaine. Il apparaît alors des couches limites dans le cas de la membrane, ce qui est nouveau par rapport au cas de la coque cylindrique. On effectue de la même manière que dans le chapitre 5 un Ansatz que l'on introduit dans l'opérateur de Koiter. Nos recherches sont encore à poursuivre. Nous avons également commencé à effectuer des expériences numériques

sur le modèle de la membrane et sur le problème de Lamé.

Le cas du cône ainsi que celui d'une coque hyperbolique comme une caténoïde restent à explorer.

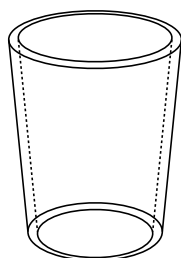


FIGURE 7.12 – Coque parabolique : un cône

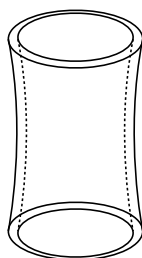


FIGURE 7.13 – Coque hyperbolique : une caténoïde

Le cône ressemble un peu au cas du cylindre et on peut essayer d'appliquer la même méthode que dans le cas précédent. Le cas hyperbolique est moins trivial car le minimum de la fonction  $L_2$  ne correspond pas à la base du spectre essentiel de  $\mathbf{M}$  qui est 0. Ces problèmes ouverts seraient très intéressants à explorer.

# Bibliographie

- [1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964) 35–92.
- [2] E. ARTIOLI, L. BEIRÃO DA VEIGA, H. HAKULA, C. LOVADINA. Free vibrations for some koiter shells of revolution. *Appl. Math. Lett.* **12** (2008 (21)) 1245–12480.
- [3] E. ARTIOLI, L. BEIRÃO DA VEIGA, H. HAKULA, C. LOVADINA. On the asymptotic behaviour of shells of revolution in free vibration. *Computational Mechanics* **44** (2009) 45–60.
- [4] A. G. ASLANYAN, V. B. LIDSKII. *The distribution of eigenfrequencies of thin elastic shells (Russian)*. Nauka, Moscow 1974.
- [5] F. ATKINSON, H. LANGER, R. MENNICKEN, A. A. SHKALIKOV. The essential spectrum of some matrix operators. *Math. Nach.* **167** (1994) 5–20.
- [6] L. BEIRÃO DA VEIGA, H. HAKULA, J. PITKÄRANTA. Asymptotic and numerical analysis of the eigenvalue problem for a clamped cylindrical shell. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **18 (11)** (2008) 1983–2002.
- [7] L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA. Asymptotics of shell eigenvalue problems. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342 (9)** (2006) 707–710.
- [8] L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA. An interpolation theory approach to shell eigenvalue problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **18 (12)** (2008) 2003–2018.
- [9] M. BERNADOU, P. G. CIARLET. Sur l’ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T.Koiter. In R.GLOWINSKI, J.L.LIONS, editors, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.134, pages 89–136. Springer-Verlag, Heidelberg 1976.
- [10] B. BUDIANSKY, J. L. SANDERS. On the “best” first-order linear shell theory. In *W. Prager Anniversary Volume*, Progress in Applied Mechanics, pages 129–140. Macmillan, New-York 1967.
- [11] A. CAMPBELL. Essential spectrum in vibrations of thin shells in membrane approximation : propagation of singularities. *Math. Methods in Appl.Sci.* **28 (5)** (2004) 505–524.
- [12] D. CHAPELLE, K. J. BATHE. *The finite element analysis of shells—fundamentals*. Computational Fluid and Solid Mechanics. Springer-Verlag, Berlin 2003.



- [13] P. G. CIARLET. *Elasticité tridimensionnelle*. Recherches en mathématiques appliquées. Masson, Paris 1986.
- [14] P. G. CIARLET. *Mathematical elasticity. Vol. III*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 2000. Theory of shells.
- [15] P. G. CIARLET, S. KESAVAN. Two-dimensional approximation of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* **26** (1981) 149–172.
- [16] P. G. CIARLET, V. LODS, B. MIARA. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. II. Justification of flexural shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1996) 163–190.
- [17] M. DAUGE, I. DJURDJEVIC, E. FAOU, A. RÖSSLE. Eigenmode asymptotics in thin elastic plates. *J. Maths. Pures Appl.* **78** (1999) 925–964.
- [18] M. DAUGE, E. FAOU. Koiter estimate revisited. *INRIA Research Report* (2004).
- [19] M. DAUGE, E. FAOU, Z. YOSIBASH. Plates and shells : Asymptotic expansions and hierarchical models. *Encyclopedia of Computational Mechanics* **1**, chap **8** (2004) 199–236.
- [20] M. DAUGE, I. GRUAIS, A. RÖSSLE. The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. *SIAM J. Math. Anal.* **31**(2) (1999/00) 305–345 (electronic).
- [21] M. P. DO CARMO. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall 1976.
- [22] E. FAOU. Développements asymptotiques dans les coques linéairement élastiques. Thèse, Université de Rennes 1 (2000).
- [23] E. FAOU. Développements asymptotiques dans les coques elliptiques : équations tridimensionnelles linéarisées. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333**(4) (2001) 389–394.
- [24] E. FAOU. Développements asymptotiques dans les coques elliptiques : modèle de Koiter. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333**(2) (2001) 139–143.
- [25] E. FAOU. Multiscale expansions for linear clamped elliptic shells. *Comm. Partial Differential Equations* **29**(11-12) (2004) 1799–1845.
- [26] J. GARRIGUES. Cours de statique des coques. On line documentation : URL <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/coques.html>.
- [27] R. P. GILBERT, G. C. HSIAO, M. SCHNEIDER. Free oscillations of thin elastic shells (russe). *Nauka, Moscou* (1979).
- [28] A. L. GOL'DENVEIZER, A. L. LIDSKII, P. E. TOVSTIK. *Free oscillations of thin elastic shells.*, volume 1. Nauka, Mosow 1979.
- [29] G. GRUBB, G. GEYMONAT. The essential spectrum of elliptic systems of mixed orders. *Math. Ann.* **227** (1977) 247–276.

- [30] F. JOHN. Refined interior equations for thin elastic shells. *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971) 583–615.
- [31] T. KATO. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1976.
- [32] W. T. KOITER. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells : I. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Ser.B* **73** (1970) 169–182.
- [33] D. MARTIN. Mélina, bibliothèque de calculs éléments finis. <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/index.html> (2008).
- [34] P. M. NAGHDI. Foundations of elastic shell theory. In *Progress in Solid Mechanics*, volume 4, pages 1–90. North-Holland, Amsterdam 1963.
- [35] S. A. NAZAROV. Two-term asymptotics of solutions of spectral problems with singular perturbation. *Math. USSR Sbornik* **69** (2) (1991) 307–340.
- [36] S. A. NAZAROV, I. S. ZORIN. Edge effect in the bending of a thin three-dimensional plate. *Prikl. Matem. Mekhan.* **53** (4) (1989) 642–650. English translation *J. Appl. Maths. Mech.* (1989) 500–507.
- [37] V. V. NOVOZHILOV. *Thin Shell Theory*. Walters-Noordhoff Publishing, Groningen 1959.
- [38] A. L. PELLERIN. Approche asymptotique et modélisation numérique des coques élastiques en dynamique moyenne fréquence. Thèse, Université Paris 6 1995.
- [39] J. SANCHEZ-HUBERT, E. SANCHEZ-PALENCIA. *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques*. Recherches en mathématiques appliquées. Masson, Paris 1997.
- [40] E. SANCHEZ-PALENCIA. Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II* **311** (1990) 909–916.
- [41] D. G. VASSILIEV. Two-term asymptotics of the spectrum of natural frequencies of a thin elastic shell. *Soviet Math. Dokl* **41** (1) (1990) 108–112.

# ANALYSE MODALE POUR LES COQUES MINCES EN REVOLUTION

## Résumé

Le sujet de cette thèse est l'étude du spectre de l'opérateur de Koiter pour des coques minces en fonction de leur épaisseur. On se restreint au cas de coques minces axisymétriques et encastrées. L'opérateur de Koiter se décompose en un opérateur de membrane indépendant de l'épaisseur et un opérateur de flexion. Le spectre de l'opérateur de Koiter est discret alors que celui de la membrane contient du spectre essentiel.

En utilisant la symétrie axiale du problème, on décompose les opérateurs en fonction de la fréquence angulaire  $k$ . Dans une démarche constructive, on cherche les solutions du problème aux valeurs propres comme séries formelles en puissances inverses de  $k$ . On obtient alors un théorème de réduction formelle général ramenant le problème à l'étude d'un problème scalaire.

On s'intéresse ensuite au cas d'une coque cylindrique et on exhibe une famille de quasimodes correspondant aux plus petites valeurs propres. Lorsque l'on rajoute l'opérateur de flexion, on sélectionne alors un mode  $k$  dépendant de l'épaisseur et il apparaît des couches limites. On exhibe également des quasimodes dans ce régime.

Des simulations numériques à l'aide de la librairie d'éléments finis Melina pour l'opérateur de membrane et pour le modèle sous-jacent de Lamé ont justifié nos résultats théoriques.

## MODAL ANALYSIS FOR THIN AXISYMMETRIC SHELLS

### Abstract

The subject of this thesis is the study of the Koiter operator for thin shells with respect to their thickness. Here we consider only the case of axisymmetric and clamped thin shells. The Koiter operator is the sum of a membrane operator which does not depend of the thickness and a bending operator. The spectrum of the Koiter operator is discrete whereas the one of the membrane operator contains essential spectrum.

Using the axial symmetry of the problem, we decompose the operators towards the angular frequency  $k$ . In a constructive way we are looking for a solution of the eigenvalue problem as a formal power series in the inverse of  $k$ . Therefore we obtain a formal reduction theorem which brings us to the study of a scalar problem.

Then we focus on the case of a cylindrical shell and we construct quasimodes corresponding to the smallest eigenvalues. When we add the bending operator, we select an angular frequency  $k$  which depends on the thickness and some boundary layers appear. We also construct quasimodes in this regime.

Numerical simulations for the membrane operator and for the underlying Lamé model made with the finite element library Melina have justified our theoretical results.